Indice

Prefazione

Versione ε

Questa è un'introduzione alla logica matematica (dove per *logica matematica* si intende per il momento principalmente *teoria dei modelli*). Manca materiale che aggiungerò nelle prossime versioni. Gli ultimi capitoli sono lacunosi e confusionari, anche a questo spero di poter porre rimedio il prima possibile.

I primi 7 capitoli coprono un programma da 6 cfu al terz'anno della Laurea Triennale. Gli ultimi capitoli coprono un programma da 6 cfu al prim'anno della Laurea Magistrale.

Ci sono molti *esercizi* di diversa difficoltà. Tranne i più ovvi e i più noiosi tutti o quasi sono stati assegnati e risolti da autentici studenti e sono dunque *fattibili* (si tenga presente che gli studenti di Torino sono generalmente abbastanza bravi).

È mia intenzione aggiornare periodicamente questi appunti e *mai* dichiarare una versione *definitiva*. (Perché *definitivo* è sinonimo di *dismesso*.) Non esitate a contattarmi per suggerimenti, dubbi, o segnalazione di errori.

Torino, 13 settembre 2014

Alcune scelte espositive che sento il bisogno di commentare.

1. Amalgami di strutture pervadono i capitoli centrali. Nei capitoli 6 e 7 ho introdotto la maggior parte delle strutture notevoli (ordini lineari densi, grafi aleatori, campi algebricamente chiusi, ecc.) come **modelli ricchi** (cioè omogenei-universali). Anche la saturazione è discussa in questo modo, vedi capitolo 8.

   Ho però intenzionalmente evitato di usare il termine **amalgami di Fraïssé**. La teoria degli amalgami Fraïssé è da un lato troppo astratta, dall'altro non sufficientemente generale. Per esempio, la terminologia non è adatta per trattare linguaggi funzionali, strutture di cardinalità arbitraria, morfismi diversi dalle immersioni parziali.

2. L'eliminazione dei quantificatori nei **campi algebraicamente chiusi** e relativa dimostrazione del Nullstellensatz (capitolo 7) è discussa in modo forse un po' troppo pedante, ma le dimostrazioni che si leggono comunemente nei testi lasciano troppo all'immaginazione del lettore.

3. La dimostrazione del teorema di **omissione dei tipi** si discosta parecchio da quella usuale. Le motivazioni le ho riportate nell'introduzione del capitolo 11. Se un giorno aggiungerò un capitolo sulla logica continua, questo approccio tornerà utile.

4. Lo spazio dei tipi **$S_x(A)$**, nella mia percezione, è un oggetto troppo sintattico. Quando possibile, preferisco parlare di $\mathcal{U}^{|x|}$ che tratto come uno spazio topologico compatto con la topologia indotta da $L_x(A)$ e identifico con $\mathcal{U}^{|x|}/{\equiv_A}$.

5. Per me gli **immaginari** sono semplicemente insiemi definibili (capitoli 12 e 13). Che ragione c'è per pensarli come classi di equivalenza? Lo scopo è avere un nome canonico per ogni insieme definibile, e cosa c'è di più canonico dell'insieme stesso? Quindi $\mathcal{U}^{\text{eq}}$ può essere più semplicemente immaginato come una particolare espansione al secondo ordine.

6. Quando possibile, sostituisco **tipi globali** con sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ esternamente definibili. Quindi invece che parlare della **definibilità dei tipi** preferisco parlare della **definibilità** (interna) degli **insiemi esternamente definibili**. (N.B. Gli insiemi esternamente definibili sono chiamati anche insiemi approssimabili.)

7. Per dimostrare l'eliminazione dei quantificatori dell'**espansione di Shelah** invece usare tipi con definizioni *oneste*, uso insiemi con approssimazioni dall'interno (definiti nel paragrafo 16.3). La dimostrazione è comunque la stessa di Chernikov-Simon.

Alcune notazioni e termini non comuni.

Ho cercato di usare la notazione e la terminologia più comune, quando non mi è stato possibile l'ho fatto notare. Per chi salta le prime 50 pagine un breve sommario della notazione meno ovvia:

1. **$L(A)$** è l'insieme delle formule del linguaggio L con parametri in A. Il simbolo **L** è usato anche per denotare l'insieme delle formule pure. Scrivo **$L_z(A)$** se voglio limitare le variabili a quelle della tupla z. Quindi **$L_\varnothing(A)$** è l'insieme degli enunciati a parametri in A.

2. **L_{at}** è l'insieme delle formule atomiche, **$L_{\text{at}^\pm}$** è l'insieme delle formule atomiche e negate atomiche, **L_{qf}** è l'insieme delle formule senza quantificatori.

3. **$\text{Th}_{\text{at}^\pm}(M/A)$** è l'insieme degli enunciati in $L_{\text{at}^\pm}(A)$ veri in M. Questo si chiama anche **diagramma** di $\langle A\rangle_M$, ovvero della sottostruttura di M generata da A. Anche, $\text{Th}_{\text{at}^\pm}(M)$ è chiamato la **caratteristica** di M.

Capitolo 1

Strutture, termini, sottostrutture

Questo capitolo comincia con la definizione di struttura e termina con quella di sottostruttura. Prima introdurremo la nozione di linguaggio poi discuteremo la sintassi e la semantica dei termini (un concetto che generalizza a strutture arbitrarie quello dei polinomi negli anelli commutativi).

1.1 I linguaggi del prim'ordine

Un **linguaggio (del prim'ordine)** consiste di:

- Un insieme L che è unione di due insiemi disgiunti $\boldsymbol{L_{\mathrm{rel}}}$ e $\boldsymbol{L_{\mathrm{fun}}}$. Gli elementi di L_{rel} sono chiamati **simboli di relazione**, gli elementi di L_{fun} si chiamano **simboli di funzione**.
- Una funzione $\mathbf{Ar} : L \to \omega$ detta **arietà** che assegna ad ogni elemento del linguaggio un numero naturale non negativo.

Spesso ci riferiremo al linguaggio nominando semplicemente l'insieme L. (Ma avvertiamo fin da subito il lettore che più avanti lo stesso simbolo indicherà anche l'insieme delle formule del linguaggio.)

Tipicamente useremo il simbolo r per denotare un generico predicato ed il simbolo f per denotare un generico simbolo di funzione. Useremo dire che f è un simbolo di **funzione unaria**, o **binaria**, **ternaria**,...,***n*-aria**, ecc., per dire che il valore di $\mathrm{Ar}(f)$ è $1, 2, 3, \ldots, n$, ecc. Similmente per le relazioni. I simboli di funzione 0-arie si chiamano anche **costanti**. Qualche autore usa una categoria apposita per le costanti, ma considerarle come simboli di funzione 0-arie compatta la notazione.

Spesso per comodità denoteremo gli elementi del linguaggio con simboli che suggeriscono un significato. Ribadiamo però che gli elementi di L sono oggetti qualsiasi, conta solo la loro arietà. Sarebbe legittimo prendere come L un sottoinsieme dei numeri naturali, o addirittura dei numeri reali. Non serve che L sia finito e neppure numerabile.

Useremo il termine **segnatura** come sinonimo di *linguaggio*. In letteratura occorre anche il termine **tipo di similarità**. La specificazione del *prim'ordine* verrà spesso omessa.

1.2 Le strutture del prim'ordine

Una **struttura (del prim'ordine)** M di segnatura L consiste di:

- Un insieme, detto **dominio**, o **supporto**, o anche **universo** della struttura, che denoteremo con lo stesso simbolo M.
- Una funzione che assegna ad ogni simbolo per relazione r una relazione $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{M}} \subseteq M^{\mathrm{Ar}(r)}$. Questa relazione si chiama l'**interpretazione di $\boldsymbol{r}$ in $\boldsymbol{M}$**. E assegna ad ogni simbolo per funzione f una funzione $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{M}} : M^{\mathrm{Ar}(f)} \to M$. La funzione f^M si chiama **interpretazione di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{M}$**.

Serve chiarire il significato che daremo alle funzioni e alle relazioni 0-arie. Questo è puramente convenzionale. Per definizione poniamo $M^0 = \{\varnothing\}$. Una funzione 0-aria è dunque una funzione che mappa l'unico elemento di M^0 in un qualche elemento di M. Interpretare un simbolo di funzione zero-aria corrisponde quindi a scegliere un elemento del dominio. Se c è un simbolo di funzione 0-aria scriveremo c^M invece di $c^M(\varnothing)$. I simboli di funzioni 0-arie vengono detti **costanti**.

Un predicato 0-ario invece ha ben poco significato: ha solo due possibili interpretazioni, $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$, e non ne faremo mai uso.

A volte il termine **modello** viene usato al posto di struttura (altre volte, ma ben più avanti, al termine modello attribuiremo un significato più ristretto).

1.1 Esempio Il **linguaggio dei gruppi additivi** contiene i seguenti tre simboli di funzione:

- una costante (ovvero funzione di arietà 0): 0
- un simbolo di funzione unaria (ovvero arietà 1): $-$
- un simbolo di funzione binaria (ovvero arietà 2): $+$

Il **linguaggio dei gruppi moltiplicativi** contiene invece i simboli:

- una costante (ovvero funzione di arietà 0): 1
- un simbolo di funzione unaria (ovvero arietà 1): $^{-1}$
- un simbolo di funzione binaria (ovvero arietà 2): $\cdot$

Una struttura nel linguaggio dei gruppi additivi consiste di un insieme M, un elemento 0^M di M, una funzione unaria $-^M$, e una funzione binaria $+^M$. Analogamente per strutture con la segnatura dei gruppi moltiplicativi. Infine il **linguaggio degli anelli (unitari)** estende quello dei gruppi additivi con i seguenti simboli di funzione:

- la costante: 1
- il simbolo di funzione binaria: $\cdot$

Il **linguaggio degli anelli ordinati** estende quello degli anelli con

- un predicato binario: $<$

Sottolineiamo che per il momento ci stiamo limitando a descrivere la sintassi quindi gli unici vincoli che abbiamo sull'interpretazione dei simboli è dato dall'arietà e dal fatto che siano funzioni totali.

1.2 Esempio La scelta del linguaggio degli spazi vettoriali è meno ovvia delle precedenti. Potremo giustificare la scelta solo nel paragrafo 1.7 osservando che questo è il linguaggio che fa coincidere le sottostrutture con i sottospazi vettoriali.

Sia K un campo. Il **linguaggio degli spazi vettoriali su K**, L_K, estende quello dei gruppi additivi con un simbolo di funzione unaria per ogni $k \in K$. Ricordiamo che spazio vettoriale su K è un gruppo abeliano M su cui K agisce. L'azione di K su M è una funzione $\mu : K \times M \to M$ che soddisfa alcune proprietà che diamo per note (non rilevanti per il momento). Noi qui penseremo uno spazio vettoriale come una struttura di segnatura L_K, l'interpretazione dei simboli del linguaggio dei gruppi additivi è quella naturale dato che M è un gruppo abeliano, l'interpretazione del simbolo $k \in K$ è la funzione $k^M : a \mapsto \mu(k, a)$, il prodotto del vettore a per lo scalate k. Si noti che L_K contiene due zeri diversi: una costante ed una funzione unaria.

1.3 Esempio Il **linguaggio degli ordini stretti** contenete un solo simbolo di relazione binaria $<$ che useremo con notazione infissa.

1.4 Esempio Il **linguaggio dei grafi** contiene un'unica relazione binaria r. In combinatoria, per grafo si intende un insieme di *vertici* e un insieme di coppie non ordinate dette *archi*. In teoria dei modelli si preferisce trattare con coppie ordinate, quindi normalmente per **grafo** si intende una struttura M del linguaggio dei grafi in cui r^M è una relazione irriflessiva e simmetrica.

1.3 Le tuple

Per chi non ha familiarità con gli ordinali ricordiamo che un ordinale finito è un insieme della forma $\{i : 0 \leq i < n\}$, dove n è un numero naturale. È comune usare $\boldsymbol{n}$ per denotare questo insieme: quindi $i < n$ e $i \in n$ sono espressioni sinonime. Più avanti avremo bisogno anche di ordinali infiniti, ma per i primi capitoli l'unico ordinale infinito di cui avremo bisogno è $\boldsymbol{\omega}$, l'insieme di tutti gli ordinali finiti, che può essere identificato con $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali.

Sia A un insieme arbitrario ed α un ordinale. Una **tupla** di elementi A di **lunghezza** α è una mappa $a : \alpha \to A$. Per $i < \alpha$, diremo che $a(i)$ è l'i-esimo elemento della tupla e lo denoteremo con $\boldsymbol{a_i}$. Spesso scriveremo $\boldsymbol{a = \langle a_i : i < \alpha \rangle}$ per presentare la tupla a. Oppure, quando α è un ordinale finito, possiamo anche usare la notazione $\boldsymbol{a = \langle a_0, \dots, a_{\alpha-1} \rangle}$.

Quando la tupla a è suriettiva su A, diremo che è una **enumerazione** di A.

La lunghezza della tupla a viene denotata con $|\boldsymbol{a}|$. L'insieme delle tuple di lunghezza α viene denotato con A^α. Quando α è finito confonderemo le tuple di lunghezza α con gli elementi della potenza cartesiana A^α. Confonderemo le sequenze di lunghezza 1 con gli elementi di A.

Si osservi che esiste un'unica tupla di lunghezza 0, la **tupla vuota** che è la funzione vuota $\varnothing$. Come già spiegato nel paragrafo 1.2 si conviene che A^0 sia l'insieme $\{\varnothing\}$, anche quando A è vuoto, in questo modo $a \in A^{|a|}$ continua a valere anche nel caso degenere della tupla vuota anche quando A è vuoto.

Spesso useremo concatenare due o più tuple. Siano a e b due tuple. Scriveremo $\boldsymbol{a\,b}$

oppure anche ***a, b*** per denotare la **concatenazione** di a e b. Precisamente, nel caso di tuple finite, se $a = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ e $b = \langle b_0, \ldots, b_{m-1}\rangle$ allora $a\,b = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1}\rangle$.

1.4 La sintassi dei termini

Chiameremo, per intenderci, *funzioni primitive* della struttura le funzioni che interpretano i simboli in L_{fun}. Vogliamo ora introdurre dei nomi per le funzioni che si ottengono componendo in modo arbitrario le funzioni primitive. L'esempio paradigmatico è quello del linguaggio degli anelli: qui componendo la somma e la moltiplicazione otteniamo le funzioni polinomiali. I polinomi sono le espressioni sintattiche che fungono da nomi per le funzioni polinomiali.

Fissiamo un insieme infinito V i cui elementi chiameremo **variabili**. Useremo le lettere minuscole x, y, z, ecc. per denotare variabili o arbitrarie tuple di variabili. Di nuovo questa è solo una comodità che aiuta la lettura: come insieme V potremmo prendere qualsiasi cosa, importante è che sia disgiunto da L e sufficientemente grande (per i primi capitoli basta numerabile). L'insieme V non verrà mai esplicitato nella notazione.

1.5 Definizione *I* ***termini*** *sono sequenze finite di variabili e simboli di funzione. Precisamente, i termini sono le sequenze che si ottengono seguendo il seguente processo induttivo:*

b. *ogni variabile (intesa come una sequenza di lunghezza* 1*) è un termine;*

i. *se f è un simbolo di funzione n-aria e $\bar{t}$ una sequenza ottenuta concatenando n termini (quindi la sequenza vuota se $n = 0$), allora anche $f\,\bar{t}$ è un termine. Con $f\,\bar{t}$ intendiamo la sequenza ottenuta prefissando $\bar{t}$ con f.* □

I termini che vengono costruiti senza l'uso di variabili, cioè senza mai applicare b, si chiamano **termini chiusi**. I termini costruiti senza l'uso di simboli per funzioni, si chiamano **termini atomici**. Si osservi che le costanti sono dei termini che si ottengono applicando la clausola induttiva i alla tupla vuota. Quindi per noi non sono termini atomici.

1.6 Esempio Siano f e g simboli di funzione binaria, h un simbolo si funzione unaria, c, a, e b costanti. Siano x e y due variabili . Le sequenze di lunghezza 1: $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$ sono termini atomici. I termini $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, e $\langle c\rangle$ si ottengono applicando la clausula induttiva i alla tupla vuota. Applicando la clausola i otteniamo anche $\langle f, x, y\rangle$, $\langle g, a, a\rangle$, e $\langle h, b\rangle$. E con una ulteriore uso di i otteniamo:

$$\langle f, g, a, a, h, b\rangle, \qquad \langle g, f, g, a, a, h, b, y\rangle, \qquad \langle g, g, f, g, a, a, h, b, y, c\rangle.$$

Questi termini risultano decisamente difficili da leggere. La leggibilità migliora se aggiungiamo delle parentesi (che però non fanno parte della nostra sintassi):

$$f(g(a,a), h(b)), \qquad g(f(g(a,a), h(b)), y), \qquad g(g(f(g(a,a), h(b)), y), c).$$

È giusto chiedersi se esiste un unico modo di aggiungere parentesi, ovvero, un'unica lettura dei termini – questo è ciò di cui tratta in modo implicito il lemma 1.9.

1.7 Esempio Sia L il linguaggio dei gruppi additivi. Quando avremo a che fare con simboli di funzione che ricordano operazioni algebriche preferiremo usare la **notazione infissa**.

Per esempio, scriveremo $x + y$ invece di $+\,x\,y$. La notazione infissa rende però essenziale l'uso di parentesi per evitare ambiguità; per esempio:

$\langle +, +, 0, 0, x\rangle$ corrisponde a $(0+0)+x$

$\langle +, 1, +, 0, x\rangle$ corrisponde a $1+(0+x)$

La notazione prefissa invece non richiede parentesi, dimostreremo che non produce espressioni ambigue.

1.8 Esempio Sia L il linguaggio degli anelli unitari. I seguenti sono esempi di termini:

$\langle +, +, 0, 1, x\rangle$ corrisponde a $(0+1)+x$

$\langle \cdot, 1, +, x, y\rangle$ corrisponde a $1\cdot(x+y)$

Più avanti useremo le consuete abbreviazioni per scrivere termini di L. Per esempio scriveremo 2 per la sequenza di simboli $\langle +, 1, 1\rangle$, oppure x^2+1 per la sequenza $\langle +, \cdot, x, x, 1\rangle$.

1.5 Operazioni sintattiche sui termini

Il seguente lemma è di fondamentale importanza: dice che data una sequenza di simboli ottenuta concatenando vari termini è sempre possibile risalire ai termini con cui è stata composta – sorprendente: perché non abbiamo introdotto nessun simbolo separatore che marchi la fine del termine i-esimo e l'inizio del termine $(i+1)$-esimo.

1.9 Lemma (leggibilità univoca dei termini) *Sia a una sequenza che può essere ottenuta sia concatenando i termini $t_1, \ldots, t_n$ che concatenando i termini $s_1, \ldots, s_m$. Allora $n = m$ e $s_i = t_i$.*

Dimostrazione Dimostreremo il lemma per induzione sulla lunghezza delle sequenza a. Se la lunghezza è 0 allora $n = m = 0$ e non c'è altro da dimostrare. Non è necessario, ma per chiarezza vediamo anche il caso in cui a ha lunghezza 1. In questo caso $n = m = 1$ ed a deve contenere un termine di lunghezza 1, una variabile o una costante che quindi deve coincidere sia con t_1 che con s_1. Supponiamo ora che il lemma valga per sequenze di lunghezza k e sia $a = \langle a_1, \ldots, a_{k+1}\rangle$. Il primo elemento della sequenza t_1 dev'essere a_1 così come il primo elemento della sequenza s_1. Se a_1 è una variabile, diciamo x, allora sia t_1 che s_1 sono il termine x e possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla sequenza $\langle a_2, \ldots, a_{k+1}\rangle$ che è ottenuta concatenando sia termini $t_2, \ldots, t_n$ che i termini $s_2, \ldots, s_m$. Se invece a_1 è un simbolo di funzione, diciamo f, allora $t_1 = f\,\bar{t}$ ed $s_1 = f\,\bar{s}$ dove $\bar{t}$ ed $\bar{s}$ sono la concatenazione dei termini $t'_1 \ldots t'_p$ ed $s'_1 \ldots s'_p$. Quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla sequenza $\langle a_2, \ldots, a_{k+1}\rangle$ che è ottenuta concatenando sia termini $t'_1 \ldots t'_p, t_2, \ldots, t_n$ che i termini $s'_1 \ldots s'_p, s_2, \ldots, s_m$. □

La dimostrazione del lemma 1.9 è compatta ma leggermente criptica. In realtà il problema è più semplice di quel che sembra. Esiste infatti un algoritmo che ricava i termini $t_1, \ldots, t_n$ dalla sequenza $t_1 \ldots t_n$. Leggiamo la sequenza da sinistra a destra aggiornando un contatore come segue: all'inizio il contatore segna 1; quando incontriamo una variabile, sottraiamo 1 al contatore; quando incontriamo un simbolo di funzione n-aria, sommiamo $n-1$ al contatore. Quando il contatore segna 0 ci fermiamo: la sequenza letta al quel punto è t_1. Possiamo quindi iterare la procedura per ottenere t_2, t_3, ecc. Formalizzare questa procedura per ottenere una dimostrazione del lemma 1.9 è piuttosto laborioso.

Se $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ è una tupla di variabili distinte ed $s = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ è una tupla di termini, scriveremo **$t[x/s]$** per denotare la sequenza che si ottiene sostituendo x con s coordinata per coordinata, ovvero sostituendo x_i con s_i. L'espressione è ben definita solo se x è una tupla di variabili distinte oppure se ad eventuali ripetizioni nella tupla x corrispondono identiche ripetizioni nella tupla s. Non saremo troppo pignoli su questo punto, assumeremo sempre che le tuple siano ben date.

1.10 Esempio Sia L il linguaggio degli anelli unitari, siano x, y, z variabili singole. Un esempio di sostituzione:

- ▹ sia t il termine $\langle +, \cdot, x, x, y \rangle$ ovvero: $x^2 + y$
- ▹ sia s il termine $\langle +, x, y \rangle$ $x + y$
- ▹ allora $t[x/s]$ è il termine $\langle +, \cdot, +, x, y, +, x, y, y \rangle$ $(x + y)^2 + y$

Un altro esempio:

- ▹ sia t il termine $\langle +, \cdot, x, z, y \rangle$ ovvero: $x\,z + y$
- ▹ sia s il termine $\langle +, x, z \rangle$ $x + z$
- ▹ sia r il termine $\langle \cdot, x, y \rangle$ $x\,y$
- ▹ allora $t[x\,z/s\,r]$ è il termine $\langle +, \cdot, +, x, z, \cdot, x, y, y \rangle$ $(x + z)\,x\,y + y$
- ▹ allora $t[x/s][z/r]$ è il termine $\langle +, \cdot, +, x, \cdot, x, y, \cdot, x, y, y \rangle$ $(x + x\,y)\,x\,y + y$

Notiamo che $t[x\,z/s\,r]$ non è lo stesso che $t[x/s][z/r]$. Nel primo le sostituzioni sono simultanee nel secondo consecutive (non coincidono perché s contiene la variabile z).

La definizione di $t[x/s]$ data qui sopra non è sempre agevole da usare. Riportiamo qui sotto una definizione per induzione, più lunga, ma più precisa e soprattutto che semplifica le dimostrazioni.

1.11 Definizione *Sia t un termine, $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ una tupla di variabili distinte, ed $s = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ una tupla di termini. Definiamo $t[x/s]$ per induzione sulla sintassi di t.*

b. *se t è una variabile che occorre in x, diciamo x_i, allora $t[x/s] = s_i$, altrimenti $t[x/s] = t$ (notiamo che i è univocamente determinato se le variabili in x sono distinte);*

i. *se t è il termine $f\,\bar{t}$ allora $t[x/s] = f\,\bar{t}[x/s]$.*

Se $\bar{t}$ è una sequenza ottenuta concatenando i termini $t_1, \dots, t_n$, con $\bar{t}[x/s]$ intendiamo la sequenza ottenuta concatenando $t_1[x/s], \dots, t_n[x/s]$. Questa è univocamente determinata da t per il lemma sulla leggibilità univoca 1.9. □

Dimostriamo **per induzione sulla sintassi** che il risultato di una sostituzione è ancora un termine.

1.12 Lemma *Sia t un termine, x una tupla di variabili, ed s una tupla di termini. Allora anche $t[x/s]$ è un termine.*

Dimostrazione Per maggior chiarezza dimostriamo il lemma nel caso in cui x sia una singola variabile. La generalizzazione a tuple arbitrarie è lasciata al lettore. Supponiamo che in t non occorrano simboli di funzione, ovvero t è un termine atomico. Se t è proprio la variabile x allora $t[x/s] = s$, altrimenti $t[x/s] = t$. In entrambi i casi $t[x/s]$ è un termine.

Supponiamo ora che t abbia la forma $f\,\bar{t}$ dove f è un simbolo di funzione di arietà n e $\bar{t}$ è una sequenza ottenuta concatenando i termini $t_1,\ldots,t_n$. Come ipotesi induttiva assumiamo che il lemma valga per i termini $t_1,\ldots,t_n$, quindi $t_1[x/s],\ldots,t_k[x/s]$ sono termini. Per definizione $\bar{t}[x/s]$ è la tupla ottenuta concatenando questi ultimi, quindi $t[x/s] = f\,\bar{t}[x/s]$, è un termine perché ottenuto applicando la clausola i della definizione 1.5. (Si osservi che questo argomento è corretto anche nel caso degenere in cui f è una costante.) □

È necessario poter usare termini che si riferiscono a particolari elementi di una data struttura anche se il linguaggio non contiene costanti per denotarli. Introduciamo quindi i termini con parametri. I parametri giocano il ruolo che in algebra e geometria hanno i coefficienti (di polinomi, equazioni, curve, ecc.). Noi li useremo già nel prossimo paragrafo per definire la semantica.

Fissiamo una struttura di segnatura L ed un sottoinsieme $A \subseteq M$. Indicheremo con $\boldsymbol{L(A)}$ il linguaggio ottenuto aggiungendo ad L gli elementi di A come costanti. Queste nuove costanti verranno chiamate **parametri**. Un **termine con parametri in $\boldsymbol{A}$** è un termine nel linguaggio $L(A)$. La struttura M ha un espansione canonica ad una struttura di segnatura $L(A)$, l'interpretazione dei parametri è quella naturale $a^M = a$. I termini senza parametri li chiameremo **termini puri**.

1.13 Lemma *Sia s un termine con parametri in A. Allora esiste una tupla di variabili x, una tupla $a \in A^{|x|}$, ed un termine puro t tali che $s = t[x/a]$.*

Dimostrazione Se s è un termine atomico non c'è nulla da dimostrare: prendiamo come t il termine s e come x ed a la tupla vuota.

Sia ora $s = f\,\bar{s}$ dove $\bar{s}$ è una sequenza ottenuta concatenando i termini $s_1,\ldots,s_n$ e assumiamo che per questi termini il lemma valga. Supponiamo per il momento che f non sia un parametro: questo caso lo tratteremo a parte. Quindi $s_i = t_i[x_i/a_i]$ con t_i termine puro, x_i una tupla di variabili, a_i una tupla di parametri. Supponiamo per il momento che le variabili in x_i non occorrano in nessun altro termine tranne t_i; vedremo più sotto che non c'è perdita di generalità. Posto $x = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ ed $a = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ otteniamo $s_i = t_i[x/a]$. Quindi, se scriviamo $\bar{t}$ per la concatenazione dei termini $t_1,\ldots,t_n$, otteniamo $\bar{s} = \bar{t}[x/a]$ ed il lemma vale con $t = f\,\bar{t}$.

Nel caso in cui f è un parametro allora tupla $\bar{s}$ è vuota e $t = f$. Come s prendiamo x, una qualsiasi variabile e come a prendiamo f.

Mostriamo ora che possiamo sempre assumere che le variabili in x_i non occorrano in nessun altro termine tranne t_i. Infatti, se questa condizione non fosse verificata, possiamo fissare delle tuple x'_i che soddisfano alle condizioni richieste e applicare l'argomento esposto qui sopra ai termini t_i con $t' = t_i[x_i/x'_i]$. Infatti è immediato verificare che $s_i = t'_i[x'_i/a_i]$ (vedi esercizio 1.14). □

Se t è un termine e $x_1,\ldots,x_n$ sono tuple di variabili scriveremo $\boldsymbol{t(x_1,\ldots,x_n)}$ per dichiarare che le variabili che occorrono in t sono al più quelle che occorrono nelle tuple $x_1,\ldots,x_n$. Molto spesso, quando un termine t è stato presentato come $t(x,y)$ scriveremo $\boldsymbol{t(s,y)}$ invece che $t[x/s]$.

1.14 Esercizio Siano x e z due tuple di variabili senza ripetizioni della stessa lunghezza. Sia

t un termine. Sotto quali ipotesi si ha $t[x/z][z/x] = t$?

1.15 Esercizio Siano $x_1 \dots x_n$ variabili distinte che non occorrono nei termini $s_1 \dots s_n$. Sotto quali ipotesi si ha $t[x_1/s_1]\dots[x_n/s_n] = t[x_1,\dots,x_n/s_1,\dots,s_n]$?

1.16 Esercizio Sia x una singola variabile. Si dimostri, per induzione sulla sintassi del termine t, che $|t[x/s]| \leq |s| \cdot |t|$.

1.6 La semantica dei termini

Ogni struttura M interpreta i simboli di funzione in vere e proprie funzioni da M^n in M. Vogliamo estendere questa interpretazione in modo naturale a tutti i termini. Cominciamo col definire l'interpretazione dei termini chiusi, questi verranno interpretati come funzioni 0-arie, ovvero elementi della struttura.

1.17 Definizione *Per ogni termine chiuso definiamo un elemento di M che denoteremo con* $\boldsymbol{t^M}$ *e chiameremo* ***interpretazione di t****. La definizione è data per induzione sulla sintassi:*

i. *se $t = f\,\bar{t}$, dove f è un simbolo di funzione n-aria e $\bar{t}$ è la concatenazione di $t_1,\dots,t_n$, allora $t^M = f^M(t_1^M,\dots,t_n^M)$.*

Il lemma sulla leggibilità univoca 1.9 è stato usato nell'ultima clausola: per garantire che $\bar{t}$ individui univocamente i termini $t_1,\dots,t_n$. □

La definizione 1.17 è induttiva e si fonda sul caso di arietà 0: quando il termine t è una costante c e quindi $\bar{t}$ è la tupla vuota, l'interpretazione t^M è $c^M(\varnothing)$ che abbiamo convenuto di abbreviare con c^M.

Ora definiamo l'operatore $\boldsymbol{^M(x)}$ che ad ogni termine t con variabili libere tra quelle della tupla x assegna la funzione $\boldsymbol{t^M(x) : M^{|x|} \to M}$. La funzione $t^M(x)$ mappa $a \mapsto (t(a))^M$, dove $t(a)$ è il termine $L(M)$ che si ottiene sostituendo x con a.

1.7 Le sottostrutture

Vogliamo dare una definizione di sottostruttura che generalizzi le nozioni di sottogruppo, sottoanello, ecc., se queste sono considerate come strutture di segnatura opportuna (come nell'esempio 1.1). Per comprendere la condizione 3 si pensi a strutture che contengono una relazione d'ordine per esempio gruppi o anelli ordinati.

1.18 Definizione *Siano M ed N due strutture con la stessa segnatura L. Diremo che M è una* ***sottostrutturasottostruttura*** *di N se valgono le seguenti tre condizioni.*

1. *Il dominio di M è un sottoinsieme del dominio di N.*
2. *L'interpretazione in M dei simboli di funzione è la restrizione ad M dell'interpretazione in N, ovvero $f^M = f^N \restriction M^{\mathrm{Ar}(f)}$.*
3. *L'interpretazione in M dei simboli di relazione è la restrizione ad M dell'interpretazione in N, ovvero $r^M = r^N \cap M^{\mathrm{Ar}(r)}$.*

Si osservi che quando f è una costante la condizione 2 diventa $f^M = f^N$, quindi sottostrutture concordano con la struttura ambiente sull'interpretazione delle costanti. Quando scriveremo $\boldsymbol{M \subseteq N}$, intenderemo che M è una sottostruttura di N. Per denotare comuni sottoinsiemi di N useremo le lettere A, B, C, ecc.

Se $A \subseteq N$ è tale che $f^N[A^{\mathrm{Ar}(f)}] \subseteq A$ per tutte le funzioni del linguaggio allora possiamo associare ad A una sottostruttura di N in modo canonico:

1. il supporto della struttura è l'insieme A;
2. $f^A = f^N \restriction A^{\mathrm{Ar}(f)}$ (questa è una buona definizione perché per ipotesi $f^N[A^n] \subseteq A$);
3. $r^A = r^N \cap A^{\mathrm{Ar}(f)}$.

Questa è l'unica sottostruttura di N con supporto A, quindi confonderemo l'insieme A e con la struttura a questo associata. Nel seguito dato $A \subseteq N$, l'affermazione **A è una sottostruttura di N** dice semplicemente che $f^N[A^{\mathrm{Ar}(f)}] \subseteq A$ per ogni simbolo di funzione. Si noti che nel caso di costatnti $f^N[A^{\mathrm{Ar}(f)}] \subseteq A$ diventa $f^N \in A$.

E immediato verificare che l'intersezione di una famiglia arbitraria di sottostrutture di N è ancora una sottostruttura di N. Data quindi una struttura N ed un insieme $A \subseteq N$ possiamo definire la **sottostruttura di N generata da A** come l'intersezione di tutte le sottostrutture di N che contengono A. La denoteremo con $\boldsymbol{\langle A\rangle_N}$. Diamo ora una rappresentazione più concreta di $\langle A\rangle_N$:

1.19 Lemma *Sia N una struttura e sia $A \subseteq N$ un sottoinsieme arbitrario. Allora*

1 $\quad \langle A\rangle_N = \Big\{t^N \;:\; t \text{ termine chiuso con parametri in } A\Big\}$

2 $\quad \langle A\rangle_N = \Big\{t^N(a) \;:\; t(x) \text{ termine puro, } a \text{ tupla di elementi di } A\Big\}$

3 $\quad \langle A\rangle_N = \bigcup_{n\in\omega} A_n, \quad$ *dove* $\; A_0 = A \;$ *e*

$$A_{n+1} = A_n \cup \Big\{f^N(a) \;:\; f \in L_{\text{fun}},\; a \text{ tupla di elementi di } A_n\Big\}$$

Dimostrazione Per dimostrare l'inclusione $\subseteq$ al punto 1, è sufficiente mostrare che l'insieme alla destra, chiamiamolo B, è una sottostruttura che contiene A. Che B contenga A è ovvio: ogni elemento di A è l'interpretazione di un termine a parametri in A. Mostriamo ora che $f^N\big[B^{\mathrm{Ar}(f)}\big] \subseteq B$ per ogni simbolo di funzione f. Se b è una tupla di elementi di B allora b è della forma s^N dove s è una qualche tupla di termini a parametri in A. Quindi $f^N(s^N) = (fs)^N \in B$.

Per dimostrare l'inclusione $\supseteq$ bisogna mostrare che tutte le strutture M che contengono A contengono anche l'insieme B di destra. Ovvero che se t è un termine chiuso a parametri in A allora $t^N \in M$ per ogni struttura M tale che $A \subseteq M \subseteq N$. Il lettore può verificare come esercizio (vedi esercizio 1.20) che $t^N = t^M$. Quindi $t^N \in M$ segue dall'ovvia inclusione $t^M \in M$.

Ora 2 segue da 1 per il lemma 1.13. La dimostrazione di 3 è lasciata al lettore. □

1.20 Esercizio Sia M una sottostruttura di N, e t un termine chiuso a parametri in M. Si dimostri per induzione sulla sintassi che $t^M = t^N$.

Capitolo 2

Formule ed insiemi definibili

In questo capitolo introdurremo la semantica e la sintassi delle formule ripetendo, per quanto possibile, lo stesso schema usato per introdurre i termini nel capitolo 1. Questo capitolo ha due obbiettivi diversi. Il primo è dare una definizione matematicamente solida di formula e insieme definibile. Il secondo è far pratica con i linguaggi del prim'ordine.

2.1 La sintassi delle formule

Le **formule** sono *nomi* per particolari sottoinsiemi delle strutture che chiameremo insiemi **definibili**. Questi si ottengono a partire da alcuni insiemi *atomici* con operazioni booleane e con l'operazione di proiezione. (N.B. per *insiemi* intenderemo sempre insiemi di tuple di arietà fissata n che quindi possono essere proiettati su $n-1$ coordinate.) Come già fatto per i termini, le formule saranno delle sequenze di simboli che codificano il modo in cui gli insiemi definibili vengono costruiti.

La scelta di come costruire gli insiemi definibili a partire da quelli atomici è abbastanza arbitraria e altre possibilità sono degne di interesse. Per esempio, perché non considerare anche unioni ed intersezioni numerabili come si fa con le σ-algebre? Quella che vedremo è la scelta che ha ricevuto maggiore attenzione e costituisce la cosiddetta **logica del prim'ordine**.

La scelta degli insiemi da considerare atomici è invece molto naturale. Consideriamo per esempio gli anelli ordinati. In questo caso gli insiemi definibili atomici sono gli insiemi del tipo $\{x : t(x) = s(x)\}$ e $\{x : t(x) < s(x)\}$, dove $t(x)$ ed $s(x)$ sono termini e x è una tupla di variabili. Per codificare questi insiemi useremo le sequenze ottenute concatenando $=t\,s$,rispettivamente $<t\,s$. Dato un nome agli insiemi atomici daremo un nome a quelli ottenuti da questi con le operazioni descritte qui sopra (unione, intersezione, ecc.). Per esempio il nome che assegneremo all'unione dei due insiemi appena descritti è la sequenza ottenuta concatenando $\vee = t\,s < t\,s$. Con il simbolo $\neg$ indicheremo il complemento, per esempio concatenando $\neg = t\,s$ codificheremo l'insieme $\{x : s(x) \neq t(x)\}$.

Passiamo ad enunciare la definizione. Come fatto per i termini: fissiamo il linguaggio L, ed un insieme di variabili V. Una **formula** è una sequenza finita di

- ▹ variabili

▹ simboli del linguaggio (funzioni, relazioni, ed eventuali parametri)

▹ **connettivi logici**, ovvero uno dei seguenti:

$\dot{=}$	**uguaglianza**;	$\vee$	**disgiunzione**;
$\perp$	**contraddizione**;	$\exists$	**quantificatore esistenziale**.
$\neg$	**negazione**;		

Abbiamo usato il simbolo $\dot{=}$, per distinguerlo dall'uguale metalinguistico. Più avanti confonderemo i due simboli confidiamo che il lettore saprà tenere comunque distinti i due livelli linguistici.

Qui sotto diamo la definizione di formula del prim'ordine. Useremo la notazione prefissa per i connettivi logici (scriveremo $\dot{=}\, t\, s$ e $\wedge \varphi \psi$) perché facilita le dimostrazioni sulla sintassi, ma in tutti gli esempi useremo la comune notazione infissa (scriveremo $t \dot{=} s$ e $\varphi \vee \psi$).

2.1 Definizione *Le* ***formule*** *sono tutte e sole le sequenze dei simboli elencati qui sopra che si ottengono con il seguente processo induttivo.*

Se $t_1, \ldots, t_n, t, s$ sono termini in cui non occorrono variabili vincolate allora le seguenti sono formule, anche dette ***formule atomiche****:*

b1. $\dot{=}\, t\, s$;

b2. $r\, t_1 \ldots t_n$,

dove r è un predicato di arietà n. Inoltre, se φ e ψ sono formule allora anche le seguenti sono formule:

i0. $\perp$;

i1. $\neg \varphi$;

i2. $\vee \varphi \psi$;

i3. $\exists x\, \varphi$, *dove x è una variabile.* □

Useremo scrivere $\exists x\, \varphi$ anche quando x è una tupla: se x è la tupla di variabili $x_1, \ldots, x_n$, con $\exists x\, \varphi$ intenderemo $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi$.

Nel seguito useremo il simbolo L per denotare (oltre al linguaggio) anche l'insieme delle formule, analogamente il simbolo $L(A)$ indicherà l'insieme delle formule con parametri in A. A parole diremo **formula pura** per formula senza parametri. Formule costruite senza l'uso di i3 si chiamano **formule senza quantificatori**, in inglese **quantifier free**.

Nelle definizioni che seguiranno è importante distinguere tra variabili libere e vincolate (cioè quantificate). La definizione precisa dev'essere data per induzione introducendo i seguenti insiemi:

b Se r è un predicato oppure $\dot{=}$ allora
$\mathsf{Lbr}(r\, t_1 \ldots t_n)$ è l'insieme delle variabili che occorrono in $t_1 \ldots t_n$;
$\mathsf{Vnl}(r\, t_1 \ldots t_n) = \varnothing$;

i0. $\mathsf{Lbr}(\perp) = \varnothing$;
$\mathsf{Vnl}(\perp) = \varnothing$;

i1. $\mathsf{Lbr}(\neg\varphi) = \mathsf{Lbr}(\varphi)$;
$\mathsf{Vnl}(\neg\varphi) = \mathsf{Vnl}(\varphi)$;

i2. $\mathsf{Lbr}(\vee \varphi \psi) = \mathsf{Lbr}(\varphi) \cup \mathsf{Lbr}(\psi)$;
$\mathsf{Vnl}(\vee \varphi \psi) = \mathsf{Vnl}(\varphi) \cup \mathsf{Vnl}(\psi)$;

i3. $\mathsf{Lbr}(\exists u\, \varphi) = \mathsf{Lbr}(\varphi) \smallsetminus \{u\}$;
$\mathsf{Vnl}(\exists u\, \varphi) = \mathsf{Vnl}(\varphi) \cup \{u\}$.

Se $x \in \mathsf{Lbr}(\varphi)$ diremo che x **occorre libera** in φ. Se $x \in \mathsf{Vnl}(\varphi)$ diremo che **occorre vincolata**. Si noti che è perfettamente ammissibile che $\mathsf{Lbr}(\varphi) \cap \mathsf{Vnl}(\varphi) \neq \varnothing$.

Una **formula chiusa** è una formula senza variabili libere, ovvero tale che $\mathsf{Lbr}(\varphi) = \varnothing$. Le formule chiuse si chiamano anche **enunciati**. In inglese **sentences**.

2.2 Operazioni sintattiche sulle formule

Come nel caso dei termini serve un lemma sulla leggibilità unica delle formule: dobbiamo risalire univocamente da una formula, per esempio $\vee\,\varphi\,\psi$, alle formule φ e ψ che la compongono. La cosa non è ovvia perché non c'è nulla di esplicito nella nostra grammatica che indichi il punto in cui finisce φ e comincia ψ. Si noti che se avessimo introdotto i connettivi con la notazione infissa, per esempio scrivendo $\varphi \vee \psi$ al posto di $\vee\,\varphi\,\psi$, avremmo solo aggravato il problema: non è possibile distinguere l'occorrenza di $\vee$ che sta tra φ e ψ da eventuali altre occorrenze di $\vee$ nelle sequenze φ e ψ. Si avessimo definito le formule con notazione infissa, avremmo dovuto introdurre nella sintassi simboli per parentesi, complicando invece che semplificare la dimostrazione del lemma di leggibilità univoca.

2.2 Lemma (leggibilità univoca delle formule) *Sia a una sequenza che può essere ottenuta sia concatenando le formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ che concatenando $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Allora $n = m$ e $\varphi_i = \psi_i$.*

Dimostrazione I dettagli della dimostrazione vengono lasciati ai lettori più volonterosi. Conviene dimostrare una proposizione leggermente più generale in cui a φ_i e ψ_i si richiede di essere arbitrariamente formule o termini. In questo modo si dimostra simultaneamente l'univoca leggibilià dei termini e delle formule. □

Come fatto per i termini diamo la definizione per induzione dell'operazione di sostituzione.

2.3 Definizione *Sia x è una tupla di variabili distinte ed s è una tupla di termini della stessa lunghezza. Sia φ una formula in cui non occorre quantificata nessuna delle variabili che occorre in s. Definiamo l'operazione di sostituzione **$\varphi[x/s]$** per induzione sulla sintassi delle formule.*

b $(r\,t)[x/s] \;=\; r\,t[x/s]$, *per r un predicato oppure $\doteq$;*

i0. $\bot[x/s] \;=\; \bot$;

i1. $(\neg\varphi)[x/s] \;=\; \neg\varphi[x/s]$;

i2. $(\vee\,\varphi\,\psi)[x/s] \;=\; \vee\,\varphi[x/s]\,\psi[x/s]$;

i3. $(\exists u\,\varphi)[x/s] \;=\; \exists u\,\big(\varphi[x'/s']\big)$ *dove x' ed s' sono ottenute cancellando da x l'eventuale occorrenza di u e da s la componente corrispondente.*

La clausola i2 usa implicitamente il lemma 2.2 sulla leggibilità univoca delle formule. □

La dimostrazione dei seguenti due lemmi è lasciata al lettore.

