# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

СПбГУ, МКН, СП

ЛЕКТОР: БАХАРЕВ ФЁДОР ЛЬВОВИЧ


2021-2023

# Оглавление

# Лекция 1

# 1 Интегральное исчисление функций

## 1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение:** $f : (a, b) \to \mathbb{R}, F : (a, b) \to \mathbb{R}$, $F$ – первообразная $f$ на $(a, b)$ если $F' = f$

**Теорема:** $f, F : (a, b) \to \mathbb{R}$, $F$ – первообразная $f$

1. $\Rightarrow F + c$ - первообразная $f$
2. $G : (a, b)$ - первообразная $f \Rightarrow F - G = const$

**Доказательство.**

□

1. Очевидно.
2. $F' = f, G' = f \Rightarrow (F - G)' = 0 \Rightarrow (F - G) = const$(т.к. $g(a) - g(b) = g'(\theta)(a - b) = 0$ по теореме Лагранжа)

■

**Определение:** $\int f dx =$ множество всех первообразных $f$

**Свойства:**

1. $\int f + g dx = \int f dx + \int g dx$
2. $\int \lambda f dx = \lambda \int f dx, \lambda \neq 0$
3. $\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta g(x) dx, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$
4. (замена переменной в неопр. интеграле)
   $f : (a, b) \to \mathbb{R}, F$ - первообразная $f$, $\phi : (c, d) \to (a, b), \phi$ - дифференцируема.
   $\Rightarrow \int f(\phi(x))\phi'(x) dx = F(\phi(x)) + c$

**Замечание.** $\phi(x) = y, \phi'(x)dx = dy \Rightarrow \int f(y)dy = F(y) + c$

5. (формула интегрирования по частям)

$$f, g \text{ -- дифф на } (a, b) \Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx$$

**Доказательство.**

$\square$ $(fg)' = fg' + f'g$ $\blacksquare$

## 1.2 Площадь и псевдоплощадь

**Определение:** Определение площади: $S : 2^{\mathbb{R}^2} \to [0, +\infty)$

1. $S((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$

2. $S(E_1 \sqcup E_2) = S(E_1) + S(E_2)$

**Замечание.** *Такая функция не существует.*

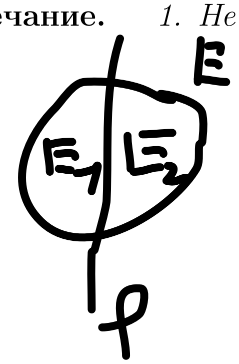
**Определение:** (Псевдоплощадь) $\sigma : F \to [0, +\infty]$, где $F$ это ограниченные подмножества $R^2$

1. $\sigma(\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$

2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ если $E = E_- \sqcup E_+$ и $E_-, E_+$ получены разрезанием $E$ вертикальной или горизонтальной линией.

3. $E_1 \supset E_2 \Rightarrow \sigma(E_1) \geq \sigma(E_2)$

**Замечание.** *1. Не важно куда относить точки прямой, т.к. площадь прямой равна 0*



2. *Псевдоплощадь существует, но не единственна.*

*Пример:* $E \in F$

$P_j$ это прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, но произвольных размеров.

1. $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum \sigma_1(P_j) \mid E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} P_j \right\}$

2. $\sigma_2(E) = \inf \left\{ \sum \sigma_2(P_j) \mid E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j \right\}$

**Замечание.** $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$ *и если* $K = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1] \Rightarrow \sigma_1(K) = 1, \sigma_2(K) = 0$

**Теорема:** $\sigma_1$ – псевдоплощадь.

**Доказательство.**

□

1. Если прямоугольник покрыть конечным числом прямоугольников, то у покрытия сумма площадей не меньше площади прямоугольника. (Т.к. можно провести все вертикальные и горизонтальные линии и разбить на дизъюнктивное объединение)

2. $\geq$ $\sigma_1(E) \stackrel{?}{=} \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
   $E \subset P_1 \cup \ldots \cup P_n$, $P_j = P_j^- \cup P_j^+$, $\sigma_1(P_j) = \sigma_1(P_j^-) + \sigma_1(P_j^+)$
   Тогда $\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_1(P_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_1(P_j^-) + \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_1(P_j^+) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
   $\Rightarrow \sigma_1(E) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $\leq$ $P_1, \ldots, P_k$ - покрытие $E_-$ с точность $\epsilon$,

   $P_{k+1}, \ldots, P_n$ - покрытие $E_+$ с точность $\epsilon$

   $\Rightarrow \sigma_1(E_-) + \epsilon \geq \sigma_1(P_1) + \ldots + \sigma_1(P_k)$

   $\sigma_1(E_+) + \epsilon \geq \sigma_1(P_{k+1}) + \ldots + \sigma_1(P_n)$

   $\Rightarrow \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\epsilon \geq \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_1(P_j) \geq \sigma_1(E)$

3. Покрытие большего является покрытием меньшего.

■

**Теорема:** Псевдоплощадь инварианта относительно сдвигов.

**Доказательство.**

$\square$ Покрытие также сдвинется. $\blacksquare$

**Замечание.** *Проверить то же самое для* $\sigma_2$.

## 1.3 Определенный интеграл.

Считаем, что зафиксирована псевдоплощадь $\sigma$.

**Определение:** $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a_+ = \max(a, 0), a_- = \max(-a, 0)$

$a_+ + a_- = |a|, a_+ - a_- = a$

Аналогично для функции $f$.

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$

Для $f \geq 0$ $P_f = \{(x, y) : y \in [0, f(x)]\}$ - подграфик f.

Для $f \geq 0$ на $[a, b], P_f[a, b] = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ - подграфик f.

