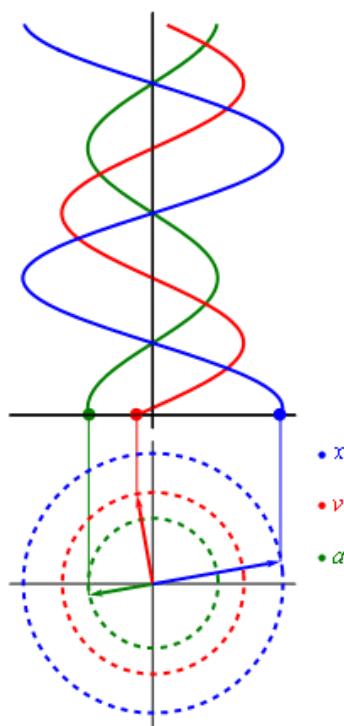


Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

А. И. Митюхин

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ



МИНСК 2019

Целью изучения дисциплины является:

- овладение общими методами цифровой обработки сигналов и изображений;
- овладение методами решения конкретных задач из отдельных разделов цифровой обработки сигналов и изображений;
- овладение математическими алгоритмами цифровой обработки сигналов и изображений, используемыми в коммуникационных системах и сетях;
- изучение свойств дискретных ортогональных преобразований и применения их в цифровой обработке сигналов и изображений.

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов и изображений – это область науки и техники, в которой изучаются общие для разных дисциплин алгоритмы и средства обработки сигналов и изображений на основе математических методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Цифровая обработка сигналов – это технология, охватывающая огромный набор приложений, включая коммуникацию, космические исследования, медицину, археологию и развлечения и многое другое. Сложнейшие алгоритмы обработки сигналов и соответствующее аппаратное оборудование распространены в широком диапазоне систем: от узкоспециализированных военных и промышленных до недорогой широко распространенной бытовой электроники. Поскольку системы связи все менее становятся зависимыми от проводов и более мобильными и многофункциональными, значение сложной цифровой обработки сигналов в таких системах продолжает расти. При взгляде в будущее становится ясно, что роль цифровой обработки сигналов в обществе становится все более заметной благодаря сближению средств коммуникации, компьютеров и обработки сигналов, как в потребительской сфере, так и в доле грандиозных индустриальных и правительственные проектов.

До 1960-х годов технология обработки сигналов была почти исключительно непрерывной, аналоговой.

Основное отличие ЦОС от классической теории состоит в том, что сигнал в ЦОС – это числовая последовательность. Обработка осуществляется с помощью операций над числами. Имеется много примеров, когда обрабатываемые сигналы являются последовательностями. В современных приложениях используют дискретные технологии для обработки непрерывных сигналов. В этом случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательность отсчётов, т.е. дискретный сигнал. После дискретной обработки её результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал. Для многих систем предпочтительны операции в режиме реального времени, т.е.

такие операции, при которых отсчёты реакции системы вычисляются с той же частотой, что и отсчёты дискретизации непрерывного сигнала. Дискретная обработка непрерывных сигналов в режиме реального времени – типичная ситуация в системах связи, радиолокации, гидролокации (сонарах), аудио- и видеосистемах, кодировании и усилении, биомедицине и других многочисленных областях применения. Проигрыватель компакт-дисков (CD – плеер) – иной пример, где входной обработанный сигнал хранится на компакт-диске, а выходной сигнал выдается в реальном времени.

Большинство из традиционных систем обработки оперирует поданным на вход сигналом и получает другой выходной сигнал. Другой важный класс задач обработки сигналов касается интерпретации сигналов. Цель такой задачи состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного.

1. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

1.1. Преимущества и эффективность цифровой обработки сигналов

Главные преимущества ЦОС в сравнении с аналоговой обработкой можно свести к следующим.

1. Стабильность характеристик.

В аналоговой аппаратуре применяют специальные меры для поддержания постоянства тех или иных технических характеристик системы. Требование стабильности характеристик должно учитывать влияние изменения атмосферного давления, температуры, химических примесей, ударов, вибраций, старения, изменения питающих напряжений, условий распространения радиоволн и многое другое. В этом случае для поддержания стабильности используют специальные материалы со стабильными свойствами, с малыми коэффициентами линейного расширения, высокоточные пассивные радиоэлементы. Например, для достижения заданной стабильности частоты генерирования колебаний применяются:

- специальная схемотехника;
- термокомпенсация;
- термостабилизация.

Технология производства аналоговых устройств, как правило, использует специальные покрытия, поглотители влаги, амортизаторы, заливку специальными составами и прочее.

2. Принципиально достижимая более высокая прогнозируемая и гарантированная точность обработки сигналов.

Возможность реализации сложных алгоритмов обработки сигналов, которые трудно, а часто даже невозможно реализовать с помощью аналоговой техники.

3. Большой динамический диапазон обрабатываемых сигналов.

4. Возможность гибкой оперативной перестройки структуры и параметров устройств и систем.

Возможность реализации принципа «адаптации» или самонастройки, то есть изменения алгоритма обработки сигналов без физической перестройки устройства (например, зависимости от вида сигнала, поступающего на вход фильтра). Техническая реализация ЦОС сравнительно просто осуществляется как на основе аппаратных, так и программных средств.

5. Высокая надёжность, малые вес и габариты.

6. Технически просто обеспечивается ремонтопригодность и взаимозаменяемость отдельных устройств или систем.

7. Цифровые методы особенно эффективны для обработки низкочастотных сигналов.

Размеры пассивных элементов на низких частотах чрезмерно громоздки. Отдельные блоки многоканальных систем, например, АЛУ, можно сделать общими для всех каналов. Широкое применение находит ЦОС в системах с оптимальной обработки сигналов. Например, при использовании низкоскоростного помехоустойчивого кодирования длительное накопление слабых сигналов легко реализуется с помощью методов ЦОС. Алгоритмы ЦОС позволяют уменьшить энергетические, временные и частотные «затраты» на передачу цифровых сигналов (по сравнению с передачей аналоговых сигналов). Возможность одновременной обработки нескольких сигналов.

К недостаткам цифровых методов можно отнести:

- большую сложность по сравнению с аналоговыми устройствами и пока еще более высокую стоимость;
- не столь высокое, как хотелось бы, быстродействие;
- невозможность устранения специфических погрешностей, вызванных дискретизацией, квантованием сигнала и округлениями в процессе вычислений.

Сегодняшний специалист стоит перед выбором надлежащей комбинации аналоговых и цифровых методов для решения задачи обработки сигналов. Невозможно обработать физические аналоговые сигналы, используя только цифровые методы, так как все датчики (микрофоны, термопары, тензорезисторы, пьезоэлектрические кристаллы, головки накопителя на магнитных дисках и т.д.) являются аналоговыми устройствами. Поэтому, некоторые виды сигналов требуют наличия цепей нормализации для дальнейшей обработки сигналов аналоговым или цифровым методом. В действительности, цепи нормализации сигнала – это аналоговые процессоры,

выполняющие:

- усиление сигналов в измерительных и предварительных (буферных) усилителях);
- обнаружение сигнала на фоне шума высокоточными усилителями синфазного сигнала;
- динамическое сжатие диапазона (логарифмическими усилителями, логарифмическими ЦАП и усилителями с программируемым коэффициентом усиления);
- фильтрацию (пассивную и активную).

1.2. Последовательность операций цифровой обработки сигналов

Цифровая обработка сигналов связана с представлением сигнала в виде последовательности чисел. Это означает, что исходный аналоговый сигнал преобразуется в исходную последовательность чисел, которая процессором (вычислителем) по заданному алгоритму преобразуется в другую последовательность чисел, однозначно соответствующую исходной. Далее из полученной новой последовательности формируется результирующий сигнал.

Последовательность операций ЦОС можно представить рис. 1.1.

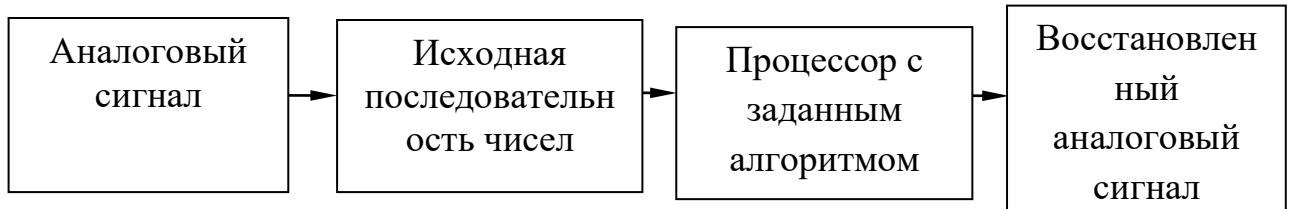


Рис. 1.1. Последовательность операций ЦОС

Перечисленные преобразования должны производиться по определённым схемам. Обобщённая схема ЦОС показана на рис. 1.2.

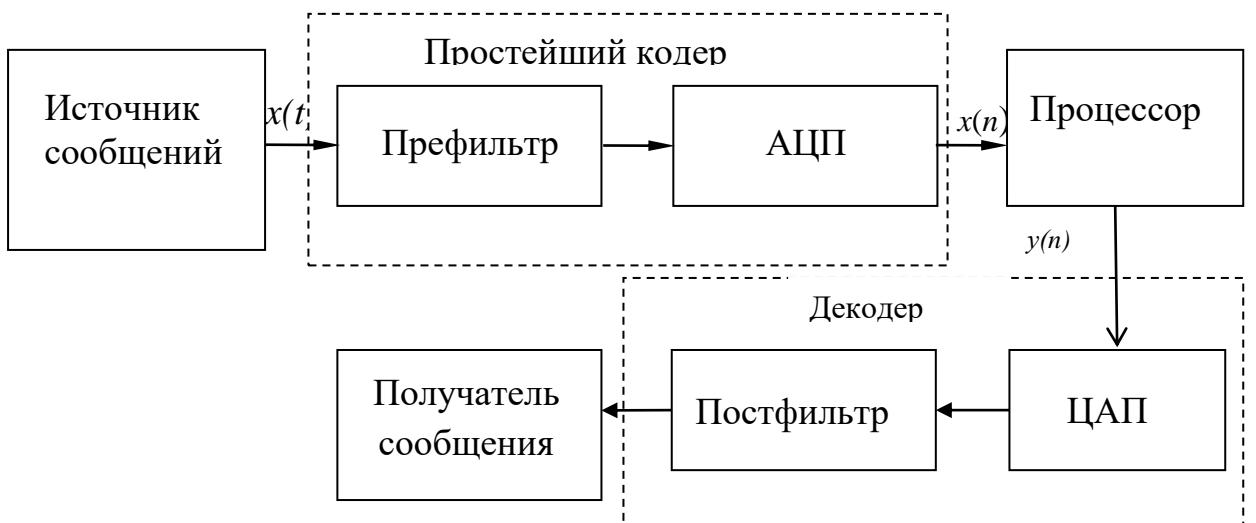


Рис. 1.2. Схема ЦОС

Замечания

1. Префильтрация обеспечивает удаление определённых спектральных составляющих лежащих выше некоторого значения. Префильтрация осуществляется аналоговым фильтром низких частот (ФНЧ), получившим название антиэлайсингового, поскольку он предотвращает искажения спектра типа наложения (aliasing), которые возникают в спектре цифрового сигнала при недостаточной частоте дискретизации. Во временной области эффект наложения означает невозможность точного восстановления аналогового сигнала по его отсчётам. Антиэлайсинговый фильтр формирует аналоговый сигнал с подавленными верхними спектральными составляющими в полосе задержания, начиная с частоты W . Это даёт основание считать сигнал практически ограниченным по частоте и неподверженным эффекту наложения при частоте дискретизации не менее $2W$.

2. Постфильтрация обеспечивает интерполяцию восстанавливаемого сигнала. В качестве постфильтра можно использовать аналоговый сглаживающий фильтр нижних частот.

3. Кодер может включать в себя устройства, устраниющие избыточность информационного сигнала для реализации сжатия. В простейшем случае в качестве кодера может быть использован АЦП. В качестве декодера – ЦАП.

1.3. Способы отсчёта значений сигнала

Математические сигналы – это функции одной или более независимых переменных.

Например, речевой сигнал представляется как функция времени. Типичный речевой сигнал $x(t)$ напоминает либо квазипериодическое колебание с изменяющейся основной частотой в сравнительно широком диапазоне, либо шум. Речь – это нестационарный процесс. Напомним, свойства такого процесса меняются с течением времени.

Изображение (фотография) – это функция яркости от двух пространственных переменных.

Независимая переменная может быть как непрерывной, так и дискретной. Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов.

1.3.1. Классификация сигналов

По роли в передачи конкретной информации сигналы могут быть разделены на полезные и мешающие (помехи). Полезные сигналы переносят

заданную информацию, а помехи искажают её, хотя, может быть, и переносят другую информацию.

По степени определенности ожидаемых значений все сигналы можно разделить на случайные сигналы и детерминированные сигналы.

Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. В качестве основных характеристик случайных сигналов принимают:

- а) закон распределения вероятности (относительное время пребывания величины сигнала в определенном интервале);
- б) спектральное распределение мощности сигнала.

Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени может быть точно определено. Детерминированные сигналы могут быть периодическими и непериодическими.

Периодическим называется сигнал, для которого выполняется условие

$$x(t) = x(t + kT), -\infty < t < \infty, \quad (1.1)$$

где k – любое целое число, T – период, являющийся конечным отрезком времени.

Среди детерминированных сигналов особое место занимают испытательные сигналы, необходимость в существовании которых обусловлена потребностями испытания характеристик разрабатываемых электронных устройств. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется на практике для оценки частотных свойств устройств (фильтров) различного назначения.

Пример 1.1. Периодическое гармоническое колебание

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t),$$

представленное в декартовой системе координат, показано на рис 1.3.а.

Ниже, (рис 1.3.б) изображено колебание, но с начальным фазовым сдвигом.

$$x_-(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \sin(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right), \quad (1.2)$$

где: x_m – амплитуда,

$\omega_0 = 2\pi f_0 \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ – круговая частота,

$f_0 = \frac{1}{T_0} [\text{с}^{-1}], [\text{Гц}]$ – линейная частота,

T_0 – период,

$\varphi_0 = \frac{\Delta T}{T_0} 2\pi [\text{рад}]$ – начальная фаза колебания.

Периодическое гармоническое колебание (1.2) можно изобразить в виде вектора в полярной системе координат, рис. 1.3.в.

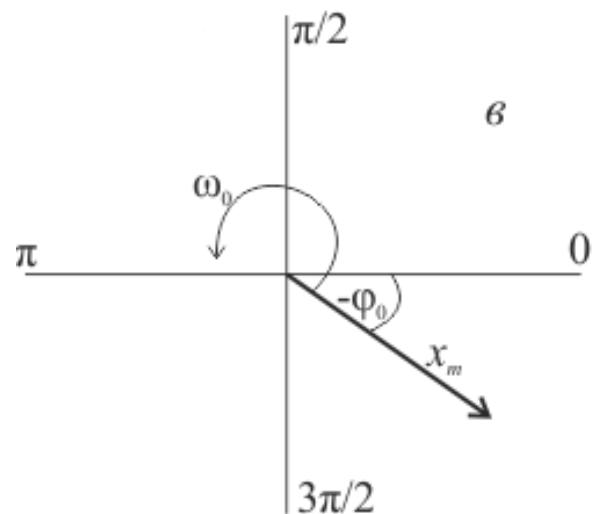
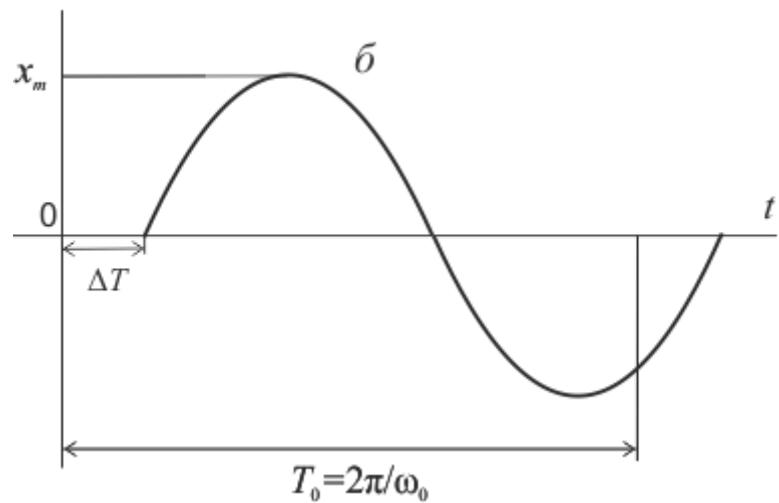
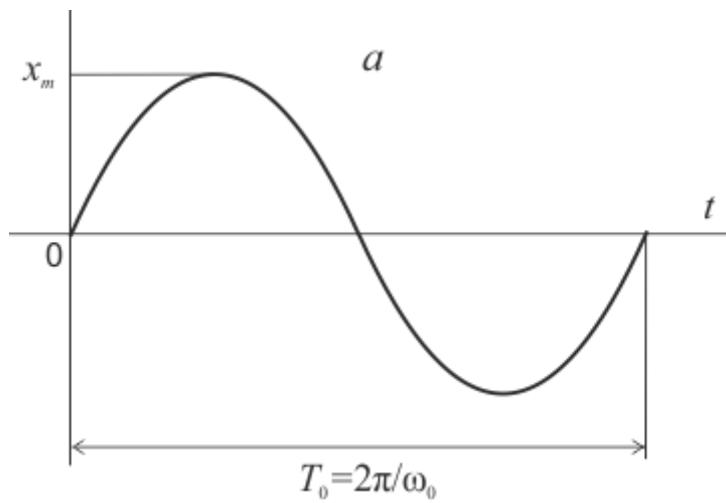


Рис.1.3. Представления гармонического сигнала

В момент времени $t = 0$ вектор x_m имеет значение начальной фазы равное $(-\varphi)$ рад.

По способу отсчёта значений сигнала во времени сигналы делятся на:

- непрерывные;
- дискретные;
- цифровые.

Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией $x(t)$, задаётся на непрерывных промежутках, и обычно называется аналоговым. Аналоговый сигнал может быть действительным или комплексным. Интервал изменения переменной времени может быть конечным или бесконечным. Для непрерывного (континуального) это несчётное множество. Например, $[0, t]$ или $[0, \infty)$. Выходные сигналы датчиков являются отражением некоторых физических процессов. Они, как правило, непрерывны, поскольку большинство физических процессов непрерывны по своей природе. Аналоговые сигналы достаточно просто генерировать и обрабатывать, однако они позволяют решать относительно простые технические задачи. Работа современных информационных систем основана на использовании дискретных и цифровых сигналов.

Дискретным называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по состоянию. Он задаётся решётчатой функцией $x_d(nT)$ дискретной переменной n . Величина $x_d(nT)$ – это отсчёт сигнала в точке n , указывающей порядковый номер отсчёта (рис. 1.4).

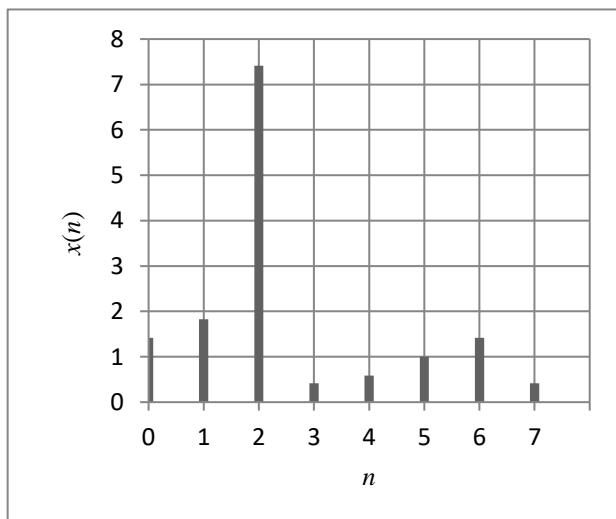


Рис. 1.4. Дискретный сигнал

Для дискретного и цифрового сигналов это счётное множество, включающее N точек – интервал $[0, N-1]$. Интервал T называется периодом дискретизации, а обратная величина $f_d = \frac{1}{T}$ – частотой дискретизации. Дискретный сигнал может быть действительным или комплексным. Его характеристиками являются энергия и мощность

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2, P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2,$$

которые могут интерпретироваться как энергия и мощность ступенчатых огибающих дискретных сигналов (их континуальных аналогов).

Дискретные сигналы ортогональны, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = 0,$$

где знак * обозначает комплексное сопряжение.

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны так как

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2.$$

Цифровая обработка сигналов требует, чтобы дискретные сигналы были квантованы по величине, чтобы их амплитуда принимала только целочисленные фиксированные значения. В этом случае дискретные сигналы называются цифровыми. Цифровой сигнал дискретен как во времени, так и по состоянию. Цифровой сигнал также описывается решетчатой функцией $x(nT)$, которая принимает конечное число значений на некотором интервале $x'_d \leq x_d \leq x''_d$. Эти значения называются уровнями квантования, а соответствующая функция – квантованным сигналом. Квантование производится с целью получения конечной последовательности чисел. При попадании отсчёта сигнала в пределы того или иного шага квантования производится его округление до уровня квантования, соответствующего этому шагу (рис. 1.5).

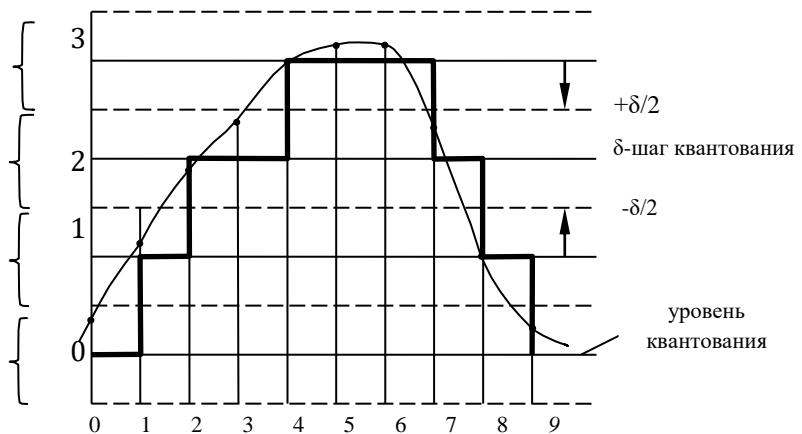


Рис. 1.5. Квантованный сигнал

Цифровой сигнал $x(nT)$ отличается от дискретного $x_d(nT)$:

$$\zeta_Q(nT) = x_d(nT) - x(nT),$$

где $\zeta_Q(nT)$ – ошибка квантования или искажения, возникающие за счёт квантования). Максимальная ошибка квантования при использовании округления равна половине шага квантования,

$$\text{Max}|\sigma| = \frac{\delta}{2}.$$

На выходе АЦП (рис 1.5) формируется последовательность двоичных чисел $\{x\}$, соответствующая значениям $x_d(nT)$, т.е.

$$x(nT) = \{000\ 001\ 010\ 010\ 011\ 011\ 011\dots\}.$$

В результате получается цифровой образ сигнала, который называется волновой формой (Waveform). Другое название оцифрованного сигнала – сэмпл (Sampl). Соответственно, процесс цифрового преобразования называется сэмплированием. Волновые формы (сэмплы) могут храниться в памяти, на жестком диске в файлах различных форматов.

Точность цифрового преобразования определяют динамический диапазон сигнала и соотношение сигнал – шум. Показатель динамического диапазона зависит от длины используемого двоичного кода или битового разрешения (Bit Resolution) шума квантования δ . С увеличением уровней квантования повышается амплитудное разрешение сигнала, точность его воспроизведения.

Таблица 1.1

Зависимость динамического диапазона от разрядности квантования

Разрядность квантования (бит)	Уровень качества	Число уровней квантования (U_1)	Динамический диапазон $20 \log_{10} \frac{U_1}{\delta}$ [db]
8	Телефония	256	48
16	CD	65 536	96
24	DVD	16 777 216	144
32	HDA (High Definition)	4 294 967 296	192

При изучении цифровых систем удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n.$$

Нормированное время \hat{t} есть номер n отсчета дискретного или цифрового сигнала. Для описания дискретного (цифрового) сигнала могут быть использованы равнозначные обозначения:

$$x(nT), N_1 \leq n \leq N_2; \quad (1.3)$$

$$x(n), N_1 \leq n \leq N_2. \quad (1.4)$$

Обозначение (1.3) применяется при равномерном расположении отсчётов; обозначение (1.4) может применяться при неравномерном расположении отсчётов.

1.4. Формы представления детерминированных сигналов

Модели сигналов в виде функции времени предназначены, в первую очередь, для анализа формы сигналов. При решении задач прохождения сигналов сложной формы через какие-либо устройства такая модель сигнала часто не совсем удобна и не позволяет понять суть происходящих в устройствах физических процессов.

Сигналы представляют набором элементарных (базисных) функций, в качестве которых наиболее часто используют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Выбор именно таких функций обусловлен тем, что они являются, с математической точки зрения, собственными функциями инвариантных во времени линейных систем (систем, параметры которых не зависят от времени), т.е. не изменяют своей формы после прохождения через эти системы. В результате сигнал может быть представлен множеством амплитуд, фаз и частот гармонических функций, совокупность которых называется спектром сигнала.

Теория цифровой обработки сигналов связана с описанием и обработкой временных и частотных последовательностей. Существуют две формы представления произвольного детерминированного сигнала: временное и частотное (спектральное). Первая форма представления основана на математической модели сигнала в виде функции времени t :

$$x \Rightarrow x(t),$$

вторая – на математической модели сигнала в виде функции частоты $\omega = 2\pi f$.

1.4.1. Ряд Фурье в тригонометрической форме

Если сложный или произвольный сигнал (1.1) периодический, т.е.

$$x(t) = x(t + kT), -\infty < t < \infty,$$

то его математической моделью может служить ряд Фурье в тригонометрической форме

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + a_3 \sin(3\omega_0 t) \dots + a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) + \dots \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) значение $n = 0, 1, 2, \dots$ и любой сигнал можно представить на временном интервале $t + kT$ бесконечным рядом Фурье. Поясним введенные обозначения и составляющие ряда.

$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период повторения сигнала,

$\omega_0 = 2\pi f_0$ – основная круговая частота сигнала,

a_0 – среднее значение сигнала за период T ,

$a_1 \cos(\omega_0 t), b_1 \sin(\omega_0 t)$ – составляющие частотой ω_0 ($f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) (по другому их называют основными гармониками),

$a_2 \cos(2\omega_0 t), b_2 \sin(2\omega_0 t)$ – составляющие сигнала частотой $2\omega_0$ или вторые гармоники.

Таким образом, сигнал $x(t)$ описывается бесконечным набором гармонических колебаний (гармоник).

В общем виде ряд Фурье (1.5) записывают в виде

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad (1.6)$$

где $\{a_n, b_n\}$ – множество коэффициентов Фурье состоит из действительных чисел.

Для того, чтобы ряд (1.6) сходился, необходимо, чтобы сигнал $x(t)$ удовлетворял следующим условиям:

– $x(t)$ за период T имеет конечное число разрывов;

– $x(t)$ за период T имеет конечное число максимумов и минимумов.

Ранее было показано, что компоненты $a_n \cos(n\omega_0 t)$ и $b_n \sin(n\omega_0 t)$ представляются в виде векторов в полярной системе координат (см. рис. 1.3.в). Очевидно, эти составляющие соответствуют проекциям некоторого вектора длиной (амплитудой) c_n в полярной системе координат, рис. 1.6.

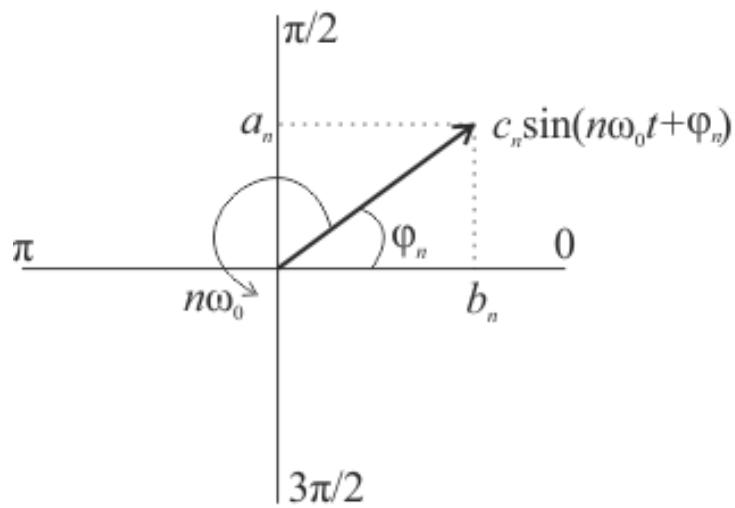


Рис. 1.6. Графическое изображение гармонического колебания
 $x(t) = c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

Из рис. 1.6 следует, что ряд (1.6) можно записать более компактно в виде

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n). \quad (1.7)$$

Замечание. Выражение (1.7) можно также получить, используя известную тригонометрическую формулу линейного сложения гармонических функций

$$a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) = c \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\text{где } c = \sqrt[2]{a^2 + b^2}, \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right).$$

В момент времени $t = 0$ вектор \mathbf{c}_n имеет значение начальной фазы

$$\varphi_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}.$$

Значение амплитуды вектора \mathbf{c}_n равно

$$|\mathbf{c}_n| = c_n = \sqrt[2]{a_n^2 + b_n^2}.$$

Множество $\{a_n, b_n\}$ коэффициентов Фурье образуют спектр Фурье периодического сигнала $x(t)$. Спектр такого сигнала определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt. \end{aligned}$$

Отметим, что имеются другие записи ряда Фурье, например,

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n),$$

$$\text{где } c_n = \sqrt[2]{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}.$$

1.4.2. Ряд Фурье в комплексной форме

На практике наряду с синусоидальной функцией в отображении сигналов, широко применяется комплексная экспоненциальная функция вида

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (1.8)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $\omega t \in \mathbb{R}$.

Выражение (1.8) известно, как формула Эйлера (Euler, Leonard, швейц. математик и физик, (1707 – 1783)). Формула отражает связь между действительными тригонометрическими функциями и комплексной экспоненциальной функцией $e^{j\omega t}$. Рис. 1.7 иллюстрирует представление функции $e^{j\omega t}$.

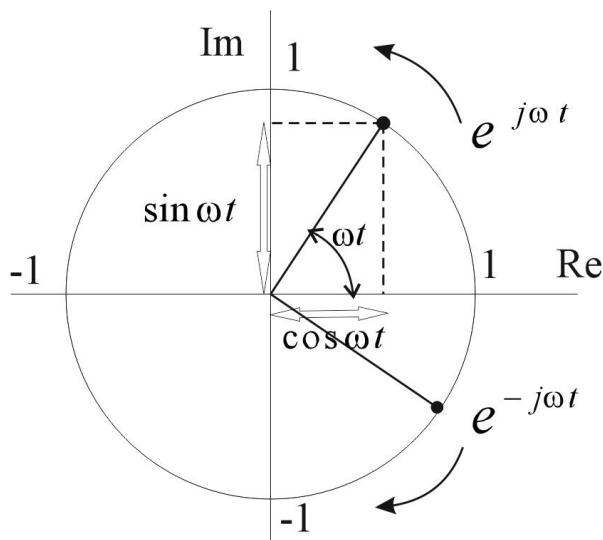


Рис. 1.7. Графическое представление функции $e^{j\omega t}$

Функция $x(t) = e^{j\omega t}$ отражает положение комплексного числа $e^{j\omega t}$ (точки) на единичной окружности в комплексной плоскости. Прямая, соединяющая эту точку с началом координат, образует с действительной осью угол $\varphi = \omega t$. Точка движется по окружности против часовой стрелки со скоростью $\omega \frac{[рад]}{с}$. Выражение $x(t) = e^{j\omega t}$ – это единичный вектор, угол которого линейно нарастает со временем со скоростью $\omega \frac{[рад]}{с}$. Выражение $x(t) = e^{-j\omega t}$ соответствует вектору, угол которого нарастает в противоположном направлении с той же скоростью. Поскольку

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = (e^{j\omega t})^*,$$

где $(e^{j\omega t})^*$ обозначает комплексно-сопряженную функцию, $e^{-j\omega t}$ и $e^{j\omega t}$ сопряженные функции.

Следовательно, сигналы вида $x_1(t) = e^{-j\omega t}$ и $x_2(t) = e^{j\omega t}$ изменяются с одинаковой частотой. Понятие отрицательной частоты следует из данных представлений. Сумма этих сигналов выражает действительную функцию времени

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} = \\ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) + \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) = 2 \cos(\omega t). \quad (1.9)$$

Разность $x_2(t)$ и $x_1(t)$ выражает действительную функцию времени

$$x_2(t) - x_1(t) = e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = \\ \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) - \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) = 2j \sin(\omega t). \quad (1.10)$$

С учетом (1.9) и (1.10) получаем выражения для действительных гармонических функций

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2} \text{ и} \quad (1.11)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}. \quad (1.12)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{-j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2}$$

Далее используем формы (1.10 – 1.12) для записи ряда Фурье в комплексной форме. Подставляя (1.10 – 1.12) в выражение (1.6), получаем

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} j b_n (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t}) - j b_n (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-jn\omega_0 t} + a_n e^{jn\omega_0 t} - j b_n e^{j\omega t} + j b_n e^{-j\omega t} = \\ = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t} + (a_n + j b_n) e^{-jn\omega_0 t}. \quad (1.13)$$

Введем обозначения $c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$ и $c_n^* = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$.

Выражение (1.13) запишем в виде

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}.$$

Причем эта модель существует только в области комплексных функций:

$$X \Rightarrow X(j\omega).$$

Обе формы представления сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.14)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.15)$$

При использовании линейной частоты $f = \frac{\omega}{2\pi}$ преобразования Фурье имеют следующий вид:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1.16)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf) e^{j2\pi f t} d\omega. \quad (1.17)$$

Из формул (1.14) – (1.17) следует, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте.

Пример 1.2. Временное представление гармонического колебания имеет следующий вид:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

или $x(t) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right).$

Для представления такого колебания в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ амплитуда сигнала равна x_m , а начальная фаза равна φ_0 :

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \begin{cases} x_m, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0; \end{cases} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} \varphi_0, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Значение $x_m = x(\omega_0)$ называется амплитудным спектром гармонического колебания, а $\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$ называются фазовым спектром гармонического колебания. Их совокупность (1.18) – просто спектр.

1.5. Представление дискретных последовательностей

Пусть задана произвольная времененная дискретная последовательность $x(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N - 1)\}$. Такая числовая последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных цифровых единичных импульсов. Цифровой единичный импульс (отсчёт) (рис. 1.8а), определяется следующим образом:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

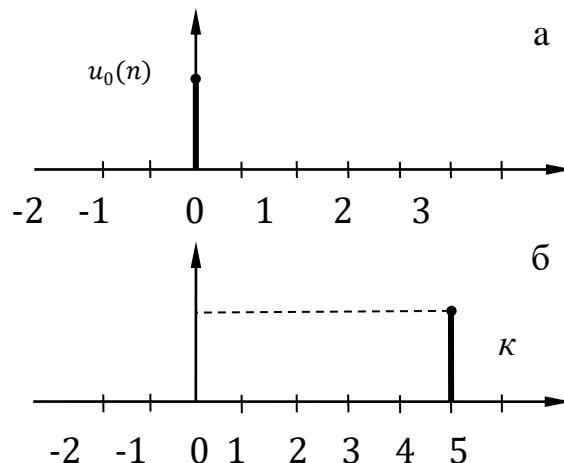


Рис. 1.8. Цифровой единичный импульс

В цифровых системах этот импульс играет такую же роль, как и дельта-функция Дирака $\delta(t)$ (рис. 1.9) в аналоговых системах. По определению δ -функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

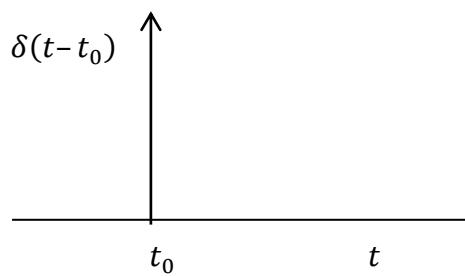


Рис. 1.9. Символическое изображение дельта-функции

Дельта-функция равна нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента и принимает в точке $t = 0$ бесконечно большое значение. Площадь под кривой, ограниченной δ -функцией, равна единице. Различие между цифровым единичным импульсом и δ -функцией состоит в том, что цифровой единичный импульс является физически реализуемым сигналом, тогда как аналоговый единичный импульс $\delta(t)$ рассматривается только как обобщённая функция. На рисунке 1.8б изображён единичный отсчёт, задержанный на k интервалов дискретизации, который определяется как

$$u_0(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \quad (1.20)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В общем случае любой отсчёт произвольной дискретной последовательности записывается в вид

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u_0(n - k), \quad (1.21)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пример 1.3. Задана дискретная последовательность

$$x(n) = \{1,41; 1,83; 7,41; 0,41; 0,58; 1; 1,41; 0,41\}$$

(рис. 1.10). Записать выражение для определения отсчёта с номером $n = 6$.

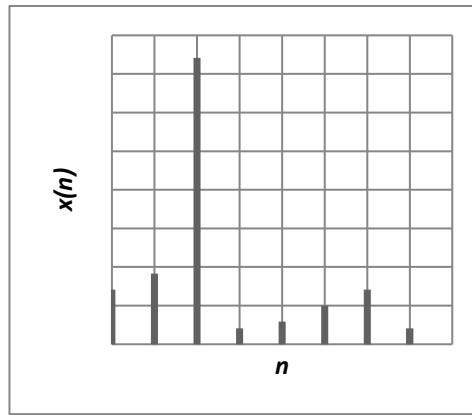


Рис. 1.10. Дискретная последовательность

Значение отсчёта данной последовательности определяется как

$$\begin{aligned} x(6) &= \sum_{k=0}^7 x(k)u_0(6 - k) = x(0)u_0(6 - 0) + x(1)u_0(6 - 1) + \\ &x(2)u_0(6 - 2) + x(3)u_0(6 - 3) + x(4)u_0(6 - 4) + x(5)u_0(6 - 5) + \\ &x(6)u_0(6 - 6) + x(7)u_0(6 - 7) = x(6)u_0(0) = x(6) = 1,41. \end{aligned}$$

Упражнение 1.1. Данна дискретная последовательность $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\} = \{1; 1,5; -1,2; 4; -4,8\}$. Записать выражение, определяющее значение отсчёта последовательности с номером $n = 3$.

1.6. Теорема дискретизации

Дискретизация представляет собой процедуру взятия мгновенных значений непрерывного сигнала $x(t)$.

Положение 1. Задан сигнал, энергия которого полностью содержится внутри полосы частот от 0 до W Гц; сигнал дискретизируется с интервалами T секунд.

Теорема 1.1. Исходный сигнал может быть полностью восстановлен при частоте дискретизации $f_d = \frac{1}{T}$ не менее $2W$.

В западной научной литературе принято считать, что принцип дискретизации был высказан Найквистом (H. Nyquist) в 1928 году. По советским источникам теорему дискретизации сформулировал и доказал академик В. А. Котельников в 1931 году. Страгое определение и использование в качестве теоремы дано Шенном (C. E. Shannon) в 1948 году.

Положение 2. Задан сигнал (приближенно) с частотным спектром, ограниченным частотой W Гц, существующий t секунд.

Теорема 2.2. Сигнал может быть полностью восстановлен (описан) $N = 2Wt$ отсчётыами.

Замечание. Определение сигнала как приближённое введено для математической корректности. По самой природе преобразования Фурье никакая функция не может быть ограничена по частоте. Существует концептуальная трудность строгого частотного ограничения реального сигнала частотой W . В силу конечной длительности сигнала (рис. 1.10) он имеет бесконечно широкий спектр. В моменты возникновения-окончания сигнала временные интервалы Δt его формирования очень малы и, следовательно, ΔW очень велико.

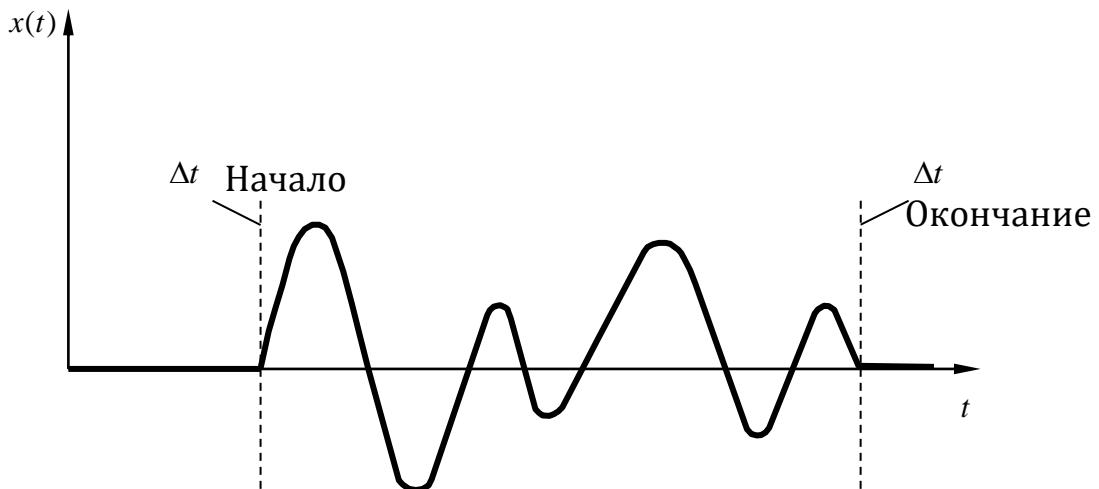


Рис. 1.10. Сигнал

Фактически бесконечность спектра является препятствием для преобразования сигнала $x(t)$ в цифровую форму. Если $W \rightarrow \infty$, дискретизация невозможна. Тем не менее, в спектре любого конечного

сигнала есть такие высшие составляющие, значения которых имеют незначительные амплитуды, и потому ими можно пренебречь без заметного искажения самого сигнала. Ограничение спектра до частоты $W = \frac{f_d}{2}$ осуществляется антиэлайсинговым фильтром. Например, для телефонного сигнала полосой $W = 3,4$ кГц минимальная стандартная частота его дискретизации $f_d = 8$ кГц. Временной интервал дискретизации равен $T = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125$ мкс.

