

## Vzorové řešení úkolu 5

**Zadání:** Spočtete Fourierův obraz vektoru  $x := (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots)$  délky  $n$  dělitelné 4.

### Řešení:

Uvažme nejprve definici diskrétní Fourierovy transformace z přednášky: Vektor  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  se zobrazí na vektor  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ , tž.

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk},$$

kde  $\omega$  značí libovolnou fixní primitivní  $n$ -tou odmocninu z jedné. Pojďme jednu konkrétní odmocninu zafixovat, tedy mějme

$$\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Můžeme si všimnout, že zadané  $x$  se na  $k$ -tém indexu (indexováno od nuly) rovná  $e^{\frac{2\pi i \cdot k}{4}}$ , neboli

$$x_k = \omega^{\frac{n}{4}k}.$$

Jeden ze způsobů, jak tohle pozorování využít, je následující: Uvažme definici  $y_j$ :

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk} \\ y_j &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{n}{4}k} \cdot \omega^{jk}. \end{aligned}$$

Obě strany rovnosti můžeme vynásobit koeficientem  $\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j$ .

$$\begin{aligned}
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{n}{4}k} \cdot \omega^{jk} \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{n}{4}k} \cdot \omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^{jk} \cdot \omega^j \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{n}{4}(k+1)} \cdot \omega^{j(k+1)} \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk} \right) + \omega^{\frac{n}{4}n} \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk} \right) + \omega^{0 \cdot k} \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk} \\
\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j \cdot y_j &= y_j.
\end{aligned}$$

S tím už se pracuje jednoduše: aby poslední rovnost platila, musí být buď  $\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j$  rovno jedné, nebo musí být  $y_j = 0$ . Protože  $\omega$  je *primitivní*  $n$ -tá odmocnina, platí  $\omega^{\frac{n}{4}} \cdot \omega^j = 1$  právě pro  $j = \frac{3n}{4} + \ell \cdot n$  (kde  $\ell \in \mathbb{Z}$ ), tedy (indexy jdou jen od 0 do  $n-1$ ) na všech indexech kromě  $j = \frac{3n}{4}$  bude  $y_j = 0$ . Na samotném indexu  $j = \frac{3n}{4}$  pak dostaneme

$$\begin{aligned}
y_{\frac{3n}{4}} &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{\frac{3n}{4}k} \\
y_{\frac{3n}{4}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{\frac{n}{4}k} \cdot \omega^{\frac{3n}{4}k} \\
y_{\frac{3n}{4}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{n \cdot k} \\
y_{\frac{3n}{4}} &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
y_{\frac{3n}{4}} &= n.
\end{aligned}$$

## Fourierova transformace jako přechod z kanonické báze na jinou

Pojďme ale ještě připomenout definici Fourierovy transformace z prezentace na cviku. Říkali jsme, že množina

$$\begin{aligned}
 B &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{(2\pi i)jk}{n}} \right)_{k=0}^{n-1} \mid j = 0 \dots n-1 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1, \quad 1, \quad 1, \quad \dots, \quad 1 \right), \right. \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{(2\pi i)}{n}}, \quad e^{\frac{(2\pi i) \cdot 2}{n}}, \quad e^{\frac{(2\pi i) \cdot 3}{n}}, \quad \dots, \quad e^{\frac{(2\pi i) \cdot (n-1)}{n}} \right), \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{2 \cdot (2\pi i)}{n}}, \quad e^{\frac{2 \cdot (2\pi i) \cdot 2}{n}}, \quad e^{\frac{2 \cdot (2\pi i) \cdot 3}{n}}, \quad \dots, \quad e^{\frac{2 \cdot (2\pi i) \cdot (n-1)}{n}} \right), \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{3 \cdot (2\pi i)}{n}}, \quad e^{\frac{3 \cdot 2\pi i \cdot 2}{n}}, \quad e^{\frac{3 \cdot (2\pi i) \cdot 3}{n}}, \quad \dots, \quad e^{\frac{3 \cdot (2\pi i) \cdot (n-1)}{n}} \right), \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{(n-1) \cdot (2\pi i)}{n}}, \quad e^{\frac{(n-1) \cdot (2\pi i) \cdot 2}{n}}, \quad e^{\frac{(n-1) \cdot (2\pi i) \cdot 3}{n}}, \quad \dots, \quad e^{\frac{(n-1) \cdot (2\pi i) \cdot (n-1)}{n}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  (chápaného s indexací od nuly do  $n-1$ ) se standardním komplexním skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \overline{v_k} \quad (\bar{a} \text{ značí číslo komplexně sdružené s } a).$$

V pořadí  $j$ -tý bázecký vektor označme  $b_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{(2\pi i)jk}{n}} \right)_{k=0}^{n-1}$ . Důkaz toho, že jde o ortonormální bázi, dám pro zájemce na konec tohoto dokumentu. Pojďme tomu zatím jen věřit, a definujme (diskrétní) Fourierovu transformaci  $y$  vektoru  $x$  tak, že  $x = \sum_{j=0}^{n-1} y_j b_j$ . Tedy  $y_j$  je koeficient u bázeckého vektoru  $b_j$  a Fourierova transformace není nic než lineární zobrazení  $\text{id}_B$  přechodu z kanonické báze na Fourierovu bázi  $B$ .