**Замечание.** $f$ - *непр* $\Rightarrow f_+, f_-$ - *непр.*

**Определение:** $f$ - непр. на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}[a, b]) - \sigma(P_{f_-}[a, b])$$

**Свойства:**

1. $\int_a^a f\ dx = 0$
2. $\int_a^b 0\ dx = 0$
3. $f \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f\ dx \geq 0$
4. $\int_a^b -f\ dx = -\int_a^b f\ dx$

5. $\int_a^b c\ dx = c \cdot (b-a)$

6. $f \geq 0$ на $[a,b] \wedge \int_a^b f\ dx = 0 \Rightarrow f = 0$ на $[a,b]$

   **Доказательство.**

   □ Т.к. функция непрерывна, то если существует точка $f$ со значением не 0, то можно найти окрестность со значением $> 0$ и там будет ненулевая площадь ■

7. (Аддитивность интеграла) $c \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$

   **Доказательство.**

   □ Следует из аддитивности псевдоплощади. ■

   **Замечание.** *Соглашение:* $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx \Rightarrow$ *аддитивность верна и для* $c \notin [a,b]$

8. (Монотонность) $f \geq g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx$

   **Доказательство.**

   □ $f \geq g \Rightarrow f_+ \geq g_+ \wedge f_- \leq g_-$ ■

9. $(b-a)\min\limits_{[a,b]} f \leq \int_a^b f dx \leq (b-a)\max\limits_{[a,b]} f$

10. (Теорема о среднем) $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f dx = f(c) \cdot (b-a)$

    **Доказательство.**

    □
    $$\frac{\int_a^b f dx}{b-a} \in [\min f, \max f] \Rightarrow \exists c$$
    ■

11. (Теорема Барроу) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \Psi(x) = \int_x^b f(t)dt$

    $\Phi$ - интеграл с переменным верхним пределом, $\Psi$ - нижним

    $\Phi' = f, \Psi' = -f$

    **Доказательство.**

    □ $x_1, x_2$
    $$\frac{\Phi(x_1)-\Phi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}{x_1-x_2} \overset{x_1-fix}{\Rightarrow} \lim_{x_2\to x_1}\frac{\Phi(x_1)-\Phi(x_2)}{x_1-x_2} = \lim_{x_2\to x_1}\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}{x_1-x_2} = \lim_{x_2\to x_1} f(\theta)$$

    где $\theta$ лежит между $x_1$ и $x_2$

    $\Rightarrow \Phi(x_1) = f(x_1)$

$\Phi + \Psi = const \Rightarrow \Psi' = -f$ ■

12. (формула Ньютона-Лейбница) $F$ - первообразная $\Rightarrow$
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$

**Доказательство.**

□
$$\Phi(x) = \int_a^x f \Rightarrow F = \Phi + c \Rightarrow F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f$$
■

13. (Линейность интеграла)
$$f, g \in C[a,b], \alpha, \beta \in R \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

**Доказательство.**

□ Следует из существования первообразной. ■

14. $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$

**Доказательство.**

□
$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f_+ - \int_a^b f_-\right| \leq \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- = \int_a^b |f|$$
■

15. (формула интегрирования по частям)
$$f, x \in C^1[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**Доказательство.**

□ Следует из формулы Ньютона-Лейбница и формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла. ■

16. (Замена переменной) $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \phi[c,d] \to [a,b], \phi \in C^1[c,d]$
$$\Rightarrow \forall p, q \in [c,d] \int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(t)}^{\phi(q)} f(x)dx$$

*Пример:*

(a)

$$\int_0^1 e^{\sin(x)} \cos(x)\ dx = [\sin(x) = y, dy = \cos(x) dx] = \int_{\sin(0)}^{sin(1)} e^y\ dy = \dots$$

(b)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = [x = \sin(y), dx = \cos(y) dy] = \int_0^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(y)} \cos(y)\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\ dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2(y)}{2}\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ dy = \frac{\pi}{4}$$

# Лекция 2

*Пример:*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx \text{ (т.к. можно сделать замену } y = \pi/2 - x)$$

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x d(\sin x) = \cos^{n-1} x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x d(\cos^{n-1} x) =$$

$$= 0 \text{ (при } n \geqslant 2) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot (n-1) \cos^{n-2} x(-\sin x) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

Итого получаем рекуректную формулу:

$$W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2},\ W_0 = \pi/2,\ W_1 = 1$$

Тогда итоговая формула:

$$W_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot W_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} W_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi/2$$

$$W_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot W_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} W_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

**(Офф-топ)**: Можно заметить, что $(2k)!! = 2^k \cdot k!$ и $(2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{(2k)!!} = \frac{(2k+1)!!}{2^k \cdot k!}$

Также, стоит отметить, что $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2} \geqslant ...$, т.к. $\sin^n x \leqslant \sin^{n-1} x$, то есть интегрируем меньшую функцию, на одном и том же промежутке. Также, заметим, что это на самом деле есть неплохое приблежение числа $\pi$.

*Формула Валлиса*

$$W_{2k+2} \leqslant W_{2k+1} \leqslant W_{2k}$$

$$\pi/2 \cdot \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \leqslant \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leqslant \pi/2 \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\pi/2 \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)((2k-1)!!)^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(2k!!)^2}{(2k+1)((2k-1)!!)^2} = \pi/2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{2k!!}{\sqrt{2k+1}(2k-1)!!} = \sqrt{\pi/2}$$

***Следствие:***

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 4^n,\ C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \frac{(2^k \cdot k!)^2}{(2k)!} = \frac{4^k \cdot (k!)^2}{(2k)!}$$

По формуле Валлиса:

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{4^k}{C_{2k}^k} \to \sqrt{\pi/2} \Leftrightarrow C_{2k}^k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}}$$

# 2 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$, где $T_{n,x_0}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

**Теорема** (остаток в интегральной форме)**:**

Если $\;f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle, \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle$, то $R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

**Доказательство.**

$\square$

## База:

$$n = 0, \text{ то } f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \text{ — формула Ньютона-Лейбница}$$

## Переход:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)d(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}) =$$

$$= -\frac{1}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}df^{(n+1)}(t) =$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x_0) + R_{n+1,x_0}f(x)$$

$\blacksquare$

**Лемма** (чуть более хитрая теорема о среднем):

$f, g \in C[a, b], g \geqslant 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

**Доказательство.**

$\square$

$$m = \min_{[a,b]} f, \quad M = \max_{[a,b]} f$$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m, M] \Rightarrow \text{равно значению в некоторой промежуточной точке}$$

$\blacksquare$

Берём остаток в интегральной форме:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$$

$$\exists\theta : \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)\cdot(x-x_0)^{(n+1)} \text{ — остаток в форме Лагранжа}$$

Некоторые студенты на экзамене стали жертвой следующего:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + R_n$$

$$R_n = \frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta)^n}\cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta)^n}$$

При каких $x,\ R_n \to 0$?

При $x \in (0, 1)$ утверждение очевидно, но что делать при $x \in (-1, 0)$?

