Skupina 8 - Metric independence number

Živa Kocijan, Lucija Koprivec

19.1.2024

1 Naloga

Najine naloge so:

- Among trees T on n vertices, find trees with maximum/minimum $mi(T)$.
- Find trees for which $dim(T) = mi(T)$. Here, $dim(T)$ is the classical vertex metric dimension.
- Find trees for which $dim(T)$–$mi(T)$ is maximum/minimum.
- Determine $mi(G)$ of a grid graph $G = P_k \square P_t$
- Determine $mi(G)$ of a hypercube $G = Q_d$

2 Osnovne oznake

- $mi(G)$, bo označevalo metrično neodvisno število grafa G.
- $dim(G)$, bo označevalo metrično dimenzijo grafa G.
- T, bo označevalo graf, ki je drevo. Torej povezan graf brez ciklov.
- P_k, graf ki je pot, na k vozliščih.
- $G = K \square L$, graf G, ki je podukt grafa K, L. Tu je množica točk $V(K \square L)$ definirana kot, kartezični produkt točk grafov $V(K) \times V(L)$. Množica povezav $E(K \square L)$ pa jemnožica vseh parov točk $(u, v)(x, y)$, za katerega velja bodisi $u = x$ in $(v, y) \in E(L)$ bodisi $(u, x) \in E(G)$ in $v = y$.
- Q_d, bo označeval graf, ki je tako imenovana hiperkocka. To je graf, ki ima 2^n vozlišč, $n2^{n-1}$ povezav in je $n - regularen$.

3 Jasen opis problema

Naj bo G graf. Točka x grafa G razreši dve točki u in v grafa G, če je $d(x, u) \neq d(x, v)$
Niz S oglišč G je razrešujoča množica za G, če sta vsaki dve različni točki iz G razrešeni z nekim ogliščem iz S. Najmanjša moč razrešujoče množice za G se imenuje metrična dimenzija G in jo označimo z $dim(G)$.
Naprej, naj bo $V_p = \{\{x, y\};\ x, y \in V(G)\}$ in neka njena podmonžica P je neodvisen razrešujoč nabor parov, če ni noben par iz P razrešen z istim ogliščem. Pri tem pa z $mi(G)$ označimo metrično neodvisno število grafa G, ki je moč največje množice P.
Pri tem lahko za množico V_p vzamemo tudi množico vseh parov različnih točk. Obe definiciji sta ekvivalentni, le da v prvem primeru vsebuje množica V_p, $n + \binom{n}{2}$ elementov, v drugem primeru pa $\binom{n}{2}$, kjer je n število ogljišč grafa.
V obeh primerih, sva vzeli neurejene pare vozlišč.
Če ne piše drugače, sva delali z množico vseh parov različnih vozlišč.
Določanje števila mi, je mogoče prevesti na linearen program.

S spreminjanjem lastnosti grafov, se tako spreminjajo tudi vrednosti mi in dim. Za razične skupne lastnosti grafov (drevo, hiperkocka, kartezični produkti poti...) sva iskali vrednosti in ujemanja, glede na obliko grafa, iskanih vrednosti.

4 Glavne ideje programa

4.1 Metrično neodvisno število

Glavna problem iskanja števila mi, je napisati linearni program v Sage-u. Tako dobimo, kot rešitev linearnega programa, metrično neodvisno število grafa, ki nas zanima.
Za ta namen sva definirali "matriko" A, ki ima vrednosti 0 ali 1. Zanjo velja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, kjer je n število vozlišč grafa, m pa je število neurejenih parov grafa, torej $m = \binom{n}{2}$.

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{če je } i\text{-to vozlišče razrešeno z } j\text{-tim parom vozlišč} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{1}$$

Nato sva iskali maksimum funkcije

$$\sum_{j \in V_p} y_j,$$

pri čemer morajo veljati omejitve

$$\sum_{j \in V_p} A_{j,i} y_j \leq 1,$$

za vsako vozlišče v našega grafa, torej imava v linearnem programu n omejitev. Pri tem je vrednost nove spremenljivke $y_j = 0$ ali 1; 1 v primeru, da par j pripada podmnožici P, množice V_p.
Iskali sva torej največjo moč množice P, za katero noben par točk, ni razrešen z istim vozliščem.