2.4 Lemma *Siano x, s e φ come nella definizione 2.3. Allora $\varphi[x/t]$ è una formula.* □

2.5 Lemma *Sia φ una formula con parametri. Allora esiste una formula pura ψ, una tupla di parametri a ed una tupla di variabili x tale che $\varphi = \psi[x/a]$.* □

Se φ è una formula ed x una tupla di variabili, scriveremo $\varphi(x)$ per dichiarare che le variabili libere di φ sono al più quelle che occorrono nella tupla x. Se x ed y sono due tuple di variabili l'espressione $\varphi(x, y)$ è sinonima $\varphi(x\,y)$, dove $x\,y$ denota la concatenazione di x ed y. Molto spesso, quando una formula φ è stata presentata come $\varphi(x, y)$ scriveremo $\boldsymbol{\varphi(t, y)}$ invece che $\varphi[x/t]$.

2.3 L'interpretazione: gli insiemi definibili

Vogliamo introdurre un operatore $(x)^M$ che ad ogni formula φ con variabili libere tra quelle della tupla x e parametri in M assegni un insieme $\varphi(x)^M \subseteq M^{|x|}$. Quest'insieme è l'interpretazione di $\varphi(x)$, verrà chiamato insieme definito da $\varphi(x)$. Quando la notazione non da adito ad ambiguità $\varphi(x)^M$ verrà denotato con $\boldsymbol{\varphi(M)}$.

2.6 Definizione *Per ogni formula φ con variabili libere tra quelle della tupla x definiamo* $\boldsymbol{\varphi(x)^M}$ *per induzione sulla sintassi:*

b1. $$(\doteq t\, s)(x)^M = \Big\{a \in M^{|x|} \ :\ t^M(a) = s^M(a)\Big\}$$

b2. $$(r\, t_1 \ldots t_n)(x)^M = \Big\{a \in M^{|x|} \ :\ \langle t_1^M(a), \ldots, t_n^M(a)\rangle \in r^M\Big\}$$

i0. $$\bot(x)^M = \varnothing$$

i1. $$\big(\neg\xi\big)(x)^M = M^{|x|} \smallsetminus \xi(x)^M$$

i2. $$\big(\vee\, \xi\, \psi\big)(x)^M = \xi(x)^M \cup \psi(x)^M$$

i3. $$\big(\exists u\, \varphi\big)(x)^M = \bigcup_{a \in M} \big(\varphi[u/a]\big)(x)^M$$

La condizione i2 presuppone che $\vee\,\xi\,\psi$ individui univocamente le formule φ e ψ, questo è garantito dal lemma 2.2. Analogamente, le condizioni b1 e b2 presuppongono il lemma 1.9.

Il caso degenere in cui x è la tupla vuota è degno di nota. In questo caso $\varphi(\varnothing)^M$ è un sottoinsieme di $M^0 = \{\varnothing\}$. Ci sono solo due possibilità: $\{\varnothing\}$ e $\varnothing$ che leggeremo come due **valori di verità**: **vero** e **falso**. Se l'interpretazione di φ è $\{\varnothing\}$ diremo che **$\boldsymbol{\varphi}$ è vera in $\boldsymbol{M}$**, se è $\varnothing$ diremo che **$\boldsymbol{\varphi}$ è falsa in $\boldsymbol{M}$**. Nel seguito useremo la notazione $\boldsymbol{M \vDash \varphi}$, rispettivamente, $\boldsymbol{M \nvDash \varphi}$. A parole diremo che **$\boldsymbol{M}$ modella $\boldsymbol{\varphi}$**, rispettivamente **$\boldsymbol{M}$ non modella $\boldsymbol{\varphi}$**. È immediato verificare che

$$\varphi(x)^M = \big\{a \in M^{|x|} : M \vDash \varphi(a)\big\}.$$

Il seguente teorema afferma che i connettivi logici hanno lo stesso significato dei corrispondenti connettivi del linguaggio naturale (*naturale* per i matematici, si intende). La dimostrazione è immediata.

2.7 Teorema *Se $t, s, t_1, \ldots, t_n$ sono termini chiusi e $\xi, \psi, \exists x\, \varphi$ sono formule chiuse. Valgono le seguenti equivalenze:*

b1. $M \vDash\ \doteq t\, s \quad\Leftrightarrow\quad t^M = s^M$;

b2. $M \vDash r\, t_1 \dots t_n \quad \Leftrightarrow \quad t_1^M \dots t_n^M \in r^M$;

i1. $M \vDash \vee\, \xi\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \xi$ *o* $M \vDash \psi$;

i2. $M \vDash \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad M \nvDash \varphi$;

i5. $M \vDash \exists x\, \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi[x/a]$ *un qualche* $a \in M$. □

2.8 Esempio Cominciamo col notare che, qualsiasi siano il linguaggio e la struttura M, l'insieme vuoto $\varnothing$ è sempre definibile come anche l'insieme M^n. Rispettivamente dalle formule: $\bot$ e $\neg\bot$, quest'ultima considerata come formula di arietà n.

In ogni struttura tutti i sottoinsiemi finiti sono definibili con parametri nella struttura stessa. Per esempio, l'insieme $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$ è definito dalla formula $a_1 \doteq x \vee \dots \vee a_n \doteq x$. Quindi anche tutti gli **insiemi cofiniti**, cioè i complementari degli insiemi finiti, sono definibili.

Senza specifiche informazioni sulla struttura M non possiamo dire molto di più. La descrizione degli insiemi definibili di una struttura o classe di strutture è spesso un risultato importante. Ci si riesce in pochi casi particolari e generalmente con molta fatica. (Dicono: i matematici si occupano sempre solo di casi particolari, perché dei casi generali se ne occupano già i filosofi.) □

2.9 Esempio Supponiamo che la segnatura di M contenga un simbolo di funzione unaria f. Il grafo della funzione f^M è definibile dalla formula $f\,x \doteq y$. L'immagine di f^M è definibile dalla formula $\exists y\, f\,y \doteq x$.

Supponiamo che la segnatura di M contenga anche un simbolo di funzione unaria r. L'insieme definito dalla formula $r\,f\,x$ è $(f^M)^{-1}[r^M]$ ovvero l'insieme degli elementi di M che vengono mappati in r^M dalla funzione f^M. L'immagine di r^M secondo f^M è anche un insieme definibile. È definibile dalla formula $\exists y\,[r\,y \wedge f\,y \doteq x]$. □

2.4 Altri connettivi

Useremo i seguenti connettivi come abbreviazioni:

$\top$	sta per	$\neg\bot$	**tautologia**
$\varphi \wedge \psi$	sta per	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**congiunzione**
$\varphi \to \psi$	sta per	$\neg\varphi \vee \psi$	**implicazione**
$\varphi \leftrightarrow \psi$	sta per	$[\varphi \to \psi] \wedge [\psi \to \varphi]$	**bi-implicazione**
$\varphi \nleftrightarrow \psi$	sta per	$\neg[\varphi \leftrightarrow \psi]$	**disgiunzione esclusiva**
$\forall x\, \varphi$	sta per	$\neg\exists x \neg\varphi$	**quantificatore universale**

Chiameremo $\forall x\, \varphi(x)$ la **chiusura universale** di $\varphi(x)$ e $\exists x\, \varphi(x)$ la **chiusura esistenziale** di $\varphi(x)$. Spesso diremo che la formula $\varphi(x)$ **vale** in M per dire $M \vDash \forall x\, \varphi(x)$, cioè che la chiusura universale di $\varphi(x)$ è vera in M. Per affermare $M \vDash \exists x\, \varphi(x)$, ovvero che la chiusura esistenziale di $\varphi(x)$ è vera in M, potremo anche diremo che $\varphi(x)$ è **coerente** o **consistente** in M.

Per omettere alcune parentesi, conveniamo che $\to$ e $\leftrightarrow$ connettivi leghino meno forte di $\wedge$ e $\vee$. I quantificatori e negazione legano più dei connettivi binari. Per esempio,

$$\exists x\,\varphi \wedge \psi \;\to\; \neg\xi \vee \vartheta \quad \text{si legge} \quad \Big[[\exists x\,\varphi] \wedge \psi\Big] \;\to\; \Big[[\neg\xi] \vee \vartheta\Big]$$

È bene sottolineare la differenza tra i simboli $\to$ e $\leftrightarrow$ ed i simboli $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$. I primi sono abbreviazioni di espressioni del linguaggio formale. I secondi sono abbreviazioni di espressioni nel metalinguaggio. Esiste una ovvia corrispondenza tra questi:

2.10 Proposizione *Per ogni struttura M e tutti gli enunciati φ, ψ e $\forall u\,\xi$ le seguenti affermazioni sono equivalenti a coppie (ai$\Leftrightarrow$bi):*

a1. $M \vDash \varphi \wedge \psi$;

b1. $M \vDash \varphi$ e $M \vDash \psi$;

a2. $M \vDash \forall u\,\xi$;

b2. $M \vDash \xi[u/a]$ per ogni $a \in M$.

a3. $M \vDash \varphi \to \psi$;

b3. $M \vDash \varphi \;\Rightarrow\; M \vDash \psi$;

a4. $M \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$;

b4. $M \vDash \varphi \;\Leftrightarrow\; M \vDash \psi$. □

Con l'implicazione e la bi-implicazione tra formule possiamo formalizzare con un enunciato del prim'ordine l'inclusione o l'uguaglianza di insiemi definibili.

2.11 Proposizione *Per ogni struttura M ed tutte le formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti a coppie (ai$\Leftrightarrow$bi):*

a1. $\varphi(M) \subseteq \psi(M)$;

b1. $M \vDash \forall x\,[\varphi(x) \to \psi(x)]$;

a2. $\varphi(M) = \psi(M)$;

b2. $M \vDash \forall x\,[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$;

a3. $\varphi(M) = \neg\psi(M)$;

b3. $M \vDash \forall x\,[\varphi(x) \nleftrightarrow \psi(x)]$;

a4. $\varphi(M) \neq \psi(M)$;

b4. $M \vDash \exists x\,[\varphi(x) \nleftrightarrow \psi(x)]$. □

Il significato della formule in b3 e b4 si deduce immediatamente da quello delle formule in b2. È bene fare attenzione a non confonderle.

2.12 Definizione *Due formule che in ogni modello M definiscono lo stesso insieme si dicono **logicamente equivalenti**. In particolare due enunciati sono logicamente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità in tutti i modelli. Una formula logicamente equivalente a $\top$ si dice **tautologia**. Una formula logicamente equivalente a $\perp$ si dice **contraddizione**.* □

2.13 Proposizione *Per ogni coppia di formule φ e ψ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. φ e ψ sono logicamente equivalenti;

b. $\varphi \leftrightarrow \psi$ è una tautologia. □

Faremo spesso uso del fatto che la congiunzione e la disgiunzione sono commutative e associative e che una distribuisce sull'altra

2.14 Proposizione *Per tutte le formule ξ, φ e ψ, le seguenti sono tautologie*

a. $\varphi \wedge \psi \;\leftrightarrow\; \psi \wedge \varphi$;

b. $\varphi \vee \psi \;\leftrightarrow\; \psi \vee \varphi$;

Commutatività di $\wedge$ e $\vee$

c. $\xi \wedge [\varphi \wedge \psi] \leftrightarrow [\xi \wedge \varphi] \wedge \psi$;

d. $\xi \vee [\varphi \vee \psi] \leftrightarrow [\xi \vee \varphi] \vee \psi$;

Associatività di $\wedge$ e $\vee$

e. $\xi \wedge [\varphi \vee \psi] \leftrightarrow [\xi \wedge \varphi] \vee [\xi \wedge \psi]$;

f. $\xi \vee [\varphi \wedge \psi] \leftrightarrow [\xi \vee \varphi] \wedge [\xi \vee \psi]$.

Distributività di $\wedge$ su $\vee$ e viceversa. □

Quindi dato un insieme finito di formule $\{\varphi_i : i \in I\}$ possiamo scrivere senza rischio di ambiguità

$$\boldsymbol{\bigwedge_{i\in I} \varphi_i} \qquad\qquad \boldsymbol{\bigvee_{i\in I} \varphi_i}$$

con l'ovvio significato.

L'enunciato $\exists x\, \varphi(x)$ afferma che l'insieme $\varphi(M)$ ha almeno un elemento. Esiste anche un enunciato che afferma che $\varphi(M)$ ha almeno due elementi: $\exists x, y\, [\varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge x \dot{\neq} y]$. In generale, scriveremo $\exists^{\geq n} x\, \varphi(x)$ per l'enunciato che dice che $\varphi(M)$ ha almeno n elementi:

$$\boldsymbol{\exists^{\geq n} x\, \varphi(x)} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big[\bigwedge_{1\leq i\leq n} \varphi(x_i) \;\wedge \bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \dot{\neq} x_j \Big].$$

Quindi la formula

$$\boldsymbol{\exists^{= n} x\, \varphi(x)} := \exists^{\geq n} x\, \varphi(x) \;\wedge\; \neg\exists^{\geq n+1} x\, \varphi(x)$$

vale in M se e solo se $\varphi(M)$ ha esattamente n elementi.

2.15 Esercizio Siano $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ due formule che definiscono in M il grafo delle funzioni f e g. Si scriva una formula che definisce in M il grafo della funzione $f \circ h$.

2.16 Esercizio Sia M una struttura arbitraria e sia $\varphi(x, y)$ una formula pura. Si scriva un enunciato puro vero in M quando $\varphi(x, y)$ definisce una relazione di equivalenza con esattamente 3 classi.

2.17 Esercizio Sia G una struttura in un linguaggio L che contiene quello dei gruppi moltiplicativi e supponiamo che G sia un gruppo. Sia $\varphi(x)$ una formula che definisce H, un sottogruppo di G.

a. Esiste una formula $\varepsilon(x, y)$ che definisce la relazione di appartenere allo stesso laterale di H?

b. Esiste una formula che dice che H è sottogruppo normale?

2.18 Esercizio Sia M una struttura arbitraria e siano $\psi(x)$ e $\varphi(x, y)$ formule pure. Si scriva un enunciato puro vero in M quando

a. $\psi(M) \in \{\varphi(a, M) : a \in M\}$;

b. $\{\varphi(a, M) : a \in M\}$ contiene al più due elementi;

c. $\{\varphi(a, M) : a \in M\}$ contiene almeno due elementi;

d. $\{\varphi(a, M) : a \in M\}$ contiene insiemi a due a due disgiunti;

e. $\{\varphi(a, M) : a \in M\}$ è una partizione di M.

2.19 Esercizio Sia M una struttura e $\psi(x)$ una formula a parametri in M. La formula $\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)$ definisce una relazione di equivalenza su M. Si può dire quante classi ha?

2.20 Esercizio Il linguaggio contiene solo un simbolo di relazione binaria r. Scrivere un enunciato ψ tale che per ogni struttura M,

a. $M \vDash \psi$ se e solo se esiste $A \subseteq M$ tale che $r^M \subseteq A \times \neg A$.

Osservazione: la richiesta in a è una versione asimmetrica di quella in b. In questo secondo caso la formula ψ desiderata non esiste.

b. $M \vDash \psi$ se e solo se esiste $A \subseteq M$ tale che $r^M \subseteq (A \times \neg A) \cup (\neg A \times A)$.

La proprietà che si legge in b corrisponde ad una ben nota dei grafi. Associamo alla formula $r(x, y)$ un grafo in cui i nodi sono gli elementi di M e gli archi sono quelle coppie *non* ordinate $\{a, b\}$ tali che $M \vDash r(a, b) \vee r(b, a)$. Allora b dice che questo è un *grafo bipartito*, o equivalentemente che ha *numero cromatico* 2. Cioè, con due colori a disposizione, è possibile colorare tutti nodi in modo tale che non ci siano archi tra nodi dello stesso colore.

Capitolo 3

Teorie ed equivalenza elementare

3.1 Conseguenze logiche

Una **teoria** è un insieme di enunciati (che a volte chiameremo **assiomi**). In questo paragrafo *enunciato* sottointende *senza parametri* ma è ovvio come estendere le definizioni. Diremo che ***M* è un modello di *T*** se $M \vDash \varphi$ per ogni $\varphi \in T$, scriveremo $\boldsymbol{M \vDash T}$. Scriveremo $\boldsymbol{T \vdash \varphi}$ per dire che per ogni struttura M

$$M \vDash T \quad \Rightarrow \quad M \vDash \varphi$$

A parole, diremo che φ è una **conseguenza (logica)** di T o anche che φ **segue da** T. Scriveremo $\boldsymbol{T \vdash S}$ se $T \vdash \varphi$ per ogni $\varphi \in S$. A volte useremo questa notazione anche con formule non necessariamente chiuse: con $\boldsymbol{T \vdash \varphi(x)}$ intenderemo $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

La **chiusura di *T* per conseguenze logiche** è insieme $\mathrm{ccl}(T)$ definito come segue (la notazione non è standard):

$$\mathrm{ccl}(\boldsymbol{T}) \;=\; \Big\{\varphi \;:\; \text{enunciato tale che } T \vdash \varphi\Big\}$$

Se T è un insieme finito, diciamo $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, scriveremo $\mathrm{ccl}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ per $\mathrm{ccl}(T)$. Se $T = \mathrm{ccl}(T)$ diremo che T è **chiusa per conseguenze logiche**. Nei prossimi capitoli, una volta chiarita la differenza tra T e $\mathrm{ccl}(T)$ spesso le confonderemo.

Si noti comunque che anche quando l'insieme T è un oggetto ben concreto $\mathrm{ccl}(T)$ è più difficile da immaginare. Per esempio, la teoria T_g definita qui sotto è semplicemente un insieme contenente tre assiomi, invece $\mathrm{ccl}(T_\mathrm{g})$ contiene conoscenze di teoria dei gruppi tuttora ignote. Quando la differenza è signigficativa, chiameremo $\mathrm{ccl}(T_\mathrm{g})$ la *teoria dei gruppi* e diremo che T_g *assiomatizza* $\mathrm{ccl}(T_\mathrm{g})$.

Teorie che non hanno modelli si dicono **contraddittorie** oppure **inconsistenti**. Altrimenti si dicono **consistenti** o anche **coerenti**. Con la notazione introdotta qui sopra, per dire che T è contraddittoria possiamo anche scrivere $\boldsymbol{T \vdash \bot}$.

3.1 Esempio Sia T_g l'insieme che contiene i tre enunciati nel linguaggio nel linguaggio dei gruppi moltiplicativi che sono chiusura universale delle seguenti formule:

ass. $(x \cdot y) \cdot z \;=\; x \cdot (y \cdot z)$;

inv. $x \cdot x^{-1} \;=\; x^{-1} \cdot x \;=\; 1$;

neu. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Ogni modello di T_g è un gruppo, viceversa, ogni gruppo può essere interpretato come una struttura che modella T_g. Sia φ la chiusura universale della formula

can. $z \cdot x = z \cdot y \rightarrow x = y$.

La legge di cancellazione vale in tutti i gruppi, quindi φ è una conseguenza logica di T_g, ovvero $T_\mathrm{g} \vdash \varphi$. Consideriamo invece l'enunciato ψ che è chiusura universale della formula

com. $x \cdot y = y \cdot x$.

I gruppi commutativi sono modelli di ψ mentre i gruppi non commutativi sono modelli di $\neg\psi$. Si ha quindi che $T_\mathrm{g} \nvdash \psi$ e $T_\mathrm{g} \nvdash \neg\psi$. Si dice che T_g **non decide** ψ. □

3.2 Esempio Denoteremo con T_ga la teoria dei gruppi abeliani. Il linguaggio è quello dei gruppi additivi, T_ga contiene gli enunciati che sono chiusura universale delle seguenti formule:

a1. $(x + y) + z = y + (x + z)$;

a2. $x + (-x) = 0$;

a3. $x + 0 = x$;

a4. $x + y = y + x$.

La teoria T_au degli anelli unitari è un'espansione di quella dei gruppi additivi, e contiene oltre a tutti gli enunciati di T_ga, quelli che sono chiusura universale delle seguenti formule:

a5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

a6. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;

a7. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

a8. $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$.

La teoria degli anelli commutativi T_ac contine anche com dell'esempio 3.1. La teoria degli anelli ordinati T_ao, è nel linguaggio L_ao, estende T_ac con la chiusura universale delle seguenti formule:

o1. $x < z \rightarrow x + y < z + y$;

o2. $0 < x \wedge 0 < z \rightarrow 0 < x \cdot z$.

La teoria dei dei domini di integrità T_di estende T_ac con la chiusura universale di:

nb. $0 \neq 1$;

di. $x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

Infine la teoria dei campi T_c estende T_ac con la chiusura universale di:

inv. $x \neq 0 \rightarrow \exists y\, (x \cdot y = 1)$.

È noto che $T_{\rm c} \vdash T_{\rm di}$ e che $T_{\rm di} \nvdash T_{\rm c}$. □

Vediamo ora un paio di esempi di teorie non finitamente assiomatizzabili.

3.3 Esempio Il linguaggio è vuoto. La **teoria degli insiemi infiniti** contiene gli enunciati $\exists^{\geq n} x\,(x = x)$ per ogni intero positivo n. Ogni insieme infinito è un modello di questa teoria. Vedremo che questa è una teoria completa e che non è finitamente assiomatizzabile. □

3.4 Esempio Il linguaggio è L_K, degli spazi vettoriali su un campo K fissato è stato introdotto nell'esempio 1.2. La **teoria degli spazi vettoriali su K** contiene gli enunciati di $T_{\rm ga}$ e inoltre, per ogni $k, h \in K$ la chiusura universale delle seguenti formule:

m1. $h\,(x + y) \;=\; h\,x + h\,y$

m2. $l\,x \;=\; h\,x + k\,x$ dove $l \;=\; h +_K k$

m3. $l\,x \;=\; h\,(k\,x)$ dove $l \;=\; h \cdot_K k$

m4. $0_K\,x \;=\; 0$

m5. $1_K\,x \;=\; x$

Abbiamo denotato con 0_K ed 1_K lo zero e l'unità di K e con $+_K$ e $\cdot_K$ le operazioni di somma e prodotto in K. Queste operazioni si intendono eseguite nel metalinguaggio: in L_K non ci sono simboli di funzione per le operazioni del campo. Se il campo K è infinito T_K contiene infiniti enunciati. □

L'insieme degli enunciati veri in una struttura M si chiama la **teoria di M** e si indica con **Th(M)**. Più in generale, se $\mathcal{K}$ è una classe di strutture scriveremo **Th($\mathcal{K}$)** per l'insieme degli enunciati che valgono in *tutte* le strutture in $\mathcal{K}$. Quindi se $\mathcal{K}$ è la classe di tutti i gruppi, Th($\mathcal{K}$) è la teoria ccl($T_{\rm g}$) dell'esempio 3.1. La classe (non è mai un insieme) dei modelli di T si indica con **Mod(T)**. Diremo la classe $\mathcal{K}$ è **assiomatizzabile** se $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$ per una qualche teoria T. Diremo che T **assiomatizza** $\mathcal{K}$. Se esiste una teoria T finita che assiomatizza $\mathcal{K}$ diremo che $\mathcal{K}$ è **finitamente assiomatizzabile**. Riassumendo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Th}(M) &= \Big\{\varphi \;:\; M \vDash \varphi\Big\} && \text{teoria di } M; \\ \mathrm{Th}(\mathcal{K}) &= \Big\{\varphi \;:\; M \vDash \varphi \text{ per ogni } M \in \mathcal{K}\Big\} && \text{teoria di } \mathcal{K}; \\ \mathrm{Mod}(T) &= \Big\{M \;:\; M \vDash T\Big\} && \text{classe dei modelli di } T. \end{aligned}$$

Forse un po' troppa notazione da ingerire in un solo boccone: la prima delle tre è la definizione da memorizzare con più urgenza.

3.5 Esercizio Si dimostri che $\mathrm{ccl}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{ccl}(\varphi) \cap \mathrm{ccl}(\psi)$. □

3.6 Esercizio Si dimostri che se $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ allora $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$. □

3.2 Equivalenza elementare

La seguente è una delle nozioni attorno a cui ruota il corso.

3.7 Definizione *Siano M ed N due strutture. Diremo che* ***M ed N sono elementarmente equivalenti****, e scriveremo* ***$M \equiv N$****, se*

ee. $N \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi$, *per ogni enunciato puro φ.*

In generale, diremo che M ed N sono elementarmente equivalenti ***su A****, e scriveremo* ***$M \equiv_A N$****, se*

a. $A \subseteq M \cap N$

ee'. *l'equivalenza in* ee *vale anche per tutti gli enunciati su A.* □

Conviene generalizzare la notazione $\mathrm{Th}(M)$ includendo parametri. Scriveremo

$$\mathbf{Th}(\boldsymbol{M/A}) = \Big\{\varphi : \text{ enunciato a parametri in } A \text{ tale che } M \vDash \varphi\Big\}$$

La seguente proposizione è immediata.

3.8 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni coppia di strutture M ed N ed ogni $A \subseteq N \cap N$:*

a. $M \equiv_A N$;

b. $Th(M/A) = Th(N/A)$;

c. $N \vDash \varphi(a) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi(a)$, *per ogni $\varphi(x)$ pura ed $a \in A^{|x|}$.*

d. $\varphi(M) \cap A^{|x|} = \varphi(N) \cap A^{|x|}$, *per ogni $\varphi(x)$ pura.* □

Va detto che non è facile dare esempi di strutture elementarmente equivalenti. Una verifica diretta della definizione non è praticabile nemmeno per le strutture più banali. Prima di poter vedere qualche semplice esempio dobbiamo sviluppare metodi che permettano un approccio indiretto. Per intuire la complessità della relazione di equivalenza elementare osserviamo che, se per $\mathbb{Z}$ prendiamo i numeri interi nel linguaggio degli anelli, allora conoscere $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ equivale a conoscere tutti i teoremi della teoria dei numeri – quelli dimostrati e quelli ancora da dimostrare. Poiché siamo ben lungi dal conoscere $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ siamo anche ben lontani dal intuire la relazione $M \equiv \mathbb{Z}$.

3.9 Lemma *Fissiamo una coppia di strutture M ed N tali che $M \equiv_A N$. Se A è dominio di una sottostruttura di M allora A allora questa è anche una sottostruttura di N.*

Dimostrazione Per ipotesi A è una sottostruttura di M quindi $f^M(a) \in A$ per ogni tupla $a \in A^{\mathrm{Ar}(f)}$ ed ogni simbolo di funzione f. Se la stessa proprietà vale anche per N, allora A è anche una sottostruttura di N. Per mostrare che la sottostruttura è proprio la stessa, dobbiamo anche verificare che $f^M \restriction A^{\mathrm{Ar}(f)} = f^N \restriction A^{\mathrm{Ar}(f)}$ ed $r^M \cap A^{\mathrm{Ar}(r)} = r^N \cap A^{\mathrm{Ar}(r)}$.

Sia $b \in A$ tale che $b = f^M a$. Quindi $M \vDash f a = b$. Poiché $f a = b$ è una formula a parametri in A, da $M \equiv_A N$ otteniamo $N \vDash f a = b$ e quindi $f^N a = b$. Questo dimostra che $f^N(a) \in A$, ma anche che $f^M(a) = f^N(a)$.

Per dimostrare $r^M \cap A^{\mathrm{Ar}(r)} = r^N \cap A^{\mathrm{Ar}(r)}$ osserviamo che per $a \in A^{\mathrm{Ar}(r)}$ arbitrario, $a \in r^M$ equivale ad $M \vDash r\,a$ e questo, per elementarità, equivale ad $N \vDash r\,a$ ed infine ad $a \in r^N$. □

Della relazione $M \equiv_A N$, il caso in cui A coincide con tutto M è particolarmente importante, così importante da meritare un nome proprio:

3.10 Definizione *Se $M \equiv_M N$ allora scriveremo* ***$M \preceq N$*** *e chiameremo M una* ***sottostruttura elementare*** *di N.* □

Si noti che il termine *sottostruttura* è appropriato per il lemma 3.9.

Vale la pena di riformulare la condizione c della proposizione 3.8 nel caso in cui A coincide con tutto M. Questa dice che richiedere che M sia una sottostruttura *elementare* di N significa estendere a *tutti i definibili* ciò che la condizione 3 della definizione 1.18 richiedeva per i definibili primitivi.

3.11 Proposizione *Per ogni coppia di strutture M ed N che contengono A, le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

a. $M \preceq N$;

c. $\varphi(M) = \varphi(N) \cap M^{|x|}$, *per ogni formula pura* $\varphi(x)$. □

3.12 Esempio Siano $H \preceq G$ gruppi, che consideriamo come strutture di signatura L_{gm} nel modo naturale. Mostriamo che se G è semplice allora H è semplice. Ricordiamo che un gruppo G è semplice se non ha sottogruppi normali non banali o, equivalentemente, se per ogni elemento $a \in G \smallsetminus \{1\}$ l'insieme $\{gag^{-1} : g \in G\}$ genera G. Dimostriamo la contronominale: supponiamo che H non sia semplice e mostriamo che nemmeno G lo è. Sia $a \in H$ l'elemento che testimonia che H non è semplice. Allora l'insieme $\{gag^{-1} : g \in H\}$ non genera H quindi esiste un elemento $b \in H$ che non è scrivibile come prodotto di elementi di questo insieme. Per dimostrare che G non è semplice basta mostrare b non è nemmeno scrivibile come prodotto di elementi dell'insieme $\{gag^{-1} : g \in G\}$. Se lo fosse allora per qualche n

$$G \vDash \exists x_1, \ldots, x_n \ \big(b \ = \ x_1 a x_1^{-1} \cdots \ x_n a x_n^{-1}\big)$$

ma, per elementità questa formula sarebbe anche vera in H, contraddicendo la scelta di b.

3.13 Esercizio Sia $A \subseteq M \cap N$. Si dimostri che $M \equiv_A N$ se e solo se $M \equiv_B N$ per ogni B sottoinsieme finito di A. □

3.14 Esercizio Fissiamo due strutture $M \preceq N$ e sia $\varphi(x)$ una formula a parametri in M. Si dimostri che se $\varphi(N)$ è finito allora $\varphi(N) = \varphi(M)$. □

3.15 Esercizio Supponiamo che al variare di a in N gli insiemi della forma $\varphi(a, N)$ siano in numero finito. Sia $M \preceq N$ arbitrario. Dimostrare che tutti gli insiemi della forma $\varphi(a, N)$ sono definibili con parametri in M. □

3.3 Immersioni, isomorfismi, ed automorfismi

Ora dimostriamo un fatto abbastanza scontato: due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti. Dobbiamo definire la nozione di isomorfismo tra strutture. La clausula 2 della seguente definizione generalizza in maniera ovvia la nozione di isomorfismo tra gruppi o anelli. La clusula 1 è anche naturale se si pensa a due grafi isomorfi o all'isomorfismo di due anelli ordinati.

3.16 Definizione *Siano M ed N due strutture ed $h : M \to N$ una biiezione. Diremo che h è un* ***isomorfismo*** *tra M ed N se*

1. $a \in r^M \Leftrightarrow ha \in r^N$, *per ogni $r \in L_{\rm rel}$ ed $a \in M^{\mathrm{Ar}(r)}$;*

2. $h f^M(a) = f^N(h a)$, *per ogni $f \in L_{\rm fun}$ ed $a \in M^{\mathrm{Ar}(f)}$.*

Si noti che nel caso delle costanti la condizione 2 si legge $hc^M = c^N$.

Dirermo che $h : M \to N$ è un' ***immersione*** *se è semplicemente iniettiva e soddisfa le condizioni 1 e 2. Si osservi che in questo caso $h[M]$ è una sottostruttura di N isomorfa ad M. Vedi esercizio 3.21. Un isomorfismo il cui dominio coincide con il codominio si dice un* ***automorfismo****.*

La condizione 1 può essere riscritta come

1'. $M \vDash r(a) \Leftrightarrow N \vDash r(ha)$, per ogni $r \in L_{\rm rel}$ ed ogni tupla $a \in M^{\mathrm{Ar}(r)}$.

Un'immediata induzione sulla sintassi dimostra che la condizione 2 è equivalente alla seguente più generale:

2' $h\, t^M(a) = t^N(h\, a)$, per ogni termine $t(x)$ ed ogni tupla $a \in M^{|x|}$.

Suona ovvio che due strutture isomorfe siano elementarmente equivalenti, la dimostrazione è comunque abbastanza laboriosa. La divideremo in due parti, la prima parte vale per tutte le immersioni:

3.17 Lemma *Siano M ed N due strutture. Se $h : M \to N$ è un'immersione allora*

$$M \vDash \varphi(a) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(ha), \text{ per ogni } \varphi(x) \in L \text{ senza quantificatori ed } a \in M^{|x|}.$$

In particolare, se M è una sottostruttura di N allora

$$M \vDash \varphi(a) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(a), \quad \text{per ogni } \varphi(x) \in L \text{ senza quantificatori ed } a \in M^{|x|}.$$

Dimostrazione Si osservi che la seconda parte del lemma segue dalla prima prendendo per h la funzione id_M. La dimostrazione della prima affermazione procede per induzione sulla sintassi di $\varphi(x)$. Il passo induttivo riguarda solo i connettivi booleani ed è ovvio. Il caso delle formule atomiche segue da 1' e 2', infatti per ogni predicato r ed ogni tupla di termini $t(x)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} M \vDash r\, t(a) &\Leftrightarrow M \vDash r\big(t^M(a)\big) & \\ &\Leftrightarrow N \vDash r\big(ht^M(a)\big), & \text{per 1'} \\ &\Leftrightarrow N \vDash r\big(t^N(ha)\big), & \text{per 2'} \\ &\Leftrightarrow N \vDash r\, t(ha) & \end{aligned}$$

Simili equivalenze si ottengono se al posto di r prendiamo l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} M \vDash t(a) = s(a) &\Leftrightarrow t^M(a) = s^M(a) & \\ &\Leftrightarrow ht^M(a) = hs^M(a) & \text{il verso} \Leftarrow \text{usa l'iniettività} \\ &\Leftrightarrow t^N(ha) = s^N(ha) & \text{per 2'} \\ &\Leftrightarrow N \vDash s(ha) = t(ha) & \square \end{aligned}$$

Siano M ed N due strutture che contengono A. Diremo che un'immersione **fissa (puntualmente)** A se $\mathrm{id}_A \subseteq h$.

3.18 Teorema *Se $h : M \to N$ è un isomorfismo allora*

$$M \vDash \varphi(a) \quad \Leftrightarrow \quad N \vDash \varphi(ha), \text{ per ogni } \varphi(x) \text{ pura ed } a \in M^{|x|}.$$

In particolare, se h fissa puntualmente un qualche insieme $A \subseteq M \cap N$ allora $M \equiv_A N$.

Dimostrazione Per cominciare, notiamo che la seconda affermazione è effettivamente un caso particolare della prima: se leggiamo il teorema prendendo come a tuple di elementi di A, otteniamo $M \equiv_A N$ dalla proposizione 3.8.

Dimostriamo quindi la prima affermazione procedendo per induzione sulla sintassi di $\varphi(x)$. Il caso delle formule atomiche vale per il lemma 3.17. I passi induttivi per i quantificatori booleani sono immediati. Vediamo il passo induttivo per il quantificatore esistenziale. Assumiamo che il teorema valga per la formula $\varphi(x, y)$, dove x è una tupla e y una variabile, e dimostriamolo per la formula $\exists y\, \varphi(x, y)$. Per la precisione, la nostra ipotesi induttiva è

$$M \vDash \varphi(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad N \vDash \varphi(ha, hb) \quad \text{per ogni tupla } a \text{ ed elemento } b \text{ in } M.$$

Fissiamo a, otteniamo facilmente

$$\begin{aligned}
M \vDash \exists y\, \varphi(a, y) \quad &\Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi(a, b) && \text{per una elemento } b \text{ di } M \\
&\Leftrightarrow \quad N \vDash \varphi(ha, hb) && \text{per una elemento } b \text{ di } M \text{ per ipotesi induttiva} \\
&\Leftrightarrow \quad N \vDash \varphi(ha, c) && \text{per un elemento } c \text{ di } N \qquad \text{il verso} \Leftarrow \text{usa la suriettività} \\
&\Leftrightarrow \quad N \vDash \exists y\, \varphi(ha, y).
\end{aligned}$$

□

3.19 Corollario *Siano M ed N due strutture che contengono A. Se $h : M \to N$ è un isomorfismo che fissa puntualmente A allora $h[\varphi(M)] = \varphi(N)$ per ogni formula $\varphi(x)$ a parametri in A.* □

Notiamo che questo corollario è uno strumento per dimostrare che un certo sottoinsieme non è definibile. Se $D \subseteq N$ ed $h : N \to N$ è un automorfismo tale che $h[D] \neq D$, allora D non è un sottoinsieme definibile di N. (Il viceversa non vale.) Il capitolo 12 è dedicato al rapporto tra definibilità ed automorfismi.

3.20 Esempio Siamo ora in grado di dare un paio di semplicissimi esempi di estensioni elementari. Cominciamo però con un non-esempio. Nel linguaggio degli ordini stretti L_{os}, consideriamo gli intervalli razionali come strutture con l'interpretazione naturale dell'ordine. Gli intervalli $[0, 1]$ e $[0, 2]$ sono ovviamente isomorfi, quindi per il teorema 3.18 sono strutture elementarmente equivalenti. Però $[0, 1] \not\preceq [0, 2]$, infatti la formula $\forall x\, (x \leq 1)$ è vera in $[0, 1]$ ma falsa in $[0, 2]$.

Osserviamo che $[0, 1]$ è una sottostruttura di $[0, 2]$. Quindi quest'esempio mostra in particolare che affermare *sottostruttura elementare* è più forte che affermare la congiunzione di *sottostruttura* ed *elementarmente equivalente*.

Mostriamo invece che $(0, 1) \preceq (0, 2)$. Per l'esercizio 3.13, questo equivale ad affermare $(0, 1) \equiv_A (0, 2)$ per ogni A sottoinsieme finito di $(0, 1)$. Quest'ultima proprietà è facile da verificare: sia b il massimo elemento di A, e sia $h : (0, 1) \to (0, 2)$ un isomorfismo che fissa l'intervallo $(0, b]$ e mappa l'intervallo $(b, 1)$ in $(b, 2)$. Poiché $h \restriction A = \mathrm{id}_A$, allora dal teorema 3.18 otteniamo $(0, 1) \equiv_A (0, 2)$. □

3.21 Esercizio Si dimostri che se $h : M \to N$ è un'immersione allora $h[M]$ è una sottostruttura di N e $h : M \to h[M]$ è un isomorfismo. □

3.22 Esercizio Sia $h : N \to N$ un automorfismo e sia $M \preceq N$. Si verifichi $h[M] \preceq N$. □

3.4 Completezza

Diremo che la teoria T è **coerente massimale** se non è contenuta propriamente in nessun'altra teoria coerente. Equivalentemente, se T contiene ogni enunciato φ **consistente con** T, cioè tale che $T \cup \{\varphi\}$ è consistente. Chiaramente una teoria coerente massimale è sempre chiusa per conseguenze logiche.

Diremo che la teoria T è **completa** se $\mathrm{ccl}\,T$ è coerente massimale. Data una teoria assiomizzata esplicitamente non è sempre facile capire se questa sia completa o meno. Nei prossimi capitoli vedremo alcune utili condizioni sufficienti per la completezza.

3.23 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *T è coerente massimale;*

b. *esiste una struttura M tale che $T = \mathrm{Th}(M)$;*

c. *T è consistente e $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$ per ogni enunciato φ.*

Dimostrazione Dimostriamo a$\Rightarrow$b. Poiché T è coerente, esiste $M \vDash T$. allora $T \subseteq \mathrm{Th}(M)$. Quindi, se T è massimale consistente $T = \mathrm{Th}(M)$. L'implicazione b$\Rightarrow$c vale perché c diventa ovvia se per T prendiamo $\mathrm{Th}(M)$. Per dimostrare c$\Rightarrow$a si osservi che se $T \cup \{\varphi\}$ è consistente allora $\neg\varphi \notin T$ e, per c, otteniamo $\varphi \in T$. □

La seguente proposizione è raccomandata come esercizio per il lettore, includiamo comunque la soluzione.

3.24 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

a. *T è completa;*

b. *esiste un'unica teoria coerente massimale S tale che $T \subseteq S$;*

c. *T è coerente e $T \vdash \mathrm{Th}(M)$ dove M è un qualsiasi modello di T;*

d. *T è coerente e $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$ per ogni enunciato φ;*

e. *T è coerente e $M \equiv N$ per ogni coppia di modelli di T.*

Dimostrazione Dimostriamo a$\Rightarrow$b. È immediato verificare che se $T \subseteq S$ allora $\mathrm{ccl}(T) \subseteq \mathrm{ccl}(S)$. Come osservato sopra se S è coerente massimale allora $S = \mathrm{ccl}(S)$. Quindi se $T \subseteq S$ allora $\mathrm{ccl}(T) \subseteq S$. Se T è completa, $\mathrm{ccl}(T)$ è coerente massimale quindi $\mathrm{ccl}(T) = S$. Dimostriamo b$\Rightarrow$c. La coerenza di T segue da b per l'esistenza di S. Sia $M \vDash T$ arbitrario. Se $T \nvdash \mathrm{Th}(M)$ esisterebbe $N \vDash T$ tale che $N \nvDash \mathrm{Th}(M)$ quindi $\mathrm{Th}(N) \neq \mathrm{Th}(M)$. Ma $\mathrm{Th}(M)$ e $\mathrm{Th}(N)$ sono coerenti massimali. Questo contraddice l'unicità. Dimostriamo c$\Rightarrow$d. Assumiamo c e sia φ un enunciato tale che $T \nvdash \varphi$. Quindi esiste un modello M tale che $M \vDash T$ e $M \nvDash \varphi$. Quindi $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(M)$ e d segue da $T \vdash \mathrm{Th}(M)$. Dimostriamo la contronominale di d$\Rightarrow$e. Siano $M \not\equiv N$ due modelli di T e fissiamo un enunciato φ tale che $M \vDash \varphi$ e $N \vDash \neg\varphi$.

Quindi non è vero né $T \vdash \varphi$ né $T \vdash \neg\varphi$. Dimostriamo e $\Rightarrow$ a. Assumiamo e e dimostriamo che $\mathrm{ccl}(T)$ è coerente massimale. La coerenza è ovvia. Sia φ un enunciato arbitrario e supponiamo che $\varphi \notin \mathrm{ccl}(T)$. Allora esiste un modello di T tale che $M \vDash \neg\varphi$. Quindi per e, $M \vdash \neg\varphi$ in tutti i modelli di T. Allora $\neg\varphi \in \mathrm{ccl}(T)$. □

3.25 Esercizio Sono le seguenti affermazioni equivalenti ad affermare che T è coerente massimale, rispettivamente, completa?

a. per ogni enunciato φ, o $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$ ma non entrambe;

b. per ogni enunciato φ, o $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$ ma non entrambe.

(Dalle definizioni di completezza abbiamo omesso il requisito di consistenza e aggiunto la clausola 'non entrambe'.) Si risponda alla domanda anche nel caso in cui T sia chiusa per conseguenza logica. Suggerimento: può tornare utile considerare il seguente esempio. La teoria T contiene tutte gli enunciati in cui il simbolo '$\neg$' occorre un numero pari di volte. Questa teoria è contraddittoria perché contiene $\bot$. Soddisfa a? Soddisfa b? È chiusa per conseguenza logica? □

3.5 Un esempio: l'analisi nonstandard

Questo paragrafo è dedicato ad un esempio che analizzeremo un po' in dettaglio perché è utile per impratichirsi con la relazione di sottostruttura elementare. Questo esempio è comunque culturalmente interessante. Infatti dà rigore matematico al formalismo usato ai tempi di Leibniz e Newton per fare analisi matematica. Allora l'analisi matematica era fondata sui concetti di infinito e di infinitesimo, nozioni che al tempo erano mal definite se non contraddittore. Solo dalla metà dell'ottocento i matematici della generazione di Weistraß rimediarono a questi vizi di forma fondando l'analisi matematica sul concetto di limite. L'analisi non standard invece recupera la dignità matematica degli infiniti ed infinitesimi usando il concetto di estensione elementare. Fu scoperta verso la metà del novecento da Abraham Robinson.

Fissiamo un po' di notazione valida per tutto il paragrafo. Il linguaggio che useremo contiene

1. un simbolo di relazione n-aria per ogni $X \subseteq \mathbb{R}^n$;

2. un simbolo di funzione n-aria per ogni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

Chiameremo $\mathbb{R}$, con la naturale interpretazione dei simboli, il **modello standard dell'analisi reale**. Quindi lo stesso simbolo denota elementi del linguaggio e l'interpretazione in $\mathbb{R}$. Non si tratta di un abuso di linguaggio, sono proprio la stessa cosa !

