

Cvičení 3

Kvíz: Uvažme matice následujících rozměrů:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times o}, C \in \mathbb{R}^{o \times p}, D \in \mathbb{R}^{p \times q}.$$

Jaký rozměr bude mít součin $A \cdot B \cdot C \cdot D$?

Úloha 1. Spočtete $(-1)A + 2BC^T$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Vyhádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic. Jak bychom násobením vyhádřili analogicky definované sloupcové úpravy?

Úloha 3. Najděte příklad nekomutativnosti násobení matic 2×2 (chceme tedy dvě matice $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tž. $A \cdot B \neq B \cdot A$).

Úloha 4. Dokažte:

- (a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,
- (b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Úloha 5. Buď A matice řádu 10×5 , B matice řádu 5×20 a C matice řádu 20×1 . Pokud chceme získat součin ABC , v jakém pořadí bychom měli matice násobit, abychom počítali co nejméně aritmetických operací?

Úloha 6. Jakou hodnot má matice $A = bc^T$, kde $b, c \in \mathbb{R}^n$?

Úloha 7. Najděte inverzní matice k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Úloha 8. (pro zájemce, z minule) Vyřešte soustavu s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a & 3 \end{array} \right)$$

Úloha 9. (pro zájemce) Najděte soustavu lineárních rovnic se zadaným řešením.

- (a) $t \cdot (2, 1, 2) + s \cdot (3, 2, 1)$,
- (b) $(1, 1, 0) + t \cdot (2, 4, 1)$.