$R_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x$ ... To be continued (Федор Львович думал, что так можно, но не получилось :) )

## 2.1 Приближенное вычисление интеграла

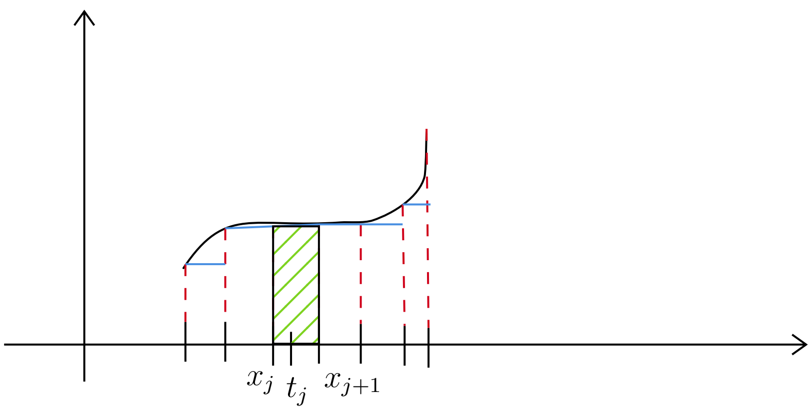
**Определение:** $[a,b], \tau$ — дробление отрезка $[a,b]$ $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$,

где $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ $\quad |\tau| = \max_{k=0,...,n-1} |x_{k+1} - x_k|$ - мелкость (ранг) дробления

$\theta = \{t_1, ..., t_n\}$ – оснащение дробления $\tau$, где $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$

$(\tau, \theta)$ — оснащенное дробление

$f \in C[a,b]$ интегральная сумма $S_{\tau,\theta}(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_{j+1})(x_{j+1} - x_j)$




**Теорема:** $f \in C[a,b] \Rightarrow S_{\tau,\theta}(f) \underset{|T|\to 0}{\to} \int_a^b f(x)dx$,

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau, \theta : |\tau| < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f dx - S_{\tau,\theta}(f) \right| < \varepsilon$

**Определение:** $f$ функция на $[a,b]$, существование предела $S_{\tau,\theta}(f)$ при $|\tau| \to 0$ означает, что $f$ интегрируема по Риману и $lim = \int_a^b f dx$

*Упражнение:* Доказать, что если у функции есть один разрыв первого рода, то она интегрируема по Риману

**Доказательство.**

$\square$

По теореме Кантора $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Берем дробление $\tau : |\tau| < \delta$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(c_j) \cdot (x_j - x_{j-1})dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} (f(t_j) - f(c_j)) \cdot (x_j - x_{j-1})\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon$$

$\blacksquare$

*Задача:* $f$ имеет разрыв в точке $c$ первого рода и $f \in C[a, b), f \in C(c, b], \exists \lim_{x \to c-} f, \exists \lim_{x \to c+} f$, тогда $S_{\tau,\theta} f \to \int_a^c f + \int_c^b f$

*Пример:*

1.

$$\int_0^a e^x dx = ?,\ \ \tau = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, ..., \frac{na}{n}\},\ \ \theta = \{0, \frac{a}{n}, ..., \frac{n-1}{n}a\}$$

$$S_{\tau,\theta} f = \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{a_{j-1}}{n}\right)(x_j - x_{j-1}) = \frac{a}{n} \cdot \left(1 + e^{a/n} + ... + e^{\frac{n-1}{n}a}\right) = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^{\frac{na}{n}} - 1}{e^{a/n} - 1} \to e^a - 1$$

2.

$$1^p + 2^p + ...n^p = n^{p+1} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right) / n =$$

$$\tau = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\}, \theta = \{\frac{1}{n}, ..., \frac{n}{n}\}, f(x) = x^p$$

$$= n^{p+1}S_{\tau,\theta}f \Rightarrow \frac{1^p+...+n^p}{(n+1)^p} \to \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow 1^p+...+n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

3. интеграл Пуассона

$$\int_0^\pi \log{(1-2a\cos x+a^2)}dx$$

$$f = \log{(1-2a\cos x+a^2)},\ [0,\pi],\ \tau=\{0,\frac{\pi}{n},...,\frac{\pi n}{n}\},\theta=\{0,\frac{\pi}{n},...,\frac{\pi(n-1)}{n}\}$$

$$S_{\tau,\theta}f = \sum_{j=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot\log{(1-2a\cos\frac{\pi(j-1)}{n}+a^2)} = \frac{\pi}{n}\log\prod_{j=1}^{n}(1-2a\cos\frac{\pi(j-1)}{n}+a^2)$$

Заметим, что $a^2-2a\cos\theta+1=(a-e^{-i\theta})(a-e^{i\theta})$

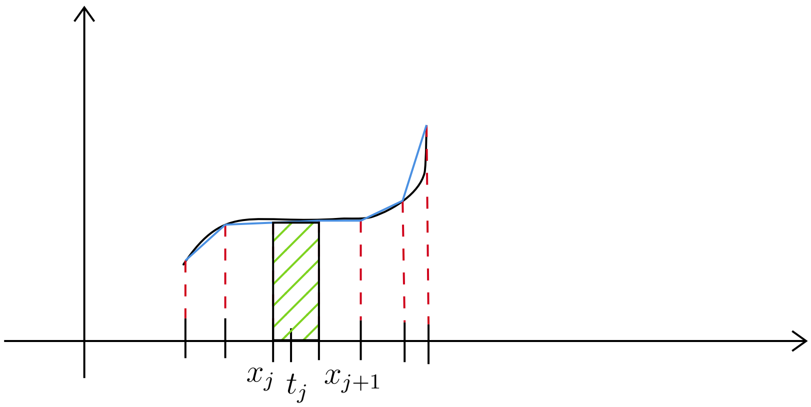
$$\prod_{j=1}^{n}(1-2a\cos\frac{\pi(j-1)}{n}+a^2) = \prod_{j=1}^{n}(a-e^{\frac{-\pi(j-1)}{n}i})(a-e^{\frac{\pi(j-1)}{n}i}) = \frac{(a^{2n}-1)\cdot(a-1)}{(a+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\cdot\log\frac{(a^{2n}-1)(a-1)}{a+1} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 2\pi\log|a| & |a|>1 \\ ? & |a|=1 \end{cases}$$

