Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе № 3

Название: Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода

Дисциплина: Моделирование

Студент ИУ7-65Б Д.В. Сусликов
(Группа) (Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподователь В.М. Градов
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2021

Цель работы:

Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель. Квазилинейное уравнение для функции T(x):

$$\frac{d}{dx}(\lambda(x)\frac{dT}{dx}) - 4k(T)n_p^2\sigma(T^4 - T_0^4) = 0$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} x = 0, -\lambda(T(0))\frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, -\lambda(T(0))\frac{dT}{dx} = \alpha(T(l) - T_0) \end{cases}$$

2. Функции $\lambda(T), k(T)$ заданы в таблице:

T, K	λ, ВТ/(см К)		T, K	k, см^-1
300	1.36*10^-2		293	2.0*10^-2
500	1.63*10^-2		1278	5.0*10^-2
800	1.81*10^-2		1528	7.8*10^-2
1100	1.98*10^-2		1677	1.0*10^-1
2000	2.50*10^-2		2000	1.3*10^-1
2400	2.74*10^-2		2400	2.0*10^-1

3. Разностная схема с разностным краевым условием при x = 0

$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, 1 <= n <= N-1$

$A_n = \frac{\chi_{n-\frac{1}{2}}}{h}$

$C_n = \frac{\chi_{n+\frac{1}{2}}}{h}$

$B_n = A_n + C_n$

$D_n = f_n h$

Система с краевыми условиями решается методом прогонки

Для величин численно вычисляя $\chi_{n+-\frac{1}{2}}$ можно получить различные приближенные выражения, интеграл методом трапеций или методом средних. Для вычислений будет использоваться метод средних:

$\chi_{n+-\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{+-1}}{2}$

Разностный аналог краевого условия при x=0:

$\chi_{\frac{1}{2}} y_0 - \chi_{\frac{1}{2}} y_1 = hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{\frac{1}{2}} + f_0)$

Простая аппроксимация:

$f_{\frac{1}{2}} = \frac{f_0 + f_1}{2}$

Также:

$F_N = \alpha_n (y_N - T_0)$ и

$F_{N-\frac{1}{2}} = \chi_{N-\frac{1}{2}} \frac{y_{N-1} - y_N}{h}$

4. Значения параметров: $n_p = 1.4$

$l = 0.2$ см

$T_0 = 300$ K

$\sigma = 5.688 * 10^-12$ Вт/см^{2}К^4

$F_0 = 100$ Вт/см^2

$\alpha = 0.05$ Вт/(см^2*K)

5. Выход из итераций по температуре и балансу:

$$max|\frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{den}| \le \epsilon_1, n = 0..N$$

и

$$max|\frac{f_1^s - f_2^s}{f_1^s}| \le \epsilon_2$$

где

$$f_1 = F_0 - \alpha(T(l) - T_0) \text{и} f_2 4n_p^2 \sigma \int_0^l k(x)(T^4 - T_0^4)$$

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы).

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле T(x) в плоском слое с внутренними стоками тепловой энергии. Можно представить, что это стенка из полупрозрачного материала, например, кварца или сапфира, нагружаемая тепловым потоком на одной из поверхностей (у нас - слева). Другая поверхность (справа) охлаждается потоком воздуха, температура которого равна T0. Например, данной схеме удовлетворяет цилиндрическая оболочка, ограничивающая разряд в газе, т.к. при больших диаметрах цилиндра стенку можно считать плоской. При высоких температурах раскаленный слой начинает объемно излучать, что описывает второе слагаемое в (1) (закон Кирхгофа). Зависимость от температуры излучательной способности материала очень резкая. При низких температурах стенка излучает очень слабо, второе слагаемое в уравнении (1) практически отсутствует. Функции $\lambda(T), k(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности и оптического поглощения материала стенки.

Результаты

1. Представить разностный аналог краевого условия при x=l и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом.