Assumiamo che esista una estensione elementare propria di $\mathbb{R}$ e fissiamone una che indicheremo con ${}^*\mathbb{R}$. L'esistenza di questa estensione verrà dimostrata più avanti.

L'interpretazione dei simboli f ed X in ${}^*\mathbb{R}$ verrà indicata con ${}^*\boldsymbol{f}$ e ${}^*\boldsymbol{X}$. Gli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ verranno chiamati **iperreali**, gli elementi di $\mathbb{R}$ li chiameremo **(iper)reali standard**, quelli in ${}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ li chiameremo **(iper)reali nonstandard**.

È immediato verificare che ${}^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato. Infatti, le operazioni di somma e prodotto appartengono al linguaggio, come pure la relazione d'ordine. La proprietà di essere un campo ordinato è traducibile in un insieme di enunciati che, essendo veri in $\mathbb{R}$, saranno veri anche in ${}^*\mathbb{R}$.

Un iperreale c si dice **infinitesimo** se $|c| < \varepsilon$ per ogni ε standard positivo. Un iperreale c si dice **infinito** se $k < |c|$ per ogni k standard, altrimenti si dice **finito**. Quindi se c è infinito c^{-1} è infinitesimale. Ovviamente, tutti i reali standard sono finiti e 0 è l'unico reale standard infinitesimo.

3.26 Lemma *Esistono iperreali nonstandard infiniti ed infinitesimi non nulli.*

Dimostrazione Sia $c \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ e supponiamo che c non sia infinito, altrimenti c e c^{-1} dimostrano il lemma. Quindi l'insieme $\{a \in \mathbb{R} : c < a\}$ è un insieme non vuoto e limitato di reali. Sia $b \in \mathbb{R}$ l'estremo inferiore di questo insieme. Mostriamo che $b - c$ è infinitesimo non nullo. Non è nullo perchè $c \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Inoltre, se per assurdo che $\varepsilon < |b - c|$ per qualche ε standard positivo, allora $c < b - \varepsilon$, oppure $b + \varepsilon < c$, (a seconda se $c < b$ o $b < c$). Entrambe queste possibilità contraddiocono le proprietà dell'estremo inferiore. □

L'esistenza di iperreali nonstandard infiniti prova che ${}^*\mathbb{R}$ non è un campo archimedeo: gli interi standard non sono cofinali in ${}^*\mathbb{R}$. Si osservi che però, per elementarità, gli interi nonstandard ${}^*\mathbb{Z}$ sono cofinali in ${}^*\mathbb{R}$: nella prospettiva di chi vive in ${}^*\mathbb{R}$, si tratta di un normalissimo campo archimedeo.

La dimostrazione del seguente lemma è lasciata al lettore.

3.27 Lemma *Gli infinitesimi sono chiusi per somma prodotto e sono anche chiusi rispetto alla moltiplicazione per reali standard.*

La completezza di Dedekind è un'altra proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$ che non vale in ${}^*\mathbb{R}$. Questa dice che ogni sottoinsieme limitato superiormente ha un estremo superiore. In ${}^*\mathbb{R}$ non vale: infatti l'insieme degli infinitesimi è ovviamente limitato ma, per il lemma 3.27, non ha estremo superiore. Quindi la completezza di Dedekind *non* è una proprietà del prim'ordine. Comunque in casi particolari è preservata nel passaggio dai reali standard agli iperreali. Come succede spesso, proprietà che nel modello standard valgono per tutti gli insiemi valgono in ${}^*\mathbb{R}$ solo per gli insiemi definibili.

3.28 Lemma *Ogni sottoinsieme di ${}^*\mathbb{R}$ di arietà 1, definibile (anche con parametri), e limitato superiormente ha un estremo superiore.*

Si noti che il lemma si riferisce a insiemi i definibili con parametri in ${}^*\mathbb{R}$, altrimenti la dimostrazione sarebbe immediata.

Dimostrazione Sia x una singola variabile, a una tupla di parametri in ${}^*\mathbb{R}$ e sia $\varphi(z, x)$ una formula pura. Dobbiamo mostrare che se $\varphi(a, {}^*\mathbb{R})$ è limitato allora ha un estremo superiore. La seguente formula $\psi(z, y)$ dice che y è un maggiorante dell'insieme definito da $\varphi(z, x)$ con z una tupla di parametri:

$$\psi(z, y) \ = \ \forall x \left[\varphi(z, x) \to x \leq y\right].$$

La seguente formula $\xi(z, w)$ dice che w è l'estremo superiore (il minimo dei maggioranti) dell'insieme definito da $\varphi(z, x)$.

$$\xi(z, w) \ = \ \psi(z, y) \ \wedge \ \forall y \left[\psi(z, y) \to w \leq y\right].$$

Quindi dobbiamo mostrare che in ${}^*\mathbb{R}$ vale $\exists y\, \psi(z, y) \ \to \ \exists w\, \xi(z, w)$. Questa è una formula del prim'ordine che vale in $\mathbb{R}$ è quindi vale anche in ogni sua estensione elementare. □

Definiamo su ${}^*\mathbb{R}$ una relazione di equivalenza: scriveremo $a \approx b$ se $a - b$ è infinitesimo. Che sia effettivamente una relazione di equivalenza, segue facilmente dal lemma 3.27. La classe di equivalenza di c si chiama **monade** di c, in onore di Leibniz.

3.29 Lemma *Se c è un iperreale finito, nella monade di c esiste un'unico reale.*

Dimostrazione Per l'esistenza è sufficiente scorrere la dimostrazione del lemma 3.26 e osservare che il reale standard b è tale che $b \approx c$. Per l'unicità osserviamo che se $b_1 \approx b_2$ sono entrambi standard, allora $b_1 - b_2$ è un infinitesimo standard, quindi 0. □

Gli iperreali che non sono infiniti si dicono **finiti**. Se c è finito, quell'unico reale standard nella monade di c si chiama **parte standard** di c e si denota con $\mathbf{st}(c)$.

Si noti che nel seguente lemma le espressioni alla sinistra si formalizzano direttamente in enunciati del prim'ordine quindi valgono in $\mathbb{R}$ se e solo se valgono in ${}^*\mathbb{R}$.

3.30 Proposizione *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per ogni $a, l \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti equivalenze.*

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *è infinito positivo per ogni c infinito.*

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f x = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *per ogni $c > 0$ infinito.*

c. $\lim\limits_{x \to a} f x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *è infinito positivo per ogni $c \approx a \neq c$.*

d. $\lim\limits_{x \to a} f x = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *per ogni per ogni $c \approx a \neq c$.*

Dimostrazione Dimostriamo d e lasciamo le altre per esercizio. Per dimostrare la direzione $\Rightarrow$ assumiamo la parte sinistra dell'equivalenza d e la riscriviamo come formula del prim'ordine:

1. $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \Big[0 < |x - a| < \delta \;\; \rightarrow \;\; |f x - l| < \varepsilon \Big].$$

La nostra ipotesi dice che formula 1 è vera in $\mathbb{R}$, o equivalentemente in ${}^*\mathbb{R}$. Abbiamo usato alcune abbreviazioni che supponiamo il lettore sappia tradurre in formule e per avvicinarci alla notazione usata in analisi useremo le lettere ε e δ come variabili. I simboli $\dot\varepsilon$ e $\dot\delta$ denoteranno parametri.

Verifichiamo ora che ${}^*f(c) \approx l$ vale per ogni $c \approx a \neq c$, ovvero che $|{}^*f c - l| < \dot\varepsilon$ per ogni $\dot\varepsilon$ standard positivo. Fissiamo $\dot\varepsilon$ standard positivo, sia $\dot\delta$ un reale standard ottenuto dalla verità di 1 in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

$${}^*\mathbb{R} \vDash \forall x \Big[0 < |x - a| < \dot\delta \;\; \rightarrow \;\; |f x - l| < \dot\varepsilon \Big],$$

dove $\dot\varepsilon$ e $\dot\delta$ ora stanno per parametri. Se $a \approx c \neq a$, allora $0 < |c - a| < \dot\delta$ è sicuramente soddisfatta (perché $\dot\delta$ è standard). Quindi da 1, otteniamo $|{}^*f c - l| < \dot\varepsilon$.

Per dimostrare la direzione $\Leftarrow$ supponiamo 1 sia falsa. Ovvero, in $\mathbb{R}$ vale

2. $$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \Big[0 < |x - a| < \delta \;\; \wedge \;\; \varepsilon \leq |f x - l| \Big],$$

vogliamo dimostrare che ${}^*f(c) \not\approx l$ per qualche $c \neq a$ infinitamente vicino ad a. Fissiamo un $\dot\varepsilon$ che testimonia la verità di questa formula in $\mathbb{R}$, un reale standard dunque. Ora, per elementarità osserviamo che

$${}^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0\, \exists x \Big[0 < |x - a| < \delta \;\; \wedge \;\; \dot\varepsilon \leq |f x - l| \Big].$$

Quindi fissiamo un arbitraio $\dot{\delta}$ infinitesimo. Otteniamo

$$^*\mathbb{R} \vDash \exists x \left[0 < |x - a| < \dot{\delta} \ \wedge \ \dot{\varepsilon} \leq |f x - l| \right].$$

Un qualsiasi c che testimonia la verità di questa formula in $^*\mathbb{R}$ è tale che $c \approx a \neq c$ e contemporaneamente $\varepsilon \leq |^*f c - l|$, ma $\dot{\varepsilon}$ è stato scelto standard, quindi $^*f c \not\approx l$. □

Il seguente corollario è immediato.

3.31 Corollario *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *f è continua*

b. *$^*f(a) \approx {}^*f(c)$ per ogni per ogni a standard e ogni iperreale $c \approx a$;*

c. *$^*f(b) \approx {}^*f(c)$ per ogni $b \approx c$ iperreali finiti.* □

È importante nel corollario qui sopra restringere c a iperreali *finiti* altrimenti otteniamo una proprietà più forte:

3.32 Proposizione *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *f è uniformemente continua;*

b. *$^*f(a) \approx {}^*f(b)$ per ogni coppia di iperreali $a \approx b$.*

Dimostrazione Dimostriamo a ⇒ b. Ricordiamo che f è uniformemente continua se

1. $$\mathbb{R} \vDash \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \left[|x - y| < \delta \ \to \ |f x - f y| < \varepsilon \right].$$

Assumiamo a e fissiamo $a \approx b$. Vogliamo mostrare che $|^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot{\varepsilon}$ per ogni $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Fissato $\dot{\varepsilon}$ standard positivo, sia $\dot{\delta}$ un reale standard ottenuto dalla validità di 1 in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

2. $$^*\mathbb{R} \vDash \forall x, y \left[|x - y| < \dot{\delta} \ \to \ |f x - f y| < \dot{\varepsilon} \right].$$

In particolare

$$^*\mathbb{R} \vDash \ |a - b| < \dot{\delta} \ \to \ |f a - f b| < \dot{\varepsilon}.$$

Poiché $a \approx b$ allora $|a - b| < \dot{\delta}$ per qualunque $\dot{\delta}$ standard. Quindi $|^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot{\varepsilon}$.

Per dimostrare b ⇒ a neghiamo a

3. $$\mathbb{R} \vDash \exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x, y \left[|x - y| < \delta \ \wedge \ \varepsilon \leq |f x - f y| \right].$$

Vogliamo trovare $a \approx b$ tali che $\dot{\varepsilon} \leq |^*f(a) - {}^*f(b)|$ per un qualche $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Sia $\dot{\varepsilon}$ un reale standard che testimonia la verità di 3 in $\mathbb{R}$. Per elementarità otteniamo

$$^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0 \, \exists x, y \left[|x - y| < \delta \ \wedge \ \dot{\varepsilon} \leq |f x - f y| \right].$$

Quindi possiamo fissare un arbitrario infinitesimo $\dot{\delta} > 0$ ed ottenere $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ tali che

$$^*\mathbb{R} \vDash |a - b| < \dot{\delta} \ \wedge \ \dot{\varepsilon} \leq |f a - f b|.$$

Poiché $\dot{\delta}$ è infinitesimo, $a \approx b$ come richiesto per negare b. □

3.33 Esercizio Si dimostri che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva allora ${}^*f\,a \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ per ogni $a \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$. □

3.34 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X è un insieme finito;
2. ${}^*X = X$. □

3.35 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X è un aperto nell'usuale topologia di $\mathbb{R}$;
2. $b \approx a \in {}^*X \;\Rightarrow\; b \in {}^*X$ per ogni a standard e b arbitrario. □

3.36 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X è un chiuso nell'usuale topologia di $\mathbb{R}$;
2. $a \in {}^*X \;\Rightarrow\; \operatorname{st} a \in {}^*X$ per ogni finito a. □

3.37 Esercizio Si dimostri che $\mathbb{R}$ ed $\varnothing$ sono gli unici due sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ tali che:

$b \approx a \in {}^*X \;\Rightarrow\; b \in {}^*X$ per ogni coppia di iperreali a, b. □

3.38 Esercizio Si dimostri che $|\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{Q}|$ ovvero che ${}^*\mathbb{Q}$ ha almeno la cardinalità del continuo. (Suggerimento: si definisca una funzione iniettiva $f : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{Q}$ scegliendo nella monade di ogni reale standard un razionale nonstandard.) □

3.6 Il criterio di Tarski-Vaught

Non esiste una nozione naturale di sottostruttura elementare generata da un qualche insieme di parametri: un analogo del lemma 1.19 per sottostrutture elementari non può essere dimostrato (a meno di non fare ipotesi sulle teorie delle strutture in questione).

Il risultato più forte che possiamo ottenere in generale verrà dimostrato nel prossimo paragrafo: è il teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù. Faremo vedere che dato un qualsiasi $A \subseteq N$ esiste un modello $A \subseteq M \preceq N$, dove M è il più piccolo possibile nel senso della cardinalità. La struttura M verrà costruita selezionando gli elementi che servono tra quelli di N, cercando di limitarsi al minimo necessario. Necessario per cosa ? L'obiettivo è $M \preceq N$. Purtroppo la condizione della definizione di $M \preceq N$ menziona la verità in M. Ma M è la struttura che stiamo costruendo e, ai passi intermedi, non abbiamo nessun controllo su come questa valuti gli enunciati che contengono dei quantificatori. Il seguente lemma viene in aiuto perché mostra che $M \preceq N$ è equivalente ad una condizione che menziona solo la verità in N.

3.39 Lemma (criterio di Tarski-Vaught) *Per ogni $A \subseteq N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è il dominio di una struttura $M \preceq N$;*

2. *per ogni formula $\varphi(x) \in L(A)$, con $|x| = 1$,*
   $N \vDash \exists x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; N \vDash \varphi(b)$ *per un qualche $b \in A$.*

Dimostrazione La direzione $1 \Rightarrow 2$ si verifica direttamente:

$$\begin{aligned} N \vDash \exists x\, \varphi(x) &\Rightarrow M \vDash \exists x\, \varphi(x) \\ &\Rightarrow M \vDash \varphi(b) \qquad \text{per qualche } b \in M \\ &\Rightarrow N \vDash \varphi(b) \qquad \text{per qualche } b \in M \end{aligned}$$

Per dimostrare $2 \Rightarrow 1$ dimostriamo, per prima cosa che A è il dominio di una sottostruttura di N. Dobbiamo verificare che $f^N a \in A$ per ogni simbolo di funzione f e per ogni tupla $a \in A^{\mathrm{Ar}(f)}$. Ma questo segue da 2 prendendo come $\varphi(x)$ la formula $f a = x$.

Sia quindi M la sottostruttura di N con dominio A. Ora dimostriamo la seguente equivalenza per induzione sulla sintassi della formula $\varphi(x)$

$$M \vDash \varphi(a) \;\Leftrightarrow\; N \vDash \varphi(a) \qquad \text{per ogni tupla } a \text{ di elementi di } M.$$

Il passo base dell'induzione è assicurato da $M \subseteq N$ e dal lemma 3.17. Il passo induttivo per i connettivi booleani è immediato, usa solo l'ipotesi induttiva. Dimostriamo ora il passo induttivo per il quantificatore esistenziale.

$$\begin{aligned} M \vDash \exists x\, \varphi(a, x) &\Leftrightarrow M \vDash \varphi(a, b) \qquad \text{per qualche } b \in M \\ \text{a.} \qquad &\Leftrightarrow N \vDash \varphi(a, b) \qquad \text{per qualche } b \in M \\ \text{b.} \qquad &\Leftrightarrow N \vDash \exists x\, \varphi(a, x). \end{aligned}$$

L'equivalenza a vale per l'ipotesi induttiva e solo la direzione $\Leftarrow$ dell'equivalenza b usa l'ipotesi 2. □

3.7 Il teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù

Il seguente teorema, è uno dei primissimo risultati di teoria dei modelli. È stato dimostrato da Löwenheim nei primi anni del secolo scorso e ridimostrato in forma semplificata qualche anno dopo da Skolem. All'epoca il risultato venne percepito come paradossale. Qualche anno prima i lavori di Zermelo e di Fraenkel avevano convinto la comunità scientifica che l'intera teoria degli insiemi potesse essere formalizzata con un linguaggio del prim'ordine. Il teorema Löwenheim-Skolem all'ingiù implica l'esistenza di un modello numerabile della teoria degli insiemi: questo è chiamato il **paradosso di Skolem**. È paradossale perché M rende vero, tra l'altro, l'enunciato che formalizza l'assioma delle parti, quindi M contiene un elemento b che, dal punto di vista di M, è l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri naturali. Ma l'insieme degli elementi di b è un sottoinsieme di M ed è quindi numerabile. Non è una contraddizione, semplicemente l'espressione: *tutti* i sottoinsiemi dei naturali, non ha in M lo stesso significato che ha nel mondo reale. Anche la nozione di cardinalià assume un significato diverso. Nel linguaggio della teoria degli insiemi è possibile formalizzare al prim'ordine: b non è numerabile. Basta dire che non esiste nessuna biiezione tra b e i numeri naturali. Quindi la biiezione tra gli elementi di b ed i numeri naturali (che esiste nel mondo reale) non appartiene ad M. Il concetto di equipotente in M ha un altro significato che nella realtà – anche se chi vive dentro M non se ne può rendere conto.

3.40 Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù. *Sia N una struttura infinita di segnatura L e fissiamo $A \subseteq N$. Allora esiste una struttura M di cardinalità $\leq |L| + |A| + \omega$ tale che $A \subseteq M \preceq N$.*

Dimostrazione Scriviamo λ per $|L| + |A| + \omega$. Costruiamo M come unione di una catena $\langle A_i : i < \omega \rangle$ di sottoinsiemi di N di cardinalità $\leq \lambda$ che definiremo per induzione transfinita.

Definiamo $A_0 = A$ e supponiamo di avere già costruito l'insieme $A_i \subseteq N$. Per ipotesi induttiva A_i ha cardinalità $\leq \lambda$; anche il linguaggio L ha cardinalità $\leq \lambda$. Segue che anche il numero delle formule con parametri in A_i ha cardinalità $\leq \lambda$. Fissiamo una variabile x ed enumeriamo tutte le formule $\langle \varphi_k(x) \ : \ k < \lambda \rangle$ con parametri in A_i che sono consistenti in N. Poi per ogni $k < \lambda$ fissiamo una soluzione a_k di $\varphi_k(x)$. Definiamo $A_{i+1} = A_i \cup \{a_k \ : \ k < \lambda\}$.

Ora usiamo il criterio di Tarski-Vaught per dimostrare che M è una sottostruttura elementare di N. Sia $\varphi(x)$ una formula a parametri in M e consistente in N. Siccome in $\varphi(x)$ occorre un numero finito di parametri, questi saranno tutti contenuti in un qualche A_i. Quindi $\varphi(x)$ è una delle formule $\varphi_k(x)$ enumerate al passo $i+1$. Quindi $A_{i+1} \subseteq M$ contiene a_k, una soluzione di $\varphi(x)$. Infine per verificare che $|M| \leq \lambda$ basta osservare che $|A_i| \leq \lambda$ per ogni i. La cardinalità di M è quindi $\leq \omega \cdot \lambda = \lambda$. □

3.41 Dimostrazione del teorema 3.40, seconda versione. Più avanti ci capiterà di dover adattare questa costruzione per un ottenere un modello M che soddisfi ad ulteriori richieste. Per avere un maggiore controllo sulla costruzione è necessario che ogni passo aggiunga ad A_i un unico elemento. Sarà necessaria una catena $\langle A_i : i < \omega \rangle$ di lunghezza λ. L'enumerazione delle formule deve essere fatta con cura per garantire che la costruzione termini al passo λ.

Definiamo $A_0 = A$ e supponiamo di avere già costruito l'insieme $A_i \subseteq N$ con $i < \lambda$. Come nella prima dimostrazione, fissiamo una variabile x ed enumeriamo tutte le formule $\langle \varphi_k(x) \ : \ k < \lambda \rangle$ con parametri in A_i che sono consistenti in N. Ora, sia $i = \langle i_1, i_2 \rangle$, in una fissata enumerazione di λ^2 di lunghezza λ e scegliamo b soluzione della i_1-esima formula a parametri in A_{i_2}. Definiamo $A_{i+1} = A_i \cup \{b\}$. Come nella prima dimostrazione, ai passi limite si prende l'unione.

Ora usiamo il criterio di Tarski-Vaught per dimostrare che M è una sottostruttura elementare di N. Sia $\varphi(x)$ una formula a parametri in M e consistente in N. Siccome in $\varphi(x)$ occorre un numero finito di parametri, questi saranno tutti contenuti in un qualche A_{i_2}. Supponiamo che $\varphi(x)$ sia la formula $\varphi_{i_1}(x)$ nella enumerazione fissata delle formule su A_{i_2}. Posto $i = \langle i_1, i_2 \rangle$, per costruzione $A_{i+1} \subseteq M$ contiene una soluzione di $\varphi(x)$. La verifica di $|M| \leq \lambda$ è immediata. □

3.42 Esercizio Con la notazione usata nella dimostrazione del teorema di Löwenheim-Skolem, si dimostri che $A_i \subseteq \{a_k \ : \ k < \lambda\}$. (Quindi nella definizione data: $A_{i+1} = A_i \cup \{a_k \ : \ k < \lambda\}$, il ruolo di A_i è pleonastico.) □

3.43 Esercizio Siano $M \preceq N$ due strutture di segnatura numerabile e di cardinalità arbitraria e sia $A \subseteq N$ un insieme numerabile. Esiste sempre una struttura numerabile $K \preceq N$ che contiene A ed è tale che $K \cap M \preceq N$? Suggerimento: non basta applicare Löwenheim-Skolem, serve adattarne la dimostrazione. $\square$

Capitolo 4

Ultraprodotti e compattezza

4.1 Filtri e ultrafiltri

Sia I un insieme arbitrario. Un **filtro in $\mathcal{P}(I)$** (o **filtro su I**), l'insieme dei sottoinsiemi di I, è un insieme $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ non vuoto che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $a, b \in \mathcal{P}(I)$:

f1. $a \in F$ e $a \subseteq b \;\Rightarrow\; b \in F$

f2. $a \in F$ e $b \in F \;\Rightarrow\; a \cap b \in F$

Diremo che F è un **filtro proprio** se $F \neq \mathcal{P}(I)$ o, equivalentemente, se $\varnothing \notin F$. Diremo che è **principale** se $F = \{a \subseteq I \,:\, b \subseteq a\}$ per un qualche $b \subseteq I$. I filtri cui siamo interessati sono quelli **non** principali. Se I è infinito esistono filtri non principali, per esempio **filtro di Fréchet**: l'insieme di tutti i sottoinsiemi cofiniti (il cui complemento è finito) di I.

Un filtro proprio F si dice **massimale** se non esiste alcun filtro proprio H tale che $F \subset H$. Un filtro proprio F si dice un **ultrafiltro** se per ogni $a \subseteq I$:

uf. $a \notin F \;\Rightarrow\; \neg a \in F$ dove $\neg a \overset{\text{def}}{=} I \smallsetminus a$

Dimostreremo tra poco che gli ultrafiltri coincidono con i filtri massimali.

È immediato verificare che l'intersezione di una famiglia arbitraria di filtri è un filtro, quindi dato un sottoinsieme arbitrario $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ possiamo definire il **filtro generato da B** come l'intersezione di tutti i filtri che contengono B. Ora vogliamo caratterizzare gli insiemi B che generano un filtro proprio. Serve la seguente nozione: diremo che B ha la **proprietà dell'intersezione finita** se $\bigcap C \neq \varnothing$ per ogni insieme finito $C \subseteq B$. Il seguente lemma è immediato.

4.1 Lemma *Sia $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ un insieme non vuoto. Il filtro generato da B è l'insieme*

$$\Big\{a \subseteq I \,:\, \bigcap C \subseteq a \text{ per qualche } C \subseteq B \text{ finito}\Big\},$$

quindi è un filtro proprio esattamente quando B ha la proprietà dell'intersezione finita. □

Il seguente lemma fornisce condizioni equivalenti alla massimalità che spesso sono più comode da verificare.

4.2 Lemma *Sia $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ un insieme con la proprietà dell'intersezione finita. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *B è un filtro massimale;*

2. $a \notin B \quad \Rightarrow \quad a \cap c = \varnothing$ *per qualche* $c \in B$;

3. $a \notin B \quad \Rightarrow \quad B \cup \{a\}$ *non ha proprietà dell'intersezione finita, ovvero: esiste* $C \subseteq B$ *finito tale che* $a \cap \bigcap C = \varnothing$.

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Supponiamo che B sia un filtro massimale e che $a \notin B$. Quindi il filtro generato da $B \cup \{a\}$ è improprio. Per il lemma 4.2, esiste un $C \subseteq B$ finito tale che tale che $a \cap \bigcap C = \varnothing$. Posto $c = \bigcap C$, poiché B è un filtro $c \in B$. Dimostriamo 2⇒3 è ovvia. Per dimostrare 3⇒1, osserviamo per prima cosa che 3 implica che B è un filtro. Verifichiamo f1: supponiamo $a \subseteq b \notin B$. Allora $b \cap \bigcap C = \varnothing$ per qualche $C \subseteq B$ finito. A fortiori $a \cap \bigcap C = \varnothing$ e, poiché B ha la proprietà dell'intersezione finita $a \notin B$. Verifichiamo f2: supponiamo $a \cap b \notin B$. Allora $a \cap b \cap \bigcap C = \varnothing$ per qualche $C \subseteq B$ finito. Poiché B ha la proprietà dell'intersezione finita $a, b \notin B$. Sempre dalla proprietà dell'intersezione finita di B, segue che $B \neq \mathcal{P}(I)$. Inoltre se $B \subset H$, dove H è un filtro proprio, allora un qualunque $a \in H \smallsetminus B$ contraddice 3. Quindi B è massimale. □

Un filtro proprio F di $\mathcal{P}(I)$ si dice **primo** se per ogni $a, b \subseteq I$.

fp. $a \cup b \in F \quad \Rightarrow \quad a \in F \;$ o $\; b \in F$

Le nozioni di filtro massimale e filtro primo coincidono con quella di ultrafiltro. (In contesti più generali, si tratta di nozioni indipendenti.)

4.3 Proposizione *Per ogni filtro F di $\mathcal{P}(I)$ seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *F è un filtro massimale;*

2. *F è un filtro primo;*

3. *F è un ultrafiltro.*

Dimostrazione Per dimostrare 1⇒2 assumiamo $a, b \notin F$, con F massimale, e mostriamo che $a \cup b \notin F$. Per massimalità, esiste $c \in F$ tale che $a \cap c = b \cap c = \varnothing$. Quindi $(a \cup b) \cap c = \varnothing$. Quindi $a \cup b \notin F$. Per dimostrare 2⇒3 è sufficiente osservare che $a \cup \neg a \in F$. Infine, per dimostrare 3⇒1 osserviamo se $a \notin F$, un ultrafiltro, allora la condizione 2 del lemma 4.2 è verificata con $c = \neg a$. □

4.4 Proposizione *Sia $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ un insieme con la proprietà dell'intersezione finita. Allora B è contenuto in un filtro massimale.*

Dimostrazione Mostriamo che l'unione di una catena di sottoinsiemi di $\mathcal{P}(I)$ con la proprietà dell'intersezione finita gode anche della stessa proprietà. Quindi dal lemma di Zorn otteniamo un $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ che è massimale tra quelli con la proprietà dell'intersezione finita e quindi soddisfa 3 del lemma 4.2. Sia $\langle B_i : i < \lambda \rangle$ detta catena e sia

$$B \quad = \quad \bigcup_{i<\lambda} B_i.$$

Se B non avesse la proprietà dell'intersezione finita, allora esisterebbe un $C \subseteq B$ finito tale che $\bigcap C = \varnothing$. Ma ogni $C \subseteq B$ finito è sottoinsieme di qualche B_i, quindi B_i non avrebbe la proprietà dell'intersezione finita. Condraddizione. □

4.5 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni ultrafiltro

F di $\mathcal{P}(I)$.

1. F è principale;
2. F non contiene il filtro di Fréchet;
3. $F = \{a \; : \; i \in a\}$ per un fissato $i \in I$. □

4.6 Esercizio Sia F un filtro proprio in $\mathcal{P}(\omega)$. Data una funzione $f : \omega \to \mathbb{R}$ ed un numero reale l, scriveremo $\lim_F f = l$ se per ogni $U \subseteq \mathbb{R}$ intorno aperto di l esiste un $a \in F$ tale che $f i \in U$ per ogni $i \in a$. Si dimostri che

1. Se F è il filtro di Fréchet allora $\lim_F f = l$ se e solo se $\lim\limits_{i\to\infty} f = l$.
2. Esiste al più un l tale che $\lim_F f = l$.
3. Se F è un ultrafiltro ed f è limitata, allora esiste un l tale che $\lim_F f = l$. □

4.2 Prodotti diretti

Sia $\langle M_i : i \in I\rangle$ una sequenza di strutture non vuote della stessa segnatura. Si perdoni l'uso improprio del termine sequenza: l'insieme I è arbitrario, non un ordinale. Il **prodotto diretto** di questa sequenza è la struttura

p. $$N \quad = \quad \prod_{i\in I} M_i$$

definita dalle condizioni 1-3 che seguono. Se la sequenza di strutture è costante, cioè se tutti gli M_i sono la stessa struttura M, chiameremo il prodotto **potenza diretta** di M e lo indicheremo con M^I.

Il dominio di N è l'insieme delle tuple $\hat{a}$ che hanno i-esima coordinata in M_i. Precisamente, l'insieme delle funzioni

1. $$\hat{a} \; : \; I \to \bigcup_{i\in I} M_i \qquad \text{tali che}$$
$$\hat{a} \; : \; i \mapsto \hat{a}i \in M_i$$

Confonderemo le tuple di elementi di N con funzioni a valori in tuple di M_i, ovvero la tupla $\hat{a} = \langle \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n\rangle$ verrà identificata con la funzione $\hat{a} \; : \; i \mapsto \hat{a}i = \langle \hat{a}_1 i, \dots, \hat{a}_n i\rangle$.

N.B. La notazione in questo capitolo è inevitabilmente pesante. Per aiutarci a sopportarla, stabiliamo alcune convenzioni. Gli elementi del prodotto verranno evidenziati con un accento circonflesso come in $\hat{a}$. Gli indici saranno usati per denotare diversi elementi del prodotto, come in $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$. La coordinata i-esima di un elemento del prodotto verrà denotata postfissando con i, come in $\hat{a}i$ o $\hat{a}_1 i$.

Le funzioni f^N agiscono sulla i-esima coordinata di $\hat{a}$ come la funzione f^{M_i}, ovvero

2. $$\big(f^N \hat{a}\big)i \quad = \quad f^{M_i}(\hat{a}i) \qquad \text{per ogni } i \in I.$$

Le relazioni r^M sono il prodotto delle relazioni r^{M_i}, ovvero

3. $$\hat{a} \in r^N \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}i \in r^{M_i} \qquad \text{per ogni } i \in I.$$

Osserviamo che per induzione sulla sintassi da 2 segue che l'interpretazione del termine $t(x)$ in N agisce sull'i-esima coordinata di $\hat{a}$ come $t^{M_i}(x)$. Ovvero

$$2'. \qquad \left(t^N \hat{a}\right) i = t^{M_i}(\hat{a} i) \qquad \text{per ogni } i \in I.$$

Inoltre, 3 è equivalente a

$$3'. \qquad N \vDash r\,\hat{a} \iff M_i \vDash r\,\hat{a} i \qquad \text{per ogni } i \in I.$$

4.7 Esempio Consideriamo un caso molto semplice (banale, per i nostri scopi): il prodotto diretto di un campo ordinato M con se stesso. Il linguaggio è quello degli anelli ordinati. La somma e il prodotto in M^2 di $\hat{a} = \langle \hat{a}0, \hat{a}1\rangle$ e $\hat{c} = \langle \hat{c}0, \hat{c}1\rangle$

$$\langle \hat{a}0, \hat{a}1\rangle + \langle \hat{c}0, \hat{c}1\rangle = \langle \hat{a}0 + \hat{c}0,\ \hat{a}1 + \hat{c}1\rangle$$

$$\langle \hat{a}0, \hat{a}1\rangle \cdot \langle \hat{c}0, \hat{c}1\rangle = \langle \hat{a}0 \cdot \hat{c}0,\ \hat{a}1 \cdot \hat{c}1\rangle$$

Lo zero e l'unità di M^2 sono $\hat{0} = \langle 0, 0\rangle$ e $\hat{1} = \langle 1, 1\rangle$. È facile verificare che M^2 è ancora un anello unitario ma non è mai un campo: manca l'inverso dell'elemento $\langle 1, 0\rangle$. L'ordine in M^2 diventa

$$\langle \hat{a}0, \hat{a}1\rangle < \langle \hat{c}0, \hat{c}1\rangle \iff \hat{a}0 < \hat{c}0 \ \text{ e } \hat{a}1 < \hat{c}1$$

Questo non è un ordine totale, quindi M^2 non è un anello ordinato. □

La dimostrazione del seguente lemma è immediata (più utile è riflettere sul perché non può essere estesa a tutte le formule).

4.8 Proposizione *Sia $\langle M_i : i \in I\rangle$ una sequenza di strutture non vuote. Sia $\varphi(x)$ una formula costruita dalle formule atomiche usando solo i connetivi $\wedge$, $\forall$ ed $\exists$. Allora*

$$N \vDash \varphi(\hat{a}) \iff M_i \vDash \varphi(\hat{a} i) \qquad \textit{per ogni } i \in I.$$

per ogni $\hat{a} \in N^{|x|}$, dove $N = \prod_{i \in I} M_i$.

Dimostrazione Supponiamo per cominciare che φ sia la formula $r\,t(x)$ per qualche tupla di termini $t(x)$. Allora per ogni $\hat{a} \in N$ abbiamo

$$\begin{aligned}
N \vDash r\,t(\hat{a}) &\iff N \vDash r\left(t^N(\hat{a})\right) && \\
&\iff M_i \vDash r\left(t^N(\hat{a}) i\right) && \text{per ogni } i \in I && \text{per } 3' \\
&\iff M_i \vDash r\left(t^{M_i}(\hat{a} i)\right) && \text{per ogni } i \in I && \text{per } 3 \\
&\iff M_i \vDash r\,t(\hat{a} i) && \text{per ogni } i \in I.
\end{aligned}$$

Lo stesso argomento si applica nel caso φ sia la formula atomica $t_1 = t_2$. Quindi il caso atomico del lemma è verificato. L'induzione sui connetivi $\wedge$, $\forall$ ed $\exists$ è lasciata al lettore. □

Come corollario otteniamo immediatamente che il prodotto diretto di gruppi, anelli e spazi vettoriali sono ancora strutture dello stesso tipo. Questa è una semplice conseguenza della forma sintattica dei loro assiomi.

È doveroso notare che l'equivalenza affermata dalla proposizione 4.8 vale per una classe di formule più ampia: le formule di Horn, che qui non tratteremo (una classe più nota in informatica teorica che in logica matematica).

4.3 Ultraprodotti

Sia $\langle M_i : i \in I\rangle$ una sequenza di strutture non vuote e sia N il prodotto diretto di questa sequenza e fissiamo F, un filtro in $\mathcal{P}(I)$. Definiamo la seguente relazione di equivalenza su N:

eq. $\hat{a} \sim_F \hat{c} \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{ i \in I \;:\; \hat{a}i = \hat{c}i \Big\} \in F.$

Lasciamo al lettore verificare che $\sim_F$ è effettivamente una relazione di equivalenza: riflessività e simmetria sono ovvie, la transitività segue da f2 del paragrafo 4.1. Scriveremo N/F per l'insieme quoziente $N/{\sim_F}$ e denoteremo con $[\hat{a}]_F$ la classe di equivalenza di $\hat{a}$.

Osserviamo che se F è un filtro principale, diciamo $F = \{a : c \subseteq a\}$, allora lavorare modulo F vuol dire ignorare tutti gli indici $i \notin c$. Questo è il caso banale. La relazione di equivalenza definita sopra è interessante nel caso di filtri non principali. Per esempio, se F è il filtro di Fréchet in $\mathcal{P}(\omega)$ allora $\hat{a} \sim_F \hat{c}$ se le due sequenze quasi ovunque uguali. Filtri più grandi (che quindi conterranno sottoinsiemi più sparsi) richiederanno solo che $\hat{a}$ e $\hat{c}$ abbiano certe sottosequenze quasi ovunque uguali.

È necessario considerare tuple di elementi di N, ma in prima lettura suggeriamo di considerare tutto abbia arietà semplicemente 1. La relazione $\sim_F$ induce un'equivalenza tra arbitrarie tuple di elementi di N nel modo ovvio: se $\hat{a} = \langle \hat{a}_n : n < \alpha \rangle$ e $\hat{b} = \langle \hat{b}_n : n < \alpha \rangle$ sono tuple di elementi di N allora

$$\hat{a} \sim_F \hat{b} \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \hat{a}_n \sim_F \hat{b}_n \qquad\qquad \text{per ogni } n < \alpha.$$

Confonderemo $[\hat{a}]_F$ con $\langle [\hat{a}_n]_F : n < \alpha \rangle$. Con $\hat{a}i$ indicheremo la tupla $\langle \hat{a}_n i : n < \alpha \rangle$. Si osservi anche che quando $\alpha < \omega$, da f2 otteniamo

$$\hat{a} \sim_F \hat{b} \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \Big\{ i \in I \;:\; \hat{a}i = \hat{c}i \Big\} \in F.$$

Osserviamo che $\sim_F$ è una congruenza rispetto alle funzioni di N ovvero

1. $\hat{a} \sim_F \hat{b} \quad \Rightarrow \quad f^N \hat{a} \sim_F f^N \hat{b};$

Questo permette di considerare N/F come una struttura di segnatura L definendo l'interpretazione come segue

2. $f^{N/F}[\hat{a}]_F \quad = \quad \big[f^N \hat{a} \big]_F;$

3. $[\hat{a}]_F \in r^{N/F} \quad \Leftrightarrow \quad \big\{ i \;:\; \hat{a}i \in r^{M_i} \big\} \in F.$

Poiché $\sim_F$ è una congruenza la definizione 2 è ben data. La struttura N/F si chiama **prodotto ridotto** delle strutture $\langle M_i : i \in I \rangle$. Se $M_i = M$ per tutti gli $i \in I$, diremo che N/F è una **potenza ridotta** di M. Noi siamo soprattutto intertessati al caso in cui F è un ultrafiltro allora diremo che N/F è un **ultraprodotto**, eventualmente una **ultrapotenza**.

Con l'usuale dimostrazione per induzione da 3 otteniamo che per ogni termine $t(x)$ ed ogni tupla $\hat{a} \in N^{|x|}$

2'. $t^{N/F}[\hat{a}]_F \quad = \quad \big[t^N \hat{a} \big]_F.$

Infine si osservi che la 4 può essere riformulata come

3'. $N/F \vDash r[\hat{a}]_F \quad \Leftrightarrow \quad \big\{ i \;:\; \hat{a}i \in r^{M_i} \big\} \in F.$

Il seguente è il teorema fondamentale sugli ultraprodotti: estende l'equivalenza in 3' a tutte le formule.

4.9 Teorema di Łoš *Sia $\langle M_i : i \in I \rangle$ una sequenza di strutture non vuote. Fissiamo un qualsiasi ultrafiltro F in $\mathcal{P}(I)$. Allora per ogni formula $\varphi(x)$*

$$N/F \vDash \varphi([\hat{a}]_F) \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{ i \;:\; M_i \vDash \varphi(\hat{a}i) \Big\} \in F.$$

per ogni $\hat{a} \in N^{|x|}$, dove $N = \prod_{i \in I} M_i$.

Dimostrazione Dimostriamo il teorema per induzione sulla sintassi di $\varphi(x)$. Supponiamo per prima cosa che $\varphi(x)$ sia la formula $r\,t(x)$ per qualche tupla di termini $t(x)$.

$$\begin{aligned}
N/F \vDash r\,t\big([\hat a]_F\big) \;&\Leftrightarrow\; N/F \vDash r\big(t^{N/F}[\hat a]_F\big) \\
&\Leftrightarrow\; N/F \vDash r\big([t^N \hat a]_F\big) && \text{per 2'} \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash r\big((t^N \hat a)i\big)\big\} \in F && \text{per 3'} \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash r\big(t^{M_i}(\hat a i)\big)\big\} \in F && \text{per 2' del paragrafo 4.2} \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash r\,t(\hat a i)\big\} \in F
\end{aligned}$$

Nel caso $\varphi(x)$ sia la formula atomica $t = s$ applichiamo un argomento molto simile:

$$\begin{aligned}
N/F \vDash t\big([\hat a]_F\big) = t\big([\hat a]_F\big) \;&\Leftrightarrow\; t^{N/F}[\hat a]_F = s^{N/F}[\hat a]_F \\
&\Leftrightarrow\; [t^N \hat a]_F = [s^N \hat a]_F && \text{per 2'} \\
&\Leftrightarrow\; t^N \hat a \sim_F s^N \hat a \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : \big(t^N \hat a\big)i = \big(s^N \hat a\big)i\big\} \in F \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : t^{M_i}(\hat a i) = s^{M_i}(\hat a i)\big\} \in F && \text{per 2' del paragrafo 4.2} \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash t(\hat a i) = s(\hat a i)\big\} \in F
\end{aligned}$$

Quindi il caso atomico del lemma è verificato. Per dimostrare il passo induttivo conviene usare i commettivi $\neg$, $\wedge$, e $\exists$. Cominciamo col connettivo $\neg$, che è il punto in cui usiamo l'ipotesi che F sia un *ultra*filtro. Assumiamo il teorema vero per $\varphi(x)$ e dimostriamolo per $\neg\varphi(x)$.

$$\begin{aligned}
N/F \vDash \neg\varphi\big([\hat a]_F\big) \;&\Leftrightarrow\; N/F \nvDash \varphi\big([\hat a]_F\big) \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \varphi(\hat a i)\big\} \notin F
\end{aligned}$$

per ipotesi induttiva. Ora poiché F è un ultrafiltro se un insieme non gli appartiene, il complemento gli appartiene e quindi

$$\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \neg\varphi(\hat a i)\big\} \in F.$$

Veniamo ora al passo induttivo per il connettivo $\wedge$. Assumiamo il teorema vero per $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ e dimostriamolo per $\varphi(x) \wedge \psi(x)$.

$$\begin{aligned}
N/F \vDash \varphi\big([\hat a]_F\big) \wedge \psi\big([\hat a]_F\big) \;&\Leftrightarrow\; N/F \vDash \varphi\big([\hat a]_F\big) \;\text{ e }\; N/F \vDash \psi\big([\hat a]_F\big) \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \varphi(\hat a i)\big\} \in F \;\text{ e }\; \big\{i : M_i \vDash \psi(\hat a i)\big\} \in F
\end{aligned}$$

per ipotesi induttiva. Poiché F è un filtro, contenere l'intersezione di due insiemi è equivalente a contenere entrambi gli insiemi. Così otteniamo come richiesto:

$$\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \varphi(\hat a i) \wedge \psi(\hat a i)\big\} \in F.$$

Infine dimostriamo il passo induttivo per il quantificatore esistenziale. Assumiamo il teorema vero per $\varphi(x, y)$ e dimostriamolo per $\exists y\, \varphi(x, y)$.

$$\begin{aligned}
N/F \vDash \exists y\, \varphi\big([\hat a]_F, y\big) \;&\Leftrightarrow\; N/F \vDash \varphi\big([\hat a]_F, [\hat b]_F\big) && \text{per un qualche } [\hat b]_F \in N/F \\
&\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \varphi(\hat a i, \hat b i)\big\} \in F && \text{per un qualche } \hat b \in N
\end{aligned}$$

per ipotesi induttiva. Ora rimane da verificare che questo sia equivalente a

$$\Leftrightarrow\; \big\{i : M_i \vDash \exists y\, \varphi(\hat a i, y)\big\} \in F.$$

La direzione $\Rightarrow$ è ovvia. La direzione $\Leftarrow$ vale se come $\hat b$ prendiamo una qualunque sequenza tale che $\hat b i$ è (per tutti gli i per cui esiste) un testimone in M_i della verità di $\exists y\, \varphi(\hat a i, y)$. □

Sia F un ultrafiltro in $\mathcal{P}(I)$ e sia M^I/F l'ultrapotenza di una struttura M. Esiste un'**immer-**

sione canonica $h : M \to M^I/F$ definita come segue. Per ogni $a \in M$ denotiamo con $\boldsymbol{a^I}$ l'elemento di M^I che ha valore costante a, allora definiamo $h : a \mapsto [a^I]_F$. È immediato verificare che questa è effettivamente un'immersione, quindi $h[M]$ è un sottostruttura di M^I/F isomorfa ad M. Dal teorema 3.18 segue che

$$h[M] \vDash \varphi([a^I]_F) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi(a)$$

per ogni $a \in M$. Spesso identificheremo M con $h[M]$. Il seguente corollario è immediato.