**Замечание.** $\int_a^b f(x)dx \approx S_{\tau,\theta}(f)$ *Можно ли оценить погрешность?*

$$\left|\int - S\right| \leqslant \sum|f(t_j)-f(c_j)|(x_{j+1}-x_j) \leqslant \sum|t_j-c_j|\max|f'|(x_{j+1}-x_j) \leqslant M\cdot|\tau|(b-a),\ \text{где}\ \max|f'|=M$$

**Замечание.** *Более точная формула для приблеженного вычисления интеграла*




Приближаем трапециями (формула трапеций)

$$\int_a^b f dx \approx \sum (x_{j+1} - x_j) \cdot \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}$$

**Теорема** (о погрешности в формуле трапеций)**:** $f \in C^2[a, b]$

$$\left| \int_a^b f - \sum (x_{j+1} - x_j) \cdot \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right| \leqslant \frac{1}{8} |\tau|^2 \int_a^b |f''(x)| dx$$

# Лекция 3

$f \in C^2[a,b] \quad \theta = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$

$$\left|\int_a^b f dx - \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j) + f(x_{j-1})}{2}\right| \leqslant \frac{|\theta|^2}{8}\int_a^b |f''|, \text{ где } |\theta| = \max|x_j - x_{j-1}| \text{ — мелкость(ранг) разбиения}$$

**Доказательство.**

$\square$

1. Разбиения в этой теореме не нужно. Достаточно доказать для отрезка, где $x_0 = a, x_1 = b$.

$$\int_a^b |f''| = \sum \int_{x_{j-1}}^{x_j}$$

$$\int_a^b f dx = \sum \int_{x_{j-1}}^{x_j}$$

   Сводим к неравенству:

$$\left|\int_a^b f - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

2. Рассмотрим разностное отношение функциий. Для этого введем $g$ - линейная функция, такая что $g(a) = f(a), g(b) = f(b)$.

$$\Rightarrow \int_a^b f - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a) = \int_a^b f - g, \text{ но } g'' = 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b |f''| = \int_a^b |f'' - g''| = \int_a^b |(f-g)''|$$

3. Свели утверждение к

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f''|, f \in C^2[a,b], f(a) = f(b) = 0, \text{ где } f \text{ на самом деле } f - g$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-\alpha) = f(x)(x-\alpha)\Big|_a^b - \int_a^b (x-\alpha)f'(x)dx = 0 - \int_a^b (x-\alpha)f'(x)dx =$$

$$-\int_a^b f'(x)d\left(\frac{x^2}{2}-\alpha x+\beta\right) = -f'(x)\left(\frac{x^2}{2}-\alpha x+\beta\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b f''(x)\left(\frac{x^2}{2}-\alpha x+\beta\right)dx =$$

$$\alpha, \beta : \frac{(x-a)(x-b)}{2} = \frac{x^2}{2} - \alpha x + \beta$$

$$= \int_a^b f''(x)\frac{(x-a)(x-b)}{2}dx$$

$$\left|\frac{(x-a)(x-b)}{2}\right| \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f''|$$

■

***Следствие:*** (для равномерного дробления)

Если $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ...x_n = b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8\cdot n^2}\int_a^b |f''|$$

**Теорема** (формула Эйлера-Маклорена)**:**

$$f \in C^2[m,n],\ m<n,\ f(m)+f(m+1)+...+f(n) = ?$$

**Доказательство.**

□

$$\int_m^n f dx - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{f(j)+f(j-1)}{2} = \int_m^n f''(x)\frac{\{x\}(\{x\}-1)}{2}dx$$(для подробностей 29 минута записи)

Все кроме крайних ($f(m)$ и $f(n)$) по 2 раза в

$$\sum_{i=m+1}^{n} \frac{f(i)+f(i-1)}{2}$$

Поэтому

$$f(m)+...+f(n) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f dx + \int_m^n f''(x)\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx$$

■

*Примеры:*

1. $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{=\ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{2}{x^3}\cdot\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx}_{=I_n}$$

$$I_n \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + I_n = \ln n + \delta + o(1)$$

$I_n$ – возрастает и ограничена, где $\delta$ - нек. конст. Эйлера (про нее неизвестного ничего, кроме миллиона знаков после запятой :)

2. (формула Стирлинга) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$

⚠ не следует думать, что факториал равен этой штуке, это означает только то, что отношение стремится к единице

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right))$$

⚠ Ошибка на $(n-1)!$

$$\ln n! = \ln 1 + ... + \ln n = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx + \underbrace{\int_1^n (\ln x)'' \frac{\{x\}(1-\{x\})}{2} dx}_{\int_1^n -\frac{1}{x^2}... = I_n} =$$

$$= n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + I_n =$$

$$|I_n| \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$= n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \ln const + o(1), \text{ т.к. } I_n = O(1)$$

$$\Rightarrow n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n} \cdot c$$

Применим формулу Валисса

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n} \cdot c}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \cdot c\right)^2} = \frac{1}{c} \cdot 4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$$

# 3 Несобственный интеграл

<u>*Мотивация:*</u>

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=+\infty} \dots\, dt$$

Как с таким бороться?

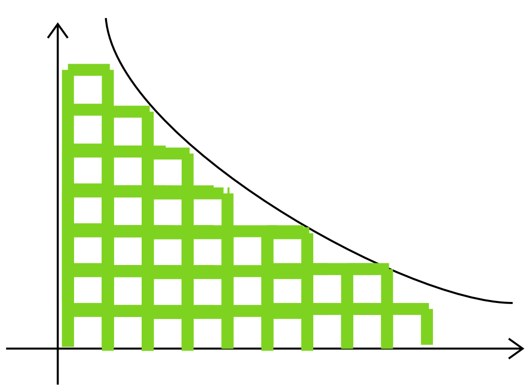
Пишем неопределенный интеграл, считаем его и подставляем.