Для нестационарных процессов интервал дискретизации $T = \frac{1}{f_d}$ определяется временем корреляции τ_k сигналов, а именно

$$T \leq \tau_k.$$

Нормированная функция автокорреляции $r(\tau)$ сигнала конечного периода T_c в непрерывной временной области определяется формулой

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} x(t)x(t + \tau)dt,$$

где τ – сдвиг по времени сигнала $x(t)$. Если рассогласования нет, $\tau = 0$. Если корреляция процессов выражено слабо, то

$$|r_{xx}(\tau)| \leq 1, \text{ при любых } \tau.$$

На практике широко используется и функция взаимной корреляции двух сигналов $x(t)$ и $h(t)$:

$$r_{xh}(\tau) = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} x(t)h(t + \tau)dt.$$

Функция корреляции описывает важное свойство процесса (сигнала), а именно, изменение отклика на сигнал при изменении временного положения сигнала.

Корреляционная функция – это показатель сходства или общих свойств двух сигналов. Значение 0 указывает на нулевую корреляцию. Это означает, что сигналы независимы, например, если один из сигналов случаен. Малые значения $r(\tau)$ указывают на незначительную корреляцию.

Нормированная взаимная корреляция $r(n)$ двух последовательностей данных $x(n)$ и $h(n)$ записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(k + n), n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.22)$$

Этот математический аппарат находит очень широкое применение в радиолокации, радионавигации, обработке изображений, в сфере компьютерного зрения, дистанционного зондирования со спутников, в которых сравниваются данные с различных изображений, в реализации технического контроля качества выпускаемых изделий, в климатологии и в др. приложениях.

Стационарный случайный процесс – статистические свойства его не изменяются при переносе начала отсчёта времени (или другого аргумента, от которого зависит рассматриваемый процесс).

Нестационарный процесс – анализ осуществляется лишь по одной реализации процесса. Различают нестационарные процессы с переменным во времени значением (рис. 1.11а), и с переменным во времени средним квадратом (рис. 1.11б).

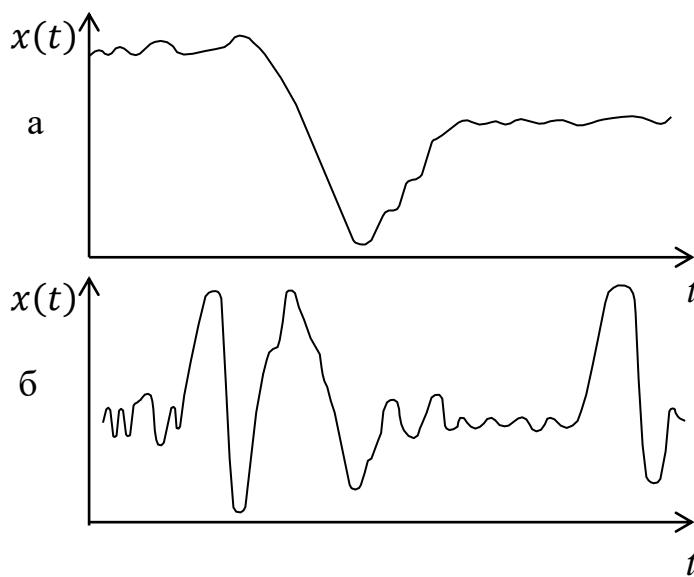


Рис. 1.11. Нестационарные процессы

Теоретически точное восстановление сигнала после дискретизации может быть выполнено с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной характеристикой и частотой среза $f_s = \frac{f_d}{2}$, однако, практически это исключено, так как для создания фильтра потребуется затратить бесконечное время. По теореме дискретизации максимальная частота аналогового сигнала не должна превышать половина частоты дискретизации f_d , следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать в диапазоне $[0, \frac{f_d}{2}]$ или $[0, \frac{\omega_d}{2}]$.

1.7. Нормированная частота

При анализе дискретных сигналов удобно пользоваться нормированной частотой:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d} = 2\pi fT \text{ или } \hat{f} = \frac{f}{f_d} = f.$$

В соответствии с теоремой дискретизации обрабатываемый сигнал ограничивается частотной областью $\omega = (0, \omega_{\max})$,

$$\hat{\omega}_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{f_d} = \frac{2\pi f_{\max}}{f_d}, f_{\max} = \frac{f_d}{2}.$$

$$\hat{\omega}_{\max} = \frac{2\pi f_d}{2f_d} = \pi, \hat{f}_{\max} = \frac{f_{\max}}{f_d} = \frac{f_d}{2f_d} = 0,5.$$

Тогда дискретный сигнал можно рассматривать в области нормированных частот $\hat{\omega} \in [0, \pi]$ или $\hat{f} \in [0, 0,5]$. Применение нормированных частот позволяет исследовать частотные характеристики дискретных систем и спектры дискретных сигналов в единой полосе частот. Для ЦОС важны не абсолютные значения частоты сигнала и частоты дискретизации, а их отношение, т. е. значение нормированной частоты. Покажем это на примере.

Пример 1.4. На рис. 1.12 изображена дискретная синусоида $x(n) = \sin \frac{2\pi n}{N}$, где $N = 8, n = 0, 1, \dots, N - 1$. Дискретная синусоида связана с непрерывным гармоническим сигналом выражением

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \sin(2\pi f_0 nT),$$

где T – период дискретизации. Сравним две дискретные синусоиды, каждая из которых имеет следующие значения параметров:

$$x_1(t) = \sin(2\pi f_1 nT_1) = \sin(2\pi f_1 n \frac{1}{f_{d_1}}), f_1 = 5 \text{ Гц}, f_{d_1} = 25 \text{ Гц}. \quad (1.23)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi f_2 nT_2) = \sin(2\pi f_2 n \frac{1}{f_{d_2}}), f_2 = 5 \text{ кГц}, f_{d_2} = 25 \text{ кГц}. \quad (1.24)$$

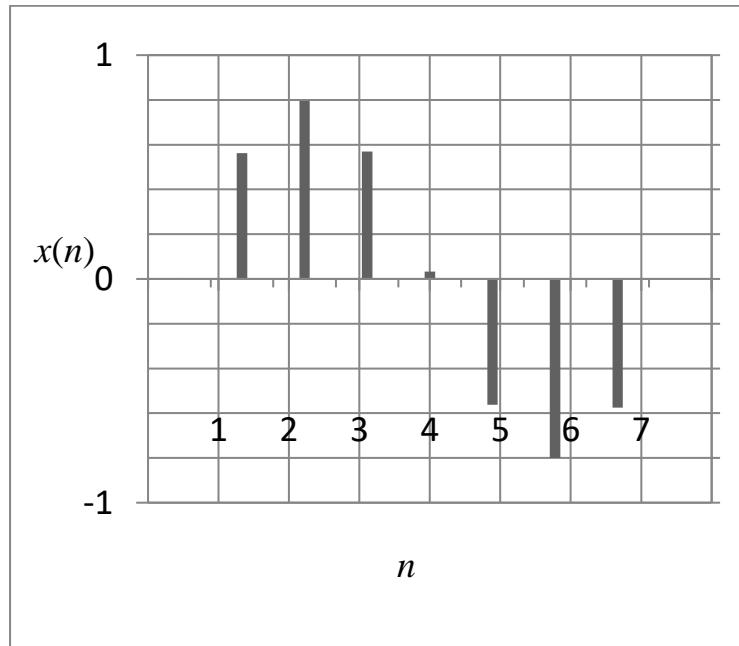


Рис. 1.12. Дискретная синусоида

Подставляя значения $f_1, f_{d_1}, f_2, f_{d_2}$ соответственно в (1.23) и (1.24), получим:

$$x_1(t) = \sin\left(2\pi 5n \frac{1}{25}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{1}{5}\right);$$

$$x_2(t) = \sin\left(2\pi 5 \cdot 10^3 n \frac{1}{25 \cdot 10^3}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{1}{5}\right).$$

Формы этих дискретных сигналов одинаковы, так как равны их нормированные частоты

$$\hat{f}_1 = \frac{f_1}{f_{d_1}} = \frac{5}{25} = 0,2; \quad \hat{f}_2 = \frac{f_2}{f_{d_2}} = \frac{5 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} = 0,2.$$

Пример 1.5. Определить ширину полосы частот цифрового сигнала покомпонентного телевидения (ТВ).

Замечание. В покомпонентном телевидении разделённые сигналы яркости Y и цветоразностные сигналы $R - Y$ и $B - Y$ квантуются на 256 уровней. Частота дискретизации яркостного канала выбрана равной $f_{d_Y} = 13,5$ МГц, частота дискретизации цветоразностных сигналов $f_{d_R} = f_{d_B} = 6,75$ МГц.

Решение. Ширина полосы частот W равна

$$W = f_{d_Y} n + f_{d_R} n + f_{d_B} n = 13,5 \cdot 8 + 6,75 \cdot 8 + 6,75 \cdot 8 = 216 \text{ МГц.}$$

где n – значность двоичного кода АЦП.

Пример 1.6. Определить количество отсчётов N яркостного сигнала в строчном интервале ТВ стандарта с параметрами: 625 строк в кадре, 25 полукадров в секунду. Частота дискретизации сигнала яркостного канала $f_{d_Y} = 13,5$ МГц.

Решение. За одну секунду формируется $625 \cdot 25 = 15625$ строк. Длительность одной строки равна

$$t = \frac{1}{15625} = 64 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 64 \text{ мкс.}$$

$$N = 2Wt = f_{d_Y} t = 13500000 \cdot 64 \cdot 10^{-6} = 864.$$

Упражнения

1.2. Определить количество отсчётов N сигнала цветности в строчном интервале ТВ стандарта с параметрами: 625 строк в кадре, 25 кадров в секунду. Частота дискретизации сигнала цветности $f_{d_R} = 6,75$ МГц.

1.3. Определить скорость цифрового потока полного сигнала цветности ТВ изображения при 8-битовом квантовании и стандарте цифрового кодирования 4:2:2. Условие 4:2:2 отражает соотношение частот дискретизации сигнала яркости и двух цветоразностных сигналов, а также одновременность их передачи.

1.4. Количество отсчётов HD телевизионного изображения равно 1080×1920 . Число градаций яркости равно 256. Какой объём памяти требуется для хранения этого изображения

2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Преобразование сигналов линейными системами с постоянными параметрами

Анализ физической системы, использующей технику обработки сигналов, часто приводит к схеме, которая представлена на рис. 2.1.

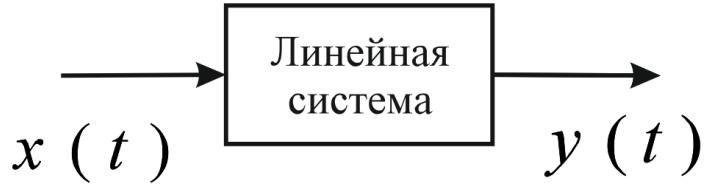


Рис. 2.1. Линейная система

Из рис. 2.1 следует, что входному сигналу $x(t)$ соответствует выходной $y(t)$. Линейность системы означает, что входному сигналу вида

$$ax_1(t) + bx_2(t)$$

будет соответствовать сигнал на выходе системы

$$ay_1(t) + by_2(t).$$

Одна из проблем анализа линейной системы заключается в том, как выяснить особенности системы, если возможно измерить сигналы на входе и сигналы на выходе. Чтобы решить эту задачу, необходимо знать, как связаны входной и выходной сигналы с параметрами системы.

2.1.1. Дискретные системы

Дискретная система определяется как однозначное преобразование или оператор, переводящий входную последовательность $x(n)$ (вход) в выходную последовательность $y(n)$ (выход, отклик, или реакция системы). Математически это записывается в виде

$$y(n) = T[x(n)], \quad (2.1)$$

и графически изображается на рис. 2.2.



Рис. 2.2. Дискретная система

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход.

Вид оператора $T[\cdot]$ зависит от свойств конкретной системы. Оператор $T[\cdot]$ определяет характер математических операций при отображении множества $\{x(n)\}$ в множество $\{y(n)\}$.

Пример 2.1. Дискретная система, описываемая формулой

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty; \quad (2.2)$$

где n_d – натуральное число, называемое задержкой системы. Эта система осуществляет сдвиг входной последовательности отсчетов вправо на n_d интервалов дискретизации. Для вычисления отсчета отклика используется единственный отсчет входной последовательности. Говорят, что система (2.2) имеет память и относится к системам с запоминанием.

Пример 2.2. Система без запоминания. Систему, n -й отсчет реакции $y(n)$ которой при каждом n зависит только от одного отсчета (с тем же индексом n) входа $x(n)$ называют системой без запоминания. Например, $y(n) = (x(n))^2$.

2.2. Линейные дискретные системы с постоянными параметрами

Во многих приложениях применяется класс линейных систем с постоянными параметрами. Они сравнительно просты в математическом отношении, дают удобный вид обработки сигналов. Класс линейных систем определяется линейными операциями или принципом суперпозиции. Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ – входные последовательности, а $y_1(n)$ и $y_2(n)$ – выходные последовательности, то при подаче на вход последовательности $ax_1(n) + bx_2(n)$ систему называют линейной тогда и только тогда, когда выполняется

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n), \quad (2.3)$$

где a и b произвольные постоянные параметры (константы).

Выражение (2.3) характеризует свойство аддитивности линейной системы, в соответствии с которым реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие. Выражение (2.3) характеризует также свойство однородности линейной системы, в соответствии с которым умножение входной последовательности на постоянный параметр соответствует выходной последовательности, умноженной на тот же параметр, т.е.

$$T[ax(n)] = aT[x(n)] = ay(n). \quad (2.4)$$

Если выражение $y(n) = T[x(n)]$ с линейным оператором описывает систему, то это означает, что в данном преобразовании (отображении) возможны только линейные операции сложения, вычитания и умножения на постоянный параметр. Соотношение вход – выход линейной системы описывается линейным уравнением.

Пример 2.3. Система, определяемая уравнением

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k), \quad (2.5)$$

называется сумматором, поскольку значение ее реакции в момент времени n равно сумме значений предыдущих отсчетов входной последовательности. Например, реакция системы для значений $x(n) = \{x(0), x(1), x(2)\}$ равна:

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0); \\ y(1) &= x(0) + x(1); \\ y(2) &= x(0) + x(1) + x(2). \end{aligned}$$

Покажем, что система линейна.

Решение. Подадим на вход сумматора две последовательности $x_1(n), x_2(n)$ и вычислим соответствующие отклики:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x_1(k), \\ y_2(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x_2(k). \end{aligned}$$

Сформируем последовательность $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$.

Для произвольных параметров a и b имеем

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x_3(k) = \sum_{k=-\infty}^n (ax_1(n) + bx_2(n)) = \\ &= a \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) + b \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) = ay_1(n) + by_2(n). \end{aligned}$$

Таким образом, сумматор удовлетворяет принципу суперпозиции, т.е. является линейной системой.

Пример 2.4. Нелинейная система. Пусть отклик системы

$$w(n) = \log_{10}|x(n)|.$$

Докажем, что для такой системы нарушается принцип линейности. Выберем в качестве сигналов $x_1(n) = 1$ и $x_2(n) = 10$. Соответствующие отклики

$$w_1(n) = \log_{10}|1| = 0 \text{ и } w_2(n) = \log_{10}|10| = 1.$$

Требование однородности диктует соотношение

$$T[x_2(n)] = T[10x_1(n)] = 10T[x_1(n)],$$

которое не соблюдается. Следовательно, система нелинейная

Упражнение 2.1. Показать, что система $y(n) = (x(n))^2$ нелинейная.

2.3. Линейные стационарные системы

В цифровой обработке сигналов широко используется класс инвариантных к сдвигу во времени дискретных систем. Такие системы называются стационарными. В этих системах временной сдвиг (задержка) входной последовательности индуцирует сдвиг выходной последовательности. Если $y(n)$ отклик на $x(n)$, то $y(n - n_0)$ будет откликом

на воздействие $x(n - n_0)$, где n_0 – положительное или отрицательное целое число. Выполняется соотношение

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0).$$

Пример 2.5. Покажем, что сумматор (2.5) это стационарная система.

Решение. Пусть $x(n - n_0) = x_1(n)$. Для доказательства вычислим отклики $y(n - n_0)$ и $y_1(n)$. По определению сумматора имеем

$$\begin{aligned} y(n - n_0) &= \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k) \text{ и} \\ y_1(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k - n_0). \end{aligned}$$

Поменяем в последней сумме индекс суммирования на $k_1 = k - n_0$. Напомним, что с изменением индекса суммирования изменяются пределы суммирования.

$$y_1(n) = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x_1(k_1),$$

Тогда $y(n - n_0) = y_1(n)$.

Таким образом, сумматор является стационарной системой.

2.4. Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе

Наличие свойств линейности и стационарности позволяет представлять анализируемую систему в удобном виде. Предположим, на вход системы подан единичный импульс (отсчет)

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Обычно выход линейной системы является запаздывающей и усиленной или подавленной версией входа. Отклик системы на этот импульс обозначим $h(n)$ (рис. 2.3).



Рис. 2.3. К определению импульсной характеристики

Выход системы, инициированный единичным импульсом, не будет тем же импульсом, а будет меняться со временем, в некоторый момент, достигая максимального значения, например, как показано на рис. 2.4.

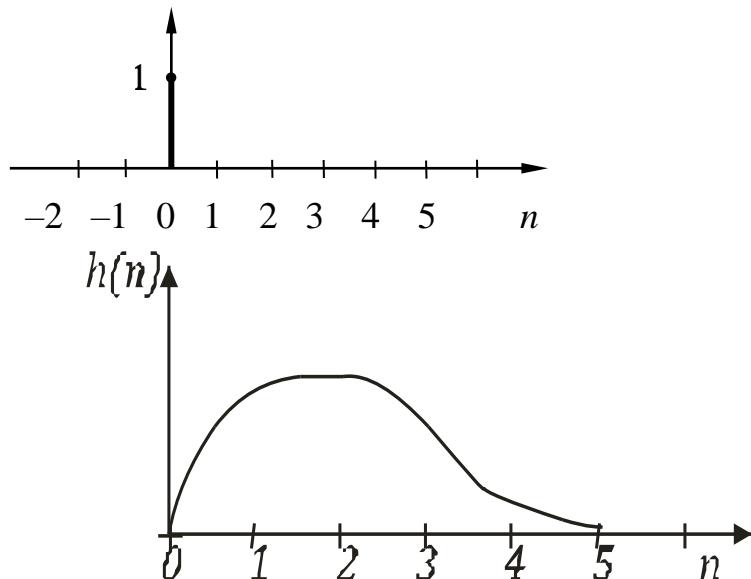


Рис. 2.4. Входной единичный импульс и импульсная характеристика системы

Из рисунка видно, что в момент времени 0 выход равен $y(0) = h(0)$. В момент времени n выход равен $y(n) = h(n)$. Вход можно представить импульсом разной амплитуды (мощности). В момент времени $n = 0$ подадим на вход системы отсчет высотой $x(0)$. Поскольку входной сигнал увеличился в $x(0)$ раз, то согласно свойству линейной системы, отклик на этот сигнал также увеличился в $x(0)$ раз. Тогда выходной сигнал определяется отсчетами

$$y(0) = x(0) h(0),$$

$$y(1) = x(0) h(1),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y(n) = x(0) h(n).$$

Пусть теперь на вход подается последовательность импульсов $x(n)$ (рис. 2.5).

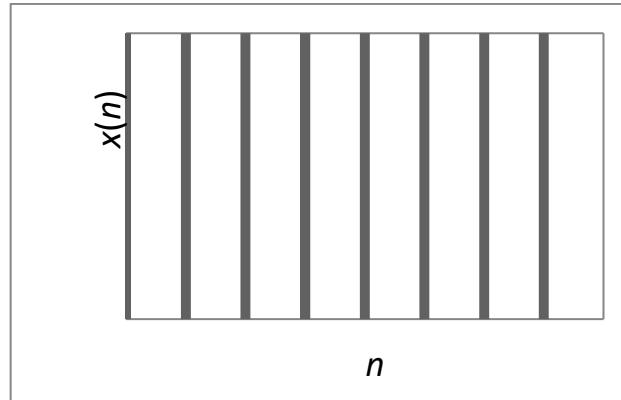


Рис. 2.5. Последовательность импульсов

В этом случае на каждое импульсное воздействие формируется отклик, соответствующий импульсной характеристике системы. Выход системы получается из отдельных импульсных откликов, рис. 2.6.

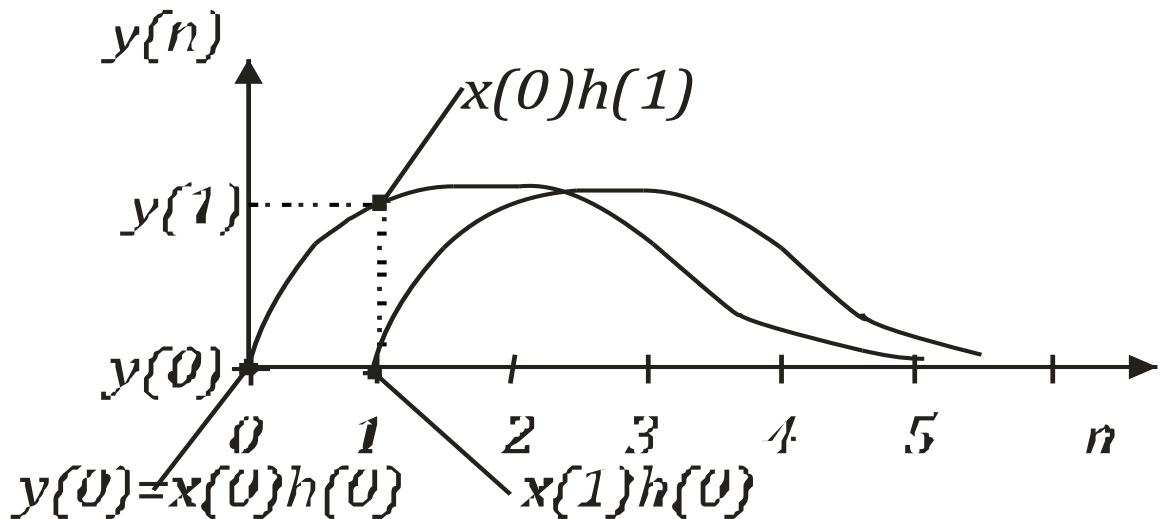


Рис. 2.6. Два импульсных отклика

Из рисунка видно, что в момент времени \$n = 0\$ выход равен

$$y(0) = x(0)h(0).$$

В следующий момент времени \$n = 1\$ выход состоит из суммы двух компонент:

- первое слагаемое \$x(1)h(0)\$ – из-за текущего импульса \$x(1)\$;
- второе слагаемое \$x(0)h(1)\$ – из-за запаздывающего влияния входа в момент времени \$n = 0\$.

Выходной сигнал системы в момент времени \$n = 1\$ равен

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0).$$

Последующие выходы записутся как

$$\begin{aligned} y(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0), \\ &\vdots \\ y(n) &= x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \cdots + x(n)h(0). \end{aligned}$$

Выводы

1. Если система линейна, выход можно записать как линейную сумму влияния предыдущих входов.
2. Выход получается умножением входной последовательности на соответствующие отсчеты, обращенной во времени функции импульсной характеристики.

3. Учитывая свойство линейности и возможность представления любой последовательности в форме линейной комбинации сдвинутых единичных импульсов (1.20), можно утверждать, что линейная стационарная система определяется своей реакцией на единичный импульс или импульсной характеристикой при нулевых начальных условиях.

Замечание. Признаком нулевых начальных условий является отсутствие отклика при отсутствии входной последовательности $x(n)$. Если начальный момент времени обозначим $n = 0$, то ему соответствует

$$\begin{cases} x(n) \equiv 0, \\ y(n) \equiv 0 \end{cases} \text{при } n < 0. \quad (2.6)$$

Нулевые начальные условия отвечают принципу причинности, в соответствии с которым отклик не может возникнуть раньше воздействия.

Для описания во временной области линейных стационарных дискретных систем широко применяются следующие линейные уравнения (формулы):

- свертка, где используется импульсная характеристика;
- разностные уравнения, где используются параметры линейных дискретных систем (ЛДС).

2.5. Уравнение свертки

Из свойств стационарности (инвариантности к сдвигу) следует, что откликом на последовательность $u_0(n - k)$ будет $h_0(n - k)$, рис. 2.7.

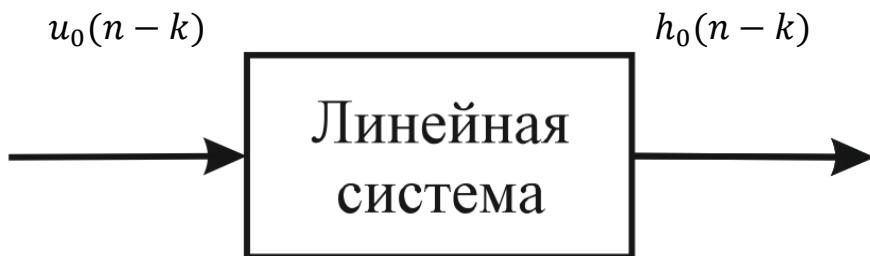


Рис. 2.7. Стационарная линейная система

Рассмотрим отклик ЛДС на входную последовательность, представленную в виде (1.12)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u_0(n - k).$$

Из свойств линейности и стационарности ЛДС следует, что откликом на эту последовательность должна быть последовательность

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u_0(n - k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[u_0(n - k)] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k), -\infty < n < \infty. \quad (2.7)$$

Если $y(n)$ последовательность, значения которой зависят от отсчетов двух последовательностей $h(n)$ и $x(n)$ и определяется выражением (2.7), то говорят, что $y(n)$ есть свертка. Обозначение операции свертка

$$y(n) = x(n) * h(n). \quad (2.8)$$

Заменяя индекс суммирования в (2.7), получаем другое выражение свертки. Пусть $(n - k) = m$. Тогда

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n). \quad (2.9)$$

Таким образом, линейная инвариантная к сдвигу дискретная система с входом $x(n)$ и импульсной характеристикой $h(n)$ имеет тот же выход, что и линейная инвариантная к сдвигу дискретная система с входом $h(n)$ и импульсной характеристикой $x(n)$.

С учетом нулевых начальных условий (2.6) линейные уравнения (2.7) и (2.9) представляются в виде

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k), -\infty < n < \infty. \quad (2.10)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k), -\infty < n < \infty. \quad (2.11)$$

Согласно этим формулам отклик $y(n)$ вычисляется как дискретная свертка воздействия и импульсной характеристики системы. Покажем тождественность результатов вычисления по формуле свертки в двух вариантах ее записи (2.10) и (2.11). Определим значение коэффициента свертки в точке $n = 3$. По формуле (2.10) имеем

$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0).$$

По формуле (2.11) получаем результат

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0).$$

Выбор варианта свертки определяется удобством применения. Операцию вычисления дискретной свертки по формуле (2.7) и (2.9) называют линейной (апериодической) сверткой. Из формул свертки следует, что $y(n)$, т.е. n -й член выходной последовательности получается в результате умножения входной последовательности (записанной как функция от k) на последовательность $h(n-k), -\infty < k < \infty$. Затем при каждом фиксированном n суммируются все произведения $x(k)h(n-k)$ с параметром k в качестве параметра суммирования.

Вывод. При свертке двух последовательностей для вычисления n -го члена последовательности $y(n)$ используются все отсчеты входной последовательности $x(n)$ и $h(n)$.

2.5.1. Графическое представление свертки

Свертка – это одна из наиболее используемых операций в ЦОС. Например, это основная операция цифровой фильтрации. Для более полного понимания формулы свертки рассмотрим процесс образования последовательности $h(n - k)$. На рис. 2.8.а показана последовательность $h(k) = [h(0), h(1), h(2), h(3)] = (5, 4, 3, 2)$.

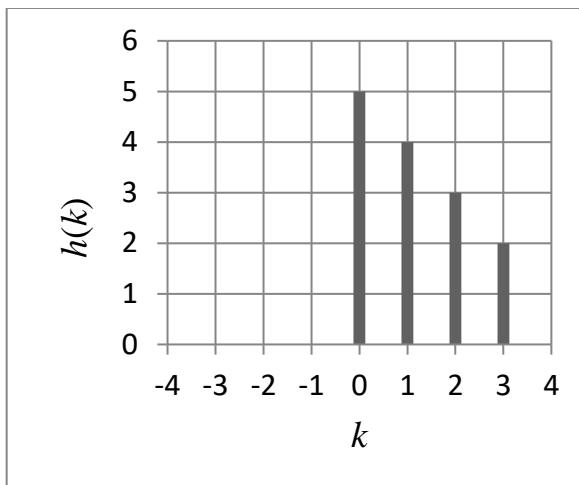


Рис. 2.8.а. Последовательность $h(k)$

Определим последовательность $h_1(k) = h(-k) = h(0 - k)$. Форма этой последовательности показана на рис. 2.8.б.

Например, если $k = -1$, то $h_1(k) = h((0 - (-1))) = h(1) = 4$;
 $h_1(-2) = h(2) = 3$ и т. д.

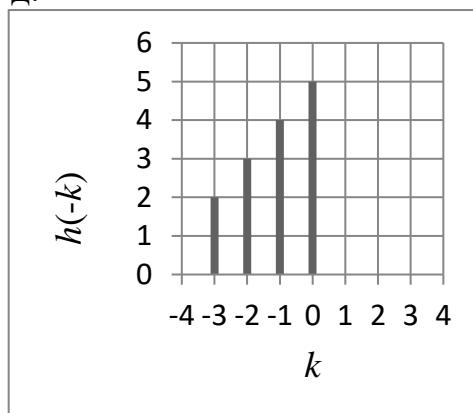


Рис. 2.8.б. Последовательность $h_1(k)$

Далее определим последовательность

$$h_2(k) = h_1(k - n) = h(-(k - n)) = h(n - k).$$

Форма этой последовательности для $n = 3$ показана на рис. 2.8.в.

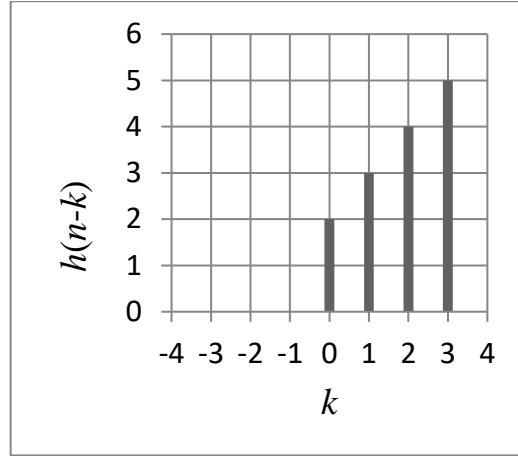


Рис. 2.8.в. Последовательность $h_2(k) = h_1(k - 3) = h(3 - k)$.

Например, если $n = 3$ имеем

$$h_2(k) = h_1(k - 3).$$

Для $k = 3$, получаем

$$h_2(3) = h_1(0) = 5.$$

Для $k = 2$, получаем

$$h_2(2) = h_1(2 - 3) = h_1(-1) = 4 \text{ и т. д.}$$

Вывод. Для вычисления последовательности $h(n - k), -\infty < k < \infty$ необходимо:

- обратить по времени последовательность $h(k)$ относительно точки $k = 0$ для получения последовательности $h_1 = h(-k)$;
- сдвинуть последовательность $h_1 = h(-k)$ на n интервалов дискретизации вправо.

Пример 2.6. Задана входная последовательность $x(n) = (x(0), x(1), x(2)) = (1, 1, 1)$ (рис. 2.9.а) и импульсная характеристика ЛДС $h(n) = (h(0), h(1), h(2), h(3)) = (5, 4, 3, 2)$. Вычислим свертку.

На рис. 2.9.а – г. показаны этапы вычислений.

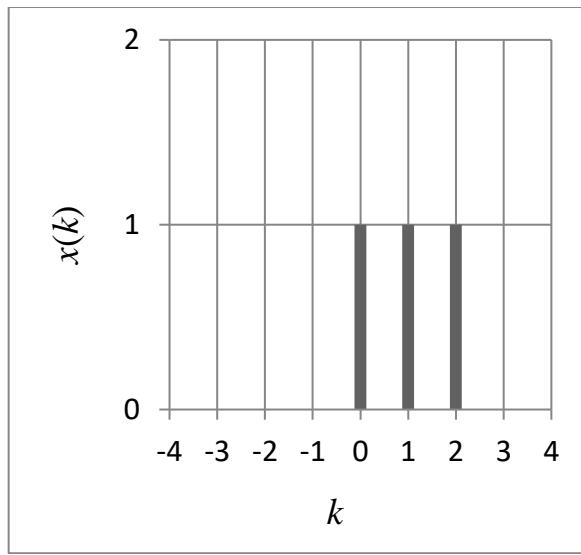


Рис. 2.9.а. Входная последовательность $x(n)$

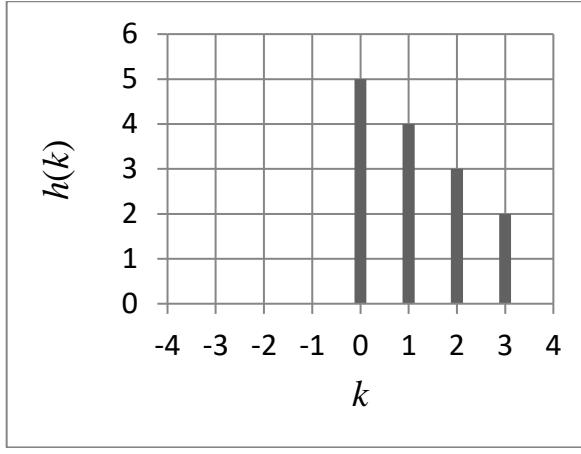


Рис. 2.9.б импульсная характеристика $h(n)$ ЛДС

Для $n = 0$ по формуле свертки вычисляем

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \sum_{k=-3}^5 x(k)h(0-k) \\
 &= x(-3)h(3) + x(-2)h(2) + x(-1)h(1) + x(0)h(0) \\
 &\quad + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) + x(3)h(-3) + x(4)h(-4) \\
 &\quad + x(5)h(-5) = 5.
 \end{aligned}$$

Условно процесс вычисления свертки отображается на рис. 2.9.в.
Временное соотношение сворачиваемых отсчетов показано ниже

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 1 \\
 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\
 \hline
 5.
 \end{array}$$

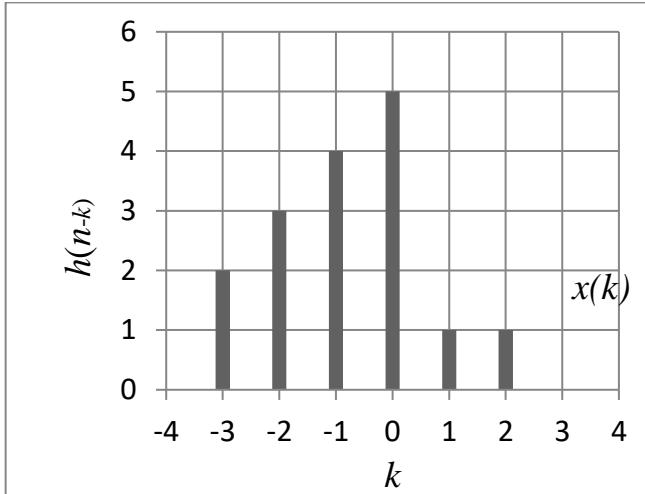


Рис. 2.9.в. Вычисление коэффициента $y(0)$ свертки $y(n)$

Для $n = 1$ по формуле свертки вычисляем

$$y(1) = \sum_{k=-3}^5 x(k)h(1-k) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 9.$$

Условно процесс вычисления свертки отображается на рис. 2.9.г.
Временное соотношение сворачиваемых отсчетов показано ниже

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 4+5 = 9. \end{array}$$

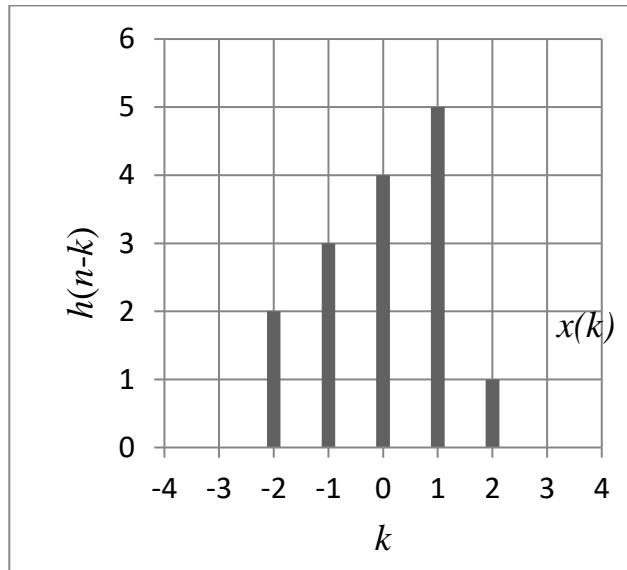


Рис. 2.9.г. Вычисление коэффициента $y(1)$ свертки $y(n)$

Действуя аналогичным образом, вычисляем остальные коэффициенты свертки.

$$y(2) \rightarrow \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 3+4+5 = 12. \end{array}$$

$$y(3) \rightarrow \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 2+3+4 = 9. \end{array}$$

$$y(4) \rightarrow \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 2+3 = 5. \end{array}$$

$$y(5) \rightarrow \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 2. \end{array}$$

На рис. 2.10 показана реакция линейной дискретной системы с импульсной характеристикой $h(n) = (5, 4, 3, 2)$ на входную последовательность $x(n) = (1, 1, 1)$.

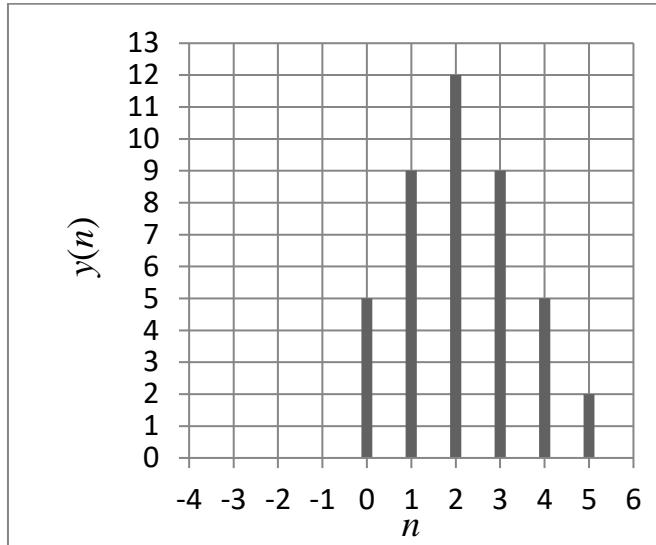


Рис. 2.10. Реакция линейной дискретной системы

Из рассмотренного механизма вычисления свертки следуют следующие выводы:

- если длительность входной последовательности и (или) импульсной характеристики бесконечна, длительность отклика также бесконечна;
- если длительность входной последовательности и импульсной характеристики конечны и равны N_1 и N_2 , то длительность отклика $y(n)$ также конечна и равна $N = N_1 + N_2 - 1$;

для конечных последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ формулы свертки в двух вариантах записи приобретают вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_1+N_2-2} x(k)h(n-k), n = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 - 2; \quad (2.12)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_1+N_2-2} h(k)x(n-k), n = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 - 2. \quad (2.13)$$

Упражнения

2.2. Вычислить линейную свертку двух дискретных конечных последовательностей $x(n) = (1; 1; 1; 1; 1)$ и $h(n) = (0; -0,02; 0; 0,17; 0,5; 0,85; 1; 0,85; 0,5; 0,17; 0; -0,02; 0)$, где $h(n)$ – импульсная характеристика дискретной системы, $x(n)$ – входная последовательность. Построить график свертки

2.3. Вычислить отклик ЛДС по формуле свертки. Изобразить график свертки. Задана импульсная характеристика $h(n) = (1; 2; 2; 3; -1)$ и входное воздействие $x(n) = (1; 2)$.

2.4. Найти реакцию ЛДС на единичный импульс:

- а) идеальной системы задержки $y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty$;
 б) сумматора $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$.

2.6. Устойчивость линейных дискретных систем

Определение 2.1. Линейная дискретная система называется устойчивой, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничен. Последовательность $x(n)$ называется ограниченной, если найдется такое положительное число B_x не равное бесконечности, что

$$|x(n)| \leq B_x < \infty.$$

Таким образом, для устойчивой системы отклик

$$|y(n)| \leq B_y < \infty.$$

Пример 2.7. Покажем, что система без запоминания (см. пример 2.2) устойчива. Для доказательства предположим, что $|x(n)| \leq B_x$ для всех n . Тогда $|y(n)| \leq |x(n)|^2 \leq B_x^2 = B_y < \infty$. Следовательно, система устойчива.

Определение 2.2. Линейная стационарная система является устойчивой тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика, абсолютно суммируемая последовательность, т. е. если

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.14)$$

Рассмотрим примеры, отражающие свойство устойчивости стационарной системы.