4.10 Corollario *Sia I un insieme ed F un ultrafiltro in $\mathcal{P}(I)$. Sia M^I/F l'ultrapotenza di una struttura M non vuota. Allora*

$$M^I/F \vDash \varphi([a^I]_F) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi(a).$$

e quindi $h[M] \preceq M^I/F$. □

Il seguente corollario mostra che c'è abbondanza di sovrastrutture elementari.

4.11 Corollario *Ogni struttura infinita ha un'estensione elementare propria.*

Dimostrazione Sia M una struttura infinita e sia F un ultrafiltro *non principale* in $\mathcal{P}(\omega)$. Consideriamo l'ultraprodotto M^ω/F e sia $h : M \to M^\omega/F$ l'immersione canonica definita qui sopra. Poiché M è isomorfo ad $h[M]$ ed $h[M] \preceq M^\omega/F$, rimane solo da dimostrare che tale estensione è propria, ovvero che esiste un $\hat{d}$ in M^ω che non è immagine di nessun $a \in M$. Poiché M è infinito, esiste $\hat{d} \in M^\omega$ tale che $\hat{d}i \neq \hat{d}j$ per ogni $i < j < \omega$. Mostramo ora che $[\hat{d}]_F \neq [a^\omega]_F$ per ogni $a \in M$. Dobbiamo mostrare che $\{i : \hat{d}i = a\} \notin F$. Per la scelta di $\hat{d}$ l'insieme $\{i : \hat{d}i = a\}$ contiene al più un elemento, quindi se appartenesse ad F questo sarebbe un filtro principale. □

4.12 Esercizio Sia F un filtro proprio in $\mathcal{P}(\omega)$. Ricordiamo che data una funzione $\hat{a} : \omega \to \mathbb{R}$ ed un numero reale l, scriveremo $\lim_F \hat{a} = l$ se per ogni $U \subseteq \mathbb{R}$ intorno aperto di l esiste un $u \in F$ tale che $\hat{a}i \in U$ per ogni $i \in u$. (Vedi esercizio 4.6.)

Consideriamo $\mathbb{R}$ come struttura nel linguaggio presentato nel paragrafo sull'analisi non standard. Sia F un ultrafiltro in $\mathcal{P}(\omega)$ e sia ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega/F$. Si dimostri che $[\hat{a}]_F$ sta nella monade di $[l^\omega]_F$ se e solo se $\lim_F \hat{a} = l$. □

4.13 Esercizio Consideriamo $\mathbb{R}$ come struttura nel linguaggio presentato nel paragrafo 3.5. Sia F un ultrafiltro non principale in $\mathcal{P}(\omega)$ e consideriamo l'ultrapotenza R^ω/F. Per i seguenti valori di $\hat{a} : \omega \to \mathbb{R}$, si dica se $[\hat{a}]_F$ è un elemento standard, non standard, infinito o infinitesimo.

1. $\hat{a} : i \mapsto \log(i+1)$;
2. $\hat{a} : i \mapsto 2^{-i}$;
3. $\hat{a} : i \mapsto (-2)^i$;
4. $\hat{a} : i \mapsto \arctan i$;
5. $\hat{a} : i \mapsto i\big(1 + (-1)^i\big)$;
6. $\hat{a} : i \mapsto \sin i$.

Se la risposta dipende da F si discutano le possibilità. □

4.14 Esercizio Con la stesse premesse dell'esercizio 4.13. Siano $a = [\hat{a}]_F$ e $b = [\hat{b}]_F$ dove

$$\hat{a} : i \mapsto i \qquad \text{e} \qquad \hat{b} : i \mapsto e^i$$

Si dimostri che ${}^*\mathbb{R} \vDash a^2 < b$. Si dimostri che ${}^*\mathbb{R} \vDash a^c < b$ per qualche ipereale infinito c. □

4.15 Esercizio Sia I l'insieme degli interi $i > 1$. Per $i \in I$, sia $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, la struttura nel linguaggio dei gruppi additivi che ha come supporto gli interi non negativi $< i$ e che interpreta l'addizione nell'addizione modulo i. Denotiamo con N il prodotto $\prod_{i\in I}\mathbb{Z}_i$. Si dimostrino le seguenti affermazioni:

1. esiste un ultrafiltro F tale che N/F non contiene elementi di ordine finito;
2. esite un ultrafiltro F non principale tale che N/F ha elementi di ordine 2;
3. per ogni ultrafiltro F non principale N/F contiene un elemento di ordine infinito;
4. esiste un ultrafiltro F tale che $N/F \vDash \forall x \exists y\; my = x$ per ogni intero $m > 0$;
5. esiste un ultrafiltro F ed $a \in N/F$ tale che $N/F \vDash \forall x\; mx \neq a$ per ogni intero $m > 0$.

Soluzione. Dimostriamo 1 osservando che $\mathbb{Z}_i \vDash \neg\exists x\,[x\neq 0 \wedge mx = 0]$ per ogni intero m ed ogni primo $i \nmid m$. Quindi, se F è un un ultrafiltro non principale che contiene l'insieme dei numeri primi, $N/F \vDash \neg\exists x\,[x\neq 0 \wedge mx = 0]$ per ogni m. Per dimostrare 2 osserviamo che $\mathbb{Z}_{2i} \vDash \exists x\,[x\neq 0 \wedge 2x = 0]$ per ogni i. Quindi se F contiene l'insieme dei numeri pari, N/F contiene un elemento di ordine 2. Per dimostrare 3 sia $\hat{a} \in N$ la sequenza che ha valore costante 1. Chiaramente $\mathbb{Z}_i \vDash m\neq 0$ per ogni intero positivo m ed ogni $i > m$. Quindi, se F contiene il filtro di Fréchet, $N/F \vDash m[\hat{a}]_F \neq 0$ per ogni intero positivo m. Dimostriamo 4 osservando che $\mathbb{Z}_i \vDash \forall x \exists y\; my = x$ per ogni intero m ed ogni primo $i \nmid m$. Quindi se F è un ultrafiltro non principale che contiene l'insieme dei numeri primi, $N/F \vDash \forall x \exists y\; my = x$ per ogni m. Dimostriamo 5. Sia F un ultrafiltro non principale che contiene l'insieme $\{i! : i \in I\}$ e sia $\hat{a}$ la sequenza che ha valore costante 1. Poiché $\mathbb{Z}_{i!} \vDash \neg\exists x\; mx = 1$ per ogni $i > m$, otteniamo $N/F \vDash \neg\exists x\; mx = [\hat{a}]_F$ per ogni $m > 1$. □

4.16 Esercizio Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali che qui considereremo come una struttura nel linguaggio degli ordini stretti. Sia F un ultrafiltro in $\mathcal{P}(\omega)$ non principale. Si dimostri che in $\mathbb{N}^\omega/F$ esiste una sequenza $\langle b_i : i \in \omega\rangle$ tale che $b_{i+1} < b_i$. □

4.4 Teorema di compattezza

Una teoria si dice **finitamente consistente** se ogni suo sottoinsieme finito è consistente. Il seguente teorema è il *fiat lux* della logica matematica.

4.17 Teorema di compattezza *Ogni teoria finitamente consistente è consistente.*

Dimostrazione Sia T una teoria finitamente consistente. La struttura N/F definita qui sotto è il modello di T che ne proverà la consistenza. Sia I l'insieme degli enunciati consistenti. Per ogni $\xi \in I$ fissiamo un arbitrario $M_\xi \vDash \xi$. Per ogni enunciato φ scriveremo X_φ per il seguente sottoinsieme di I

$$X_\varphi \quad = \quad \left\{\xi \in I \,:\, \xi \vdash \varphi\right\}$$

Si osservi che φ è consistente se e solo se X_φ non è vuoto. Inoltre $X_{\varphi\wedge\psi} = X_\varphi \cap X_\psi$. Da questo e dalla consistenza finita di T segue che l'insieme $B = \left\{X_\varphi : \varphi \in T\right\}$ gode della proprietà dell'intersezione finita. Esiste quindi un ultrafiltro F sull'algebra dei sottoinsiemi di I che contiene B. Definiamo

$$N \quad = \quad \prod_{\xi\in I} M_\xi$$

Per verificare che $N/F \vDash T$ applichiamo il teorema di Łoš ad un generico enunciato φ:

$$N/F \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{\xi : M_\xi \vDash \varphi\Big\} \in F.$$

Si osservi che $X_\varphi \subseteq \{\xi : M_\xi \vDash \varphi\}$ e si ricordi F è stato definito richiedendo che $X_\varphi \in F$ per ogni $\varphi \in T$. Quindi $N/F \vDash T$, *et lux fuit.* □

A volte il teorema di compattezza viene formulato nella seguente forma equivalente.

4.18 Corollario *Se $T \vdash \varphi$ allora esiste $S \subseteq T$ finito tale che $S \vdash \varphi$.*

Dimostrazione Supponiamo che per ogni $S \subseteq T$ finito $S \nvDash \varphi$. Equivalentemente per ogni $S \subseteq T$ finito esiste un modello $M \vDash S \cup \{\neg\varphi\}$. Questo vuol dire che $T \cup \{\neg\varphi\}$ è finitamente consistente. Quindi esiste un modello di $T \cup \{\neg\varphi\}$ e quindi $T \nvDash \varphi$. □

Concludiamo il paragrafo con alcuni esempi di applicazione del teorema di compattezza. I più semplici riguardano l'assiomatizzabilità finita. Una teoria T si dice **finitamente assiomatizzabile** se esiste una teoria finita S tale che $\mathrm{ccl}(S) = \mathrm{ccl}(T)$.

4.19 Proposizione *Per ogni teoria T le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è finitamente assiomatizzabile;*
2. *Esiste $S \subseteq T$ finito tale che $S \vdash T$.*

Dimostrazione Dimostriamo la direzione non banale $1 \Rightarrow 2$. Se T è finitamente assiomatizzabile, prendendo la congiunzione dei suoi assiomi otteniamo un enunciato φ tale che $\mathrm{ccl}(\varphi) = \mathrm{ccl}(T)$. Quindi $T \vdash \varphi \vdash T$. Per la proposizione 4.18 esiste $S \subseteq T$ finita tale che $S \vdash \varphi$. Quindi anche $S \vdash T$. □

Quando il linguaggio è vuoto ogni insieme è una struttura. Chiameremo **teoria degli insiemi infiniti** l'insieme degli enunciati del linguaggio vuoto che vaglono in tutti gli insiemi infiniti.

4.20 Corollario *Il linguaggio è vuoto. La teoria degli insiemi infiniti non è finitamente assiomatizzabile.*

Dimostrazione Denotiamo con T_∞ la teoria contiene gli enunciati $\exists^{\geq n} x\,(x = x)$ per ogni intero positivo n. Chiaramente i modelli di T_∞ sono tutti e soli gli insiemi infiniti. Segue che $\mathrm{ccl}(T_\infty)$ è la teoria degli insiemi infiniti. Se questa fosse finitamente assiomatizzabile, per la proposizione 4.19, avremmo che $\exists^{\geq n} x(x = x) \vdash T_\infty$ per un qualche n. Ma questo è contraddetto da un qualsiasi insieme di cardinalità $n+1$. □

Il teorema di compattezza è lo strumento ideale per mostrare che una data proprietà non è esprimibile con una formula del prim'ordine. Il seguente esempio dimostra quanto affermato senza prova nel commento all'esercizio 2.20.

4.21 Esempio Il linguaggio contiene solo un predicato binario r. Sia $\mathcal{K}$ la seguente classe di strutture

$$\mathcal{K} \quad = \quad \Big\{M : \text{esiste } A \subseteq M \text{ tale che } r^M \subseteq (A \times \neg A) \cup (\neg A \times A)\Big\}$$

Mostriamo che $\mathcal{K}$ non è finitamente assiomatizzabile.

Servono alcune definizioni. Scriviamo $\dot{r}(x,y)$ per la formula $r(x,y) \vee r(y,x)$. Un *percorso di lunghezza n* nella struttura M è una sequenza $c_1, \ldots, c_n \in M$ tale che $\dot{r}(c_i, c_{i+1})$ per ogni $1 \leq i < n$. Diremo che questo percorso *collega c_1 con c_n*. Un percorso è *chiuso* se $c_1 = c_n$.

Una *componente connessa* di M è un sottoinsieme massimale di punti tra loro collegati da un percorso.

Mostriamo ora che la seguente teoria T assiomatizza $\mathcal{K}$:

$$T \quad = \quad \left\{ \neg \exists x_1, \dots x_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n-1} \dot{r}(x_i, x_{i+1}) \wedge x_1 = x_n \right] \ : \ n \text{ pari} \right\}$$

Questa teoria dice, con un numero infinito di enunciati, che non esistono percorsi chiusi di lunghezza dispari.

Una volta dimostrato che T assiomatizza la classe $\mathcal{K}$ il nostro compito si riduce a dimostrare che T non è finitamente assiomatizzabile. Questo è semplice: se lo fosse, per la proposizione 4.19 esisterebbe una teoria finita $S \subseteq T$ che assiomatizza $\mathcal{K}$. Un qualsiasi grafo costituito da un unico ciclo chiuso di lunghezza sufficientemente grande modella S. Quindi prendendo un ciclo di lunghezza dispari otteniamo una contraddizione.

L'inclusione $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(T)$ è immediata. Mostriamo l'inclusione $\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathcal{K}$. Dato $M \vDash T$ fissiamo un insieme $A_o \subseteq M$ scegliendo esattamente un elemento per ogni componente connessa di M. Sia A l'insieme

$$A \quad = \quad \left\{ b \ : \ M \vDash \exists x_1, \dots x_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n-1} \dot{r}(x_i, x_{i+1}) \wedge a = x_1 \wedge x_n = b \right] \text{ per } a \in A_o \text{ ed } n \text{ dispari} \right\}$$

Mostriamo ora che $\dot{r}^M \subseteq (A \times \neg A) \cup (\neg A \times A)$ e quindi che $M \in \mathcal{K}$. Dobbiamo verificare che se $r(b, c)$ allora non può essere né $b, c \in A$ né $b, c \notin A$.

Assumiamo $r(b, c)$ e supponiamo per assurdo che $b, c \in A$ (il caso $b, c \notin A$ è simile). Poiché b e c appartengono alla stessa componente connessa esiste un $a \in A_o$ e due percorsi $b_1, \dots, b_n$ e $c_1, \dots, c_m$, con n ed m entrambi dispari, che collegano $a = b_1 = c_1$ ai punti $b = b_n$ e $c = c_m$. Ricordando che $r(b_n, c_m)$ possiamo costruire un percorso chiuso $a, b_1, \dots, b_n, c_m, \dots, c_1, a$. Questo è un percorso chiuso di lunghezza dispari che contraddice $M \vDash T$. □

4.5 Realizzazioni di tipi e Löwenheim-Skolem all'insù

Diremo **tipo** per un insieme di formule. Generalmente indicheremo esplicitamente nella notazione le variabili che possono occorrere nelle formule che il tipo contiene: scriveremo $\boldsymbol{p(x)}$, $\boldsymbol{q(x)}$, ecc. dove x è una tupla di variabili. La nozione di tipo generalizza sia quella di formula quella di teoria. Se $p(x)$ è finito, lo identificheremo con la congiunzione delle formule che contiene; se x è la tupla vuota, il tipo $p(x)$ è una teoria. Si noti che la tupla x può essere infinita. Tipicamente $p(x) \subseteq L(A)$ per qualche insieme di parametri A. Se $A = \varnothing$ diremo che il tipo è **puro**.

Scriveremo $\boldsymbol{M \vDash p(a)}$ se $M \vDash \varphi(a)$ per ogni formula in $p(x)$ e diremo che a è una **soluzione** o una **realizzazione** di $p(x)$. Un'altra notazione spesso usata è $\boldsymbol{M, a \vDash p(x)}$ o, quando M è chiaro dal contesto, anche $\boldsymbol{a \vDash p(x)}$. Diremo che $p(x)$ è **consistente** (o **coerente**) **in** $\boldsymbol{M}$ se ha soluzione in M e in questo caso scriveremo $\boldsymbol{M \vDash \exists x\, p(x)}$. Diremo che $p(x)$ è **consistente** tout court se è consistente in qualche modello. È sottinteso che, se si tratta di un tipo con parametri, il modello deve contenere i parametri.

Un tipo $p(x)$ si dice **finitamente consistente** se ogni suo sottoinsieme finito è consistente, si dice finitamente consistente **in** $\boldsymbol{M}$ se ogni suo sottoinsieme finito è consistente in M.

4.22 Teorema *Un tipo puro $p(x)$ finitamente consistente è consistente. Inoltre, per ogni modello M, ogni tipo a parametri in M e finitamente consistente in M, è realizzato in un'estensione elementare di M.*

Dimostrazione Espandiamo il linguaggio L con un nuovo simbolo di costante c. Sia L' il nuovo linguaggio. Sostituendo x con c nelle formule in $p(x)$ otteniamo una teoria $p(c)$ nel linguaggio L'. È immediato osservare che $p(c)$ è finitamente consistente. Per il teorema di compattezza $p(c)$ ha un modello N'. Sia N il ridotto di N' ad L, cioè il modello che si ottiene da N' dimenticando l'interpretazione di c. Chiaramente N realizza $p(x)$.

Per dimostrare la seconda affermazione, fissiamo una tupla a che enumera M. Un tipo su M è della forma $p(x,a)$ dove $p(x,z)$ è puro. Definiamo il tipo

$$q(z) \quad = \quad \big\{\varphi(z) \ : \ M \vDash \varphi(a)\big\}$$

Ora osserviamo che, ovviamente, $q(z) \cup p(x)$ è finitamente consistente. Infatti, è finitamente consistente in M. Per quanto dimostrato sopra esiste un modello N e delle tuple c,d di elementi di N tali che $N \vDash q(c) \cup p(d)$. Ora è immediato verificare che se $h = \{\langle a_i, c_i\rangle \ : \ i < |a|\}$, allora $h : M \to N$ è un immersione e quindi $h[M]$ è una sottostruttura di N isomorfa ad M.

$$h[M] \vDash \varphi(ha) \quad \Rightarrow \quad M \vDash \varphi(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) \in q(z) \quad \Rightarrow \quad N \vDash \varphi(a)$$

Quindi $h[M] \preceq N$. Il teorema segue identificando le strutture $h[M]$ e M in quanto isomorfe. □

Come immediato corollario otteniamo il seguente:

4.23 Teorema di Löwenheim-Skolem all'insù *Ogni struttura infinita ha estensioni elementari di cardinalità arbitrariamente grande.*

Dimostrazione Sia $x = \langle x_i : i < \lambda\rangle$ una tupla di variabili di lunghezza λ, un qualsiasi cardinale infinito. Definiamo $p = \{x_i \neq x_j : i < j < \lambda\}$. Una struttura che realizza il tipo p deve avere cardinalità $\geq \lambda$. Se M è una struttura infinita, p è finitamente consistente in M. Quindi esiste $N \succeq M$ che realizza p. □

4.6 Catene elementari

Una **catena elementare** è una catena $\langle M_i : i < \lambda\rangle$ di strutture tali che $M_i \preceq M_j$ per ogni $i < j < \lambda$. L'**unione** o il **limite** della catena è la struttura che ha come dominio

$$M \ = \ \bigcup_{i<\lambda} M_i$$

e come e relazioni e funzioni l'unione delle relazioni e delle funzioni delle strutture M_i.

4.24 Lemma delle catene elementari di strutture *Sia $\langle M_i : i \in \lambda\rangle$, una catena elementare di strutture. Sia M l'unione della catena. Allora $M_i \preceq M$ per ogni $i < \lambda$.*

Dimostrazione Mostriamo per induzione sulla sintassi della formula pura $\varphi(x)$ che l'equivalenza

$$M_i \vDash \varphi(a) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi(a)$$

vale per ogni a in M_i e per ogni $i < \lambda$. Poiché $M_i \subseteq M$, l'affermazione vale per le formule senza quantificatori per il lemma 3.17. Il passo induttivo per i connettivi booleani è immediato. Mostriamo il passo induttivo per il quantificatore esistenziale.

$$\begin{aligned} M_i \models \exists y\,\varphi(a,y) \;&\Rightarrow\; M_i \models \varphi(a,b) && \text{per un qualche } b \in M_i. \\ &\Rightarrow\; M \models \varphi(a,b) && \text{per un qualche } b \in M_i \subseteq M \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva alla formula $\varphi(a,b)$ ed all'indice i. Ora dimostriamo l'altra implicazione.

$$M \models \exists y\,\varphi(a,y) \;\Rightarrow\; M \models \varphi(a,b) \qquad \text{per un qualche } b \in M$$

Fissiamo un $j < \lambda$ tale che $b \in M_j$ e applichiamo l'ipotesi induttiva alla formula $\varphi(a,b)$ e all'indice j (abbiamo assunto l'ipotesi induttiva per tutti gli indici $< \lambda$).

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; M_j \models \varphi(a,b) && \text{per un qualche } b \in M_j \\ &\Rightarrow\; M_j \models \exists y\,\varphi(a,y) \\ &\Rightarrow\; M_i \models \exists y\,\varphi(a,y) \end{aligned}$$

Quest'ultimo passaggio vale perché $M_i \preceq M_j$ oppure, nel caso $j < i$, perché $M_j \preceq M_i$. □

4.25 Esercizio Sia $\langle M_i : i < \lambda \rangle$ una catena di strutture (non necessariamente elementare). Ovvero $M_i \subseteq M_j$ per ogni $i < j < \lambda$. Sia M_λ l'unione della catena. Si dimostri se $\varphi(x,y) \in L$ è una formula senza quantificatori tale che $M_i \models \forall x \exists y\,\varphi(x,y)$ per ogni $i < \lambda$, allora anche $M_\lambda \models \forall x \exists y\,\varphi(x,y)$. □

Capitolo 5

Tipi e morfismi

Il primo paragrafo tratta di reticoli, algebre di Boole e dualità di Stone. Sono argomenti che aiutano a porre in un contesto le nozioni introdotte in questo capitolo.

Il resto del capitolo è un catalogo di definizioni e notazione. Sconsiglio di leggerlo in ordine sequenziale ma di scorrerlo velocemente e farvi riferimento quando necessario.

5.1 Reticoli

Un **preordine** è un insieme $\mathbb{P}$ su cui è data una relazione transitiva e riflessiva $\leq$. Scriveremo:

$$\boldsymbol{A \leq b} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq b \text{ per ogni } x \in A \qquad\qquad \boldsymbol{b \leq A} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b \leq x \text{ per ogni } x \in A$$

$$\boldsymbol{A^{\uparrow}} \overset{\text{def}}{=} \{x \,:\, A \leq x\} \qquad\qquad \boldsymbol{A^{\downarrow}} \overset{\text{def}}{=} \{x \,:\, x \leq A\}$$

L'insieme $A^{\uparrow}$ si chiama **cono all'insù generato da A**, invece $A^{\downarrow}$ si chiama **cono all'ingiù**. I coni generati da un singoletto $\{a\}$ si dicono **principali** e denotati semplicemente con $\boldsymbol{a^{\uparrow}}$ ed $\boldsymbol{a^{\downarrow}}$. È immediato verificare che:

$$(A \cup B)^{\uparrow} = A^{\uparrow} \cap B^{\uparrow} \qquad\qquad (A \cup B)^{\downarrow} = A^{\downarrow} \cap B^{\downarrow}$$

Da un preordine $\mathbb{P}$ si ottiene un ordine quozientando per la relazione di equivalenza:

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b \text{ e } b \leq a$$

Anche se tratteremo spesso con *pre*ordini, siamo essenzialmente interessati all'ordine associato a questo e quindi spesso confonderemo preordini con l'ordine a loro associato. I preordini sono comunissimi in natura, qui ci sta particolarmente a cuore quello indotto su un insieme di formule dalla relazione di conseguenza logica:

$$\varphi \leq \psi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \psi$$

Un **(pre)semireticolo inferiore** è un (pre)ordine $\mathbb{P}$ in cui coni all'ingiù generati da due elementi sono principali. Se i coni all'insù generati da due elementi sono principali diremo che $\mathbb{P}$ è un **semireticolo superiore**. In un semireticolo inferiore possiamo introdurre una funzione binaria $\wedge$, e in un semireticolo superiore una funzione $\vee$, tale che

$$\{a, b\}^{\downarrow} = (a \wedge b)^{\downarrow} \qquad \text{e} \qquad \{a, b\}^{\uparrow} = (a \vee b)^{\uparrow}$$

Chiameremo la prima operazione **congiunzione** oppure anche **intersezione**. La seconda **disgiunzione** oppure **unione**. I termini inglesi sono **meet** e **join** e non hanno una traduzione letterale in questo contesto. Se $\mathbb{P}$ è un semireticolo sia inferiore che superiore diremo che è un **reticolo**.

Se $\mathbb{P}$ contiene un elemento **0** tale che $0 \leq \mathbb{P}$, diremo che $\mathbb{P}$ è **limitato inferiormente**. L'elemento 0 è chiamato **fondo** del reticolo (avolte denotato con $\bot$). Se $\mathbb{P}$ contiene un elemento **1** tale che $\mathbb{P} \leq 1$, diremo che $\mathbb{P}$ è **limitato superiormente**. L'elemento 1 è detto **cima** del reticolo (a volte denotato con $\top$). Diremo che $\mathbb{P}$ **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

La congiunzione è commutativa e associativa modulo equivalenza, ovvero

$$a \wedge b \quad \sim \quad a \wedge b \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad (a \wedge b) \wedge c \quad \sim \quad a \wedge (b \wedge c)$$

Potremo quindi senza ambiguità scrivere $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Quando C è un insieme finito non vuoto scriveremo $\boldsymbol{\wedge C}$ per la congiunzione di tutti i suoi elementi (quando $\mathcal{P}$ è limitato superiormente si conviene che $\wedge\varnothing = 1$). È immediato verificare che $\wedge C$ è un generatore del cono $C^{\downarrow}$. Quindi in un semireticolo inferiore tutti i coni all'ingiù generati da finiti elementi sono principali. Lo stesso vale in un reticolo superiore per la disgiunzione ed i coni all'insù.

Un reticolo si dice **distributivo** se per ogni $a, b, c \in \mathbb{P}$ abbiamo le seguenti identità

$$a \wedge (b \vee c) \quad \sim \quad (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad a \vee (b \wedge c) \quad \sim \quad (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Sia $\mathbb{P}$ un semireticolo inferiore. Un **filtro** su $\mathbb{P}$ è un insieme non vuoto $F \subseteq \mathbb{P}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

f1. $\quad a \in F \quad \Rightarrow \quad a^{\uparrow} \subseteq F;$

f2. $\quad a, b \in F \quad \Rightarrow \quad a \wedge b \in F.$

Diremo che F è un **filtro proprio** se $F \subset \mathbb{P}$. Diremo che è **principale** se $F = b^{\uparrow}$ per un qualche $b \in \mathbb{P}$. Un filtro F si dice **massimale** se $F \subset \mathbb{P}$ e non esiste nessun filtro H tale che $F \subset H \subset \mathbb{P}$.

Conviene generalizzare il concetto di massimalità come segue. Diremo che F è **massimale relativo a $\boldsymbol{c}$**, se $c \notin F$ e $c \in H$ per ogni filtro $H \supset F$. Diremo semplicemente che F è **massimale relativo** se è massimale rispetto a qualche c. Si noti che se $\mathbb{P}$ è limitato inferiormente un filtro massimale relativamente a 0 è massimale tout court.

È immediato verificare che l'intersezione di una famiglia arbitraria di filtri è un filtro, quindi dato un sottoinsieme arbitrario $B \subseteq \mathbb{P}$ possiamo definire il **filtro generato da $\boldsymbol{B}$** come l'intersezione di tutti i filtri che contengono B. Se B è un insieme finito non vuoto, allora il filtro da lui generato è $(\wedge B)^{\uparrow}$. In generale abbiamo il seguente lemma la cui verifica è immediata:

5.1 Lemma *Sia $\mathbb{P}$ un semireticolo inferiore e $B \subseteq \mathbb{P}$. Il filtro generato da B è l'insieme*

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{a \,:\, \wedge C \leq a \text{ per qualche } C \subseteq B \text{ finito non vuoto}\Big\}. \qquad \square$$

Il seguente corollario è immediato.

5.2 Corollario *Sia $\mathbb{P}$ un semireticolo inferiore, $B \subseteq \mathbb{P}$, $c \in \mathbb{P}$. Se per ogni $C \subseteq B$ finito non vuoto $\wedge C \nleq c$ allora il filtro generato da B non contiene c.* $\square$

La seguente proposizione fornisce condizioni equivalenti alla massimalità relativa che spesso sono più comode da verificare.

5.3 Proposizione *Sia $\mathbb{P}$ un semireticolo inferiore. Fissiamo un filtro $F \subseteq \mathbb{P}$ e $c \in \mathbb{P} \smallsetminus F$. Allora F è contenuto in un filtro massimale relativo a c.*

Dimostrazione La proposizione si ottiene applicando lemma di Zorn in modo del tutto analogo a quanto fatto per la proposizione 4.4. Equivalentemente si può usare una costruzione ricorsiva transfinita che riportiamo qui sotto: la dimostrazione è più lunga ma più intuitiva.

Sia $\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ un'arbitraria enumerazione di $\mathbb{P}$, dove λ è la cardinalità di $\mathbb{P}$. Definiamo per ricorsione transfinita una catena di sottoinsiemi di $\mathbb{P}$ come segue. Poniamo $F_0 = F$ e, dato F_α per $\alpha < \lambda$, definiamo

$$F_{\alpha+1} = \begin{cases} \text{filtro generato da } F_\alpha \cup \{a_\alpha\} & \text{se questo non contiene } c \\ F_\alpha & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, se $\beta \leq \lambda$ è un ordinale limite, poniamo

$$F_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} F_\alpha$$

Dimostriamo che F_λ è il filtro desiderato. È un filtro, perché unione di filtri. Per verificare la massimalità sia $a \notin F_\lambda$. Poiché $a = a_\alpha$ per un qualche $\alpha < \lambda$, il passo $\alpha + 1$ della costruzione produce $F_{\alpha+1} = F_\alpha$. Quindi $\wedge C \wedge a \leq c$ qualche $C \subseteq F_\alpha$ finito. Quindi ogni filtro $H \supset F_\lambda$ contiene c. □

Sia $\mathbb{P}$ un reticolo. Un filtro F proprio si dice **primo** se per ogni $a, b \in \mathbb{P}$:

$$a \vee b \in F \quad \Rightarrow \quad a \in F \text{ o } b \in F.$$

5.4 Lemma *Sia $\mathbb{P}$ un reticolo distributivo. Ogni filtro massimale relativo è primo.*

Dimostrazione Sia F un filtro massimale relativamente a c. E supponiamo che $a \notin F$ e $b \notin F$. Allora esiste un elemento $d \in F$ tale che $d \wedge a \leq c$ e $d \wedge b \leq c$. Quindi $(d \wedge a) \vee (d \wedge b) \leq c$ e, per distributività, $d \wedge (a \vee b) \leq c$. Quindi $a \vee b \notin F$. □

Dato un reticolo distributivo limitato $\mathbb{P}$, denoteremo con **$S(\mathbb{P})$** l'insieme dei suoi filtri primi. Introduciamo una **topologia su $S(\mathbb{P})$**. I chiusi di base sono gli insiemi della forma:

p. $$[a]_{\mathbb{P}} \overset{\text{def}}{=} \Big\{F : \text{ filtro primo tale che } a \in F\Big\}.$$

per un qualche $a \in \mathbb{P}$. Il seguente lemma dimostra che si tratta effettivamente di una base per una topologia:

5.5 Lemma *Fissiamo $\mathbb{P}$, reticolo distributivo limitato. Per ogni $a, b \in \mathbb{P}$ valgono le seguenti identità:*

1. $[0]_{\mathbb{P}} = \varnothing$;
2. $[1]_{\mathbb{P}} = S(\mathbb{P})$;
3. $[a]_{\mathbb{P}} \cup [b]_{\mathbb{P}} = [a \vee b]_{\mathbb{P}}$;
4. $[a]_{\mathbb{P}} \cap [b]_{\mathbb{P}} = [a \wedge b]_{\mathbb{P}}$.

Dimostrazione Immediata. Si noti che la dimostrazione di 3 usa la primalità dei filtri in $S(\mathbb{P})$. □

I chiusi di $S(\mathbb{P})$ formano un reticolo distributivo limitato: l'ordine è dato dall'inclusione, la disgiunzione e la congiunzione sono l'unione e l'intersezione. Gli estremi sono $\varnothing$ e

$S(\mathbb{P})$. Il seguente è un teorema di rappresentazione per i reticoli distributivi.

5.6 Teorema *Sia $\mathbb{P}$ un reticolo distributivo limitato. La mappa che manda $a \mapsto [a]_{\mathbb{P}}$ è un'immersione di $\mathbb{P}$ nel reticolo dei chiusi di $S(\mathbb{P})$.*

Dimostrazione Che la mappa preservi l'ordine è immediato, che preservi gli estremi, la disgiunzione e la congiunzione è ciò che afferma il lemma 5.5. Dobbiamo solo mostrare che è iniettiva. Fissiamo $a \neq b$ e mostriamo $[a]_{\mathbb{P}} \neq [b]_{\mathbb{P}}$. Assumiamo $a \not\leq b$. Se $a = 0$ allora $[a]_{\mathbb{P}} = \varnothing \neq [b]_{\mathbb{P}}$ è immediato. Altrimenti, esiste un filtro F che contiene a ed è massimale relativo a b. Per il lemma 5.4 tale F è primo. Quindi $F \in [a]_{\mathbb{P}} \smallsetminus [b]_{\mathbb{P}}$. □

5.7 Lemma *Con la topologia sopra definita $S(\mathbb{P})$ è uno spazio compatto.*

Dimostrazione Sia $\langle [a_i]_{\mathbb{P}} : i \in I \rangle$ una sequenza arbitraria di chiusi di base tale che per ogni sottoinsieme finito $J \subseteq I$

1. $$\bigcap_{i \in J} [a_i]_{\mathbb{P}} \neq \varnothing$$

Dobbiamo mostrare che l'intera sequenza ha intersezione non vuota:

2. $$\bigcap_{i \in I} [a_i]_{\mathbb{P}} \neq \varnothing$$

Per punto 4 del lemma 5.5, da 1 otteniamo che per ogni $C \subseteq \{a_i : i \in I\}$ finito $\wedge C \not\leq 0$. Per la proposizione 5.3, esiste un filtro massimale che contiene $\{a_i : i \in I\}$. Per il lemma 5.4, tale filtro è anche primo e quindi appartiene all'intersezione in 2. □

Se, in un reticolo distributivo limitato $\mathbb{P}$, per un dato elemento a se esiste un b tale che $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$, allora, com'è immediato verificare, questo b è unico e verrà chiamato **complemento** di a e denotato con $\neg a$.

5.8 Lemma *Sia $\mathbb{P}$ un reticolo distributivo limitato e sia $U \subseteq S(\mathbb{P})$ un insieme aperto-chiuso (cioè sia sia aperto che chiuso). Allora $U = [a]_{\mathbb{P}}$ per qualche $a \in \mathbb{P}$. Inoltre, esiste $\neg a$.*

Dimostrazione Sia U che $S(\mathbb{P}) \smallsetminus U$ sono chiusi quindi esistono due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{P}$ tali che

$$U = \bigcap_{a \in A} [a]_{\mathbb{P}} \qquad \text{e} \qquad S(\mathbb{P}) \smallsetminus U = \bigcap_{b \in B} [b]_{\mathbb{P}}.$$

Per la compattezza garantita dal lemma 5.7, e per il punto 4 del lemma 5.5, esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $[a]_{\mathbb{P}} \cap [b]_{\mathbb{P}} = \varnothing$. Ma questo implica, che $U \subseteq [a]_{\mathbb{P}}$ è per un $[a]_{\mathbb{P}}$ disgiunto da $S(\mathbb{P}) \smallsetminus U$. Quindi $U = [a]_{\mathbb{P}}$. Inoltre, poiché per la stessa ragione $[b]_{\mathbb{P}} = S(\mathbb{P}) \smallsetminus U$ avremo

$$[a \wedge b]_{\mathbb{P}} = [a]_{\mathbb{P}} \cap [b]_{\mathbb{P}} = \varnothing \qquad \text{e} \qquad [a \vee b]_{\mathbb{P}} = [a]_{\mathbb{P}} \cup [b]_{\mathbb{P}} = S(\mathbb{P}).$$

Dal lemma 5.5, otteniamo $a \wedge b = 0$ e $a \vee b = 1$, ovvero $b = \neg a$. □

Un'**algebra booleana** è un reticolo distributivo limitato in cui ogni elemento ha un complemento. In questo caso gli insiemi del tipo $[a]_{\mathbb{P}}$ sono anche anche aperti e formano una base di aperti della topologia di $S(\mathbb{P})$. Una topologia in cui un insieme di aperti-chiusi è sia una base di aperti che una base di chiusi si dice **zero-dimensionale**.

Un filtro proprio è un **ultrafiltro** se $a \in F$ o $\neg a \in F$ per ogni a.

5.9 Proposizione *Sia $\mathbb{P}$ un'algebra booleana. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *F è un filtro massimale;*

2. *F è un filtro primo;*

3. *F è un ultrafiltro.*

Dimostrazione L'implicazione $2 \Rightarrow 3$ si ottiene osservando che $a \vee \neg a \in F$. Il resto è immediato. $\square$

5.10 Esercizio Sia $\mathbb{P}$ un semireticolo inferiore, $B \subseteq \mathbb{P}$ e $c \in \mathbb{P}$ tale che per ogni $C \subseteq B$ finito non vuoto $\wedge C \nleq c$. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. B è un filtro massimale relativo a c;

2. $a \notin B \quad \Rightarrow \quad b \wedge a \leq c$ per qualche $\quad b \in B$;

5.11 Esercizio Sia $\mathbb{P}$ un reticolo distributivo. Dato un insieme $C \subseteq \mathbb{P}$ diremo che un filtro F è massimale relativamente a C se $F \cap C = \varnothing$ e $H \cap C \neq \varnothing$ per ogni filtro $H \supset F$. È un filtro massimale relativo a C primo? È vero che ogni filtro $F \cap C = \varnothing$ è contenuto in un filtro massimale rispetto a C? $\square$

5.2 Reticoli di formule e tipi

Fissiamo un insieme **Δ** di formule con variabili libere tra quelle della tupla $\boldsymbol{x}$. In questo paragrafo la variabile x è fissata e non verrà mostrata nella notazione. Al termine del paragrafo commentiamo la notazione che useremo in contesti più ampi. All'insieme Δ associamo un reticolo limitato che indicheremo con $\mathbb{P}(\boldsymbol{\Delta})$. Questo è la chiusura per congiunzione e disgiunzione di $\Delta \cup \{\bot, \top\}$ ed ha come ordine la relazione di conseguenza logica:

$$\psi \leq \varphi \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \psi \vdash \varphi$$

Segue immediatamente che congiunzione e disgiunzione del reticolo corrispondono alla congiunzione e disgiunzione tra formule.

Quanto diremo in questo paragrafo vale anche, mutatis mutandis, interpretando $\vdash$ come conseguenza logica modulo una fissata teoria T. È in questa forma generalizzata che verrà applicato nei prossimi capitoli, ma al momento è preferibile non sovraccaricare la notazione.

Chiameremo **Δ-tipo** un sottoinsieme di Δ. Se p è un Δ-tipo, indicheremo talvolta con $\langle p \rangle$ il filtro in $\mathbb{P}(\Delta)$ generato da p.

5.12 Lemma *Dato un tipo $p \subseteq \Delta$ sia q il filtro in $\mathbb{P}(\Delta)$ generato da p. Allora*

$$q \quad = \quad \Big\{\varphi \in \mathbb{P}(\Delta) \quad : \quad p \vdash \varphi\Big\}$$

Dimostrazione L'inclusione $\subseteq$ è immediata. L'inclusione $\supseteq$ è una conseguenza del teorema di compattezza: se $p \vdash \varphi$, allora $\psi \vdash \varphi$ per una qualche formula ψ congiunzione di formule in p. Quindi da $\psi \in q$ e $\psi \leq \varphi$ otteniamo $\varphi \in q$. $\square$

Diremo che $p \subseteq \Delta$ è un **Δ-tipo principale** se il filtro in $\mathbb{P}(\Delta)$ generato da p è principale. Il seguente lemma generalizza ai Δ-tipi quanto la proposizione 4.19 affermava per le teorie. È un immediata conseguenza della compattezza, la dimostrazione viene lasciata al lettore per esercizio.

5.13 Lemma *Per ogni tipo $p \subseteq \Delta$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è principale;*
2. *$\varphi \vdash p$ dove φ è congiunzione di formule in p;*
3. *$\varphi \vdash p \vdash \varphi$ per qualche formula φ.* □

Si noti che al punto 3 non è necessario richiedere che la formula φ appartenga a $\mathbb{P}(\Delta)$.

5.14 Definizione *Diremo che il tipo $p \subseteq \Delta$ è **primo** se genera in $\mathbb{P}(\Delta)$ un filtro primo. Diremo che è **completo** se genera un filtro massimale.*

In generale né Δ né $\mathbb{P}(\Delta)$ sono chiusi per negazione. Dal lemma 5.12 otteniamo comunque il seguente:

5.15 Corollario *Per ogni tipo $p \subseteq \Delta$ consistente le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è completo;*
2. *p è coerente e $p \vdash \varphi$ o $p \vdash \neg\varphi$ per ogni formula $\varphi \in \Delta$.*

Dimostrazione L'implicazione 2⇒1 è immediata, dimostriamo 1⇒2. Osserviamo innanzitutto che se p non fosse coerente, allora per il lemma 5.12 si avrebbe che $\perp \in \langle p \rangle$, ovvero $\langle p \rangle = \mathbb{P}(\Delta)$, contro l'ipotesi. Supponiamo ora $\varphi \in \Delta$ e $p \nvdash \varphi$. Allora per lo stesso lemma significa $\varphi \notin \langle p \rangle$, quindi, poichè p è completo, otteniamo $\langle p \cup \{\varphi\} \rangle = \mathbb{P}(\Delta)$. Di nuovo per 5.12 otteniamo $p \cup \{\varphi\} \vdash \perp$. Siccome p è coerente, questo significa $p \vdash \neg\varphi$. □

Quest'altro corollario semplifica la verifica della primalità di un tipo.

5.16 Corollario *Per ogni tipo $p \subseteq \Delta$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è primo;*
2. $p \vdash \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \quad \Rightarrow \quad p \vdash \varphi_i$ *per qualche i,* *per ogni n ed ogni $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Delta$.*

Qui riportiamo una dimostrazione sintattica. Il lemma 5.17 qui sotto, può essere usato per una dimostrazione alternativa più breve.

