SLAM理论学习

旋转平移矩阵

向量的表示方法（线性组合）

首先，向量的表示有三种方式：

1. 带有箭头的有向线段。
2. 符号表示，例如

$$\vec{v}、\vec{x} \tag{1}$$

3. 矩阵列向量表示，例如

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \tag{2}$$

以该为基础，进行具体的分析。在这个空间的任何一点(向量)，都可以由这组基以线性组合的方式得到。

比如在二维的 XY 平面中，其实下面就是组基：

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{3}$$

而向量

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\text{其实就是线性组合：} \tag{4}$$

$$v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2=v_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+v_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \tag{5}$$

线性变换

> **线性变换**：如果矩阵 A 左乘一个向量 $\vec{v}$ ，就说成矩阵 A 对向量 v
> 进行了线性变换。直观上的感觉改变了向量 $\vec{v}$的坐标。
>
> **矩阵乘法**的意义，其实就是将一个向量，经过某个矩阵(函数)之后，输出为另外一个向量，就是说，变换就意味则，将原来的向量变换到另外一个地方。而线性变换，也就是在变换的基础上，再加一个条件，线性的，也就是原来的一条直线，在变换了之后还应该是直线。

核心思想：

任何一个空间向量的一点，都是由向量基线性变换而来。

举例：

假设存在一组基底

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \tag{6}$$

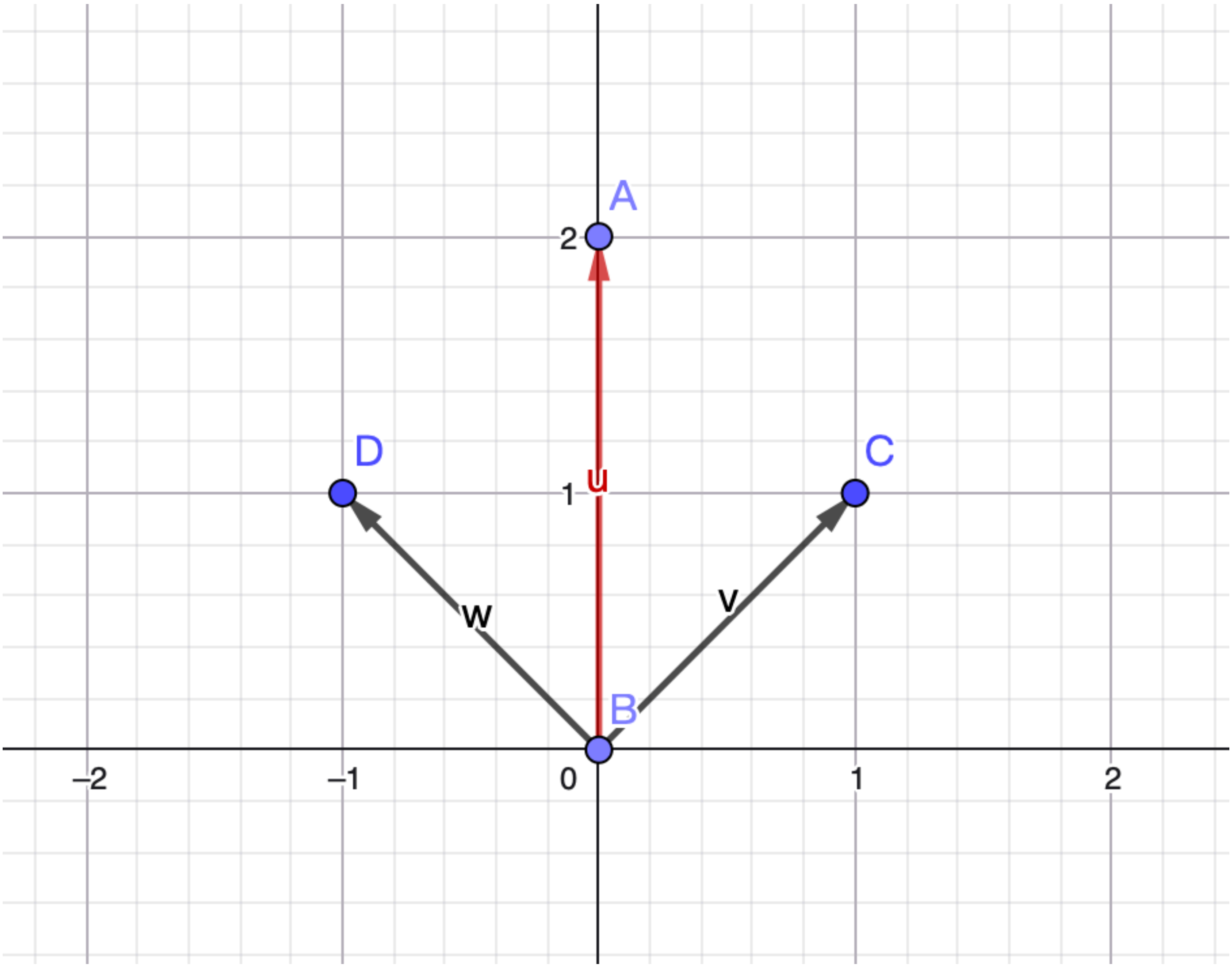
存在向量

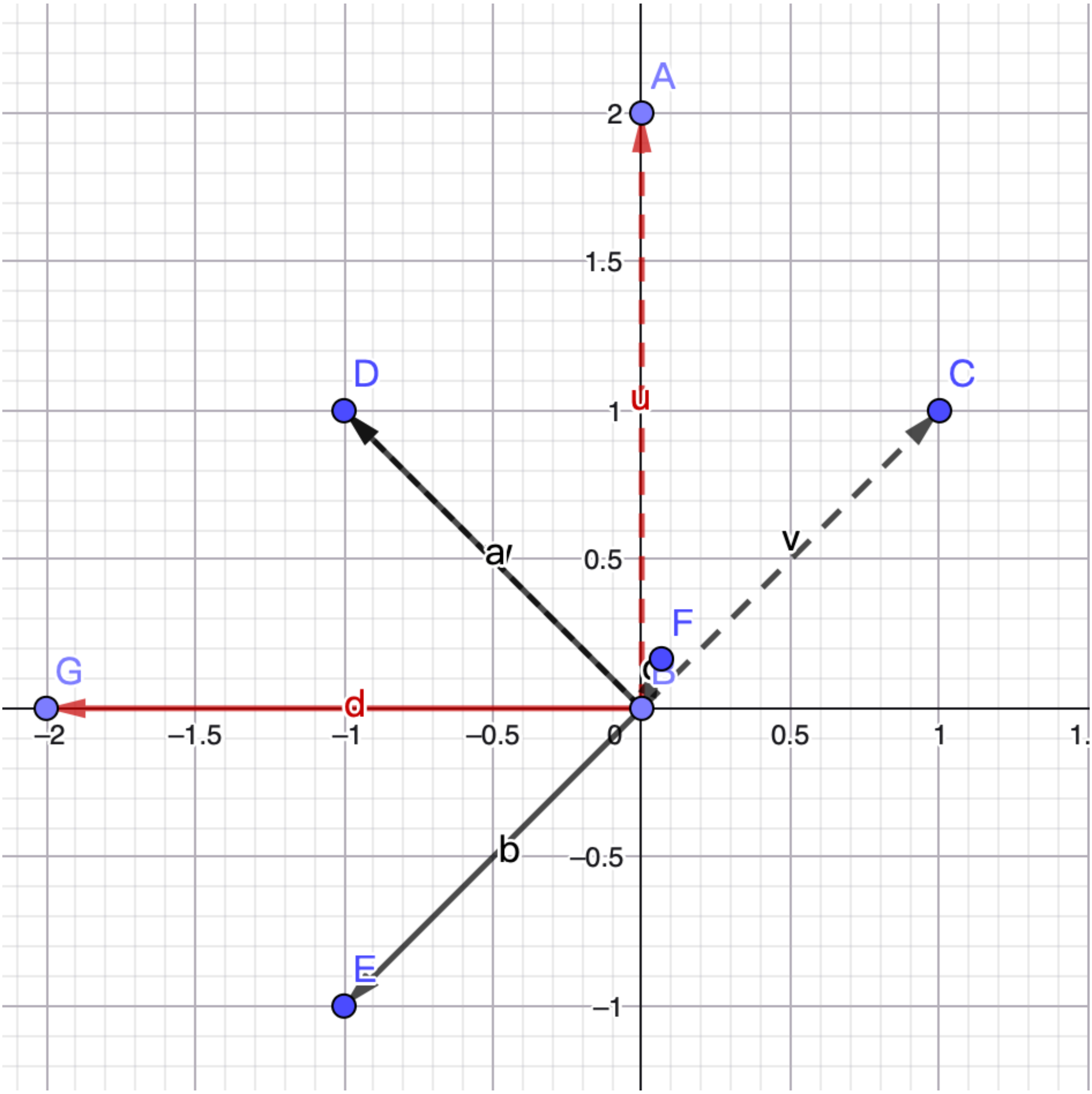
$$\vec{v} = 1\vec{e1} + 1\vec{e2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