Пример 2.8. Для системы идеальной задержки $y(n) = x(n - n_d)$ отклик на единичный импульс

$$h(n) = u_0(n - n_d) = \begin{cases} 1, & n = n_d \\ 0, & n \neq n_d \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 1, S < \infty.$$

В этом примере импульсная характеристика имеет конечное число отсчетов (один ненулевой отсчет $u_0(n - n_d)$ при $n = n_d$). Такие системы называются системами с конечной импульсной характеристикой – КИХ фильтрами.

Пример 2.9. Для сумматора $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ отклик на единичный импульс

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^n u_0(k) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u_1(n), \quad (2.15)$$

где $u_1(n)$ – единичный скачок

На рис. 2.11 изображен единичный скачок $u_1(n)$. Импульсная характеристика сумматора не ограничена по времени. Характеристика

формируется только тактовой последовательностью импульсов. Системы с неограниченной по длительности импульсной характеристикой называются системами с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ фильтрами.

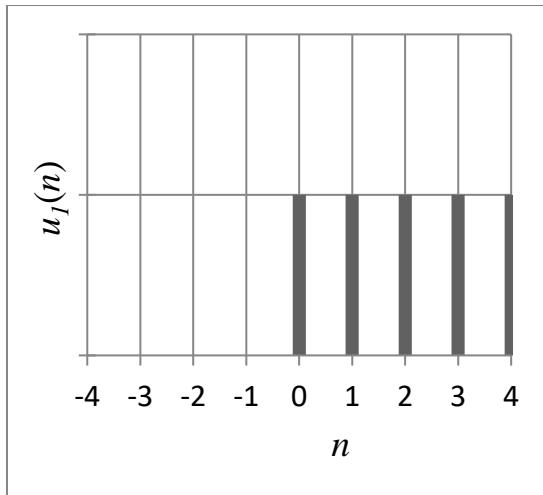


Рис. 2.11. Единичный скачок

По формуле (2.14) получаем

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u_1(n)| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, сумматор не является устойчивой системой.

Пример 2.10. На вход линейной стационарной системы поступает степенная последовательность вида

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Замечание. Если a – вещественное число, то последовательность называется вещественная степенная.

Исследуем систему на устойчивость. Используя последовательность (2.11) (единичный скачок), степенную последовательность запишем в форме

$$x(n) = a^n u_1(n).$$

Отклик на единичный скачок

$$h(n) = a^n u_1(n).$$

Сумма коэффициентов импульсной характеристики равна

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n u_1(n)|. \quad (2.17)$$

Если $0 < a < 1$, то формула (2.17) представляет собой сумму

бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая сходится, так как $|a| < 1$. Сумма такой прогрессии выражается формулой

$$S = \frac{l}{1 - q},$$

где l – первый член последовательности, q – знаменатель геометрической прогрессии. В примере $l = 1$ (для $n = 0$), $q = a$. Тогда

$$S = \frac{1}{1 - a}.$$

Следовательно, система, у которой $h(n) = a^n u_1(n)$, $|a| < 1$ устойчива и относится к классу БИХ фильтров. На рис. 2.12 показана импульсная характеристика системы, удовлетворяющая выражению (2.17) для $a = 0,8$.

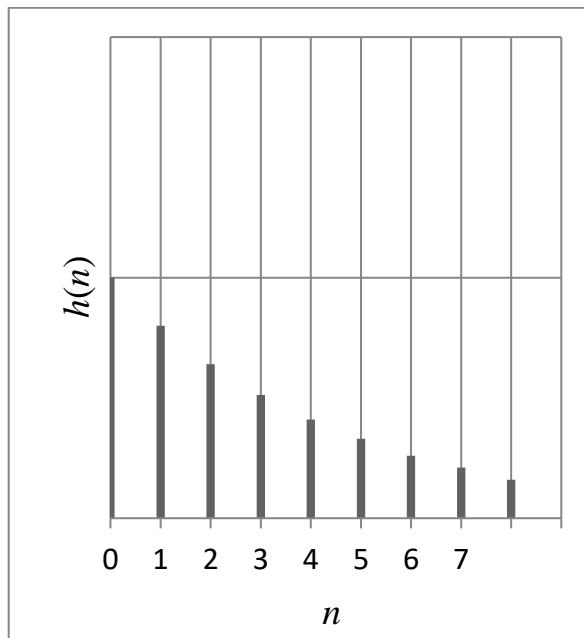


Рис. 2.12. Импульсная характеристика устойчивой системы

Если $h(n) = a^n u_1(n)$, $a > 1$, то система будет неустойчивой. На рис. 2.13 изображена импульсная характеристика такой системы, $a = 1,2$.

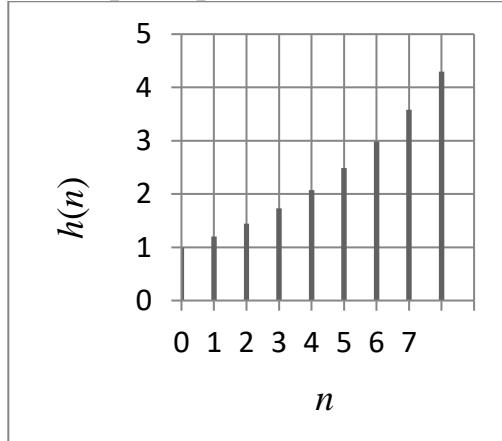


Рис 2.13. Импульсная характеристика неустойчивой системы

2.7. Линейные разностные уравнения с постоянными параметрами

Если известны параметры линейной стационарной системы, взаимосвязь между входной последовательностью $x(n)$ и откликом $y(n)$ на выходе описывают линейным разностным уравнением. Разностное уравнение определяет способ построения дискретной системы. По разностному уравнению можно определить характеристики системы, например, частоты соответствующие нулевому коэффициенту передачи и др.

Теория линейных разностных уравнений сходна с теорией линейных дифференциальных уравнений, описывающих соотношение вход-выход аналоговой линейной системы. Переход от дифференциальных уравнений к разностным обусловлен различием функций, описывающих сигналы аналоговых систем. Поэтому вычисление производных заменяется вычислением разностей.

Линейное разностное уравнение имеет вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k), n \geq 0, \quad (2.18)$$

где: b_i, a_k – вещественные коэффициенты (веса) уравнения, определяющие свойства дискретной системы;

- N и M константы;
- i и k значения задержек для воздействия и отклика;
- $x(n-i)$ и $y(n-k)$ воздействие и отклик, задержанные на i и k периодов дискретизации соответственно.

Уравнение (2.18) характеризуется порядком, равным $\max\{N-1, M-1\}$.

Как известно, дифференциальное уравнение решается с помощью методов численного интегрирования. Однако метод численного интегрирования является приближенным. Разностное уравнение (2.18) представляет собой алгоритм вычисления отклика методом простой подстановки $n = 0, 1, 2, \dots$ принципиально не вносящим погрешность. Имея набор начальных условий (например, $x(i)$ и $y(k)$ для начальных значений аргумента n и $x(n)$), по формуле (2.18) можно вычислить $y(n)$, для $n \geq 0$.

Пример 2.11. Решить разностное уравнение первого порядка

$$y(n) = x(n) - 3y(n-1), n \geq 0.$$

Здесь постоянные коэффициенты $b_0 = 1, b_1 = 0, a_1 = 3$. Начальное условие запишется как $y(-1) = 0$ и $x(n) = n^2 + n$.

Решение. $y(0) = x(0) - 3y(0-1) = 0,$

$$y(1) = x(1) - 3y(0) = 1 + 1 = 2,$$

$$\begin{aligned}
y(2) &= x(2) - 3y(1) = 2^2 + 2 - 3 \cdot 2 = 0, \\
y(3) &= x(3) - 3y(2) = 3^2 + 3 - 3 \cdot 0 = 12, \\
y(4) &= x(4) - 3y(3) = 4^2 + 4 - 3 \cdot 12 = -16, \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Пример 2.12. Покажем, что отклик сумматора $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ описывается разностным уравнением.

По определению отклик сумматора запишем в виде

$$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k). \quad (2.19)$$

С учетом (2.19) получаем выражение

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k). \quad (2.20)$$

Например, если $n \geq 0$, для $n = 3$ имеем

$$y(3) = \sum_{k=0}^3 x(k) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = x(3) + \sum_{k=0}^2 x(k).$$

Подставив соотношение (2.19) в (2.20) получаем

$$y(n) = x(n) + y(n-1). \quad (2.21)$$

На рис. 2.14 показана структурная схема, реализующая сумматор на основе уравнения (2.21).

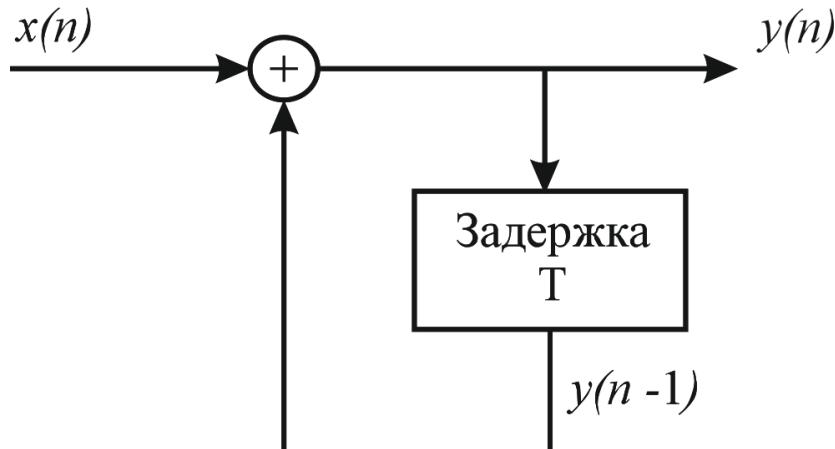


Рис. 2.14. Структурная схема сумматора

Элемент «задержка» осуществляет времененную задержку отсчетов на один интервал дискретизации. При каждом значении n складывается

значение отсчета входной последовательности с предыдущим значением отсчета выхода сумматора.

Пример 2.13. Проверим работу сумматора. Пусть $x(n) = (x(0), x(1)) = (1; 4), n \geq 0, y(-1) = 0$. На выходе сумматора имеем значения отсчетов:

$$y(0) = x(0) + y(0 - 1) = 1,$$

$$y(1) = x(1) + y(0) = 4 + 1 = 5,$$

$$y(2) = x(2) + y(1) = 0 + 5 = 5,$$

$$y(3) = x(3) + y(2) = 0 + 5 = 5,$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Таким образом, вход и выход сумматора связаны линейным разностным уравнением первого порядка

$$y(n) = \sum_{i=0}^1 b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^1 a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1).$$

Так как сумматор описывается выражением (2.21.), то

$$b_0 = 1, b_1 = 0, a_1 = -1 \text{ и}$$

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1). \quad (2.22)$$

Если использовать форму уравнения (2.22), структурная схема сумматора приобретет вид (рис. 2.15).

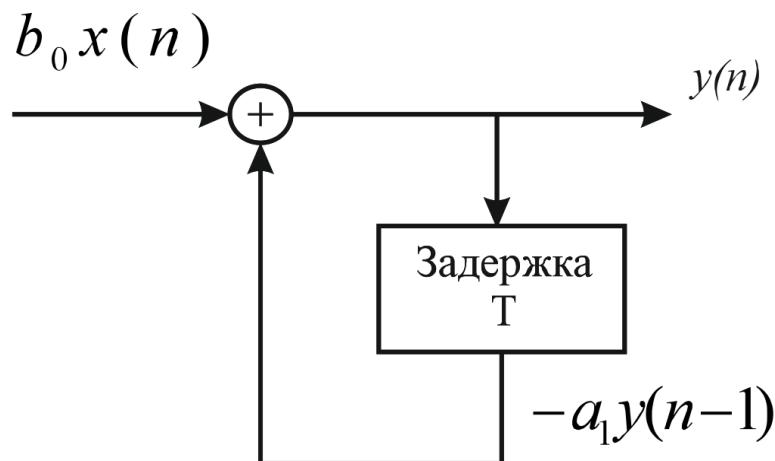


Рис. 2.15. Структурная схема дискретной системы

Замечание. Уравнения вида (2.21) и (2.22) и схемы, показанные на рис. 2.14 и 2.15 называют рекуррентным (рекурсивным) представлением

дискретной системы, поскольку каждый отсчет реакции вычисляется с помощью ранее найденных значений отсчетов.

Упражнение 2.5. Решить разностное уравнение первого порядка

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-1), n \geq 0$$

с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = 0.1^n$. Вычислить значения 6-и отсчетов отклика $y(n)$.

2.8. Рекурсивные линейные дискретные системы

Определение 2.3. Линейная дискретная система называется рекурсивной, если хотя бы один из коэффициентов a_k уравнения

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k), n \geq 0,$$

не равен нулю.

Из уравнения следует, что n -е значение отклика рекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим значением отсчета входа;
- предыдущими значениями отсчета входа;
- предыдущими значениями отсчета выхода.

Например, рекурсивная система первого порядка описывается разностным уравнением с ненулевыми коэффициентами вида

$$y(n) = \sum_{i=0}^1 b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^1 a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1). \quad (2.23)$$

Поскольку стационарная (инвариантная к сдвигу) система характеризуется импульсной характеристикой, вычислим импульсную характеристику рекурсивной линейной дискретной системы, удовлетворяющей разностному уравнению первого порядка следующего вида:

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1), & b_1 = 0 \\ y(n) \equiv 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Согласно определению, импульсная характеристика – это отклик на единичный импульс, поэтому на входе действует $x(n) = u_0(n)$ и $y(n)$ соответствует $h(n)$. С учетом этого, получаем

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n-1), n \geq 0.$$

Вычисляем значения отсчетов $h(n)$ методом прямой подстановки.

$$\begin{aligned}
h(0) &= b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0, \\
h(1) &= b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 h(0) = -a_1 b_0, \\
h(2) &= b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1 h(1) = -a_1 (-a_1 b_0) = a_1^2 b_0, \\
h(3) &= b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1 h(2) = -a_1 (a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0, \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Вычисление можно продолжать бесконечно по итерационной формуле

$$h(n) = (-1)^n a_1^n b_0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Выводы

1. Импульсная характеристика рекурсивной линейной дискретной системы имеет бесконечную длительность.
2. Значения отсчетов $h(n)$ определяются коэффициентами разностного уравнения $b_i, i = 0, 1, \dots, N-1; a_k, k = 1, 2, \dots, M-1$.
3. Рекурсивные ЛДС относятся к классу БИХ систем (фильтров).

Заметим, что порядок фильтра указывает какое число предыдущих выходов надо учитывать.

Вычислим отклик рекурсивной линейной системы, описываемой уравнением (2.24) для произвольной входной последовательности $x(n)$.

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$

$$y(0) = b_0 x(0), \text{ так как } y(-1) \equiv 0,$$

$$y(1) = b_0 x(1) - a_1 y(0) = b_0 x(1) - a_1 b_0 x(0),$$

$$y(2) = b_0 x(2) - a_1 y(1) = b_0 x(2) - a_1 [(b_0 x(1) - a_1 b_0 x(0))] =$$

$$\begin{aligned}
&= b_0 x(2) - a_1 b_0 x(1) + a_1^2 b_0 x(0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Подставляя, полученные ранее значения коэффициентов импульсной характеристики (2.25) в уравнение $y(n)$, получаем следующие коэффициенты откликов:

$$y(0) = h(0)x(0);$$

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0);$$

$$\begin{aligned}
y(2) &= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0); \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n-1)x(1) + h(n)x(0). \quad (2.26)$$

Из уравнения (2.26) следует, что рекурсивная линейная система первого порядка – это устройство выполнения свертки, называемое конволвером.

Весовые коэффициенты конвольвера (2.26) соответствуют коэффициентам импульсной характеристики

$$h(n) = (-1)^n a_1^n b_0.$$

На рис. 2.16 показана структурная схема, реализующая конвольвер на основе уравнения $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n - 1)$.

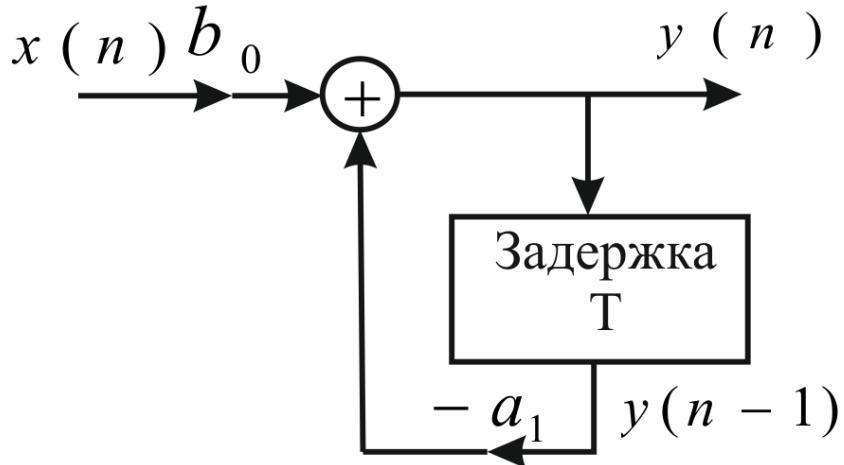


Рис. 2.16. Структурная схема конвольвера

Пример 2.14. Вычислить отклик на выходе конвольвера, описываемого уравнением

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n - 1), \text{ если } x(n) = (x(0), x(1)) = (-1; 2); b_0 = 1,5, a_1 = 2.$$

Решение. Отклик конвольвера описывается уравнением

$$y(n) = 1,5x(n) - 2y(n - 1).$$

Параметры b_0 и a_1 определяют значения импульсной характеристики конвольвера:

$$\begin{aligned} h(0) &= b_0 = 1,5; \\ h(1) &= -a_1 b_0 = -2 \cdot 1,5 = -3. \end{aligned}$$

Коэффициенты $y(n)$ определяем из выражения (2.26).

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n - 1) + \dots + h(n - 1)x(1) + h(n)x(0).$$

$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) = h(0)x(0) = 1,5 \cdot (-1) = -1,5$$

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1,5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) = 6.$$

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = h(1)x(1) = (-3) \cdot (2) = -6.$$

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 0.$$

Легко убедиться, что схема, показанная на рисунке 2.16 это вычислитель свертки. На выходе схемы формируются значения $y(n)$. На рис. 2.17 изображен график свертки.

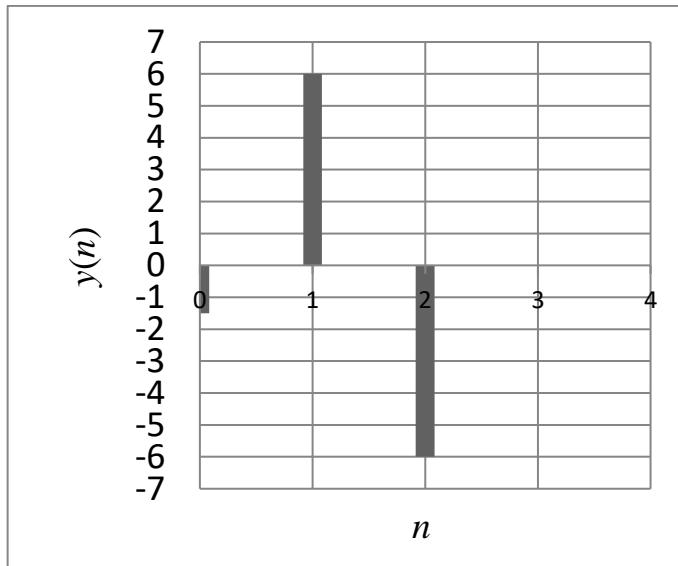


Рис. 2.17. График свертки рекурсивной системы

Структура разностного уравнения определяет способ построения рекурсивной линейной системы. Например, уравнение первого порядка можно реализовать с помощью схемы, изображенной на рис. 2.18.

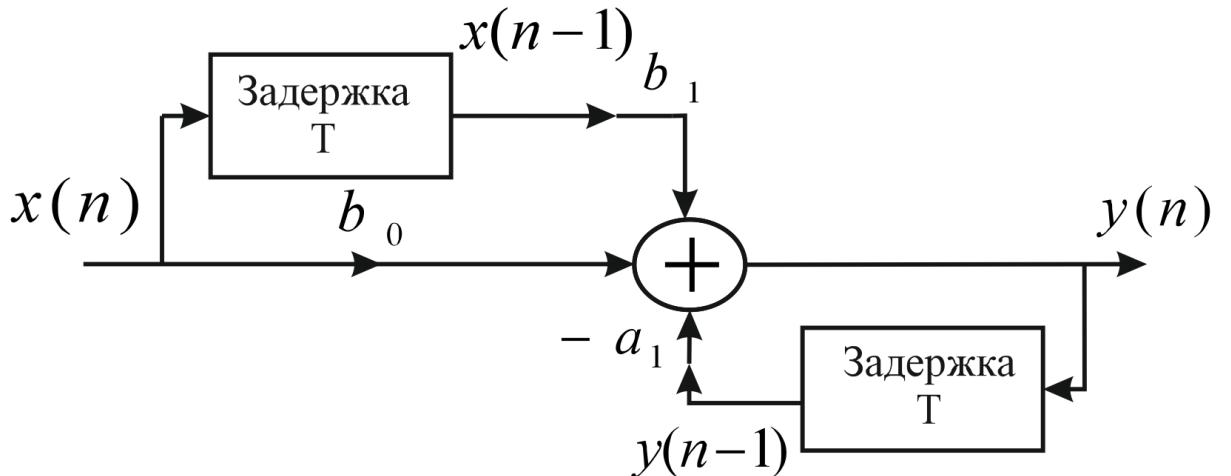


Рис. 2.18. Схема рекурсивной линейной систем

Упражнения

- 2.6. Записать уравнение рекурсивной ЛДС второго порядка.
- 2.7. Вычислить импульсную характеристику рекурсивной системы и отклик $y(n)$ для произвольного входа $x(n)$. Соотношение вход-выход ЛДС описывается уравнением $y(n) = x(n) + ay(n - 1), n \geq 0$.
- 2.8. Показать, что разностное уравнение $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) - a_1y(n - 1)$ описывает конволвер.

2.9. Изобразить структурную схему рекурсивной ЛДС второго порядка

2.9. Нерекурсивные линейные дискретные системы

Определение 2.4. Линейная дискретная система называется нерекурсивной, если все коэффициенты a_k уравнения (2.18) равны нулю. В этом случае уравнение принимает вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.27) следует, что n -е значение отклика нерекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим значением отсчета входа;
- предыдущим значением отсчета входа.

Например, разностное уравнение нерекурсивной ЛДС второго порядка имеет вид

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

Пример 2.15. Вычислим импульсную характеристику нерекурсивной системы второго порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2), n \geq 0, y(n) \equiv 0 \text{ для } n < 0. \quad (2.28)$$

Согласно определению, импульсная характеристика – это отклик на единичный импульс, поэтому на входе действует $x(n) = u_0(n)$ и $y(n)$ соответствует $h(n)$. С учетом этого, получаем

$$h(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2).$$

Методом прямой подстановки вычисляем значения отсчетов импульсной характеристики $h(n)$:

$$h(0) = b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) + b_1 u_0(0) + b_2 u_0(-1) = b_1; \quad (2.29)$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) + b_1 u_0(1) + b_2 u_0(0) = b_2;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) + b_1 u_0(2) + b_2 u_0(1) = 0;$$

⋮

$$h(n) \equiv 0, \text{ при } n > 2.$$

Выходы

1. Импульсная характеристика нерекурсивной линейной дискретной системы имеет конечную длительность.

2. Значения отсчетов $h(n)$ равны коэффициентам разностного уравнения $b_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$, т.е. $h(n) = b_i$.

3. Нерекурсивные ЛДС относятся к классу КИХ систем (фильтров).

Вычислим отклик нерекурсивной линейной системы, описываемой уравнением (2.28) для произвольной входной последовательности $x(n)$. С учетом полученных значений коэффициентов импульсной характеристики для уравнения $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + b_2x(n - 2)$ получаем:

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0x(0) + b_1x(-1) + b_2x(-2) = b_0x(0) = h(0)x(0); \\ y(1) &= b_0x(1) + b_1x(0) + b_2x(-1) = b_0x(1) + b_1x(0) = \\ &\quad = h(0)x(1) + h(1)x(0); \\ y(2) &= b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0); \\ &\vdots && \vdots \\ y(n) &= h(0)x(n) + h(1)x(n - 1) + \dots + h(n - 1)x(1) + h(n)x(0). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Пример 2.16. Вычислить отклик на выходе схемы, описываемой уравнением $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$, если $x(n) = (x(0), x(1)) = (-1; 2); b_0 = 1,5; b_1 = -2$.

Решение. Отклик описывается уравнением

$$y(n) = 1,5x(n) - 2x(n - 1).$$

Параметры b_0 и b_1 определяют значения импульсной характеристики конвольвера. Используя выражение (2.30), определяем коэффициенты $y(n)$:

$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) = h(0)x(0) = 1,5 \cdot (-1) = -1,5;$$

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1,5 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 5.$$

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = h(1)x(1) = (-2) \cdot (2) = -4.$$

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 0.$$

Структура разностного уравнения определяет схему построения нерекурсивной линейной системы. Например, уравнение первого порядка $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$ можно реализовать с помощью схемы, изображенной на рис. 2.19.

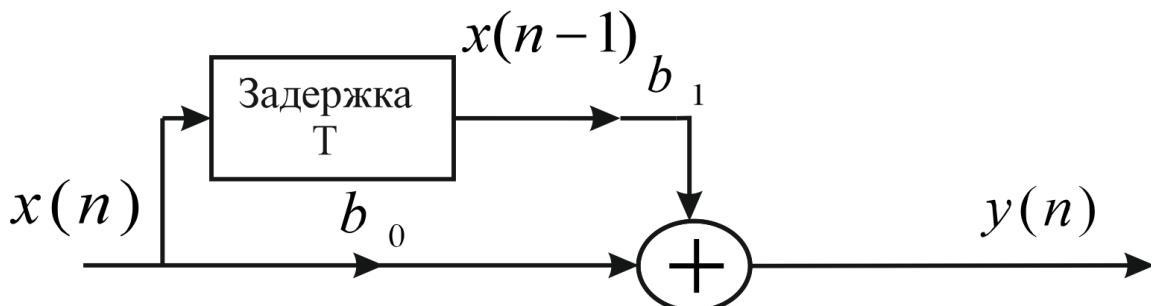


Рис. 2.19. Схема нерекурсивной линейной системы (конвольвер)

Легко убедиться, что схема, показанная на рис. 2.19 это вычислитель свертки. На выходе схемы формируются значения $y(n)$. На рис. 2.20 изображен график свертки.

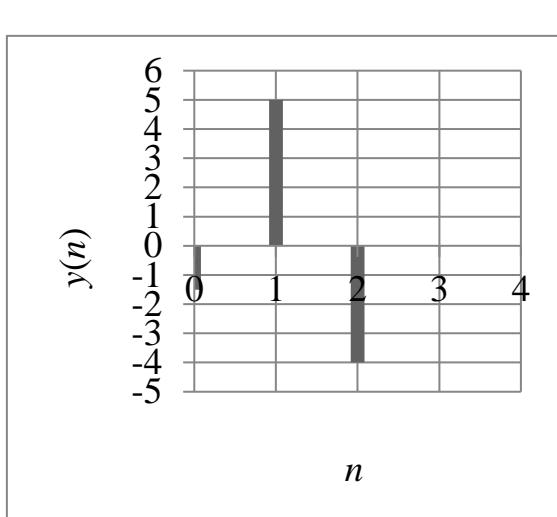


Рис. 2.20. График свертки нерекурсивной системы

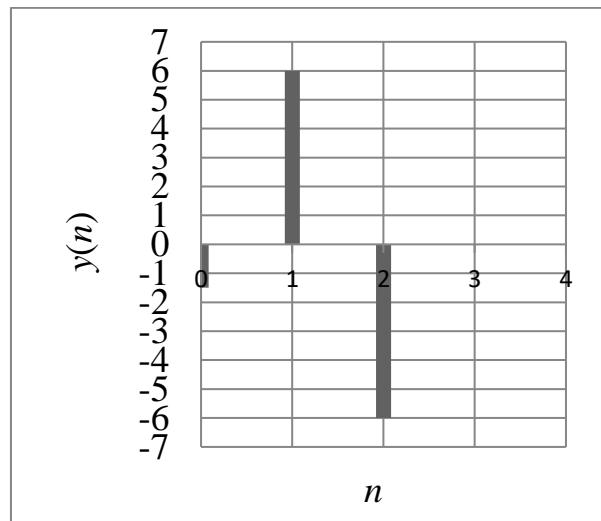


Рис. 2.21. График свертки рекурсивной системы

Для сравнения с рекурсивной системой на рис. 2.21 показан график свертки рекурсивной системы.

Упражнения

2.10. Вычислить импульсную характеристику нерекурсивной ЛДС, которая задается разностным уравнением третьего порядка.

2.11. Изобразить структурную схему нерекурсивной ЛДС третьего порядка.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Помимо временной области сигналы и линейные системы могут описываться в областях других независимых переменных. В этом случае соответствующие функции времени преобразуются в функции другого аргумента, например, в функции частоты.

Замечание. Следует различать подобные преобразования и преобразования функций одной и той же независимой переменной.

3.1. Спектральный (гармонический) анализ сигналов

Гармонический анализ – это раздел математики, который изучает представления функций в виде тригонометрических рядов и интегралов. В 1807 году Жан Батист Жозеф Фурье высказал идею о том, что любая сложная периодическая функция $x(t) = x(t + kT)$, $-\infty < t < \infty$, где – период может быть представлена в виде суммы синусоидальных и/или косинусоидальных функций с частотами (кратными основной частоте), умноженных на некоторые коэффициенты.

Основным понятием в спектральном анализе является гармоническое колебание. Его временное представление имеет следующий вид:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0); \quad (3.1)$$

или $x(t) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi_0\right)$,

где x_m – амплитуда колебания (модуль наибольшего его отклонения от нуля),

T_0 [с] – период колебания,

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ [с⁻¹], [Гц] – линейная частота,

$\omega_0 = 2\pi f_0 \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ – круговая частота,

$\varphi_0 = \frac{\Delta T}{T} 2\pi$ [рад] – начальная фаза колебания.

Для представления такого колебания в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте $\omega = \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ амплитуда сигнала равна x_m , а начальная фаза равна φ_0 , т. е.

$$x(\omega) = \begin{cases} x_m, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0; \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi_0, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0. \end{cases}$$

Значение $x_m = x(\omega_0)$ называется амплитудным спектром гармонического колебания, а $\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$ – фазовым спектром гармонического колебания. Их совокупность – просто спектр.

Определение 3.1. Гармоника синусоидальных функций периода T – это функции синуса или косинуса со значениями частоты, представляющими целые кратные основной частоты ω_0 . В гармоническом анализе вводится понятие n -й гармоники периодического колебания частоты, под которой понимают гармоническое колебание с частотой, в n раз превышающей основную частоту ω_0 . Например,

$$x'(t) = x_m \cos(2\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \cos(2 \cdot 2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{T} t - \varphi_0\right)$$

выполняет два колебания за каждые T секунд.

3.1.1. Инвариантность синусоиды для линейной системы

Если входной сигнал – гармоническое колебание $x(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0)$, то выходной сигнал линейной системы будет также синусоидальным (косинусоидальным) той же частоты ω_0 , хотя амплитуда x_m и начальная фаза φ_0 могут отличаться от первоначальных значений. Форма сигнала сохраняется, так как в линейной системе с сигналом возможны только такие операции, как умножение на постоянную величину, дифференцирование, интегрирование, задержка и суммирование.

3.2. Комплексная экспоненциальная функция

На практике наряду с синусоидальной функцией в отображении сигналов, широко применяется комплексная экспоненциальная функция вида

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (3.2)$$

Рис. 3.1 иллюстрирует представление этой функции.

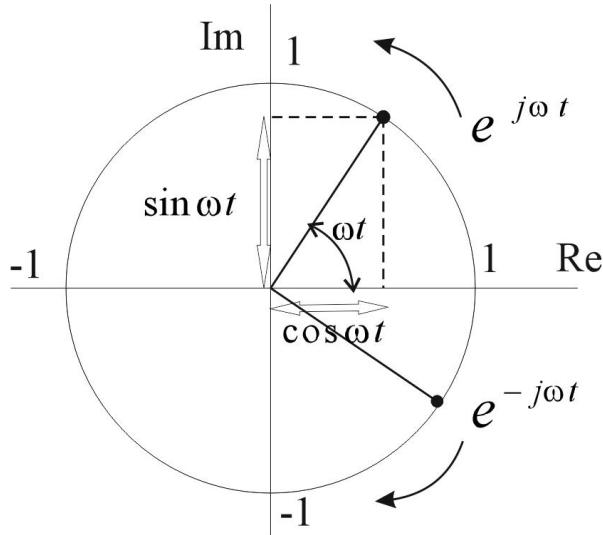


Рис. 3.1. Графическое представление функции $e^{j\omega t}$

Функция $x(t) = e^{j\omega t}$ отражает положение комплексного числа $e^{j\omega t}$ на единичной окружности в комплексной плоскости. Выражению $x(t) = e^{j\omega t}$ соответствует точка, расположенная на единичной окружности в комплексной плоскости. Прямая, соединяющая эту точку с началом координат комплексной плоскости, образует с действительной осью угол $\phi = \omega t$. Точка движется по окружности против часовой стрелки со скоростью $\omega \frac{pad}{c}$. Выражение $x(t) = e^{j\omega t}$ представляет собой единичный вектор, угол которого линейно нарастает со временем со скоростью $\omega \frac{pad}{c}$. Выражение $x(t) = e^{-j\omega t}$ соответствует вектору, угол которого линейно нарастает со временем в противоположном направлении с той же скоростью $\omega \frac{pad}{c}$. Поскольку

$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = (e^{j\omega t})^*$,
где $(e^{j\omega t})^*$ обозначает комплексно-сопряженную функцию, $e^{-j\omega t}$ и $e^{j\omega t}$ сопряженные функции.

Следовательно, сигналы вида $x_1(t) = e^{-j\omega t}$ и $x_2(t) = e^{j\omega t}$ изменяются с одинаковой частотой. Понятие отрицательной частоты следует из данных представлений. Сумма этих сигналов выражает действительную функцию времени:

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} = 2 \cos \omega t.$$

3.3. Дискретная комплексная экспоненциальная последовательность

В цифровых системах сигналы определяются лишь для дискретных значений времени $t = nT$. В этом случае сигнал $x(t)$, записанный как комплексная экспоненциальная функция, преобразуем следующим образом:

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \Leftrightarrow x(nT) = e^{j\omega nT} = \cos \omega nT + j \sin \omega nT, -\infty < n < \infty. \quad (3.3)$$

Для нормированной частоты $\hat{\omega}$ выражение (3.3) можно представить в виде

$$x(n) = e^{j\hat{\omega} f_d n T} = e^{j\hat{\omega} \frac{1}{T} n T} = e^{j\hat{\omega} n} = \cos \hat{\omega} n + j \sin \hat{\omega} n. \quad (3.4)$$

Определение 3.2. Функция $x(n) = e^{j\hat{\omega} n}$ называется дискретной комплексной экспоненциальной последовательностью.

Данная система функций составляет счетное бесконечное множество и определена на бесконечном интервале нормированных частот. вещественная и мнимая часть последовательности (3.4) меняется синусоидально в зависимости от n . По аналогии с непрерывным временем параметр $\hat{\omega}$ называется круговой частотой дискретной комплексной экспоненты. В формуле (3.4) частота $\hat{\omega}$ измеряется в радианах.

3.4. Конечная дискретная комплексная экспоненциальная последовательность

Экспоненциальная последовательность $x(n) = e^{j\hat{\omega} n}$ может быть задана на конечном интервале времени $[0, N]$, где N – целое положительное число. Тогда величина NT определяет основной период дискретной комплексной экспоненциальной последовательности. В этом случае значение $\Delta f = \frac{1}{NT}$ – основная линейная частота последовательности. Круговая частота

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{NT}$$

определяет период дискретизации по частоте. Абсолютное значение непрерывной частоты с учетом дискретизации переменной частоты равно

$$\omega = k\Delta\omega, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Далее выполним следующее преобразование последовательности:

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{j\hat{\omega} n} = e^{j\frac{\omega n}{\Delta\omega}} = e^{j\omega n T} = e^{jk\Delta\omega n T} = e^{j\frac{2\pi}{NT} kn T} = e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = \\ &= \cos \frac{2\pi}{N} kn + j \sin \frac{2\pi}{N} kn. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Определение 3.3. Функция вида

$$\text{def}(kn) = e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N} kn\right) = \cos \frac{2\pi}{N} kn - j \sin \frac{2\pi}{N} kn$$

называется конечной дискретной комплексной экспоненциальной функцией (ДЭФ) (последовательностью).

Введем обозначение $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Тогда функция

$$W^{kn} = \text{def}(kn) = e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, k = 0, 1, \dots, N - 1, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

называется поворачивающим множителем. Так как показатель степени комплексного числа W^{kn} со знаком «плюс», то функция $\text{def}(kn) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ описывает точку, которая движется по окружности в направлении часовой стрелки. В выражении (3.5) переменные времени n и k частоты изменяются дискретно, в отличие от (3.4), где время изменяется дискретно, а частота ω непрерывно. Огибающая дискретных значений функции $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ соответствует функции $e^{j\hat{\omega}n}$. Рис. 3.2 иллюстрирует графическое представление функции W^{kn} . Когда переменная n последовательно принимает значения $0, 1, \dots, N - 1$, то через N шагов комплексный вектор ДЭФ проходит 2π радиан или совершает один оборот на комплексной плоскости. Вращаясь, вектор ДЭФ занимает на плоскости только N положений.

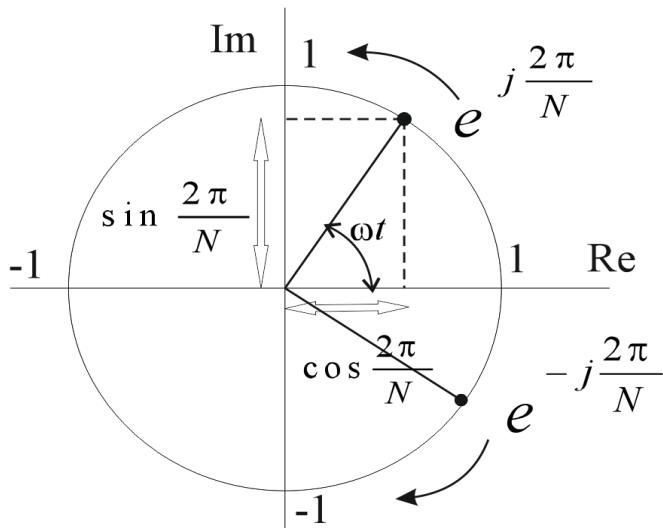


Рис. 3.2. Графическая иллюстрация функции $W^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Функция W^{kn} соответствует единичному вектору на комплексной плоскости, угол которого линейно нарастает со временем. Модуль комплексного числа W^{kn} равен

$$|W^{kn}| = \left| e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right| = 1, \text{ а его аргумент } \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}W^{kn}}{\text{Re}W^{kn}}.$$

Пример 3.1. Вычислим значения аргумента φ (фазы) вектора ДЭФ для $k = 1, n = 1, 2, \dots, 8, N = 8$.

Решение. Значения фазы определяются как

$$\varphi_n = n \varphi, \text{ где } \varphi = -\frac{2\pi}{N} \text{ и}$$

соответственно равны $\varphi = (-45^\circ, -90^\circ, \dots, -315^\circ, 360^\circ)$. Угол φ линейно нарастает со временем $t = nT$, где T – интервал дискретизации.

Пример 3.2. Пусть $k = 2, n = 1, 2, \dots, 8, N = 8$. Значения фазы φ вектора ДЭФ соответственно равны

$$\varphi = (-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, -360^\circ, -450^\circ, -540^\circ, -630^\circ, -720^\circ).$$

Как видно, через 8 шагов комплексный вектор совершает два оборота на комплексной плоскости за то же время t , что и в примере 3.1. Вектор ДЭФ

движется со скоростью $\frac{2\pi}{N}k$ [рад в временной отсчет]. Параметр k значения $\frac{2\pi}{N}k$ определяет скорость нарастания (изменения) фазы или частоту функции W^{kn} . Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время n определяется как

$$\varphi = \left(\frac{2\pi}{N}\right)n.$$

Таким образом, частота функции W^{kn} – это число оборотов, совершаемых вектором ДЭФ на интервале ее определения N . На рис. 3.3 показаны положения вектора ДЭФ на комплексной плоскости примера 3.1.

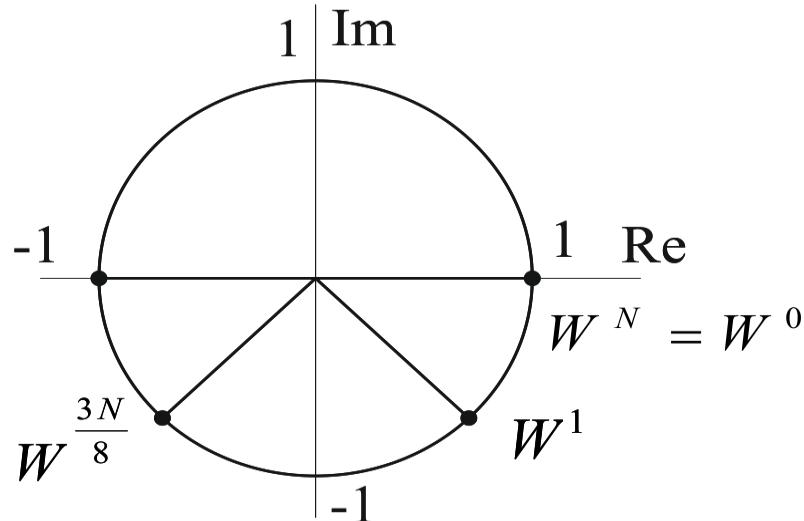


Рис. 3.3. Положения вектора ДЭФ

3.5. Представление периодической функции рядом Фурье

Следующим важным понятием гармонического анализа сигнала является спектр сигнала. Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих.