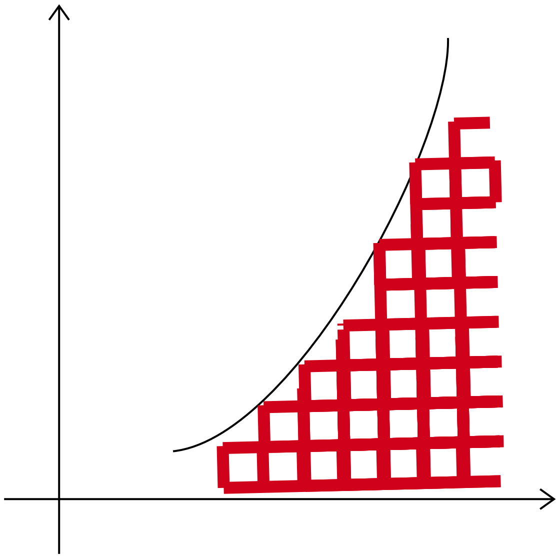
**Определение:** $f \in C[a,b], b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\underbrace{\int_a^{\to b} f dx}_{\text{Несобственный интеграл}} = \lim_{B \to b-} \int_a^B f dx \text{ — частичный интеграл}$$

- сх-ся $\iff \exists \lim$ — конечный
- расх-ся $\iff \nexists \lim$

2 ситуации, в которых это бывает полезно:





**Замечание.** *Если* $f \in C[a,b], b \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{\to b} f dx = \int_a^b f dx$

**Теорема** (Критерий Коши)**:**
$\int_a^{\to b} f dx$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in [a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) \Rightarrow \left|\int_{B_1}^{B_2}\right| < \varepsilon$

**Доказательство.**

$\square \quad \underbrace{F(b)}_{\text{— некая первообразная}} = \int_a^B f dx$

$\int_a^{\to b}$ — сх-ся $\Longleftrightarrow \lim_{B\to b-} F(B) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in [a,b)\ : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) \Rightarrow$
$|F(B_1) - F(B_2)| < \varepsilon$ — критерей Коши для функций. $\blacksquare$

**Свойства:**

1. (аддитивность)
$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b} f dx, \forall c \in [a,b)$$

   ⚠ Нужно понимать это так: если один из двух интегралов сходится, то сходится и второй и верно равенство

2. $\int_a^{\to b} f dx$ сх-ся $\Rightarrow \int_B^{\to b} f dx \to 0, B \to b-$

3. (линейность) $\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^{\to b} f(x) dx + \beta \int_a^{\to b} g(x) dx$

4. (монотонность) $f \geqslant g \Rightarrow \int_a^{\to b} f \geqslant \int_a^{\to b} g$

5. $\int_a^{\to b}|f|dx$ сх-ся $\Rightarrow \int_a^{\to b} fdx$ сходится и верно неравенство $\left|\int_a^{\to b} fdx\right| \leqslant \int_a^{\to b}|f|dx$

**Доказательство.**

$\square$ $\int_a^{\to b}|f|dx$ сх-ся $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in [a,b] : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) \Rightarrow \int_{B_1}^{B_2}|f|dx < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\int_{B_1}^{B_2} fdx\right| < \varepsilon \Rightarrow$ верен критерий Коши для обычного интеграла $\blacksquare$

> **Определение:** Если $\int_a^{\to b}|f|dx$ — сх-ся $\Rightarrow$ говорят, что $\int_a^{\to b} fdx$ сх-ся абсолютно

> **Определение:** $\int_a^{\to b} f$ сх-ся, а $\int_a^{\to b}|f|$ расх $\Rightarrow$ условная сходимость

6. (инт. по частям) $\int_a^{\to b} fg'dx = \underbrace{fg\Big|_a^b}_{=\lim_{b-} f(b)g(b)-f(a)g(a) \text{ только если } \exists} - \int_a^{\to b} f'gdx$

7. (замена переменной) $\phi : [\alpha, \beta) \to [a, b), \phi \in c'[\alpha, \beta)$

$$\int_a^{\to b} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b-)=\lim_{x\to b-}\phi(x)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} f(y)dy$$

Если один интеграл существует, то и другой тоже и они равны

**Доказательство.**

$\square$

$\Longleftarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)\to\phi(\beta-)} f(y)dy \to \int_{\phi(\alpha)}^{\to\phi(\beta-)} f(y)dy$$

$\Longrightarrow$

$$\phi(\beta-) \neq b \Rightarrow \text{ П инт — собственный } \Rightarrow \text{ по первому пункту}$$

$$\phi(\beta-) = b, b_n \to b-, \beta_n \to \beta$$

$$\exists\beta_n : \phi(\beta_n) = b_n$$

$$\int_{\alpha}^{\beta_n} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{b_n} f(y)dy$$

и переходим к предыдущему пункту ■

# Лекция 5

## 3.1 Вводная в кривые

**Определение:** Путь Путь в $\mathbb{R}^m x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ — непрерывное.

**Определение:** Носитель пути Носитель пути: $\gamma([a, b]) \in \mathbb{R}^m$

**Определение:** Путь замкнут если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

**Определение:** Если $\gamma$ — инъекция, то такой путь называется простым.

**Замечание.** *Можно определять путь покоординатно:* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ *Где* $\gamma_i$ *— координатные функции.*

**Определение:** Назовём два пути $\gamma_1 \colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ и $\gamma_2 \colon [c, d] \mapsto \mathbb{R}^m$ эквивалентными, если $\exists$строго возрастающая биекция $\varphi \colon [a, b] \mapsto [c, d]$, так что $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.

**Замечание.** *Это отношение эквивалентности.*

**Определение:** Кривая в $\mathbb{R}_m$ — класс эквивалентности путей Представители — параметризация.

**Замечание.** *На самом деле параметризаций у одного носителя может быть много. Например у полуокружности есть следующие параметризации:* $(\cos x, \sin x), (x, \sqrt{1 - x^2})$

**Замечание.** *Зная параметризацию можно определить носитель кривой, начало и конец, но хочется понимать ещё про гладкость.*

**Определение:** $\gamma$ — гладкий путь, если $\gamma_i \in C_1[a, b]$.

Гладкая кривая — кривая, у которой $\exists$ гладкая параметризация.

