Matematički Izvod Dinamike Sustava Kolica s Njihalom

Euler-Lagrangeova Metoda (Modificirana Konvencija Kuta)

October 21, 2025

1 Uvod

Ovaj dokument detaljno opisuje izvod nelinearnih jednadžbi dinamike za sustav kolica s njihalom (eng. cart-pendulum) korištenjem Euler-Lagrangeove metode. Sustav se sastoji od kolica mase M koja se mogu gibati horizontalno i njihala mase m i duljine L koje je zglobno povezano s kolicima.

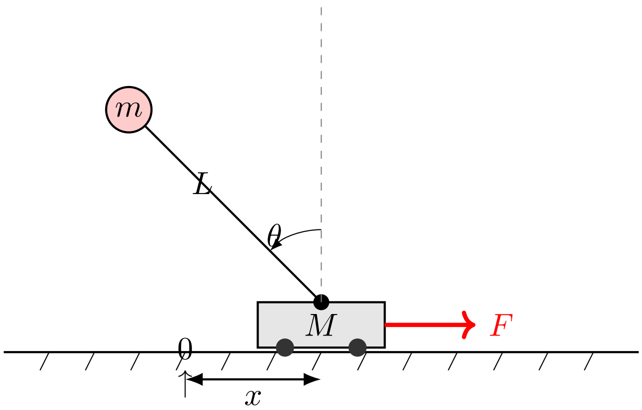

Figure 1: Shematski prikaz sustava kolica s njihalom, s kutom θ mjerenim suprotno od kazaljke na satu (CCW) od gornje vertikale.

2 Definiranje Koordinata

Generalizirane koordinate koje opisuju položaj sustava su:

- x: horizontalni položaj kolica.
- θ: kut njihala u odnosu na vertikalu (mjereno **suprotno od kazaljke na satu** od gornjeg nestabilnog položaja, $\theta = 0$).

Uz pretpostavku da je zglob u $(x,\ 0)$ i da y os pokazuje prema gore: Položaj centra mase njihala (x_p, y_p) može se izraziti kao:

$$x_p = x - L\sin(\theta) \tag{1}$$
$$y_p = -L\cos(\theta) \tag{2}$$

Brzine centra mase njihala dobivamo deriviranjem po vremenu:

$$\dot{x}_p = \dot{x} - L\cos(\theta)\dot{\theta} \tag{3}$$
$$\dot{y}_p = L\sin(\theta)\dot{\theta} \tag{4}$$

3 Energije Sustava

3.1 Kinetička Energija (T)

Ukupna kinetička energija sustava zbroj je kinetičke energije kolica T_c i kinetičke energije njihala T_p.

Kinetička energija kolica:

$$T_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{5}$$

Kinetička energija njihala:

$$T_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2}m((\dot{x} - L\cos(\theta)\dot{\theta})^2 + (L\sin(\theta)\dot{\theta})^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2(\theta)\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Ukupna kinetička energija sustava je $T = T_c + T_p$:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mL\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \tag{7}$$

3.2 Potencijalna Energija (V)

Postavljamo referentnu nultu razinu na visinu zgloba ($y = 0$), pri čemu je y os usmjerena prema gore. Potencijalna energija ovisi o visini y_p.

$$V = mgy_p = -mgL\cos(\theta) \tag{8}$$

4 Lagrangeova Funkcija

Lagrangeova funkcija L definirana je kao $L = T - V$.

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mL\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2\right) - (-mgL\cos(\theta)) \tag{9}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mL\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\cos(\theta) \tag{10}$$

5 Euler-Lagrangeove Jednadžbe

Jednadžbe gibanja dobivamo iz Euler-Lagrangeovih jednadžbi za svaku generaliziranu koordinatu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \tag{11}$$

gdje je q_i generalizirana koordinata, a Q_i generalizirana sila koja djeluje na tu koordinatu.

5.1 Jednadžba za koordinatu x

Za koordinatu x, generalizirana sila je vanjska sila F koja djeluje na kolica, dakle $Q_x = F$.

Prvo računamo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} &= (M+m)\dot{x} - mL\cos(\theta)\dot{\theta} \end{aligned}$$

Sada deriviramo po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} - mL\cos(\theta)\ddot{\theta} + mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2$$

Uvrštavanjem u Euler-Lagrangeovu jednadžbu dobivamo prvu jednadžbu gibanja:

$$(M+m)\ddot{x} - mL\cos(\theta)\ddot{\theta} + mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F \tag{12}$$

5.2 Jednadžba za koordinatu θ

Za koordinatu θ, nema vanjskog momenta koji djeluje na njihalo, pa je $Q_\theta = 0$.

Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mL\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} - mgL\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -mL\cos(\theta)\dot{x} + mL^2\dot{\theta}$$

Deriviramo po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = -mL\cos(\theta)\ddot{x} + mL\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mL^2\ddot{\theta}$$

Sada uvrštavamo u Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$(-mL\cos(\theta)\ddot{x} + mL\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mL^2\ddot{\theta}) - (mL\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} - mgL\sin(\theta)) = 0$$
$$-mL\cos(\theta)\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin(\theta) = 0$$

Dijeljenjem s mL dobivamo drugu jednadžbu gibanja:

$$-\ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 \tag{13}$$

6 Zaključak: Nelinearne Jednadžbe Gibanja

Sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju dinamiku sustava kolica s njihalom (s θ mjereno CCW od vrha) su:

$$(M+m)\ddot{x} - mL\cos(\theta)\ddot{\theta} + mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F \tag{14}$$
$$-\ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 \tag{15}$$

Ove dvije jednadžbe čine nelinearni model sustava.

7 Prikaz u Prostoru Stanja

Da bismo sustav prikazali u prostoru stanja, kao što je ilustrirano na slici (1), potrebno je izvesti eksplicitne izraze za akceleracije $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$. Koristimo notaciju sa slike, gdje je $p_x = x$, $v_x = \dot{x}$, $\omega = \dot{\theta}$ i $u = F$.

Naš polazni sustav nelinearnih jednadžbi (19) i (20) je:

$$(M+m)\ddot{x} - mL\cos(\theta)\ddot{\theta} = F - mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \tag{16}$$
$$-\ddot{x}\cos(\theta) + L\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) \tag{17}$$

Riješimo sustav. Iz jednadžbe (17) izražavamo $L\ddot{\theta}$:

$$L\ddot{\theta} = \ddot{x}\cos(\theta) - g\sin(\theta) \tag{18}$$

Uvrštavanjem $L\ddot{\theta}$ u jednadžbu (16):

$$
\begin{aligned}
(M+m)\ddot{x} - m\cos(\theta)(\ddot{x}\cos(\theta) - g\sin(\theta)) &= F - mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\
(M+m)\ddot{x} - m\cos^2\theta\ddot{x} + mg\sin\theta\cos\theta &= F - mL\sin\theta\dot{\theta}^2 \\
\ddot{x}(M+m-m\cos^2\theta) &= F - mL\sin\theta\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta\cos\theta \\
\ddot{x}(M+m(1-\cos^2\theta)) &= F - mL\sin\theta\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta\cos\theta \\
\ddot{x}(M+m\sin^2\theta) &= F - mL\sin\theta\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

Konačno, rješenje za $\ddot{x}$ (tj. $\dot{v}_x$) je:

$$
\dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{F - mL\sin\theta\omega^2 - mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{19}
$$

Sada možemo pronaći $\ddot{\theta}$ (tj. $\dot{\omega}$) uvrštavanjem $\ddot{x}$ natrag u izraz za $L\ddot{\theta}$:

$$
\begin{aligned}
L\ddot{\theta} &= \ddot{x}\cos(\theta) - g\sin(\theta) \\
L\ddot{\theta} &= \cos(\theta)\left(\frac{F - mL\sin\theta\omega^2 - mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}\right) - g\sin(\theta) \\
L\ddot{\theta} &= \frac{\cos\theta(F - mL\sin\theta\omega^2 - mg\sin\theta\cos\theta) - g\sin\theta(M+m\sin^2\theta)}{M+m\sin^2\theta} \\
L\ddot{\theta} &= \frac{F\cos\theta - mL\sin\theta\cos\theta\omega^2 - mg\sin\theta\cos^2\theta - Mg\sin\theta - mg\sin^3\theta}{M+m\sin^2\theta} \\
L\ddot{\theta} &= \frac{F\cos\theta - mL\sin\theta\cos\theta\omega^2 - mg\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - Mg\sin\theta}{M+m\sin^2\theta} \\
L\ddot{\theta} &= \frac{F\cos\theta - mL\sin\theta\cos\theta\omega^2 - (M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

Konačno, rješenje za $\ddot{\theta}$ (tj. $\dot{\omega}$) je:

$$
\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{F\cos\theta - mL\sin\theta\cos\theta\omega^2 - (M+m)g\sin\theta}{L(M+m\sin^2\theta)} \tag{20}
$$

Sada možemo zapisati cijelu dinamiku sustava u obliku $\dot{x}_{vec} = f(x_{vec}, u)$, koristeći $u = F$ i $x_{vec} = [p_x, \theta, v_x, \omega]^T$:

$$
\dot{x}_{vec} = f(x_{vec}, u) = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ \omega \\ \frac{u - mL\sin\theta\omega^2 - mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \\ \frac{u\cos\theta - mL\sin\theta\cos\theta\omega^2 - (M+m)g\sin\theta}{L(M+m\sin^2\theta)} \end{bmatrix}
$$

gdje smo takoder iskoristili $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ u nazivniku.