Пусть $F = -\lambda(T)\frac{dT}{dx}$

Тогда

$\frac{dF}{dx} + f(T) = 0$, где $f(T) = -4k(T)n_p^2\sigma(T^4 - T_0^4)$

Проинтегрируем на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$, тогда

$$-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_n} \frac{dF}{dx}dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_n} f(x)dx = 0$$

Применим метод трапеций и получим:

$$-(F_N - F_{N-\frac{1}{2}}) + \frac{h}{4}(f_N + f_{N-\frac{1}{2}}) = 0$$

Используя $F_N = \alpha_n(y_N - T_0)$ и $F_{N-\frac{1}{2}} = \chi_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1}-y_N}{h}$ получим:

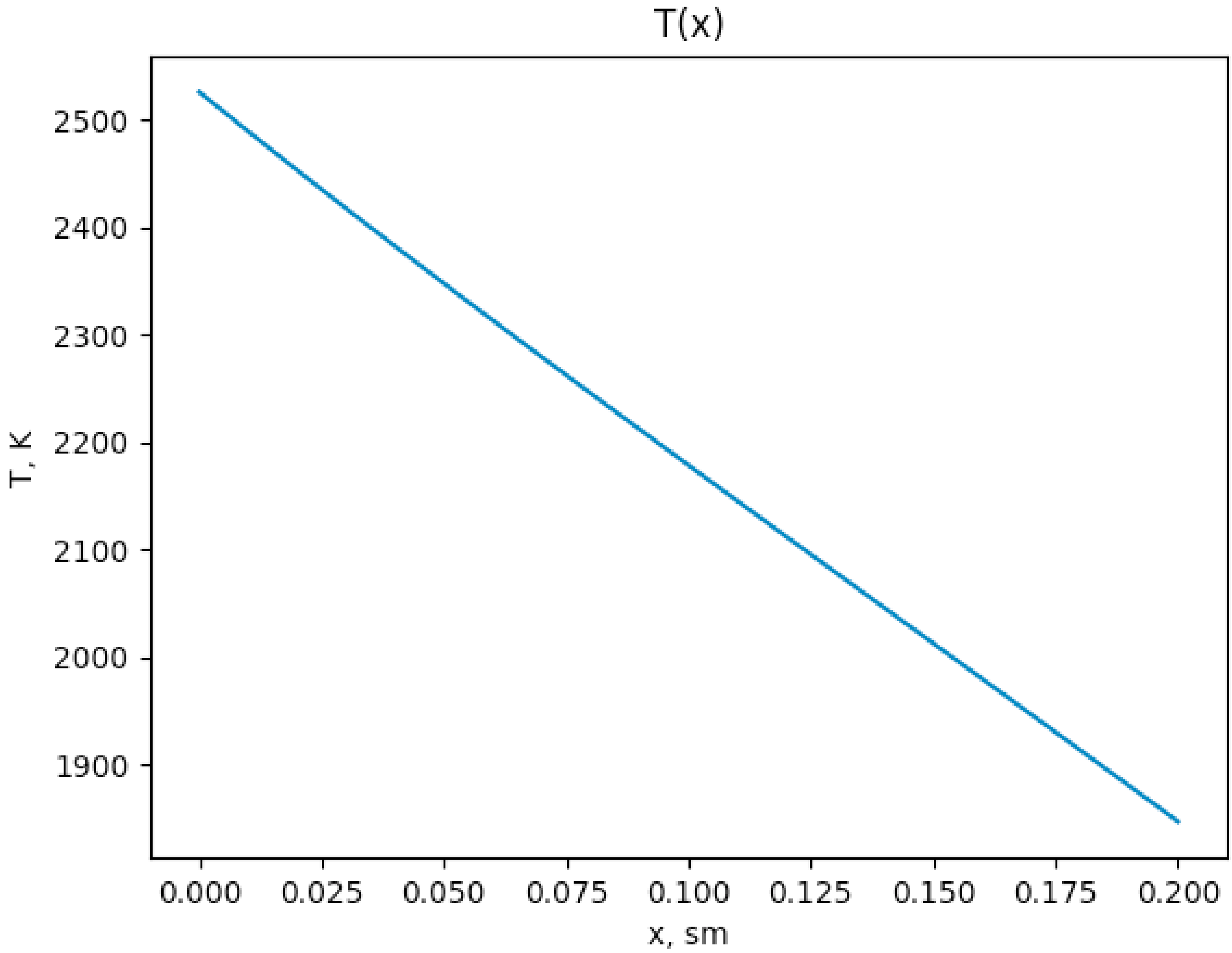
$$-(\alpha(y_N - T_0) - \chi_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1} - y_N}{h}) + \frac{h}{4}(f_N + f_{N-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$-h\alpha(y_N - T_0) + \chi_{N-\frac{1}{2}}(y_{N-1} - y_N) + \frac{h^2}{4}(f_N + f_{N-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$-\chi_{N-\frac{1}{2}} y_{N-1} + (h\alpha + \chi_{N-\frac{1}{2}}) y_N = \frac{h^2}{4}(f_N + f_{N-\frac{1}{2}}) + h\alpha T_0$$