Любой сигнал $x(t)$, описываемый периодической функцией времени, удовлетворяющей условиям Дирихле (модели реальных сигналов им удовлетворяют), можно представить в виде суммы гармонических колебаний, называемой рядом Фурье:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t, \quad (3.6)$$

где $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ – среднее значение сигнала за период, или постоянная составляющая сигнала; $\{a_k\}, \{b_k\}$ – множества коэффициентов.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt, k = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt, k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Из формул (3.6–3.8) следует, что функцию $x(t)$ можно представить множеством действительных чисел $\{a_0, a_k, b_k\}$.

3.6. Комплексная форма ряда Фурье

С целью упрощения расчетов часто используют вместо тригонометрической формы записи ряда Фурье его комплексную форму. Расчет спектров сигналов в комплексной области значительно проще, поскольку нет необходимости рассматривать отдельно коэффициенты a_k и b_k тригонометрической формы записи ряд Фурье. С учетом формул Эйлера

$$\cos k\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t});$$

$$\sin k\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t});$$

где $e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$ – комплексная экспоненциальная функция.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}.$$

В этом случае $x(t)$ определяется множеством комплексных чисел $\{C_k\}$:

$$C_0 = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0;$$

$$C_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = |C_k|e^{j\varphi_k};$$

$$\text{где } |C_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\text{Im}C_k}{\text{Re}C_k}\right) = \tan^{-1}\frac{-b_k}{a_k}, & k = 1, 2, \dots \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Совокупность комплексных амплитуд C_k называют комплексным спектром периодического сигнала. Совокупность значений $|C_k|$ и φ_k называется спектром периодического сигнала. Амплитуды гармоник $|C_k|$ характеризуют амплитудный спектр, а начальные фазы φ_k – фазовый спектр. Угол φ_k отражает ориентацию комплексного вектора относительно направления действительной оси. На рис. 3.4 показана геометрическая интерпретация C_k .

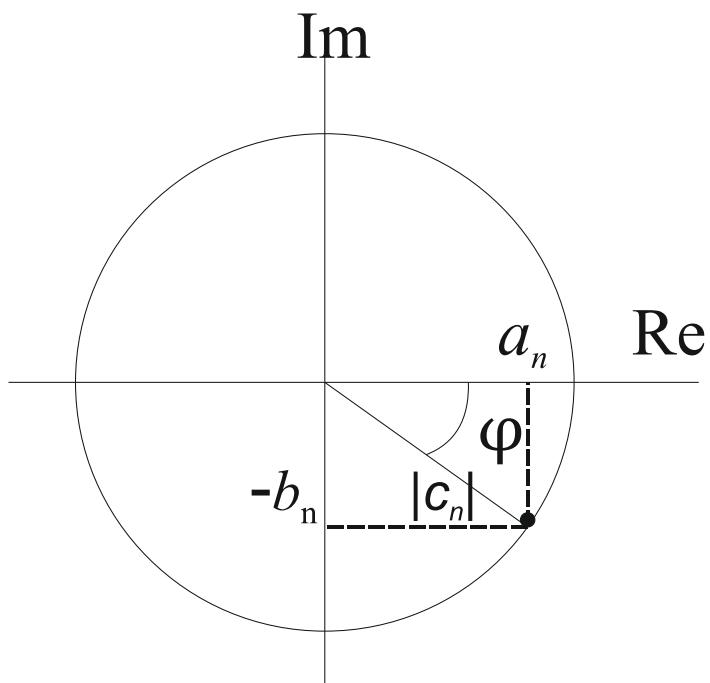


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация спектра

Таким образом, спектр периодического сигнала представляется в виде постоянной составляющей и бесконечного числа гармонических колебаний (синусоидальных или косинусоидальных) с соответствующими амплитудами и начальными фазами. На рис. 3.5 и 3.6 показан амплитудный и фазовый спектр некоторого периодического фрагмента речевого сигнала.

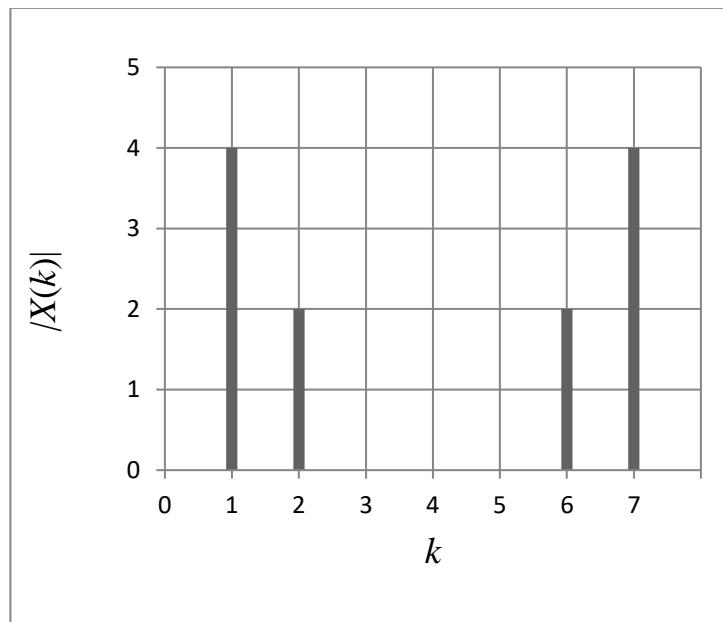


Рис. 3.5. Амплитудный спектр

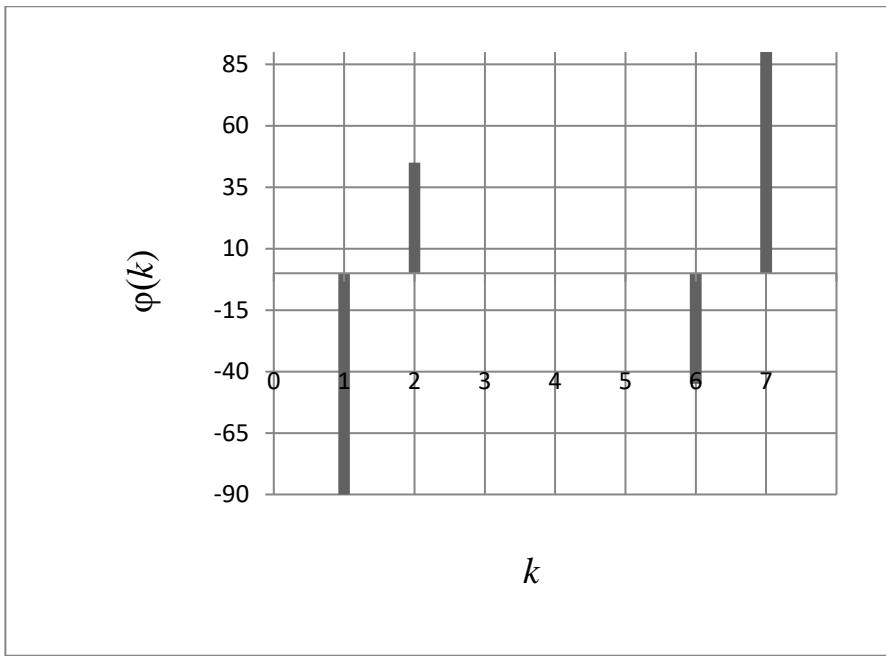


Рис. 3.6. Фазовый спектр

Каждая гармоническая составляющая изображена вертикальными отрезками, длины которых равны ее амплитуде и фазе. Как видно, спектр периодического сигнала является дискретным. Частоты всех гармоник кратны основной частоте. Это означает, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты 0, 1, 2 кГц и т. д. В спектре такого периодического сигнала не могут присутствовать частоты 1,5 или 1,2 кГц.

3.7. Преобразование Фурье

Когда непрерывная функция $x(t)$ не является периодической (но площадь под графиком ее модуля конечна), она может быть описана в частотной области (аргументом является непрерывная частота ω) при помощи прямого преобразования Фурье (Фурье-образ)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.9)$$

Поскольку $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, преобразование использует множество синусоидальных функций. Значение функции $X(j\omega)$ в области ее определения определяется интегралом по всем значениям функции $x(t)$. Значения функции $x(t)$ умножаются на синусы и косинусы разных частот. Область значений переменной ω , на которой принимает свои значения функция $X(j\omega)$, называется частотной областью, поскольку значения переменной ω определяют частоты составляющих преобразование.

Замечание. Значения переменной t также влияют на частоты, но так

как по этой переменной производится интегрирование, это влияние одинаково для всех значений переменной ω .

Комплексная функция $X(j\omega)$ соответствует комплексным коэффициентам C_n ряда Фурье. Различие состоит в том, что при разложении в ряд Фурье получается набор гармоник в значениях $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Преобразование Фурье формирует непрерывный спектр $X(j\omega)$, соответствующий огибающей этих гармоник. Преобразование Фурье можно представить призмой, которая разлагает функцию $x(t)$ на различные составляющие в зависимости от ее частотного содержания.

Функция $x(t)$ может быть полностью восстановлена при помощи обратного преобразования Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.10)$$

где $X(j\omega)$ указывает вес, который придается выражению $e^{j\omega t}$.

Преобразование Фурье описывает функцию с помощью совокупности составляющих ее частот.

Таким образом, преобразование Фурье позволяет работать в Фурье-области, а затем вернуться во временную область определения функции без потери информации.

Так как любая функция может быть представлена совокупностью синусоид и/или косинусоид, линейное преобразование произвольного сигнала можно анализировать в три этапа, а именно:

- представлять сигнал в виде комбинации синусоид;
- рассчитывать отклик на каждую из этих отдельных синусоид
- комбинировать отдельные результаты.

3.8. Комплексная частотная характеристика линейной дискретной системы

Вычислим отклик линейной стационарной системы на входную последовательность $x(n) = e^{j\hat{\omega}n}$. Эта последовательность функционально связана с дискретизированной синусоидой с частотой ω . Отличительной особенностью сигнала (со свойством инвариантности синусоиды) является то, что откликом ЛДС остается синусоидальная последовательность с той же частотой, но с другой амплитудой и начальной фазой, которые определяются параметрами ЛДС. Далее для упрощения записи формул будем использовать обозначение нормированной частоты $\hat{\omega}$ как ω .

Если система характеризуется импульсной характеристикой $h(n)$, то

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega n} e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

Вводя обозначение

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}, \quad (3.11)$$

отклик системы можно записать как

$$y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}). \quad (3.12)$$

Таким образом, для последовательности $x(n) = e^{j\omega n}$ отклик совпадает с входной последовательностью с точностью до комплексного множителя $H(e^{j\omega})$. Множитель $H(e^{j\omega})$ называется комплексной частотной характеристикой (КЧХ) системы, импульсная характеристика которой $h(n)$.

Из формулы (3.12) следует, что $H(e^{j\omega})$ описывает изменение комплексной амплитуды комплексной экспоненты (входного сигнала) в зависимости от значений нормированной частоты ω .

Замечание. Выражение (3.11) определяет прямое преобразование Фурье функции $h(n)$.

С учетом нулевых начальных условий ($x(n) \equiv 0, y(n) \equiv 0 \text{ при } n < 0$), прямое преобразование Фурье

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (3.13)$$

Из формулы (3.13) следует, что комплексная частотная характеристика $H(e^{j\omega})$ является непрерывной периодической функцией с периодом 2π . Свойство непрерывности объясняется тем, что частота изменяется непрерывно. Периодичность КЧХ следует из подстановки $(\omega \pm 2\pi k)$ в уравнение (3.13)

$$H(e^{j(\omega \pm k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega \pm 2\pi k)n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$e^{-j(\omega \pm 2\pi k)n} = e^{-j\omega n} e^{\pm j2\pi kn} = e^{-j\omega n} (\cos 2\pi kn \pm \sin 2\pi kn) = e^{-j\omega n}$,
при целых k получаем

$$H(e^{j(\omega \pm k)}) = H(e^{j\omega}).$$

Из этого же следует, что ЛДС будет иметь тот же отклик на комплексные экспоненты частот ω и $(\omega \pm 2\pi k)$.

Функция $H(e^{j\omega})$ 2π периодична, поэтому достаточно определения значений $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длиной 2π , т. е.

$$0 \leq \omega < 2\pi \text{ или } -\pi < \omega \leq \pi.$$

Для согласования с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называют частоты, близкие к нулю, а верхними – частоты, лежащие около $\pm\pi$.

В общем случае $H(e^{j\omega})$ – комплексная функция. В алгебраической форме она выражается через действительную и мнимую части

$$H(e^{j\omega}) = \operatorname{Re} H(e^{j\omega}) + j\operatorname{Im} H(e^{j\omega})$$

или в показательной форме через модуль и аргумент, т. е.

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\arg H(e^{j\omega})} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi},$$

где $\arg H(e^{j\omega}) = \varphi$ – значение фазочастотной характеристики на частоте ω .

Пример 3.3. Вычислим комплексную частотную характеристику идеальной системы задержки, определяемой формулой $y(n) = x(n - n_d)$, n_d – фиксированное натуральное число.

Решение. Пусть на входе действует сигнал $x(n) = e^{j\omega n}$. Отклик системы равен

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{j\omega n} e^{-j\omega n_d}.$$

Как видно, при любом значении ω выходной сигнал пропорционален входному сигналу. Комплексный коэффициент пропорциональности зависит от значения частоты ω и величины задержки n_d . Тогда частотная характеристика системы задержки

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}.$$

Определить КЧХ можно и через импульсную характеристику системы. Для системы $y(n) = x(n - n_d)$ импульсная характеристика равна

$$h(n) = u_0(n - n_d).$$

По формуле (3.13) получаем

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(n - n_d)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d} \\ &= \cos n_d \omega - j \sin \omega n_d. \end{aligned}$$

Например, пусть: $h(n) \equiv 0, n < 0; 0 \leq n \leq 2; n_d = 2$.

Комплексная частотная характеристика системы

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^2 u_0(n-2)e^{-jn\omega} = u_0(-2)e^{-j\omega_0} + u_0(-1)e^{-j\omega_1} + u_0(0)e^{-j\omega_2} \\ = e^{-j\omega_2}.$$

Амплитудная частотная характеристика системы (модуль КЧХ) определяется как

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(\operatorname{Re} H(e^{j\omega}))^2 + (\operatorname{Im} H(e^{j\omega}))^2} = \sqrt{\cos^2 \omega n_d + \sin^2 \omega n_d} = 1.$$

Фаза КЧХ вычисляется по формуле

$$\arg H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})} = \tan^{-1} \frac{-\sin \omega n_d}{\cos \omega n_d} = \tan^{-1}(-\tan \omega n_d) = -\omega n_d.$$

На рис. 3.7 изображен график модуля $|H(e^{j\omega})|$ в диапазоне частот $0 \leq \omega < 2\pi$.

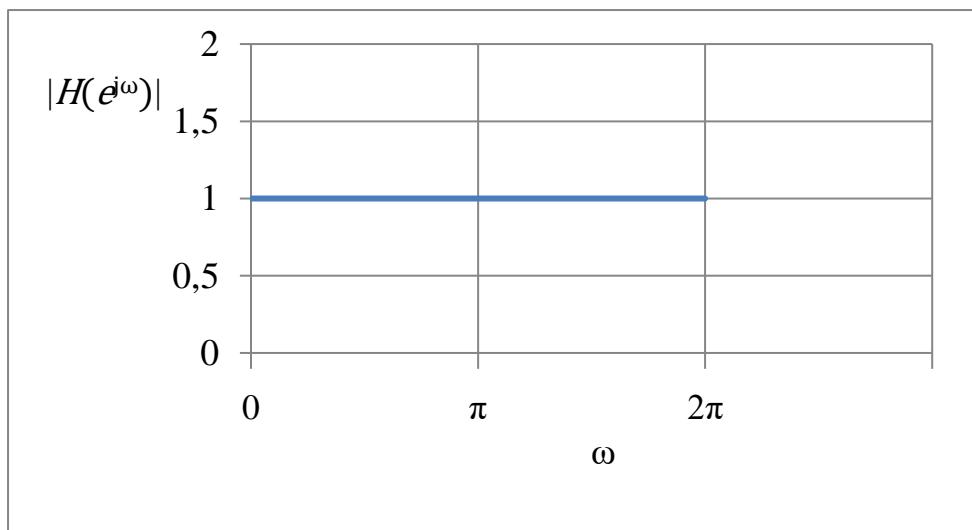


Рис. 3.7. Частотная характеристика системы

Характеристику $|H(e^{j\omega})|$ можно выразить и как функцию линейной частоты измеряемой в герцах. Нормированному значению частоты $\hat{\omega} = \frac{2\pi f}{f_d}$ соответствует линейная частота $f = \frac{\hat{\omega} f_d}{2\pi}$. Если $\hat{\omega} = 2\pi$, то

$$f = \frac{\hat{\omega} f_d}{2\pi} = \frac{2\pi f_d}{2\pi} = f_d = \frac{1}{T}.$$

Следовательно, нормированному значению частоты $\hat{\omega} = 2\pi$ соответствует значение линейной частоты дискретизации f_d .

Пусть $f_d = 1000$ Гц, $n_d = 2$. Частотная характеристика идеальной системы задержки в диапазоне $0 \leq f < f_d$ имеет вид, показанный на рис. 3.8.

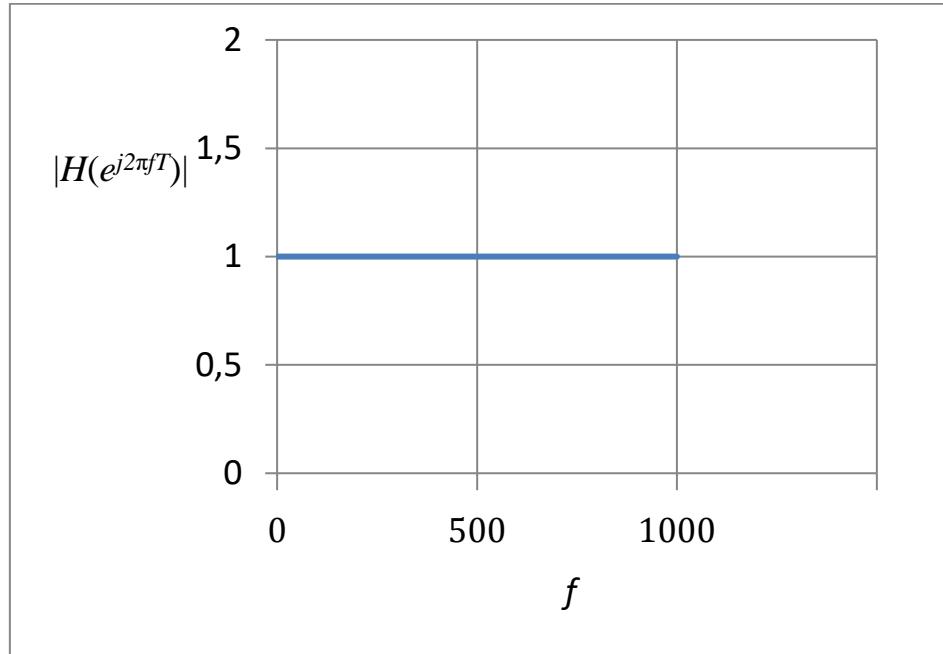


Рис. 3.8. Частотная характеристика системы с частотой дискретизации $f_d = 1000$ гц

На рис. 3.9 показан график фазы как функция частоты в диапазоне $0 \leq \omega < 2\pi$, $n_d = 2$.

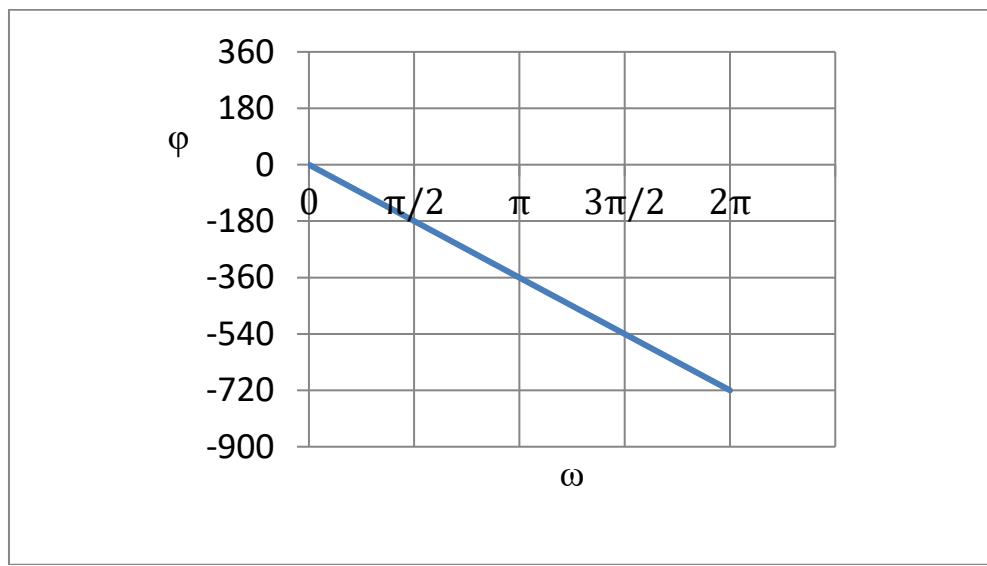


Рис. 3.9. Фазо-частотная характеристика идеальной системы задержки

Фазо-частотную характеристику $\varphi = \arg H(e^{j\omega})$ можно выразить и как функцию линейной частоты, измеряемой в герцах. Значению фазы $\varphi = -\hat{\omega}n_d$ соответствует $\varphi = -\frac{2\pi f n_d}{f_d} = -2\pi f T n_d$. Пусть $f_d = 1000$ Гц, $n_d = 2$.

Фазовая характеристика идеальной системы задержки в диапазоне $0 \leq f < f_d$ имеет вид, показанный на рисунке 3.10.

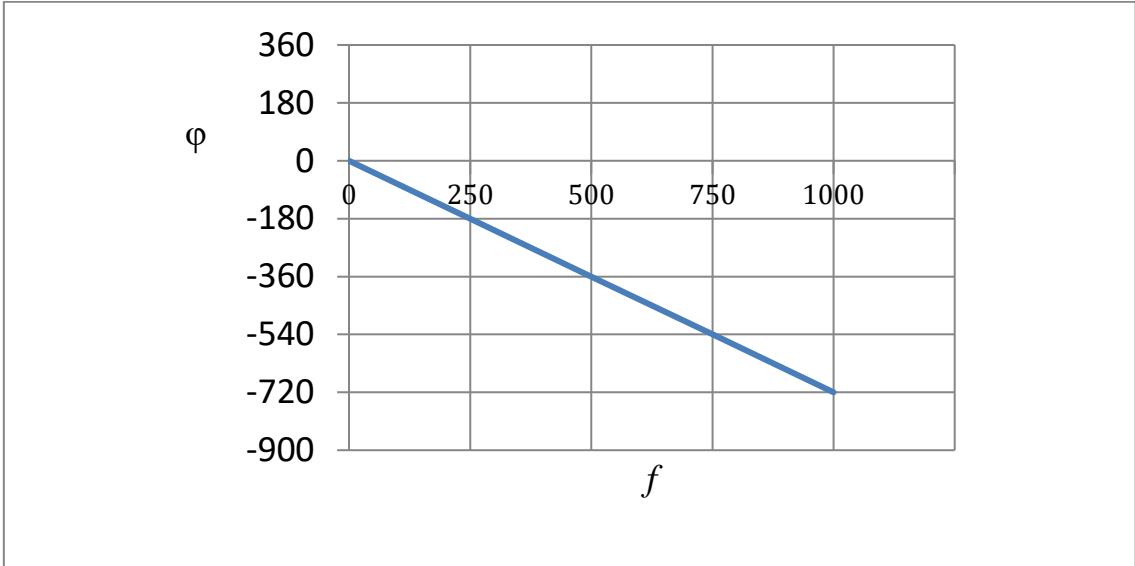


Рис. 3.10. Фазо-частотная характеристика системы

Пример 3.4. Вычислить комплексную частотную характеристику рекурсивной линейной дискретной системы с постоянными параметрами, удовлетворяющей разностному уравнению $y(n) = x(n) + ay(n - 1)$ с начальным условием: $y(-1) \equiv 0; n \geq 0; |a| < 1$.

Решение. Вначале вычислим импульсную характеристику системы. Для этого на вход системы подадим единичный импульс и произведем замену $y(n)$ на $h(n)$. Импульсная характеристика будет вычисляться по формуле

$$h(n) = u_0(n) + ah(n - 1).$$

Получим значения нескольких коэффициентов $h(n)$:

$$h(0) = u_0(0) + ah(0 - 1) = 1;$$

$$h(1) = u_0(1) + ah(1 - 1) = ah(0) = a;$$

$$h(2) = u_0(2) + ah(2 - 1) = ah(1) = a \cdot a = a^2.$$

Очевидно, $h(n) = a^n$. Частотная характеристика данной системы определяется из выражения

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n. \quad (3.14)$$

Если $0 < a < 1$, то формула (3.14) представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая сходится. Первый член l этой последовательности, когда $n = 0$, равен $l = 1$.

Знаменатель q геометрической прогрессии – это комплексное выражение $q = ae^{j\omega}$. Сумма такой прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{l}{1 - q}.$$

Комплексная частотная характеристика системы определяется как

$$S = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) перепишем иначе

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-a \cos \omega) + ja \sin \omega} = \frac{Z_1}{Z_2} = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| e^{(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (3.16)$$

где $Z_1 = |Z_1|e^{\varphi_1}$, $Z_2 = |Z_2|e^{\varphi_2}$.

Модуль комплексной частотной характеристики определяется как

$$\begin{aligned} |(He^{j\omega})| &= \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}. \end{aligned}$$

Фазовая характеристика системы записывается как

$$\arg(He^{j\omega}) = \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Напомним, аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k любое целое число. Тогда

$$\varphi_1 = \arg Z_1.$$

Так как $Z_1 = 1$, аргумент действительного положительного числа имеет главное значение ноль. Числитель (3.16)

$$1 = 1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = \cos 2\pi k + j \sin 2\pi k.$$

Следовательно, $\varphi_1 = 0$.

$$\varphi_2 = \arg Z_2 = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} Z_2}{\operatorname{Re} Z_2} = \tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}.$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}.$$

На рис. 3.11 изображены модуль $|H(e^{j\omega})|$ и фаза $\arg(H(e^{j\omega}))$ как функции нормированной частоты ω в диапазоне $0 \leq \omega < 2\pi$ при $a = 0,75$ и $a = 0,5$.

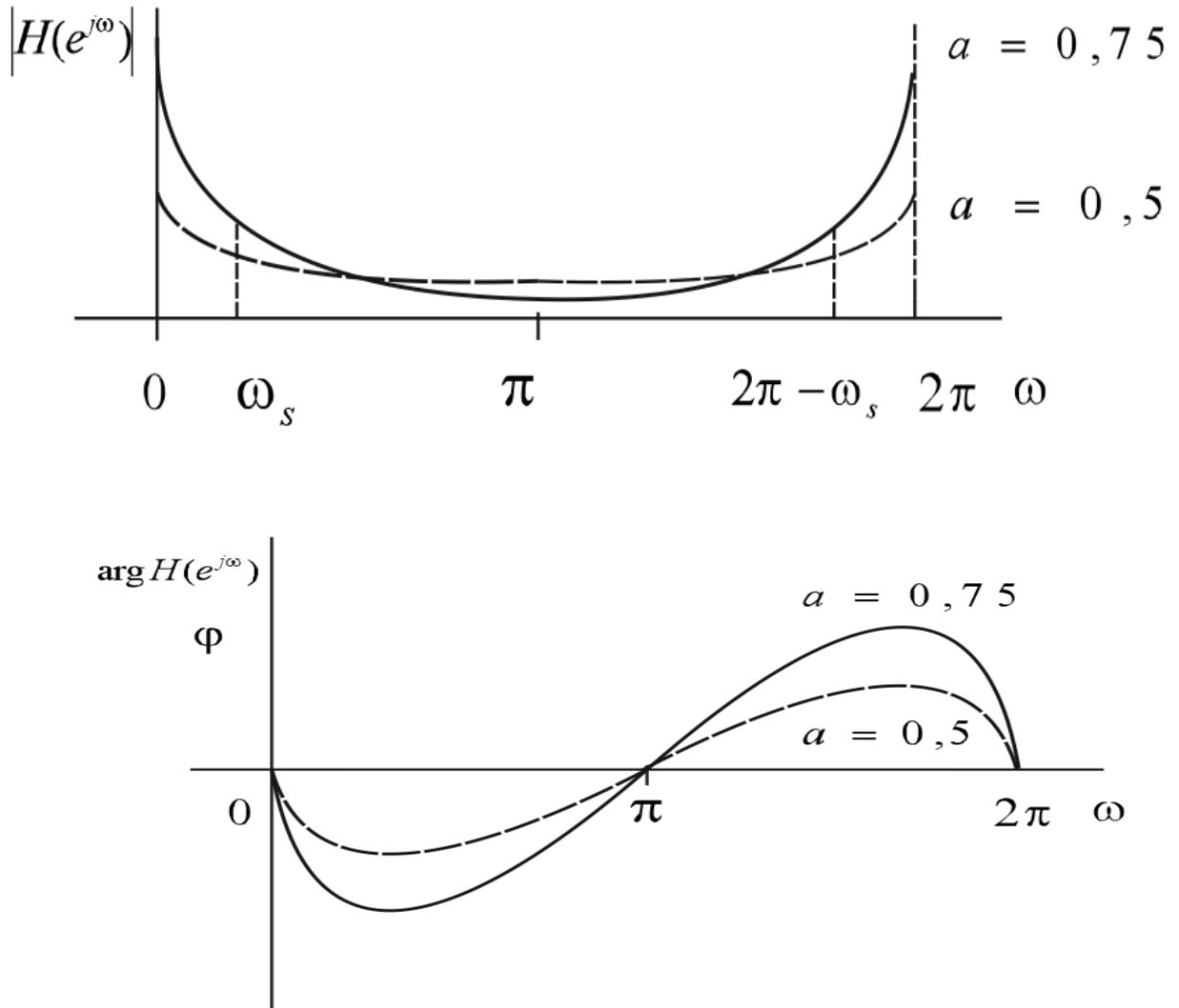


Рис. 3.11. Комплексная частотная характеристика рекурсивной линейной системы первого порядка

На полуинтервале $\pi < \omega \leq \pi$ функции $|H(e^{j\omega})|$ и $\arg(H(e^{j\omega}))$ изображены на рис. 3.12.

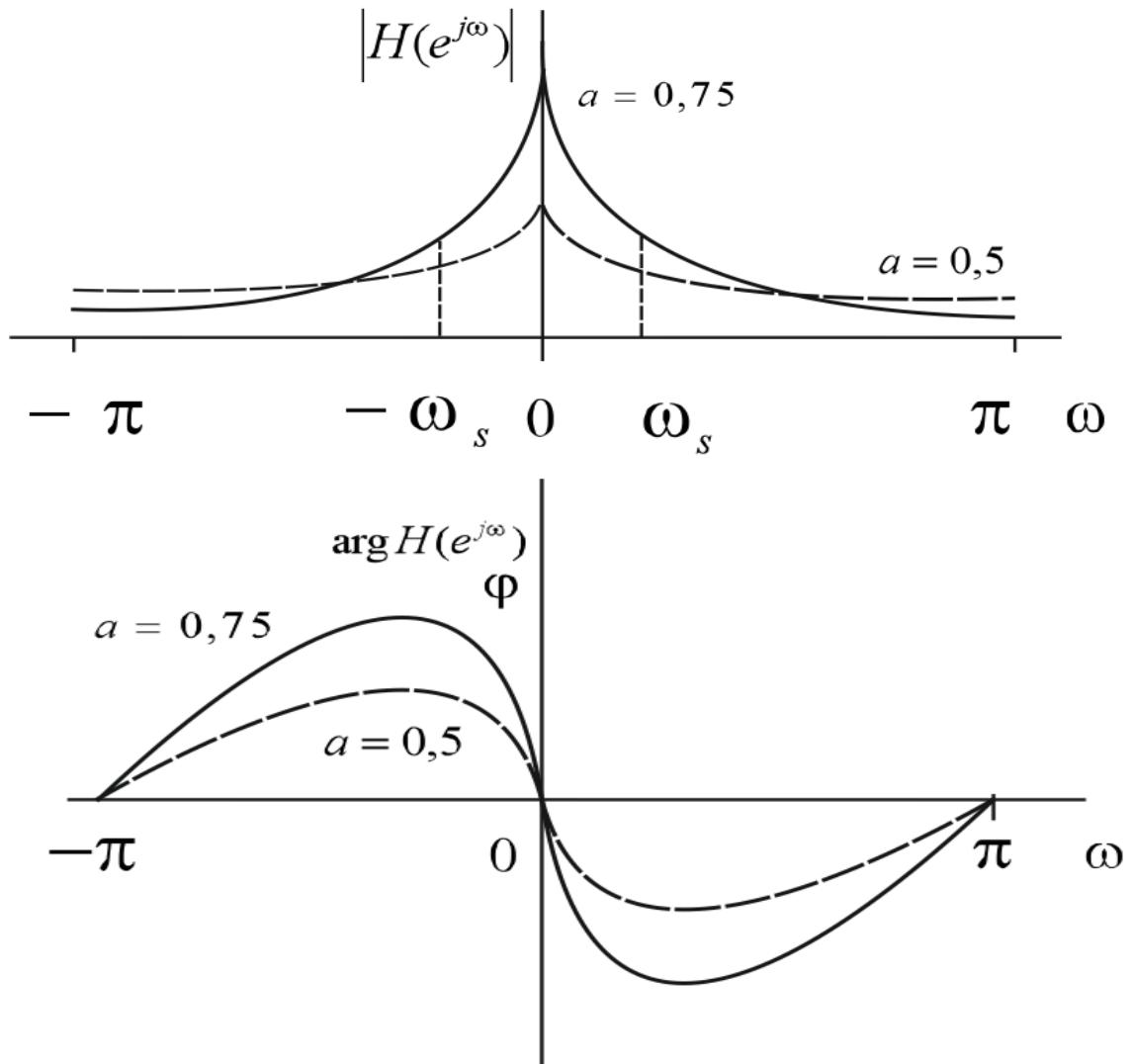


Рис. 3.11. Комплексная частотная характеристика фильтра низких частот

Как видно, функция $|H(e^{j\omega})|$ является характеристикой фильтра низких частот (ФНЧ).

Можно показать, что рекурсивная линейная система второго порядка вида

$$y(n) = x(n) + a_1x(n-1) + a_2y(n-1)$$

будет иметь частотную характеристику цифрового резонатора.

3.9. Дискретизированное по времени преобразование Фурье

Произвольную вещественную или комплексную последовательность чисел $x(n)$ можно представить в виде интеграла Фурье

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (3.17)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.18)$$

дискретизированное по времени прямое преобразование Фурье последовательности $x(n)$ или Фурье-образ последовательности $x(n)$. Преобразование $X(e^{j\omega})$ называют также спектральной функцией.

Формула (3.17) определяет понятие обратное преобразование Фурье спектральной функции $X(e^{j\omega})$. Поскольку $X(e^{j\omega})$ непрерывная периодическая функция частоты, она может быть выражена рядом Фурье. Тогда формула (3.18) представляет собой разложение периодической функции $X(e^{j\omega})$ в виде ряда Фурье, в котором коэффициентами Фурье являются значения отсчетов последовательности $x(n)$.

Обратное преобразование Фурье (3.17) можно трактовать как представление последовательности $x(n)$ через непрерывную периодическую функцию частоты $X(e^{j\omega})$. А именно, последовательность $x(n)$ можно рассматривать в виде суперпозиции (интеграла) экспоненциальных сигналов с комплексными амплитудами $X(e^{j\omega})$.

Замечание. Пара преобразований Фурье существует только тогда, когда ряд (3.18) сходится.

Фурье-образ последовательности $x(n)$ в алгебраической и показательной форме записывается как

$$X(e^{j\omega}) = \operatorname{Re} X(e^{j\omega}) + j \operatorname{Im} X(e^{j\omega}), \quad (3.19)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg X(e^{j\omega})}. \quad (3.20)$$

Совокупность значений $|X(e^{j\omega})|$ и $\varphi = \arg X(e^{j\omega})$ характеризуют амплитудный спектр и фазовый спектр последовательности $x(n)$.

Сравнивая формулы

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n) e^{-j\omega n} \text{ и } H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

видим, что комплексная частотная характеристика линейной дискретной системы есть Фурье-образ ее импульсной характеристики. С помощью обратного преобразования Фурье комплексной частотной характеристики записывается импульсная характеристика системы

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

3.10. Свойства дискретизированного по времени преобразования Фурье

3.10.1. Теорема о свертке

Одним из свойств дискретизированного преобразования Фурье является свойство, определяемое как теорема о свертке.

Ранее было показано, что отклик линейной стационарной системы на последовательность $x(n) = e^{j\omega n}$ равен

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)h(n-k) = e^{j\omega n}H(e^{j\omega}), \quad (3.21)$$

где $H(e^{j\omega})$ – КЧХ системы, которая представляет собой комплексный коэффициент передачи для каждого значения частоты ω .

Используя формулу обратного преобразования Фурье для последовательности $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

и подставляя в (3.21) выражение для $x(n)$, получаем

$$y(n) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right] H(e^{j\omega}). \quad (3.22)$$

Отклик линейной системы на $x(n)$ – это суперпозиция откликов на каждую комплексную экспоненту, входящую в представление сигнала $x(n)$. В то же время отклик на каждую комплексную экспоненту получается умножением на комплексный коэффициент пропорциональности $H(e^{j\omega})$, зависящий от значения частоты ω . Промежуток интегрирования в (3.22) совпадает с периодом функции $H(e^{j\omega})$, поэтому можно записать

$$y(n) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right]. \quad (3.23)$$

Вводя обозначение

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}), \quad (3.24)$$

формула (3.23) приобретает вид

$$y(n) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right],$$

где $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ – это КЧХ свертки.

Формула (3.24) отражает связь между входом и выходом в частотной области. Выражение (3.24) – одно из важнейших свойств преобразования Фурье. Соотношение

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega, \quad (3.25)$$

представляет собой обратное преобразование Фурье от Фурье-образа свертки.

Вывод. Связь между входом и выходом линейной системы в виде операции свертки во временной области представляется операцией произведения в частотной области.

Замечание. Если дискретная система нелинейна и нестационарна, получить общее соотношение между Фурье-образами ее входной и выходной последовательностью довольно сложно.

3.10.2. Теорема о периодической свертке, или модуляция

Вычислим Фурье-образ от произведения двух последовательностей. Пусть последовательности $x(n)$ и $l(n)$ имеют соответственно Фурье-образы

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n},$$

$$L(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l(n) e^{-j\omega n}.$$

Сформируем последовательность $z(n) = l(n)x(n)$. Здесь $z(n)$ есть результат перемножения двух последовательностей – процесс модуляции. Фурье-образ последовательности $z(n)$ определяется из выражения

$$Z(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) l(n) e^{-j\omega n}. \quad (3.26)$$

Выразим Фурье-образ $Z(e^{j\omega})$ от произведения двух последовательностей $z(n) = l(n)x(n)$ через обратное преобразование Фурье последовательности

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta. \quad (3.27)$$

Подставляя в (3.26) значение (3.27), получаем

$$Z(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta) l(n) e^{-j\omega n}.$$

С учетом линейности и стационарности дискретной системы, свойства однородности, можно записать последнее выражение в виде

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} l(n) e^{-j(\omega-\theta)n} d\theta. \quad (3.28)$$

Составляющая

$$L(e^{j(\omega-\theta)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l(n) e^{-j(\omega-\theta)n} d\theta$$

представляет собой Фурье-образ последовательности $l(n)$ в области нормированных значений частоты $(\omega - \theta)$. С учетом этого, выражения (3.28) приобретет вид

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) L(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (3.29)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3.29) является периодической сверткой двух периодических функций в частотной области. Промежуток интегрирования свертки совпадает с периодом подынтегральных функций. Как следует из (3.29), произведению дискретных последовательностей соответствует периодическая свертка их Фурье-образов.

Для сравнения напомним, что произведению периодических Фурье-образов сворачиваемых последовательностей соответствует свертка последовательностей во временной области.

Таким образом, имеем, так называемые соотношения двойственности:

$$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \leftrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k);$$

$$x(n)h(n) = z(n) \leftrightarrow Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) L(e^{j(\omega-\theta)n}) d\theta.$$

Замечание. Соотношение (3.29) используется при проектировании цифровых фильтров методом весовых функций (окон).

3.11. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между времененным и частотным представлением сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям. Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) последовательности $x(n)$ определяет дискретную последовательность $X(k)$ в частотной области

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.30)$$

где k – индекс ДПФ в частотной области.