变换后的向量为

$$\vec{v}' = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{（逆时针旋转90度）} \tag{9}$$





$$\vec{v}' = 1\vec{e}_1' + 1\vec{e}_2' = 1(A\vec{e}_1) + 1(A\vec{e}_2) = 1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} \tag{10}$$

变换作用在基底的时候，系数是不会发生改变，也就是这个向量关于基的线性组合方式是没有变化的，改变的是基底。

> 关注基底变化前后就能够掌握空间的变化

旋转矩阵（三维空间的旋转）

$$\vec{a}' = [\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3}]\begin{bmatrix}a1\\a2\\a3\end{bmatrix} = a1\vec{e1} + a2\vec{e2} + a3\vec{e3} \tag{11}$$

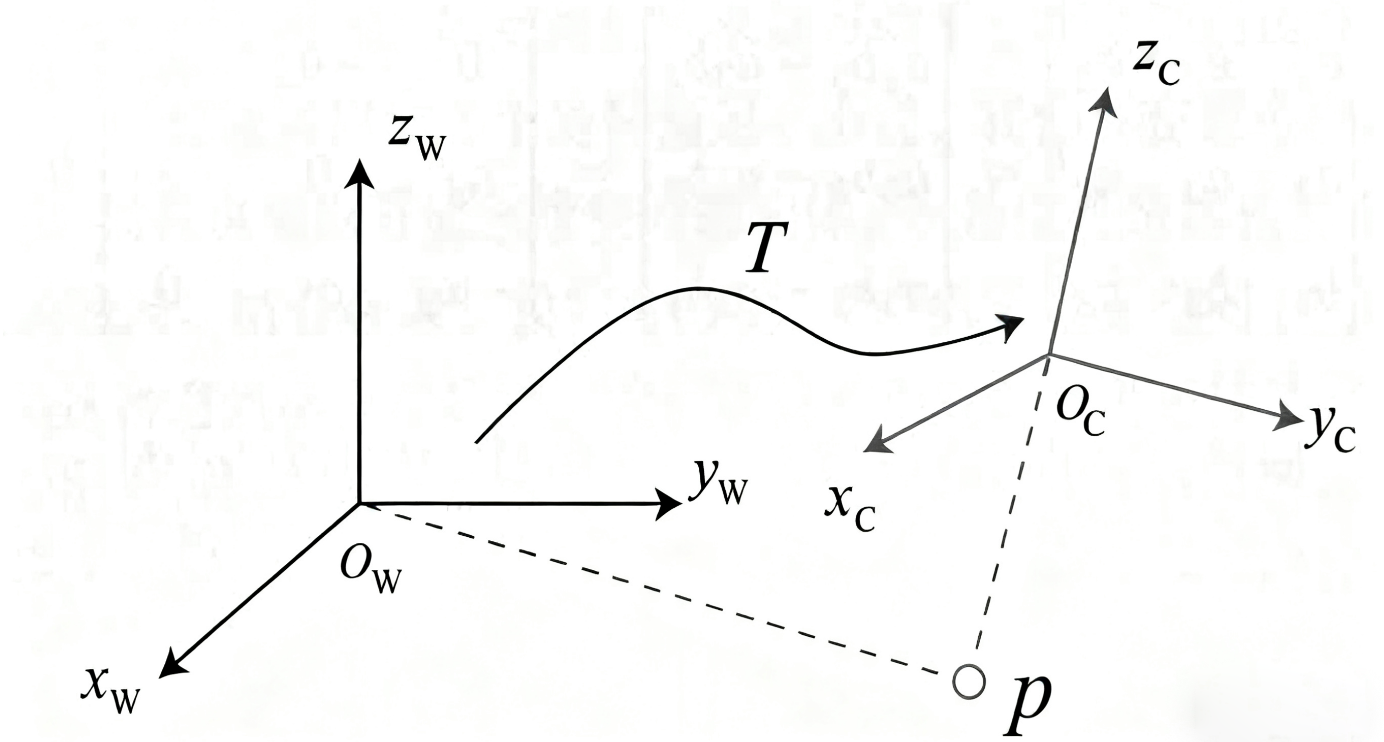
$$\begin{gathered}(a_1, a_2, a_3)^T \\ \text{表示}\vec{a}\text{在此}\vec{e}\text{基坐标下的坐标}\end{gathered} \tag{12}$$