Dimostrazione Dato il lemma 5.12, l'implicazione 1 ⇒ 2 è ovvia. Per dimostrare 2 ⇒ 1 dobbiamo mostrare che 2 vale per tutte le formule in $\mathbb{P}(\Delta)$. Procediamo per induzione sulla sintassi. Il passo induttivo per il connettivo $\vee$ è ovvio. Quindi supponiamo

$$p \quad \vdash \quad (\psi \wedge \xi) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$$

che $p \nvdash \varphi_i$, e che l'ipotesi induttiva valga per ψ, ξ, e tutte le formule φ_i. Per distributività

$$p \quad \vdash \quad \Big(\psi \vee \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\Big) \;\wedge\; \Big(\xi \vee \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\Big)$$

Dall'ipotesi induttiva segue $p \vdash \psi$ e $p \vdash \xi$ e quindi $p \vdash \psi \wedge \xi$ come richiesto. □

I tipi primi sono esattamente i tipi di qualche tupla. Sia x una tupla contenente le variabili che occorrono in Δ. Dato un modello M e una tupla $c \in M^{|x|}$ chiameremo ***Δ*-tipo di *c* in *M*** l'insieme:

$$p \quad = \quad \Big\{\varphi \in \Delta \,:\, M \vDash \varphi[x/c]\Big\}.$$

Scriveremo $\boldsymbol{p = \Delta\text{-}\mathbf{tp}_M(c)}$. Quando il modello M è chiaro dal contesto ometteremo il pedice.

5.17 Lemma *Per ogni tipo $p \subseteq \Delta$ le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *p è primo;*
2. $q := p \cup \Big\{\neg\varphi \,:\, \varphi \in \Delta$ *tale che* $p \nvdash \varphi\Big\}$ *è consistente.*
3. $\{\varphi \in \Delta : p \vdash \varphi\} = \Delta\text{-tp}_M(c)$ *per qualche struttura M e qualche tupla $c \in M^{|x|}$.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Osserviamo innanzitutto che p primo $\Rightarrow \langle p\rangle \neq \mathbb{P}(\Delta) \Rightarrow$ p consistente. Supponiamo per assurdo $q \vdash \psi$ e $q \vdash \neg\psi$. Allora per compattezza esiste $q' \subseteq q$ finito tale che $q \vdash \psi$ e $q' \vdash \neg\psi$. Allora, poiché p è consistente, $q' \cap \{\neg\varphi : \varphi \in \Delta$ e $p \nvdash \varphi\} = \{\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n\}$ per qualche $n > 0$. Quindi $p \cup \{\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n\} \vdash \perp$. Questo significa $p \vdash \neg(\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_n) \vdash \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$. Ma ogni φ_i sta in Δ ed è tale che $p \nvdash \varphi_i$, assurdo. Dimostriamo 2⇒3. Sia M tale che $M \vDash p$ e sia $c \in M^{|x|}$ tale che $M \vDash \psi[x/c]$ per ogni $\psi \in q$. Per l'inclusione $\subseteq$, consideriamo $\varphi \in \Delta$ tale che $p \vdash \varphi$. Allora $p \nvdash \neg\varphi$ perché p consistente. Ma allora $\varphi \in q$ e quindi $M \vDash \varphi[x/c]$. Per l'inclusione opposta, sia $\varphi \in \Delta\text{-tp}_M(c)$. Supponiamo $p \nvdash \varphi$. Allora $\neg\varphi \in q$. Quindi $M \vDash \neg\varphi(x/c)$, assurdo. Dimostriamo 3⇒1. Siano M e c come in 3. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{P}(\Delta)$ tali che $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \langle p\rangle$. Allora $p \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Quindi $M \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2)[x/c]$, perciò $p \vdash \varphi_1$ o $p \vdash \varphi_2$. □

In questo paragrafo abbiamo fissato assieme a Δ una tupla di variabili libere x. Nel seguito servirà considerare simultaneamente diverse tuple di variabili libere. Tipicamente fisseremo un insieme di formule Δ senza specificare le variabili libere. Quando il contesto lo suggerisce, per Δ intenderemo in realtà $\boldsymbol{\Delta_{\restriction x}}$, ovvero il sottoinsieme delle formule in Δ con variabili libere tra quelle della tupla x. La notazione $\Delta_{\restriction x}$ non verrà quasi mai usata perché il rischio di fraintendimenti è minimo. Si noti comunque che la differenza è rilevante: un tipo completo $p \subseteq \Delta_{\restriction x}$ non è sicuramente completo se considerato come sottoinsieme di $\Delta_{\restriction x,z}$. Spesso scriveremo $p(x) = \Delta\text{-tp}_M(c)$, dove x è una tupla di variabili di lunghezza $|c|$, per suggerire che stiamo riferendoci a $\Delta_{\restriction x}$.

L'insieme Δ più usato è quello di tutte le formule in $L(A)$, in questo caso scriveremo $\mathbf{tp}_M(\boldsymbol{c/A})$, o quando A è vuoto $\mathbf{tp}_M(\boldsymbol{c})$. Quando x e c sono le tuple vuote allora i tipi si riducono a teorie e la notazione diventa $\mathbf{Th}_\Delta(\boldsymbol{M/A})$ e $\mathbf{Th}_\Delta(\boldsymbol{M})$.

Spesso insiemi di formule Δ sono costituiti da classi sintattiche, per esempio: le formule atomiche, le formule atomiche e le loro negazioni, le formule senza quantificatori, e simili. Quando Δ è l'insieme delle formule atomiche scriveremo $\mathbf{at\text{-}tp}_M(\boldsymbol{c})$ per $\Delta\text{-tp}_M(c)$. Quando Δ è l'insieme delle formule atomiche con parametri in A scriveremo $\mathbf{at\text{-}tp}_M(\boldsymbol{c/A})$. La notazione $\mathbf{at}^\pm\mathbf{\text{-}tp}_M(\boldsymbol{c/A})$ è usata per tipi di formule atomiche e negazioni di formule atomiche, scriveremo $\mathbf{Th}_{\mathbf{at}^\pm}(\boldsymbol{M/A})$ per la corrispondente teoria. Quest'ultima è molto usata perché descrive, a meno di isomorfismo la struttura $\langle A\rangle_M$. Viene anche detta **diagramma** della struttura $\langle A\rangle_M$.

5.3 Mappe che preservano la verità

Prima di tutto chiariamo il significato che il termine **mappa** avrà in queste note. Attenzione: *non* è terminologia universalmente condivisa.

5.18 Definizione *Una* ***mappa*** *è una tripla* $h : M \to N$ *dove*

1. M *è una struttura detta* ***dominio****;*

2. N *è una struttura detta* ***codominio****; e*

3. h *è una funzione con* ***dominio di definizione*** $\operatorname{dom} h \subseteq M$ *e* ***immagine*** $\operatorname{img} h \subseteq N$. □

Quindi la stessa funzione, nel senso insiemistico di *relazione binaria univoca*, dà luogo a mappe diverse se presa con un altro dominio o codominio. Se $\operatorname{dom} f = M$ la mappa è detta **totale**; se $\operatorname{img} f = N$ è detta **suriettiva**. Non escludiamo la possibilità che la funzione h sia vuota.

La **composizione di due mappe** è definita solo quando il codominio della prima coincide con il dominio della seconda. La composizione di $h : M \to N$ e $k : N \to Q$ è la mappa $k \circ h : M \to Q$ dove $k \circ h$ è la funzione che manda $a \mapsto kha$ per ogni elemento $a \in \operatorname{dom} h$ tale che $ha \in \operatorname{dom} k$, cioè per tutti gli a per cui la composizione di funzioni è definita (quando $\operatorname{img} h$ è disgiunto da $\operatorname{dom} k$ il risultato della composizione può anche essere la mappa vuota). Non essendoci alcun requisito di totalità, la **mappa inversa** di $h : M \to N$ è definita non appena h è iniettiva: è la mappa $h^{-1} : N \to M$.

5.19 Definizione *Sia* Δ *un insieme di formule. Diremo che la mappa* $h : M \to N$ ***preserva la verità*** *delle formule in* Δ *se*

p. $M \vDash \varphi(a) \;\; \Rightarrow \;\; N \vDash \varphi(ha)$ *per ogni formula* $\varphi(x) \in \Delta$ *ed ogni tupla* $a \in (\operatorname{dom} h)^{|x|}$.

Notazione: se a *è la tupla* $\langle a_0 \ldots a_{n-1} \rangle$ *allora* ha *sta per la tupla* $\langle ha_0 \ldots ha_{n-1} \rangle$*. Per brevità noi diremo anche* ***Δ-morfismo****, ma quest'ultimo non è termine standard. Diremo* ***Δ-immersione*** *e* ***Δ-epimorfismo*** *se la mappa è totale, rispettivamente, suriettiva.* □

I Δ-morfismi sono uno strumento per confrontare localmente due strutture (o punti diversi della stessa struttura) così come lo sono i Δ-tipi. Introduciamo un'altra notazione a volte usata a tale scopo. Dati due tuple $a \in M^{|x|}$ e $b \in N^{|x|}$, definiamo

$$\boldsymbol{M, a \Rrightarrow_\Delta N, b} \quad \text{se } M \vDash \varphi(a) \Rightarrow N \vDash \varphi(b) \text{ ogni formula } \varphi(x) \in \Delta.$$

$$\boldsymbol{M, a \equiv_\Delta N, b} \quad \text{se } M \vDash \varphi(a) \Leftrightarrow N \vDash \varphi(b) \text{ ogni formula } \varphi(x) \in \Delta.$$

Ricapitoliamo le diverse notazioni nella seguente:

5.20 Osservazione Fissiamo un insieme di formule Δ. Per ogni mappa $h : M \to N$ le seguenti affermazioni sono sinonime:

1. $h : M \to N$ è un Δ-morfismo;

2. $M, a \Rrightarrow_\Delta N, ha$ per ogni tupla a di elementi di $\operatorname{dom} h$;

3. $\Delta\text{-tp}_M(a) \subseteq \Delta\text{-tp}_N(ha)$ per ogni tupla a di elementi di $\operatorname{dom} h$;

4. $N, ha \vDash p(x)$ per ogni tupla a di elementi di $\operatorname{dom} h$ e per $p(x) = \Delta\text{-tp}_M(a)$;

4'. $M, a \vDash \neg p(x)$ per ogni tupla a di elementi di $\operatorname{dom} h$ e per $p(x) = \neg\Delta\text{-tp}_N(ha)$.

Abbiamo scritto $\neg\Delta$ per l'insieme delle negazioni di formule in Δ. □

Qualche formula in Δ potrebbe essere chiusa, quindi è importante tener presente la seguente osservazione.

5.21 Osservazione La definizione 5.19 può essere applicata anche ad enunciati prendendo per a ed x la tupla vuota, in questo caso afferma semplicemente che l'enunciato ha lo stesso valore di verità nel dominio e nel codominio, la funzione diventa irrilevante (quindi $h : M \to N$ preserva la verità dell'enunciato φ se e solo se la mappa vuota $\varnothing : M \to N$ la preserva). La mappa vuota preserva la verità degli enunciati in Δ se e solo se $\mathrm{Th}_\Delta(M) \subseteq \mathrm{Th}_\Delta(N)$. Si veda per esempio il corollario 5.33. □

La seguente proposizione è immediata conseguenza della finitezza delle formule.

5.22 Proposizione *Fissiamo un insieme di formule Δ. Per ogni mappa $h : M \to N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *$h : M \to N$ è un Δ-morfismo;*

b. *per ogni $k \subseteq h$ finita, $k : M \to N$ è un Δ-morfismo.* □

Nel seguito capiterà frequentemente di costruire morfismi usando catene di morfismi. Una **catena di mappe** è una sequenza $h_i : M \to N$ di mappe tale che $h_i \subseteq h_j$ per ogni $i < j < \lambda$. La mappa $h : M \to N$ dove

$$h \ := \bigcup_{i<\lambda} h_i$$

è detta **unione** o **limite della catena**. La seguente proposizione è una conseguenza immediata della proposizione 5.22.

5.23 Proposizione *Fissiamo un insieme di formule Δ. L'unione di una catena di Δ-morfismi è anche un Δ-morfismo.* □

È evidente che se $h : M \to N$ preserva la verità delle formule in Δ allora preserva anche la verità delle formule nella chiusura di Δ per congiunzione e disgiunzione. La seguente proposizione illustra il rapporto con la negazione.

5.24 Proposizione *Per ogni mappa $h : M \to N$ ed ogni formula $\varphi(x) \in L$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *$h : M \to N$ preserva la verità di $\neg\varphi(x)$;*

b. *$M \vDash \varphi(a) \ \Leftarrow \ N \vDash \varphi(ha)$ per ogni tupla $a \in (\mathrm{dom}\, h)^{|x|}$.*

Inoltre, quando la mappa è iniettiva sono equivalenti anche alla seguente:

c. *$h^{-1} : N \to M$ preserva la verità di $\varphi(x)$.* □

Dimostrazione L'equivalenza a⇔b è immediata. Per dimostrare b⇔c esplicitiamo c nella seguente

c'. $N \vDash \varphi(b) \ \Rightarrow \ M \vDash \varphi(h^{-1}b)$ per ogni tupla $b \in (\mathrm{dom}\, h^{-1})^{|x|}$.

Poiché $\mathrm{dom}\, h^{-1}$ coincide con $\mathrm{img}\, h$, la tupla b è della forma ha per una tupla $a \in (\mathrm{dom}\, h)^{|x|}$. Quindi b è equivalente a c'. □

Il rapporto con i quantificatori è più delicato perché coinvolge proprietà globali della mappa: totalità e suriettività. Scriveremo $\{\exists\}\Delta$ e $\{\forall\}\Delta$ per gli insiemi di formule della forma $\exists x\, \varphi$, rispettivamente $\forall x\, \varphi$, con $\varphi \in \Delta$ ed x una tupla di variabili.

5.25 Proposizione *Ogni Δ-immersione preserva anche la verità delle formule in* $\{\exists\}\Delta$.

Dimostrazione Per ogni formula $\varphi(x,y)$ in Δ ed ogni tupla $a \in (\operatorname{dom} h)^{|x|}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} M \vDash \exists y\, \varphi(a,y) \quad &\Rightarrow \quad M \vDash \varphi(a,b) \text{ per una tupla } b \in M^{|y|} \\ &\Rightarrow \quad N \vDash \varphi(ha,hb) \\ &\Rightarrow \quad N \vDash \varphi(ha,c) \text{ per una tupla } c \in N^{|y|} \\ &\Rightarrow \quad N \vDash \exists y\, \varphi(ha,y). \end{aligned}$$

Si noti che la seconda implicazione richiede la totalità (e l'ipotesi) perché in generale non è garantito che $\varphi(a,y)$ abbia una soluzione in $\operatorname{dom} h$. □

La dimostrazione della seguente proposizione è lasciata al lettore. (Aggiungendo un'ipotesi, l'iniettività, potremmo riscrivere $\forall x$ come $\neg\exists x\neg$ e applicare 5.25 e 5.24. Senza ipotesi addizionali, serve ripetere l'argomento usato per 5.25.)

5.26 Proposizione *Ogni Δ-epimorfismo preserva anche la verità delle formule in* $\{\forall\}\Delta$. □

Più avanti, nei corollari 9.4 e 9.7, dimostreremo una sorta di viceversa delle proposizioni 5.25 e 5.26.

5.4 Le mappe elementari

Una mappa $h : M \to N$ che preserva la verità di tutte le formule si dice **mappa elementare**. Per effetto della negazione l'implicazione nella definizione 5.19 vale automaticamente anche nel senso inverso:

$$M \vDash \varphi(a) \quad\Leftrightarrow\quad N \vDash \varphi(ha) \quad \text{per ogni formula } \varphi(x) \in L \text{ ed ogni tupla } a \in (\operatorname{dom} h)^{|x|}.$$

Una mappa elementare totale si chiama **immersione elementare**. È chiaro che le mappe elementari sono chiuse per composizione ed inversa. Possiamo enunciare il teorema 3.18 con questa nuova terminologia.

5.27 Teorema *Ogni isomorfismo $h : M \to N$ è una mappa elementare.* □

Tramite la nozione di mappa elementare possiamo riformulare alcune nozioni introdotte nel paragrafo 3.2.

5.28 Osservazione Sia $A \subseteq M \cap N$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a. $\mathrm{id}_A : M \to N$ è una mappa elementare.

b. $M \equiv_A N$

In particolare $\varnothing : M \to N$ è una mappa elementare se e solo se $M \equiv N$ e, quando $M \subseteq N$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

c. $\mathrm{id}_M : M \to N$ è una immersione elementare;

d. $M \preceq N$. □

5.29 Esercizio Si dimostri che per ogni mappa $h : M \to N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $h : M \to N$ è un'immersione elementare

2. $h\big[\varphi(a, M)\big] = \varphi(ha, N) \cap h[N]$ per ogni tupla $a \in M^{|x|}$ ed ogni $\varphi(x, y) \in L$.

Si ricorda che $h\big[\varphi(a, M)\big]$ denota l'insieme $\big\{hc\ :\ c \in M \text{ tale che } M \vDash \varphi(a, c)\big\}$.

5.5 Le immersioni parziali

Gli insiemi definibili di una struttura sono spesso oggetti complicatissimi e non è sempre ragionevole sperare di descriverli. Per questa ragione spesso si comincia a considerare insiemi definiti da formule di forma particolarmente semplice: le **formule atomiche** o **formule senza quantificatori**. La nozione di morfismo corrispondente è quindi molto importante.

5.30 Definizione *Una mappa $h : M \to N$ è un'**immersione parziale** se preserva la verità delle formule in $L_{\mathrm{at}^{\pm}}$. Equivalentemente, se*

ip. $M \vDash \varphi(a) \;\Leftrightarrow\; N \vDash \varphi(ha)$ *per ogni $\varphi(x) \in L_{\mathrm{at}}$ e per ogni tupla $a \in (\operatorname{dom} h)^{|x|}$.*

Osserviamo immediatamente che questo equivale a preservare la verità di tutte le formule senza quantificatori.

Se $h : M \to N$ è totale diremo che è un'immersione. Quest'ultima nozione coincide con quella definita in 3.16 anche se la formulazione è leggermente diversa. □

Si noti che le immersioni parziali sono sempre iniettive, l'iniettività si ottiene (ed è di fatto equivalente) ad ip applicata alla formula $x = y$. Se la mappa è totale allora diremo semplicemente un'**immersione**, anche se per enfasi potremo aggiungere **totale**.

Alcuni autori chiamano le immersioni parziali **isomorfismi parziali**, una terminologia ispirata dalla proposizione 5.32. Il termine è comunque infelice perché generalmente parziale si intende come l'opposto di totale mentre qui si nega *totale e suriettiva*. Prima della proposizione un lemma la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

5.31 Lemma *Siano M ed N due strutture e supponiamo che il supporto di M sia contenuto in quello di N. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathrm{id}_M : M \to N$ è un'immersione parziale;*

2. *M è una sottostruttura di N.*

5.32 Proposizione *Per ogni mappa $h : M \to N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$h : M \to N$ è un'immersione parziale;*

2. *esiste un isomorfismo $k : \langle \operatorname{dom} h\rangle_M \to \langle \operatorname{img} h\rangle_N$ che estende h.*

La funzione k è univocamente determinata da h.

Dimostrazione Per verificare l'implicazione $2 \Rightarrow 1$ assumiamo 2 e verifichiamo ip. Per ogni tupla a di elementi di $\operatorname{dom} h$ e per ogni $\varphi(x)$ atomica

$$
\begin{aligned}
M \vDash \varphi(a) \;&\Leftrightarrow\; \langle \operatorname{dom} h\rangle_M \vDash \varphi(a) && \text{per il lemma 5.31}\\
&\Leftrightarrow\; \langle \operatorname{img} h\rangle_N \vDash \varphi(ka) && \text{per il teorema 3.18 e l'ipotesi}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \qquad N \vDash \varphi(ha) \qquad \text{per il lemma 5.31 e perché } h \subseteq k \text{ per ipotesi.}$$

Per dimostrare 1 ⇒ 2, osserviamo che, per il lemma 1.19, gli elementi di $\langle \operatorname{dom} h \rangle_M$ sono della forma $t^M(a)$ dove $t(x)$ è un termine ed a una tupla di dom h. Analogamente, gli elementi di $\langle \operatorname{img} h \rangle_N$ sono della forma $t^N(ha)$. Definiamo k essere la funzione che manda $t^M(a) \mapsto t^N(h\,a)$, quindi la mappa $k : \langle \operatorname{dom} h \rangle_M \to \langle \operatorname{img} h \rangle_N$ estende h ed è totale e suriettiva. Serve dimostrare che è iniettiva ma anche che la definizione è ben data, cioè che il valore della funzione sia definito univocamente. Queste è assicurato dalle due direzioni dell'equivalenza:

$$t^M(a) = s^M(b) \quad \Leftrightarrow \quad t^N(ha) = s^N(hb)$$

che possiamo riscrivere come

$$M \vDash t(a) = s(b) \quad \Leftrightarrow \quad N \vDash t(ha) = s(hb).$$

Ma questa è un'istanza di ip, quindi vale perché $h : M \to N$ è un'immersione parziale. Ora è immediato verificare le due condizioni della definizione 3.16: la prima è anche un istanza di ip, la seconda è ovvia. □

Chiameremo **caratteristica della struttura *M*** la classe di isomorfismo di $\langle \varnothing \rangle_M$. Ovvero, diremo che due strutture M ed N hanno la stessa caratteristica se le rispettive sottostrutture generate dal vuoto sono isomorfe. Si osservi che, se il linguaggio non ha costanti, la sottostruttura generata dal vuoto è vuota e quindi tutte le strutture hanno la stessa caratteristica. Le costanti rendono la nozione non banale, per esempio, se M è un anello nel linguaggio L_{au} allora $\langle \varnothing \rangle_M$ è determinata dalla caratteristica di M nel senso usuale dell'algebra.

5.33 Corollario *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *la mappa vuota $\varnothing : M \to N$ è un'immersione parziale.*
2. *M ed N hanno la stessa caratteristica.* □

Capitolo 6

Alcune strutture relazionali

Due ordini densi numerabili e senza estremi sono isomorfi. Questo è un risultato elementare attribuito a Cantor. In questo capitolo esamineremo al microscopio la costruzione di Cantor. Vedremo anche i grafi aleatori, una struttura per certi versi molto simile a quella degli ordini densi. Dimostreremo che le corrispondenti teorie hanno eliminazione dei quantificatori e sono ω-categoriche. Nel capitolo 9 torneremo sull'eliminazione dei quantificatori in modo più concettuale ma è utile poter usare questo risultato fin da subito.

6.1 Gli ordini densi

Il linguaggio L degli ordini stretti contenente un solo simbolo di relazione binaria $<$ che useremo con notazione infissa. Una struttura M di segnatura L è un **ordine parziale (stretto)** se rende validi i seguenti assiomi (usiamo le usuali abbreviazioni con l'ovvio significato, inoltre, scriviamo delle formule intendendo la loro chiusura universale)

ir. $x \not< x$

tr. $x < z < y \ \rightarrow\ x < y$

Questi assiomi affermano che $<$ viene interpretato in una relazione riflessiva e transitiva

as. $x < y \ \rightarrow\ y \not< x.$

Diremo che l'ordine è un **lineare** o **totale** se vale

ln. $x < y \vee y < x \vee x = y$

Un ordine lineare si dice **denso** se se vale

nb $\exists x, y\, (x \neq y)$;

d $x < y \ \rightarrow\ \exists z\, (x < z < y)$.

Per evitare ordini banali nb richiedere l'esistenza almeno due elementi, poi da d segue che ogni ordine denso ha infiniti elementi.

Se $a < b$ diremo che a è un minorante di b e che b è un maggiorante di a. Un **elemento massimale** è un elemento senza maggioranti. Un **elemento minimale** è un elemento senza minoranti. Diremo che un ordine è **senza estremi** se non ha né elementi massinali né elementi minimali, ovvero se vale

se. $\exists y\,(x < y) \wedge \exists y\,(y < x)$

I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con l'ordine usuale sono l'esempio canonico di ordine lineare denso senza estremi. Indiche remo con $\boldsymbol{T}_{\text{ol}}$ la teoria degli ordini lineari, con $\boldsymbol{T}_{\text{old}}$ la teoria degli ordini lineari densi e con $\boldsymbol{T}_{\text{oldse}}$ la teoria degli ordini lineari densi e senza estremi.

Introduciamo un po' di notazione per aumentare la leggibilità della dimostrazione del prossimo teorema. Se A e B sono sottoinsiemi di un insieme ordinato scriveremo $A < B$ se $a < b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Scriveremo $a < B$ e $A < b$ al posto di $\{a\} < B$ e $A < \{b\}$. Un ordine lineare è un modello di $M \vDash T_{\text{oldse}}$ esattamente quando:

dse. per ogni coppia di insiemi finiti $A, B \subseteq M$ tali che $A < B$ esiste c tale $A < c < B$.

Si osservi che $A < B$ è sempre vera quando uno dei due insiemi è vuoto, quindi la condizione *senza estremi* corrisponde al caso degenere in cui A o B sono vuoti.

Finalmente enunciamo il teorema principale sugli ordini densi senza estremi. Da questo discendono gli altri teoremi di questo paragrafo.

6.1 Lemma *Siano $M \vDash T_{\text{ol}}$ numerabile, $N \vDash T_{\text{oldse}}$, e $k : M \to N$ un'immersione parziale finita. Allora esiste un'immersione $h : M \to N$ che estende k.*

Vedremo due dimostrazioni di questo semplice teorema. La prima è diretta:

Dimostrazione Sia $\langle a_i : i < \omega \rangle$ un'enumerazione di M. Definiremo per induzione una catena di isomorfismi parziali finiti $h_i : M \to N$. Al termine della costruzione porremo

$$h \;:=\; \bigcup_{i \in \omega} h_i.$$

Dalla proposizione 5.23 sappiamo che $h : M \to N$, in quanto unione di una catena di immersioni parziali, è un'immersione parziale. Qui sotto definiremo h_{i+1} in modo che $a_i \in \operatorname{dom} h_{i+1}$, quindi h sarà totale. Al passo base dell'induzione definiamo $h_0 = k$ in modo da soddisfare la richiesta $k \subseteq h$. Supponiamo di aver definito h_i, al passo $i + 1$ estendiamo il dominio di definizione di h_i all'elemento a_i come segue.

Come prima cosa controlliamo se a_i appartiene già al dominio di definizione h_i. (Può succedere che a_i stia nel dominio di definizione di k, o che l'enumerazione scelta abbia delle ripetizioni.) In questo caso non serve fare nulla, è sufficiente porre $h_{i+1} = h_i$. Nel caso in cui $a_i \notin \operatorname{dom} h_i$ definiamo $h_{i+1} = h_i \cup \{\langle a_i, c \rangle\}$ dove l'elemento c è un elemento di N scelto nel modo che ora mostriamo. Denotiamo con A e B i seguenti insiemi

$$A \;=\; \big\{a \in \operatorname{dom}(h_i) \;:\; a < a_i\big\} \qquad \text{e} \qquad B \;=\; \big\{b \in \operatorname{dom}(h_i) \;:\; a_i < b\big\}$$

e con $h_i[A]$ ed $h_i[B]$ le loro immagini secondo h_i. Per la linearità di M, e poiché $a_i \notin \operatorname{dom} h_i$ questi insiemi formano una partizione di $\operatorname{dom} h_i$. Osserviamo che, $A < B$ e, poiché h_i è un immersione parziale, anche $h_i[A] < h_i[B]$. Quindi scegliamo come c un qualsiasi elemento $h_i[A] < c < h_i[B]$. Un tale c esiste perché N è denso e senza estremi, e $h_i[A], h_i[B]$ sono finiti.

Per completare la dimostrazione è sufficiente verificare che h_{i+1} è un immersione parziale, ovvero preserva l'ordine. Come ipotesi induttiva abbiamo assunto che h_i preservava l'ordine. Sappiamo anche che h_{i+1} coincide con h_i in tutto il suo dominio di definizione tranne che per a_i in cui vale c, quindi rimane solo da controllare che per ogni $d \in \operatorname{dom} h_i$ se $d < a_i$ allora $h_i(d) < c$ e se $a_i < d$ allora $c < h_i(d)$. Ma questo è chiaro per la scelta di c e perché A e B ricoprono $\operatorname{dom} h_i$. □

Ora deriviamo dal lemma 6.1 un classico teorema di Cantor: due qualsiasi ordini lineari densi di cardinalità numerabile sono isomorfi. Ne dimostreremo una versione più generale, il teorema di Cantor si ottiene prendendo per $k : M \to N$ la mappa vuota che tra strutture relazionali è sempre un'immersione parziale (cfr. Corollario 5.33). Questa costruzione è molto generale e verrà riutilizzata in altri contesti è un esempio di una tecnica molto versatile che viene chiamata **costruzione andirivieni**, in inglese: **back-and-forth**.

6.2 Teorema *Per ogni M ed N modelli numerabili di T_{oldse} ed ogni mappa finita $k : M \to N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è una immersione parziale;*
2. *esiste un isomorfismo $g : M \to N$ che estende k.*

Dimostrazione L'implicazione $2 \Rightarrow 1$ è ovvia. Per dimostrare $1 \Rightarrow 2$ fissiamo delle enumerazioni di M ed N. Diciamo $M = \{a_i \ \ i \in \omega\}$ ed $N = \{b_i \ \ i \in \omega\}$. Definiamo per induzione su i una catena di isomorfismi parziali finiti. Ci cureremo di ottenere che $a_i \in \operatorname{dom} g_{i+1}$ e $b_i \in \operatorname{img} g_{i+1}$ per ogni $i \in \omega$. In questo modo otterremo che

$$g \;=\; \bigcup_{i\in\omega} g_i$$

è sia totale che suriettiva. Al passo 0 poniamo $g_0 = k$.

Il passo induttivo $i+1$ si divide in due mezzi passi. Col primo mezzo passo estendiamo a $g_{i+1/2}$ in modo da ottenere $a_i \in \operatorname{dom} g_{i+1/2}$ col secondo estendiamo ulteriormente per ottenere $b_i \in \operatorname{img} g_{i+1}$.

Per il lemma 6.1 esiste un'immersione $h : M \to N$ che estende $g_i : M \to N$. Definiamo quindi $g_{i+1/2} = g_i \cup \{\langle a_i, ha_i\rangle\}$. Ora applichiamo lo stesso lemma alla mappa inversa $\big(g_{i+1/2}\big)^{-1} : N \to M$ per ottenere un'estensione totale $f : N \to M$. Quindi definiamo $g_{i+1} = g_{i+1/2} \cup \{\langle f b_i, b_i\rangle\}$. □

Una teoria si dice ***ω*-categorica** se ha un unico modello numerabile a meno di isomorfismi. Il teorema di Cantor (cioè il teorema 6.2 con k la funzione vuota) dice che la teoria degli ordini lineari densi senza estremi è ω-categorica.

6.3 Esercizio L'assioma di densità `od` fa uso di due quantificatori. Si dice che ha la forma $\forall\exists$, ovvero **universale-esistenziale**. Esiste un enunciato universale equivalente modulo T_{ol}, a questo assioma? Esiste un enunciato esistenziale equivalente a questo assioma? Esiste un enunciato delle forma $\exists\forall$, ovvero **esistenziale-universale**, equivalente a questo assioma? □

6.4 Esercizio Consideriamo $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ come strutture nel linguaggio degli ordini stretti. Mostrare che $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{R}$. (L'esercizio sarà ovvio una volta dimostrato il teorema 6.24. Al momento si può procedere usando Löwenheim-Skolem all'ingiù, e poi ragionare come nell'esempio 3.20.) □

6.5 Esercizio Le seguenti teorie assiomatizzano entrambe la teoria degli ordini lineari *con* estremi, ma in un linguaggio diverso. Sia L il linguaggio degli ordini stretti.

$$T_1 \;=\; T_{\text{old}} \cup \Big\{\exists x\, z\, \forall y \;\; x \le y \le z\Big\}, \text{ il linguaggio è } L.$$

$$T_2 \;=\; T_{\text{old}} \cup \Big\{\forall x \;\; 0 \le x \le 1\Big\}, \text{ il linguaggio estende } L \text{ con due costanti } 0 \text{ ed } 1.$$

Si dimostri che il lemma 6.1 vale con T_2 al posto di T_{ol} e con $T_2 \cup \{\text{d}\}$ al posto di T_{oldse}. Si porti un controesempio per dimostrare che questo non vale per T_1. □

6.6 Esercizio Sia L il linguaggio degli ordini stretti a cui aggiungiamo le costanti $\{c_i : i \in \omega\}$. Sia T la teoria che, oltre agli assiomi degli ordini lineari densi e senza estremi, contiene per ogni $i \in \omega$ l'enunciato $c_i < c_{i+1}$. Mostrare che esistono tre modelli numerabili di questa teoria tra loro non isomorfi. Questo è un esercizio più difficile degli altri. Si tratta di un famoso esempio di teoria completa con esattamente tre modelli (a meno di isomorfismi). L'esempio – dovuto a Robert Vaught – compare in un famoso articolo in cui dimostra che nessuna teoria completa può avere esattamente due modelli numerabili. Vedi 11.34 □

6.2 Grafi aleatori

Sia L un linguaggio che contiene un'unica relazione binaria r. In teoria dei modelli, per **grafo** si intende una struttura che interpreta r in una relazione irriflessiva e simmetrica, ovvero una struttura che rende veri i seguenti assiomi

g1. $\neg r(x,x)$ — irriflessività

g2. $r(x,y) \rightarrow r(y,x)$ — simmetria

Gli elementi di un grafo vengono chiamati **vertici** o **nodi**. Un **arco** di un grafo M è una coppia non ordinata $\{a,b\}$ tale che $M \vDash r(a,b)$. A parole diremo che a è **legato** a b.

Un **grafo aleatorio** (in inglese: **random graph**) è una struttura che soddisfa i seguenti assiomi (il secondo è uno schema di assiomi, cioè per ogni intero positivo n, un enunciato diverso)

nb. $\exists x, y, z \;\; (x \neq y \neq z \neq x)$

ga. $\displaystyle\bigwedge_{i,j=1}^{n} x_i \neq y_j \;\;\rightarrow\;\; \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} \big[r(x_i, z) \wedge \neg r(z, y_i)\big]$

La teoria dei grafi aleatori verrà denotata con $\boldsymbol{T}_{\text{rg}}$. La seguente proposizione mostra che si tratta di una teoria consistente.

6.7 Proposizione *Esiste un grafo aleatorio.*

Dimostrazione Prendiamo come dominio del grafo aleatorio l'insieme dei numeri naturali e stabiliamo che $r(n,m)$ vale se l'n-esimo numero primo divide m oppure se, viceversa, (per renderla simmetrica) l'm-esimo numero primo divide n. La verifica dell'assioma ga è immediata. □

Lo schema di assiomi ga gioca il ruolo che negli ordini avevano l'assioma di densità. Dice che dati due insiemi finiti X e Y disgiunti, esiste un nodo z che è legato a tutti gli elementi di X e a nessun elemento di Y. Osserviamo che X ed Y non debbono necessariamente avere la stessa cardinalità perché ga non richiede $x_i \neq x_j$ né $y_i \neq y_j$. L'assioma nb dice che il grafo non è vuoto, insieme a ga basta per garantire che sia infinito.

6.8 Proposizione *Tutti i grafi aleatori sono infiniti.*

Dimostrazione I grafi aleatori hanno almeno tre elementi. Quindi possiamo scegliere due elementi distinti $a, b \in M$ e porre $Y = \{a, b\}$ e $X = M \smallsetminus Y \neq \varnothing$. Per ga, esiste z legato a tutti gli elementi di X e a nessun elemento di Y. Per l'irriflessività, $z \in \{a, b\}$, diciamo $z = a$. Sempre per ga, esiste w legato a b e a nessun elemento di $X \cup \{a\}$. Per l'irriflessività $w \in X \cup \{a\}$. Ma tutti gli elementi di $X \cup \{a\}$ sono legati a qualche elemento in $X \cup \{a\}$: infatti per costruzione a è legato a tutti gli elementi di X. Contraddizione. □

Gli assiomi in ga non richiedono $z \notin X \cup Y$. Comunque per l'irriflessività $z \notin X$ e aggiungendo la richiesta $z \notin Y$ non otteniamo una teoria più forte.

6.9 Esercizio In ogni grafo aleatorio valgono per ogni n i seguenti enunciati

$$\bigwedge_{i,j=1}^{n} x_i \neq y_j \quad \rightarrow \quad \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} \big[r(x_i, z) \wedge \neg r(z, y_i) \wedge y_i \neq z \big]. \qquad \square$$

È immediato che le immersioni parziali $h : M \to N$ tra due grafi sono mappe iniettive tali che per ogni coppia di elementi $a, b \in \operatorname{dom} h$:

$$M \vDash r(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad N \vDash r(h(a), h(b))$$

Il seguente teorema asserisce per i grafi aleatori quello che il lemma 6.1 asseriva per gli ordini lineari densi cioè che questi sono ricchi relativamente alla classe dei grafi numerabili.

6.10 Lemma *Sia M un grafo di cardinalità numerabile, N un grafo aleatorio, e $k : M \to N$ un'immersione parziale finita. Allora esiste un'immersione $h : M \to N$ che estende k.*

Dimostrazione Riprendiamo lo schema della dimostrazione per gli ordini lineari, con la stessa notazione. È sufficiente mostrare come trovare in N un elemento c che rende $h_{i+1} := h_i \cup \{(a_i, c)\}$ un'immersione parziale. Poniamo

$$A = \big\{ a \in \operatorname{dom} h_i \ : \ M \vDash r(a, a_i) \big\} \quad \text{e} \quad B = \big\{ b \in \operatorname{dom} h_i \ : \ M \vDash \neg r(b, a_i) \big\}.$$

Questi insiemi sono finiti e disgiunti quindi, per l'assioma ga, possiamo scegliere c tale che

$$\bigwedge_{a \in A} r(h_i(a), c) \ \wedge \ \bigwedge_{b \in B} \neg r(h_i(b), c).$$

È immediato verificare che $h_{i+1} : M \to N$ è un'immersione parziale. □

Quindi otteniamo anche il seguente corollario, corrispondente al corollario 6.2. Nel caso $k = \varnothing$ il corollario dice che la teoria dei grafi aleatori è ω-categorica.

6.11 Corollario *Per ogni M ed N modelli numerabili di T_{rg} ed ogni mappa finita $k : M \to N$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è una immersione parziale;*
2. *esiste un isomorfismo $g : M \to N$ che estende k.*

Dimostrazione Segue dal lemma 6.10 con letteralmente la stessa dimostrazione del teorema 6.2. □

6.12 Esercizio Sia N un grafo aleatorio e sia $M \subseteq N$ con $N \smallsetminus M$ finito. È vero che anche M è un grafo aleatorio? □

6.13 Esercizio Sia N un grafo aleatorio si dimostri che per ogni elemento $b \in N$ l'insieme $r(b, N)$ è un grafo aleatorio. □

6.14 Esercizio Sia N un grafo che è unione libera di due grafi aleatori numerabili. Cioè N ha come dominio l'unione disgiunta dei domini di due grafi aleatori N_1 ed N_2 e come relazione l'unione di r^{N_1} ed r^{N_2}. Mostrare che questo è un grafo universale non aleatorio. Si esibisca una mappa finita $k : N \to N$ che non si estende ad un automorfismo. □

6.15 Esercizio Sia $\mathcal{K}$ la classe delle strutture che sono unione libera di due grafi aleatori (vedi esercizio 6.14). Si dimostri che $\mathcal{K}$ è una classe elementare, ovvero che esiste una teoria T tale che $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$. Suggerimento: si usi che per ogni due elementi di grafo aleatorio esiste un terzo a cui entrambi sono collegati (si usa dire: la distanza tra due vertici di un grafo aleatorio è ≤ 2). Si dimostri che T è ω-categorica. □

6.16 Esercizio Dati $A \subseteq N \vDash T_{\mathrm{rg}}$ si dimostri che ogni formula $\varphi(x) \in L(A)$ se ha una soluzione in $N \smallsetminus A$ allora ha infinite soluzioni. □

6.17 Esercizio Siano N_1 ed N_2 due grafi aleatori numerabili. Sia N un grafo che ha per dominio l'unione disgiunta di N_1 ed N_2 e come archi quelli di N_1 più quelli di N_2 più quelli che congiungono tutti i vertici di N_1 con tutti i vertici di N_2. Si dimostri concisamente che N non è un grafo aleatorio. Esiste un immersione di N in un grafo aleatorio? Mostrare che l'insieme N_1 è definibile con parametri in N ma non è definibile senza parametri. □

6.18 Esercizio Siano N_1 ed N_2 due grafi aleatori numerabili e sia $c \in N_2$. Sia N un grafo che ha per dominio l'unione disgiunta di N_1 ed N_2 e come archi quelli di N_1 più quelli di N_2 più quelli che congiungono tutti i vertici di N_1 con c. Si dimostri concisamente che N non è un grafo aleatorio. È l'insieme N_1 definibile con una formula pura? Si dimostri che due qualsiasi di questi grafi sono tra loro isomorfi. □

6.19 Esercizio Sia T la teoria definita nell'esercizio 6.15 e sia $N \vDash T$. Si dimostri che per ogni grafo numerabile M, ogni mappa finita $k : M \to N$ che preserva la verità delle formule esistenziali ha un'estensione ad una mappa totale $h : M \to N$ che preserva la verità le formule esistenziali. □

6.3 Strutture omogenee-universali

La seguente definizione generalizza gli esempi esposti nei paragrafi precedenti.

6.20 Definizione *Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture e λ un cardinale infinito. Diremo che una struttura $N \in \mathcal{M}$ è* ***λ-ricca*** *per $\mathcal{M}$ se per ogni $M \in \mathcal{M}$ di cardinalità $\leq \lambda$ ed ogni immersione parziale finita $k : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$ esiste un'immersione $h : M \to N$ che estende*

k. Quando $\mathcal{M}$ è la classe dei modelli di una qualche teoria T, diremo che N è un modello ricco ***di*** *T.*

Diremo che N è una struttura ***ricca*** *tout court se è λ-ricca con $\lambda = |N|$. Le strutture ricche sono anche chiamate strutture* ***omogenee-universali*** *per la ragione che vedremo tra breve.* □

Il lemma 6.1 mostra che ogni $N \vDash T_{\text{oldse}}$ è un modello ω-ricco della teoria degli ordini lineari. Il lemma 6.10 mostra l'analogo per i grafi aleatori e la teoria dei grafi. (E vale anche una sorta di viceversa, cfr. esercizio 6.21.) Più avanti descriveremo i modelli ricchi della teoria dei domini di integrità, e di varie altre teorie.

6.21 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $N \vDash T_{\text{oldse}}$;
2. N è un modello ricco di T_{ol}.

Si dimostri una proposizione analoga per T_{rg} e T_{grf}. □

Possiamo riformulare il teorema 6.2 nel seguente modo.

6.22 Teorema *Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture e siano $M, N \in \mathcal{M}$ due modelli ricchi della stessa cardinalità λ. Allora ogni immersione parziale $k : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$ si estende ad un isomorfismo. In particolare se M ed N hanno la stessa caratteristica sono isomorfi.*

Dimostrazione Come osservato, la dimostrazione teorema 6.2 dipende solo dal lemma 6.1 e quindi può essere riportata pari pari al caso generale. Solo, ora k potrebbe non essere finita. Ma è sufficiente estendere la costruzione del teorema 6.2 ad ordinali infiniti prendendo l'unione ai passi limite. □

Il teorema 6.22 non menziona teorie, infatti la ricchezza non è in generale una proprietà elementare (cioè, invariante per equivalenza elementare). Quando succede, otteniamo un risultato di categoricità.

6.23 Corollario *Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture e sia T una teoria. Supponiamo che tutti i modelli di T di cardinalità λ siano ricchi ed abbiano la stessa caratteristica. Allora allora T è λ-categorica.* □

La seguente è un'altra importante conseguenza dell'assiomatizzabilità dei modelli ricchi.

6.24 Lemma *Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$. Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture e sia T una teoria. Supponiamo che tutti i modelli di T di cardinalità λ siano ricchi. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti per ogni $M, N \vDash T$ ed ogni mappa $k : M \to N$:*

1. *$k : M \to N$ è un'immersione parziale;*
2. *$k : M \to N$ è una mappa elementare.*

In particolare, se tutti i modelli di T hanno la stessa caratteristica, T è completa.

Il risultato vale sotto ipotesi più deboli, vedi esercizio 6.25.

Dimostrazione La direzione 2⇒1 è ovvia, dimostriamo quindi 1⇒2. Come osservato nel lemma 5.22, possiamo assumere senza perdere di generalità che k sia finita. Consideriamo prima il caso in cui M ed N siano modelli ricchi in $\mathcal{M}$. Esiste quindi un isomorfismo, in particolare una mappa elementare, $g : M \to N$ che estende k. Gli isomorfismi sono mappe elementari, quindi anche k è elementare.

Per il caso generale ragioniamo come nel lemma 6.31. Applichiamo prima il teorema di Löwenheim-Skolem all'insù per ottenere $M' \succeq M$ ed $N' \succeq N$ entrambi di cardinalità maggiore di λ. Ora vogliamo M'' ed N'' di cardinalità λ tali che $\operatorname{dom} k \subseteq M'' \preceq M'$ ed $\operatorname{img} k \subseteq N'' \preceq N'$. L'esistenza di questi modelli segue dal teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù poiché abbiamo assunto k finita. Ora, per quanto dimostrato sopra $k : M'' \to N''$ è elementare. Segue che $k : M \to N$ è elementare.