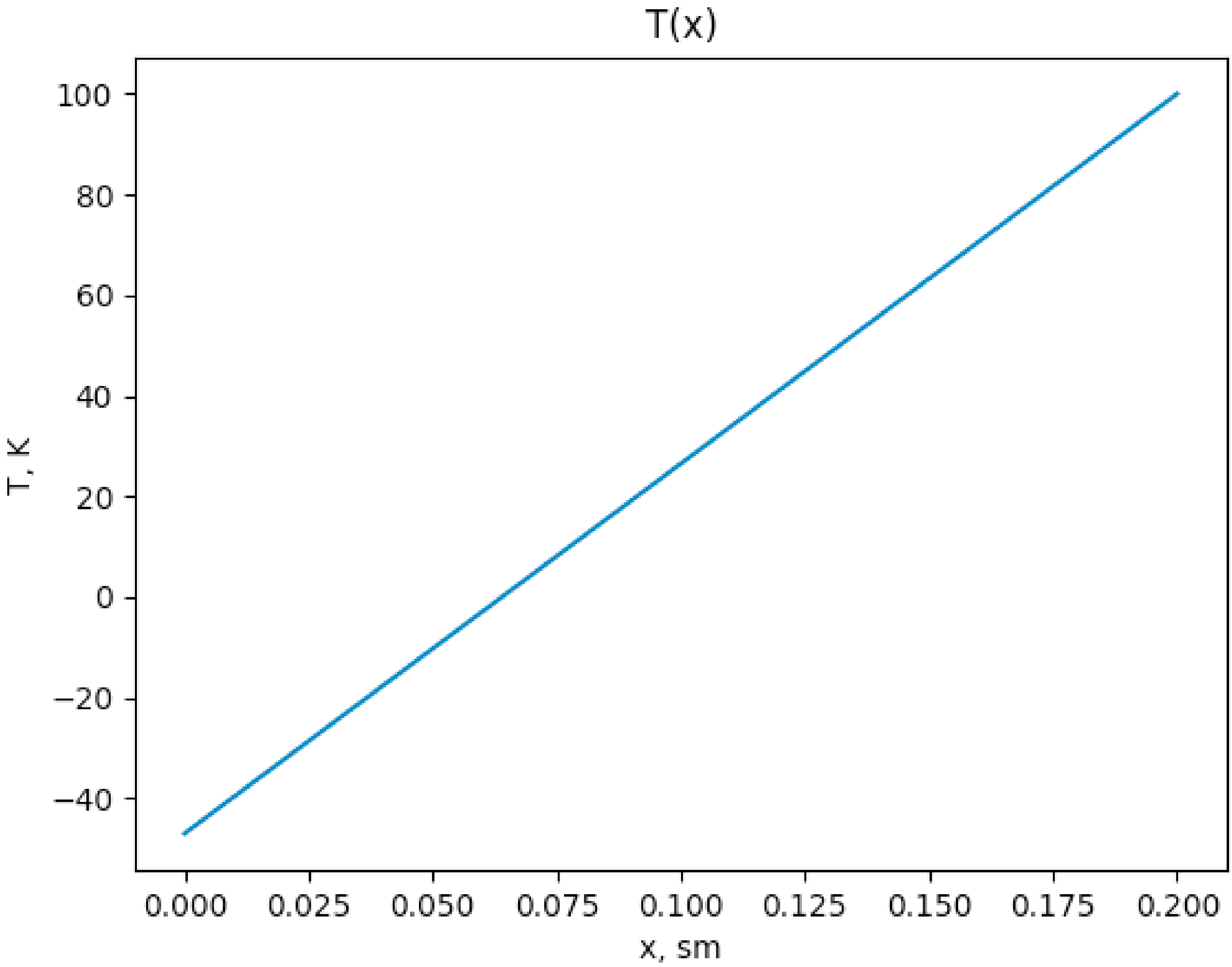
2.График зависимости температуры T(x) от координаты x при заданных выше параметрах.

