КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

СПбГУ, МКН, СП

ЛЕКТОР: БАХАРЕВ ФЁДОР ЛЬВОВИЧ

2021-2023

Оглавление

Лекция 1

1 Интегральное исчисление функций

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение: $f:(a,b)\to\mathbb{R}, F:(a,b)\to\mathbb{R}$, F – первообразная f на (a,b) если $F'=f$

Теорема: $f,F:(a,b)\to\mathbb{R}$, F – первообразная f

1. $\Rightarrow F+c$ - первообразная f
2. $G:(a,b)$ - первообразная $f\Rightarrow F-G=const$

Доказательство.

$\square$

1. Очевидно.
2. $F'=f, G'=f\Rightarrow (F-G)'=0\Rightarrow (F-G)=const$(т.к. $g(a)-g(b)=g'(\theta)(a-b)=0$ по теореме Лагранжа)

$\blacksquare$

Определение: $\int fdx =$ множество всех первообразных f

Свойства:

1. $\int f+gdx=\int fdx+\int gdx$
2. $\int \lambda fdx=\lambda\int fdx, \lambda\neq 0$
3. $\int \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta g(x)dx, \alpha^2+\beta^2\neq 0$
4. (замена переменной в неопр. интеграле)
   $f:(a,b)\to\mathbb{R}, F$ - первообразная f, $\phi:(c,d)\to(a,b),\phi$ - дифференцируема.
   $\Rightarrow\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=F(\phi(x))+c$

Замечание. $\phi(x) = y, \phi'(x)dx = dy \Rightarrow \int f(y)dy = F(y) + c$

5. (формула интегрирования по частям)

$$f, g - \text{дифф на } (a, b) \Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx$$

Доказательство.

$\square$ $(fg)' = fg' + f'g$ $\blacksquare$

1.2 Площадь и псевдоплощадь

Определение: Определение площади: $S : 2^{\mathbb{R}^2} \to [0, +\infty)$

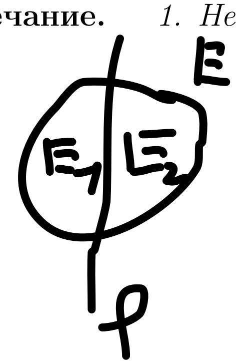
1. $S((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$
2. $S(E_1 \sqcup E_2) = S(E_1) + S(E_2)$

Замечание. *Такая функция не существует.*

Определение: (Псевдоплощадь) $\sigma : F \to [0, +\infty]$, где F это ограниченные подмножества R^2

1. $\sigma(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$
2. $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ если $E = E_- \sqcup E_+$ и E_-, E_+ получены разрезанием E вертикальной или горизонтальной линией.
3. $E_1 \supset E_2 \Rightarrow \sigma(E_1) \geq \sigma(E_2)$

Замечание. 1. *Не важно куда относить точки прямой, т.к. площадь прямой равна 0*



2. Псевдоплощадь существует, но не единственна.

Пример: $E \in F$

P_j это прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, но произвольных размеров.

1. $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum \sigma_1(P_j) \mid E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} P_j\right\}$
2. $\sigma_2(E) = \inf\left\{\sum \sigma_2(P_j) \mid E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j\right\}$

Замечание. $\sigma_1(E) \geq \sigma_2(E)$ *и если* $K = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1] \Rightarrow \sigma_1(K) = 1, \sigma_2(K) = 0$

Теорема: σ_1 – псевдоплощадь.

Доказательство.