L'osservazione finale segue immediatamente dal corollario 5.33. □

6.25 Esercizio Si mostri che nel teorema 6.24 è sufficiente assumere che tutti i modelli di T di cardinalità $\leq |L|+\omega$ hanno un estensione elementare ad una struttura ricca di cardinalità λ. (Cfr. con esercizio 8.11.) □

Quando le immersioni parziali tra modelli di una teoria T coincidono con le mappe elementari, è sempre per una ragione molto fondamentale: tutte le formule sono equivalenti a formule senza quantificatori. Fissiamo un po' di terminologia. Diremo che la teoria T **ammette** (o **ha**) **eliminazione dei quantificatori** se se ogni formula $\psi(x)$ esiste una formula senza quantificatori $\varphi(x)$ tale che

$$T \vdash \psi(x) \leftrightarrow \varphi(x).$$

L'eliminazione dei quantificatori verrà ripresa e trattata in dettaglio nel capitolo 9. Qui citiamo solo senza dimostrazione il seguente risultato (una versione semplificata del corollario 9.11). Nel frattempo dell'eliminazione dei quantificatori useremo solo la forma debole stabilita dal lemma 6.24.

6.26 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ha eliminazione dei quantificatori;*
2. *ogni immersione parziale tra modelli di T è una mappa elementare.* □

In particolare, l'eliminazione dei quantificatori è utile per stabilire la completezza delle teorie.

6.27 Corollario *Le teorie T_{oldse} e T_{rg} sono teorie complete che ammettono eliminazione dei quantificatori.* □

6.28 Esercizio Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$ e sia T una teoria arbitraria. Supponiamo che la seguente classe non sia vuota

$$\mathcal{R} \;=\; \big\{M \;:\; M \text{ modello } \lambda\text{-ricco di } T\big\}$$

Si dimostri che se $\mathcal{R}$ è una classe elementare, cioè $\mathcal{R} = \operatorname{Mod}\big(\operatorname{Th}(R)\big)$, allora $\operatorname{Th}(\mathcal{R})$ è una teoria λ-categorica con eliminazione dei quantificatori. □

6.29 Definizione *Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture e λ un cardinale infinito. Diremo che una struttura $N \in \mathcal{M}$ è **λ-universale** se per ogni $M \in \mathcal{M}$ di cardinalità $\leq \lambda$ esiste un'immersione $h : M \to N$ che estende k.*

*Diremo che N è **λ-(ultra)omogenea** se per ogni immersione parziale finita $k : N \to N$ di cardinalità $< \lambda$ esiste un automorfismo $h : N \to N$ che estende k. Come per la ricchezza, se $\lambda = |N|$, diremo semplicemente **universale** e **omogenea**.*

Per esempio, il grafo vuoto, o quello completo sono omogenei. A aggiungendo ad un grafo aleatorio un nodo sconnesso da tutti gli altri, otteniamo un grafo universale che però non è omogeneo.

6.30 Teorema *Sia $\mathcal{M}$ una classe di strutture tutte con la stessa caratteristica. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è ricco;*
2. *N è universale ed omogeneo.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Per ipotesi la mappa vuota è un immersione parziale, quindi l'universalità è una caso particolare della ricchezza. L'omogeneità segue dal teorema 6.22. Dimostriamo 2⇒1. Dobbiamo verificare che ogni immersione parziale finita $k : M \to N$, con M un grafo numerabile, può essere estesa ad un immersione. Per l'universalità esiste un'immersione $f : M \to N$. La mappa $k \circ f^{-1} : N \to N$ è un'immersione parziale finita che, per ultraomogeneità, ha un estensione ad un automorfismo $h : N \to N$. È immediato verificare che $h \circ f : M \to N$ estende k. Questa è dunque l'immersione richiesta. □

Una generalizzazione immediata del concetto di modello ricco si ottiene sostituendo le immersioni parziali con Δ-morfismi dove Δ è una insieme di formule. Tipicamente, la classe dei morfismi dovrà essere intuita dal contesto. Il teorema 6.22 si generalizza a Δ-morfismi a condizione che Δ sia chiuso per negazione e contenga la formula $x = y$. Questo assicura che l'inverso di un Δ-morfismo sia ancora un Δ-morfismo. Chiaramente in questo caso la costruzione ad andirivieni produce sono un Δ-morfismo biettivo che, se Δ non contiene $L_{\mathrm{at}^{\pm}}$, potrebbe non essere un isomorfismo.

Nel capitolo 8 introdurremo i modelli λ-saturi e mostreremo che, se come morfismi prendiamo le mappe elementari, N è un modello λ-saturo se e solo se è λ-ricco nella classe dei modelli di $\mathrm{Th}(N)$. In quel capitolo studieremo concetti di universalità e omogeneità relativi alle mappe elementari.

Un'ulteriore generalizzazione si ottiene prendendo come morfismi un insieme di mappe scelte con criteri combinatori. Una tecnica introdotta da Hrushovski negli anni '90 per ottenere strutture con proprietà molto sorprendenti (tra queste, il controesempio menzionato nel paragrafo 10.1).

6.31 Esercizio Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$. Ogni teoria λ-categorica senza modelli finiti è completa. Mostrare che l'ipotesi $|L| \leq \lambda$ è necessaria. (Suggerimento: sia λ un cardinale infinito. Il linguaggio contiene solo costanti, una per ogni ordinale $< \lambda$. La teoria T dice che esistono infiniti elementi e, o $i = 0$ per ogni $i < \lambda$, o $i \neq j$ per ogni $i < j < \lambda$.) □

6.32 Esercizio Si dimostri che le teorie T_{oldse} e T_{rg} non sono λ-categoriche per nessun cardinale λ non numerabile. Suggerimento: la prima affermazione è semplice, per la seconda si dimostri l'esistenza di un un grafo aleatorio N di cardinalità λ con solo nodi da cui escono λ archi e lo si confronti con il grafo complementare (quello che ha un arco esattamente dove N non ce l'ha). □

6.4 Un esercizio risolto

Nel prossimo capitolo incontreremo modelli ω-ricchi di teorie non ω-categoriche. È utile vedere prima un esempio in un contesto più semplice.

Per $\alpha \le \omega$ il linguaggio L_α estende quello degli ordini stretti con i predicati unari r_i per $i < \alpha$. La teoria T_α afferma che $<$ definisce un ordine lineare e che $\neg[r_i(x) \wedge r_j(x)]$ per ogni $i < j < \alpha$. Denotiamo con

$$\mathcal{R}_\alpha \;=\; \{M \;:\; M \text{ modello } \omega\text{-ricco di } T_\alpha\}$$

Vogliamo assiomatizzare la teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{R}_\alpha)$. Il caso $\alpha < \omega$ è semplice perché $\mathcal{R}_\alpha$ è elementare e non differisce da quanto visto nei paragrafi 6.1 e 6.2.

6.33 Proposizione *Dato $\alpha < \omega$, sia R_α la teoria che estende T_α con l'assioma che dice che l'ordine non ha estremi e le seguenti varianti dell'assioma di densità:*

$\mathsf{d}_i \quad x < y \rightarrow \exists z\,[x < z < y \wedge r_i z]$ *per ogni $i < \alpha$;*

$\mathsf{d}_\alpha \quad x < y \rightarrow \exists z\Big[x < z < y \wedge \bigwedge_{i<\alpha} \neg r_i z\Big].$

Allora $\mathcal{R}_\alpha$=Mod(R_α) e quindi R_α è una teoria ω-categorica che ammette eliminazione dei quantificatori.

Dimostrazione Per verificare la coerenza di R_α si consideri $\mathbb{Q}$, con l'ordine naturale e come r_i si prenda l'insieme dei razionali della forma:

$$n + \frac{m}{p_i^k} \qquad\qquad \text{dove } n \in \mathbb{Z} \text{ ed } m, k \in \mathbb{N} \text{ tali che } 0 < m < p_i^k,$$

dove con p_i denotiamo l'i-esimo numero primo.

La dimostrazione del lemma 6.1 può essere facilmente adattata per dimostrare che tutti i modelli di R_α sono ω-ricchi e quindi che $\mathcal{R}_\alpha = \mathrm{Mod}(R_\alpha)$. Segue quindi anche che R_α è ω-categorica e per il lemma 6.24 ha eliminazione dei quantificatori. □

Invece $\mathcal{R}_\omega$ non è una classe elementare, mostriamo come assiomatizzare $\mathrm{Th}(\mathcal{R}_\omega)$.

6.34 Proposizione *Sia R_ω la teoria che estende T_ω con l'assioma che dice che l'ordine non ha estremi e gli assiomi d_i della proposizione 6.33 per ogni $i < \omega$. Allora $\mathrm{ccl}(R_\omega) = \mathrm{Th}(\mathcal{R}_\omega)$. Inoltre R_ω ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione La consistenza di R_ω segue per compattezza dalla consistenza di R_α per ogni $\alpha < \omega$. Ora, posto $p(x) = \{\neg r_i x \;:\; i < \omega\}$, il lettore può facilmente verificare che un modello di R_ω è ricco se e solo se realizza tutti i tipi (per tutte le possibili coppie di parametri a, b) della forma

$\mathsf{d}_\omega \quad a < b \rightarrow [a < x < b \wedge p(x)].$

Per concludere che $\mathrm{ccl}(R_\omega)$=$\mathrm{Th}(\mathcal{R}_\omega)$ è sufficiente verificare che ogni modello numerabile di R_ω ha un'estensione elementare ad un modello che realizza tutti i tipi della forma d_ω. Lasciamo al lettore anche questa verifica. Il modello richiesto può essere costruito con una catena elementare di lunghezza ω in cui M_{i+1} realizza tutti i tipi della forma d_ω con $a, b \in M_i$. L'unione della catena è il modello richiesto.

Per dimostrare l'eliminazione dei quantificatori serve applicare il lemma 6.24 ma indebolendo le ipotesi come osservato nell'esercizio 6.25. Infatti, come notato sopra ogni modello numerabile di R_ω ha un estensione ad un modello numerabile ricco. □

6.35 Esercizio Per T una delle teorie elencate qui sotto, denotiamo con

$$\mathcal{R} \;=\; \big\{M \,:\, M \text{ modello } \omega\text{-ricco di } T\big\}$$

si assiomatizzi $\mathrm{Th}(\mathcal{R})$ e si dica se è ω-categorica e se ammette eliminazione dei quantificatori. Nel caso $\mathcal{R}$ non sia una classe elementare, si indichi cosa contraddistingue i modelli ricchi di $\mathrm{Th}(\mathcal{R})$ dai modelli non ricchi.

1. Il linguaggio consiste di due simboli di relazione binaria $<$ ed r. La teoria T afferma che $<$ definisce un ordine lineare ed r una relazione di equivalenza.

3. Il linguaggio consiste dei predicati unari r_i per $i < \alpha$. La teoria T è vuota. Si distinguano due casi: $\alpha < \omega$ e $\alpha = \omega$. □

Capitolo 7

Alcune strutture algebriche

Il risultato più significativo di questo capitolo è il corollario 7.20, l'eliminazione dei quantificatori per la teoria dei campi algebricamente chiusi. Un risultato che in geometria algebrica si enuncia dicendo che la proiezione di un insieme costruibile è a sua volta costruibile. Poi come esercizio deriveremo da questo il Nullstellensatz.

Qui non prenderemo la via più breve per arrivarci. Infatti quel che più ci preme è fornire una traduzione delle nozioni elementari di algebra in un linguaggio che facilita il confronto con quanto fatto nei capitoli precedenti.

Nei primi tre paragrafi, per riscaldamento, discutiamo l'eliminazione dei quantificatori nei moduli divisibili (su un dominio di integrità). Queste strutture generalizzano leggermente i campi vettoriali che, pur essendo un esempio più canonico, per la loro semplicità sono didatticamente meno utili.

A costo di qualche ripetizione, i restanti capitoli sono indipendenti dai primi tre. Chi volesse omettere la lettura dei primi capitoli, dovrà a suo tempo svolgere l'esercizio 9.13.

Assumiamo familiarità con le nozioni di base di algebra ma le principali definizioni verranno riprese.

7.1 I moduli (un ripasso)

La teoria dei gruppi abeliani (o commutativi) è generalmente espressa nel linguaggio dei gruppi additivi e contiene i seguenti assiomi (come sempre, scriviamo delle formule intendendo la loro chiusura universale):

a1 $(x+y)+z \;=\; y+(x+z)$;

a2 $x+(-x) \;=\; (-x)+x \;=\; 0$;

a3 $x+0 \;=\; 0+x \;=\; x$;

a4 $x+y \;=\; y+x$.

Sia R un anello (unitario). In algebra commutativa, gli anelli giocano il ruolo di linguaggio. Il **linguaggio degli R-moduli**, qui denotato con L_R, estende il linguaggio dei gruppi additivi con tutti gli elementi di R quali simboli di funzione unaria. Un R-modulo è una struttura di segnatura L_R che rende veri gli assiomi dei gruppi additivi a1-a4 e i seguenti assiomi per $t, r, s \in R$

m1 $r\,(x+y) \;=\; r\,x + r\,y$

m2 $t\,x \;=\; r\,x + s\,x \qquad\qquad$ se $t \;=\; r +_R s$

m3 $t x \;=\; -\,r\,x \qquad\qquad$ se $t \;=\; -_R\, r$

m4 $t\,x \;=\; r\,(s\,x) \qquad\qquad$ se $t \;=\; r \cdot_R s$

m5 $0_R\, x \;=\; 0$

m6 $1_R\, x \;=\; x$

Lo zero di R non va confuso con lo zero di M: il primo è una funzione unaria il secondo una costante. Quindi abbiamo lo abbiamo denotato con 0_R. Analogamente, abbiamo scritto 1_R per l'unità dell'anello: 0_R ed 1_R denotano elementi di L_R, come anche $r +_R s$, $-_R\, r$, e $r \cdot_R s$ (ovvero i simboli $+_R$, $-_R$ e $\cdot_R$, vivono nel metalinguaggio). Avendo chiarito questo, nel seguito il pedice verrà omesso. Indicheremo on $\boldsymbol{T_{R\text{-mod}}}$ la teoria degli R-moduli.

I **moduli destri** sono definiti analogamente sostituendo l'assioma m4 con il seguente:

m4d $(r \cdot_R s)x \;=\; s(r\,x)$

Chiaramente se R è un anello commutativo m4 è equivalente ad m4d. L'aggettivo *destro* deriva dall'osservazione che scrivendo lo scalare alla destra dell'elemento del modulo, l'assioma m4d diventa più naturale: $x\,(r \cdot_R s) = (x\,r)\,s$.

Ogni gruppo abeliano è uno $\mathbb{Z}$-modulo definendo per n intero positivo

$$n x \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \overbrace{x + \cdots + x}^{n \text{ volte}},$$

e, se n è negativo, si definisce $n x \stackrel{\text{def}}{=} -(-n)x$. Infine $0x \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Diremo che M è un **modulo fedele** se per ogni $r \in R \smallsetminus \{0\}$ vale:

mf $\exists x\; r\,x \neq 0$

Per esempio un gruppo abeliano con esponente finito, se considerato come $\mathbb{Z}$-modulo, non è fedele. Quando R è un campo, gli R-moduli si chiamano **spazi vettoriali**. Si noti che se r^{-1} esiste, allora $r\,x = 0 \;\leftrightarrow\; r^{-1} r\,x = 0 \;\leftrightarrow\; x = 0$; quindi tutti i campi vettoriali sono in particolare moduli fedeli.

Dato un ordinale α, con $R^{\oplus\alpha}$ denoteremo l'insieme delle sequenze di elementi di R di lunghezza α che sono quasi ovunque nulle. Considereremo $R^{\oplus\alpha}$ come R-modulo nel modo naturale.

Se x è una tupla di variabili di lunghezza α, scriveremo $R[x]$ per l'insieme dei termini puri $t(x)$ quozientato per la relazione di equivalenza

$$\boldsymbol{t(x) \sim_R s(x) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad T_{R\text{-mod}} \vdash t(x) = s(x).}$$

Anche $R[x]$ può essere considerato come un R-modulo nel modo naturale. Dalla seguente proposizione segue immediatamente che $R[x]$ è isomorfo a $R^{\oplus\alpha}$.

7.1 Proposizione *Fissiamo x, una tupla di variabili di lunghezza α. Per ogni termine puro $t(x)$, dove $|x| = \alpha$, esiste una tupla $r \in R^{\oplus\alpha}$, tale che*

$$T_{R\text{-}mod} \quad \vdash \quad \sum_{i<\alpha} r_i x_i \;=\; t(x).$$

dove $x = \langle x_i : i < \alpha\rangle$ *ed* $r = \langle r_i : i < \alpha\rangle$. □

7.2 Corollario *Con la stessa notazione della proposizione 7.1 Sia M un R-modulo, e fissiamo $A \subseteq M$. Per ogni $\varphi(x) \in L_{\text{at}}(A)$ esiste una tupla $r \in R^{\oplus\alpha}$ ed un termine chiuso t a parametri in A, tale che*

$$T_{R\text{-}mod} \cup Th_{\text{at}^{\pm}}(M/A) \quad \vdash \quad \varphi(x) \leftrightarrow \sum_{i<\alpha} r_i x_i \;=\; t.$$ □

Per la definizione $\text{Th}_{\text{at}^{\pm}}(M/A)$ e di $\text{at-tp}_M(c/A)$ vedi paragrafo 5.2.

7.3 Definizione *Sia M un R-modulo, e fissiamo $A \subseteq M$. Un elemento $c \in M$ si dice* ***indipendente da A*** *se il tipo $p(x) = \text{at-tp}_M(c/A)$ è banale, ovvero*

$$T_{R\text{-}mod} \cup Th_{\text{at}^{\pm}}(M/A) \quad \vdash \quad p(x).$$

Equivalentemente, se $\langle A\rangle_M \cap \langle c\rangle_M = \{0\}$. □

Questa definizione trasporta ai moduli la nozione di indipendenza lineare nel caso M sia uno spazio vettoriale. In questo caso c è indipendente da A se e solo se è linearmente indipendente da A.

7.4 Osservazione Sia $k : M \to N$ è un immersione parziale, a una tupla di elementi di $\text{dom}\, k$, e fissiamo due elementi $c \in M$ e $d \in N$ indipendenti rispettivamente su a e ka. Allora $M, c, a \equiv_{\text{at}} N, d, ka$. Infatti, se c è libero su a e $\varphi(x,z) \in L_{\text{at}}$ è tale che $M \vDash \varphi(c,a)$, allora

$$T_{R\text{-mod}} \cup \text{Th}_{\text{at}^{\pm}}(M/a) \quad \vdash \quad \varphi(x,a).$$

Poiché le strutture $\langle a\rangle_M$ e $\langle ka\rangle_N$ sono tra loro isomorfe

$$T_{R\text{-mod}} \cup \text{Th}_{\text{at}^{\pm}}(N/ka) \quad \vdash \quad \varphi(x,ka).$$

e quindi $N \vDash \varphi(d,ka)$. Lo stesso argomento si applica anche l'implicazione opposta e quindi $M, c, a \equiv_{\text{at}} N, d, ka$. □

7.2 Moduli su un dominio ad ideali principali

Sia M è un R-modulo, diremo che M è **senza torsione** se per ogni $r \in R \smallsetminus \{0\}$ vale

st $\quad rx = 0 \to x = 0.$

La seguente proposizione è essenziale per dimostrare l'equivalente dei lemmi 6.1 e 6.10. Nel capitolo 6 non serviva esplicitare un simile risultato, l'assenza di funzioni lo rende quasi banale, cfr. esercizio 7.6. Si osservi che in questi esercizi si ottiene che tutti i tipi senza quantificatori sono principali, nella seguente proposizione invece il tipo degli elementi indipendenti rimane escluso.

7.5 Proposizione *Sia R un dominio di integrità (quindi commutativo) e sia T la teoria degli R-moduli senza torsione. Fissiamo $A \subseteq M \vDash T$ ed un elemento $c \in M$. Sia $p(x) = \text{at}^{\pm}\text{-tp}_M(c/A)$ allora vale una delle seguenti due possibilità:*

1. *c è indipendente da A;*

2. *$M \vDash \varphi(c)$ per una qualche $\varphi(x) \in L_{\rm at}(A)$ tale che $T \cup {\rm Th}_{\rm at^{\pm}}(M/A) \vdash \varphi(x) \to p(x)$.*

L'insieme A può essere preso infinito, questo permetterà di dimostrare il lemma 7.8 senza restrizioni sulla cardinalità e quindi di ottenere la categoricità non numerabile, vedi corollario 7.10. Non è così nell'esercizio 7.6.

Dimostrazione Se 1 non vale $p(x)$ contiene una formula atomica che non segue da $T_{R\text{-mod}} \cup {\rm Th}_{\rm at^{\pm}}(M/A)$. Questa ha la forma $nx = t$ dove t è un termine chiuso a parametri in A. Chiaramente $n \neq 0$. Vogliamo mostrare che $T \cup {\rm Th}_{\rm at^{\pm}}(M/A) \vdash nx = t \to p(x)$.

Dobbiamo verificare che per ogni intero m, ed ogni termine s a parametri in A, uno dei seguenti casi vale per ogni $N \vDash T$ che contiene $\langle A \rangle_M$

a. $N \vDash \forall x\, [nx = t \to mx = s]$

b. $N \vDash \forall x\, [nx = t \to mx \neq s]$

Supponiamo per assurdo che ciò non valga per certi m, s. Esistono quindi $N_i \vDash T$ sovrastrutture di $\langle A \rangle_M$ tali che per qualche $a_i \in N_i$

a'. $N_1 \vDash na_1 = t$ ed $N_1 \vDash ma_1 \neq s$

b'. $N_2 \vDash na_2 = t$ ed $N_1 \vDash ma_2 = s$

Da b' segue $N_2 \vDash mt = ns$ e, poiché N_1 non ha torsione, da a' segue $N_1 \vDash mt \neq ns$. Ma $mt = ns$ è una formula a parametri in A quindi la sua verità dipende solo da $\langle A \rangle_M$. Questo contraddice $\langle A \rangle_M \subseteq N_i$. □

7.6 Esercizio Scriviamo T per una qualsiasi delle teorie $T_{\rm ol}$ e $T_{\rm gfr}$. Sia $A \subseteq M \vDash T$ finito, e sia $c \in M$. Dimostrare che $p(x) = {\rm at}^{\pm}\text{-}{\rm tp}_M(c/A)$ è un tipo principale. Ovvero, esiste $\varphi(x)$ congiunzione di formule in $p(x)$ tale che

$$T \cup {\rm Th}_{\rm at^{\pm}}(M/A) \quad \vdash \quad \varphi(x) \to p(x).$$

Si osservi che questo non vale se A è infinito. □

7.3 Moduli divisibili

In questo paragrafo R è sempre un dominio di integrità. Diremo che M è **divisibile** se è senza torsione e per ogni $r \in R \smallsetminus \{0\}$ vale

div $\exists x\; rx = y$.

La seguente proposizione traduce l'assioma di divisibilità in una proprietà delle formule atomiche.

7.7 Proposizione *Sia R un dominio di integrità, T la teoria degli R-moduli senza torsione. e $N \vDash T$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è divisibile;*

2. *$N \vDash \exists x\, \varphi(x)$ per ogni formula consistente $\varphi(x) \in L_{\rm at}(N)$.*

Sopra, x denota una singola variabile e la consistenza va intesa modulo $T \cup {\rm Th}_{\rm at^{\pm}}(N/A)$, dove A è l'insieme dei parametri che occorrono in $\varphi(x)$. Quindi $\varphi(x)$ è consistente se *soddisfatta in un qualsiasi R-modulo senza torsione che contiene $\langle A\rangle_N$.*

Dal lemma 7.8 che dimostreremo qui sotto segue che 2⇒1 vale per ogni $\varphi(x)\in L_{\mathrm{qf}}(A)$ anche quando x è una tupla di variabili (vedi esercizio 7.12), ma per arrivarci dobbiamo prima verificarla per le formule atomiche.

Dimostrazione Dimostriamo 2⇒1. Mostriamo che per ogni elemento $a\in N$ e per ogni $r\in R\smallsetminus\{0\}$ la formula $rx=a$ è consistente. Se consideriamo R come R-modulo otteniamo un modulo senza torsione: l'assenza di torsione si riduce all'assenza di divisori dello zero. Posto $k=\{\langle s,sa\rangle : s\in R\}$, è immediato verificare che $k:R\to\langle a\rangle_N$ è un isomorfismo tra R-moduli (l'assenza di torsione serve per iniettività). L'equazione $rx=1$ ha soluzione in un estensione di R, precisamente, nel campo delle frazioni di R. Quindi, identificando strutture isomorfe, $rx=a$ ha soluzione in un estensione di $\langle a\rangle_N$. Per 2 ha soluzione in N.

Dimostriamo 1⇒2. Per il corollario 7.2 possiamo assumere che la formula $\varphi(x)$ abbia la forma $rx=a$ per un qualche $a\in N$. Se $r=0$, poiché $\varphi(x)$ è consistente, dev'essere $a=0$ e la consistenza è ovvia. Altrimenti una soluzione in N esiste per l'assioma di divisibilità. □

Chiameremo **rango** di M è la minima cardinalità di un insieme $A\subseteq M$ tale che $\langle A\rangle_M=M$. (Quindi, se A ha cardinalità minore del rango, M contiene qualche elemento indipendente da A.)

Il seguente teorema corrisponde ai lemmi 6.1 e 6.10 con due differenze molto importanti. La prima è una limitazione: serve assumere che N ha rango sufficientemente grande, un'ipotesi che non ha corrispondente per le teorie T_{oldse} e T_{rg} e che ha profonde conseguenze perché non è traducibile in un assioma del prim'ordine. (La situazione è simile a quella della proposizione 6.34.) Quindi dal teorema non segue nessun risultato di ω-categoricità. La seconda differenza è che qui il teorema è esteso ad ogni cardinalità λ. Poiché l'ipotesi sul rango svanisce (viene automaticamente soddisfatta) per λ sufficientemente grande, otterremo un risultato di λ-categoricità.

7.8 Lemma *Sia R un dominio di integrità e sia T la teoria degli R-moduli senza torsione. Allora ogni modulo divisibile e di rango λ è un modello λ-ricco di T.*

Dimostrazione Sia $\langle a_i : i<\lambda\rangle$ un'enumerazione di M. Seguiamo la stessa costruzione della dimostrazione del lemma 6.1, con la stessa notazione. L'unica differenza è che nel caso in cui $|M|$ non è numerabile dovremo considerare passi limite: se $i<\lambda$ è limite, allora definiamo

$$h_i \ := \ \bigcup_{j<i} h_j.$$

Ora definiremo h_{i+1} in modo che $a_i\in\operatorname{dom} h_{i+1}$. Sia a una tupla che enumera $\operatorname{dom} h_i$ e sia $p(x,z)$=$\mathrm{at}^{\pm}$-$\mathrm{tp}_M(a_i,a)$. (Si osservi che a potrebbe essere una tupla infinita.) Se a_i non è indipendente da a, dalla proposizione 7.5 otteniamo che $M\vDash\varphi(a_i,a)$ per una formula atomica tale che

i. $\qquad T\cup\mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(M/a) \quad\vdash\quad \varphi(x,a)\to p(x,a).$

Inoltre ovviamente:

ii. $\qquad T\cup\mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(M/a) \quad\cup\quad \big\{\varphi(x,a)\big\} \qquad$ è consistente.

Per l'ipotesi induttiva $\langle a\rangle_M$ è isomorfo a $\langle h_i a\rangle_N$ e quindi i e ii valgono anche sostituendo M,a con $N,h_i a$. Per la proposizione 7.7 la formula $\varphi(x,h_i a)$ è soddisfatta in N. Un qualsiasi c che soddisfa $\varphi(x,h_i a)$ realizza $p(x,h_i a)$. Quindi posto $h_{i+1}=h_i\cup\{\langle a_i,c\rangle\}$ otteniamo l'estensione richiesta. Veniamo al caso in cui a_i è indipendente da a. Poiché $|a|$ è minore del rango di N, esiste un $c \in N$ e indipendente da $h_i a$. Come visto nell'osservazione 7.4 segue che $M, a, a_i \equiv_{\text{at}} N, h_i a, c$. Quindi l'estensione richiesta si ottiene definendo $h_{i+1} = h_i \cup \{\langle a_i, c\rangle\}$. □

7.9 Corollario *Sotto le stesse ipotesi del lemma 7.8. Fissiamo $M, N \vDash T$ entrambi di cardinalità λ e di rango λ. Allora ogni $k : M \to N$, immersione parziale di cardinalità $< \lambda$, si estende ad un isomorfismo.*

Dimostrazione Segue dal lemma 7.8 e dal teorema 6.22. □

Si osservi che la cardinalità di $\langle A\rangle_N$ è al più $|A| + |R| + \omega$, quindi un R-modulo N di cardinalità $> |R| + \omega$ ha necessariamente rango $|N|$. Quindi nel lemma 7.8 possiamo omettere l'ipotesi sul rango se richiediamo che la cardinalità di N sia sufficientemente grande. Otteniamo quindi il seguente:

7.10 Corollario *Sia R un dominio di integrità e sia T la teoria degli R-moduli senza torsione. Allora T è λ-categorica per ogni $\lambda > |R| + \omega$.* □

Per i teoremi 6.24 e 6.26, categoricità e ultraomogeneità hanno la seguente importante conseguenza:

7.11 Corollario *Sia R un dominio di integrità. La teoria degli R-moduli divisibili ha eliminazione dei quantificatori.* □

7.12 Esercizio Sia R un dominio di integrità e sia N un R-modulo senza torsione. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. N divisibile;
2. ogni formula $\varphi(x) \in L_{\text{qf}}(A)$ consistente è soddisfatta in N.

La consistenza è da intendersi modulo la teoria $T \cup \text{Th}_{\text{at}^\pm}(N/A)$ dove $A \subseteq N$ contiene i parametri della formula. (Suggerimento: l'affermazione sarebbe immediata se potessimo eliminare dal lemma 7.8 la richiesta che N ha rango infinito. Per ovviare, basta usare Löwenheim-Skolem all'insù.)

7.13 Esercizio Sia R un dominio di integrità. Si dimostri che tutti gli R-moduli divisibili sono omogenei. N.B. indipendentemente dalla cardinalità e dal rango. Suggerimento: si proceda per induzione sulla cardinalità dell'immersione parziale da estendere. □

7.4 Anelli e domini d'integrità (un ripasso)

Riportiamo qui sotto gli assiomi degli anelli. Tutti gli anelli che considereremo saranno unitari. Il linguaggio è quello degli anelli unitari.

a1-a4 come nei gruppi abeliani

a5 $(x\cdot y)\cdot z = y\cdot(x\cdot z)$,

a6 $1\cdot x = x\cdot 1 = x$,

a7 $(x + y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$, a8 $z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$.

Un anello è detto **commutativo** se vale

ac $x \cdot y = y \cdot x$.

Indicheremo con $\boldsymbol{T}_{\mathrm{auc}}$ la teoria degli anelli (unitari) commutativi.

Se M è un anello e $a \in M$, diremo che a è nilpotente se $a^n = 0$ per qualche intero positivo n, dove

$$x^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ volte}}$$

La teoria degli **anelli senza elementi nilpotenti**, che qui denoteremo con $\boldsymbol{T}_{\mathrm{asn}}$ contiene, oltre agli assiomi di T_{auc}, i seguenti

sn $x^n = 0 \to x = 0$.

per ogni intero positivo n.

La **caratteristica** di un anello M è il minimo n, se esiste, per cui $n1 = 0$. Se questo n non esiste, allora diremo che l'anello ha caratteristica 0. Quindi è chiaro che due anelli M ed N hanno la stessa caratteristica se e solo se $M \equiv_{\mathrm{at}} N$ ovvero se $\varnothing : M \to N$ è un'immersione parziale.

La seguente proposizione mostra che dato un anello M ed un insieme $A \subseteq M$ possiamo identificare i termini a parametri in A con polinomi a coefficienti in $\langle A \rangle_M$.

7.14 Proposizione *Sia $x = \langle x_i : i < \alpha \rangle$. Dato $n \in \omega^{\oplus\alpha}$, diciamo $n = \langle n_i : i < \alpha \rangle$, useremo la seguente abbreviazione:*

$$x^n = \prod_{i<\alpha} x_i^{n_i}.$$

Fissati $A \subseteq M$ come sopra, per ogni $t(x)$, termine a parametri in A, esiste una funzione $c : \omega^{\oplus\alpha} \to \langle A \rangle_M$, quasi ovunque nulla, tale che

p $$T_{\mathrm{auc}} + \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^\pm}(M/A) \vdash t(x) = \sum_{n \in \omega^{\oplus\alpha}} c(n)\, x^n$$

Inoltre, tale funzione c è unica.

Dimostrazione L'esistenza si dimostra per induzione sulla sintassi di $t(x)$. L'unicità è immediata. □

Modulo $T_{\mathrm{auc}} + \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^\pm}(M/A)$, ogni formula atomica a parametri in A è equivalente ad una formula della forma $t(x)$=0 dove $t(x)$ è un termine. Se $\varphi(x)$ è una formula di questa forma chiameremo **grado** di $\varphi(x)$, il grado del polinomio associato a $t(x)$, ovvero

$$\max\left\{ \sum_{i<\alpha} n_i \ : \ n \in \omega^{\oplus\alpha}, \ c(n) \neq 0 \right\}.$$

Dove $c : \omega^{\oplus\alpha} \to \langle A \rangle_M$ è la funzione data dalla proposizione 7.14.

Infine, se $A \subseteq M \vDash T_{\mathrm{auc}}$ e $c \in M$, diremo che c è **trascendente** su A se $p(x) = \text{at-tp}(c/A)$ è un tipo banale, ovvero se $T_{\mathrm{auc}} \cup \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^\pm}(M/A) \vdash p(x)$. Altrimenti diremo che c è **algebrico** su A.

7.15 Osservazione L'osservazione 7.4 può essere ripetuta letteralmente qui, sostituendo T_{di} a $T_{R\text{-mod}}$ e trascendente a libero. □

7.5 Domini di integrità

Due elementi diversi da 0 tali che $ab=0$ si chiamano **divisori dello zero**. Un anello commutativo è detto un **dominio di integrità** se

nb $0\neq 1$

di $x\cdot y=0 \rightarrow x=0 \vee y=0.$

La teoria dei domini di integrità qui verrà denotata con T_{di}.

7.16 **Proposizione** *Fissiamo $A\subseteq M\models T_{\mathrm{di}}$ e $c\in M$. Sia $p(x)=\mathrm{at}^{\pm}\text{-}tp_M(c/A)$ allora vale una delle seguenti due possibilità:*

1. *c è trascendente su A;*
2. *$M\models\varphi(c)$ per una qualche $\varphi(x)\in L_{\mathrm{at}}(A)$ tale che $T\cup Th_{\mathrm{at}^{\pm}}(M/A)\vdash\varphi(x)\rightarrow p(x)$.*

L'insieme A può essere preso infinito. Questo permetterà di dimostrare il teorema 7.18 senza restrizioni sulla cardinalità e quindi di ottenere la categoricità non numerabile, vedi corollario 7.19.

Dimostrazione Se 1 non vale esiste $\psi(x)\in L_{\mathrm{at}}(A)$ non banale tale che $\psi(c)$. Scegliamo la formula di grado minimo. Sia $\xi(x)\in L_{\mathrm{at}}(A)$ arbitraria. È sufficiente mostrare che vale una delle seguenti possibilità:

1. $\vdash\ \psi(x)\rightarrow\ \ \xi(x);$
2. $\vdash\ \psi(x)\rightarrow\neg\xi(x),$

dove abbiamo scritto $\vdash$ per conseguenza logica modulo $T_{\mathrm{di}}\cup\mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(M/A)$. Supponiamo che la formula $\psi(x)$ abbia la forma $a(x)=0$ per un polinomio $a(x)$ di grado n. Scriviamo $a'(x)=0$ per la formula $\xi(x)$. Assumiamo temporaneamente che $\langle A\rangle_M$ sia un un campo; allora esiste un polinomio $d(x)$ tale che per opportuni polinomi $b(x)$ e $b'(x)$

a. $d(x)b(x)=a(x);$

a'. $d(x)b'(x)=a'(x).$

Inoltre assumiamo che $d(x)$ abbia grado massimo tra i polinomi con questa proprietà. Se invece $\langle A\rangle_M$ non è un campo, quanto detto resta comunque valido nel campo delle frazioni di $\langle A\rangle_M$, e quindi le equazioni a e a' valgono a meno di un fattore in $\langle A\rangle_M$ che possiamo, senza perdita di generalità, assorbire in $a(x)$ e $a'(x)$.

Da a otteniamo che $d(c)=0$ o $b(c)=0$. Nel primo caso, poiché $d(x)$ non può avere grado inferiore ad $a(x)$, otteniamo che $b(x)$ è un polinomio costante non nullo. Questo implica immediatamente 1. Quindi supponiamo $b(c)=0$, e questo implica che $d(x)=d$, una costante non nulla. Ancora una volta, assumiamo temporaneamente che $\langle A\rangle_M$ sia un un campo in modo da poter applicare l'identità di Bézout e ottenere opportuni polinomi $c(x)$ e $c'(x)$ tali che $d=a(x)c(x)+a'(x)c'(x)$. Ora 2 è immediata conseguenza di questa identità.

Se invece $\langle A\rangle_M$ non è un campo, ragioniamo come sopra: dall'identità di Bézout nel campo delle frazioni di $\langle A\rangle_M$ otteniamo $d'd=a(x)c(x)+a'(x)c'(x)$ dove $d'\in\langle A\rangle_M$ è non nullo. Quindi arriviamo alla stessa conclusione. □

7.6 Campi algebricamente chiusi

Sia a un elemento di un anello commutativo. Un elemento b tale che $a \cdot b = b \cdot a = 1$ è detto **inverso** di a. Un anello commutativo è detto un **campo** se ogni elemento non nullo ha un inverso. In altre parole se vale il seguente assioma:

c $\quad \exists y \left[x \neq 0 \ \rightarrow \ x \cdot y = 1\right].$

Ricordiamo che, per convenzione, i campi sono strutture con la segnatura degli anelli unitari, il linguaggio non contiene nessun simbolo di funzione per x^{-1} e quindi le sottostrutture di un campo sono semplicemente degli anelli, o meglio, dei domini di integrità.

Un **campo algebricamente chiuso** (in inglese, **algebraically closed field**) è un campo che soddisfa il seguente schema di assiomi, per ogni intero n positivo:

ac $\quad \exists x \left(x^n + z_{n-1} x^{n-1} + \cdots + z_1 x + z_0 \ = \ 0\right)$

dove x e $z_0, \ldots, z_n$ denotano singole variabili. La teoria dei campi algebricamente chiusi verrà denotata con T_{acf}.

7.17 Proposizione *Fissiamo $N \vDash T_{\mathrm{di}}$ ed una variabile x. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è un campo algebricamente chiuso;*
2. *$N \vDash \exists x \, \varphi(x)$ per ogni formula consistente $\varphi(x) \in L_{\mathrm{at}}(N)$.*

Sopra, x denota una singola variabile e la consistenza va intesa modulo $T_{\mathrm{di}} \cup \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(N/A)$, dove A è l'insieme dei parametri che occorrono in $\varphi(x)$. Quindi $\varphi(x)$ è consistente se soddisfatta in un qualsiasi dominio di integrità che contiene $\langle A \rangle_N$.

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. A meno di equivalenza la formula $\varphi(x)$ ha la forma $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ per $a_i \in \langle A \rangle_N$. Sia n il minimo per cui questo è possibile. Se $n = 0$ allora, la consistenza di $\varphi(x)$ impone $a_0 = 0$ e l'affermazione è ovvia. Altrimenti possiamo assumere $a_n \neq 0$ e l'affermazione deriva immediatamente da l'assioma ac.

Per l'implicazione 2⇒1 rimandiamo ad un qualsiasi testo di base di algebra per la dimostrazione che ogni equazione della forma $x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ per $a_i \in N$ e $n > 0$ ha soluzioni in un campo che estende $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle_N$. □

Il **grado di trascendenza** di un dominio di integrità M è la minima cardinalità di un insieme $A \subseteq M$ tale che tutti gli elementi di M sono algebrici su A. Poiché ogni formula algebrica ha un numero finito di soluzioni, se $\omega < |M|$ il grado di trascendenza di M è $|M|$.

7.18 Teorema *Ogni campo algebricamente chiuso di grado di trascendenza λ è un modello λ-ricco di T_{di}. Di conseguenza tutti i campi algebricamente chiusi non numerabili sono ricchi.*

Dimostrazione Letteralmente la stessa dimostrazione del teorema 7.8 sostituendo T con T_{di} e *libero* con *trascendente*. I riferimenti alle proposizioni 7.5 e 7.7 vanno sostituiti con riferimenti alle corrispondenti proposizioni 7.16 e 7.17 □

Scriviamo T^p_{acf} per la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p.

7.19 Corollario *Siano $M, N \vDash T_{\rm acf}$ modelli della stessa di cardinalità $\lambda > \omega$. Allora ogni $k : M \to N$ immersione parziale di cardinalità $< \lambda$ si estende ad un isomorfismo. Di conseguenza $T^p_{\rm acf}$ è λ-categorica per ogni $\lambda > \omega$ e per ogni caratteristica p.*

Più avanti estenderemo 2 anche ai modelli numerabili.

Dimostrazione Un campo algebricamente chiuso non numerabile ha necessariamente grado di trascendenza infinito. Si osservi solo che per ottenere la λ-categoricità è necessario fissare la caratteristica (la mappa vuota tra campi di diversa caratteristica non è un'immersione parziale). □

Quindi dai teoremi 6.24 e 6.26 otteniamo:

7.20 Corollario *Per ogni caratteristica p, la teoria $T^p_{\rm acf}$ è completa ed ha eliminazione dei quantificatori.* □

7.21 Esercizio Si dimostri che tutti campi algebricamente chiusi sono omogenei. N.B. indipendentemente dalla cardinalità e dal rango. Suggerimento: si proceda per induzione sulla cardinalità dell'immersione parziale da estendere. □

7.7 Il Nullstellensatz

Nel seguito x è una tupla di variabili fissata ed A un sottoinsieme di un anello N. Indicheremo con Δ l'insieme delle formule della forma $t(x) = 0$ dove $t(x)$ è un termine a parametri in A. Converrà identificare le formule della forma $t(x) = 0$ con il polinomio a coefficienti in $\langle A\rangle_M$ che corrisponde al termine $t(x)$ dato dalla proposizione 7.14. Quindi all'occasione tratteremo Δ come un anello di polinomi. Quindi $t(x) \in \Delta$ e $t(x) = 0 \in \Delta$ saranno espressioni sinonime.

A queste due interpretazioni di Δ corrispondono due operazioni di chiusura sugli insiemi $p \subseteq \Delta$. Da un lato esiste la chiusura di p per conseguenze logiche dall'altro l'ideale dell'anello generato da p. Queste non sono esattamente la stessa operazione e la seguente proposizione le confronta.

7.22 Proposizione *Fissiamo un dominio di integrità N, un sottoinsieme $A \subseteq N$ e sia Δ come sopra. Per ogni $p \subseteq \Delta$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è un ideale radicale, ovvero, per ogni n intero positivo $t^n(x) \in p \Rightarrow t(x) \in p$;*
2. *p è un Δ-tipo chiuso per conseguenze modulo $T_{\rm di} \cup Th_{{\rm at}^{\pm}}(N/A)$.*

Si osservi che avremmo potuto usare $T_{\rm asn}$ al posto di $T_{\rm di}$ con la stessa dimostrazione.

Dimostrazione Nel simbolo $\vdash$ sottointendiamo $T_{\rm di} \cup {\rm Th}_{{\rm at}^{\pm}}(N/A)$. Per dimostrare 1⇒2 fissiamo un polinomio $t(x) \notin p$ e mostriamo che $p \nvdash t(x) = 0$. Da 1 sappiamo che p è intersezione di tutti gli ideali primi che lo contengono. Quindi $t(x) \notin q$ per qualche ideale primo q che contiene p. Per la primalità dell'ideale q, l'anello Δ/q è un dominio di integrità. Denotiamo con $x + q$ la classe in Δ/q di cui x è rappresentante. Come è noto $x + q$ è una soluzione di tutte e sole le equazioni in q. Questo mostra che $q \nvdash t(x) = 0$. A fortiori $p \nvdash t(x) = 0$. Per l'implicazione 2⇒1 osserviamo che p è sicuramente un ideale e che da $p \vdash t^n(x) = 0$ segue ovviamente $p \vdash t(x) = 0$. □

Dato $p \subseteq \Delta$ scriviamo **rad p** per l'ideale radicale generato da p, ovvero l'intersezione di tutti gli ideali radicali che contengono p.