**Замечание.** *Нельзя утверждать, что у гладкой кривой есть явная касательная в каждой её точке.*

## 3.2 Длина кривой

**Замечание.** *По факту, хотим подробить нашу кривую на маленькие отрезочки и засуммировать их, давайте подумаем как это сделать аккуратно.*

**Определение:** $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ — путь. $\theta = \{t_0, \dots, t_n\}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — разбиение $[a,b]$. $l_\theta(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$;
Тогда длиной назовём $l(\gamma) = \sup_\theta l_\theta(\gamma)$

**Замечание.** *Заметим, что длина есть у любого пути, так как мы не вводили дополнительные требования на путь.*

**Замечание.** *Посмотрим на* $(x, x\sin\frac{1}{x})$ *Вопрос: Путь бесконечной длины?*

**Теорема:** $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$

**Доказательство.**
□ $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$ $\theta$ — дробление $[a,b]$, $\varphi(\theta)$ — дробление $[a,b]$. $\sum\limits_{j=1}^n |\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})| = \sum\limits_{j=1}^n |\gamma_2(\varphi(t_j)) - \gamma_2(\varphi(t_{j-1}))|$. $l_\theta(\gamma_1) = l_{\varphi(\theta)}(\gamma_2)$ ■

**Теорема:** $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m, c \in (a,b)$. Пусть $\gamma_- = \gamma\big|_a^c, \gamma_+ = \gamma\big|_c^b$. Требуется доказать, что $l(\varphi) = l(\varphi_-) + l(\varphi_+)$

**Доказательство.**
□ $\theta_-$ — дробление $[a,c]$, $\theta_+$ – дробление $[c,b]$ $\Rightarrow$ $\theta = \theta_- + \theta_+$ — дробление $[a,b]$ Докажем неравенство в две стороны.

$$l(\varphi) \geq l_\theta(\varphi) = l_{\theta_-}(\varphi_i) + l_{\theta_+}(\varphi_i) \Rightarrow$$

$$l(\varphi) \geq \sup_{\theta_-} l_{\theta_-}(\gamma_-) + \sup_{\theta_+} l_{\theta_+}(\gamma_+) = l(\gamma_-) + l(\gamma_+).$$

Докажем в обратную сторону. $\theta$ — дробление $[a,b] \to \overline{\theta} = \theta \cup \{c\} \to \theta_{+/-}$.

$$l_\theta(\gamma) \le l_{\overline{\theta}}(\gamma) = l_{\theta-}(\gamma_-) + l_{\theta+}(\gamma_+) \le l(\gamma_i) + l(\gamma_+) \Rightarrow \sup_\theta l_\theta(\gamma) \le l(\gamma_-) + l(\gamma_+).$$

$\blacksquare$

**Теорема** (О длине гладкого пути)**:** $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m, \gamma_j = C'[a,b] \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$, где $|\gamma'(t)| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^m |\gamma_j(t)|^2}$

**Доказательство.**

$\square$ $\theta$ — дробление $[a,b]$, $\theta\colon a = t_0 < \dots < t_n = b$

$$l_\theta(\gamma) = \sum_{j=1}^m \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$$

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1})|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k'(?)|^2 (t_j - t_{j-1})^2} = (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k'(?)|^2}.$$

Пусть $m_{j,k} = \min\limits_{[t_{j-1},t_j]} |\gamma_k'|$, $M_{j,k} = \max\limits_{[t_{j-1},t_j]} |\gamma_k'|$. Тогда можно продолжить следующим образом:

$$(t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \le (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2}$$

С другой стороны:

$$(t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt \le (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2}$$

Суммируем по $j$:

$$\sum (t_j - t_{j-1})\sqrt{?} \le \begin{cases} l_\theta(\gamma) \\ \int\limits_a^b |\gamma'(t)|dt \end{cases} \le \sum (t_j - t_{j-1})\sqrt{?}.$$

Заметим, что обе части стремятся к одному и тоже при $|\theta| \to 0$.

Тогда для $\varepsilon > 0$ по теореме кантора $\delta > 0$:

$\forall s,t \in [a,b]\colon |s-t| < \delta, \forall k = 1 \dots m, |(|\gamma_k'(s) - \gamma_k'(t)) < \varepsilon$ Тогда $|M_{j,k} - m_{j,k}| < \varepsilon$ если $t_j - t_{j-1} < \delta$.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^m (M_{j,k} - m_{j,k})^2} < \sqrt{m}\varepsilon.$$

Тогда

$$|\text{п.ч - л.ч}| < \sum_{k=1}^{m}(t_j - t_{j-1})\sqrt{m}\varepsilon = (b-a)\sqrt{m}\varepsilon$$

$\blacksquare$

***Следствие:***

1. (Длина графика функции)

   Пусть $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}, f \in C^1[a,b], G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда длина графика функции равна: $l(G_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

2. Есть функция $r\colon [\alpha,\beta] \mapsto \mathbb{R}_+, r \in C^1[\alpha,\beta]$ Тогда можно запараметризовать эту кривую как: $(r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, обозначим за координаты $x(t), y(t)$ соответственно.

   Тогда: $x'(t) = r'(t)\cos t - r(t)\sin t; y'(t) = r'(t)\sin t + r(t)\cos t$

   Значит длину кривой можно вычислить следующим образом: $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}d\varphi$

# 4 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

**Замечание.** *Прежде чем начать, подумаем что нам вообще надо. Производную можно представлять как линейное приближение функции в какой-либо точке. $f\colon X \mapsto Y$, где $X, Y$ — линейные, нормированные, полные, пространства над одним полем скаляров($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$. Объясним почему наложены те или иные условия. В одномерье $A$ было числом. В общем случае $A$ должно быть линейным отображением, поэтому нам хочется чтобы поле скаляров у $X, Y$ было одним и тем же. Более того, хочется иметь возможность переходить к пределу, а когда мы переходим к пределу естественно хотеть иметь корректное расстояние, поэтому нам нужна нормированность и полнота.*

## 4.1 Линейные отобрежения

**Определение:** $X, Y$ — линейные пространства над одним полем скаляров. $U\colon X \mapsto Y$ — линейное, если

1. (Аддитивность)
   $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. (Однородность)
   $U(\lambda x) = \lambda U(x)$

**Определение:** Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ — пространства над одним полем скаляров. Тогда $U\colon X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto Y$ — полилинейное, если оно линейно по каждому из аргументов.

