Matematički Izvod Dinamike Sustava Kolica s Njihalom

Euler-Lagrangeova Metoda

October 14, 2025

1 Uvod

Ovaj dokument detaljno opisuje izvod nelinearnih jednadžbi dinamike za sustav kolica s njihalom (eng. cart-pendulum) korištenjem Euler-Lagrangeove metode. Sustav se sastoji od kolica mase M koja se mogu gibati horizontalno i njihala mase m i duljine L koje je zglobno povezano s kolicima.

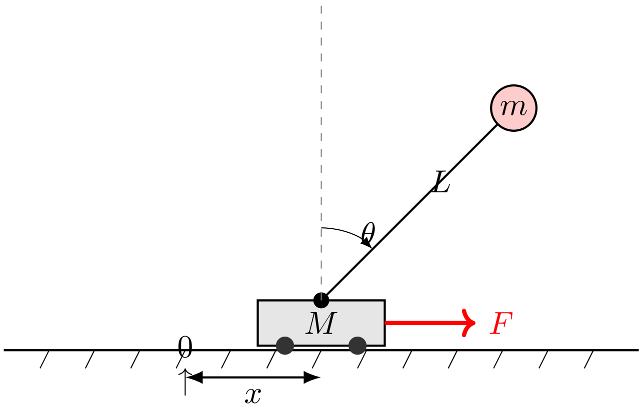

Figure 1: Shematski prikaz sustava kolica s njihalom, generiran pomoću TikZ.

2 Definiranje Koordinata

Generalizirane koordinate koje opisuju položaj sustava su:

- x: horizontalni položaj kolica.
- θ: kut njihala u odnosu na vertikalu (mjereno od donjeg stabilnog položaja, $\theta = \pi$ je gornji nestabilni položaj).

Položaj centra mase njihala (x_p, y_p) može se izraziti kao:

$$x_p = x + L\sin(\theta) \tag{1}$$

$$y_p = L\cos(\theta) \tag{2}$$

Brzine centra mase njihala dobivamo deriviranjem po vremenu:

$$\dot{x}_p = \dot{x} + L\cos(\theta)\dot{\theta} \tag{3}$$

$$\dot{y}_p = -L\sin(\theta)\dot{\theta} \tag{4}$$

3 Energije Sustava

3.1 Kinetička Energija (T)

Ukupna kinetička energija sustava zbroj je kinetičke energije kolica T_c i kinetičke energije njihala T_p.

Kinetička energija kolica:

$$T_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{5}$$

Kinetička energija njihala (pretpostavljamo da je masa koncentrirana na kraju štapa):

$$T_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2}m((\dot{x} + L\cos(\theta)\dot{\theta})^2 + (-L\sin(\theta)\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2(\theta)\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Ukupna kinetička energija sustava je $T = T_c + T_p$:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \tag{7}$$

3.2 Potencijalna Energija (V)

Potencijalna energija ovisi samo o visini njihala. Postavljamo referentnu nultu razinu na visinu zgloba ($y = 0$).

$$V = mgy_p = mgL\cos(\theta) \tag{8}$$

4 Lagrangeova Funkcija

Lagrangeova funkcija L definirana je kao $L = T - V$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos(\theta) \tag{9}$$

5 Euler-Lagrangeove Jednadžbe

Jednadžbe gibanja dobivamo iz Euler-Lagrangeovih jednadžbi za svaku generaliziranu koordinatu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \tag{10}$$

gdje je q_i generalizirana koordinata, a Q_i generalizirana sila koja djeluje na tu koordinatu.

5.1 Jednadžba za koordinatu x

Za koordinatu x, generalizirana sila je vanjska sila F koja djeluje na kolica, dakle $Q_x = F$.

Prvo računamo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= (M+m)\dot{x} + mL\cos(\theta)\dot{\theta} \end{aligned}$$

Sada deriviramo po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + mL\cos(\theta)\ddot{\theta} - mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2$$

Uvrštavanjem u Euler-Lagrangeovu jednadžbu dobivamo prvu jednadžbu gibanja:

$$(M+m)\ddot{x} + mL\cos(\theta)\ddot{\theta} - mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F \tag{11}$$

5.2 Jednadžba za koordinatu θ

Za koordinatu θ, nema vanjskog momenta koji djeluje na njihalo, pa je $Q_\theta = 0$.

Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mL\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + mgL\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL\cos(\theta)\dot{x} + mL^2\dot{\theta}$$

Deriviramo po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL\cos(\theta)\ddot{x} - mL\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mL^2\ddot{\theta}$$

Sada uvrštavamo u Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$\begin{aligned}(mL\cos(\theta)\ddot{x} - mL\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mL^2\ddot{\theta}) - (-mL\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + mgL\sin(\theta)) &= 0\\ mL\cos(\theta)\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} - mgL\sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Dijeljenjem s mL dobivamo drugu jednadžbu gibanja:

$$L\cos(\theta)\ddot{x} + L^2\ddot{\theta} - gL\sin(\theta) = 0 \implies \ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} - g\sin(\theta) = 0 \tag{12}$$

6 Zaključak: Nelinearne Jednadžbe Gibanja

Sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju dinamiku sustava kolica s njihalom su:

$$(M + m)\ddot{x} + mL\cos(\theta)\ddot{\theta} - mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F \tag{13}$$
$$\ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} - g\sin(\theta) = 0 \tag{14}$$

Ove dvije jednadžbe čine nelinearni model sustava. Za potrebe simulacije i upravljanja, potrebno ih je riješiti po $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$.