Отдельное значение $X(k)$ есть сумма почленных произведений входной последовательности отсчетов на косинусоиду и синусоиду, частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается k их полных периодов. В алгебраической форме

$$X(k) = \text{Re}X(k) + j\text{Im}X(k).$$

В показательной форме

$$X(k) = |X(k)|e^{j\arg X(k)}, \arg X(k) = \varphi.$$

Обратное ДПФ (ОДПФ) имеет следующий вид:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.31)$$

3. Спектральный анализ речевого сигнала с помощью ДПФ

Спектральный анализ находит применение во многих приложениях для решения задач в авиации и космонавтике, транспорте, строительства, идентификационных системах, биомедицине и пр. Любой сигнал как функцию времени математически можно альтернативным способом представить зависимостью амплитуды от частоты и зависимостью фазы от частоты, т. е. амплитудным и фазовым спектрами. С помощью анализа Фурье сигналы представляются суммой гармонических (синусоидальных) сигналов, каждый из которых характеризуется своей частотой, амплитудой и начальной фазой. Спектр дает информацию о частотном содержании сигнала. Амплитудный и фазовый спектры часто дают больше полезной информации, чем форма сигнала. Частоты синусоидальных составляющих периодического сигнала кратны первой гармонике

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]; f_0 = \frac{1}{T_0} [\text{с}^{-1}], [\Gamma_{\text{ц}}],$$

где T_0 – период сигнала. Расстояние между соседними гармониками одинаково и равно $\Delta f = \frac{1}{T_0}$ (или ω_0) и называется разрешением по частоте. Для дискретной последовательности с числом отсчетом N и периодом T_0 частота первой гармоники зависит от величины частоты дискретизации. Если частота дискретизации

$$\omega_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T_d}, f_d = \frac{1}{T_d},$$

где T_d – временной интервал дискретизации, то разрешение по частоте определяется как

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{NT_d}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]. \quad (3.32)$$

Разрешение по частоте в герцах находится из выражения

$$2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{NT_d} = \frac{2\pi f_d}{N}$$

и равно

$$\Delta f = \frac{f_d}{N}, [\Gamma_{\text{ц}}]. \quad (3.33)$$

Таким образом, чем длительнее сигнал, тем большим будет разрешение спектральных составляющих.

3.11.1. Спектральный анализ фрагмента речевого сигнала

С помощью ДПФ выполнить N – точечный спектральный анализ речевого сигнала.

Пример 3.5. Вычисление ДПФ фрагмента квазипериодического речевого сигнала $x(t)$. Форма сигнала показана на рис. 3.11.

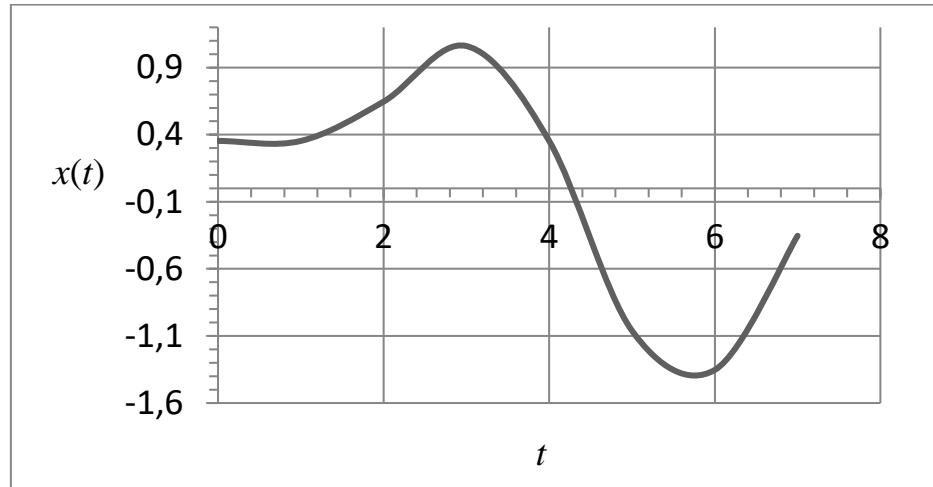


Рис. 3.11. Фрагмент речевого сигнала

Исходные параметры дискретизации: $f_d = \frac{1}{T_d} = 8000$ Гц ($T_d = 125$ мкс), $N = 8$. После дискретизации $x(t)$ получена дискретная вещественная последовательность

$$\begin{aligned} x(n) &= \{x(0), x(1), \dots, x(7)\} = \\ &= (0,35; 0,35; 0,64; 1,06; 0,35; -1,06; -1,35; -0,35). \end{aligned}$$

Форма дискретного сигнала показана на рис. 3.12.

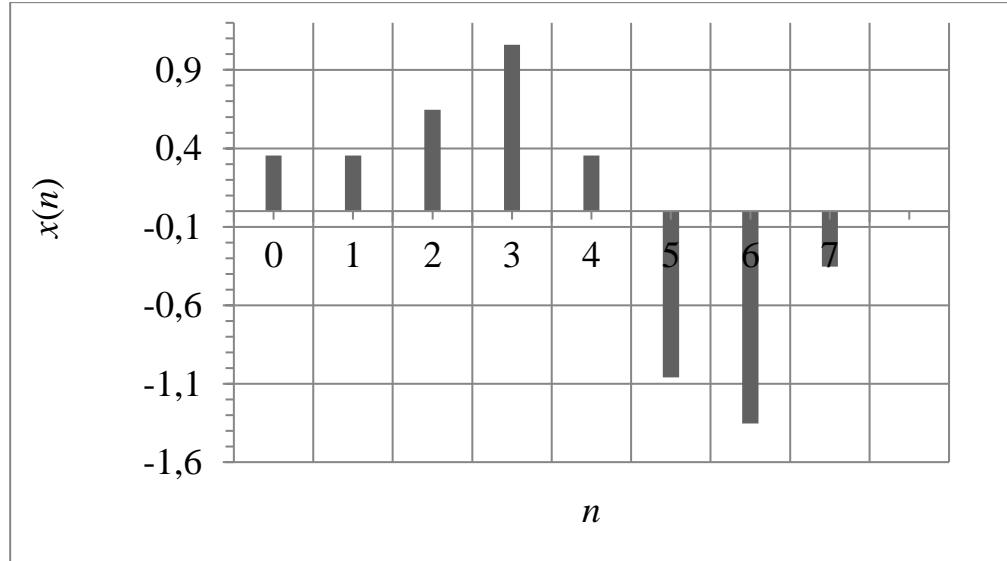


Рис. 3.12. Дискретный речевой сигнал

ДПФ определяет спектральный состав фрагмента речи в 8 точках частотной оси. N разных частот анализа ДПФ определяется выражением

$$\frac{kf_d}{N}, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Коэффициенты ДПФ будем определять по формуле

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cos \frac{\pi}{8} nk - jx(n) \sin \frac{2\pi}{8} nk, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Коэффициент $k = 1$ задает значение частоты основной гармоники

$$\frac{kf_d}{N} = \frac{8000}{8} = 1000 \text{ Гц.}$$

Коэффициент $X(0)$ характеризует амплитуду составляющей входного сигнала имеющего частоту 0 Гц или постоянную составляющую:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{0n} = \sum_{n=0}^7 x(n) = 0;$$

$$X(0) = 0,0 + j0,0 \quad \varphi(0) = 0.$$

Коэффициент $X(1), k = 1$ задает амплитуду основной гармоники частотой

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cos \frac{\pi}{8} n1 - jx(n) \sin \frac{2\pi}{8} n1 = 0,0 - j4,0.$$

В алгебраической форме $X(k) = \operatorname{Re}X(k) + j\operatorname{Im}X(k)$. Величина амплитуды основной гармоники $|X(1)| = 4$.

В показательной форме $X(k) = |X(k)|e^{j\arg X(k)}$, $\arg X(k) = \varphi$. Фазовый угол основной гармоники

$$\varphi(1) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}X(1)}{\operatorname{Re}X(1)} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Как видно, отдельное значение $X(k)$ есть сумма почленных произведений входной последовательности отсчетов на косинусоиду и синусоиду, частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается k их полных периодов. В нашем примере для $k = 1$ на интервале наблюдения из 8 отсчетов укладывается один период синусоиды (самая низкочастотная компонента).

Для $k = 2$ на интервале из 8 отсчетов укладывается два периода синусоиды и т.д. При этом независимо от того, какова частота дискретизации f_d и независимо от величины N .

$$X(2) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cos \frac{2\pi}{8} 2n - j x(n) \sin \frac{2\pi}{8} 2n = 1,414 + j1,414$$

$$|X(2)| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2.$$

Фазовый угол второй гармоники

$$\varphi(2) = \arctg \frac{1,414}{1,414} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты ДПФ:

$$X(3) = 0,0 - j0,0;$$

$$X(4) = 0,0 - j0,0;$$

$$X(5) = 0,0 - j0,0;$$

$$X(6) = 1,414 - j1,414, |X(6)| = 2, \varphi(6) = \arctg \frac{-1,414}{1,414} = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$X(7) = 0,0 + j4,0, \varphi(7) = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 3.13 показан график амплитудного спектра $|X(k)|$ фрагмента речевого сигнала. Как видно, исследуемый сигнал имеет компоненты с частотами $f_1 = 1$ кГц и $f_2 = 2$ кГц. Амплитуда первой гармоники в 2 раза выше амплитуды второй гармоники с частотой $f_2 = 2$ кГц. На рис. 3.14 отображены фазочастотные свойства сигнала. Между первой и второй гармониками имеется фазовый сдвиг величиной $\varphi = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

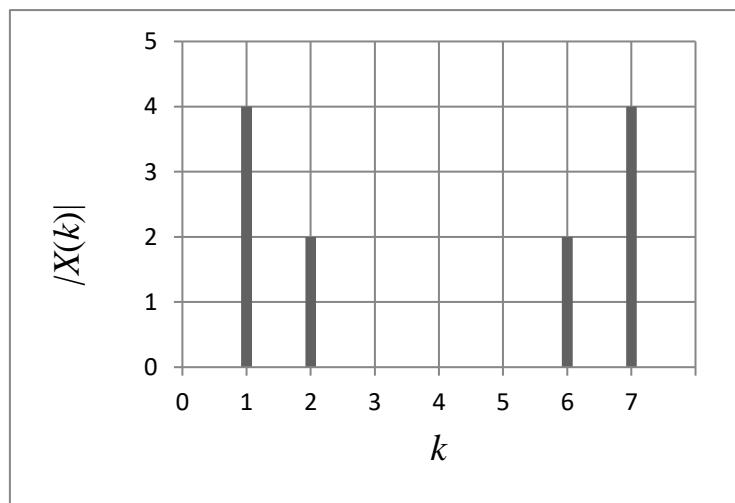


Рис. 3.13. Амплитудный спектр

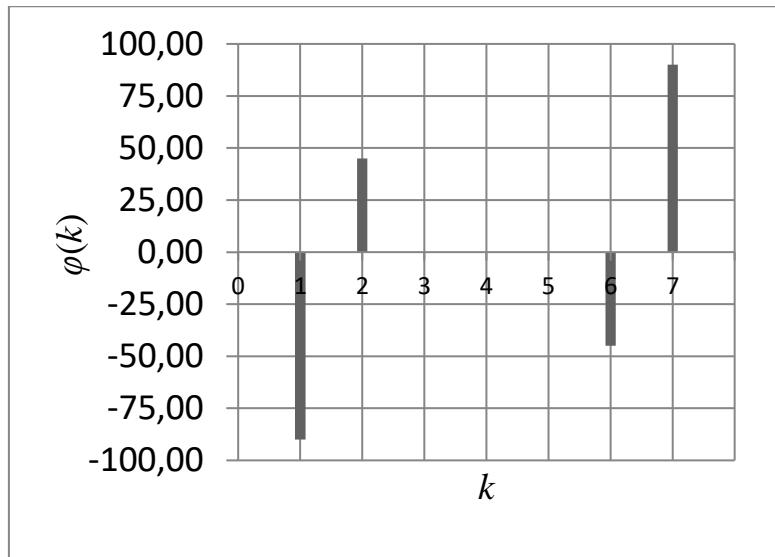


Рис. 3.14. Фазовый спектр

Замечания:

- Если сигнал содержит синусоидальную компоненту с амплитудой A_k и целым количеством периодов на N отчётах, то реальное значение амплитуды A_k равно

$$A_k = \frac{2|X(k)|}{N}.$$

В примере были получены значения $|X(1)| = 4$, $|X(2)| = 2$. Отсюда реальное значение

$$A_1 = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1, A_2 = \frac{2 \cdot 2}{8} = 0,5.$$

- Если сигнал имеет постоянную составляющую A_0 , то

$$A_0 = \frac{X(0)}{N}.$$

Замечание. Более эффективная реализация метода анализа речи достигается применением алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

3.11.3. Синтез непрерывного фрагмента речевого сигнала

Данные спектрального анализа позволяют произвести синтез сигнала. Пусть были получены следующие значения анализа:

- спектральные компоненты с частотами $f_1 = 1$ кГц и $f_2 = 2$ кГц;
- амплитуды компонент $A_0 = 0, A_1 = 1$ и $A_2 = 0,5$;
- фазовый сдвиг $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Тогда непрерывный сигнал формируется в виде суммы постоянной составляющей и двух гармоник

$$x(t) = x_0 + x_1(t) + x_2(t),$$

где $x_0 = 0$; $x_1(t) = \sin(\omega_1 t) = \sin(2\pi f_1 t) = \sin(2\pi 1000t)$;

$$x_2(t) = 0,5 \sin(\omega_2 t + \frac{3\pi}{4}) = 0,5 \sin(2\pi f_2 t + \frac{3\pi}{4}) = 0,5 \sin(2\pi 2000t + \frac{3\pi}{4}).$$

Синтезированный сигнал описывается выражением

$$x(t) = \sin(2\pi 1000t) + 0,5 \sin(2\pi 2000t + \frac{3\pi}{4}).$$

Форма непрерывного речевого сигнала $x(t)$ показана на рис. 3.15.

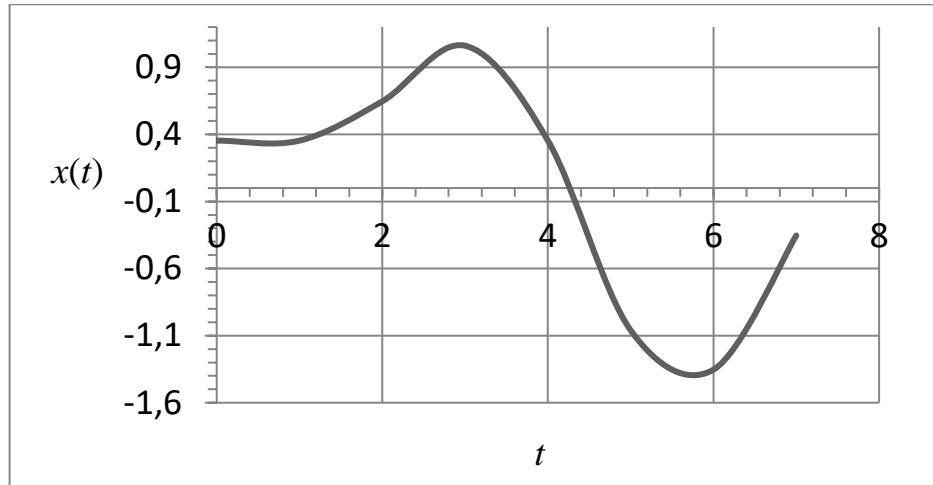


Рис. 3.15. Синтезированный сигнал

Запишем дискретную последовательность, соответствующую исходному аналоговому сигналу, обозначив интервал дискретизации T_d просто T . Так как

$$t = nT, n = 0, 1, \dots, 7, T = \frac{1}{8000}, \text{ то}$$

$$x(nT) = \sin(2\pi 1000nT) + 0,5 \sin(2\pi 2000nT + 3\pi/4),$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \sin\left(\frac{2\pi 1000n}{8000}\right) + 0,5 \sin\left(\frac{2\pi 1000n}{8000} + \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0,5 \sin\left(\frac{4\pi n}{8} + 3\pi/4\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используя выражение (3.3), получаем следующие значения отсчетов дискретного сигнала $x(n)$:

$$x(0) = \sin 0 + 0,5 \sin\left(0 + \frac{3\pi}{4}\right) = 0,5 \sin 135^\circ = 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3535;$$

$$x(1) = \sin \frac{2\pi}{8} + 0,5 \sin \left(\frac{4\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,5 \sin \frac{10\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,5 \sin \left(\frac{2\pi}{8} + \pi \right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 0,5(-\sin 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3535 ;$$

$$x(2) = \sin \frac{2\pi}{8} 2 + 0,5 \sin \left(\frac{8\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{2} + 0,5 \sin \left(\pi + \frac{3\pi}{4} \right) =$$

$$= 1 - 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,6464 ;$$

$$x(3) = 1,0607 ;$$

$$x(4) = 0,3535 ;$$

$$x(5) = -1,0607 ,$$

$$x(6) = -1,3535 ;$$

$$x(7) = -0,3535 .$$

Очевидно, вычисленные значения дискретных отсчетов совпадают с значениями отсчетами дискретизированного сигнала, рис. 3.12.

5. ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Важный класс линейных стационарных систем включает в себя системы, для которых частотная характеристика равна единице над определенным промежутком частот и нулю в остальной области. Такую характеристику имеют идеальные частотно-избирательные фильтры. Например, фильтр нижних частот фильтр, фильтр высоких частот (ФВЧ), полосовой фильтр (ПФ) (резонаторный фильтр), полосно-задерживающий фильтр (режекторный).

5.1. Идеальный частотно-избирательный фильтр нижних частот

5.1.1. Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот

Частотная характеристика $H(e^{j\omega})$ дискретного фильтра асоответствует комплексному коэффициенту передачи идеального ФНЧ с частотой среза ω_s . На рис. 5.1, а показана периодическая частотная характеристика идеального ФНЧ с периодом 2π .

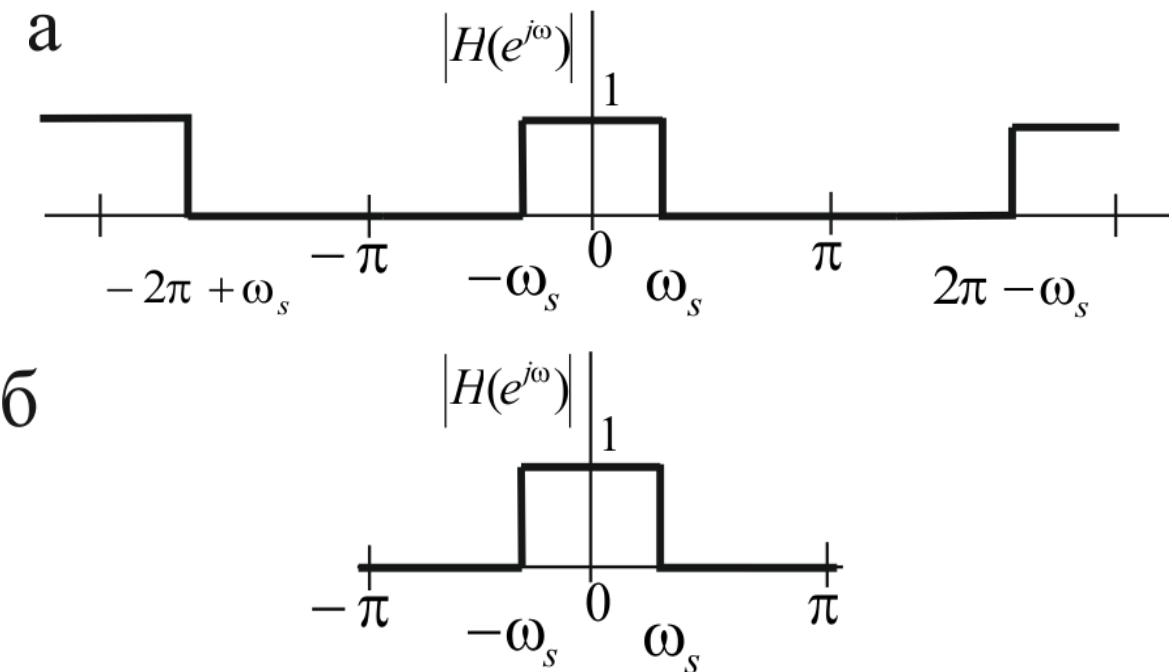


Рис. 5.1. Частотная характеристика фильтра идеального ФНЧ

Поскольку КЧХ полностью определяется своими значениями на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$, частотную характеристику ФНЧ можно рассматривать только на этом полуинтервале, рис. 5.1, б.

5.1.1.1. Вычисление импульсной характеристики идеального ФНЧ

Частотная характеристика фильтра с частотой среза $\omega_s = \frac{\pi}{2}$ на интервале $-\pi \leq \omega \leq \pi$ определяется выражением

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Пусть значение нормированной частоты среза равно $\hat{\omega}_s = \frac{\pi}{2}$. Этой частоте соответствует значение линейной частоты

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{\hat{\omega}_s f_d}{2\pi} = \frac{\pi f_d}{2 \cdot 2\pi} = \frac{f_d}{4}.$$

Например, если частота дискретизации $f_d = 10000$ Гц, то $f_s = 2500$ Гц. Область определения аналогового сигнала по частоте составляет $f = (0 - 5000)$ Гц.

Импульсная характеристика вычисляется с помощью обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2j\pi n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_s}^{\omega_s} = \frac{1}{2j\pi n} (e^{j\omega_s n} - e^{-j\omega_s n}) = \\ &= \frac{1}{2j\pi n} (\cos \omega_s n + j \sin \omega_s n - \cos \omega_s n - j \sin \omega_s n) = \\ &= \frac{2j \sin \omega_s n}{2j\pi n} = \frac{\sin \omega_s n}{\pi n}, \quad -\infty \leq n \leq \infty. \end{aligned}$$

Вычислим несколько значений коэффициентов $h(n)$. Для $n = 0$ имеем

$$h(0) = \frac{\sin \omega_s 0}{\pi 0} = \frac{0}{0}$$

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопитала, дифференцируем числитель и знаменатель по $\frac{\pi}{2}n$:

$$h(0) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для других значений n получаем:

$$h(1) = \frac{\sin \omega_s n}{\pi n} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 1}{\pi \cdot 1} = \frac{1}{\pi}, \quad h(2) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 2}{2\pi} = 0, \quad h(3) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 3}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi},$$

$$h(4) = 0, h(5) = \frac{1}{5\pi}$$

и т. д. На рис. 5.2 показана импульсная характеристика идеального ФНЧ. Как видно, коэффициенты импульсной характеристики стремятся к нулю при неограниченном возрастании n .

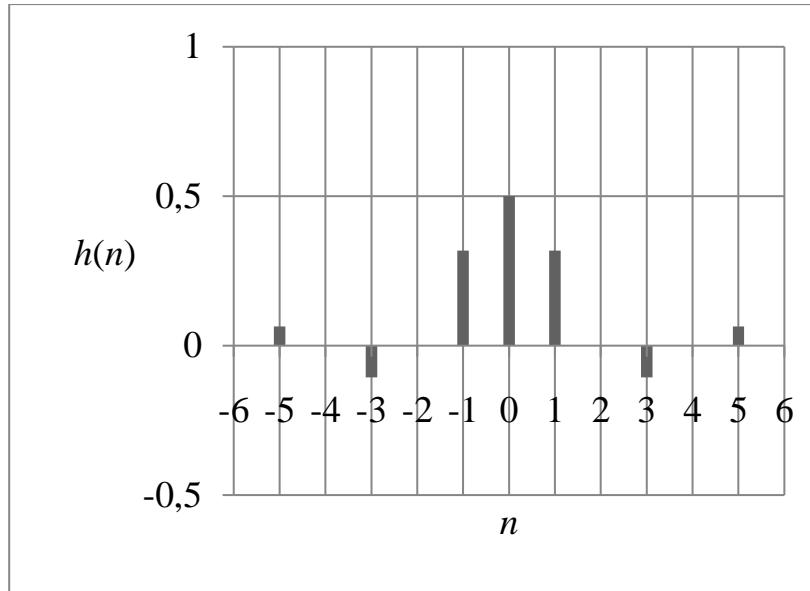


Рис. 5.2. Импульсная характеристика идеального ФНЧ (частота среза $\omega_s = \frac{\pi}{2}$).

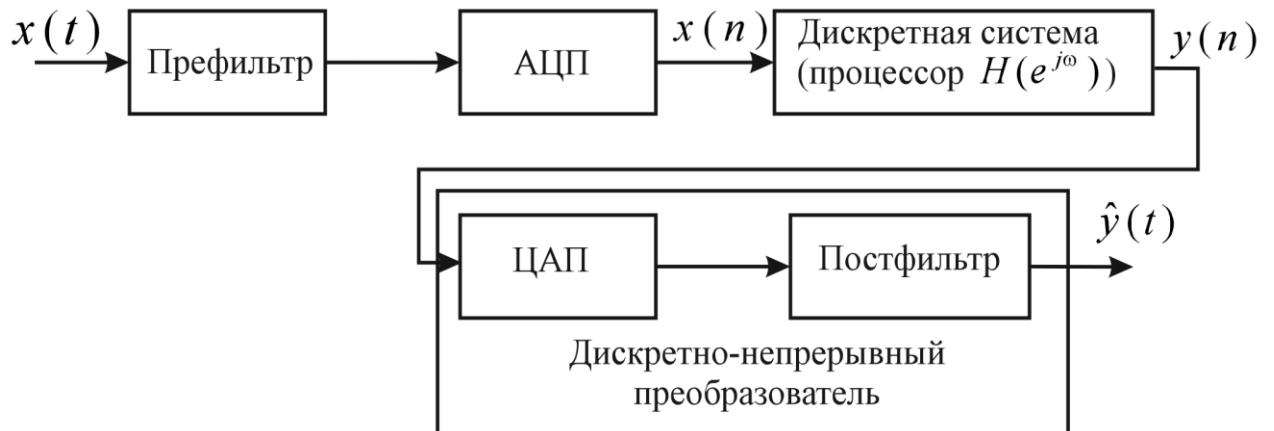
Как видно, члены последовательности $h(n)$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , но не быстрее, чем $\frac{1}{\pi}$.

5. 2. Проектирование линейных дискретных систем

5.2.1. Частотно-избирательные цифровые фильтры

В широком понимании фильтром можно назвать систему, меняющую форму исходного сигнала, т. е. меняющую амплитудно-частотную и / или фазо-частотную характеристику сигнала. Результат фильтрации – это измененный спектральный состав сигнала. Например, достигается снижение помех, улучшение или реставрация изображений, извлечение из сигналов информации, разделение сигналов, сжатие сигнала с целью эффективного использования канала связи, биомедицинская обработка сигнала, цифровое аудио и пр.

Цифровой фильтр (ЦФ) – это математический алгоритм, реализованный на аппаратном и / или программном уровне. Обобщенная структурная схема частотно-избирательного фильтра с аналоговым входом и выходом показана на рис. 5.3.



5.3. Структурная схема цифрового фильтра

Если дискретная система линейна и стационарна, то

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

где $H(e^{j\omega})$ – комплексная частотная характеристика системы, или Фурье-образ ее импульсной характеристики $h(n)$, $X(e^{j\omega})$ – Фурье-образ входной последовательности $x(n)$, $Y(e^{j\omega})$ – Фурье-образ отклика $y(n)$ дискретной системы на входную последовательность $x(n)$.

Проектирование фильтров включает в себя следующие этапы:

- спецификации необходимых свойств требований фильтра, которые зависят от приложений;
- аппроксимаций спецификаций с помощью подходящей структуры дискретная система;
- вычисления импульсной характеристики фильтра;
- анализ влияния разрядности на производительность фильтра;
- реализации цифрового фильтра, которая зависит от используемой технологии на аппаратном и / или программном уровне.

5.1.1. Спецификация требований фильтра

Спецификация требований включает такие основные свойства:

- характеристики сигнала: тип источника и получателя сигнала, интерфейс ввода-вывода, скорость передачи данных, ширина полосы частот сигнала;
- характеристики фильтра (амплитудная и / или фазовая, точность, режимы фильтрации: реальное время или моделирование);
- принцип реализации (на основе компьютерной программы на языке высокого уровня или как системы ЦОС на базе процессора);
- других требований (стоимость, габариты, потребление и пр.).

Для тех приложений, где реализуется дискретная обработка непрерывных сигналов спецификации дискретного фильтра, как и спецификации непрерывного фильтра, указываются в частотной области. Если достаточно высокая частота дискретизации обеспечивает отсутствие эффекта наложения ложных частот, то система, показанная на рисунке 5.1, ведет себя как непрерывная линейная система с комплексной частотной характеристикой $H(j\omega)$. В этом случае спецификацию дискретного фильтра выводят из спецификаций непрерывного фильтра, основываясь на понятии нормированной частоты. Комплексной частотной характеристике непрерывного фильтра $H(j\omega)$ ставится в соответствие КЧХ $H(e^{j\omega})$ дискретного фильтра, т.е. $H(j\omega) \rightarrow H(e^{j\omega})$.

Пример 5.1. Определение спецификации дискретного фильтра из спецификации ФНЧ непрерывного сигнала.

1. Частота дискретизации $f_d = 10000$ Гц ($T = 10^{-4}$ с.)
2. Модуль КЧХ фильтра $|H(j\omega)|$ (коэффициент усиления) в полосе частот $0 \leq \omega \leq 2\pi(3000)$ должен отличаться от единицы не более чем на $\pm 0,01$. Следовательно, в диапазоне частот $0 \leq f \leq 3000$ Гц неравномерность КЧХ не превышает величины 0,01.
3. Модуль КЧХ фильтра $|H(j\omega)|$ в полосе частот $2\pi(4000) \leq \omega$ не должен отличаться от единицы не более чем на $\pm 0,001$.

Требования, предъявляемые к КЧХ фильтра $|H(j\omega)|$, можно изобразить графически, рисунок 5.2.

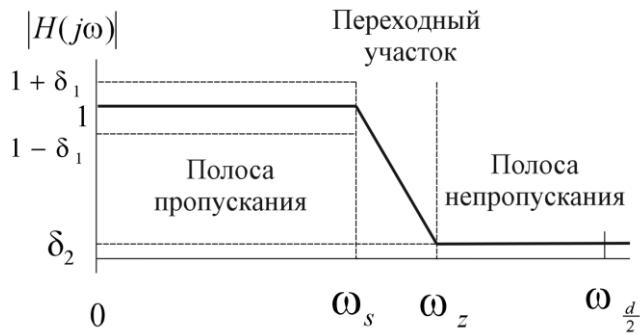


Рисунок 5.2 – Спецификации непрерывного ФНЧ

Обозначения ω_s и ω_z соответствуют значениям граничных частот полос пропускания и непропускания (подавления). Значения δ_1 и δ_2 определяют допуски на отклонение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) от номинального уровня в полосе пропускания и непропускания фильтра. Требования к характеристике $|H(e^{j\omega})|$ из спецификации непрерывного фильтра с КЧХ $|H(j\omega)|$ определяются следующим образом:

1. Частота среза (нормированное значение)

$$\hat{\omega}_s = \frac{\omega_s}{f_s} = \frac{2\pi 3000}{10000} = \frac{3}{5}\pi = 0,6\pi.$$

2. Верхнее значение частоты переходной полосы

$$\hat{\omega}_z = \frac{\omega_z}{f_s} = \frac{2\pi 4000}{10000} = \frac{4}{5}\pi = 0,8\pi.$$

3. АЧХ в полосе пропускания должна быть равна единице с допуском $\pm\delta_1$,

$$1 - 0,01 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + 0,01; -0,6\pi \leq \omega \leq 0,6\pi.$$

4. Модуль КЧХ $|H(e^{j\omega})|$ в полосе непропускания должен удовлетворять выражению

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \begin{cases} 0,8\pi \leq \omega \leq \pi \\ -\pi \leq \omega \leq -0,8\pi \end{cases}$$

Таким образом, коэффициент усиления в полосе пропускания, равный единице, изменяется от $(1+\delta_1)$ до $(1-\delta_1)$, а в полосе непропускания – от 0 до δ_2 .

Коэффициенты усиления принято выражать в децибелах. В рассматриваемом примере имеем:

- идеальный (необходимый) в полосе пропускания коэффициент усиления равен

$$20\log_{10} 1 = 0 \text{ дБ};$$

- максимальный в полосе пропускания коэффициент усиления равен

$$20\log_{10}(1 + 0,01) = 20 \cdot 0,043 = 0,086 \text{ дБ};$$

- максимальный в полосе непропускания коэффициент усиления равен

$$20\log_{10} 0,001 = -60 \text{ дБ}.$$

Эта величина характеризует минимальное затухание в полосе подавления.

Напомним, значение частоты дискретизации определяет полосу частот входного сигнала $\omega = (0 - 2\pi 5000) \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Характеристика дискретного фильтра изображена на рисунке 5.3 как график функции $|H(e^{j\omega})|$ от нормированной частоты на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. Оставшиеся части графика можно восстановить из соображений симметрии (в предположении, что импульсная характеристика $h(n)$ это вещественная последовательность).

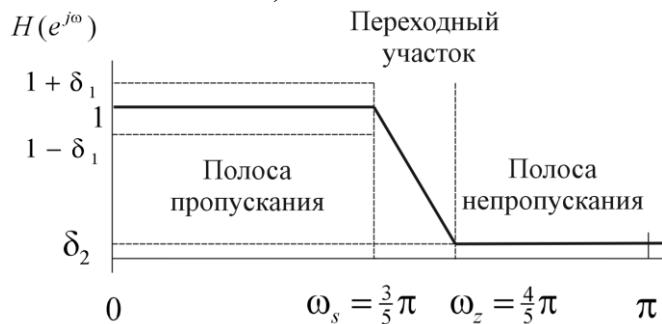


Рисунок 5.3 – Спецификация КЧХ дискретного ФНЧ

Для аппроксимации идеального ФНЧ с такими характеристиками реальной системой введен переходный участок ненулевой ширины ($\omega_s - \omega_z$), в котором АЧХ плавно изменяется от значения в полосе пропускания до значения в полосе непропускания.

Имея спецификации фильтра, аналогичные представленным на рисунке, необходимо определить характеристическую функцию дискретной системы, чья КЧХ удовлетворяет заданным требованиям. Характеристической функцией называют преобразование импульсной характеристики линейной дискретной системы, фактически комплексный коэффициент (собственное значение).

Упражнение 5.1. Изобразить спецификацию КЧХ для дискретного фильтра, соответствующую следующей спецификации непрерывного фильтра.

1. Частота дискретизации $f_d = 8000$ Гц ($T = 1,25 \cdot 10^{-4}$ с.)
2. Модуль КЧХ фильтра $|H(j\omega)|$ в полосе частот $2\pi(300) \leq \omega \leq 2\pi(3400)$ должен отличаться от нуля дБ не более чем на $\pm 0,42$ дБ.
3. Модуль КЧХ фильтра $|H(j\omega)|$ в полосе частот $\omega \leq 2\pi(200)$ и $\omega \geq 2\pi(3600)$ не должен превышать (-50 дБ).

5.1.3. Отличительные особенности цифровых и аналоговых фильтров

1. На аналоговых фильтрах невозможно получить линейную фазовую характеристику. Это означает, что при прохождении сигнала через фильтр изменению подвергается амплитуда и / или фаза входного сигнала. Величина изменения зависит от амплитудной и фазовой характеристики фильтра. Мерой изменения фазовой характеристики служит фазовая или групповая задержка фильтра. Фазовая задержка возникает, когда сигналы разных значений частот составного сигнала проходят через фильтр с разной задержкой. Фазовая задержка определяется как

$$t_\varphi = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = -\frac{\varphi(\omega)}{2\pi f} = -\frac{\varphi(\omega)T}{2\pi},$$

где $\varphi(\omega)$ – сдвиг фазы.

На рисунке 5.4 показаны сигналы, имеющие фазовую задержку, равную $t_\varphi = \frac{T}{8}$, где T период сигналов.

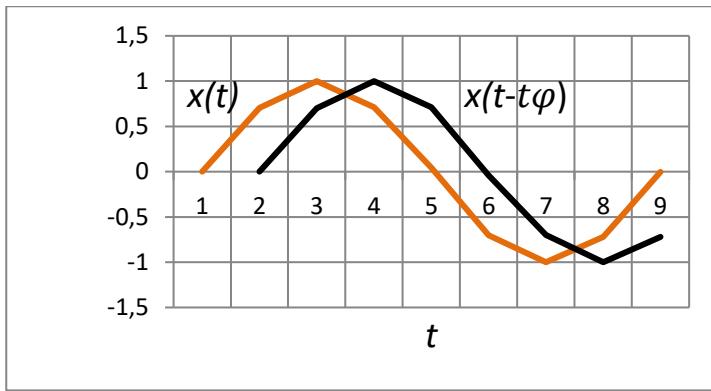


Рисунок 5.4

Групповая задержка является мерой средней задержки в фильтре в функции частоты и записывается в виде

$$t_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$$

Фильтр имеет линейную фазовую характеристику, если выполняется равенство

$$\varphi(\omega) = -\gamma\omega,$$

γ – постоянная величина, выраженная через число интервалов дискретизации. В этом случае фильтр обладает постоянной фазовой и групповой задержкой. Фильтр с нелинейной фазовой характеристикой будет искажать, прошедший через фильтр, сигнал. Это объясняется тем, что частотные компоненты будут задерживаться на величину, не пропорциональную частоте, нарушая их гармоническую связь.

2. Точность аналоговых фильтров ограничена. Точность цифрового фильтра ограничена только длиной используемого слова. Затухание в полосе подавления выше 60 – 70 дБ аналоговым фильтром обеспечить технически сложно.

3. Отфильтрованные данные легко можно сохранить для последующего использования.

4. Цифровые фильтры могут использоваться при очень низких частотах, например, для биомедицинских приложений, где применение аналоговых фильтров приводит к увеличению масса-габаритных показателей.

5. Цифровые фильтры имеют ограничения по быстродействию и производительности. Наивысшую частоту дискретизации f_d , с которой может работать фильтр, ограничивает время конвертации АЦП и время установления сигнала ЦАП. Скорость работы ЦП зависит от быстродействия цифрового процессора и числа арифметических операций, которые необходимо выполнить в алгоритме фильтрации. Число арифметических операций повышается, когда требуется получить характеристику фильтра более прямоугольной (сжатой).

6. Цифровые фильтры подвержены шуму АЦП из-за конечной разрядности процесса квантования аналогового сигнала и шуму округления, который вводится при вычислениях.

5.2. Выбор подходящего класса дискретных фильтров

Ранее было показано, что рекурсивные и нерекурсивные ЛДС относятся к классу БИХ и КИХ фильтров. Данные фильтры выполняют вычисление свертки входной последовательности $x(n)$ с последовательностью $h(n)$, значения отсчетов (коэффициенты) которой есть весовые коэффициенты конволвюра. Входной и выходной сигналы БИХ и КИХ фильтров связаны операциями вида

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n)x(n-k), \text{ (БИХ фильтр) и}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(n)x(n-k), \text{ (КИХ фильтр).}$$

Следовательно, фильтр каждого типа можно представить, зная коэффициенты его импульсной характеристики. В свою очередь коэффициенты $h(n)$ фильтров определяются значениями параметров b_i и a_k разностного уравнения

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k).$$

В частности, для КИХ фильтров коэффициентам $h(n)$ соответствуют значения b_n , а для БИХ фильтра значения коэффициентов его импульсной характеристики зависят от b_i и a_k .

Напомним, что для вычисления текущего отсчета выходного сигнала КИХ фильтра используется только текущий и предыдущий отсчеты входного сигнала и не используются выходные. Это приводит к тому, что, если входная последовательность содержит конечное число ненулевых отсчетов, то и отклик содержит последовательность ненулевых отсчетов конечной длительности.

БИХ фильтры принципиально отличаются наличием обратной связи. Каждый выходной отсчет БИХ фильтра зависит от текущего и предыдущего входных отсчетов, а также от предыдущих выходных отсчетов. БИХ фильтр способен выдавать на выход последовательность ненулевых отсчетов бесконечной длины, даже когда все входные отсчеты равны нулю.

5.2.1. Сравнение БИХ и КИХ фильтров

При выборе подходящих классов фильтров руководствуются следующими особенностями КИХ и БИХ фильтров.

1. КИХ фильтры имеет линейную фазовую характеристику, следовательно, КИХ фильтр не вводит фазового искажения в сигнал. Это важно во многих применениях, например, цифровых аудио и видеообработке, биомедицине и пр. Фазовая характеристика БИХ фильтра принципиально нелинейна, особенно на краях полос (см. пример 4.2, рисунки 4.9, 4.10).

2. КИХ фильтры абсолютно устойчивы из-за отсутствия обратной связи. Каковы бы ни были начальные условия, т.е. отсчеты, хранящиеся в линии задержки (памяти), при отсутствии сигнала на входе, когда $x(n) = 0$, выходной сигнал (свободные колебания) будут отличны от нуля в течение не более, чем N тактов.

3. БИХ фильтры требуют меньше операций на один выходной отсчет, чтобы реализовать требуемую частотную характеристику.

4. БИХ фильтры способны обеспечить лучшую фильтрацию при том же количестве операций что и КИХ фильтры.

БИХ фильтр имеет меньшую неравномерность АЧХ в полосе пропускания и более крутую переходную полосу.

Для реализации требуемой спецификации характеристики с КИХ фильтром необходимо иметь большую вычислительную мощность и память, чем в случае ее реализации с БИХ алгоритмом.

Для получения характеристик с высокой прямоугольностью АЧХ, например, полосовых фильтров, требуются КИХ фильтры высокого порядка – до нескольких сотен и даже тысяч.

5. Аналоговый фильтр легко можно преобразовать в эквивалентный дискретный БИХ фильтр, удовлетворяющий сходным спецификациям.

Учитывая приведенные соображения, обобщенный принцип выбора подходящей структуры фильтра можно свести к следующему.

1. Если основным требованием является «прямоугольность» амплитудно-частотной характеристики и скорость обработки, необходимо применять БИХ фильтры.

2. Если предъявляются повышенные требования к фазовой характеристике – используются КИХ фильтры.

Замечание. Архитектура современных процессоров ЦОС учитывает особенности построения фильтров с конечной импульсной характеристикой.