7.23 Corollario *Sotto le stesse ipotesi della proposizione 7.22, se $p \subseteq \Delta$ allora*

$$\operatorname{rad} p \quad = \quad \Big\{ t(x) \ : \ p \vdash t(x) = 0 \Big\}$$

dove $\vdash$ sta per la conseguenza logica modulo $T_{\mathrm{di}} \cup \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(N/A)$. □

7.24 Proposizione *Sotto le stesse ipotesi della proposizione 7.22, se $p \subseteq \Delta$ è un ideale radicale allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *p è un Δ-tipo primo;*
2. *p è un ideale primo.*

Dimostrazione Nel simbolo $\vdash$ sottointendiamo $T_{\mathrm{di}} \cup \mathrm{Th}_{\mathrm{at}^{\pm}}(N/A)$. Dimostriamo 1⇒2. Assumiamo 1 e supponiamo che $t(x) \cdot s(x)$ appartenga p. Quindi $p \vdash t(x) = 0 \vee s(x) = 0$. Per primalità di p come Δ-tipo, $p \vdash t(x) = 0$ oppure $p \vdash s(x) = 0$. Per la proposizione 7.22, p è chiuso per conseguenze, quindi $t(x) \in p$ o $s(x) \in p$.

Dimostriamo 2⇒1. Assumiamo 2 e supponiamo che

$$p \quad \vdash \quad \bigvee_{i=1}^{n} t_i(x) = 0.$$

Quindi

$$p \quad \vdash \quad \prod_{i=1}^{n} t_i(x) \ = \ 0$$

Per la chiusura di p e la primalità di p come ideale, otteniamo che $p \vdash t_i(x){=}0$ per qualche i. Per il corollario 5.15 questo è sufficiente per stabilire che p è un tipo primo. □

7.25 Proposizione *Sotto le stesse ipotesi della proposizione 7.22 assumiamo che N sia un campo algebricamente chiuso, $|A| < |N|$ e $|x| \leq |N|$. Allora per ogni $p \subseteq \Delta$:*

$$\operatorname{rad} p \quad = \quad \Big\{ t(x) \ : \ N \vDash \forall x \, [p(x) \rightarrow t(x) = 0] \Big\}$$

Dimostrazione L'inclusione $\subseteq$ segue immediatamente dalla definizione di rad p. Per dimostrare l'inclusione $\supseteq$ fissiamo $t(x) \notin \operatorname{rad} p$ e mostriamo che $N \vDash \exists x \, [p(x) \wedge t(x){\neq}0]$. Poiché $p \nvdash t(x) = 0$, in un qualche dominio di integrità M che contiene $\langle A \rangle_N$ esiste una soluzione di $p(x) \wedge t(x){\neq}0$. Senza perdere generalità possiamo assumere che $|M| \leq |N|$. Quindi esiste un'immersione $h : M \rightarrow N$ che estende id_A. Questa immersione mappa detta soluzione in una soluzione in N. □

Quando la tupla x è finita possiamo omettere dalle ipotesi $|A| < |N|$ utilizzando il teorema della base di Hilbert (per il quale rimandiamo alla letteratura) che dice che p è un Δ-tipo principale. Otteniamo quindi il seguente corollario che (a parte la notazione che qui abbiamo adattato al contesto) è una delle forme in cui solitamente viene enunciato il **Nullstellensatz di Hilbert**.

7.26 Corollario *Sotto le stesse ipotesi della proposizione 7.22 assumiamo che N sia un campo algebricamente chiuso ed x una tupla finita. Allora per ogni $p \subseteq \Delta$:*

$$\operatorname{rad} p \quad = \quad \Big\{ t(x) \ : \ N \vDash \forall x \, [p(x) \rightarrow t(x) = 0] \Big\}$$ □

7.27 Esercizio Sotto le stesse ipotesi della proposizione 7.22 sia $p \subseteq \Delta$ si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. p è un Δ-tipo principale;
2. p è un ideale finitamente generato.

7.8 I campi reali chiusi

```
Lavori in corso
Vietato l'accesso ai non addetti ai lavori
```

In tutto questo paragrafo il linguaggio è quello degli anelli ordinati. La teoria dei **domini di integrità ordinati**, che qui indicheremo con $T_{\rm dio}$, contiene oltre agli assiomi di $T_{\rm di} \cup T_{\rm ol}$ i seguenti

t $\quad x < y \ \rightarrow\ x + z < y + z$ (l'ordine è invariante per traslazione);

p $\quad 0 < x \wedge 0 < y \ \rightarrow\ 0 < xy$ (i positivi sono sottogruppo moltiplicativo).

È facile verificare che $0 < 1$. Altrimenti, $T_{\rm ol}$ implicherebbe $1 < 0$, quindi per traslazione $0 < -1$, e infine da p otterremmo $0 < 1$. Da questo e da t segue che i domini di integrità ordinati hanno caratteristica 0.

Per assiomatizzare i domini di integrità ordinati avremmo potuto usare al posto della relazione d'ordine un predicato unario di positività e richiedere (per comodità scriviamo $0 < x$ per il predicato di positività):

p1. $0 \not< 0$;

p2. $x = 0 \ \vee\ 0 < x \ \vee\ 0 < -x$;

p3. $0 < x \ \wedge\ 0 < y \ \rightarrow\ 0 < xy \ \wedge\ 0 < x + y$.

È immediato verificare che definendo $x < y$ come $0 < y - x$ otteniamo una relazione d'ordine lineare che soddisfa t e p.

Diremo che gli elementi positivi hanno una radice quadrata se vale

rq $\quad 0 < y \ \rightarrow\ \exists x\, x^2 = y$.

7.28 Proposizione *Sia $M \models T_{\rm dio}$. Allora esiste $M \subseteq N \models T_{\rm dio}$ in cui tutti gli elementi positivi hanno una radice quadrata*

Dimostrazione È sufficiente mostrare che se c un elemento positivo di M allora esiste $M \subseteq N \models T_{\rm dio}$ in cui vale $\exists x\ x^2 = c$. Il modello N richiesto dalla proposizione si ottiene iterando questa estensione. Come dominio di N prendiamo M^2 e identifichiamo M con $M \times \{0\} \subseteq N$. Le operazioni in N sono definite immaginando la coppia $\langle a, b\rangle$ come la somma formale $a + b\sqrt{c}$. Analogamente si definisce l'ordine in N. Precisamente, $\langle a, b\rangle \in N$ è positivo in uno dei seguenti tre casi

1. $0 < a \ \wedge\ 0 < b$;
2. $a \leq 0 \ \wedge\ 0 < b \ \wedge\ a^2 \leq b^2 c$;

3. $0 < a \wedge b \leq 0 \wedge b^2 c \leq a^2$.

Si verifica facilmente che valgono gli assiomi p1-p3. □

Inoltre, sono **formalmente reali** ovvero vale

fr $\quad x^2 \neq -1$

Più avanti dimostreremo come esercizio che in tutti i domini di integrità formalmente reali è possibile definire un ordine lineare. Si osservi che

$$T_{\rm dio} \quad \vdash \quad x < y \leftrightarrow \exists z\, x + z^2 = y.$$

7.29 Proposizione *Sia Δ l'insieme delle formule senza quantificatori del linguaggio degli anelli (ovvero non contengono $<$). Allora per ogni M, N modelli di $T_{\rm dio}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *$k : M \to N$ è un Δ-morfismo;*
2. *$k : M \to N$ è un'immersione parziale.*

Dimostrazione L'implicazione 2⇒1 è banale. Dimostriamo 1⇒2. Per la proposizione 7.28 possiamo assumere che rq valga sia in M che in N.

Sia $c \in \operatorname{dom} k$ e siano $a \in M$ e $b \in N$ tali che $M \vDash a^2{=}c$ ed $N \vDash b^2{=}kc$. È facile verificare che $k \cup \{\langle a, b\rangle\} \;:\; M \to N$ è ancora un Δ-morfismo. Iterando a sufficienza questa estensione, possiamo anche assumere che rq valga sia in $\langle \operatorname{dom} k\rangle_M$ che in $\langle \operatorname{img} k\rangle_N$

Fatte queste premesse, fissiamo due termini $t(x)$ e $s(x)$ ed una tupla $c \in (\operatorname{dom} k)^{|x|}$ dobbiamo mostrare che

$$M \vDash t(c) < s(c) \quad \Rightarrow \quad N \vDash t(kc) < s(kc).$$

Esiste un $a \in \operatorname{dom} k$ tale che $M \vDash t(c) + a^2 = s(c)$ e quindi $N \vDash t(kc) + (ka)^2 = s(kc)$ che implica $N \vDash t(kc) < s(kc)$ come richiesto. □

Capitolo 8

Saturazione ed omogeneità

8.1 Strutture sature

Un tipo $p(x)$ si dice **finitamente consistente** (o **finitamente coerente**) **in *M*** se ogni formula $\varphi(x)$, congiunzione di formule in $p(x)$, ha una soluzione in M. La consistenza finita è una proprietà elementare: se $A \subseteq M$ e $p(x) \subseteq L(A)$ è finitamente consistente in M allora è finitamente consistente in qualsiasi $N \equiv_A M$. Questa osservazione si generalizza nella seguente che nel seguito applicheremo più volte senza ulteriore riferimento.

8.1 Osservazione Sia $p(z,x)$ un tipo puro, sia $h : M \to N$ una mappa elementare, e sia a una tupla di elementi di $\operatorname{dom} h$. Se $p(a,x)$ è coerente in M (ma è sufficiente anche solo *finitamente* coerente) allora $p(ha,x)$ è finitamente coerente in N (e qui finitamente *non* si può omettere). □

8.2 Definizione *Sia x una singola variabile e sia λ un cardinale infinito. Una struttura infinita N si dice* ***λ-satura*** *se realizza ogni tipo $p(x)$ tale che*

1. *$p(x) \subseteq L(A)$ per qualche $A \subseteq N$ di cardinalità $< \lambda$;*
2. *$p(x)$ è finitamente coerente in N.*

Diremo che N è una struttura ***satura*** *tout court se è λ-satura per λ la cardinalità di N.*

Per enfasi, ripetiamo la definizione nel caso più frequentemente usato: la struttura infinita N è ***ω*-satura** se realizza ogni tipo finitamente coerente con un numero finito di parametri in N.

8.3 Esercizio Assumiamo $|L| \leq \omega$. Se M è un modello infinito ed F un ultrafiltro non principale su ω allora M^ω/F è un modello ω_1-saturo.

Suggerimento. Sia $\hat{c}$ una tupla di lunghezza ω di elementi di M^ω e consideriamo un tipo $p(x) = \{\varphi_i(x, [\hat{c}]_F) : i < \omega\}$ finitamente consistente. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $\varphi_{i+1}(x,z) \to \varphi_i(x,z)$. Sia $\langle X_i : i < \omega\rangle$ una catena strettamente decrescente di elementi di F tali che $X_0 = \omega$ e $X_{i+1} \subseteq \{j \ : \ \exists x\, \varphi_i(x, \hat{c}j)\}$. Definiamo $\hat{a} \in M^\omega$ in modo tale che $\varphi_i(\hat{a}j, \hat{c}j)$ valga per ogni $j \in X_i \smallsetminus X_{i+1}$. Si verifichi che $[\hat{a}]_F$ realizza $p(x)$. □

Le questioni che riguardano l'esistenza di strutture sature, o anche solo λ-sature per λ non numerabile sono un po' delicate. I prossimi due teoremi richiedono un minimo di familiarità con l'aritmetica cardinale e con la nozione di cofinalità. Comunque accettarli senza dimostrazione non compromette la comprensione di quanto segue. Ricordiamo che un cardinale κ si dice inaccessibile se è sia un cardinale limite forte che regolare. Ovvero,

1. $2^\lambda < \kappa$ per ogni $\lambda < \kappa$ (κ è limite forte)

2. $\bigcup A < \kappa$ per ogni $A \subseteq \kappa$ con $|A| < \kappa$ (κ è regolare)

8.4 Teorema *Sia κ un cardinale inaccessibile tale che $|L| + \omega < \kappa$. Ogni struttura infinita M di cardinalità $\leq \kappa$ ha un'estensione elementare satura di cardinalità κ.*

Dimostrazione Costruiamo una catena elementare $\langle M_i : i < \kappa\rangle$ di modelli di cardinalità $\leq \kappa$. L'unione della catena N è un'estensione richiesta. La catena parte con $M_0 = M$ ed è l'unione ai passi limite. Dato M_i prendiamo come M_{i+1} un modello che realizza tutti i tipi su M_i con $< \kappa$ parametri finitamente consistenti in M_i. Poiché κ è limite forte, M_i ha $\leq \kappa$ sottoinsiemi di cardinalità $< \kappa$ e che, fissato un insieme di parametri di cardinalità $< \kappa$ esistono $< \kappa$ tipi. Quindi M_{i+1} può essere scelto di cardinalità $\leq \kappa$.

Verifichiamo ora che N è saturo. Sia $p(x)$ un tipo $A \subseteq N$ per qualche $|A| < \kappa$. Poiché κ è un cardinale regolare esiste un $i < \kappa$ tale che $A \subseteq M_i$. Quindi M_{i+1} realizza $p(x)$, e per elementarità anche N. □

Con una costruzione simile si dimostra che se $2^\lambda = \lambda^+$, allora esistono modelli saturi di cardinalità $\leq 2^\lambda$. Precisamente, vale il seguente:

8.5 Teorema *Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$. Ogni struttura infinita M di cardinalità $\leq 2^\lambda$ ha un'estensione elementare λ^+-satura di cardinalità $\leq 2^\lambda$.*

Dimostrazione Costruiamo una catena elementare $\langle M_i : i < \lambda^+\rangle$ di modelli di cardinalità $\leq 2^\lambda$. L'unione della catena M_{λ^+} è un'estensione richiesta. La catena parte da $M_0 = M$ ed è l'unione ai passi limite. Dato M_i prendiamo come M_{i+1} un modello che realizza tutti i tipi su M_i con $\leq \lambda$ parametri finitamente consistenti in M_i. Osserviamo che M_i ha $|M_i|^\lambda \leq 2^\lambda$ sottoinsiemi di cardinalità λ e che, fissato un insieme di parametri di cardinalità $\leq \lambda$ esistono 2^λ tipi. Quindi M_{i+1} può essere scelto di cardinalità $\leq 2^\lambda$.

Verifichiamo ora che M_{λ^+} è saturo. Sia $p(x)$ un tipo $A \subseteq M_{\lambda^+}$ per qualche $|A| \leq \lambda$. Poiché λ^+ è un cardinale regolare (i.e. ha cardinalità λ^+) esiste un $i < \lambda^+$ tale che $A \subseteq M_i$. Quindi M_{i+1} realizza $p(x)$, e per elementarità anche M_{λ^+}. □

8.6 Corollario *Sia λ un cardinale inaccessibile $> |L| + \omega$. Ogni struttura infinita M di cardinalità $\leq \lambda$ ha un'estensione elementare satura di cardinalità λ.*

Nel caso $\lambda = \omega$, il seguente teorema ricorda i lemmi 6.1 e 6.10. La differenza è che ora estendiamo mappe elementari invece di immersioni parziali.

8.7 Lemma *Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$. Sia N una struttura infinita e sia $\mathcal{M}$ la classe dei modelli di $Th(N)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1 *N è una struttura λ-satura;*

2 *N è una struttura λ-ricca se come morfismi consideriamo le mappe elementari.*

3 *N realizza tutti i tipi finitamente consistenti con $< \lambda$ parametri e $\leq \lambda$ variabili.*

Dimostrazione Per dimostrare l'implicazione 1⇒2 dobbiamo verificare che ogni mappa elementare $k: M \to N$ tale che $|k| < \lambda$ ed $|M| \le \lambda$ si estende ad un'immersione elementare. Sia $\langle a_i : i < \lambda \rangle$ un'enumerazione di M. Definiamo una catena di mappe elementari $h_i : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$ e tali che $a_i \in \operatorname{dom} h_{i+1}$. Dall'unione della catena otteniamo l'immersione richiesta.

La catena comincia con $h_0 = k$. Agli ordinali limite la catena si estende prendendo l'unione. Ora vediamo come estenderla al passo $i+1$. Sia a un'enumerazione di $\operatorname{dom} h_i$, quindi $|a| < \lambda$. Vogliamo un elemento $c \in N$ per porre $h_{i+1} = h_i \cup \{\langle a_i, c \rangle\}$. Sia $p(z,x) = \mathrm{tp}_M(a, a_i)$. Il tipo $p(a,x)$ è consistente in M per costruzione e quindi il tipo $p(h_i a, x)$ è finitamente consistente in N per 8.1. L'elemento c cercato è una qualsiasi sua realizzazione, che esiste per saturazione. Per verificare che $h_{i+1} : M \to N$ è elementare è sufficiente notare che il tipo $p(z,x)$ è completo ed è soddisfatto da a, a_i in M e da da $h_i a, c$ in N.

Dimostriamo l'implicazione 2⇒3. Sia x una tupla di variabili di lunghezza $\le \lambda$ e sia $p(x)$ un tipo a parametri in un qualche $A \subseteq N$ di cardinalità $< \lambda$ e fintamente coerente in N. Sia N' un'estensione elementare di N che realizza $p(x)$, diciamo $N' \vDash p(b)$ per un qualche $b \in N^{|x|}$. Per Löwenheim-Skolem esiste un modello $M \preceq N'$ che contiene A, b ed ha cardinalità $\le \lambda$. (Qui usiamo l'ipotesi $|L| \le \lambda$.) Applicando 2 con $k = \mathrm{id}_A$ e otteniamo un'immersione elementare $h : M \to N$ che estende id_A, ovvero fissa tutti i parametri che occorrono in $p(x)$, quindi da $M \vDash p(b)$ segue $N \vDash p(hb)$, ovvero hb è la realizzazione richiesta.

L'implicazione 3⇒1 è ovvia. □

Il seguente corollario è l'analogo del teorema 6.22. L'unica differenza è che qui i morfismi sono mappe elementari (il risultato è quindi più debole). La dimostrazione è comunque identica.

8.8 Teorema *Per ogni coppia di modelli saturi M ed N della stessa cardinalità λ e per ogni mappa $k : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è una mappa elementare;*
2. *esiste un isomorfismo $g : M \to N$ che estende k.*

Ricordando che due modelli sono elementarmente equivalenti quando la mappa vuota è elementare otteniamo il seguente corollario.

8.9 Corollario *Due modelli saturi elementarmente equivalenti della stessa cardinalità sono isomorfi.* □

Quindi, da quanto visto nei capitoli 6 e 7 otteniamo numerosi esempi di strutture sature.

8.10 Corollario *Una lista di teorie con modelli saturi:*

1 *ogni modello di T_{oldse} è ω-saturo;*

2 *ogni modello di T_{rg} è ω-saturo;*

3 *se R dominio di integrità e T è la teoria degli R-moduli divisibili allora*

   a. *ogni modello di T di rango infinito è ω-saturo;*

   b. *ogni modello di cardinalità $> |R| + \omega$ è saturo.*

4a *ogni modello di T_{acf} con grado di trascendenza infinito è ω-saturo;*

4b *ogni modello non numerabile di T_{acf} è saturo.*

Dimostrazione Lasciata al lettore. Serve usare: la caratterizzazione della saturazione data dal lemma 8.7 e l'eliminazione dei quantificatori, teorema 6.24. □

8.11 Esercizio Sia N un modello ricco di T (i morfismi sono le immersioni parziali). Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. ogni modello saturo di $\text{Th}(N)$ è ricco;
2. $\text{Th}(N)$ ha eliminazione dei quantificatori.

Suggerimento: si usi il teorema 6.26 e l'esercizio 6.25. □

8.12 Esercizio Il linguaggio è quello dei gruppi moltiplicativi. Sia G un gruppo ω-saturo. Si dimostri che se G è un gruppo di torsione (ossia, per ogni $g \in G$ esiste un intero positivo n tale che $g^n = 1$) allora allora G ha esponente finito. Si ricorda che l'esponente di un gruppo G è, se esiste, il minimo n tale che $g^n = 1$ per ogni $g \in G$. Se questo n non esiste si dice che il gruppo ha esponente infinito. □

8.13 Esercizio Si dimostri che i modelli ω-ricchi della teoria R_ω nel paragrafo 6.4 sono saturi. □

8.14 Esercizio Il linguaggio contiene $<$ e due simboli di funzione unaria che chiameremo successore e predecessore e indicheremo con $(x+1)$ ed $(x-1)$. Scriveremo T per la teoria che estende T_{ol} con i seguenti assiomi:

1. $(x+1)-1 \;=\; (x-1)+1 \;=\; x;$
2. $x-1 < x < x+1;$
3. $x-1 < z < x+1 \;\rightarrow\; x = z.$

Si dimostri che la struttura $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ ordinata con l'**ordine lessicografico** cioè

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \;\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\; a_1 < b_1 \;\text{ oppure }\; a_1 = b_1 \text{ e } a_2 < b_2$$

e con la naturale interpretazione delle funzioni è un modello saturo di T. □

8.15 Esercizio Il linguaggio L è quello dei grafi più infinite constanti $\{c_i : i < \omega\}$. Sia T la teoria che contiene T_{rg} più gli assiomi $r(c_i, c_j)$ per ogni $i < j < \omega$. È T una teoria completa? È ω-categorica? Qual'è la cardinalità minima dei modelli ω-saturi di T? □

8.2 Strutture omogenee

Nella definizione 6.29 abbiamo introdotto i concetti di universalità ed ultraomogeneità. In questo paragrafo vedremo l'analogo elementare delle stesse nozioni. La seguente coincide con la definizione 6.29 se per $\mathcal{M}$ si prende la classe dei modelli di $\text{Th}(N)$ e come morfismi le mappe elementari (invece delle immersioni parziali).

8.16 Definizione *Una struttura N si dice* **(elementarmente) λ-universale** *se per ogni $M \equiv N$ di cardinalità $\leq \lambda$ esiste una immersione elementare $h : M \to N$. Si dice* **universale** *tout court se è λ-universale con λ la cardinalità di N.*

Una struttura N si dice **λ-omogenea** *se ogni $k : N \to N$ mappa elementare di cardinalità $< \lambda$ si estende ad un automorfismo di N. Equivalentemente, se per ogni coppia di tuple $a \equiv b$ di lunghezza $< \lambda$ esiste un automorfismo di N che mappa a in b. Diremo N è* **omogeneo** *tout court se è λ-omogeneo con λ la cardinalità di N.*

Sia N una struttura e sia $A \subseteq N$ un insieme di parametri. Denotiamo con **Aut(N/A)** l'insieme degli automorfismi di N che fissano A puntualmente, cioè che sono l'identità su A. Sia a una tupla di elementi di N. L'insieme

$$\mathbf{O}_N(a/A) \;=\; \{fa \;:\; f \in \mathrm{Aut}(N/A)\}$$

si chiamo l'**orbita di a su A in N**. Quando il modello N è chiaro dal contesto verrà omesso dalla notazione.

La convenienza di lavorare in modelli sufficientemente omogenei è che in questi modelli esiste un equivalente sintattico della nozione di orbita: le orbite coincidono con gli insiemi definibili da tipi. La seguente proposizione riporta l'enunciato preciso. La dimostrazione è immediata.

8.17 Proposizione *Fissiamo una struttura λ-omogenea N, un insieme $A \subseteq N$ cardinalità $< \lambda$, ed una tupla $a \in N^{<\lambda}$. Allora $O(a/A) = p(N)$ dove $p(x) = tp(a/A)$.* □

8.18 Teorema *Per ogni modello N di cardinalità $\geq |L|$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è saturo*
2. *N è universale ed omogeneo.*

Dimostrazione Data l'equivalenza tra saturazione e ricchezza enunciata del teorema 8.7, il teorema coincide con quella del teorema 6.30 a meno di sostituire le immersioni parziali con le mappe elementari. □

Il resto di questo paragrafo è dedicato ad uno studio approfondito del concetto di omogeneità e di alcune sue varianti. Può essere considerato come un lungo esercizio risolto.

Il prossimo obbiettivo è il teorema 8.22 che caratterizza la λ-saturazione nello stile del teorema 8.18. Purtroppo per ottenere una caratterizzazione che valga per ogni cardinale λ dobbiamo indebolire la nozione di omogeneità. Esistono varie nozioni di omogeneità debole; la seguente è legata al concetto di andirivieni, qualcuno la chiama *andirivieni-omogeneità.*

8.19 Definizione *Una struttura N si dice* **debolmente λ-omogenea** *se per ogni elemento $b \in N$ ogni mappa elementare $k : N \to N$ di cardinalità $< \lambda$ si estende ad una mappa elementare definita in b.*

È immediato che una struttura λ-omogenea è anche debolmente λ-omogenea. Mostriamo che le due varianti coincidono quando λ è la cardinalità di N:

8.20 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è una struttura omogenea;*

2. *N è debolmente λ-omogenea per λ la cardinalità di N.*

Dimostrazione Il verso 1⇒2 è ovvio come già osservato. L'implicazione 2⇒1 si dimostra con l'usuale costruzione ad andirivieni. Sia $\langle a_i : i < \lambda \rangle$ un'enumerazione di N. Costruiamo una catena di mappe elementari $g_i : N \to N$ tutte di cardinalità $< \lambda$ e tali che $a_i \in \operatorname{dom} g_{i+1} \cap \operatorname{img} g_{i+1}$. L'unione della catena è l'immersione richiesta. La costruzione comincia con $g_0 = k$ e agli ordinali limite è l'unione. Il passo $i+1$ si divide in due mezzi passi. Col primo mezzo passo estendiamo a $g_{i+1/2}$ in modo da ottenere $a_i \in \operatorname{dom} g_{i+1/2}$ col secondo estendiamo ulteriormente per ottenere $a_i \in \operatorname{img} g_{i+1}$. L'omogeneità debole assicura l'esistenza di una mappa elementare $h : N \to N$ che estende $g_i : N \to N$ ed ha come dominio $\operatorname{dom} g_i \cup \{a_i\}$. Definiamo quindi $g_{i+1/2} = h$. Ora applichiamo nuovamente l'omogeneità debole alla mappa $\big(g_{i+1/2}\big)^{-1} : N \to N$ per ottenere un'estensione $f : N \to N$ con dominio $\operatorname{img} g_{i+1/2} \cup \{a_i\}$. Definiamo $g_{i+1} = f^{-1}$. Si noti che per poter applicare l'omogeneità debole è necessario che la cardinalità di g_i non superi mai λ, e questo è garantito perché λ è la cardinalità del modello. □

La dimostrazione del teorema 8.22 richiede il seguente lemma la cui dimostrazione combina due tecniche importanti: l'andirivieni e la costruzione usata per dimostrare il teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù, precisamente, la seconda dimostrazione 3.40.

8.21 Lemma *Sia λ un cardinale infinito $\geq |L|$. Sia N una struttura debolmente λ-omogenea e fissiamo un insieme $A \subseteq N$ di cardinalità $\leq \lambda$. Allora ogni mappa elementare $k : N \to N$ di cardinalità $< \lambda$ si estende ad un automorfismo $h : M \to M$ dove M è un modello tale che $A \subseteq M \preceq N$.*

Dimostrazione Costruiamo simultaneamente un modello $A \subseteq M \preceq N$ ed $h : M \to M$, un automorfismo che estende k. Definiremo due catene, una catena $\langle A_i : i < \lambda \rangle$ di sottoinsiemi di N ed una catena di funzioni $\langle h_i : i < \lambda \rangle$. Dall'unione di queste catene si ottengono il modello e l'automorfismo richiesti.

Cominciamo col porre $h_0 = k$ ed $A_0 = A \cup \operatorname{dom} k \cup \operatorname{img} k$ e dichiarare che ai passi limite si prende l'unione. Al passo $i+1$ fissiamo un'enumerazione di A_i ed un'enumerazione di tutte le formule consistenti a parametri in A_i. Entrambe le enumerazioni hanno lunghezza λ. Sia $\langle i_1, i_2 \rangle$ la coppia i-esima di ordinali $< \lambda$ e sia a una soluzione della i_2-esima formula in A_{i_1}. Sia c l'elemento i_2-esimo in A_{i_1}.

$$A_{i+1} \;=\; A_i \cup \big\{a, b, d\big\} \qquad \text{e} \qquad h_{i+1} \;=\; h_i \cup \big\{\langle c, b\rangle\big\} \cup \big\{\langle d, c\rangle\big\}$$

per opportuni b e d che rendono $h_{i+1} : N \to N$ una mappa elementare. Questi esistono perché N è debolmente λ-omogeneo per ipotesi (serve applicare questa ipotesi due volte, avanti e indietro, come nella dimostrazione della proposizione 8.20).

Usando il test di Tarski-Vaught, è immediato verificare che M è un modello. Dalla costruzione è chiaro che $\operatorname{dom} h \subseteq M$ e $\operatorname{img} h \subseteq M$. L'iniettività è conseguenza immediata della elementarità. Le verifiche della totalità e suriettività sono anche immediate quindi concludiamo che $h : M \to M$ è l'automorfismo richiesto. □

Siamo pronti per dimostrare la promessa generalizzazione del teorema 8.18.

8.22 Teorema *Sia λ un cardinale infinito a $\geq |L|$. Per ogni modello N le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è λ-saturo*

2. *N è λ-universale e debolmente λ-omogeneo.*

Dimostrazione Per dimostrare il verso 1⇒2 osserviamo che l'universalità segue dal punto 2 del lemma 8.7 prendendo come k la funzione vuota. Per l'omogeneità debole, fissiamo un elemento $b \in N$ ed una mappa elementare $k : N \to N$ di cardinalità $< \lambda$. Sia a un enumerazione di $\operatorname{dom} k$. Sia $p(x, y) = \operatorname{tp}(a, b)$ quindi $p(ka, y)$ è finitamente consistente e per saturazione ha una realizzazione c. L'estensione richiesta è $k \cup \{\langle b, c\rangle\}$.

Per dimostrare la direzione 2⇒1 useremo una immediata generalizzazione della costruzione usata per dimostrare il teorema 6.30. Assumiamo 2 e dimostriamo l'affermazione 2 del teorema 8.7. Sia $k : M \to N$ una mappa elementare, con $|k| < \lambda$ ed $|M| \le \lambda$. Per l'universalità esiste un'immersione elementare $f : M \to N$. La mappa $f \circ k^{-1} : N \to N$ è una mappa elementare di cardinalità $< \lambda$, quindi per il lemma 8.21, esiste una struttura N' tale che $\operatorname{img} k, \operatorname{img} f \subseteq N' \preceq N$ ed un automorfismo $h : N' \to N'$ che estende $k \circ f^{-1}$. È immediato verificare che $h \circ f : M \to N$ estende k. Questa è dunque l'immersione richiesta. □

Se nella definizione λ-universalità limitiamo la richiesta ai modelli M di cardinalità $< \lambda$ otteniamo una nozione interessante solo per $|L| < \lambda$. Per $\lambda = |L|$ la condizione potrebbe essere banalmente soddisfatta per l'assenza di modelli $M < \lambda$. La nozione di λ-saturazione debole è il giusto modo di formulare questa nozione in modo da renderla interessante per ogni cardinalità $|L| \le \lambda$.

Una struttura infinita N si dice **debolmente λ-satura** se realizza tutti i tipi *puri* con $< \lambda$ variabili e finitamente consistenti.

8.23 Esercizio Si dimostri che per ogni modello N di cardinalità $\ge |L|$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1 N è λ-saturo

2 N è debolmente λ-saturo e debolmente λ-omogeneo. □

8.24 Esercizio Sia λ un cardinale regolare $\ge |L|$. Si dimostri che se N è una struttura debolmente λ-omogenea allora per ogni $A \subseteq N$ di cardinalità $\le \lambda$ esiste un modello M omogeneo di cardinalità $\le \lambda$ tale che $A \subseteq M \preceq N$. □

8.25 Esercizio (risolto) Sia N una struttura debolmente λ-omogenea. Sia M una struttura di cardinalità $\le \lambda$ tale che $M \vDash \exists x\, p(x) \Rightarrow N \vDash \exists x\, p(x)$ per ogni tipo puro $p(x)$ con $|x| < \lambda$. (In particolare M ed N sono elementarmente equivalenti.) Si dimostri che ogni mappa elementare $k : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$ si estende esiste un'immersione elementare di $h : M \to N$.

Soluzione: la costruzione è simile a quella del teorema 8.22. Costruiamo una catena di mappe elementari $h_i : M \to N$ di cardinalità $< \lambda$. L'unione di questa catena è l'immersione desiderata. Cominciamo col porre $h_0 = k$. Ai passi limite prenderemo l'unione. Sia b l'i-esimo elemento di M, sia a un'enumerazione di $\operatorname{dom} h_i$ e sia $p(x, y) = \operatorname{tp}(a, b)$. Per ipotesi $p(x, y)$ è realizzato in N diciamo da c, d. Poiché $c \equiv h_i a$, per il lemma 8.21, esiste $N' \preceq N$ che contiene $h_i a, c, d$ ed un automorfismo $f : N' \to N'$ tale che $fc = h_i a$. Allora $h_i a, fd$ realizza anche $p(x, y)$, quindi l'estensione cercata è $h_{i+1} = h_i \cup \{\langle b, fd\rangle\}$. □

8.26 Esercizio Siano M ed N due strutture omogenee della stessa cardinalità λ. Assumiamo che $M \vDash \exists x\, p(x) \Leftrightarrow N \vDash \exists x\, p(x)$ per ogni tipo puro $p(x)$ con $|x| < \lambda$. Si dimostri che le due strutture sono isomorfe. Suggerimento: si può usare l'esercizio 8.25 combinato con un andirivieni. □

8.27 Esercizio Sia L il linguaggio che estende quello degli ordini stretti con infinite costanti $\{c_i : i \in \omega\}$. Sia T la teoria che contiene T_{oldse} e per ogni $i \in \omega$ l'enunciato $c_i < c_{i+1}$. Dimostrare che T ha eliminazione dei quantificatori ed è completa (immediata conseguenza di 6.27). Esibire un modello saturo numerabile ed un modello numerabile non omogeneo. □

8.3 Il modello mostro

In questo paragrafo esponiamo le convenzioni comunemente adottate per lavorare con una teoria completa T senza modelli finiti. Queste convenzioni hanno lo scopo semplificare l'esposizione. Generalmente si fissa un modello saturo $\mathfrak{U}$ di cardinalità $> |L| + \omega$. I più cauti richiedono solo che $\mathfrak{U}$ sia un modello λ-saturo e λ-omogeneo, con λ un cardinale regolare $> |L| + \omega$. Noi, per tagliare corto su dettagli di poco rilievo, richiediamo che $\mathfrak{U}$ abbia cardinalità inaccessibile. Il modello $\mathfrak{U}$ è soprannominato **modello mostro** proprio perché potrebbe avere cardinalità irragionevolmente grande. Il modello mostro non è oggetto diretto del nostro interesse è solo l'universo in cui poter immergere tutte le strutture prese in considerazione. Ha un po' la funzione di $\mathbb{C}$ per chi studia campi numerici.

Lavorando in $\mathfrak{U}$, alcuni termini acquistano un significato particolare. E qui riassumiamo le convenzioni più usate.

piccolo/grande Le cardinalità $< |\mathfrak{U}|$ vengono dette piccole.

modelli I modelli sono sottostrutture elementari di $\mathfrak{U}$ di cardinalità piccola. Le lettere M, N, K, e simili, denotano sempre solo modelli.

parametri I parametri sono tutti solo in $\mathfrak{U}$. Le lettere A, B, C, ecc. e simili denotano sempre solo insiemi di parametri di cardinalità piccola (qui useremo caratteri corsivi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ecc. per indicare insiemi di cardinalità arbitraria).

tuple Tutte le tuple, di parametri, di variabili, o altro, hanno lunghezza $< |\mathfrak{U}|$ se non diversamente specificato.

tipi globali Chiameremo tipi globali gli elementi di $S(\mathfrak{U})$ cioè i tipi completi su $\mathfrak{U}$.

formule In questo contesto formule sono sempre formule con parametri (in $\mathfrak{U}$, ovviamente).

definibili I definibili sono gli insiemi della forma $\varphi(\mathfrak{U})$ dove $\varphi(x)$ è una formula (con parametri in $\mathfrak{U}$ quindi). Diremo A-definibile se $\varphi(x) \in L(A)$.

elementarità La notazione $a \equiv_A b$ abbrevia $\mathfrak{U}, a \equiv_A \mathfrak{U}, b$.

morfismi Diremo che h è una mappa elementare, intendendo che $h : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ è una mappa elementare.

Diamo ora una interpretazione topologica alla nozione di saturazione. Fissiamo un insieme di parametri $A \subseteq \mathcal{U}$. Introduciamo una topologia su $\mathcal{U}$ (o su una qualsiasi potenza cartesiana di $\mathcal{U}$) che chiameremo **topologia indotta** da A. I chiusi di questa topologia sono gli insiemi della forma $p(\mathcal{U})$ dove $p(x)$ è un tipo su A.

Gli insiemi definibili con parametri in A sono quindi chiusi-aperti e viceversa (cfr. esercizio 8.28). I definibili su A formano una base della topologia indotta da A. La topologia è quindi **zero-dimensionale** (ha una base di chiusi-aperti).

È immediato verificare che richiedere che $\mathcal{U}$ sia compatto rispetto alla topologia indotta da A equivale a richiedere che $\mathcal{U}$ realizzi tutti gli tipi a parametri in A finitamente consistenti. Infatti un'intersezione di chiusi di base è esattamente un insieme della forma $p(\mathcal{U})$ dove $p(x)$ è un tipo. Quindi la λ-saturazione è equivalente alla compattezza rispetto a *tutte* le topologie indotte da sottoinsiemi di cardinalità $< \lambda$.

Queste topologie non sono mai di Hausdorff: poiché $\mathcal{U}$ ha cardinalità molto grande esiste sempre un tipo completo con più di una realizzazione. Due realizzazioni a e b dello stesso tipo completo non possono essere separate da due aperti (due formule). In realtà, la topologia non soddisfa nessun assioma di separazione, nemmeno T_0 perché a e b hanno esattamente gli stessi intorni.

Spesso quindi si usa quozientare $\mathcal{U}$ con la relazione di equivalenza A-elementare. È immediato che $\mathcal{U}/\equiv_A$ è uno spazio di Hausdorff: se $a \not\equiv_A b$ allora, presa una qualsiasi formula $\varphi(x)$ soddisfatta da a e non da b, otteniamo due aperti $\varphi(\mathcal{U})$ e $\neg\varphi(\mathcal{U})$ che separano a e b. Gli elementi di questo spazio quoziente si identificano con l'insieme dei tipi completi $p(x)$ a parametri in A che si denota $\boldsymbol{S_x(A)}$ o con $\boldsymbol{S_n(A)}$ dove $|x| = n$.

8.28 Esercizio Fissiamo un insieme di parametri A. Sia $p(x, y) \subseteq L(A)$. Si dimostri che la formula infinitaria $\exists y\, p(x, y)$ è equivalente ad un tipo, precisamente, al tipo

$$q(x) \;=\; \big\{\exists y\, \varphi(x, y) \;:\; \varphi(x, y) \text{ congiunzione di formule in } p(x, y)\big\}. \qquad \square$$

8.29 Esercizio Fissiamo un insieme di parametri A. Sia $p(x) \subseteq L(A)$ un tipo, si dimostri che se $\neg p(\mathcal{U})$ è definibile da un tipo, allora $p(\mathcal{U})$ è definibile. (Si confronti questo con la proposizione 5.8.) □

8.30 Esercizio Fissiamo un insieme di parametri A. Sia $p(x) \subseteq L(A)$ un tipo e $\varphi(x) \in L(\mathcal{U})$ una formula, si dimostri che se $p(x) \to \varphi(x)$, allora $\psi(x) \to \varphi(x)$ per qualche $\psi(x)$ congiunzione di formule in $p(x)$. □

Il seguente esercizio è risolto. È un caso particolare del lemma 9.2 di cui ricalca anche la dimostrazione che qui, grazie al modello mostro, è più facile da visualizzare. Scriviamo $\boldsymbol{a \equiv_{\text{qf}} b}$ se le tuple a e b soddisfano le stesse formule libere.

8.31 Esercizio Sia $\varphi(x)$ una formula pura. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1 $\varphi(x)$ è equivalente ad una formula senza quantificatori;

2 $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$, per ogni coppia di tuple $a \equiv_{\text{qf}} b$.

Soluzione. L'implicazione 1⇒2 è ovvia. Dimostriamo 2⇒1. Da 2 abbiamo la seguente equivalenza:

$$\varphi(x) \quad \leftrightarrow \quad \bigvee_{p(x)\to\varphi(x)} p(x)$$

dove $p(x)$ corre su tutti i tipi puri senza quantificatori completi. Per compattezza possiamo riscrivere questa equivalenza come

$$\varphi(x) \quad \leftrightarrow \quad \bigvee_{\psi(x)\to\varphi(x)} \psi(x)$$

dove $\psi(x)$ corre su tutte le formule pure e libere. Questa dice che $\neg\varphi(x)$ è equivalente ad un tipo libero. Quindi, dall'esercizio 8.28, otteniamo che $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ per una qualche formula libera. □

8.32 Esercizio Sia $\mathfrak{U}$ un modello saturo, $A \subseteq \mathfrak{U}$ un sottoinsieme di cardinalità piccola, e sia $\psi(x) \in L(\mathfrak{U})$. Si dimostri che se $\psi(\mathfrak{U})$ è invariante per automorfismi che fissano A, allora $\psi(x)$ è equivalente ad una formula in $L(A)$.

8.33 Esercizio Fissiamo un insieme di parametri A. Sia $p(x) \subseteq L(A)$ un tipo e sia x una tupla finita. Si dimostri che se $p(\mathfrak{U})$ è definibile allora è definibile da una congiunzione di formule in $p(x)$. □

8.34 Esercizio Fissiamo un insieme di parametri A. Sia $p(x) \subseteq L(A)$ un tipo e sia x una tupla finita. Si dimostri che se $p(\mathfrak{U})$ è infinito allora ha la stessa cardinalità di $\mathfrak{U}$. □

8.35 Esercizio Si dimostri che l'affermazione dell'esercizio 8.34 non vale se la tupla x ha lunghezza infinita. Suggerimento: si prenda un linguaggio con un predicato unario r interpretato in un insieme di esattamente due elementi. Si costruisca un tipo $p(x) \subseteq L$, dove $|x| = \omega$, con esattamente 2^ω soluzioni. □

8.36 Esercizio Data $\varphi(x, y) \in L(\mathfrak{U})$ supponiamo che $\big\{\varphi(a, \mathfrak{U}) \ : \ a \in \mathfrak{U}^{|x|}\big\}$ sia un insieme infinito. Si dimostri che allora ha la cardinalità di $\mathfrak{U}$. Vale lo stesso se al posto della formula $\varphi(x, y)$ prendiamo un tipo $p(x, y) \subseteq L(A)$, dove A è un qualche insieme di parametri? □

8.37 Esercizio Data $\varphi(x, y) \in L(\mathfrak{U})$ si dimostri che se l'insieme delle tuple $a \in \mathfrak{U}^{|x|}$ tali che $|\varphi(a, \mathfrak{U})| < \omega$ è definibile allora esiste un n tale che $|\varphi(a, \mathfrak{U})| < \omega$ implica $|\varphi(a, \mathfrak{U})| < n$. □

8.38 Esercizio Si dimostri che per ogni formula $\varphi(x, y) \in L(\mathfrak{U})$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. esiste una sequenza $\langle a_i : i \in \omega\rangle$ tale che $\varphi(\mathfrak{U}, a_i) \subseteq \varphi(\mathfrak{U}, a_{i+1})$ per ogni $i \in \omega$.
2. esiste una sequenza $\langle a_i : i \in \omega\rangle$ tale che $\varphi(\mathfrak{U}, a_{i+1}) \subseteq \varphi(\mathfrak{U}, a_i)$ per ogni $i \in \omega$. □

8.39 Esercizio Fissiamo una teoria T completa e senza modelli finiti. Fissiamo un insieme di parametri A ed una formula $\varphi(x) \in L(\mathfrak{U})$ (quindi con parametri non necessariamente in A). Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. esiste un modello M che contiene A tale che $M \cap \varphi(\mathfrak{U}) = \varnothing$;
2. non esiste alcuna $\psi(z_1, \ldots, z_n) \in L(A)$, dove $|z_i| = |x|$, tale che $\psi(z_1, \ldots, z_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(z_i)$.