运用到SLAM的运动上的时候，要完成一个坐标的变换。常见的运动时坐标转换是设定一个**世界坐标系**（惯性坐标系），以此为基准，例如图中的

$$x_{\mathrm{W}}, y_{\mathrm{W}}, z_{\mathrm{W}} \tag{13}$$

相机或机器人是一个移动坐标系, 例如图中

$$x_{\mathrm{c}}, y_{\mathrm{c}}, z_{\mathrm{c}} \tag{14}$$



在变化过程中，先得到该**p**点针对机器人/相机坐标系的坐标值, 再根据机器人位姿变换到世界坐标系中。需要进行一个旋转变换，可以用一个矩阵 **T** 来描述它。

> 刚体运动：两个坐标系之间的运动由一个旋转加上一个平移组成, 这种运动称为刚体运动。体运动过程中, 同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角都不会发生变化。变化的仅仅是坐标系的位置。

欧式变换

> 欧式变换就是对不同坐标系的转换，欧氏变换由旋转和平移组成。

设某个单位正交基

$$[\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3}]\text{经过一次旋转后变成了}\left[\vec{e1}', \vec{e2}', \vec{e3}'\right]\text{, 那么, 对于同一个向量}\vec{a}\text{,} \tag{15}$$

$$\text{它在两个坐标系下的坐标为}[a1, a2, a3]^T\text{和}\left[a_1', a_2', a_3'\right]^{\mathrm{T}}\text{，根据坐标的定义有} \tag{16}$$

$$[\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3}]\begin{bmatrix}\vec{a1} \\ \vec{a2} \\ \vec{a3}\end{bmatrix} = \left[\vec{e1}', \vec{e2}', \vec{e3}'\right]\begin{bmatrix}\vec{a1}' \\ \vec{a2}' \\ \vec{a3}'\end{bmatrix} \tag{17}$$

左右两边同时左乘单位矢量

$$\begin{bmatrix} \vec{e1}^T \\ \vec{e2}^T \\ \vec{e3}^T \end{bmatrix} \tag{18}$$

，所以下式：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \quad = \quad R\vec{a} \tag{19}$$

我们把中间的矩阵拿出来，定义一个矩阵 (R)。这个矩阵由两个基之间的内积组成，刻画了旋转前后一个向量的坐标变换关系。只要旋转是一样的，这个矩阵就是一样的。可以说，矩阵 (R) 描述了旋转本身。因此，旋转矩阵 (R) 可以用来将一个坐标系的向量表示转换到另一个坐标系。