5.3. Вычисление коэффициентов КИХ фильтра

Целью вычисления коэффициентов (параметров) КИХ фильтра является получение значений $h(n)$, при которых фильтр удовлетворяет спецификации. Разработано несколько методов вычисления значений $h(n)$. Наиболее используемыми из них являются метод «окон», оптимальный метод (по Чебышеву) и метод частотной выборки.

5.3.1. Метод «окон» (вырезания)

Ранее был рассмотрен пример расчета импульсной характеристики

идеального ФНЧ по заданной частотной характеристики. Коэффициенты идеальной импульсной характеристики (коэффициенты ряда Фурье) вычислялись по формуле

$$h_i(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} H_i(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (5.1)$$

При этом получается бесконечная последовательность коэффициентов $h_i(n)$. Хотя значения коэффициентов $h_i(n)$ уменьшаются с удалением от точки $n = 0$, теоретически длительность последовательности $h_i(n)$ определяется как $\mp\infty$. Формула (5.1) означает физически нереализуемый фильтр. Кроме того, формула (5.1) определяет коэффициенты БИХ фильтра, но не коэффициенты $h(n)$ КИХ фильтра. В этом случае комплексная частотная характеристика $H_i(e^{j\omega})$ фильтра представляется бесконечным рядом Фурье

$$H_i(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i(n) e^{-j\omega n}. \quad (5.2)$$

Простейший путь проектирования физически реализуемого фильтра состоит из исключения членов ряда (5.2), имеющих отрицательные значения номеров отсчета $n < 0$. Но результатом является все еще импульсная характеристика БИХ фильтра. Для получения характеристики КИХ фильтра необходимо ограничить ряд (5.2) сверху до M членов. Тогда получается усечение идеальной импульсной характеристики в пределах $0 \leq n \leq M$. Таким образом, КИХ- аппроксимация фильтра состоит в ограничении идеальной h_i в соответствии с выражением

$$h(n) = \begin{cases} h_i(n), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{для других } n. \end{cases} \quad (5.3)$$

Очевидно, отбрасывание коэффициентов оказывается на параметрах КЧХ фильтра. Чем больше коэффициентов остается, тем ближе спектр фильтра к идеальной характеристике.

Прямое усечение $h_i(n)$ в соответствии с (5.3) равносильно умножению идеальной (требуемой) импульсной характеристики на прямоугольную весовую функцию $l(n)$, называемую прямоугольным окном конечной длины. Тогда требуемая импульсная характеристика записывается как

$$h(n) = h_i(n)l(n), \quad (5.4)$$

где

$$l(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{для других } n. \end{cases} \quad (5.5)$$

Вычислим комплексную частотную характеристику КИХ фильтра, если $h(n)$ соответствует выражениям (5.3) и (5.4). Воспользуемся теоремой о свертке, или модуляции. Фурье-образ от произведения двух

последовательностей $h(n) = h_i(n)l(n)$ определяется как

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i(n)l(n)e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(e^{j\theta})L(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из формулы (5.6) следует, что комплексная частотная характеристика КИХ фильтра определяется периодической сверткой идеальной (требуемой) КЧХ с Фурье-образом окна. Чтобы изобразить графическую интерпретацию свертки (5.6) вычислим Фурье-образ прямоугольного окна.

Пример 5.2. Частотная характеристика прямоугольного окна вычисляется по формуле

$$L(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M l(n)e^{-j\omega n}. \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) представляет собой сумму членов убывающей геометрической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n,$$

где a_1 – первый член, $q = e^{j\omega}$ – знаменатель прогрессии, n – номер взятого члена. Сумма первых n членов прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}. \quad (5.8)$$

Если $a_1 = 1$, формула (5.8) записывается как

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (5.9)$$

Так как сумма (5.7) содержит $(M + 1)$ слагаемых, то

$$L(e^{j\omega}) = S_n = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{\frac{-j\omega(M+1)}{2}}(e^{\frac{j\omega(M+1)}{2}} - e^{\frac{-j\omega(M+1)}{2}})}{e^{\frac{-j\omega}{2}}(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{\frac{-j\omega}{2}})}.$$

Используя формулу Эйлера

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j},$$

получаем

$$L(e^{j\omega}) = \frac{e^{\frac{-j\omega(M+1)}{2}}(\sin \frac{\omega(M+1)}{2})2j}{e^{\frac{-j\omega}{2}}(\sin \frac{\omega}{2})2j} = \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{\frac{-j\omega M}{2}}. \quad (5.10)$$

Замечание. Функция (5.10) известна под названием ядра Дирихле. Как видно из выражения (5.10), отношение синусов $\frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$ дает модуль (амплитуду) КЧХ $L(e^{j\omega})$, а показатель степени экспоненты $\varphi = \frac{\omega M}{2}$ – фазовый угол $L(e^{j\omega})$.

Вычислим значение ядра Дирихле в области определения функции. Модуль ядра Дирихле (или его абсолютное значение) в точке $\omega = 0$

$$|L(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right| = \frac{\sin 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}. \quad (5.11)$$

Так как полученному выражению соответствует неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя. Дифференцируем числитель и знаменатель по $\frac{\omega(M+1)}{2}$.

$$|L(e^{j\omega})| = \left| \frac{d \sin \frac{\omega(M+1)}{2} / d \frac{\omega(M+1)}{2}}{d \sin \frac{\omega}{2} / d \frac{\omega(M+1)}{2}} \right| = \frac{\cos \frac{\omega(M+1)}{2}}{\cos \frac{\omega}{2} / M + 1} = M + 1.$$

Таким образом, для $\omega = 0$ получаем максимальное значение $|L(e^{j\omega})|$ равное $M + 1$. Если значения отсчетов $l(n)$ окна равны не единице, а некоторому A_0 , то пиковое значение ядра Дирихле определяется как

$$A_0(M + 1). \quad (5.12)$$

Вследствие 2π периодичности функции $|L(e^{j\omega})|$, значения (5.12) формируются также на частотах, кратных частоте дискретизации $\omega = 2\pi, 4\pi, \dots$

Далее оценим ширину главного лепестка Фурье-образа окна. Первый ноль $|L(e^{j\omega})|$ возникает на частоте, на которой аргумент числителя функции $|L(e^{j\omega})|$ равен π , т.е. когда

$$\frac{\omega(M+1)}{2} = \pi.$$

Нормированное значение частоты в этом случае равно

$$\omega = \frac{2\pi}{M+1}.$$

Ширина главного лепестка Фурье-образа окна соответствует величине

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{M+1}.$$

Точки области частот, в которых ядро Дирихле равно нулю определяются из выражения (ω – нормированные значения частот)

$$\omega = \frac{2\pi k}{M+1}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Ширина всех боковых лепестков одинакова равна

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{2\pi}{M+1}.$$

На рисунке 5.5 изображен график модуля комплексной частотной характеристики $|L(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right|$ прямоугольного окна для $M = 5$.

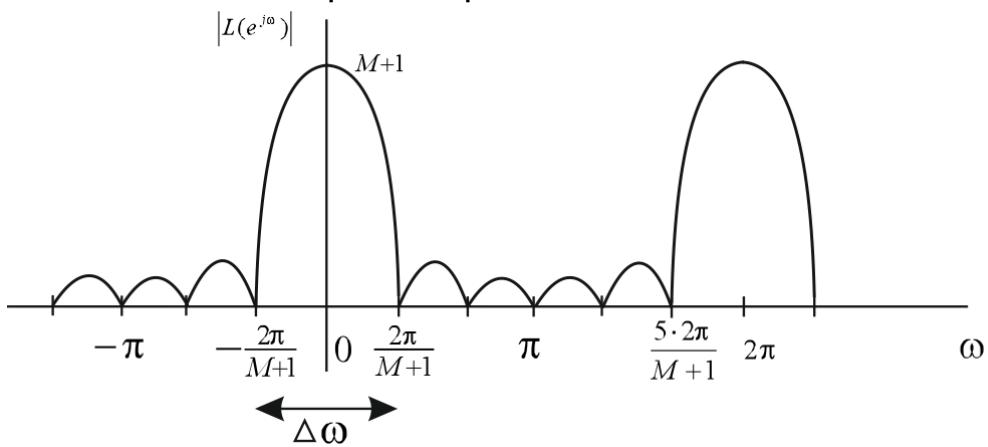


Рисунок 5.5 –Модуль Фурье-образа прямоугольного окна

Подчеркнем еще раз обозначение нормированной частоты через $\hat{\omega}$. Точки области частот, в которых ядро Дирихле равно нулю определяются из выражения

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{2\pi k}{M+1}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Если частотная ось представляется в герцах, то нулевым точкам Фурье образа прямоугольного окна соответствует частота

$$f = \frac{k f_d}{M+1}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Например, для окна длиной $M = 5$, $f_d = 6000$ Гц нулевым точкам Фурье-образа соответствуют значения частот $(k = 1,2,3,4,5) f = \{1000, 2000, 3000, 4000, 5000\}$ Гц.

С увеличением M ширина главного и боковых лепестков уменьшается и увеличивается число пульсаций. Амплитуды боковых лепестков уменьшаются по мере удаления от главного лепестка. Но как бы ни велико было значение M , амплитуда боковых лепестков никогда не становится равной нулю.

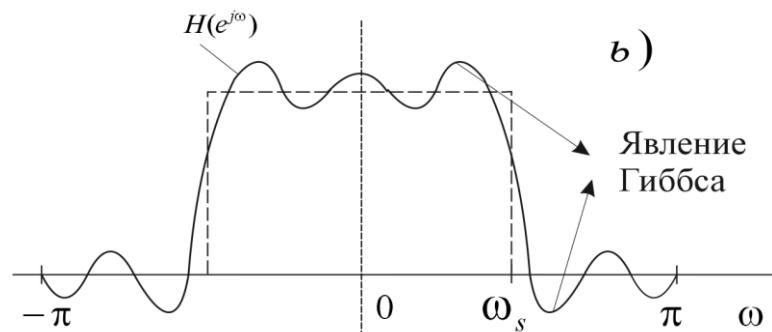
Замечание. Нежелательные пульсации амплитудно-частной характеристики в полосе пропускания и небольшое ослабление в полосе непропускания сравнительно простых фильтров обусловлены боковыми лепестками Фурье-образа прямоугольного окна.

На рисунке 5.6 показаны графики функций $L(e^{j(\omega-\theta)})$, $H_i(e^{j\theta})$ и процесс формирования периодической свертки (5.6) идеальной (требуемой) КЧХ с Фурье-образом прямоугольного окна, т.е.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(e^{j\theta}) L(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta.$$



а) процесс свертки



б) аппроксимация идеальной характеристики $H_i(e^{j\omega})$

Рисунок 5.6 – Графики Фурье-образов $H_i(e^{j\theta})$, $L(e^{j(\omega-\theta)})$, $H(e^{j\omega})$

Анализируя полученную свертку в частотной области идеальной прямоугольной функции $H_i(e^{j\theta})$ с ядром Дирихле, видим, что колебания функции $L(e^{j\omega})$ попадают в область частотного прямоугольника $H_i(e^{j\theta})$. Свертка точно воспроизводит эти колебания, рисунок 5.6 б. Вблизи точек разрыва идеальной прямоугольной функции $H_i(e^{j\theta})$, т.е. для значения $\omega = \omega_s$ появляются пульсации, максимум которых слева и справа составляет $\approx 9\%$ от АЧХ и остается таковым вне зависимости от значения M окна.

Таким образом, усечение числа коэффициентов $h_i(n)$ ряда Фурье приводит:

- к появлению выбросов результирующей функции $H(e^{j\omega})$ в окрестностях точек разрыва (на границах полос пропускания и непропускания);
- к неравномерности результирующей АЧХ на всем периоде.

Говорят, что свертка $H_i(e^{j\omega}) * L(e^{j\omega})$ осциллирует. Имеет место так называемый эффект Гиббса.

Как видно из рисунка 5.6 частотная характеристика КИХ фильтра это размытая версия идеальной прямоугольной функции $H_i(e^{j\theta})$. Если Фурьеобраз окна $L(e^{j\omega})$ является узким, т.е. сконцентрирован в узкой полосе частот, то КЧХ $H(e^{j\omega})$ будет подобной идеальной $H_i(e^{j\theta})$ почти повсюду, за исключением ее точек разрыва.

При выборе окна руководствуются следующими требованиями:

- окно должно быть достаточно коротким, чтобы минимизировать объем вычислений при реализации фильтра;
- Фурье-образ окна $L(e^{j\omega})$ должен быть сконцентрирован в узкой полосе частот, чтобы свертка $H_i(e^{j\omega}) * L(e^{j\omega})$ как можно точно воспроизводила заданную (идеальную) частотную характеристику фильтра;
- ширина переходной полосы фильтра определяется значением ширины $\Delta\omega$ основного лепестка весовой функции $L(e^{j\omega})$;
- неравномерность частотной характеристики фильтра в полосах пропускания и подавления определяется боковыми лепестками весовой функции $L(e^{j\omega})$.

Эти требования являются противоречивыми. При увеличении числа отсчетов M импульсной характеристики $h(n)$ амплитуды главного и боковых лепестков растут, а ширина $\Delta\omega = \frac{4\pi}{M+1}$ главного и ширина $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{2\pi}{M+1}$ боковых лепестков уменьшается; площадь, которую они ограничивают, остается постоянной. Пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведенному в точке $\omega = \omega_s$. Осцилляция становится более резкой. Так как площадь, под каждым лепестком остается постоянной, то при увеличении числа отсчетов M импульсной характеристики $h(n)$ колебания будут неуменьшающимися по амплитуде.

Из теории рядов Фурье известно, что неравномерность функции, приводящая к эффекту Гиббса, может быть уменьшена, если использовать менее резкое усечение коэффициентов ряда Фурье. Сглаживая вертикальные границы окна, можно уменьшить высоту боковых лепестков. Однако, это приводит к более широкому главному лепестку и, тем самым, к более широкой переходной полосе в окрестности точек разрыва.

5.3.2. Стандартные окна

Наиболее используемые окна (весовые функции) определяются следующим образом.

1. Хэмминга:

$$l(n) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}, (N - \text{четное}), \\ -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, (N - \text{нечетное}) \\ 0, \text{ для других } N. \end{cases}$$

2. Хеннинга (окно Хенна):

$$l(n) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}, \\ 0, \text{ для других } N. \end{cases} \quad (5.13)$$

3. Барлетта (треугольное):

$$l(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq 0, \\ 2 - \frac{2n}{N}, & 0 < n \leq \frac{N}{2}. \end{cases}$$

4. Блэкмана:

$$l(n) = \begin{cases} 0,42 + 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}, \\ 0, \text{ для других } N. \end{cases}$$

На рисунке 5.7 показаны окна как графики функций $l(n)$ непрерывной переменной n .

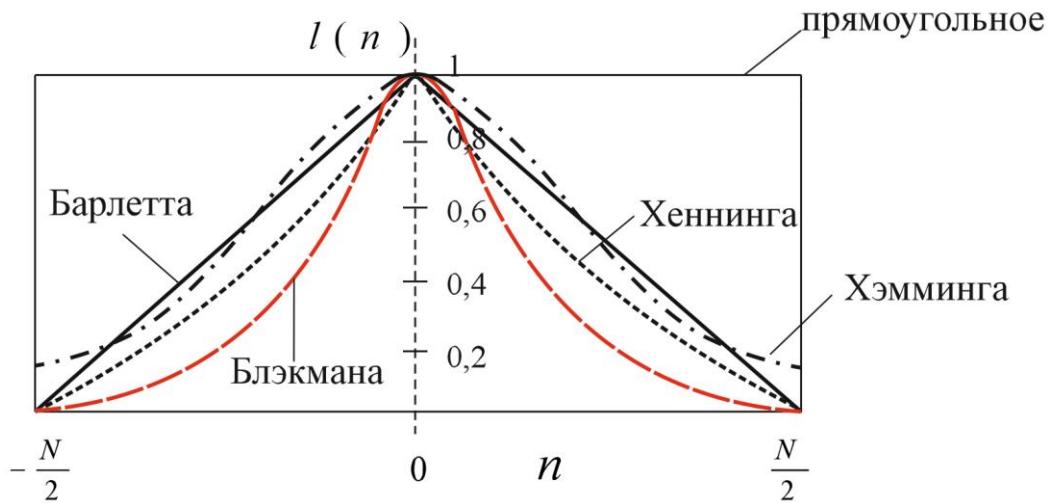


Рисунок 5.7 – Стандартные окна

Названные окна используются как при проектировании КИХ фильтров, так и спектральном анализе. Сравнительно простое описание окон по формулам (5.13) позволяет иметь небольшой объем вычислений. Фурье-образ этих окон сконцентрирован в окрестности частоты $\omega = 0$. На рисунке 5.8 в логарифмическом масштабе показаны нормированные графики АЧХ $20 \log_{10} |L(e^{j\omega})|$ прямоугольного окна и окна Хэмминга. Такой масштаб улучшает разрешение по уровню АЧХ фильтров, спектров окон.

Нормирование сводится к вычислению значений в соответствии с выражением

$$|L(e^{j\omega})|_{Norm} = 20 \log_{10} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega})_{\omega=0}} \right| \text{dB.}$$

Деление каждого значения $|L(e^{j\omega})|$ на величину $|L(e^{j\omega})_{\omega=0}|$ приводит к тому, что нулевой отсчет нормированной функции $|L(e^{j\omega})|_{Norm}$ равен 0 dB.

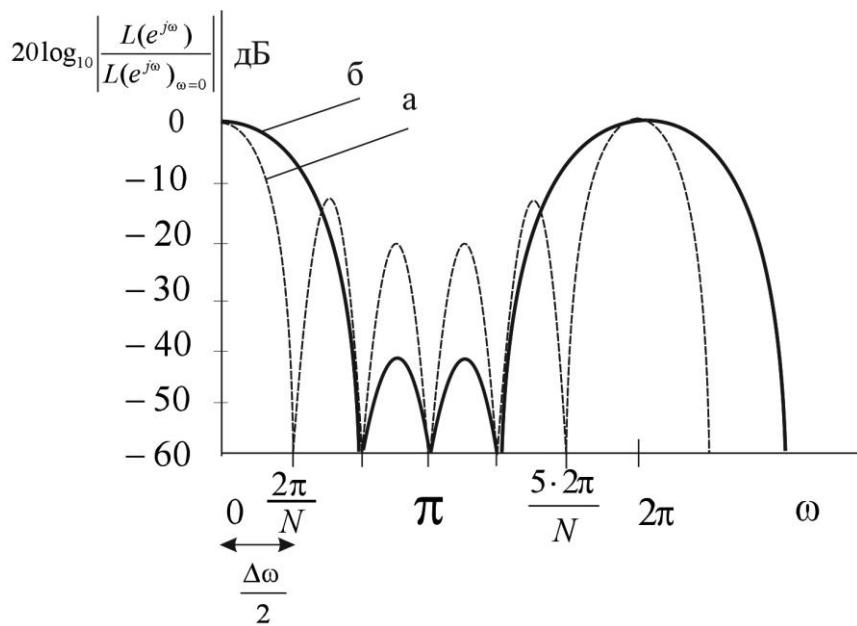


Рисунок 5.8 – Фурье-образы окон:

а – прямоугольное; б – Хэмминга

На рисунке видно, что более узкий главный лепесток получается у прямоугольного окна. Оно даёт наиболее крутые переходные участки графика $H(e^{j\omega})$ над точками разрыва идеальной частотной характеристики фильтра $H_i(e^{j\omega})$. В то же время первый его боковой лепесток всего на 13 дБ ниже главного, что приводит к значительной осцилляции $H(e^{j\omega})$ в окрестности точек разрыва идеальной КЧХ.

Уровень боковых лепестков окна Хемминга примерно на 40 дБ меньше главного. Вследствие этого окно Хемминга даст фильтр с большим затуханием в полосе непропускания. Но поскольку амплитуда его главного лепестка шире примерно вдвое, фильтр будет обладать вдвое большей полосой перехода в сравнении с прямоугольным окном. Максимальное затухание в полосе подавления, возможное при использовании окна Хемминга составляет ≈ 53 дБ, минимальная амплитуда неравномерности в полосе пропускания составляет $\approx 0,0194$ дБ.

В таблице 5.1 приведены сравнительные характеристики Фурьеобразов окон.

Таблица 5.1. Характеристика окон

Тип окна	Высота бокового лепестка (дБ)	Неравномерность в полосе пропускания (дБ)	Ширина главного лепестка	Ширина переходной полосы $\Delta\omega$ (рад)	Затухание в полосе непропускания $20 \log_{10} \delta$ (дБ)
Прямоугольное	-13	0,74	$4\pi/N$	$\approx 2\pi/N$	-21
Барлетта	-25	0,05	$\approx 8\pi/N$	$\approx 4\pi/N$	-25
Хэннинга	-31	0,05	$\approx 8\pi/N$	$\approx \frac{3,1 \cdot 2\pi}{N}$	-44
Хэмминга	-41	0,019	$\approx 8\pi/N$	$\frac{3,3 \cdot 2\pi}{N}$	-53
Блэкмана	-57	0,0017	$12\pi/N$	$\frac{5,5 \cdot 2\pi}{N}$	-74

Из анализа данных таблицы следует, чем более плавно функция окна стремится к нулю, тем меньше становится высота бокового лепестка. Однако увеличивается ширина переходной полосы. На всех частотах ω возникают ошибки аппроксимации, имеющие вид пульсаций частотной характеристики, которые обусловлены боковыми лепестками АЧХ окна $L(e^{j\omega})$. Окно с меньшими боковыми лепестками дает лучшую аппроксимацию идеальной характеристики.

Чем больше число отсчетов N , тем уже переходная полоса. Таким образом, выбирая форму окна и ширину окна можно контролировать свойства итогового КИХ фильтра.

Замечание. Фильтр, построенный с помощью метода взвешивания (окон), имеет равные неравномерности в полосе неравномерности в полосе пропускания и полосе непропускания.

5.3.3. Этапы проектирования фильтров с использованием окон

Проектирование фильтров на основе весовых функций включает в себя следующие этапы.

1. Задание идеальной (требуемой) частотной характеристики фильтра $H_i(e^{j\omega})$.

2. Получение идеальной импульсной характеристики $h_i(n)$ требуемого фильтра, исходя из заданного $H_i(e^{j\omega})$. При этом можно использовать выражения для $h_i(n)$ стандартных идеальных частотно-избирательных фильтров. Например, ранее было получено выражение $h_i(n)$ идеального ФНЧ (4.27)

$$h_i(n) = \frac{\sin n\omega_s}{n\pi}, -\infty < n < \infty,$$

где ω_s – частота среза.

В таблице 5.2 приведены формулы идеальных импульсных характеристик стандартных частотно-избирательных фильтров с идеальной частотной характеристикой.

Таблица 5.2 Идеальные импульсные характеристики фильтров

Тип фильтра	$h_i(n), n \neq 0, -\infty < n < \infty$	$h_i(0)$
Фильтр нижних частот	$\frac{\sin \omega_s n}{\pi n}$	$\frac{\omega_s}{\pi}$
Фильтр верхних частот	$-\frac{\sin \omega_s n}{\pi n}$	$1 - \frac{\omega_s}{\pi}$
Полосовой фильтр	$\frac{\sin \omega_2 n}{\pi n} - \frac{\sin \omega_1 n}{\pi n}$	$\frac{\omega_2}{\pi} - \frac{\omega_1}{\pi}$
Заграждающий фильтр (режекторный фильтр)	$\frac{\sin \omega_1 n}{\pi n} - \frac{\sin \omega_2 n}{\pi n}$	$1 - \left(\frac{\omega_2}{\pi} - \frac{\omega_1}{\pi}\right)$

Напомним, $\omega_s, \omega_1, \omega_2$ – нормированные частоты среза полос пропускания или непропускания фильтров.

3. Выбор окна (весовой функции), которое удовлетворяет требованиям спецификации проектируемого фильтра.

4. Определение числа N коэффициентов $h(n)$ фильтра с использованием подходящего выражения, отражающего связь ширины переходной полосы с длиной фильтра N .

5. Получение значений $h(n)$ реального фильтра из выражения $h(n) = h_i(n)l(n)$.

Вычисленные значения коэффициентов $h(n)$ должны удовлетворять заданным спецификациям проектируемого фильтра. Отклик такого фильтра соответствует выражению свёртки

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

где N – длина КИХ фильтра.

Пример 5.3. Вычислить значения коэффициентов $h(n)$ КИХ фильтра нижних частот. Фильтр должен удовлетворять следующим спецификациям:

- частота среза $f_s = 1500$ Гц, ($\omega_s = 2\pi 1500$ рад/с);
- ширина полосы перехода 500 Гц, ($\Delta \omega_z = 2\pi 500$ рад/с);
- затухание в полосе непропускания (-50 дБ);
- частота дискретизации $f_d = 8000$ Гц.

Решение. Из таблицы 5.1 следует, что требованию к коэффициенту усиления (затухания) в полосе подавления удовлетворяют окна Хэмминга или Блэкмана. С целью более простой реализации фильтра, выберем весовую функцию Хэмминга.

Нормированное значение ширины полосы перехода ФНЧ

$$\Delta \hat{\omega}_z = \frac{\Delta \omega_z}{f_d} = \frac{2\pi 500}{8000} = 2\pi \cdot 0,0625 \text{ рад.}$$

Воспользуемся данными таблицы 5.1. Вычислим значение N – число коэффициентов импульсной характеристики $h(n)$ ФНЧ. Ширина полосы перехода фильтра с весовой функцией Хэмминга определяется как

$$\Delta \hat{\omega}_z \approx \frac{3,3 \cdot 2\pi}{N}.$$

Тогда $N = \frac{3,3 \cdot 2\pi}{\Delta \hat{\omega}_z} = \frac{3,3 \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 0,0625} = 52,8$ определяет порядок фильтра. Пусть $N = 53$.

Далее вычисляем значения отчетов импульсной характеристики $h(n)$ реального ФНЧ по формуле

$$h(n) = h_i(n)l(n).$$

Для удобства окно будем задавать на интервале

$$-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \quad -26 \leq n \leq 26.$$

Требуемый (идеальный) ФНЧ имеет коэффициенты импульсной характеристики (коэффициенты ряда Фурье) вида

$$h_i(n) = \frac{\sin \omega_s n}{\pi n}, n \neq 0, -\infty \leq n \leq \infty,$$

$$h_i(0) = \frac{\omega_s}{\pi}, n = 0.$$

Вследствие эффекта размывания идеальной частотной характеристики фильтра, вносимого весовой функцией, частота среза реального фильтра будет отличаться от представленной в спецификации. Обозначим ω'_s новое

нормированное значение частоты среза. Тогда с учетом полосы перехода $\Delta\hat{\omega}_z$ реальное значение частоты среза ФНЧ равно

$$\omega'_s = \hat{\omega}_s + 0,5\Delta\hat{\omega}_z = \frac{2\pi 1500}{8000} + 0,5 \cdot 2\pi \cdot 0,0625 = 0,4375\pi.$$

Поскольку выбранная весовая функция $l(n)$ и импульсная характеристика фильтра $h(n)$ обладают положительной симметрией относительно $n = 0$, т.е. $l(n) = l(-n)$ и $h(n) = h(-n)$, $-26 \leq n \leq 26$, необходимо вычислить только значения $h(0), h(1), \dots, h(26)$. Остальные коэффициенты $h(-n)$ получаются из условия симметрии.

Замечание. Если окно задается на интервале $0 \leq n \leq N - 1$, то оно симметрично относительно точки $\frac{N}{2}$ (или $\frac{N-1}{2}$, если N – нечетное число). В этом случае весовая функция окна

$$l(n) = l(N - 1 - n).$$

Желаемая импульсная характеристика тоже симметрична относительно точки $\frac{N}{2}$ (или $\frac{N-1}{2}$, если N – нечетное число). Следовательно,

$$h(n) = h(N - 1 - n).$$

Тогда достаточно вычислить только $h(0), h(1), \dots, h\left(\frac{N}{2}\right)$ (или $h(0), h(1), \dots, h\left(\frac{N-1}{2}\right)$, если N – нечетное число) значений коэффициентов импульсной характеристики фильтра.

Вычислим несколько значений коэффициентов $h(n)$.

$$n = 0: \quad h_i(0) = \frac{\omega'_s}{\pi} = \frac{0,4375\pi}{\pi} = 0,4375.$$

Весовая функция окна Хэмминга равна

$$l(0) = 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{N} \cdot 0 = 1.$$

Значение коэффициента $h(n)$ в точке $n = 0$

$$h(0) = h_i(0) \cdot l(0) = 0,4375.$$

Аналогично получаем для $n = 1$

$$h_i(1) = \frac{\sin \omega'_s \cdot 1}{\pi} = \frac{\sin 0,4375\pi}{\pi} = 0,312;$$

$$l(1) = 0,54 + 0,46 \cos \left(\frac{2\pi}{53} \cdot 1 \right) = 0,9967 ;$$

$$h(1) = h(-1) = h_i(1)l(1) = 0,311.$$

Для $n = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} h_i(2) &= \frac{\sin \omega_s' \cdot 2}{\pi} = \frac{\sin 0,4375\pi \cdot 2}{\pi \cdot 2} = 0,06013; \\ l(2) &= 0,54 + 0,46 \cos \left(\frac{2\pi \cdot 2}{53} \right) = 0,987; \\ h(2) &= h(-2) = h_i(2)l(2) = 0,06012. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Для $n = 26$ имеем:

$$\begin{aligned} h_i(26) &= \frac{\sin \omega_s' \cdot 26}{\pi} = -0,011; \\ l(26) &= 0,54 + 0,46 \cos \left(\frac{2\pi \cdot 26}{53} \right) = 0,081; \\ h(26) &= h(-26) = h_i(26)l(26) = -0,00091. \end{aligned}$$

Чтобы определить коэффициенты импульсной характеристики фильтра в диапазоне $0 \leq n \leq N - 1$ к каждому индексу n функции $h(-n)$ необходимо прибавить $\frac{N}{2}$ (или $\frac{N-1}{2}$, если N нечетное число). Нумерация коэффициентов будет начинаться с нуля. Коэффициенты реальной импульсной характеристики ФНЧ с указанными индексами будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} h'(n) &= h(-n + \frac{N}{2}), N - \text{четное число}; \\ h'(n) &= h(N - 1 - n); N - \text{нечетное число}. \end{aligned}$$

Например, для нечетных значений N получаем

$$\begin{aligned} h'(0) &= h'(52) = h(26) = -0,00091; \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ h'(26) &= h(0) = 0,4375; \\ h'(25) &= h'(27) = h(1) = 0,311; \\ h'(24) &= h'(28) = h(2) = 0,06012. \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

5.3.4. Проверка выполнения заданных требований к КИХ-фильтру

Для проверки заданных требований рассчитывается амплитудно-частотная характеристика фильтра. Если требования не удовлетворяются необходимо увеличить длину N импульсной характеристики $h(n)$ и вернуться к расчету идеальной импульсной характеристики $h_i(n)$.

Может так случиться, что требования выполняются с большим запасом, тогда следует проверить, нельзя ли уменьшить N . За некоторое число итераций найдется наименьшее значение N .

Возможен такой вариант, что при выбранном окне порядок фильтра оказывается слишком большой и не может быть реализован или обеспечивать работу в реальном времени. Тогда выбирается другое окно, и процедура проектирования повторяется.

Упражнение 5.2. Вычислить значения всех коэффициентов $h(n)$ КИХ фильтра нижних частот. Фильтр должен удовлетворять следующим спецификациям:

- частота среза $f_s = 1500$ Гц. ($\omega_s = 2\pi 1500$ рад/с);
- ширина полосы перехода 500 Гц ($\Delta \omega_z = 2\pi 500$ рад/с);
- затухание в полосе непропускания (-50 дБ);
- частота дискретизации $f_d = 8000$ Гц.

Упражнение 5.3. Вычислить комплексную частотную характеристику ФНЧ по данным упражнения 5.2. Построить графики амплитудно-частотной и фазовой характеристики ФНЧ.

5.3.5. Структурная схема КИХ фильтра

Схема фильтра вытекает из линейного уравнения, описывающего нерекурсивную стационарную систему (3.25)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i), 0 \leq n \leq N-1.$$

При подаче на вход $x(n) = U_0(n)$ единичного импульса на выходе формируется отклик $y(n) = h(n) = \{b_0, b_1, \dots, b_{N-1}\}$.

При подаче на вход произвольной входной последовательности $x(n)$ отклик равен

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(0).$$

Например, для $N = 4$ в момент дискретного времени $n = 3$ на выходе фильтра отклик равен

$$\begin{aligned} y(3) &= b_0 x(3) + b_1 x(3-1) + b_2 x(3-2) + b_3 x(3-3) = \\ &= b_0 x(3) + b_1 x(2) + b_2 x(1) + b_3 x(0). \end{aligned}$$

Данным выражениям тождественна формула свертки

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k) = \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(0), 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

На рисунке 5.9 изображена структурная схема КИХ фильтра прямой формы, удовлетворяющая спецификациям примера 5.3.

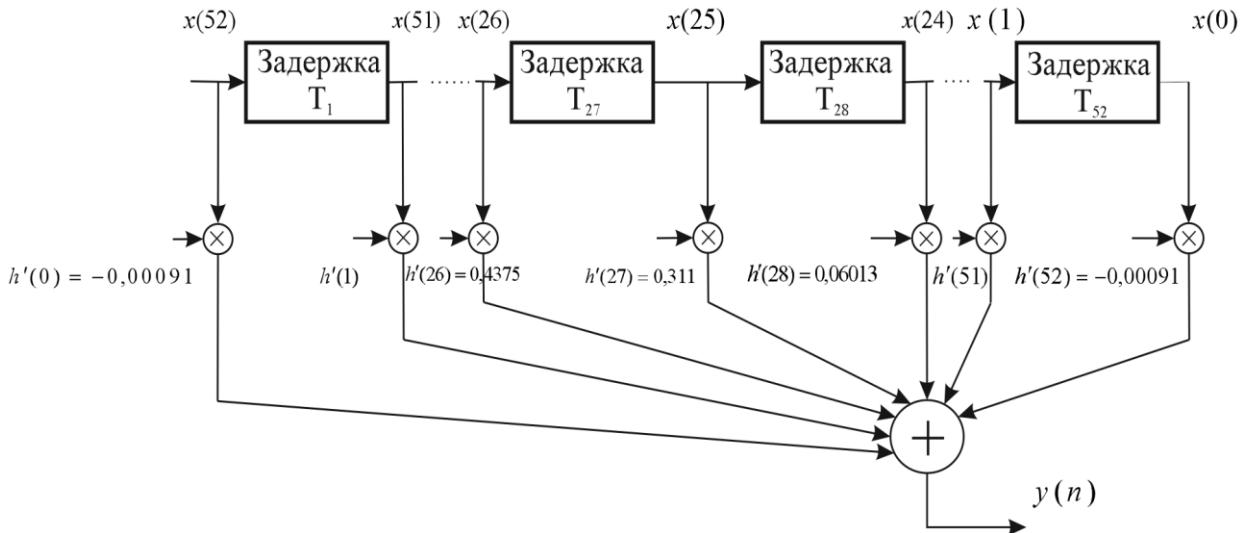


Рисунок 5.9 – Структурная схема КИХ фильтра

Таким образом, структурная схема КИХ фильтра реализует вычисление свертки, суммируя произведения отсчетов сдвинутой входной последовательности на коэффициенты импульсной характеристики фильтра. Схема содержит 53 элемента задержки. Для вычисления одного отсчета фильтра необходимо выполнить $N = 53$ умножений и $N - 1 = 52$ сложений до прихода следующего входного отсчета.

Спектр выходной последовательности (свертки) есть произведение Фурье-образа входной последовательности и Фурье-образа импульсной характеристики фильтра, т.е.

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

Замечание. Если выполняется программная реализация КИХ фильтра, входные отсчеты должны быть предварительно записаны в ЗУ. Далее необходимо выбирать блоки из 53 отсчетов из массива входных данных $x(n)$, выполнять вычисления и запоминать результирующую выходную последовательность в ЗУ.

6. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

6.1. Конечные дискретные комплексные экспоненциальные функции

Как отмечалось ранее, для описания дискретных линейных стационарных систем в континуальном спектральном анализе используются дискретные комплексные экспоненциальные последовательности вида

$$x(n) = e^{j\hat{\omega}n} = \cos \hat{\omega}n + j \sin \hat{\omega}n, -\infty < n < \infty. \quad (6.1)$$

Данная система функций составляет счетное бесконечное множество и определена на бесконечном интервале частоты $\hat{\omega}$.

Экспоненциальная последовательность может быть задана на конечном интервале времени $[0, NT)$, где N – целое положительное число. Тогда величина NT определяет основной период дискретной комплексной экспоненциальной последовательности. В этом случае значение

$\Delta f = \frac{1}{NT}$ – основная линейная частота последовательности. Основная круговая частота

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{NT}$$

определяет период дискретизации по частоте. Абсолютное значение непрерывной частоты с учетом дискретизации переменной частоты равна

$$\omega = \Delta\omega k, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Далее преобразуем (6.1) следующим образом:

$$x(n) = e^{j\hat{\omega}n} = e^{j\omega nT} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{j\Delta\omega knT} = e^{j\frac{2\pi}{NT}knT} = e^{\frac{2\pi kn}{N}} = \cos \frac{2\pi kn}{N} + j \sin \frac{2\pi kn}{N}. \quad (6.2)$$

В дискретном преобразовании Фурье используется система комплексных дискретных экспоненциальные функции (ДЭФ), определяемых выражением

$$\text{def}(k, n) = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \cos \frac{2\pi kn}{N} - j \sin \frac{2\pi kn}{N}.$$

Введем обозначение $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$. Тогда
 $\text{def}(k, n) = W^{kn}$.

Переменная W^{kn} называется поворачивающим множителем. Переменные k и n принимают целочисленные значения $k, n = 0, 1, \dots, N - 1$. Так как показатель степени комплексного числа W^{kn} со знаком „плюс“, то функция $\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$ описывает точку, которая движется по окружности в направлении часовой стрелки. В выражении (6.2) переменные времени и частоты изменяются дискретно, в отличие от (6.1), где время изменяется дискретно, а частота непрерывно. Заметим, что огибающая дискретных значений функции $\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$ соответствует функции $e^{-j\hat{\omega}n}$. Рисунок 6.1 иллюстрирует графическое представление этой функции $\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$.

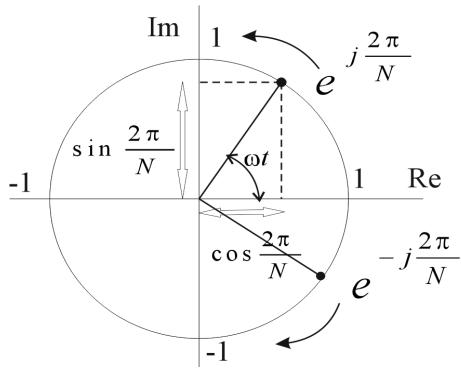


Рисунок 6.1 – Графическая иллюстрация функции $\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$ (формулы Эйлера)

Если переменная n последовательно принимает значения $n = 0, 1, \dots, N - 1$, то через N шагов, комплексный вектор проходит 2π радиан или совершает один оборот на комплексной плоскости. Вращаясь, вектор ДЭФ занимает на плоскости только N фиксированных положений. Выражение W^{kn} представляет собой единичный вектор на комплексной плоскости, угол которого линейно нарастает со временем. Модуль комплексного числа W^{kn} равен $\left|e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right| = 1$, а его аргумент $\varphi = \arctg \frac{\text{Im}W^{kn}}{\text{Re}W^{kn}}$.

Пример 6.1. Пусть $N = 8$. Значения фазы φ вектора ДЭФ для $k = 1, n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ соответственно равны $\varphi = \{-45^\circ, -90^\circ, \dots, -315^\circ, -360^\circ\}$. Следовательно, при увеличении n фаза ДЭФ нарастает по линейному закону.

Пример 6.2. Пусть $N = 8, k = 2$. Значения фазы φ вектора ДЭФ для $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ соответственно равны

$$\varphi = \{-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, -360^\circ, -450^\circ, -540^\circ, -630^\circ, -720^\circ\}.$$

Через 8 шагов комплексный вектор проходит 4π радиан или совершает два оборота на комплексной плоскости за тоже время t , что и в примере 6.1, т.е. за

$$t = NT = 8T,$$

где T – интервал дискретизации.

Скорость нарастания фазы φ вектора ДЭФ определяет номер k . Можно сказать, что фаза ДЭФ нарастает со скоростью $\frac{2\pi}{N}k$ радиан. В примере 6.2 со скоростью $\frac{2\pi}{8}2 = \frac{\frac{\pi}{2}\text{рад}}{\text{на временной отсчет}}$.

Величина полной фазы за дискретное время n определяется как

$$\varphi = \left(\frac{2\pi k}{N} \right) n,$$

где $\left(\frac{2\pi k}{N} \right)$ – скорость изменения фазы ДЭФ или частота этой функции. Таким образом, частота ДЭФ – это число оборотов, совершаемых вектором ДЭФ на интервале ее определения N .

Пример 6.3. Вычисление значений ДЭФ.

$$1. N = 8, k = 1, n = 1.$$

Решение. $W^{kn} = W^1 = \exp \left(-j \frac{2\pi}{8} \right) = \exp(-j45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$2. N = 8, k = 1, n = 0.$$

Решение. $W^0 = 1$.

$$3. N = 8, k = 1, n = 8.$$

Решение. $W^8 = W^N = \exp \left(-j \frac{2\pi 8}{8} \right) = \exp(-j2\pi) = 1$.

$$4. N = 8, k = 3, n = \frac{N}{8}.$$

Решение. $W^{\frac{3N}{8}} = \exp \left(-j \frac{2\pi 3 \cdot 8}{8 \cdot 8} \right) = \exp \left(-j \frac{6\pi}{8} \right) =$
 $= \exp(-j135^\circ) = \cos 135^\circ - j \sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}$.