**Замечание.** *Часто скобочки опускаются:* $U(x) = Ux$

*Пример:*

1. $X = C[-1,1], \delta\colon X \mapsto \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$. Тогда $\delta$ — линейное отображение.
2. $X = C[a,b], Y = \mathbb{R}$. Тогда $Uf = \int\limits_a^b f dx$ — линейное отображение.
3. $X = C[a,b], Y = C[a,b]$. Тогда $(Uf)(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$
4. $X = C^1[a,b], Y = C[a,b]$. Тогда $(Df)(x) = f'(x), D\colon X \mapsto Y$ тоже линейное отображение.
5. $X_1 = X_2 = \ldots X_n = \mathbb{R} = Y$. Тогда $U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ — полилинейное отображение.
6. $X_1 = \mathbb{R}^m, X_2 = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}$. Тогда $U(X_1, X_2) = (X_1, X_2)$, где $(X_1, X_2)$ — скалярное произведение, линейное по первой координате.
7. $X_1 = \mathbb{R}^3, X_2 = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^3$. Тогда $U(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 = [x_1, x_2]$, где $[x_1, x_2]$ — линейное отображение, полилинейное отображение.
8. $X_1 = \cdots = X_m = \mathbb{R}^m$. Тогда $U(x_1, \ldots, x_m) = \det(x_1, \ldots, x_m)$ полилинейное отображение.

**Теорема** (О непрерывности линейного отображения)**:** $U\colon X \mapsto Y$ — линейное, $X, Y$ — линейные, нормированные отображения (далее лно) над одним полем скаляров. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $U$ — непрерывно

2. $U$ — непрерывно в 0

3. $\exists C\colon \forall x \in X, ||U_x||_Y \leq C||x||_x$

**Доказательство.**

$\square$

1. (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно

2. (2) $\Rightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon \forall x\colon \|x\| \leq \delta, \|U_x\| \leq \varepsilon$. $x \to \overline{x} = x\frac{\delta}{\|x\|} \Rightarrow \|U_x\overline{x}\| \leq \varepsilon$

3. (3) $\Rightarrow$ (1) липшецевость $\Rightarrow$ непрерывное.

$\blacksquare$

**Теорема:** $U\colon X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto Y$ — полилинейное. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $U$ — непрерывно

2. $U$ — непрерывно в 0

3. $\exists C\colon \|U(X_1, \ldots, X_n)\| \leq C\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$

**Замечание.**

**Определение:** $U : X \to Y$ — лно. $\|U\| = \inf\{C \mid \forall x \in X \|U_x\| \leq C\|x\|\}$

**Замечание.** inf *достигается то есть:* $\forall x \in X, \|U_x\| \leq \|U\| \cdot \|x\|$

*Пример:* $U\colon C[a,b] \mapsto C[a,b]$, причём $(Uf)(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Хотим оценить.

# Лекция 24.03

В прошлой серии:

$$U : X \to Y \text{ — линейное непрерывное}$$

$$||U|| = inf\{c : \forall x \in X||Ux|| \leqslant C||x||\}$$

$$\forall x||Ux|| \leqslant ||U||||x|| \Rightarrow ||U|| \geqslant \frac{||Ux||}{||x||}$$

$$\|U\| = sup_{x\neq 0}$$

$$\frac{\|Ux\|}{||x||} = sup_{||x||=1}||U||, \text{ но не максимум, т.к. сфера не обязательно компактна}$$

<u>*Упражнение:*</u> $\|U\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\| = sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ux\|$

**Замечание.** $U : X_1 \times X_2 ... \times X_m \to Y$ *- полилинейное отображение*

$$\|U\| = inf\{C : \forall x_1\ inX_1, ..., \forall x_n \in X_m\|U(x_1, ..., x_n)\| \leqslant C\|x_1\|...\|x_m\|\}$$

$$\Rightarrow \forall x_1, ..., x_m\|U(x_1, ..., x_m)\| \leqslant \|U\| \cdot \|x_1\|...\|x_m\|$$

$$\|U\| = sup_{x_1,..,x_n}\frac{\|U(x_1, x_2, ...x_n)\|}{\|x_1\|...\|x_n\|}$$

*Пример:*

$$D : C^1[0,1] \to C[0,1]; (Df)(x) = f'(x)$$

Норма в $C^1[0,1]$:

1. $\phi_1(f) = max_{x\in[0,1]}|f(x)|$
2. $\phi_2(f) = max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ — не норма (т.к. обнуляется на константах)
3. $\phi_3(f) = \phi_1(f) + \phi_2(f)$

$(C^1[0,1], \phi_1)$ — не полное пространство (берем непрерывную не дифференцируемую функцию и приближаем многочленом, например $|x| = x^{1-\varepsilon}$)

*Упражнение:* $(C^1[0,1], \phi_3)$ — полное пространство

$$\|Df\|_{C[0,1]} \leqslant C\|f\|_{C^1[0,1]}$$

$c = 1$ годится

$$\|f'\|_{C[0,1]} \leqslant (\|f'\|_{C[0,1]} + \|f\|_{C[0,1]})$$

$$f_k(x) = sin(kx); \|f_k'\|_c = k; \|f_k\| = 1$$

**Теорема:** $X, Y$ - линейные нормированные пространства над одним полем скаляров $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $L(X,Y) = \{U : X \to Y, U —$ линейно непрерывное$\}$ — линейное множество (линейное пространство)

1. $\|U_1 + U_2\| \leqslant \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \cdot \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \Leftrightarrow U = 0$
4. $U \in L(X,Y), V \in L(Y,Z) \Rightarrow VU \in L(X,Z)$ и $\|VU\| \leqslant \|V\| \cdot \|U\|$

**Доказательство.**

$\square$

1. $$\|(U_1+U_2)x\| = \|U_1x+U_2x\| \leqslant \|U_1x\|+\|U_2x\| \leqslant \|U_1\|x+\|U_2\|x \leqslant (\|U_1\|+\|U_2\|)\|X\|$$

$$\Rightarrow \|U_1+U_2\| \leqslant \|U_1\|+\|U_2\|$$

2. $$\|\lambda u\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ux\| = |\lambda| sup_{\|x\|=1}\|Ux\| = |\lambda|\cdot\|U\|$$

3. Без комментариев

4. $$\|VUx\| \leqslant \|V\|\|Ux\| \leqslant \underbrace{\|V\|\cdot\|U\|}_{=C}\cdot\|X\| \Rightarrow \|VU\| \leqslant \|V\|\|U\|$$

$\blacksquare$

**Теорема:** $L(X,Y)$ — полное, если $Y$ полное

**Доказательство.**

$\square$ $\{U_k\}\subset L(X,Y)$, $\{U_k\}$ — фунд.