Выяснить, как сильно зависят результаты расчета T(x) и необходимое для этого количество итераций от начального распределения температуры и шага сетки



3. График зависимости T(x) при $F_0 = -10$ Вт/см2.

Справка. При отрицательном тепловом потоке слева идет съем тепла, поэтому производная $T'(x)$ должна быть положительной.



4. График зависимости T(x) при увеличенных значениях $\alpha(x)$ (например, в 3 раза). Сравнить с п.2.

Справка. При увеличении теплосъема и неизменном потоке F_0 уровень температур T(x) должен снижаться, а градиент увеличиваться.

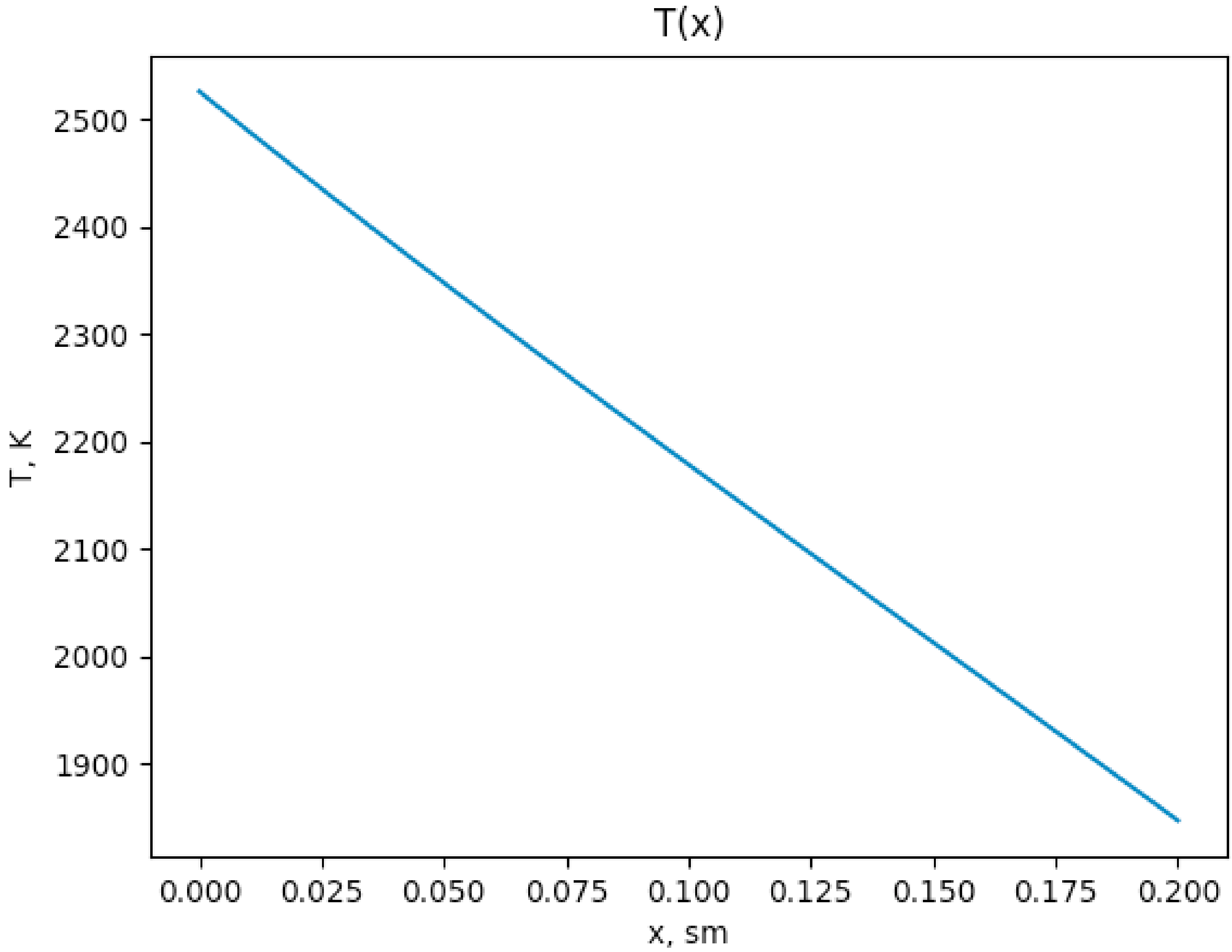