На рисунке 6.2 показаны положения вектора ДЭФ на комплексной плоскости примера 6.3.

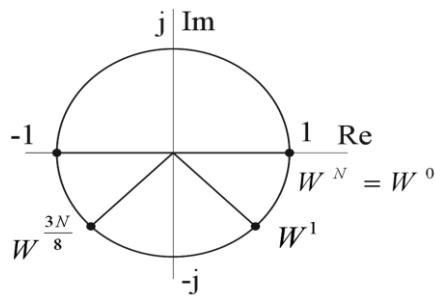


Рисунок 6.2 – Положение вектора ДЭФ

Систему ДЭФ записывают в виде матрицы V , строки которой нумеруются переменной k , столбцы переменной n . В пересечении k -й строки и n -го столбца записывается величина W^{kn} :

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & n & \cdots & N-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \left[\begin{matrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & W^{kn} & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & \end{matrix} \right] \end{matrix}.$$

Например, для $N = 4$ матрица V имеет следующий вид:

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Если подставить в эту матрицу числовые значения степенного ряда W^{kn} , то получим

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

На рисунке 6.3 показаны положения вектора ДЭФ и ее значения на комплексной плоскости, соответствующие матрице (6.4).

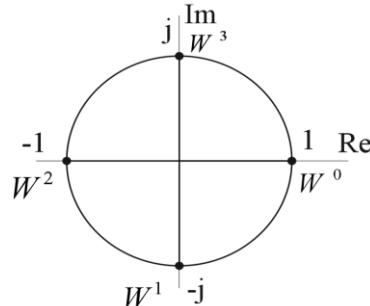


Рис. 6.3. Функции ДЭФ для $N = 4$

6.2. Ортогональный базис

1. Множество взаимно перпендикулярных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ образуют ортогональный базис.

2. В n -мерном пространстве норма (длина радиус-вектора) вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ определяется как

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt[2]{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

3. Если векторы $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1$, то они образуют ортонормированный базис.

4. Расстояние $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между векторами $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – это норма вектора $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ определяется как

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Параметр $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ устанавливает степень удаленности двух векторов в n -мерном пространстве или отношение между ними. Чем меньше расстояние $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между векторами, тем сильнее взаимоотношения между ними. На рис. 6.4. показана геометрическая интерпретация параметра $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в двумерном пространстве.

Применяя теорему косинусов для векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (рис. 6.4), квадрат расстояния d равен

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} \cos \theta. \quad (6.5)$$

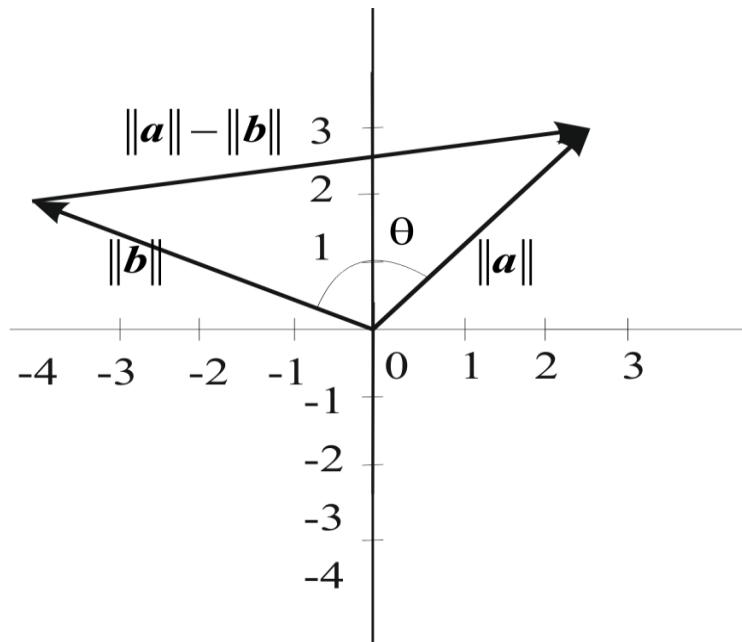


Рис. 6.4. Отношение между векторами как степень их удаленности

Так как $\mathbf{a}\mathbf{b} \cos \theta$ – это скалярное произведение $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , выражение (6.5) запишем в виде

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle. \quad (6.6)$$

Скалярное произведение, отражающее взаимоотношение между векторами найдем из выражения (6.6):

$$\begin{aligned}
2\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \\
&\quad -(a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \\
&\quad -a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 - a_2^2 + 2a_2b_2 - b_2^2 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 = \\
&\quad = 2(a_1b_1 + a_2b_2).
\end{aligned}$$

Следовательно, скалярное произведение двух векторов равно некоторому числу c :

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = (a_1b_1 + a_2b_2) = c. \quad (6.7)$$

Пусть задан вектор \mathbf{a} в двумерном пространстве $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ с ортогональным базисом $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, (рис. 6.5). Векторное выражение \mathbf{a} равно

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \quad (6.8)$$

где весовые коэффициенты c_1 и c_2 определяют составляющие векторы (проекции вектора \mathbf{a}) $c_1\mathbf{v}_1$ и $c_2\mathbf{v}_2$ в направлении координатных осей. Например, для $c_1 = 2, c_2 = 5$ вектор

$$\mathbf{a}^T = c_1\mathbf{v}_1^T + c_2\mathbf{v}_2^T = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

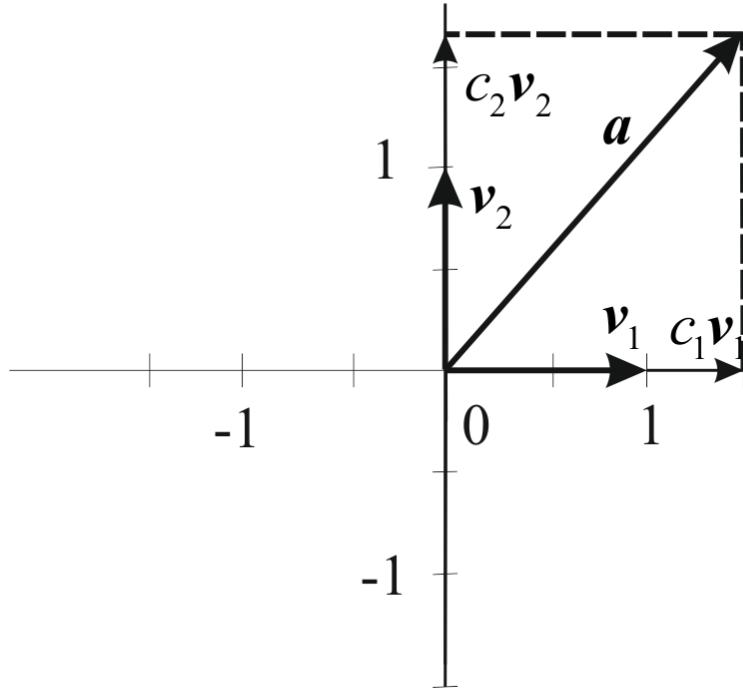


Рис. 6.5. Пространство с ортонормированным базисом

Необходимо найти значения коэффициентов c_1 и c_2 . Используя (6.8), вычислим скалярные произведения вида

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_1 \rangle = \langle (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) | \mathbf{v}_1 \rangle. \quad (6.9)$$

Преобразуя выражение (6.9), получаем:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_1 \rangle = \langle c_1 \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle + \langle c_2 \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle = c_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle + c_2 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Для ортонормированного базиса справедливы соотношения:

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle = 1, \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle = 0.$$

В результате получаем значение коэффициента c_1 равное

$$c_1 = \langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Аналогично можно получить значение коэффициента c_2 :

$$c_2 = \langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_2 \rangle.$$

5. Вектор \mathbf{a} можно выразить через векторы ортонормированного базиса и совокупность коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\mathbf{a} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n. \quad (6.10)$$

Формула (6.10) выражает вектор \mathbf{a} суммой векторов $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$ с соответствующими весовыми коэффициентами c_i . Можно сказать, что множество $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ коэффициентов определяют значения составляющих вектора \mathbf{a} в направлении базисных векторов $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Векторы $c_1 \mathbf{v}_1, c_2 \mathbf{v}_2, \dots, c_n \mathbf{v}_n$ являются проекциями вектора \mathbf{a} на соответствующие оси пространства.

6.3. Свойства дискретных экспоненциальных функций

1. Функции $\text{def}(k, n)$ ортогональны, т. е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} (W^{ln})^* = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases} \quad (6.11)$$

Так как $(W^{kn})^* = W^{-kn}$, то

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Следствием свойства ортогональности является:

- скалярное произведение различных двух строк матрицы \mathbf{V} , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно нулю;
- скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы \mathbf{V} , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно N .

Действительно, $W^{kn}(W^{kn})^* = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = 1$. Сумма N единиц даст число N .

Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{N}\mathbf{I}, \quad (6.6)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

2. Периодичность:
если $kn = Nl + r$, то

$$W^{kn} = W^{Nl+r} = W^{Nl}W^r = W^r. \quad (6.7)$$

Поскольку ДЭФ являются периодическими функциями, матрицу (6.3) можно переписать с минимальными фазами $((kn))_N$, образующимися после вычитания из значения kn целого числа периодов N , т.е.

$$kn \equiv r \text{mod} N.$$

Для $N = 4$ матрица ДЭФ (6.3) с минимальными фазами

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

3. Симметричность.

ДЭФ является функцией двух переменных k и n . Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T.$$

4. Обратная матрица ДЭФ.

Из свойства ортогональности $\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{N}\mathbf{I}$. Умножим обе части этого равенства слева на \mathbf{V}^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^* &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{I}, \\ \mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}^*. \end{aligned} \quad (6.8)$$

5. Мультипликативность:

- по строкам $\text{def}(k_1, n) \text{def}(k_2, n) = \text{def}(k_1 + k_2, n)$;
- по столбцам $\text{def}(k, n_1) \text{def}(k, n_2) = \text{def}(k, n_1 + n_2)$.

Действительно, $e^{-j\frac{2\pi k_1 n}{N}} e^{-j\frac{2\pi k_2 n}{N}} = e^{-j\frac{2\pi(k_1+k_2, n)}{N}}$. При умножении любых двух строк (столбцов) матрицы V получается строка (столбец) той же матрицы. Номер полученной строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

6.2. Определение дискретного преобразования Фурье

Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x(n)$ определяется как дискретная последовательность $X(k)$ в частотной области (экспоненциальная форма)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.9)$$

где k – индекс ДПФ в частотной области, n – индекс временной входной последовательности отсчетов сигнала.

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между временным и частотным представлением сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям.

Обратное ДПФ (ОДПФ) имеет следующий вид:

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.10)$$

Взаимная обратимость выражений (6.9) и (6.10) доказывается подстановкой $X(k)$ в $x(n)$, т.е.

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} (\sum_{l=0}^{N-1} x(l) W^{kl}) W^{-kn}. \quad (6.11)$$

Так как $x(l)$ не зависит от k , изменяем порядок суммирования в (6.11),

$$x(n) = N^{-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} W^{kl} W^{-kn}. \quad (6.12)$$

В силу ортогональности ДЭФ внутренняя сумма отлична от нуля только при $l = n$. В этом случае правая часть выражения (4.24) равна

$$x(n) = N^{-1} x(n) N.$$

Тригонометрическая форма ДПФ:

$$\text{прямое ДПФ } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\cos \frac{2\pi kn}{N} - j \sin \frac{2\pi kn}{N});$$

$$\text{обратное ДПФ } x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) (\cos \frac{2\pi kn}{N} + j \sin \frac{2\pi kn}{N}).$$

Замечание. Принципиальное различие между дискретизированным по времени преобразованием Фурье и ДПФ обусловлено характером системы функций $\{e^{-j\hat{\omega}n} = e^{-j\omega nT}\}$ и $\{W^{kn}\}$, а именно:

- огибающая дискретных значений функции W^{kn} соответствует функции $e^{-j\hat{\omega}n} = e^{-j\omega nT}$;
- конечный интервал времени $[0, NT]$ задания функции W^{kn} ;

– периодической структурой отсчетов восстанавливаемой последовательности $x(n) = x(n + N)_N$.

6.3. Свойства дискретного преобразования Фурье

1. Периодичность. Свойство периодичности ДЭФ $W^{Nl \pm k} = W^{\pm k}$ приводит к выражениям

$$X(Nl \pm k) = X(\pm k) \text{ и } x(Nl \pm n) = x(\pm n).$$

Действительно, $X(Nl + k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{(Nl+k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn} = X(k)$.

Обычно ограничиваются рассмотрением одного периода длиной N во временной и в частотной области. Это позволяет определить матричную форму ДПФ:

– прямое ДПФ

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N - 1)]^T$ и $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N - 1)]^T$ – векторы отсчетов последовательности спектральных коэффициентов и сигнала соответственно;

– обратное ДПФ

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}.$$

Используя формулу (4.20), получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{X}.$$

2. Линейность. Класс линейных систем определяется линейными операциями или принципом суперпозиции. Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ входные последовательности, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ соответственно их ДПФ, то при подаче на вход последовательности $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ систему называют линейной тогда и только тогда, когда выполняется

$$X(k) = aX_1(k) + bX_2(k).$$

где a и b произвольные постоянные параметры (константы). Спектр последовательности $x(n)$ равен

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} (aX_1(k) + bX_2(k))W^{kn} = a \sum_{n=0}^{N-1} X_1(k)W^{kn} + b \sum_{n=0}^{N-1} X_2(k)W^{kn} = \\
&= aX_1(k) + bX_2(k).
\end{aligned}$$

3. Инвариантность ДПФ относительно сдвига по времени и частоте:

1. Инвариантность относительно циклического сдвига по времени. Если последовательность $x(n)$ имеет ДПФ $X(k)$, то ДПФ последовательности $x(n \pm h)$ равно

$$X_{\pm}(k) = W^{\mp kn}X(k).$$

Рассмотрим две последовательности $x(n)$ и $x_1(n) = x(n - h), h = 2$. Формы последовательностей показаны на рисунке 6.4а,б.

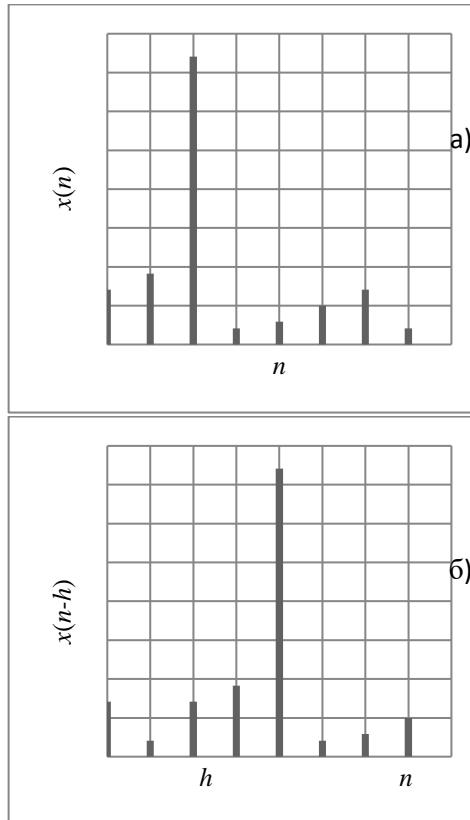


Рисунок 6.4

ДПФ последовательности $x_1(n) = x(n - h)$ равно

$$X_{-h}(k) = \sum_{n=h}^{(N-1)+h} x(n - h)W^{kn}.$$

Заменяя индекс суммирования n , и введя новую переменную $l = n - h$, получим

$$X_{-h}(k) = \sum_{l=0}^{(N-1)} x(l)W^{k(l+h)} = \sum_{l=0}^{(N-1)} x(l)W^{kl}W^{+hk} = W^{+hk}X(k),$$

где $W^{+hk} = \exp\left(-j\frac{2\pi kh}{N}\right) = (\cos\frac{2\pi kh}{N} - j\sin\frac{2\pi kh}{N})$. Тогда

$$X_{-h}(k) = W^{+hk}|X(k)|e^{j\arg X(k)} = e^{-j\frac{2\pi kh}{N}}|X(k)|e^{j\varphi} = |X(k)|e^{(-j\frac{2\pi kh}{N} + \varphi)}.$$

Таким образом, при сдвиге дискретного сигнала по времени изменениям подвергаются только фазы дискретных функций (фазовый спектр), амплитудный спектр не изменяется.

2. Инвариантность относительно сдвига по частоте. Если спектральной последовательности $X(k)$ соответствует последовательность $x(n)$, то при сдвиге последовательности $X(k \pm h)$ исходная последовательность $x(n)$ получит фазовый сдвиг, т.е.

$$x_{\pm h}(n) = W^{\pm hn}x(n).$$

Пусть $X_1(k) = X(k - h)$. Обратное ДПФ последовательности $X(k - h)$ равно

$$x_{-h}(n) = N^{-1} \sum_{k=h}^{(N-1)+h} X(k-h)W^{-kn}.$$

Заменяя индекс суммирования k , и введя новую переменную $l = k - h$, получим

$$x_{-h}(n) = N^{-1} \sum_{l=0}^{(N-1)} X(l)W^{-n(l+h)} = N^{-1} \sum_{l=0}^{(N-1)} X(l)W^{-nl}W^{-hn} = W^{-hn}x(n),$$

где $W^{-hn} = \exp\left(j\frac{2\pi nh}{N}\right) = (\cos\frac{2\pi nh}{N} + j\sin\frac{2\pi nh}{N})$.

4. Теорема о свертке. Если исходные последовательности отсчетов сигналов $x(n)$ и $h(n)$ имеют конечные периоды N , их циклическая свертка определяется формулой

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m), n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим ДПФ последовательности $y(n)$.

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) W^{kn}. \quad (6.13)$$

Так как $x(m)$ не зависит от n , изменяем порядок суммирования в (6.13).

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n-m) W^{kn}. \quad (6.14)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени, можно записать составляющую выражения (6.14) как

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n-m) W^{kn} = W^{km} H(k).$$

Тогда

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{mk} H(k) = X(k) H(k). \quad (6.15)$$

Таким образом, спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей. Коэффициенты свертки вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$y(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теорема (6.15) позволяет вычислить коэффициенты свертки при помощи ДПФ по формуле

$$y(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}_{x(n)} \cdot \text{ДПФ}_{h(n)}\}.$$

При больших величинах N на практике применяют эффективные алгоритмы вычисления свертки с использованием быстрых преобразований Фурье.

5. Теорема о корреляции. По определению (2.13) корреляционная функция двух конечных последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ равна

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим ДПФ последовательности $r(n)$.

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(n)W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m) W^{kn}. \quad (6.16)$$

Так как $x(m)$ не зависит от n , изменяем порядок суммирования в (6.16).

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n+m) W^{kn}. \quad (6.17)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени, можно записать составляющую выражения (6.17) как

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n+m) W^{kn} = W^{-km} H(k).$$

Тогда

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{-mk} H(k) = X(k)^* H(k). \quad (6.18)$$

Таким образом, спектр корреляционной функции равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей, причем один из спектров берется в комплексном сопряжении.

Коэффициенты корреляционной функции вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$r(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Теорема (6.18) позволяет вычислить коэффициенты корреляционной функции при помощи ДПФ по формуле

$$r(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}_{x(n)}^* \cdot \text{ДПФ}_{h(n)}\}.$$

На практике применяют эффективные алгоритмы вычисления корреляционной функции с использованием быстрых преобразований Фурье.

6. Теорема Парсеваля. Пусть последовательности $x(n)$ и $h(n)$ будут идентичными. В этом случае теорема о корреляции записывается как

$$R(k) = X(k)^* X(k) = |X(k)|^2, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Коэффициенты корреляционной функции, вычисляются на основе выражения ОДПФ, т.е.

$$\begin{aligned} r(n) &= N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W^{-kn} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 W^{-kn} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) x(n+m) \end{aligned} \quad (6.19)$$

В частном случае, для $n = 0$ равенство (6.19) сводится к соотношению

$$r(0) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 W^{-k0} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)^2,$$

$$N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)^2. \quad (6.20)$$

Из (6.20) следует, что энергия сигнала, вычисленная во временной области (по переменной n) равна энергии сигнала, вычисленной в частотной области. Каждая величина $|X(k)|^2$ представляет собой мощность дискретной гармоники, имеющей частоту с номером k .

7. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Быстрый алгоритм Фурье позволяет эффективно вычислять дискретное преобразование Фурье (ДПФ). При этом сокращается количество выполняемых операций, а также объем памяти, необходимый для вычисления ДПФ. В результате многие прикладные задачи спектрального анализа, обработки сигналов за счет уменьшения вычислительной сложности решаются в реальном времени.

7.1. Вычислительная сложность дискретного преобразования Фурье

Прямое и обратное ДПФ определяются по формулам

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (7.1)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.2)$$

Последовательность $x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(N - 1))$ это отсчеты сигнала, а последовательность $X(k) = (X(0), X(1), \dots, X(N - 1))$ это отсчеты дискретного спектра. Равенства (7.1) и (7.2) представляют собой экспоненциальную форму записи ДПФ. Можно записать ДПФ в матричной форме:

$$\begin{aligned} X &= Vx, \\ x &= N^{-1}V^*X, \end{aligned}$$

где $x = [x(0), x(1), \dots, x(N - 1)]^T$, $X = [X(0), X(1), \dots, X(N - 1)]^T$ – векторы столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов.

Если $x(n)$ комплекснозначная последовательность, то для вычисления одного отсчета ДПФ потребуется $C_{M_K} = N$ умножений комплексных чисел и $C_{A_K} = N - 1$ сложений комплексных чисел.

Пример 7.1. Вычислить преобразование Фурье длиной $N = 4$.

Решение. Ядро прямого преобразования имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$$

В общем виде прямое ДПФ вычисляется из выражения

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(1) + x(2) + x(3) \\ x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) \\ x(0) - x(1) + x(2) - x(3) \\ x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}.$$

Оценим вычислительную сложность ДПФ для комплекснозначной последовательности.

Число действительных сложений.

Пусть $a + jb$ и $c + jd$ комплексные числа, где $j = \sqrt{-1}$. Сумма этих чисел равна

$$(a + c) + j(c + d).$$

На каждое сложение двух комплексных чисел затрачивается 2 сложения действительных чисел. При прямом вычислении одного коэффициента ДПФ нужно выполнить $N - 1$ комплексных сложений. На выполнение $N - 1$ комплексных сложений затрачивается

$$C_A^1 = 2(N - 1)$$

сложения действительных чисел.

Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ необходимо выполнить

$$C_A^N = 2N(N - 1) = 2N^2 - 2N$$

сложения действительных чисел.

Число действительных умножений.

Умножение комплексных чисел равно

$$(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc - bd = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

На каждое комплексное умножение затрачивается 4 умножения действительных чисел и 2 сложения действительных чисел.

При прямом вычислении одного коэффициента ДПФ по операции умножения нужно выполнить $2N$ сложения действительных чисел. Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ по операции умножения необходимо выполнить

$$C_{AM}^N = 2N^2$$

сложения действительных чисел.

При прямом вычислении одного коэффициента ДПФ по операции умножения нужно выполнить $4N$ умножений действительных чисел. Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ по операции умножения необходимо выполнить

$$C_M^N = 4N^2$$

умножений действительных чисел.

Таким образом, вычислительная сложность ДПФ равна:

$$C_A = C_A^N + C_{AM}^N = 2N^2 - 2N + 2N^2 = 4N^2 - 2N$$

сложений действительных чисел и

$$C_M = 4N^2$$

умножений действительных чисел.

При оценке качества вычислительного алгоритма оперируют понятием асимптотической сложности, т.е. величиной, которая получается при неограниченном увеличении размера входа N . Асимптотическая сложность определяет размер задач, которые можно решить алгоритмом. Асимптотическая сложность оценивается порядком роста функции без учета мультипликативных констант. Например, если N входных переменных обрабатывается за время cN^2 , где c – некоторая постоянная, то времененная сложность алгоритма это $O(N^2)$, говорят порядка N^2 .

Существуют другие алгоритмы вычисления ДПФ, которые снижают вычислительную сложность до $N \log_2 N$ и даже до N . Такие алгоритмы называются быстрыми.

Впервые метод быстрого преобразования Фурье – БПФ (FFT – Fast Fourier Transform) был предложен в 1965 году Кули (Cooley) и Таки (Tukey). Однако метод БПФ неоднократно открывался до этого. Ряд исследователей приписывают изобретение алгоритма БПФ Рунге (Runge) (1903) и Кенигу (König) в 1924 году. Есть утверждения о том, что быстрый алгоритм типа БПФ открыл еще Гаусс (Gauss) еще 1805 году. Важность БПФ осозналась с появлением компьютеров. Начался поиск других эффективных алгоритмов.

7.2. Быстрое преобразование Фурье по основанию два

Метод БПФ основан на том, что вычисление ДПФ -точечной последовательности сводится к вычислению ДПФ последовательности длиной меньшей чем N .

Пусть $N = 2^\nu, \nu \in \mathbb{Z}^+$. При вычислении ДПФ методом БПФ по основанию два N -точечная последовательность разделяется на две части, в каждой из которых $\frac{N}{2}$ отсчетов. Общее ДПФ всей N -точечной последовательности отсчетов вычисляется через ДПФ одной и другой ее частей. Каждая из выделенных $\frac{N}{2}$ -точечных последовательностей в свою очередь может быть разделена на две части, в которых будет уже по $\frac{N}{4}$ отсчетов. Применяя еще раз специальные формулы можно выразить ДПФ одной $\frac{N}{2}$ -точечной последовательности через соответствующие пары $\frac{N}{4}$ точечных последовательностей. Далее действуя подобным образом, получаем ДПФ всей исходной N -точечной последовательности как функцию ДПФ только двухточечных последовательностей.

7.2.1. Разделение последовательности на части. Прореживание по времени

Пусть задана последовательность отсчетов $x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(7))$, рисунок 7.1.

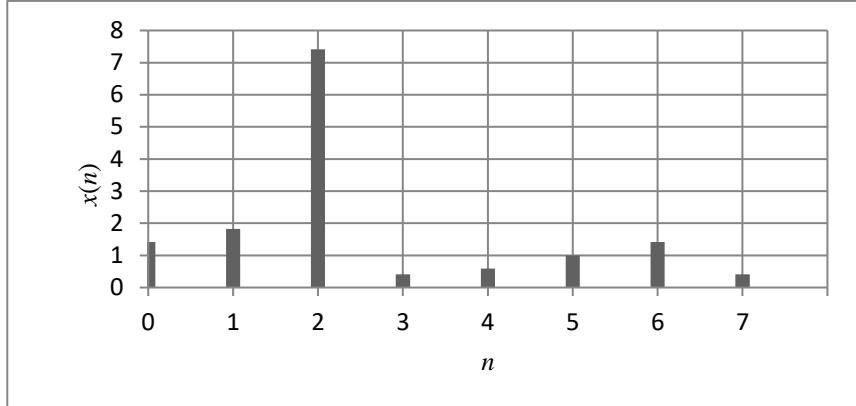


Рисунок 7.1.

Разделим N -точечную последовательность на две части: последовательность $x_1(n) = (x(0), x(2), x(4), x(6))$ с четными номерами и последовательность $x_2(n) = (x(1), x(3), x(5), x(7))$ с нечетными номерами. В каждой последовательности будет из $\frac{N}{2}$ отсчетов. На рисунках 7.2 и 7.3 изображены эти последовательности.

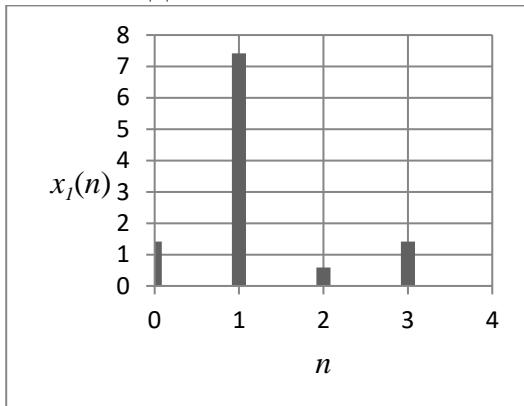


Рисунок 6.2

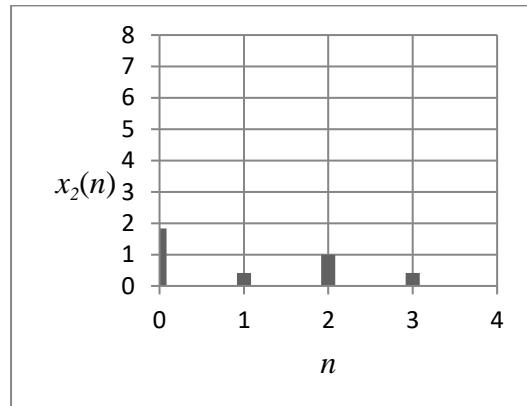


Рисунок 6.3

Далее каждую $\frac{N}{2}$ -точечную последовательность разделим на две части:

$x'_1 = (x(0), x(4))$ – последовательность четных отсчетов;

$x'_2 = (x(2), x(6))$ – последовательность нечетных отсчетов;

$x''_1 = (x(1), x(5))$ – последовательность четных отсчетов;

$x''_2 = (x(3), x(7))$ – последовательность нечетных отсчетов.

Изображения этих последовательностей показаны на рисунках 7.4, 7.5, 7.6, и 7.7.

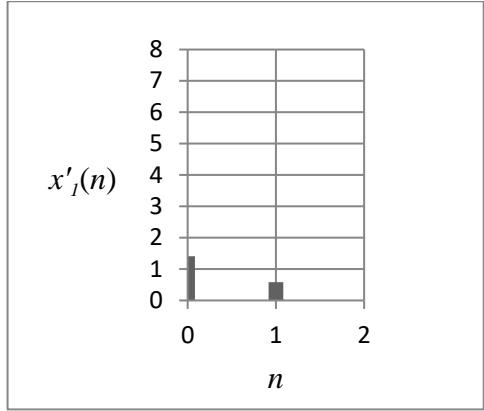


Рисунок 7.4

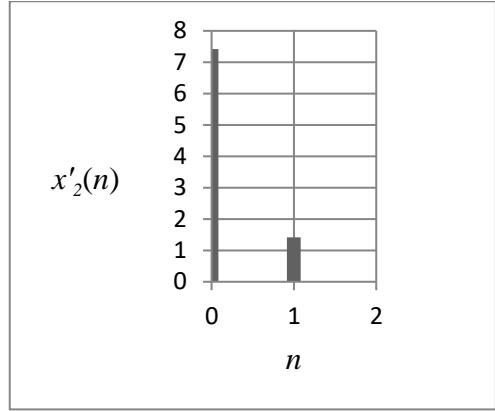


Рисунок 7.5

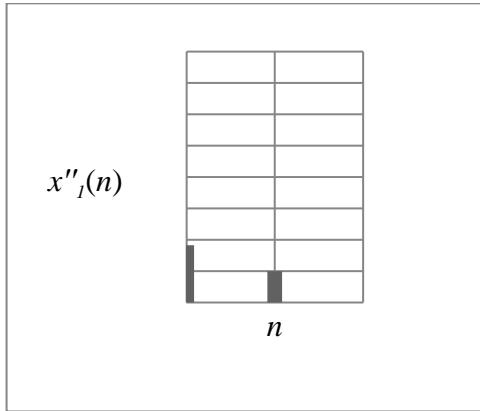


Рисунок 7.6

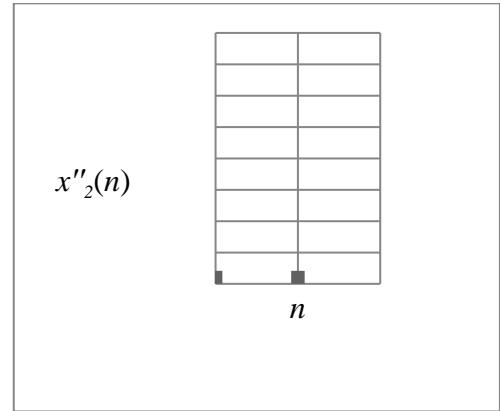


Рисунок 7.7

7.2.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Разобьем последовательность $x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(N-1))$ на две последовательности. Последовательность

$x_1(n) = x(2l) = (x(0), x(2), \dots, x(N-2)), l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ содержит четные отсчеты. Последовательность $x_2(n) = x(2l+1) = (x(1), x(3), \dots, x(N-1)), l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ состоит из нечетных отсчетов. N -точечное ДПФ последовательности $x(n)$ равно

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{(2l+1)k} = \\ = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) (W_N^2)^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) (W_N^2)^{lk}. \quad (7.3)$$

С учетом того, что

$$W_N^2 = \exp(-j \frac{2\pi}{N})^2 = e^{-j \frac{2\pi^2}{N}} = e^{-j \frac{2\pi}{2}} = W_{\frac{N}{2}}$$

– это значение поворачивающего множителя функции с периодом $\frac{N}{2}$, запишем выражение (7.3) в виде

$$X(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{-lk} + W_N^{-k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{-lk} = G(k) + W_N^{-k} H(k), \quad (7.4)$$

где $G(k)$ и $H(k)$ – есть $\frac{N}{2}$ -точечные ДПФ последовательностей с четными и нечетными номерами отсчетов.

Искомое ДПФ $X(k)$ содержит N спектральных коэффициентов. Но функции $G(k)$ и $H(k)$ содержат только $\frac{N}{2}$ коэффициентов и имеют период $\frac{N}{2}$. Для вычисления спектральных коэффициентов с номерами $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ можно использовать непосредственно выражение (7.4). Для вычисления спектральных коэффициентов с номерами $\frac{N}{2} \leq k \leq N - 1$ воспользуемся свойством периодичности преобразования Фурье. Поскольку $\frac{N}{2}$ -точечные ДПФ $G(k)$ и $H(k)$ периодичны с периодом $\frac{N}{2}$, т.е.

$$G(k) = G\left(k + \frac{N}{2}\right) \text{ и } H(k) = H\left(k + \frac{N}{2}\right),$$

то составляющие выражения (7.4) достаточно вычислить для значений номеров $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Заметим, что

$$W_N^{(k+\frac{N}{2})} = W_N^k W_N^{\frac{N}{2}} = W_N^k e^{-j\frac{2\pi N}{N^2}} = -W_N^k.$$

Тогда формулу (7.4) можно записать следующим образом:

$$X(k) = G(k) + W_N^{-k} H(k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1;$$

$$X(k) = G(k) - W_N^{-k} H(k), \quad \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1.$$

Следовательно, значения $X(k)$ получаются вычислением двух $\frac{N}{2}$ -точечных преобразований и их весовым сложением. На рисунке 7.8 изображена базовая операция БПФ с прореживанием по времени. Кружок на рисунке можно интерпретировать как двухточечное ДПФ; узлы обозначают регистры, содержащие входные и выходные массивы данных.

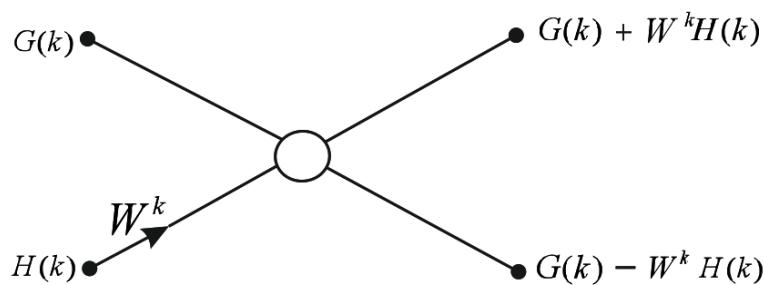


Рисунок 7.8

7.2.3. Структурная схема процессора для вычисления N -точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$ -точечные преобразования

На рисунке 7.9 показана структурная схема процессора для вычисления 8 точечного ДПФ через два 4-х точечные преобразования

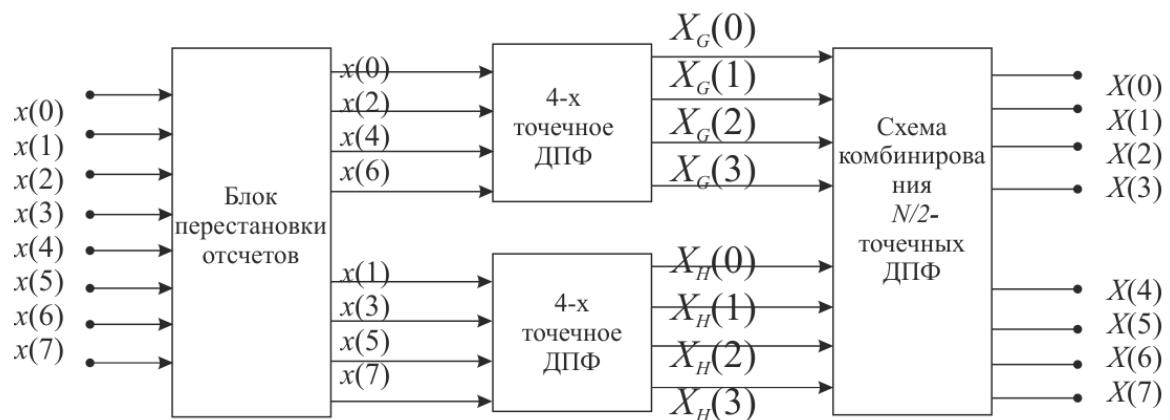


Рисунок 7.9

Рисунок 7.10 иллюстрирует процесс вычисления ДПФ с помощью алгоритма БПФ.

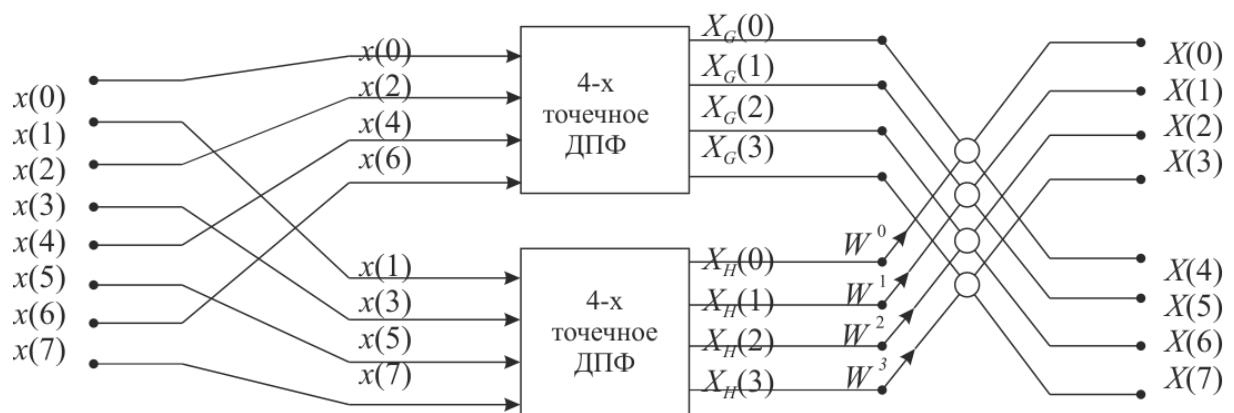


Рисунок 7.10 – Граф БПФ

7.2.4. Вычислительная сложность алгоритма БПФ

Для выполнения вычисления N -точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$ -точечные преобразования требуется затратить

$$C_M'^* = 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$$

комплексных умножений. Операция комбинирования требует умножений на W^k , $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$.

$$C_M''^* = \frac{N}{2}.$$

Всего необходимо выполнить

$$C_M^* = C_M'^* + C_M''^* = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$$

комплексных умножений.

Кроме того, для выполнения вычисления N -точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$ -точечные преобразования требуется затратить

$$C_A'^* = 2\left(\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} - 1\right)\right) = \frac{N^2}{2} - N$$

комплексных сложений. Операция комбинирования требует еще N комплексных сложений,

$$C_A''^* = N.$$

Всего необходимо выполнить

$$C_A^* = C_A'^* + C_A''^* = \frac{N^2}{2}$$

комплексных сложений.

Дальнейшее сокращение количества операций произойдет, если для вычисления $G(k) + W_N^k H(k)$ и $G(k) - W_N^k H(k)$ опять сделать прореживание их входных последовательностей. В этом случае вычисляется 4-х точечное ДПФ через два 2-точечных ДПФ. На рисунке 7.11 показана структурная схема процессора 8-точечного ДПФ на основе такого алгоритма.