Z toho máme snadné *alternativní řešení úlohy 5*: Vžijme si, že zadaný vektor  $x$  je přesně roven  $\sqrt{n}$ -násobku bázeckého vektoru  $b_{\frac{n}{4}}$ , takže (dle této definice DFT) je  $y_{\frac{n}{4}} = \sqrt{n}$  a všechna ostatní  $y_j$  jsou 0.

S tímto chápáním DFT je tak řešení úlohy na první pohled zjevné (jen jsme si museli všimnout, že zadaný vektor je periodický, a bude tak násobkem nějakého bázeckého vektoru). Pojďme promyslet, čím přesně se tato definice DFT liší od té z přednášky. Nepracujeme zde s obecnou primitivní  $n$ -tou odmocninou z jedničky  $\omega$ , ale s konkrétními mocninami  $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Pro každou ortonormální bázi  $B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$  pak platí, že je-li  $x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot b_k$ , pak

$$\langle x, b_i \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot b_k, b_i \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \langle b_k, b_i \rangle = \left( \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n-1\} \\ k \neq i}} 0 \right) + y_i \langle b_i, b_i \rangle = y_i,$$

takže koeficient  $y_k$  se dá spočítat jednoduše jako skalární součin  $y_j = \langle x, b_j \rangle$ , a pro naši konkrétní volbu báze  $B$  máme

$$y_j = \langle x, b_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{(2\pi i)jk}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-\frac{(2\pi i)jk}{n}}.$$

Vídíme tak, že tahle definice DFT se od té přednáškové liší jen konkrétní volbou  $\omega$ , škálováním normovacím koeficientem  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  a minusem v exponentu (v přednášce se používalo násobení po složkách, tady používáme skalární součin; to je taky důvod, proč teď nenulový index vyšel jako  $\frac{n}{4}$ , zatímco s přednáškovou definicí to bylo  $\frac{3n}{4}$ ).

## Důkaz, že jde o ortonormální bázi

Takže Vám nestačí jen věřit, že o ortonormální bázi jde (to je dobře!). Dokažme to formálně. Budeme na to potřebovat dokázat, že  $B$  je ortonormální systém, tj.

1. že  $\|b_k\| = 1$  pro každé  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , tzn. každý bázecký vektor je normální (má jednotkovou velikost),
2. a že  $\langle b_k, b_\ell \rangle = 0$  jakmile  $k \neq \ell$ , tzn. že bázecké vektory jsou po dvou ortogonální.

Jakmile to dokážeme, fakt, že jde o bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  už máme zadarmo, protože po dvou ortogonální systém je nutně lineárně nezávislý a  $n$ -prvková množina lineárně nezávislých vektorů  $n$ -rozměrného prostoru nutně tvoří bázi tohoto prostoru.

Pojďme to tedy ověřit.

První vlastnost, normalita  $b_k$ , je snadná: Máme

$$\|b_k\| = \sqrt{\langle b_k, b_k \rangle} = \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{(2\pi i)jk}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{(2\pi i)jk}{n}}} = \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{(2\pi i)jk}{n} - \frac{(2\pi i)jk}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} e^0} = 1.$$

Druhou vlastnost, ortogonalitu vektorů, nahlédneme podobným trikem, jakým jsme aritmeticky vyřešili úlohu 5. Buďte  $k \neq \ell$ , takže

$$\begin{aligned} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{(2\pi i)jk}{n} - \frac{(2\pi i)j\ell}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)j}{n}}, \end{aligned}$$

kde koeficient  $(k-\ell)$  je nenulový.

Přenásobme obě strany konstantou  $e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}}$ .

$$\begin{aligned} e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)j}{n}} \\ e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)(j+1)}{n}} \\ e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)j}{n}} + e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)n}{n}} \\ e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)j}{n}} + e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)0}{n}} \\ e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(k-\ell) \frac{(2\pi i)j}{n}} \\ e^{(k-\ell) \frac{2\pi i}{n}} \langle b_k, b_\ell \rangle &= \langle b_k, b_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Konstanta  $(k - \ell)$  nemůže být násobkem  $n$  (není to nula a její absolutní hodnota je nanejvýš  $(n - 1)$ ), proto  $e^{(k-\ell)\frac{2\pi i}{n}}$  nutně není rovno jedné. Díky tomu jediný způsob, jak může platit poslední rovnost je, že  $\langle b_k, b_\ell \rangle = 0$ . Máme dokázáno. ■

Proč je zrovna tahle báze zajímavá? Je složena z periodických vektorů se zkracující se periodou. Volně podáno nám tak říká, že libovolný  $n$ -složkový vektor (který si taky můžeme představit jako  $n$  rovnoměrně sebraných vzorků funkce z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$ ) lze vyjádřit jako součet nějakých  $n$  frekvencí.