□

1. Если прямоугольник покрыть конечным числом прямоугольников, то у покрытия сумма площадей не меньше площади прямоугольника. (Т.к. можно провести все вертикальные и горизонтальные линии и разбить на дизъюнктивное объединение)

2. $\geq$ $\sigma_1(E) \stackrel{?}{=} \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $E \subset P_1 \cup \ldots \cup P_n$, $P_j = P_j^- \cup P_j^+$, $\sigma_1(P_j) = \sigma_1(P_j^-) + \sigma_1(P_j^+)$

   Тогда $\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_1(P_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_1(P_j^-) + \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_1(P_j^+) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $\Rightarrow \sigma_1(E) \geq \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$

   $\leq$ $P_1, \ldots, P_k$ - покрытие E_- с точность ϵ,

   $P_{k+1}, \ldots, P_n$ - покрытие E_+ с точность ϵ

   $\Rightarrow \sigma_1(E_-) + \epsilon \geq \sigma_1(P_1) + \ldots + \sigma_1(P_k)$

   $\sigma_1(E_+) + \epsilon \geq \sigma_1(P_{k+1}) + \ldots + \sigma_1(P_n)$

   $\Rightarrow \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\epsilon \geq \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_1(P_j) \geq \sigma_1(E)$

3. Покрытие большего является покрытием меньшего.

■

Теорема: Псевдоплощадь инварианта относительно сдвигов.

Доказательство.

☐ Покрытие также сдвинется. ■

Замечание. *Проверить то же самое для* σ_2.

1.3 Определенный интеграл.

Считаем, что зафиксирована псевдоплощадь σ.

Определение: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a_+ = \max(a, 0), a_- = \max(-a, 0)$

$a_+ + a_- = |a|, a_+ - a_- = a$

Аналогично для функции f.

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$

Для $f \geq 0$ $P_f = \{(x, y) : y \in [0, f(x)]\}$ - подграфик f.

Для $f \geq 0$ на $[a, b], P_f[a, b] = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ - подграфик f.

Замечание. f - *непр* $\Rightarrow f_+, f_-$ - *непр.*

Определение: f - непр. на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}[a, b]) - \sigma(P_{f_-}[a, b])$$

Свойства:

1. $\int_a^a f\ dx = 0$
2. $\int_a^b 0\ dx = 0$
3. $f \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f\ dx \geq 0$
4. $\int_a^b -f\ dx = -\int_a^b f\ dx$

5. $\int_a^b c\ dx = c \cdot (b-a)$

6. $f \geq 0$ на $[a,b] \wedge \int_a^b f\ dx = 0 \Rightarrow f = 0$ на $[a,b]$

   Доказательство.

   $\square$ Т.к. функция непрерывна, то если существует точка f со значением не 0, то можно найти окрестность со значением > 0 и там будет ненулевая площадь $\blacksquare$

7. (Аддитивность интеграла) $c \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$

   Доказательство.

   $\square$ Следует из аддитивности псевдоплощади. $\blacksquare$

   Замечание. *Соглашение:* $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx \Rightarrow$ *аддитивность верна и для* $c \notin [a,b]$

8. (Монотонность) $f \geq g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx$

   Доказательство.

   $\square$ $f \geq g \Rightarrow f_+ \geq g_+ \wedge f_- \leq g_-$ $\blacksquare$

9. $(b-a)\min\limits_{[a,b]} f \leq \int_a^b f dx \leq (b-a)\max\limits_{[a,b]} f$

10. (Теорема о среднем) $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f dx = f(c) \cdot (b-a)$

    Доказательство.

    $\square$

    $$\frac{\int_a^b f dx}{b-a} \in [\min f, \max f] \Rightarrow \exists c$$

    $\blacksquare$

11. (Теорема Барроу) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \Psi(x) = \int_x^b f(t)dt$

    Φ - интеграл с переменным верхним пределом, Ψ - нижним

    $\Phi' = f, \Psi' = -f$

    Доказательство.

    $\square$ x_1, x_2

    $$\frac{\Phi(x_1)-\Phi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}{x_1-x_2} \overset{x_1 - fix}{\Rightarrow} \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Phi(x_1)-\Phi(x_2)}{x_1-x_2} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}{x_1-x_2} = \lim_{x_2 \to x_1} f(\theta)$$

    где θ лежит между x_1 и x_2

    $\Rightarrow \Phi(x_1) = f(x_1)$

$\Phi + \Psi = const \Rightarrow \Psi' = -f$ ■

12. (формула Ньютона-Лейбница) F - первообразная $\Rightarrow$
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$

Доказательство.