Рисунок 7.11

Вычислим двухточечное ДПФ.

$$X = Vx = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(1) \\ x(0) - x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}.$$

Как видно, ДПФ двухточечной последовательности равно сумме и разности значений отсчетов последовательности. Следовательно, вычисление двухточечного ДПФ не требует операций умножений. Дискретное преобразование Фурье $\frac{N}{2}$ -точечной последовательности, записанное через комбинирование двух $\frac{N}{4}$ -точечных ДПФ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X_G(k) = G(k) + W_N^k H(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1, \\ X_G(k) = G(k) - W_N^k H(k), & \frac{N}{4} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\text{где } W_{\frac{N}{2}} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{\frac{N}{2}}\right) = W_N^2 \quad (7.6)$$

С учетом (7.6) выражение (7.5) запишется как

$$\begin{cases} X_G(k) = G(k) + W_N^{2k} H(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1, \\ X_G(k) = G(k) - W_N^{2k} H(k), & \frac{N}{4} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1. \end{cases}$$

Полный направленный граф вычисления ДПФ, полученный последовательным прореживанием имеет следующую структуру:

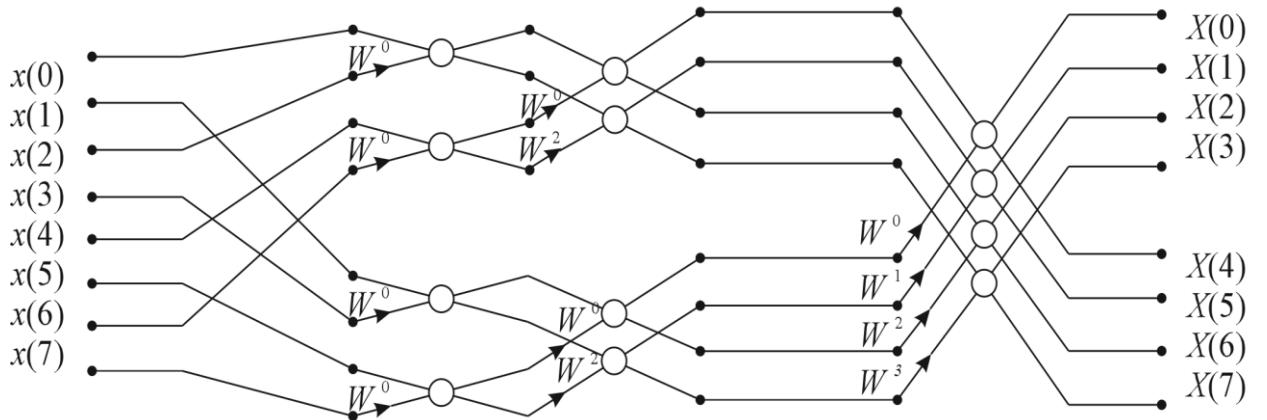


Рисунок 7.12 – Полный граф БПФ

Особенностью алгоритма БПФ с прореживанием по времени, как и большинства других алгоритмов БПФ, является необходимость такой перестановки отсчетов входной последовательности, чтобы выходная последовательность $X(k)$ имела естественный порядок. В случае, когда N степень двойки, входная последовательность должна быть расположена в двоично-инверсном порядке, чтобы выходная последовательность получалась в прямом порядке. Двоично-инверсный порядок определяется следующим образом. Пусть $N = 2^l, l = 3$.

Таблица 7.1

Номер отсчета	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер отсчета
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Оценим вычислительную сложность алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

1. Число итераций вычислительного процесса равно $\log_2 N$.

2. Граф содержит $N \log_2 N$ узлов; в каждом узле осуществляется суммирование или вычитание данных.

3. Аддитивная вычислительная сложность алгоритма БПФ

$$C_A = N \log_2 N.$$

4. Мультипликативная вычислительная сложность алгоритма БПФ

$$C_M = \frac{N}{2} \log_2 N.$$

В таблице 7.2 представлены данные, свидетельствующие об эффективности алгоритма БПФ.

Таблица 7.2

N	Количество умножений при вычислении ДПФ	Количество умножений при вычислении БПФ	Эффективность БПФ
256	65536	1024	64:1
512	262144	2304	114:1
1024	1048576	5120	205:1
2048	4194304	11264	372:1
4096	16777216	24576	683:1

7.2.5. Факторизация матрицы ядра ДПФ

Алгоритм БПФ имеет матричную трактовку. Для рассмотренного примера вычисления БПФ можно записать

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \Phi_1\Phi_2\Phi_3\mathbf{P}\mathbf{x}. \quad (7.7)$$

В матричном выражении (7.7) произведение матрицы \mathbf{P} на вектор \mathbf{x} соответствует операции перестановки отсчетов последовательности $x(n)$.

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \\ x(2) \\ x(6) \\ x(1) \\ x(5) \\ x(3) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{P} двоичной перестановки отсчетов последовательности $x(n)$ содержит в каждой строке (столбце) только одну единицу.

Далее по графу можно построить матрицы для каждой итерации. Первая итерация это вычисление двухточечных ДПФ. Для $N = 8$ выполняется следующее матричное выражение:

$$X' = \Phi_3 P x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \\ x(2) \\ x(6) \\ x(1) \\ x(5) \\ x(3) \\ x(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(4) \\ x(0) - x(4) \\ x(2) + x(6) \\ x(2) - x(6) \\ x(1) + x(5) \\ x(1) - x(5) \\ x(3) + x(7) \\ x(3) - x(7) \end{bmatrix}.$$

Вторая итерация графа БПФ эквивалентна произведению матриц вида

$$X'' = \Phi_2 \Phi_3 P x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & W^2 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & 1 & -W^2 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & W^2 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & 1 & -W^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) + x(4) \\ x(0) - x(4) \\ x(2) + x(6) \\ x(2) - x(6) \\ x(1) + x(5) \\ x(1) - x(5) \\ x(3) + x(7) \\ x(3) - x(7) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x(0) + x(4) + x(2) + x(6) \\ x(0) - x(4) + (x(2) - x(6))W^2 \\ x(0) + x(4) - x(2) - x(6) \\ x(0) - x(4) - (x(2) - x(6))W^2 \\ x(1) + x(5) + x(3) + x(7) \\ x(1) - x(5) + (x(3) - x(7))W^2 \\ x(1) + x(5) - x(3) - x(7) \\ x(1) - x(5) - (x(3) - x(7))W^2 \end{bmatrix}.$$

На третьей итерации производится умножение матриц

$$\Phi_1 X'' = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 P x,$$

где матрица Φ_1 имеет вид

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -W^1 & & \\ & & 1 & & & & -W^2 & \\ & & & 1 & & & & -W^3 \end{bmatrix}.$$

Особенностью матриц Φ_1, Φ_2, Φ_3 является то, что каждая имеет в строке и столбце только два ненулевых элемента, говорят «слабо заполнена». Алгоритм БПФ возможен из-за факторизации матрицы ДЭФ дискретного преобразования Фурье, т.е.

$$\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = V.$$

Замечания.

1. Если необходимо вычислить N -точечное ДПФ последовательности сравнительно небольшого периода N , или когда последовательность содержит малое число ненулевых ее значений, целесообразно прямое использование для расчетов формул ДПФ.
2. Оценивая эффективность различных быстрых методов вычисления ДПФ, принимают во внимание:
 - число ячеек памяти, необходимых для запоминания значений поворачивающих множителей W^{kn} и значений N комплексных чисел входной последовательности;
 - процедуру обращения к памяти;
3. Особенностью БПФ является выигрыш в вычислении тем больший, чем больше N . Например, выполнение БПФ длиной $N = 2097152$ на персональном компьютере занимает ≈ 5 с. Вычисление ДПФ такой последовательности займет более двух недель.
4. Имеются другие алгоритмы быстрых спектральных преобразований, например, алгоритм Винограда.

Упражнения.

- 7.1. Изобразить полный граф БПФ для $N = 16$.
- 7.2. Изобразить полный граф БПФ для $N = 32$.

$$= \frac{X(0)}{N}.$$

8. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

8.1 Эффективное представление и описание границ объектов интереса на изображениях

Задача описания границ объектов интереса на изображениях возникает при необходимости распознавания или идентификации отдельных областей или объектов на изображениях, когда важны очертания объектов

присутствующих на изображении, а детали, содержащиеся внутри объектов или внутри фона, не представляют интереса. В определенных приложениях (топография, экологический мониторинг, анализ медицинских изображений и др.) для снижения объема массива данных, описывающих объект, желательно заменить множество пикселей, изображающих объект, описанием его границы. Например, возможный подход к решению проблемы стандартизации цитологической диагностики основывается на применении методов и техники распознавания образов объектов – контуров границ, областей, текстурных признаков ядра, клетки и пр. Представление границами подходит для тех случаев, когда в центре внимания находятся такие геометрические характеристики объекта как длина границы, изгибы, очертания, число вогнутостей границы. Граница является полным и компактным представлением геометрии объекта. По границе можно выделить дополнительные параметры формы. Представление областями более уместно, если акцент делается на внутренних характерных признаках, например, ядра клетки. Описание формы объекта не имеет широкого применения на практике, если непосредственное вычисление параметров формы представляется чрезмерно сложным и громоздким.

Важным для практики является подход, в котором представления формы строится путем сведения ее к спектральным признакам (дескрипторам).

8.1.2. Теоретические сведения

Описание объекта (границы области – после сегментации изображений) выполняется на основе точечных, линейных (одномерных) и двумерных представлений. Линейные и двумерные объекты могут представляться в виде замкнутых внешних и внутренних контуров. В качестве признаков участвующих в описании, сопоставлении с конкретным образом и при разделении классифицируемых изображений выступают Фурье-дескрипторы. Однако ДПФ обладает таким недостатком как необходимость работы с комплексными числами, что приводит к удвоению вычислений. Вычислительная сложность еще более возрастает, когда ДПФ выполняется по каждой независимой переменной. Пространственные данные, описывающие границу, могут иметь высокую размерность. Тогда на этапе получения признаков распознавания, вычислительная и времененная сложность обработки еще более возрастает. С целью упрощения обработки, процесса классификации образа объекта следует понижать размерность входа классификатора. Одним из приемов снижения вычислительной сложности является устранение пространственной избыточности, уменьшение количества анализируемых признаков. Понижать размерность следует таким образом, чтобы сопутствующее этому увеличение ошибки распознавания было относительно невелико. Как известно, среди всех линейных преобразований данных оптимальным по отношению к критерию наименьшего значения среднеквадратической ошибки при неполной

размерности (неточном задании координат) является декоррелирующее преобразование Хотеллинга. Однако это преобразование не обладает быстрыми алгоритмами вычисления, что затрудняет его практическое использование в определенных приложениях. В отличие от дискретного преобразования Фурье (ДПФ), ядро ДПХ выражается действительными числами. Применительно к вещественным данным изображения обеспечивается значительная экономия вычислительных и временных ресурсов, упрощается обработка сигналов. Если форма границы не имеет резких изломов, Хартли-дескрипторы подходят для эффективного описания объекта изображения.

8.1.3. Хартли-дескрипторы

В отличие от ДПФ, ортогональный базис Хартли, заданный на интервале из N точек $0, 1, 2, \dots, N - 1$, выражается действительными числами

$$h_h = \text{cas}\left(\frac{2\pi\nu n}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi\nu n}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi\nu n}{N}\right), \quad (8.1)$$

для $n, \nu \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Например, матрица \mathbf{H}_h дискретного множества ортогональных функций ДПХ размером 8×8 имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Пара 1-D ДПХ последовательности $g_n = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ определяется следующими равенствами:

$$\hat{g}_\nu = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \text{cas}\left(\frac{2\pi\nu n}{N}\right) \quad (8.2)$$

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \hat{g}_\nu \text{cas}\left(\frac{2\pi\nu n}{N}\right), \quad (8.3)$$

где $\hat{g}_\nu = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{N-1}\}$ – Хартли образ последовательности отсчетов g_n .

В матричном представлении операции 1-D ДПХ векторов \mathbf{g} и $\hat{\mathbf{g}}$ выражаются как

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}_h \mathbf{g} \text{ и } \mathbf{g} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_h \hat{\mathbf{g}}, \quad (8.4)$$

где \mathbf{g} – вектор столбец дискретных значений сигнала размером $N \times 1$; $\widehat{\mathbf{g}}$ – вектор столбец спектральных коэффициентов ДПХ размером $N \times 1$. Как видно, прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны.

8.2. Описание границы

Будем считать, что произведена замена исходного полутонового изображения бинарным. Пусть дискретная граница g области содержит N отсчетов (точек). Ее можно представить в виде двумерной функции g_{x_n, y_n} , $n \in \{0, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, N - 1\}$, где (x_i, y_j) – это целочисленные пары декартова произведения Z^2 . Каждой точке контура границы однозначно соответствует функция g_{x_i, y_j} . Весь контур представляется N -точечной последовательностью

$$g_{x_i, y_j} = \{(x_0, y_0), \dots, (x_i, y_j), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1})\}. \quad (8.5)$$

Образуем из координат последовательности g_{x_n, y_n} две одномерные последовательности (векторы):

$$x_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\} \text{ и } y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}.$$

С учетом представления (8.4), векторам \mathbf{g}_x и \mathbf{g}_y со значениями координат из (8.5) однозначно соответствуют признаки в разложении Хартли: $\widehat{\mathbf{g}}_x$ и $\widehat{\mathbf{g}}_y$. Эти векторы отображают образы границы объекта. Такая запись двумерной границы g области позволяет уменьшить вычислительные затраты на ее описание.

Понижение размерности входа классификатора реализуется посредством эффективного представления последовательностей x_n и y_n в спектральном базисе ДПХ. Решение этой задачи возможно на основе дисперсионного или порогового способов фильтрации коэффициентов преобразования Хартли. Для этого осуществляется выделение из векторов образов $\widehat{\mathbf{g}}_x$ и $\widehat{\mathbf{g}}_y$ трансформант с наибольшими дисперсиями. В методах распознавания бинарных изображений, основанных на сопоставлении, незнакомый образ приписывается к тому классу, прототип которого оказывается ближайшим в смысле заранее выбранной метрики. Выбранное после снижения размерности подмножество признаков, должно соответствовать вектору признаков образа границы исходя, например, из критерия минимального расстояния между ними. Предполагается, что чем меньше расстояние между сравниваемыми объектами, тем больше их степень сходства.

8.2.1. Примеры применения ДПХ

В качестве иллюстрации применения Хартли-дескрипторов рассмотрим замкнутый контур (границу) с числом точек $N = 16$ бинарного изображения. Пример дискретной границы показан на рисунке 8.1.

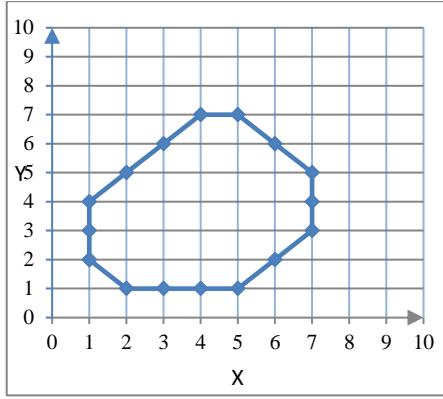


Рис. 8.1. 16-точечная граница объекта

Точкам границы соответствует двумерная последовательность

$$g = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{15}, y_{15})\} = \\ = \{(1, 2)(1, 3)(1, 4)(2, 5)(3, 6)(4, 7)(5, 7)(6, 6) \\ (7, 5)(7, 4)(7, 3)(6, 2)(5, 1)(4, 1)(3, 1)(2, 1)\}.$$

Исходные одномерные последовательности

$$x_n = \{1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2\} \text{ и } y_n = \\ \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1\}.$$

По формуле (8.2) выполняется ДПХ последовательностей x_n и y_n . В результате получаем следующие последовательности признаков, представляющие исходные координаты границы объекта наблюдения:

$$\hat{g}_{v_x} = \{64; -31,72; 0; -1,64; 0; 0,3; 0; -0,5; \\ 0; -1,2; 0; -0,72; 0; 0,62; 0; -13,14\}. \\ \hat{g}_{v_y} = \{58; 6,57; -2,41; 1,16; 0; 0,36; 1; 0,11; \\ 0; 0,25; 0,41; -0,24; -2; 0,82; 1; -33,03\}.$$

Для осуществления понижения размерности поля признаков рассчитывается функция (вектор) распределения дисперсии коэффициентов \hat{g}_{v_x} и \hat{g}_{v_y} . Коэффициенты вектора с минимальными значениями определяют зону фильтрации трансформант или зону сохранения M признаков. Для последовательностей \hat{g}_{v_x} и \hat{g}_{v_y} соответственно значения $M_x = 3$ и $M_y = 3$. В зону фильтрации входят коэффициенты \hat{g}_{v_x} и \hat{g}_{v_y} , координаты которых соответствуют множеству

$$L = \{(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_{14}, y_{14})\}.$$

Адресная информация о зоне фильтрации трансформант определяется только двумя крайними координатами множества $\{L\}$. Усеченные входные последовательности классификатора равны

$$\begin{aligned}\hat{g}'_{v_x} &= \{64; -31,72; -13,14\}, \\ \hat{g}'_{v_y} &= \{58; 6,57; -33,03\}.\end{aligned}$$

Восстановление изображения границ области произведем по M сохраненным коэффициентам. Применяя формулу (3) для усеченных последовательностей, получаем следующие оценки \tilde{x}_n и \tilde{y}_n :

$$\tilde{x}_n = \{1,96; 0,96; 1,2; 1,85; 2,84; 4; 5,16; 6,15; 6,8; 7,04; 6,8; 6,15; 5,16; 4; 2,84; 1,85\}.$$

$$\tilde{y}_n = \{1,97; 3,04; 4,2; 5,28; 6,1; 6,55; 6,53; 6,1; 5,28; 4,2; 3,05; 1,97; 1,15; 0,7; 1,14\}.$$

После операции округления получаем значения координат границы объекта, т.е.

$$\begin{aligned}\{\tilde{g}\} = g_{x_i, y_j} = \text{round } \{g_{\tilde{x}_n, \tilde{y}_n}\} &= \{(1, 2)(1, 3)(1, 4) \\ (2, 5)(3, 6)(4, 7)(5, 7)(6, 6)(7, 5)(7, 4)(7, 3) \\ (6, 2)(5, 1)(4, 1)(3, 1)(2, 1)\}.\end{aligned}$$

Если \tilde{g} представляет собой оценку g , то ошибка восстановления точек границы

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\tilde{g}(x, y) - g(x, y))^2}.$$

Очевидно, в рассматриваемом примере величина искажений $\sigma = 0$.

Как видно, сравнительно небольшое пространство сохраняемых признаков ДПХ точно описывают объект (6 признаков точно определяют кривую неправильной формы). При сохранении 4 признаков среднеквадратичная ошибка восстановления точек границы не превышает величины $\sigma = 0,2$.

В качестве исходных данных для проведения процесса моделирования обработки были выбраны бинарные изображения цифр, рисунок 8.2(а). На рисунке 8.2(б) показано бинарное изображение 456-точечной границы цифры 3.

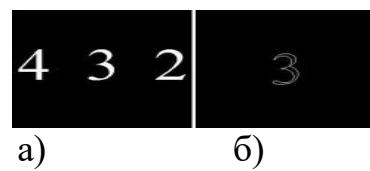


Рис. 8.2(а). Изображение цифр; Рис. 2(б). Изображение границы цифры 3

На рисунке 8.3 показаны восстановленные изображения границы цифры 3. При описании цифры использовалось, соответственно 30, 25, 20, 15, 10 и 8 Хартли-дескрипторов. Это составляет 6,6%, 5,5%, 4,4%, 3,3%, 2,2% и 1,8% от всех 456 дескрипторов.



Рис. 8.3(а)-(е). Изображения восстановленных границ цифры 3 с применением Хартли-дескрипторов

На рисунке 8.4 представлена зависимость среднеквадратической ошибки восстановления точек границы от числа сохраняемых Хартли дескрипторов цифры 3.



Рис. 8.4. Зависимость СКО от числа признаков Хартли

Для сравнения эффективности описания границ с помощью ДПХ и ДПФ на рисунке 8.5 приведены изображения восстановленных границ цифры 3 посредством обработки Фурье-дескрипторов. При описании цифры использовалось, соответственно 30, 25, 20, 15, 10 и 8 Фурье-дескрипторов. Это составляет 6,6%, 5,5%, 4,4%, 3,3%, 2,2% и 1,8% от всех 456 дескрипторов.

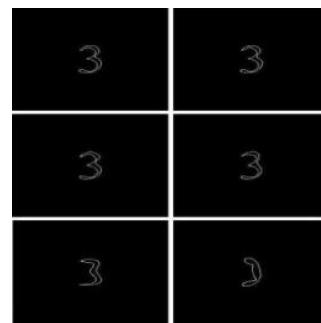


Рис. 8.5(а)-(е). Изображения восстановленных границ цифры 3 с применением Фурье-дескрипторов

На рисунке 8.6 представлена зависимость среднеквадратической ошибки восстановления точек границы от числа Фурье-дескрипторов.

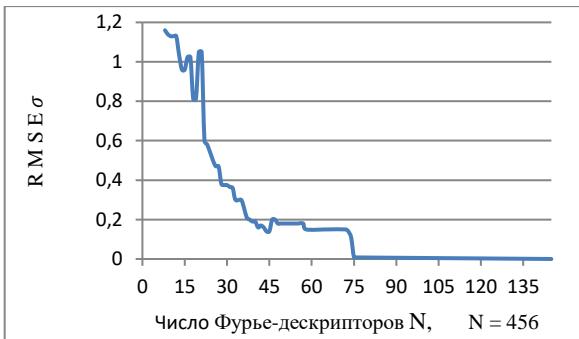


Рис 86. Зависимость СКО от числа признаков Фурье

Из приведенных сравнений следует, что СКО восстановления границ методом ДПХ и ДПФ практически имеют одинаковую величину. При учете более 74 дескрипторов величина $\sigma = 0$, т.е. искажения отсутствуют, форма объекта идентична исходному образу.

С увеличение размера входа N (точек границы) эффективность обработки возрастает. Кроме того, сложность описания уменьшается за счет использования быстрого алгоритма его выполнения.

Выводы

Применительно к вещественным данным реализуются следующие возможности ДПХ:

1. Хартли-дескрипторы позволяют эффективно представлять границы объекта изображения в компактной форме.
2. Восстанавливать изображение границы с контролируемой погрешностью.
3. Упрощать решение задач классификации, идентификации и распознавания образов.

9. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Распознавание объектов (образов) в широком смысле состоит в автоматическом распознавании всевозможных встречающихся регулярностей, связанных с реальными жизненными потребностями людей.

Определение 9.1. Некоторая упорядоченная совокупность признаков (дескрипторов) описывающих объект называется образом.

На вход системы распознавания объектов данные могут поступать от различных источников: физического объекта, некоторого процесса, результата эксперимента и пр. Данные поступающие на вход системы

распознавания, как правило, включают сигналы, которые часто являются пространственными и/или временными функциями.

Определение 9.2. Классом образов называется совокупность образов, обладающих общими свойства.

Классы образов обозначим символами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_W$, где W – число классов.

Определение 9.3. Под машинным (компьютерным) распознаванием образов понимаются методы, позволяющие относить образы к тем или иным классам автоматически.

Выходная информация системы распознавания образов сводится к указанию одного или нескольких классов. Например, все разновидности символа А должны отображаться в один и тот же класс ω_A ; все электрокардиограммы, у здоровых людей должны отображаться в один и тот же класс «норма», независимо от пола, национальности и возраста обследуемых, свойственных им биологических отклонений, расположения электродов при снятии электрокардиограммы.

В практических задачах для представления образов используются совокупности количественных признаков. Часто такие признаки записывают в виде векторов признаков. Образ, представленный вектором признаком размером $n \times 1$, записывается как,

$$\mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где \mathbf{X}_{ij} означает j -ый образ, принадлежащий классу ω_i . Компонента x_k вектора признаков \mathbf{X}_{ij} представляет его k -ый дескриптор. Когда величины x_1, x_2, \dots, x_n являются вещественными числами, вектор \mathbf{X}_{ij} представляет собой точку в n -мерном евклидовом пространстве.

Например, имеются два объекта для распознавания. Пусть каждый образ описывается результатом двух измерений. Класс образов ω_1 описывается множеством из l векторов признаков

$$\{\mathbf{X}_{11} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{X}_{1l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\}.$$

Класс образов ω_2 описывается другим множеством векторов признаков:

$$\{\mathbf{X}_{21} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{22} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{X}_{2l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\}.$$

Здесь l образов представляются точками в двумерном евклидовом пространстве.

По различным причинам образы, принадлежащие одному классу, могут отличаться, поэтому векторы признаков, описывающие эти образы варьируют в пределах одного и того же класса. Возможна ситуация, когда векторы признаков, описывающие разные объекты, могут пересекаться.

На рисунке 9.1 показаны векторы признаков классов ω_1 и ω_2 .

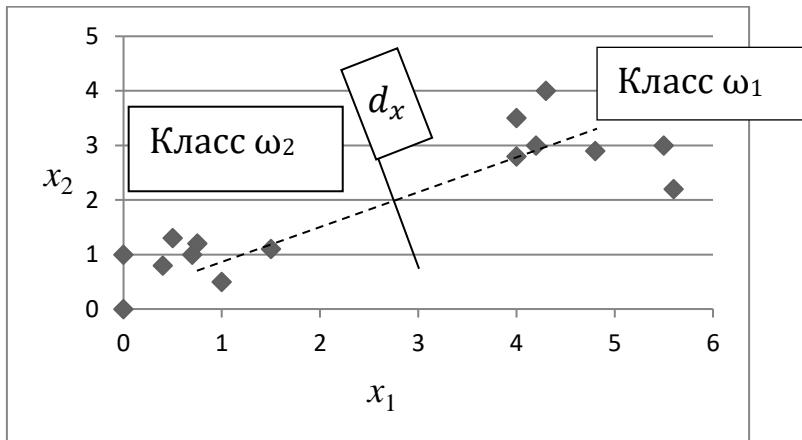


Рис. 9.1. Двумерные векторы признаков

Классификация образов или отнесение образа к тому или иному классу ω_i предусматривает возможность разбиения множества векторов признаков на подмножества, называемые кластерами. На рис. 9.1 множество точек, представляющих результаты измерений, разбиты на два кластера, содержащие близкорасположенные точки. В данном примере кластеры можно найти как подмножества плотно расположенных точек внутри описывающих окружностей. Выбор дескрипторов, на которых базируются компоненты вектора признаков, оказывает влияние на конечные характеристики системы распознавания, использующей этот вектор признаков.

Очевидно, что для эффективной и правильной классификации образов, необходимо иметь непересекающиеся кластеры. Это обстоятельство подчеркивает важность правильного выбора процедур предварительной обработки и выделения признаков.

Определение 9.4. Признаки, являющиеся общими для всех образов, принадлежащих к определенному классу, называются внутриклассовыми признаками.

Определение 9.5. Признаки, которые характеризуют различия между классами, называются межклассовыми признаками.

Проблема классификации образов заключается в определении оптимальных разделяющих границ или в разработке решающих процедур для автоматического отнесения данных к различным классам образов. На рис. 9.1

илюстрируется простая линейная решающая функция, или граница для разделения двумерных векторов признаков на два класса. Показанная оптимальная линейная решающая функция, представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющей кластеры двух классов.

Описанный метод построения векторов признаков приводит к классам образов, характеризующийся количественной информацией. В ряде практических областей характеристики образов описываются структурными связями. Например, распознавание отпечатков пальцев основывается на взаимосвязях признаков отпечатка, называемых мелкими деталями. Эти признаки играют роль примитивов, которые вместе с их относительными размерами и расположением описывают свойства линий отпечатка, такие как конец бороздки, раздвоение бороздки (ветвления), слияния, несвязные сегменты, дуги, завитки, петля правая, петля левая и др.

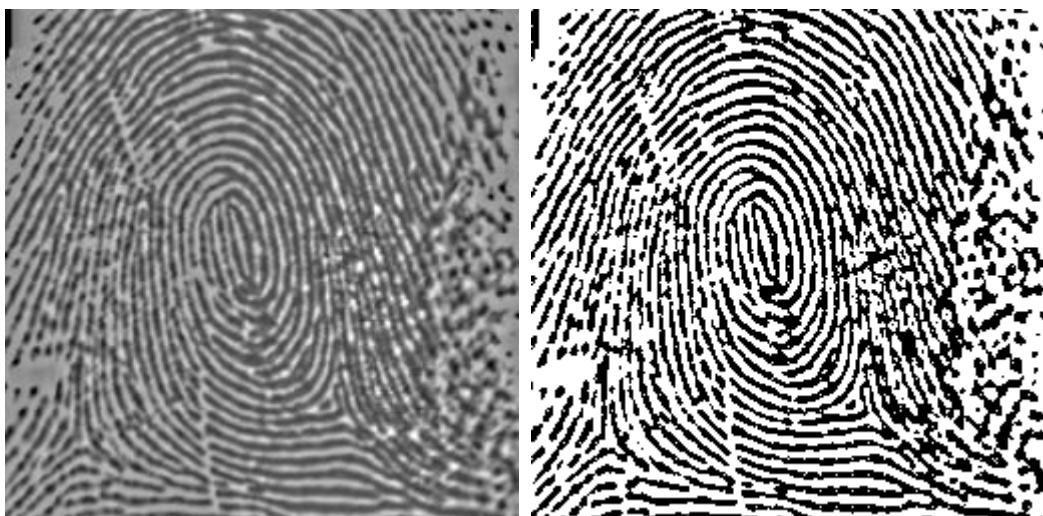


Рис. 9.2. Бинаризация изображения отпечатка пальца

В таких задачах распознавания принадлежность к классу образов определяется не только данными количественных измерений признаков, но и пространственными отношениями между признаками или структурами объектов. Существуют два подхода к распознаванию образов.

9.1. Распознавание с учителем

Для каждого из отличающихся образов X_i , задаются примеры $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}, \dots$. Каждому образу ставится в соответствие метка, указывающая класс ω_i , к которому он принадлежит. Необходимо обучить классификатор автоматически классифицировать образ X_{ij} , принадлежащий одному из классов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_W$.

Определение 9.6. Заданное множество примеров признаков с известной классификацией называется обучающим множеством (обучающей выборкой).

При наличии обучающей выборки существует возможность разработки математических функций, которые могут характеризовать разделение между классами. Эти функции далее могут быть использованы для классификации новых векторов признаков, для которых принадлежность к какому-либо классу априори не известно.

Определение 9.7. Множество векторов признаков с известной классификацией, используемое для оценки разработанного классификатора называется контрольной выборкой.

9.2. Распознавание без учителя

Второй подход к распознаванию образов возникает, если примеры образов, подлежащие анализу, не снабжены метками, указывающими их принадлежность к классу. Например, астрономические данные, когда следует обнаружить наличие излучающих звездных или иных объектов. Случай обучения без учителя возникает и при решении задач распознавания на основе данных произвольного характера. Такая ситуация связана с тем, что неизвестно, отличаются ли некоторые классы друг от друга. Для решения таких задач можно воспользоваться методами кластерного анализа.

9.3. Пример распознавания образов с учителем

Пусть обучающие множества состоят из двумерных векторов признаков образов X_{ij} . Если $i = 1, 2$, то X_{ij} принадлежит либо к классу ω_1 , либо ω_2 . К классу ω_1 относится обучающее множество из следующих векторов признаков:

$$X_{11} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}; X_{12} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}; X_{13} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}; X_{14} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}; X_{15} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

К классу ω_2 относятся обучающее множество векторов признаков:

$$X_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}; X_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}; X_{23} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}; X_{24} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}; X_{25} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

На рис. 9.3 показаны векторы признаков классов ω_1 и ω_2 .

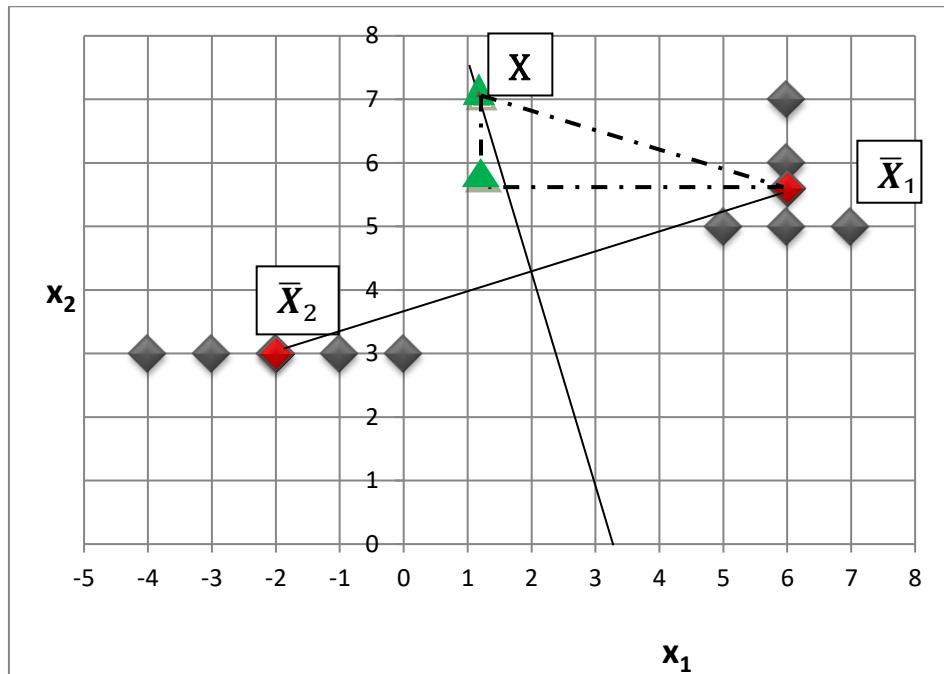


Рис. 9.3. Двумерные векторы признаков

Первым шагом алгоритма распознавания является вычисление средних значений векторов обучающих множеств классов ω_1 и ω_2 .

$$\bar{X}_i = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_{ij}, i = 1, 2.$$

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_{1j} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5,6 \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_{2j} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Векторы \bar{X}_1 и \bar{X}_2 обозначают точки или положения в двумерном пространстве, т.е. являются радиус-векторами.

Следующим шагом распознавания является описание полученной решающей границы. На рис. 9.3 видно, что граница, разделяющая классы ω_1 и ω_2 , представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющей кластеры двух классов в точках \bar{X}_1 и \bar{X}_2 .

Рассмотрим любую точку X , принадлежащую решающей границе. Например, точку $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Радиус-вектор, соответствующий этой точке двумерного пространства имеет длину (или норму)

$$\|X\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = (1,2^2 + 7^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В общем случае, радиус-вектор, соответствующий этой точке n -мерного пространства имеет норму.

$$\|X\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (9.1)$$

Выражение (9.1) называют расстоянием Евклида (нормой Евклида).

Определение 9.8. Если вектор используется для обозначения перемещения между двумя точками в пространстве, он называется вектором переноса.

Если \mathbf{X} и $\bar{\mathbf{X}}_1$ радиус-векторы, которые определяют место расположения двух точек с координатами (x_1, x_2) и (\bar{x}_1, \bar{x}_2) в двумерном пространстве, то вектор переноса от $\bar{\mathbf{X}}_1$ к \mathbf{X} задается разностью двумерных векторов

$$(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1). \quad (9.2)$$

В нашем примере $(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 5,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,8 \\ 1,4 \end{bmatrix}$.

Вектор переноса выражает расстояние между двумя точками в двумерном пространстве. Используя формулы (9.1) и (9.2), выражение для расстояния между двумя точками в двумерном пространстве запишется как

$$\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1\| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2}. \quad (9.3)$$

В общем случае, если \mathbf{X} и $\bar{\mathbf{X}}_1$ радиус-векторы, которые определяют место расположения двух точек (x_1, x_2, \dots, x_n) и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ в n -мерном пространстве, то расстояния между двумя точками в n -мерном пространстве запишется как

$$\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1\| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2}.$$

Аналогично вычисляется расстояние от точки \mathbf{X} до точки $\bar{\mathbf{X}}_2$. Так как точка \mathbf{X} находится на срединном перпендикуляре, то соответствующие расстояния равны

$$\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1\| = \|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_2\|. \quad (9.4)$$

Далее воспользуемся соотношение между скалярным произведением и квадратом нормы (квадратом длины) вектора в двумерном пространстве.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) = \|\mathbf{X}\|^2.$$

В общем случае, в n -мерном пространстве квадрат длины вектора

$$\|\mathbf{X}\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (9.5)$$

Из (9.5) можно записать выражение вычисления квадрата расстояния между двумя точками в двумерном пространстве (квадрата длины вектора переноса).

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1\|^2 &= (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1)^T(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1) = \left(\mathbf{X}^T - \bar{\mathbf{X}}_1^T\right)(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_1) = \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_1) - (\bar{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{X}) + \|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2,\end{aligned}\quad (9.6)$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_2\|^2 &= (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_2)^T(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_2) = \left(\mathbf{X}^T - \bar{\mathbf{X}}_2^T\right)(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_2) = \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_2) - (\bar{\mathbf{X}}_2^T \mathbf{X}) + \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2,\end{aligned}\quad (9.7)$$

С учетом (9.4) получаем равенство

$$\|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_1) - (\bar{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{X}) + \|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_2) - (\bar{\mathbf{X}}_2^T \mathbf{X}) + \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2. \quad (9.8)$$

После преобразования (9.8), получаем следующее выражение для вычисления разности квадратов длин векторов в точках $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$:

$$\|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2 = (\bar{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{X}) - (\bar{\mathbf{X}}_2^T \mathbf{X}) + (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_1) - (\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{X}}_2).$$

$$\|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2 = (\bar{\mathbf{X}}_1^T - \bar{\mathbf{X}}_2^T)\mathbf{X} + \mathbf{X}^T(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2).$$

С учетом того, что для любых матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}
 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$,

получаем

$$\|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2 = (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)^T \mathbf{X} + (\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)^T \mathbf{X},$$

$$\|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2 = 2(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)^T \mathbf{X}. \quad (9.9)$$

Подставляя в выражение (9.9) значение координат векторов $\bar{\mathbf{X}}_1$, $\bar{\mathbf{X}}_2$, \mathbf{X} , получаем уравнение

$$(\bar{x}_{11}^2 + \bar{x}_{12}^2) - (\bar{x}_{21}^2 + \bar{x}_{22}^2) = 2[(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{21}) \quad (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{22})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$(\bar{x}_{11}^2 + \bar{x}_{12}^2) - (\bar{x}_{21}^2 + \bar{x}_{22}^2) = 2\{(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{21})x_1 + (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{22})x_2\}.$$

$$(6^2 + 5^2, 6^2) - ((-2)^2 + 3^2) = 2\{(6 - (-2))x_1 + (5, 6 - 3)x_2\}.$$

$$54,36 = 2(8x_1 + 2,6x_2), \quad (9.10)$$

$$\text{где } \|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2 = 54,36. \quad (9.11)$$

Перепишем уравнение как

$$8x_1 + 2,6x_2 = 27,18. \quad (9.12)$$

Уравнение (9.12) дает информацию, необходимую для создания классификатора. Параметры классификатора (его характеристика) определяет линейная дискриминантная функция $g(\mathbf{X})$, которая определяется как

$$g(\mathbf{X}) = 8x_1 + 2,6x_2 - 27,18. \quad (9.13)$$

Коэффициенты (веса) дискриминантной функции задают параметры классификатора. Веса получены из обучающего множества. Величина (9.11)

$$0,5(\|\bar{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\bar{\mathbf{X}}_2\|^2) = 27,18$$

называется порогом классификатора.

Автоматическая классификация образа \mathbf{X}_{ij} объекта к одному из классов ω_1 , ω_2 выполняется на основе решающего правила классификатора. Для получения правила принятия решения о классе образа сформируем контрольную выборку из испытательных образов, точная классификация которых известна. Обозначим эти образы как $\tilde{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Пусть контрольная выборка включает в себя 4 образа, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим значение $g(\mathbf{X})$ для каждого из испытательных образов:

$$\tilde{\mathbf{X}}_1: g(\mathbf{X}) = 8 \cdot 3 + 2,6 \cdot 8 - 27,18 > 0;$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_2: g(\mathbf{X}) = 8 \cdot (-2) + 2,6 \cdot 7 - 27,18 < 0; \quad (9.14)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_3: g(\mathbf{X}) = 8 \cdot 3 + 2,6 \cdot 3 - 27,18 > 0;$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_4: g(\mathbf{X}) = 8 \cdot 2 + 2,6 \cdot 1 - 27,18 < 0.$$

Из выражения (9.14) следует, что когда образ $\tilde{\mathbf{X}}$ лежит справа от решающей границы, то $g(\mathbf{X}) > 0$. Если образ лежит слева от границы, то $g(\mathbf{X}) < 0$. Получаем следующее решающее правило классификатора:

если $g(\mathbf{X}) > 0$, то $\mathbf{X} \in \omega_1$;

если $g(\mathbf{X}) < 0$, то $\mathbf{X} \in \omega_2$.

На рис. 9.4 показана схема решающего устройства автоматического классификатора образов.

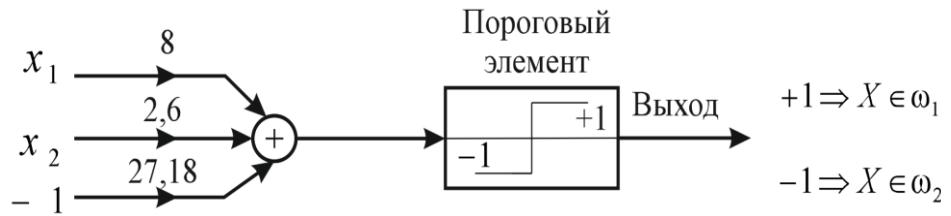


Рис. 9.4. Решающее устройство классификатора

Получив дискриминантную функцию, говорят, что классификатор обучен, т. е. способен классифицировать образы. Классификатор работает по критерию минимума расстояния, так как решающее правило может быть сформулировано следующим образом:

если X ближе к \bar{X}_1 , то $X \in \omega_1$;

если X ближе к \bar{X}_2 , то $X \in \omega_2$.

Литература

1. Митюхин, А. И. Цифровая обработка речи и анализ изображений: учеб.-метод. пособие / А. И. Митюхин. – Минск : БГУИР, 2016.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов.– М.: Техносфера, 2006.
3. Теория прикладного кодирования: Учеб. пособие. В 2 т. В.К. Конопелько,
4. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.
5. Овсянников В.А. Методы формирования и цифровой обработки сигналов. Учебное пособие для студентов специальности «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» в 2-ух частях. – Mn.: БГУИР 2010.
6. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.- М.: Бином-Пресс, 2006.
7. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников: Пер. с англ. – М.: Додека-XXI, 2008.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов/ А.Б. Сергиенко-СПб.: Питер, 2003.
9. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. А.И. Солонина, Улахович Д.А. и др. - СПб: БХВ – Петербург, 2003.
10. Лосев В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учебное пособие для вузов. – Mn: Выш. школа, 1990.
11. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения // М.: Мир, 1990. — С. 584.