График при $\alpha = 0.05$

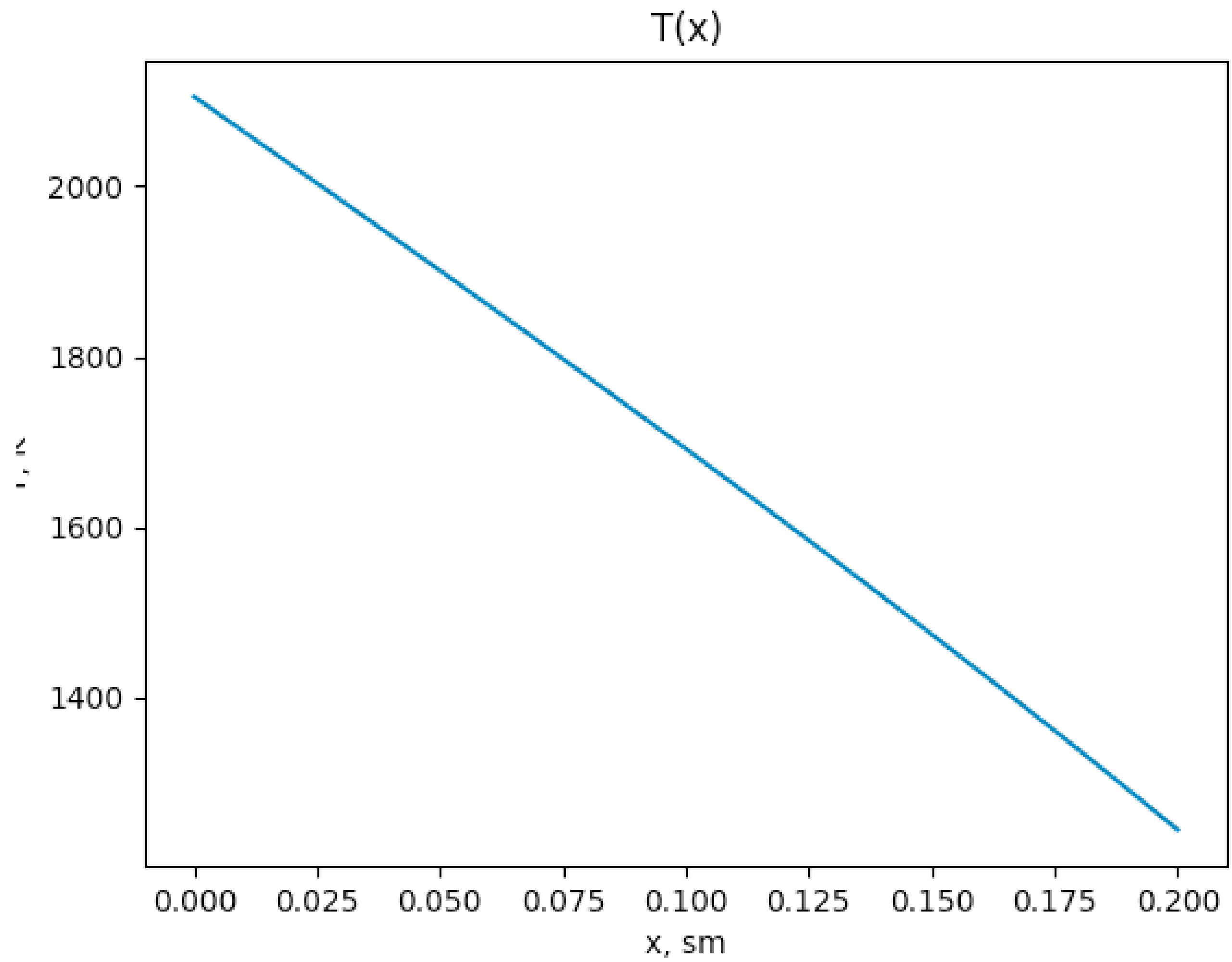


График при $\alpha = 0.1$

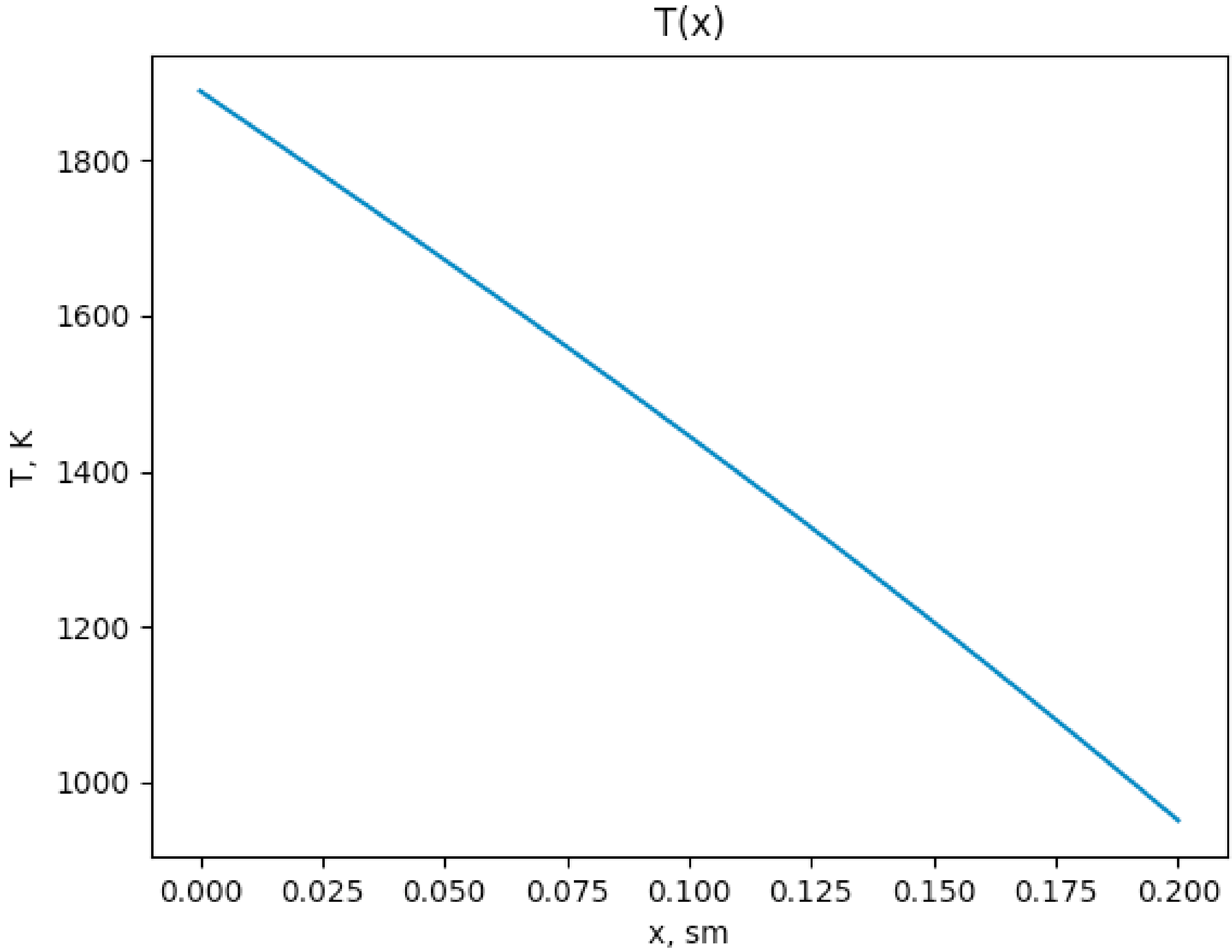
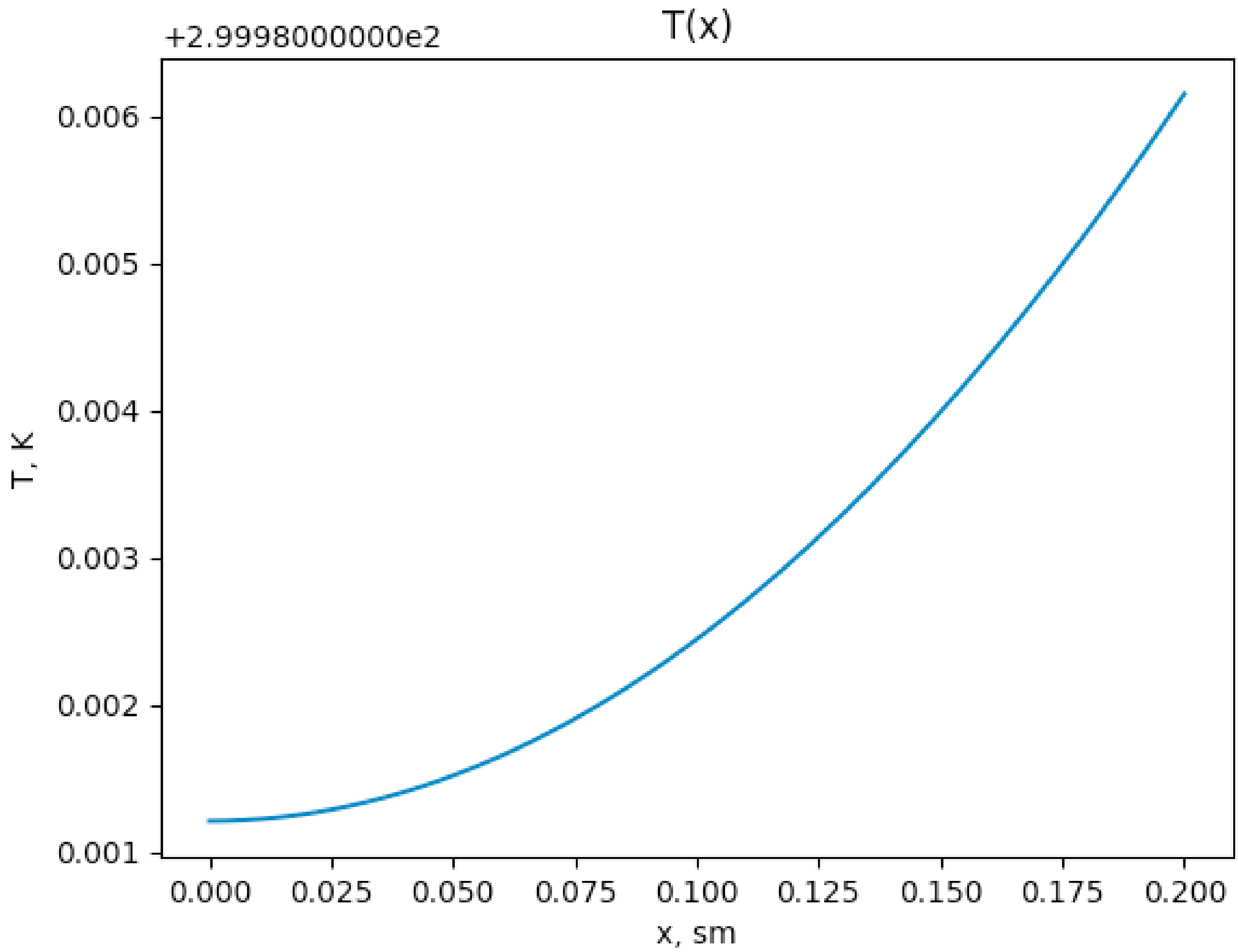