4.2 Metrična dimenzija

Pri iskanju metrične dimenzije, sva s pomočjo funkcije `subsets`, ustvarili množico neurejenih parov različnih vozlišč. Nato sva za vsak par poiskali vozlišča grafa, ki par razrešijo.
Za vsako podmnožico vozlišč grafa, sva preverili, ali razreši vse pare vozlišč ali ne, in izmed podmnožic, ki razrešijo vse pare vozlišč, izračunali moč najmanjše.
To je hkrati vrednost metrične dimenzije grafa.

5 Zbiranje podatkov

S pomočjo okolja Sage, sva napisali dve funkciji.
Ena je spisana kot linearni program (opisan zgoraj) za izračunavanje neodvisnega metričnega števila za poljuben dani graf.
Drugo sva uporabili za izračunavanje metrične dimenzije poljubnega danega grafa.
Nato sva s pomožnimi funkcijami generirali razične vrste grafov in na njih računali iskane vrednosti.
Pri prvih treh primerih sva se ukvarjali z drevesi. Tako sva pri različnih številih vozlišč drevesa iskale "obliko" grafa, kjer je mi čim večji oziroma čim manjši in le to vrednost "primerjali" z dim.
V četrtem primeru sva generirali grafe kartezičnih produktov dveh poti. V petem sva ugotavljali dim za hiperkocke in sva tako generirali hiperkocke različnih dimenzij.
Tako sva iz generiranih primerov na "manjših" grafih in dobljenih vrednosti dim ter mi, poizkušale sklepati, kakšne so vrednosti na "vseh" grafih, katere zahteva najina naloga.

6 Rezultati

6.1 Prva alineja

Pri drevesih v teroriji grafov na n vozliščih je možno opaziti,

$$\text{število povezav} = n - 1.$$

Pri iskanju minimalnega in maksimalnega $mi(G)$, se lahko sprva omejimo z $0 \leq mi(G) \leq dim(G)$. Vemo pa da vsak par vozlišč v povezanem grafu razrešita vsaj točki para. Primer: $d(u, v) \neq d(v, v)$ in $d(u, u) \neq d(v, u)$. Tako se lahko pri drevesih T omejimo še nekoliko bolj in velja

$$mi(T) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

kjer je n število vozlišč drevesa.
Izkaže se, da je za vsa možna drevesa, s številom vozlišč od dva do štiri, vrednost največjega in najmanjšega mi enaka 1. Pri višjem številu vozlišč se pojavi vzorec; minimalno vrednost mi imajo drevesa oblike poti. Za drevesa z lihim številom vozlišč imajo največjo vrednost mi drevesa oblike zvezde (”centralno” središče, povezano z vsemi ostalimi), za drevesa s sodim številom vozlišč pa imajo največjo vrednost mi drevesa oblike dvojne zvezde (dve ”centralni” središči, vsako povezano s polovico preostalih vozlišč).

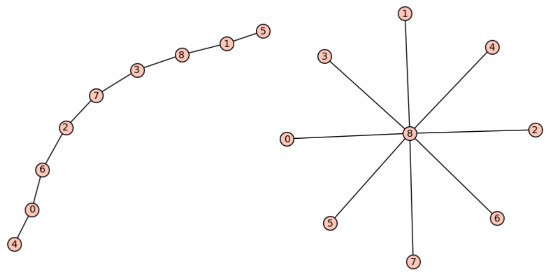

Figure 1: Primer dreves z 9 vozlišči. Prvi oblike poti (najmanjši mi), drugi oblike zvezde (največji mi).