□

$$\Phi(x) = \int_a^x f \Rightarrow F = \Phi + c \Rightarrow F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f$$

■

13. (Линейность интеграла)

$$f, g \in C[a,b], \alpha, \beta \in R \Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

□ Следует из существования первообразной. ■

14. $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$

Доказательство.

□

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f_+ - \int_a^b f_-\right| \leq \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- = \int_a^b |f|$$

■

15. (формула интегрирования по частям)

$$f, x \in C^1[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Доказательство.

□ Следует из формулы Ньютона-Лейбница и формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла. ■

16. (Замена переменной) $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \phi[c,d] \to [a,b], \phi \in C^1[c,d]$

$$\Rightarrow \forall p, q \in [c,d] \int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(t)}^{\phi(q)} f(x)dx$$

Пример:

(a)

$$\int_0^1 e^{\sin(x)}\cos(x)\ dx = [\sin(x) = y, dy = \cos(x)dx] = \int_{\sin(0)}^{sin(1)} e^y\ dy = \dots$$

(b)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = [x = \sin(y), dx = \cos(y)dy] = \int_0^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(y)}\cos(y)\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\ dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2(y)}{2}\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ dy = \frac{\pi}{4}$$

Лекция 5

1.4 Вводная в кривые

Определение: Путь Путь в $\mathbb{R}^m x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ — непрерывное.

Определение: Носитель пути Носитель пути: $\gamma([a, b]) \in \mathbb{R}^m$

Определение: Путь замкнут если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Определение: Если γ — инъекция, то такой путь называется простым.

Замечание. *Можно определять путь покоординатно:* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ *Где* γ_i *— координатные функции.*

Определение: Назовём два пути $\gamma_1 \colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ и $\gamma_2 \colon [c, d] \mapsto \mathbb{R}^m$ эквивалентными, если $\exists$строго возрастающая биекция $\varphi \colon [a, b] \mapsto [c, d]$, так что $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.

Замечание. *Это отношение эквивалентности.*

Определение: Кривая в $\mathbb{R}_m$ — класс эквивалентности путей Представители — параметризация.

Замечание. *На самом деле параметризаций у одного носителя может быть много. Например у полуокружности есть следующие параметризации:* $(\cos x, \sin x), (x, \sqrt{1 - x^2})$

Замечание. *Зная параметризацию можно определить носитель кривой, начало и конец, но хочется понимать ещё про гладкость.*

Определение: γ — гладкий путь, если $\gamma_i \in C_1[a, b]$.

Гладкая кривая — кривая, у которой $\exists$ гладкая параметризация.

Замечание. *Нельзя утверждать, что у гладкой кривой есть явная касательная в каждой её точке.*

1.5 Длина кривой

Замечание. *По факту, хотим подробить нашу кривую на маленькие отрезочки и засуммировать их, давайте подумаем как это сделать аккуратно.*

Определение: $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ — путь. $\theta = \{t_0, \dots, t_n\}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — разбиение $[a,b]$. $l_\theta(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$;
Тогда длиной назовём $l(\gamma) = \sup_\theta l_\theta(\gamma)$

Замечание. *Заметим, что длина есть у любого пути, так как мы не вводили дополнительные требования на путь.*

Замечание. *Посмотрим на* $(x, x\sin\frac{1}{x})$ *Вопрос: Путь бесконечной длины?*

Теорема: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$

Доказательство.
□ $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$ θ — дробление $[a,b]$, $\varphi(\theta)$ — дробление $[a,b]$. $\sum\limits_{j=1}^{n} |\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})| =$
$\sum\limits_{j=1}^{n} |\gamma_2(\varphi(t_j)) - \gamma_2(\varphi(t_{j-1}))|$. $l_\theta(\gamma_1) = l_{\varphi(\theta)}(\gamma_2)$ ■