График при $\alpha = 0.15$

5. График зависимости T(x) при $F_0 = 0$.

Справка. В данных условиях тепловое нагружение отсутствует, причин для нагрева нет, температура стержня должна быть равна температуре окружающей среды T_0 (разумеется с некоторой погрешностью, определяемой приближенным характером вычислений).



6. Для указанного в задании исходного набора параметров привести данные по балансу энергии, т.е. значения величин

$$f_1 = F_0 - \alpha(T(l) - T_0) \text{и} f_2 4 n_p^2 \sigma \int_0^l k(x)(T^4 - T_0^4)$$

Каковы использованные в работе значения точности выхода из итераций ϵ_1(по темпера-туре) и ϵ_2(по балансу энергии)?

$f1 = 22.64653119693557 f2 = 31.035424399831737$

Ответы на вопросы:

1) Какие способы тестирования программы можно предложить?

   Результаты программы должны соответствовать законам физики. То есть при изменении начальных параметров результаты работы программы должны быть корректными. Например, при $F_0 = 0$ температура должна быть равна температуре окружающей среды T_0, а при отрицательном тепловом потоке слева идет съем тепла, поэтому производная $T'(x)$ должна быть положительной.

2) Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$.

   $x = l, -k(l)\dfrac{dT}{dx} = a_N(T(l) - T_0) + \phi(T)$

   где ϕ(T) - заданная функция. Далее производную аппроксимируем односторонней разностью.

   Аппроксимация производной:

   $\dfrac{dT}{dx} \approx \dfrac{T_{i+1} - T_i}{h}$

   Подстановка:

   $-k_N\dfrac{T_N - T_{N-1}}{h} = a_N(T_N - T_0) + \phi(T_N)$

   Домножим на h:

   $-k_N T_N + k_N T_{N-1} = h a_N T_N - h a_N T_0 + h\phi(T_N)$

   $k_N T_{N-1} - (k_N + a_N h)T_N = \phi(T_N)h - a_N h T_0$

Листинг:

```python
def interpolate(table_x, table_y, x):
    index_flag = False
    x1 = 0
    x2 = 0
    y1 = 0
    y2 = 0
    y = 0
    for i in range(len(table_x) - 1):
        if (table_x[i] <= x and table_x[i + 1] >= x):
            y1 = table_y[i]
            y2 = table_y[i + 1]
            x1 = table_x[i]
            x2 = table_x[i + 1]
            index_flag = True
    if (index_flag):
        y = y1 + ((x - x1) / (x2 - x1)) * (y2 - y1)
    else:
        if (x < table_x[0]):
            y = table_y[0]
        if (x > table_x[-1]):
            y = table_y[-1]

    return y

def integrand_func(i):
    return k(i) * (T[i] ** 4 - T0 ** 4)

def integr_simpson():
    result = 0
    for i in range(N // 2):
        result += h / 3 * (integrand_func(2 * i) + \
        4 * integrand_func(2 * i + 1) + integrand_func(2 * (i + 1)))
    return result

```

```python
def lamb(n):
    return interpolate(T_lamb[0], T_lamb[1], T_relax[n])

def k(n):
    return interpolate(T_k[0], T_k[1], T_relax[n])

def f(n):
    return -4 * k(n) * np * np * sigma * (T_relax[n] ** 4 - T0 ** 4)

def iteration_exit_temp():
    i = 0
    while i < (N + 1):
        x = abs((T[i] - T_relax[i]) / T[i])
        if x > eps_temp:
            return True
        i += 1

    return False

def iteration_exit_energy_balance():
    i = 0
    while i < (N + 1):
        f1 = F0 - alpha * (T[N] - T0)
        f2 = 4 * np * np * sigma * integr_simpson()
        x = abs((f1 - f2) / f1)
        if x > eps_balance:
            return True
        i += 1

    return False

def calculate():
    update_vars()
    flag = True

```

```python
    while (iteration_exit_temp() and iteration_exit_energy_balance() or flag):
        flag = False
        for i in range(N+1):
            T_relax[i] = T_relax[i] + coef_relax * (T[i] - T_relax[i])

    K0 = (lamb(0) + lamb(1)) / 2
    M0 = -K0
    P0 = h * F0 + h * h / 4 * (3 * f(0) + f(1)) / 2

    KN = -(lamb(N - 1) + lamb(N)) / 2
    MN = h * alpha - KN
    PN = h * alpha * T0 + h * h /4 * (3 * f(N) + f(N - 1)) / 2

    eps[1] = -M0 / K0
    eta[1] = P0 / K0

    for i in range(2, N+1):
        eps[i] = (lamb(i - 1) + lamb(i)) \
        / (((lamb(i - 1) + lamb(i - 2)) + (lamb(i - 1) + lamb(i)) - \
        (lamb(i - 1) + lamb(i - 2))) * eps[i - 1])

        eta[i] = (f(i - 1) * h + (lamb(i - 1) + lamb(i - 2)) / 2 / h * eta[i - 1]) \
        / (((lamb(i - 1) + lamb(i - 2)) + (lamb(i - 1) + lamb(i)) \
        - (lamb(i - 1) + lamb(i - 2))) / 2 / h * eps[i - 1])

    T[N] = (PN - KN * eta[N]) / (MN + KN * eps[N])
    for i in range(N-1, -1, -1):
        T[i] = eps[i + 1] * T[i + 1] + eta[i + 1]

    graph['x'] = [i * h for i in range(N + 1)]
    graph['T'] = T.copy()
```

```
    f1 = F0 - alpha * (T[N] - T0)
    f2 = 4 * np * np * sigma * integr_simpson()
```