

a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n -ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Konvenció szerint $0! = 1$

c) Legyen $0 \leq k \leq n$ a binomiális együttható

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ahol a faktoriális [\(1\)](#) szerint definiáljuk.

d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

2: Deretmináns

a) Legyen

$$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n-ig.

b) Egy n-edrendű *permutáció* σ bijekció $[n]$ -ből $[n]$ -be. Az n-edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n -nel jelöljük.

c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverzióknak nevezünk egy (i, j) párt ha $i < j$, de $\sigma i > \sigma j$.

d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := |\{(i, j) | i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\}|$$

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$ -es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$$

3. Logikai azonosság

Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

\mathcal{X}	$\overline{\mathcal{X}}$			
0	1			
1	0			
\mathcal{X}	\mathcal{Y}	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot.

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)).$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk.

$$x$$

$$\begin{aligned} \rightarrow y &= \overline{x} \vee y \\ \overline{x \vee y} &= \overline{x} \wedge \overline{y} \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \quad (1) \end{aligned}$$