Теорема: $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m, c \in (a,b)$. Пусть $\gamma_- = \gamma\big|_a^c, \gamma_+ = \gamma\big|_c^b$. Требуется доказать, что $l(\varphi) = l(\varphi_-) + l(\varphi_+)$

Доказательство.
□ θ_- — дробление $[a,c]$, θ_+ – дробление $[c,b]$ $\Rightarrow$ $\theta = \theta_- + \theta_+$ — дробление $[a,b]$ Докажем неравенство в две стороны.

$$l(\varphi) \geq l_\theta(\varphi) = l_{\theta_-}(\varphi_i) + l_{\theta_+}(\varphi_i) \Rightarrow$$

$$l(\varphi) \geq \sup_{\theta_-} l_{\theta_-}(\gamma_-) + \sup_{\theta_+} l_{\theta_+}(\gamma_+) = l(\gamma_-) + l(\gamma_+).$$

Докажем в обратную сторону. θ — дробление $[a,b] \to \overline{\theta} = \theta \cup \{c\} \to \theta_{+/-}$.

$$l_\theta(\gamma) \le l_{\overline{\theta}}(\gamma) = l_{\theta-}(\gamma_-) + l_{\theta+}(\gamma_+) \le l(\gamma_i) + l(\gamma_+) \Rightarrow \sup_\theta l_\theta(\gamma) \le l(\gamma_-) + l(\gamma_+).$$

■

Теорема (О длине гладкого пути)**:** $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m, \gamma_j = C'[a,b] \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$, где $|\gamma'(t)| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^m |\gamma_j(t)|^2}$

Доказательство.

□ θ — дробление $[a,b]$, $\theta\colon a = t_0 < \dots < t_n = b$

$$l_\theta(\gamma) = \sum_{j=1}^m \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$$

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1})|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k'(?)|^2 (t_j - t_{j-1})^2} = (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m |\gamma_k'(?)|^2}.$$

Пусть $m_{j,k} = \min\limits_{[t_{j-1},t_j]} |\gamma_k'|$, $M_{j,k} = \max\limits_{[t_{j-1},t_j]} |\gamma_k'|$. Тогда можно продолжить следующим образом:

$$(t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \le (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2}$$

С другой стороны:

$$(t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|dt \le (t_j - t_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2}$$

Суммируем по j:

$$\sum (t_j - t_{j-1})\sqrt{?} \le \begin{cases} l_\theta(\gamma) \\ \int\limits_a^b |\gamma'(t)|dt \end{cases} \le \sum (t_j - t_{j-1})\sqrt{?}.$$

Заметим, что обе части стремятся к одному и тоже при $|\theta| \to 0$.

Тогда для $\varepsilon > 0$ по теореме кантора $\delta > 0$:

$\forall s, t \in [a,b]\colon |s - t| < \delta, \forall k = 1 \dots m, |(|\gamma_k'(s) - \gamma_k'(t)) < \varepsilon$ Тогда $|M_{j,k} - m_{j,k}| < \varepsilon$ если $t_j - t_{j-1} < \delta$.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m M_{j,k}^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m m_{j,k}^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^m (M_{j,k} - m_{j,k})^2} < \sqrt{m}\varepsilon.$$

Тогда

$$|\text{п.ч - л.ч}| < \sum_{k=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\sqrt{m}\varepsilon = (b-a)\sqrt{m}\varepsilon$$

■

Следствие:

1. (Длина графика функции)

   Пусть $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}, f \in C^1[a,b], G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда длина графика функции равна: $l(G_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

2. Есть функция $r\colon [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}_+, r \in C^1[\alpha, \beta]$ Тогда можно запараметризовать эту кривую как: $(r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, обозначим за координаты $x(t), y(t)$ соответственно.