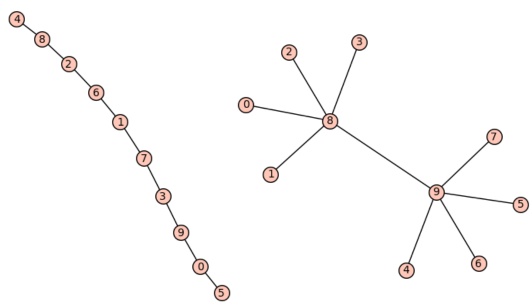

Figure 2: Primer dreves z 10 vozlišči. Prvi oblike poti (najmanjši mi), drugi oblike dvojne zvezde (največji mi).

6.2 Druga alineja

V tem primeru sva iskali drevesa, za katere sta vrednosti dim in mi enaki. Taka so samo drevesa z dvema vozliščema, povezanima z eno povezavo. Vsa drevesa z več vozlišči imajo ti dve vrednosti različni

6.3 Tretja alineja

Kot omenjeno že v prejšnji točki, imajo najmanjšo oz. ničelno razliko med vrednostima dim in mi drevesa z dvema vozliščema. Za taka drevesa je tudi največja razlika ničelna. Pri drevesih s tremi ali štirimi vozlišči sta maksimalna in minimalna razlika med dim in mi enaki in sicer je razlika za drevesa s tremi vozlišči enaka 1 in za drevesa s štirimi vozlišči enaka 2. Pri drevesih z več vozlišči se pojavi vzorec; najmanjša razlika med dim in mi se pojavlja pri drevesih oblike zvezde (liho število vozlišč) oziroma dvojne zvezde (sodo število vozlišč), medtem ko je največja razlika pri drevesih oblike poti. Opazimo, da je ta vzorec obraten v primerjavi z najmanjšo/največjo vrednostjo mi, ki je opisana pri prvi alineji.

6.4 Četrta alineja

Kartezični produkti grafov imajo lastnost asiociativnosti in komutativnosti. Tako je graf $P_n \Box P_m$ izomorfen grafu $P_m \Box P_n$.
V programu sva tako vzeli produkte grafov, ki so predstavljeni v spodnji tabeli. Zaradi komutativnosti sva pri iskanju vrednosti mi, delale z grafi oblike $P_m \Box P_n$, kjer je $n \leq m$.
Za primerjavo sva vrednost mi računali na dva načina.
Prvi način:
Za množico V_p sva vzeli, kot prej, neurejene pare različnih vozlušč.
Drugi način:
Za množico V_p sva vzeli, poleg neurejenih parov različih vozlišč, tudi pare oblike $\{\{x, x\};\ x \in V(G)\}$.
Graf $P_1 \Box P_1$ nima nobenega para vozlišč, zato je $mi = 0$. Produkti grafov oblike $P_1 \Box P_n$, kjer je $n > 1$ imajo $mi = 1$, vsi drugi pa 2. Če primerjamo vrednost mi-ja na prvi in na drugi način, lahko opazimo, da se razlikuje za število vozlišč danega grafa.

dolžina krajše poti	dolžina daljše poti	mi na prvi način	mi na drugi način
1	1	0	1
1	2	1	3
1	3	1	4
1	4	1	5
1	5	1	6
1	6	1	7
2	2	2	6
2	3	2	8
2	4	2	10
2	5	2	12
2	6	2	14
3	3	2	11
3	4	2	14
3	5	2	17
3	6	2	21
4	4	2	18
4	5	2	22
5	5	2	27
5	6	2	32
6	6	2	38
7	7	2	51
8	8	2	66

Tabela 1: Tabela za produkt poti.

6.5 Peta alineja

Podobno kot pri četrti alineji sva primerjali dve vrednosti.
Hiperkocka Q_1 ima 2 vozlišča, torej samo en par različnih vozlišč in je $mi = 1$, druge hiperkocke pa imajo $mi = 2$. Če primerjamo vrednosti na drug način je ponovno možno opziti, da se mi-ja razlikujera za število vozlišč.

hiperkocka	mi na prvi način	mi na drugi način
Q_1	1	3
Q_2	2	6
Q_3	2	10
Q_4	2	18
Q_5	2	34
Q_6	2	66

Tabela 2: Tabela za hiperkocke.