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall m,n>N \quad \underbrace{\|U_m-U_n\|\leqslant\varepsilon}_{\forall x\ \|U_mx-U_nx\|\leqslant\varepsilon\|x\|(*)}$

$\Rightarrow U_mx$ — фунд в $Y \Rightarrow \exists\lim_{m\to\infty}U_mx =: U(x)$

1. $U$ — линейное (очевидно, т.к. lim — линейная операция)

2. $U$ — непрерывно

3. $\|U_m-U\|\to 0, m\to\infty$

В $(*)$ $n\to\infty$ получаем $\forall x\ \|U_mx-Ux\|\leqslant\varepsilon\|x\| \Rightarrow U_m-U\in L(X,Y), \|U_m-U\|\leqslant\varepsilon$

$\blacksquare$

**Теорема:** (штрих) $L(X_1, ..., X_n; Y)$ — полное, если $Y$ — полное, где $L$ — полилинейные, непрерывные отображения из $X_1 \times ... \times X_n \to Y$

**Теорема:** $X_1, ...X_s, X_{s+1}, ..., X_k; Y$ - линейные нормированные пространства

$A = L(X_1, ..., X_s; L(X_{s+1}, ..., X_k; Y))$

$\underbrace{\simeq}_{\text{изометрический изоморфизм(биекция, сохр. линейную струкутуру и норму)}}$

$L(X_1, ..., X_k; Y) = B$

**Доказательство.**

$\square$ $u \in A, x_1 \in X_1, ..., x_s \in X_s \Rightarrow U(x_1, ..., x_s) \in L(x_{s+1}, ..., x_k; Y)$

$x_{s+1} \in X_{s+1}, ..., x_k \in X_k \Rightarrow U(x_1, ..., x_s)(x_{s+1}, ..., x_k) \in Y$

$U^{\sim} \in B; U^{\sim}(x_1, ...x_k) := U(x_1, ..., x_s)(x_{s+1}, ..., x_k)$ — полилинейное отображение, непрерывное

$\|U^{\sim}\| = \sup_{x_1,..x_k} \frac{\|U(x_1,...x_s)(x_{s+1},...,x_k)\|}{\|x_1\|...\|x_k\|} = \sup_{x_1,...,x_s} \sup_{x_{s+1},...,x_k} \frac{\|U(x_1,...,x_s)(x_{s+1},...,x_k)\|}{\|x_{s+1}\|...\|x_k\|} =$

$= \sup_{x_1,...,x_s} \frac{\|U(x_1,...,x_s)\|}{\|x_1\|...\|x_s\|} = \|U\|$ $\blacksquare$

# 5 Дифференциал

**Определение:** $U \subset X$— открытое, $f : U \to Y$, $X, Y$ - линейные полные нормированные пространства, $x_0 \in U$

$f$ дифференцируемо в $(\cdot)\, x_0$, если $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \underbrace{o(h)}_{=\alpha(h)}, h \to 0$, где $A \in L(X, Y)$, и $\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \to 0, h \to 0$

$A$ — дифференциал $f$ в $(\cdot) x_0$

$A = df(x_0) = d_{x_0}f = D_{x_0}f = f'(x_0)$ (не производная !!!)

**Замечание.**

1. *Если $X$ — конечномерно, то из линейности следует непр., т.к.* $\exists C = max_{\|x\|=1}\|Ux\| < \infty$

2. 

| **_Определение:_** *в $\infty$ мерном пространстве в лит-ре называется дифференцируемость по Фреше* |
|---|

**Свойства:**

1. $f$ – дифф в $(\cdot)x_0 \Rightarrow f$ — непр. в $(\cdot)x_0$

   **Доказательство.**

   $\square$ $f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)h + o(h)}_{\to 0, h\to 0}$ $\blacksquare$

2. дифференциал единственен

   **Доказательство.**

   $\square$ $f(x_0+h) = f(x_0) + A_1(h) + o(h) = f(x_0) + A_2(h) + o(h) \Rightarrow (A_2 - A_2)(h) = o(h)$

   $\frac{\|(A_1-A_2)h\|}{\|h\|} \to 0, h \to 0$

   Берём $h_0 - fix, h = th_0, t \to 0$

   $\frac{\|(A_1-A_2)(th_0)\|}{\|th_0\|} = \frac{\|(A_1-A_2)(h_0)\|}{\|h_0\|} \to 0, t \to 0 \Rightarrow = 0$, т.к. не зависит от $t$ $\blacksquare$

3. (линейность) $f, g$ — дифф. в $(\cdot)x_0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ — дифф в $(\cdot)x_0$

   $d(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha df(x_0) + \beta dg(x_0)$

4. (дифференциал композиции — правило цепочки)

   $x_0 \in U \subset X, f(x_0) \in V \subset Y, Z$

   $f: U \to Y, g: V \to Z$

   $f$ — дифф. в $(\cdot)\, x_0$, $g$ — дифф. в $(\cdot)\, f(x_0)$

   $\Rightarrow g \circ f$ дифф в $(\cdot)\, x_0$ и $d(g\circ f)(x_0) \in L(X,Z) = dg(f(x_0)) \in L(Y,Z) \circ df(x_0) \in L(X,Y)$

**Доказательство.**

$\square$ $g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + dg(f(x_0))(f(x_0+h)-f(x_0)) + o(f(x_0+h)-f(x_0)) =$

$= g(f(x_0)) + dg(f(x_0))(df(x_0)h + o(h)) + o(f(x_0+h)-f(x_0)) =$

$= g(f(x_0)) + \underbrace{dg(f(x_0))df(x_0)}_{\in L(X,Z)} h + \underbrace{dg(f(x_0))(o(h)) + o(f(x_0+h)-f(x_0))}_{? = o(h)}$

$\|dg(f(x_0))\| \leqslant \|dg(f(x_0))\| \cdot \underbrace{\|o(h)\|}_{=o(h)}$

$\|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leqslant C\|h\| \Rightarrow = o(h)$ $\blacksquare$

5. (дифференциал обратного отображения)

   $U \subset X, V \subset Y, f : U \to V$ — биекция, $f$ — непр. в $(\cdot)\, x_0$, $f^{-1}$ — непр. в $(\cdot)\, f(x_0) = y_0$

   $f$ дифф в $(\cdot)\, x_0$

   $\exists (df(x_0))^{-1} \in L(Y,X)$

   $\Rightarrow f^{-1}$ дифф в $(\cdot)\, y_0$ и $df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}$