   Тогда: $x'(t) = r'(t)\cos t - r(t)\sin t; y'(t) = r'(t)\sin t + r(t)\cos t$

   Значит длину кривой можно вычислить следующим образом: $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$

2 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Замечание. *Прежде чем начать, подумаем что нам вообще надо. Производную можно представлять как линейное приближение функции в какой-либо точке.* $f\colon X \mapsto Y$*, где* X, Y *— линейные, нормированные, полные, пространства над одним полем скаляров(*$\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*).* $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$*. Объясним почему наложены те или иные условия. В одномерье* A *было числом. В общем случае* A *должно быть линейным отображением, поэтому нам хочется чтобы поле скаляров у* X, Y *было одним и тем же. Более того, хочется иметь возможность переходить к пределу, а когда мы переходим к пределу естественно хотеть иметь корректное расстояние, поэтому нам нужна нормированность и полнота.*

2.1 Линейные отобрежения

Определение: X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров. $U\colon X \mapsto Y$ — линейное, если

1. (Аддитивность)
   $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. (Однородность)
   $U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Определение: Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ — пространства над одним полем скаляров. Тогда $U\colon X_1 \times \dots \times X_n \mapsto Y$ — полилинейное, если оно линейно по каждому из аргументов.

Замечание. *Часто скобочки опускаются:* $U(x) = Ux$

Пример:

1. $X = C[-1,1], \delta\colon X \mapsto \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$. Тогда δ — линейное отображение.
2. $X = C[a,b], Y = \mathbb{R}$. Тогда $Uf = \int\limits_a^b f dx$ — линейное отображение.
3. $X = C[a,b], Y = C[a,b]$. Тогда $(Uf)(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$
4. $X = C^1[a,b], Y = C[a,b]$. Тогда $(Df)(x) = f'(x), D\colon X \mapsto Y$ тоже линейное отображение.
5. $X_1 = X_2 = \dots X_n = \mathbb{R} = Y$. Тогда $U(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ — полилинейное отображение.
6. $X_1 = \mathbb{R}^m, X_2 = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}$. Тогда $U(X_1, X_2) = (X_1, X_2)$, где (X_1, X_2) — скалярное произведение, линейное по первой координате.
7. $X_1 = \mathbb{R}^3, X_2 = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^3$. Тогда $U(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 = [x_1, x_2]$, где $[x_1, x_2]$ — линейное отображение, полилинейное отображение.
8. $X_1 = \dots = X_m = \mathbb{R}^m$. Тогда $U(x_1, \dots, x_m) = \det(x_1, \dots, x_m)$ полилинейное отображение.

Теорема (О непрерывности линейного отображения)**:** $U\colon X \mapsto Y$ — линейное, X, Y — линейные, нормированные отображения (далее лно) над одним полем скаляров. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. U — непрерывно
2. U — непрерывно в 0
3. $\exists C\colon \forall x \in X, ||U_x||_Y \le C||x||_x$

Доказательство.

$\square$

1. (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно
2. (2) $\Rightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon \forall x\colon \|x\| \le \delta, \|U_x\| \le \varepsilon$. $x \to \overline{x} = x\frac{\delta}{\|x\|} \Rightarrow \|U_x\overline{x}\| \le \varepsilon$
3. (3) $\Rightarrow$ (1) липшецевость $\Rightarrow$ непрерывное.

$\blacksquare$

Теорема: $U\colon X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto Y$ — полилинейное. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. U — непрерывно
2. U — непрерывно в 0
3. $\exists C\colon \|U(X_1, \ldots, X_n)\| \le C\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$

Замечание.

Определение: $U : X \to Y$ — лно. $\|U\| = \inf\{C \mid \forall x \in X \|U_x\| \le C\|x\|\}$

Замечание. inf *достигается то есть:* $\forall x \in X, \|U_x\| \le \|U\| \cdot \|x\|$

Пример: $U\colon C[a,b] \mapsto C[a,b]$, причём $(Uf)(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Хотим оценить.