> 欧式变换中的旋转矩阵是一个行列式为 1 的正交矩阵，反之, 行列式 为 1 的正交矩阵也是一个旋转矩阵

$$SO(n) = R \in R^n \times n | RR^T = E, det(R) = 1 \tag{20}$$

SO(n) 是特殊正交群。这个集合由 n 维空间的旋转矩阵组成，特别地，SO(3) 就是指三维空间的旋转。通过旋转矩阵，我们可以直接讨论两个坐标系之间的旋转变换，而不用再从基向量平移谈起。由于旋转矩阵为正交矩阵，它的逆（即转置）描述了一个相反的旋转。按照上面的定义方式，有：

$$\vec{a}' = R^{-1}\vec{a} = R^T\vec{a} \tag{21}$$

显然 RT表示一个相反的旋转（正交矩阵性质）

矩阵平移

欧氏变换中, 除了旋转还有平移。考虑世界坐标系中的向量 a⃗ ， 经过一次旋转(用 R描述)和一次平移 t 后, 得到了 a‘ ⃗ ，那么把旋转和平移合到一起, 有

$$\vec{a'} = R\vec{a} + t \tag{22}$$

t 称为平移向量。相比于旋转, 平移部分只需把平移向量加到旋转之后的坐标上。

$$a1 = R_{12}a_2 + t_{12} \tag{23}$$

R12 是指 "把坐标系 2 的向量变换到坐标系 1" 中，t12表示"从 1 到 2 的向量"，在坐标系 1 下取的坐标**。

欧式变换与齐次坐标

式 (22) 完整地表达了欧氏空间的旋转与平移，不过还存在在一个小问题：这里的变换关系不是一个线性关系。假设我们进行了两次变换

$$(R_1, t_1)\text{和}(R_2, t_2)\text{：} [\mathbf{b} = R_1\mathbf{a} + t_1, \quad \mathbf{c} = R_2\mathbf{b} + t_2] \tag{24}$$

$$\text{那么，从}(\mathbf{a})\text{到}(\mathbf{c})\text{的变换为：} [\mathbf{c} = R_2(R_1\mathbf{a} + t_1) + t_2] \tag{25}$$

引入齐次坐标后，得到

$$\begin{bmatrix} \vec{a}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \quad T \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

在一个三维向量的末尾添加 1, 将其变成了四维向量, 称为齐次坐 标。对于这个四维向量, 我们可以把旋转和平移写在一个矩阵里, 使得整个关系变成线性关系。 该式中, 矩阵 T称为变换矩阵

$$\tilde{b} = T_1 \tilde{a}, \quad \tilde{c} = T_2 \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = T_2 T_1 \tilde{a} \text{（~齐次方程）} \tag{27}$$

b=Ta也可以默认齐次方程，关于变换矩阵 T , 它具有比较特别的结构: 左上角为旋转矩阵, 右侧为平移向量, 左下角为 0 向量, 右下角为 1。这种矩阵又称为特殊欧氏群 (Special Euclidean Group):

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{28}$$

与 SO(3) 一样, 求解该矩阵的逆表示一个反向的变换:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

之所以平移变换多了一个-Rt

$$\begin{gathered} \text{假设有一个点}p\text{，在经过刚体变换后变为}p\prime\text{：} p\prime = Tp = Rp + t \text{ 如果我们知道}p\prime\text{而想要找到原始点}p, \\ \text{我们需要解出逆变换的公式} \\ \text{先逆转平移：我们从}p\prime\text{中减去平移向量}t, \text{得到：} p\prime - t \\ \text{再逆转旋转：因为旋转是一个线性变换，而}R\text{是正交矩阵，其逆矩阵是}R^T \\ p = R^T(p' - t), \text{逆变换的平移部分应为} -R^T t \end{gathered} \tag{30}$$

> ***T*12 这样的写法来表示从 2 到 1 的变换**