Suggerimento: sia M un modello che contiene A e sia $c = \langle c_i : i < \lambda \rangle$ l'enumerazione di $M^{|x|}$. Sia $p(z) = \mathrm{tp}(c/A)$ dove $z = \langle z_i : i < \lambda \rangle$ una tupla di tuple di variabili. Si dimostri che 2 implica la consistenza del tipo $p(z) \cup \{\neg\varphi(z_i) \ : \ i < \lambda\}$ e si deduca 1. $\square$

Capitolo 9

Eliminazione dei quantificatori

Vedremo per prima cosa alcuni teoremi che legano la complessità sintattica di una formula alla classe di morfismi che la preservano. Useremo questi per ottenere un criterio generale per dimostrare l'eliminazione dei quantificatori.

9.1 Teoremi di preservazione

In questo paragrafo T è una qualunque teoria consistente senza modelli finiti e Δ un insieme di formule pure chiuso per sostituzione di variabili con altre variabili. In prima lettura si può immaginare che T sia vuota e Δ sia L_{qf}.

Se $\mathsf{C} \subseteq \{\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge\}$ è un insieme di connettivi, scriveremo **$\mathsf{C}\Delta$** per la la chiusura di Δ rispetto a tutti i connettivi in C. Scriveremo **$\neg\Delta$** per l'insieme che contiene le negazioni delle formule in Δ. Attenzione a non confonderlo con $\{\neg\}\Delta$.

Ricordiamo che un **Δ-morfismo** è una mappa $k : M \to N$ che preserva la verità delle formule in Δ. Useremo senza ulteriore commento quanto stabilito nell'osservazione 5.20. Faremo uso anche della seguente:

9.1 Osservazione Fissiamo $M \vDash T$ ed una tupla a di elementi di M. Sia $p(x) = \Delta\text{-tp}_M(a)$. Per ogni formula pura $\varphi(x)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $N \vDash \varphi(ka)$ per ogni $N \vDash T$ e per ogni Δ-morfismo $k : M \to N$ definito in a;
2. $T \vdash p(x) \to \varphi(x)$.

Infatti, 2⇒1 è immediata (basta prendere l'identità), e per verificare 1⇒2 assumiamo ¬2 e fissiamo $N \vDash T$ ed una tupla b tale che $N \vDash p(b) \wedge \neg\varphi(b)$. La mappa $k : M \to N$ con $k = \{\langle a, b\rangle\}$ prova ¬1 (k è un Δ-morfismo perché vale $p(b)$). □

Il seguente è a volte chiamato Lyndon-Robinson Lemma:

9.2 Teorema *Sia $\varphi(x)$ una formula pura. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\varphi(x)$ è, modulo T, equivalente ad una formula in $\{\wedge\vee\}\Delta$;*
2. *ogni Δ-morfismo tra modelli di T preserva $\varphi(x)$.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è ovvia, dimostriamo 2⇒1. Da 2, per l'osservazione 9.1, abbiamo la seguente

$$T \ \vdash \ \varphi(x) \leftrightarrow \bigvee_{T\vdash p(x)\to\varphi(x)} p(x)$$

dove $p(x)$ corre su tutti i Δ-tipi. Per compattezza otteniamo

$$T \ \vdash \ \varphi(x) \leftrightarrow \bigvee_{T\vdash \psi(x)\to\varphi(x)} \psi(x)$$

dove $\psi(x)$ corre sulle formule in $\{\wedge\}\Delta$. Ora osserviamo che la disgiunzione infinita può essere sostituita con una finita per compattezza. $\square$

9.3 Lemma *Sia N una struttura λ-satura e sia $k : M \to N$ un Δ-morfismo di cardinalità $< \lambda$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è un $\{\exists\wedge\}\Delta$-morfismo;*
2. *per ogni $b \in M^{<\omega}$ esiste un $\{\exists\wedge\}\Delta$-morfismo $h : M \to N$ tale che $k \subseteq h$ e $b \in \operatorname{dom} h^{<\omega}$.*
3. *come 2 ma con Δ al posto di $\{\exists\wedge\}\Delta$.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Fissiamo una tupla a che enumera $\operatorname{dom} k$ e definiamo $p(x,y) = \{\exists\wedge\}\Delta\text{-tp}_M(a,b)$. Da 1 otteniamo che $p(ka,y)$ è finitamente consistente in N. Per saturazione esiste $b' \in N$ che realizza $p(ka,y)$. Quindi la mappa $h : M \to N$ con $h = k \cup \{\langle b,b'\rangle\}$ prova 2.

L'implicazione 2⇒3 è banale, dimostriamo 3⇒1. Ovviamente 3 implica che $k : M \to N$ è un $\{\wedge\}\Delta$-morfismo. A meno di equivalenza logica, le formule in $\{\exists\wedge\}\Delta$ hanno la forma $\exists y\varphi(x,y)$ dove y è una tupla di variabili e $\varphi(x,y)$ una formula in $\{\wedge\}\Delta$. Supponiamo che $M \vDash \exists y\,\varphi(a,y)$ e fissiamo un b tale che $M \vDash \varphi(a,b)$ poi, per 3, estendiamo k ad un Δ-morfismo $h : M \to N$ definito in b. Allora $N \vDash \varphi(ha,hb)$ e quindi $N \vDash \exists y\,\varphi(ka,y)$. $\square$

9.4 Corollario *Sia N una struttura λ-satura e sia $k : M \to N$ una mappa tale che $|k| < \lambda$ e $|M| \leq \lambda$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è un $\{\exists\wedge\}\Delta$-morfismo;*
2. *$k : M \to N$ si estende ad una Δ-immersione;*
3. *$k : M \to N$ si estende ad una $\{\exists\wedge\}\Delta$-immersione.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 si ottiene iterando $|M| \leq \lambda$ volte l'estensione in 2 del lemma 9.3. L'implicazione 2⇒3 è immediata perché le Δ-immersioni sono automaticamente anche delle $\{\exists\wedge\}\Delta$-immersioni, come verificato nella proposizione 5.25. L'implicazione 3⇒1 è ovvia. $\square$

9.5 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\varphi(x)$ è equivalente ad una formula in $\{\exists\wedge\}\Delta$;*
2. *ogni Δ-immersione tra modelli di T preserva $\varphi(x)$.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è immediata per 5.25. Per dimostrare 2⇒1 assumiamo ¬1. Per il teorema 9.2 esiste un $\{\exists\wedge\}\Delta$-morfismo $k : M \to N$ tra modelli di T che non preserva $\varphi(x)$. Possiamo assumere che N sia λ-saturo con λ sufficientemente grande. Quindi per il corollario 9.4 esiste una Δ-immersione $h : M \to N$ che estende k. Questa immersione testimonia ¬2. $\square$

Ora dimostriamo il duale delle ultime tre proposizioni. Si osservi che, se Δ contiene la formula $x = y$ (il che ci assicura l'iniettività) ed è chiuso per negazione, allora $k : M \to N$ è un Δ-morfismo se e solo se lo è anche $k^{-1} : N \to M$. In questo caso, le seguenti tre propozioni sono solo una riformulazione delle precedenti. Il caso generale richiede una dimostrazione indipendente (ma molto simile).

9.6 Lemma *Sia M una struttura λ-satura e sia $k : M \to N$ un Δ-morfismo di cardinalità $< \lambda$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è un $\{\forall\vee\}\Delta$-morfismo;*
2. *per ogni $c \in N^{<\omega}$ esiste un $\{\forall\vee\}\Delta$-morfismo $h : M \to N$ tale che $k \subseteq h$ e $c \in \operatorname{img} h^{<\omega}$.*
3. *come 2 ma con Δ al posto di $\{\forall\wedge\}\Delta$.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Definiamo $p(x, y) = \neg\{\forall\vee\}\Delta\text{-tp}_N(ka, c)$, dove a una tupla che enumera $\operatorname{dom} k$. Da 1 otteniamo che $p(a, y)$ è finitamente consistente in M. Infatti, in caso contrario esisterebbe una formula $\varphi(z, x)$, congiunzione di formule in $\neg\{\forall\vee\}\Delta$, tale che $N \vDash \varphi(ka, c)$ e $M \vDash \neg\exists x\, \varphi(a, x)$. Ma $\neg\exists x\, \varphi(z, x)$ è equivalente ad una formula in $\{\forall\vee\}\Delta$ e quindi preservata da $k : M \to N$, contraddizione. Quindi per ω-saturazione esiste $c' \in M$ che realizza $p(a, y)$. Posto $h = k \cup \{\langle c', c\rangle\}$, la mappa $h : M \to N$ è quella richiesta in 2.

L'implicazione 2⇒3 è banale, dimostriamo 3⇒1. Ovviamente 3 implica che $k : M \to N$ è un $\{\vee\}\Delta$-morfismo. Ogni formula in $\{\forall\vee\}\Delta$ è logicamente equivalente ad una della forma $\forall y\, \varphi(x, y)$ dove y è una tupla di variabili e $\varphi(x, y)$ una formula in $\{\vee\}\Delta$. Assumiamo $M \vDash \forall y\, \varphi(a, y)$ e sia $c \in N^{|y|}$ arbitrario. Mostriamo che $N \vDash \varphi(ka, c)$. Per 3, estendiamo k ad un Δ-morfismo $h : M \to N$ tale che $c = hc'$ per un qualche $c' \in (\operatorname{dom} h)^{|y|}$. Allora da $M \vDash \varphi(a, c')$ otteniamo $N \vDash \varphi(ha, hc')$ e quindi $N \vDash \varphi(ka, c)$. □

9.7 Corollario *Sia N una struttura λ-satura e sia $k : M \to N$ una mappa tale che $|k| < \lambda$ e $|M| \leq \lambda$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$k : M \to N$ è un $\{\forall\wedge\}\Delta$-morfismo;*
2. *$k : M \to N$ si estende ad un Δ-epimorfismo;*
3. *$k : M \to N$ si estende ad un $\{\exists\wedge\}\Delta$-epimorfismo.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 si ottiene iterando $|M| \leq \lambda$ volte l'estensione in 2 del lemma 9.6. L'implicazione 2⇒3 è immediata perché i Δ-epimorfismi sono automaticamente anche dei $\{\forall\wedge\}\Delta$-epimorfismi, come verificato nella proposizione 5.26. L'implicazione 3⇒1 è ovvia. □

9.8 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\varphi(x)$ è equivalente ad una formula in $\{\forall\vee\}\Delta$;*
2. *ogni Δ-epimorfismo tra modelli di T preserva $\varphi(x)$.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è immediata. Per dimostrare 2⇒1 assumiamo ¬1. Per il teorema 9.2 esiste un $\{\forall\wedge\}\Delta$-morfismo $k : M \to N$ tra modelli di T che non preserva $\varphi(x)$. Possiamo assumere che N sia λ-saturo con λ sufficientemente grande. Quindi per il corollario 9.7 esiste un Δ-epimorfismo $h : M \to N$ che estende k. Questo epimorfismo testimonia $\neg 2$. □

9.9 Esercizio Per ogni enunciato φ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. φ è equivalente modulo T ad un enunciato in $\{\forall\vee\}L_{\rm qf}$;
2. φ è preservato per sottostrutture, ovvero, se $M, N \vDash T$ e $M \subseteq N \vDash \varphi$ allora $M \vDash \varphi$. □

9.2 Un criterio per l'eliminazione dei quantificatori

Diremo che ***T* ammette** (oppure **ha**) **Δ-eliminazione (positiva) dei quantificatori** se per ogni formula $\varphi(x)$ in $\{\forall\exists\wedge\vee\}\Delta$ esiste una formula $\psi(x)$ in $\{\wedge\vee\}\Delta$ tale che

$$T \vdash \ \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x).$$

Diremo semplicemente che T ha eliminazione dei quantificatori, senza menzionare Δ, se questo è l'insieme di tutte le formule senza quantificatori. La relativizzazione dell'eliminazione dei quantificatori a insiemi Δ arbitrari è meno comune e la relativa terminologia non è standard.

Spesso l'eliminazione dei quantificatori viene usata come primo passo per dimostrare la completezza di una teoria. Vale quindi la pena di mettere in risalto la seguente proposizione che si ottiene dalla definizione prendendo per x la tupla vuota.

9.10 Osservazione Se T ha eliminazione dei quantificatori allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. T è completa per gli enunciati senza quantificatori;
2. T è completa.

Quindi, una teoria con eliminazione dei quantificatori è completa se e solo se tutti i suoi modelli hanno la stessa caratteristica (vedi corollario 5.33). □

Il seguente corollario è una conseguenza del lemma 9.2.

9.11 Corollario *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ha Δ-eliminazione dei quantificatori;*
2. *ogni Δ-morfismo finito tra modelli di T è sia un $\{\exists\wedge\}\Delta$ che un $\{\forall\vee\}\Delta$-morfismo.*

Dimostrazione L'implicazione $1\Rightarrow 2$ è ovvia, dimostriamo $2\Rightarrow 1$. Procedendo per induzione sulla sintassi verifichiamo che ogni Δ-morfismo preserva la verità delle formule in $\{\forall\exists\wedge\vee\}\Delta$. Per il lemma 9.2 questo è sufficiente per ottenere 1. Il passo induttivo per i connettivi $\vee$ e $\wedge$ è immediato. Assumiamo come ipotesi induttiva che la verità di $\varphi(x, y)$ sia preservata. Per il lemma 9.2 la formula $\varphi(x, y)$ è equivalente ad una formula in Δ e quindi per 2 anche la verità di $\exists y\, \varphi(x, y)$ e $\forall y\, \varphi(x, y)$ è preservata. □

La condizione 2 del corollario 9.11 è difficile da verificare direttamente quindi si ricorre alle condizioni 3 dei lemmi 9.3 e 9.6.

9.12 Corollario *Sia λ un qualsiasi cardinale infinito $\geq |L|$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ha Δ-eliminazione dei quantificatori.*

2. *per ogni Δ-morfismo finito $k : M \to N$ tra modelli λ-saturi di T:*

   a. *per ogni $b \in M^{<\omega}$ esiste un Δ-morfismo $h : M \to N$ tale che $k \subseteq h$ e $b \in \operatorname{dom} h^{<\omega}$.*

   b. *per ogni $c \in N^{<\omega}$ esiste un Δ-morfismo $h : M \to N$ tale che $k \subseteq h$ e $c \in \operatorname{img} h^{<\omega}$.* □

Si osservi che, se Δ contiene la formula $x = y$ ed è chiuso per negazione, allora $k : M \to N$ è un Δ-morfismo se e solo se lo è anche $k^{-1} : N \to M$. In questo caso a e b sono equivalenti.

9.13 Esercizio Sia R un campo e sia $T_{R\text{-mod}}$ la teoria degli R-moduli (ovvero spazi vettoriali su R) definita nel paragrafo 7.1. Si dia una dimostrazione diretta dell'eliminazione dei quantificatori in $T_{R\text{-mod}}$. Suggerimento: dei modelli saturi di $T_{R\text{-mod}}$ è sufficientemente dimostrare che hanno dimensione $> |R|$.

9.14 Esercizio Il linguaggio è quello degli ordini stretti e la notazione è quella del paragrafo 6.1. Sia T la teoria assiomatizzata da T_{ol} più la seguente coppia di assiomi:

dis↑. $\exists z \left[x < z \wedge \neg \exists y \; x < y < z \right]$;

dis↓. $\exists z \left[z < x \wedge \neg \exists y \; z < y < x \right]$.

Osserviamo che T è la stessa teoria dell'esercizio 8.14 espressa in un linguaggio diverso. Sia Δ un insieme di formule chiuso per negazione, contenente le formule atomiche e quelle della forma $\exists^{=n} y \, (x < y < z)$. Si dimostri che T ha Δ-eliminazione dei quantificatori. Si dimostri che T ha modelli saturi numerabili. □

9.15 Esercizio Sia T una teoria completa in un linguaggio che consiste solo di simboli di relazioni unarie. Si dimostri che T ha eliminazione dei quantificatori. □

Capitolo 10

Geometria e dimensione

10.1 Le teorie fortemente minimali

In qualsiasi struttura gli insiemi finiti e cofiniti (cioè complemento di un insieme finito) sono sempre definibili con parametri nella struttura. Una struttura infinita M si dice **minimale** se tutti i suoi sottoinsiemi di arietà uno, definibili con parametri in M, sono finiti o cofiniti. Questa richiesta viene fatta solo per gli insiemi di arietà uno: già gli insiemi definibili di arietà due potrebbero essere molto complessi.

La nozione di struttura minimale non è elementare: se M è minimale e $N \equiv M$ non è detto che N sia anche minimale. Per questo introduciamo il seguente concetto. Diremo che M è una **struttura fortemente minimale** se è minimale e ogni sua estensione elementare è anche minimale. Vogliamo mostrare che si tratta di una nozione del prim'ordine. Per fare questo introduciamo la versione sintattica della nozione di struttura fortemente minimale. Una teoria T senza modelli finiti si dice **fortemente minimale** se per ogni formula $\varphi(x,z)$, dove x è una singola variabile esiste un $n \in \omega$ tale che

$$T \ \vdash\ \forall z \left[\exists^{\leq n} x\, \varphi(x,z)\ \vee\ \exists^{\leq n} x\, \neg\varphi(x,z)\right].$$

10.1 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *M è una struttura fortemente minimale;*
2. *esiste un modello ω-saturo $N \equiv M$ minimale;*
3. *Th(M) è una teoria fortemente minimale.*

Dimostrazione Le implicazioni 3⇒1⇒2 sono immediate. Per dimostrare 2⇒3, fissiamo una formula $\varphi(x,z)$ ed un modello ω-saturo $N \succeq M$. Consideriamo il tipo

$$p(z)\ =\ \left\{\exists^{>n} x\, \varphi(x,z)\ \wedge\ \exists^{>n} x\, \neg\varphi(x,z)\ :\ n \in \omega\right\}.$$

Poiché N è minimale, $N \nvDash \exists z\, p(z)$, e quindi, siccome N è saturo, $p(z)$ non è finitamente consistente in N. Quindi non lo è nemmeno in M. Ovvero esiste un n tale che

$$M \ \vDash\ \forall z \left[\exists^{\leq n} x\, \varphi(x,z)\ \vee\ \exists^{\leq n} x\, \neg\varphi(x,z)\right].$$

Quindi Th(M) è fortemente minimale. □

10.2 Teorema *Le seguenti teorie sono fortemente minimali:*

1. *la teoria degli insiemi infiniti (nel linguaggio vuoto);*

2. *la teoria degli spazi vettoriali su un campo fissato;*

3. *la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica arbitraria (ma fissata).*

Dimostrazione Vediamo solo 3. Gli altri casi sono simili. Poiché la teoria $T^p_{\rm acf}$ ha eliminazione dei quantificatori, a meno di equivalenza le formule a parametri in A sono combinazione booleana di equazioni del tipo $t(x) = 0$ dove $t(x)$ è un polinomio coefficienti nell'anello generato da A. Quando x è una singola variabile l'equazione $t(x) = 0$ ha un numero finito di soluzioni. Combinazioni booleane di insiemi finiti producono insiemi finiti o cofiniti. □

Non è banale costruire esempi essenzialmente diversi da questi. Per molti anni una famosa congettura, la congettura di Zilber, ne escludeva l'esistenza. Un controesempio (profondo e innovativo) è stato trovato da Hrushovski negli anni ottanta.

10.3 Esercizio Fissiamo un'arbitraria teoria completa T senza modelli finiti. E sia N un modello ω-saturo di T. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. M è minimale;

2. $a \equiv_M b$ per ogni coppia di elementi $a, b \in N \smallsetminus M$. □

10.2 La chiusura algebrica

Fissiamo una arbitraria teoria completa T con un modello infinito e assumiamo la notazione presentata nel paragrafo 8.3.

Sia $\varphi(x)$ una formula (quindi con parametri arbitrari in $\mathcal{U}$). Diremo che $\varphi(x)$ è una **formula algebrica** se ha un numero finito di soluzioni, cioè se vale $\exists^{\leq n} x\, \varphi(x)$ per un qualche $n \in \omega$. Un **tipo algebrico** è un tipo con un numero finito di soluzioni.

10.4 Proposizione *Per ogni tipo $p(x)$, con x di lunghezza finita, le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1 *$p(x)$ è algebrico;*

2 *esiste formula algebrica $\varphi(x)$ che è congiunzione di formule in $p(x)$.*

Dimostrazione Dimostriamo la direzione non banale 1⇒2. Supponiamo che $p(x)$ sia algebrico, diciamo non ha più di n soluzioni. Allora seguente tipo è incoerente

$$\bigcup_{j<i<n} \big[p(x_i) \cup \{x_i \neq x_j\}\big]$$

dove le x_i sono tuple di variabili distinte della lunghezza di x. Quindi esiste una formula $\varphi(x)$, congiunzione di formule in $p(x)$, tale che

$$\varphi(x_0) \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ \varphi(x_n)\ \wedge \bigwedge_{j<i\leq n} x_i \neq x_j.$$

è incoerente. Ma questo dice che $\varphi(x)$ ha al più n soluzioni. □

Sia a un elemento e sia A un insieme di parametri. Diremo che a è un **elemento algebrico su A** se è soluzione di una qualche formula algebrica con parametri in A. Equivalentemente (grazie a 10.4), se ${\rm tp}(a/A)$ è un tipo algebrico. L'insieme degli elementi algebrici su A è detto **chiusura algebrica** di A e si denota con **acl A**. Un insieme A si dice **algebricamente chiuso** se $A = \operatorname{acl} A$. Tutti i modelli sono algebricamente chiusi (dovrebbe essere immediato, altrimenti si veda il teorema 10.6) e gli insiemi algebricamente chiusi sono delle sottostrutture (perché la formula $t(a) = x$ è algebrica).

La definizione di chiusura algebrica non richiede che A abbia cardinalità piccola ed occasionalmente potremo scrivere $\operatorname{acl}(\mathcal{A})$ per un qualsiasi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$. Comunque i seguenti teoremi richiedono che A sia un insieme piccolo.

Dalla dimostrazione del teorema 10.2 è chiaro che nei campi algebraicamente chiusi la chiusura algebrica di A coincide con l'insieme delle soluzioni di equazioni polinomiali in una variabile a coefficienti nell'anello generato da A, quindi con l'usuale nozione di chiusura algebrica che si incontra in algebra. Per la teoria degli spazi vettoriali su un campo K la chiusura algebrica coincide con il sottospazio vettoriale generato dal campo di scalari K. Per le teorie T_{oldse} e T_{rg} la chiusura algebrica di A è semplicemente A.

Diremo che a è una **tupla algebrica su A** se tutti i suoi elementi sono algebrici su A.

10.5 Lemma *Ogni una tupla finita algebrica su A è soluzione di una formula algebrica su A.*

Dimostrazione Sia $a_0, \ldots, a_{n-1}$ una tupla algebrica su A. Fissiamo per ogni $i < n$ una formula $\varphi_i(x_i)$ algebrica su A, diciamo con al più n_i soluzioni. Allora

$$\bigwedge_{i<n} \varphi_i(x_i) \qquad\qquad \text{ha al più} \quad \prod_{i<n} n_i \quad \text{soluzioni.} \qquad \square$$

Il seguente teorema da un'importante caratterizzazione semantica della nozione di algebricità.

10.6 Teorema *Sia A un insieme di parametri e sia a un elemento. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1 *a è algebrico su A;*

2 *$\mathrm{O}(a/A)$ è un insieme finito;*

3 *a appartiene ad ogni modello che contiene A.*

Dimostrazione L'equivalenza $1 \Leftrightarrow 2$ è ovvia per la proposizione 10.4 se si ricorda che $p(\mathcal{U}) = \mathrm{O}(a/A)$ dove $p(x) = \operatorname{tp}(a/A)$ (cfr. 8.17). Dimostriamo $1 \Rightarrow 3$. Supponiamo che a sia algebrico su A. Sia $\varphi(x)$ una formula a parametri in A tale che $\varphi(a) \wedge \exists^{=n} x\, \varphi(x)$ per un qualche n. Se M contiene A allora $\exists^{=n} x\, \varphi(x)$ vale anche in M. Per elementarità, se c è una soluzione di $\varphi(x)$ in $\mathcal{U}$ lo è anche in M e quindi $\varphi(x)$ ha le stesse soluzioni in M ed in $\mathcal{U}$. Quindi $a \in M$.

Dimostriamo $\neg 2 \Rightarrow \neg 3$. Supponiamo che $\mathrm{O}(a/A)$ sia infinita quindi, per il teorema 8.34, ha la stessa cardinalità di $\mathcal{U}$. Vogliamo trovare un modello che contenga A ma non contenga a. Fissiamo un arbitrario modello M che contiene A. Per questioni di cardinalità, $\mathrm{O}(a/A) \nsubseteq M$, e quindi esiste un automorfismo $f \in \operatorname{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $fa \notin M$. Allora $a \notin f^{-1}[M]$ e quindi $f^{-1}[M]$ è il modello richiesto. $\square$

Riassumiamo alcune delle proprietà dell'operatore di chiusura algebrica. I punti 1-4 dicono che un operatore di chiusura di carattere finito. L'affermazione in 1 è ovvia, le altre seguono immediatamente dalla 5 che è una riformulazione dell'equivalenza $1 \Leftrightarrow 3$ del teorema 10.6.

10.7 Corollario *Sia A un arbitrario insieme di elementi reali.*

1. *Se $a \in \operatorname{acl} A$ allora $a \in \operatorname{acl} B$ per un qualche $B \subseteq A$ finito;* ***carattere finito***
2. *$A \subseteq \operatorname{acl} A$;*
3. *$\operatorname{acl} A = \operatorname{acl}(\operatorname{acl} A)$;* ***transistività***
4. *se $A \subseteq B$ allora $\operatorname{acl} A \subseteq \operatorname{acl} B$;* ***monotonicità***
5. *$\operatorname{acl} A = \bigcap_{A \subseteq M} M$.* □

Il seguente lemma è reminiscente della proposizione 5.32 dimostrata per le immersioni parziali. La differenza principale è che ora l'estensione non è unica.

10.8 Lemma *Se $h \in Aut(\mathfrak{U})$ allora $h[\operatorname{acl}(A)] = \operatorname{acl}(h[A])$ per ogni $A \subseteq \mathfrak{U}$.*

Dimostrazione Per verificare l'inclusione $\subseteq$, fissiamo $c \in \operatorname{acl}(A)$ e mostriamo che $hc \in \operatorname{acl}(h[A])$. Sia $\varphi(a, x)$, con a una tupla in A, una formula algebrica soddisfatta da c. Per elementarità $\varphi(ha, x)$ è una formula algebrica su $h[A]$ soddisfatta da hc. Quindi $hc \in \operatorname{acl}(h[A])$. Per l'inclusione inversa, applichiamo quanto dimostrato sopra all'automorfismo h^{-1} ed all'insieme $h[A]$ ottenendo $h^{-1}[\operatorname{acl}(h[A])] \subseteq \operatorname{acl}(A)$. Agendo con h su entrambi gli insiemi, otteniamo $\operatorname{acl}(h[A]) \subseteq h[\operatorname{acl}(A)]$ come richiesto. □

10.9 Esercizio Si dimostri la seguente affermazione:

a. per ogni formula algebrica $\varphi(x)$ a parametri in $\operatorname{acl} A$ esiste una formula algebrica $\psi(x)$ a parametri in A tale che $\varphi(x) \to \psi(x)$.

L'affermazione a è una conseguenza del punto 3 del corollario 10.7. Si suggerisce di trovare una dimostrazione sintattica. (È anche facile verificare che 3 segue da a.) □

10.10 Esercizio Sia $\varphi(z) \in L(A)$ una formula consistente. Si dimostri che se $b \in \operatorname{acl}(A, a)$ per ogni $a \vDash \varphi(z)$ allora $b \in \operatorname{acl}(A)$. □

10.11 Esercizio Lavoriamo all'interno di un modello $\mathfrak{U}$ saturo e di cardinalità grande. Si dimostri che per ogni $A \subseteq N$ esiste un M tale che $\operatorname{acl} A = M \cap N$. Suggerimento: si dimostri il seguente fatto: alla costruzione usata per dimostrare il Löwenheim-Skolem all'ingiù 3.40 bisogna aggiungere la condizione $\operatorname{acl}(A_i) \cap N \subseteq \operatorname{acl}(A)$. Bisogna prima dimostrare che, data l'ipotesi induttiva, ogni $\varphi(x) \in L(A_i)$ consistente è soddisfatta da un qualche a tale che $\operatorname{acl}(A_i, a) \cap N \subseteq \operatorname{acl}(A)$. L'elemento a deve soddisfare il tipo

$$\{\varphi(x)\} \ \cup \ \{\psi(b, x) \to \neg\exists^{\leq n} y\, \psi(y, x) \ : \ b \in N \smallsetminus \operatorname{acl}(A), \quad \psi(y, x) \in L(A_i), \quad n \leq \omega\}$$

la cui consistenza dev'essere verificata (serve esercizio 10.10). □

10.12 Esercizio Fissiamo un'arbitraria teoria completa T senza modelli finiti. Sia $N \vDash T$ saturo. Si dimostri che esiste un modello $M \prec N$ isomorfo ad N. Suggerimento: bisogna prima dimostrare che N contiene un elemento a non algebrico. Poi, bisogna costruire un modello $M \preceq N$ saturo e della stessa cardinalità di N basandosi sulla procedura di Löwenheim-Skolem all'ingiù 3.40. Gli elementi da aggiungere al passo $i+1$-esimo dovranno soddisfare la condizione $a \notin \operatorname{acl} A_{i+1}$. □

10.3 Indipendenza e dimensione

Fissiamo una arbitraria teoria completa T fortemente minimale e assumiamo la notazione presentata nel paragrafo 8.3. L'ipotesi di minimalià forte verrà ripetuta per enfasi negli enunciati dei principali teoremi.

Sia a un elemento. Diremo che a è **(algebricamente) indipendente** da B se $a \notin \operatorname{acl} B$. Diremo che B è un **insieme (algebraicamente) indipendente** se ogni elemento $a \in B$ è indipendente da $B \smallsetminus \{a\}$. Abbrevieremo $B \cup \{a\}$ con $\boldsymbol{B, a}$ e $B \smallsetminus \{a\}$ con $\boldsymbol{B \smallsetminus a}$.

Diremo che l'**indipendenza algebrica è simmetrica** se per ogni insieme B e per ogni coppia di elementi $a, b \notin \operatorname{acl} B$ vale la seguente equivalenza

$$b \notin \operatorname{acl}(B, a) \quad \Leftrightarrow \quad a \notin \operatorname{acl}(B, b) \qquad \textbf{simmetria}$$

Nei campi algebraicamente chiusi questa proprietà è ben nota: si chiama **principio dello scambio di Steinitz**. La simmetria è la proprietà caratterizzante delle teoria fortemente minimali (ma qui dimostriamo solo che vale).

10.13 Teorema (principio dello scambio) *Supponiamo che T sia fortemente minimale allora l'indipendenza algebrica è simmetrica.*

Dimostrazione Supponiamo che $b \notin \operatorname{acl}(B, a)$ ed $a \in \operatorname{acl}(B, b)$. Mostriamo che $a \in \operatorname{acl} B$. Sia $\varphi(x, y)$ una formula con parametri in B tale che

$$\varphi(b, a) \ \wedge \ \exists^{\leq n} y \, \varphi(b, y).$$

Poiché $b \notin \operatorname{acl}(B, a)$, allora la formula

$$\psi(x, a) \ = \ \varphi(x, a) \ \wedge \ \exists^{\leq n} y \, \varphi(x, y)$$

ha infinite soluzioni quindi, per la minimalità forte, vale per quasi tutti gli x. Quindi ogni modello che contiene B contiene anche una soluzione di $\psi(x, a)$. Ma a è algebrico in una qualsiasi di queste soluzioni e quindi a è contenuto in tutti i modelli che contengono B. Quindi $a \in \operatorname{acl} B$. □

Diremo che $B \subseteq A$ è una **base** di A se B è un insieme indipendente ed $A \subseteq \operatorname{acl} B$. Il prossimo teorema dimostra che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Chiameremo questa cardinalità la **dimensione** di A e la denoteremo con $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{A}$. Abbiamo prima bisogno del seguente lemma.

10.14 Lemma *Sia B un insieme indipendente e sia $a \notin \operatorname{acl} B$. Allora B, a è un insieme indipendente.*

Dimostrazione Se B, a non fosse indipendente, allora $b \in \operatorname{acl}(B \smallsetminus b, a)$ per qualche $b \in B$. Poiché $a, b \notin \operatorname{acl}(B \smallsetminus b)$ possiamo applicare il principio dello scambio per ottenere $a \in \operatorname{acl}(B \smallsetminus b, b) = \operatorname{acl} B$, contrariamente alle ipotesi. □

10.15 Corollario *Sia $B \subseteq A$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *B è una base di A.*
2. *B è un sottoinsieme massimale indipendente.* □

Scriveremo $\mathbf{acl}(\boldsymbol{B/A})$ per $\operatorname{acl}(B \cup A)$. Una notazione che ha lo scopo di suggerire che stiamo interpretando gli elementi di A come costanti in un'espansione del linguaggio. L'operatore di chiusura algebrica su A gode esattamente delle stesse proprietà della chiusura algebrica. Le nozioni di indipendenza, base, e dimensione su A si generalizzano nel modo ovvio.

10.16 Teorema *Fissiamo un insieme arbitrario C. Allora:*

1 *ogni sottinsieme indipendente può essere esteso ad una base di C;*

2 *tutte le basi di C hanno la stessa cardinalità;*

3 *le asserzioni 1 e 2 valgono anche su un qualsiasi insieme parametri A.*

Dimostrazione Per dimostrare 1, si può usare il lemma di Zorn per ottenere un insieme indipendente massimale. Per il corollario 10.15 quest'insieme massimale è una base. Alternativamente possiamo costruire una base come unione di una catena $\langle D_i : i < \lambda \rangle$ di insiemi indipendenti di lunghezza al più $|C|$. La catena comincia con $D = D_0$ e al passo $i+1$ si definisce $D_{i+1} = D_i, d$ dove $d \in C \smallsetminus \operatorname{acl} D_i$. Per il lemma 10.14 questo è un insieme indipendente. Ai passi limite si prende l'unione. In questo caso si ottiene un insieme indipendente per il carattere finito della chiusura algebrica. Questo dimostra 1. La generalizzazione di questa affermazione come richiesto al punto 3 è immediata.

Per dimostrare che due basi hanno la stessa cardinalità supponiamo per assurdo che B_1 e B_2 siano due basi e che $|B_1| < |B_2|$. Trattiamo prima il caso in cui B_2 è infinito. Per ogni elemento $b \in B_1$ scegliamo un insieme finito $D_b \in B_2$ tale che $b \in \operatorname{acl}(D_b)$. Sia

$$D = \bigcup_{b \in B_2} D_b$$

Quindi $B_1 \subseteq \operatorname{acl} D$ e $|D| < |B_2|$ (in quanto unione de cardinalità $|B_2|$ di insiemi finiti). Per la transitività della chiusura algebrica, $C \subseteq \operatorname{acl} D$ e questo contraddice l'indipendenza di B_2 perché $B_2 \smallsetminus D$ è non vuoto. Anche questo argomento si generalizza immediatamente come richiesto in 3.

Supponiamo ora che B_2 sia finito. Conviene dimostrare direttamente l'affermazione generalizzata come in 3. Supponiamo per assurdo che esistano B_1 e B_2, basi di C su un qualche A, tali che $|B_1| < |B_2| = n+1$. Supponiamo che n sia il minimo ottenibile anche al variare di A.

Sia $c \in B_2$ un elemento qualsiasi e sia $D_2 = B_2 \smallsetminus c$. Chiaramente D_2 è una base di C su A, c di cardinalità n. Sia $D_1 \subseteq B_1$ massimale indipendente su A, c. Si osservi che $c \in \operatorname{acl}(B_1 / A) \smallsetminus \operatorname{acl} A$ e quindi per simmetria (vedi esercizio 10.22) B_1 non è indipendente su A, c, e quindi $|D_1| < |B_1|$. Allora $|D_1| < |D_2| = n$, che contraddice la minimalità di n. □

10.17 Teorema *Sia k una mappa elementare, sia $a \notin \operatorname{acl}(\operatorname{dom} k)$ e $b \notin \operatorname{acl}(\operatorname{img} k)$. Allora $k \cup \{\langle a, b \rangle\}$ è una mappa elementare.*

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che per ogni c, tupla di elementi di $\operatorname{dom} k$, e per ogni formula pura $\varphi(x, y)$, vale $\varphi(c, a) \leftrightarrow \varphi(kc, b)$. Essendo k elementare le formule $\varphi(c, y)$ e $\varphi(kc, y)$ sono entrambe algebriche o entrambe non algebriche. Nel primo caso, per l'indipendenza di a e b da $\operatorname{dom} k$, rispettivamente $\operatorname{img} k$, avremo $\neg\varphi(c, a)$ e $\neg\varphi(kc, b)$. Nel secondo caso, sempre per l'indipendenza, avremo $\varphi(c, a)$ e $\varphi(kc, b)$. □

10.18 Corollario *Ogni biiezione tra insiemi indipendenti è una mappa elementare.* □

Finalmente enunciamo il teorema fondamentale che classifica i modelli di T.

10.19 Teorema *Sia T una teoria fortemente minimale. Due modelli di T con la stessa dimensione sono isomorfi.*

Dimostrazione Siano A e B basi rispettivamente di M ed N che per ipotesi hanno la stessa cardinalità. Sia f una qualsiasi mappa iniettiva con $\operatorname{dom} f = A$ ed $\operatorname{img} f = B$. Per il corollario 10.18, f è una mappa elementare e, per il lemma 10.8, ha un'estensione ad una mappa elementare h con $\operatorname{dom} h = \operatorname{acl} A = M$ ed $\operatorname{img} h = \operatorname{acl} B = N$. Quindi $h : M \to N$ è l'isomorfismo richiesto. □

10.20 Corollario *Le teorie fortemente minimali sono λ-categoriche per ogni $\lambda > |L| + \omega$.*

Dimostrazione È sufficiente osservare che $|\operatorname{acl} A| \leq |L| + |A| + \omega$ e che quindi i modelli di cardinalità λ non possono che avere tutti dimensione λ e quindi essere isomorfi. □

10.21 Teorema *Sia T una teoria fortemente minimale. Allora per ogni modello N di cardinalità $\geq |L|$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è saturo;*
2. $\dim N = |N|$.

Dimostrazione Dimostriamo 2⇒1. Mostriamo che ogni mappa elementare $k : M \to N$ tale che $|k| < |M|$ e $|M| \leq |N|$ si estende ad un'immersione elementare. Sia A una base di M su $\operatorname{dom} k$. E sia $B \subseteq N$ un insieme indipendente su $\operatorname{img} k$ di cardinalità $|A|$. Un tale B esiste perché per ipotesi $|A| \leq |M| \leq |N| = \dim N$. Sia a un'enumerazione di A e sia b una enumerazione di B della stessa lunghezza. Per il teorema 10.17, iterato $|a|$ volte, la mappa $k \cup \{\langle a, b \rangle\}$ è elementare. Quindi dal lemma 10.8 otteniamo l'immersione richiesta. Per dimostrare $1 \Rightarrow 2$ fissiamo una base B e osserviamo che il tipo

$$p(x) \quad = \quad \Big\{ \neg\varphi(x) \ : \ \varphi(x) \text{ algebrica a parametri in } B \Big\}$$

non è realizzato in N perché $N \subseteq \operatorname{acl} B$. Ma $p(x)$ è ovviamente finitamente consistente perché N è infinito, mentre qualsiasi disgiunzione finita di formule algebriche a parametri in B ha chiaramente un numero finito di soluzioni. Quindi se N è saturo $|B| = |N|$. □

10.22 Esercizio Sia T una teoria fortemente minimale. Si dimostri che se $c \in \operatorname{acl}(B/A) \smallsetminus \operatorname{acl} A$ allora esiste un $b \in B$ tale che $b \in \operatorname{acl}(B \smallsetminus b/A, c)$. □

10.23 Esercizio Sia T una teoria fortemente minimale. Si dimostri che ogni insieme infinito algebricamente chiuso è un modello. □

10.24 Esercizio Sia T una teoria fortemente minimale. Si dimostri che ogni modello è omogeneo. □

10.25 Esercizio Sia T una teoria fortemente minimale. Siano $M \preceq N$ tali che $\dim N = \dim M + 1$. Si dimostri che non esiste un modello K tale che $M \prec K \prec N$. □

Capitolo 11

Modelli numerabili

Il primo paragrafo è dedicato al teorema di omissione dei tipi. Un risultato classico fondamentale per lo studio dei modelli numerabili ed in particolare delle teorie ω-categoriche. La dimostrazione è breve ma un po' criptica, tanto da ispirare un celebre aforisma di Gerard Sacks: *any fool can realize a type, but it takes a model-theorist to omit one.*

Di nuovo, non prenderemo la via più breve per dimostrare il teorema (il teorema di omissione dei tipi prende una pagina del libro di Tent-Ziegler). Invece presenteremo una dimostrazione alternativa che dovrebbe convincere il lettore che si tratta di un risultato più vicino alla teoria descrittiva degli insiemi che alla teoria dei modelli. Un'altra differenza rispetto alle esposizioni tradizionali è che, invece di lavorare con tutte le formule in $L(A)$, lavoreremo con un insieme di formule Δ non necessariamente chiuso per negazione, i teoremi rilevanti valgono solo sotto l'ipotesi Δ={$\forall\wedge\vee$}Δ. L'intento è di rendere più visibile la natura topologica dell'argomento (che viene un po oscurata se si assume che i chiusi di base siano anche aperti). Esistono casi in cui questa generalizzazione è necessaria (per esempio, nella logica continua che è essenzialmente una logica positiva) ma questi non verranno trattati qui. La nozione di Δ-modello (essenziale solo se si vuole studiare logica positiva) è comunque di interesse culturale.

Chi ritenesse l'approccio inutilmente tedioso (o fosse infastidito dalle troppe negazioni) può *omettere* il primo paragrafo svolgendo però l'esercizio 11.11.

Il secondo ed il terzo paragrafo sono una classica introduzione alle teorie ω-categoriche. L'ultimo paragrafo è da considerarsi come un esercizio svolto.

11.1 Teorema di omissione dei tipi

Fissiamo un modello infinito $\mathcal{U}$ in cui valuteremo la verità di tutte le formule (non c'è alcuna assunzione implicita di saturazione); eventuali variabili libere si sottintendono quantificate *universalmente*. Per affermare la verità della chiusura *esistenziale* di una formula diremo che questa è *consistente*. Diremo che una formula è **non banale** se la sua negazione e consistente. Quando diremo che l'insieme di formule Δ è numerabile, sottintenderemo sempre: modulo equivalenza in $\mathcal{U}$.

11.1 Definizione *Fissiamo* Δ={$\wedge\vee$}$\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$*, una tupla di variabili* x*, e sia* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|x|}$ *un insieme arbitrario. Diremo che* $\mathcal{D}$ *è* ***Δ-denso*** *se per ogni* $\psi(x) \in \Delta$ *non banale* $\neg\psi(x) \wedge x \in \mathcal{D}$ *è* *consistente. Diremo che $\mathcal{D}$ ha* ***interno Δ-denso*** *in se per ogni $\psi(x) \in \Delta$ non banale esiste $\varphi(x) \in \Delta$ non banale tale che $\neg\varphi(x) \to x \in \mathcal{D} \wedge \neg\psi(x)$.*

Un insieme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^{|x|}$ si dice ***Δ-comagro*** *se è intersezione di una famiglia numerabile di insiemi con interno Δ-denso. Diremo che $\mathcal{U}^{|x|}$ è* ***Δ-Baire*** *se ogni suo sottoinsieme Δ-comagro è Δ-denso.* □

11.2 Definizione *Fissiamo $\Delta = \{\wedge\vee\}\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$ ed una tupla di variabili x. Se $\mathcal{U}$ realizza ogni Δ-tipo $p(x)$ finitamente consistente in $\mathcal{U}$, diremo che $\mathcal{U}^{|x|}$ è* ***Δ-compatto****.* □

Dati $a, b \in \mathcal{U}^{|x|}$, scriveremo $a \equiv_\Delta b$ quando $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$ per ogni $\varphi(x) \in \Delta$. La tupla x non compare nella notazione ma sarà fissata dal contesto. Per la notazione $\vee\Delta$, $\neg\Delta$, ecc., si rimanda al paragrafo 9.1.

11.3 Definizione *Fissiamo $\Delta = \{\wedge\vee\}\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$ ed una tupla di variabili x. Se per ogni $a, b \in \mathcal{U}^{|x|}$ tali che $a \not\equiv_\Delta b$ esistono due formule $\varphi(x), \psi(x) \in \Delta$ tali che $\neg\varphi(a) \wedge \neg\psi(b)$ e $\neg\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ è inconsistente, diremo che $\mathcal{U}^{|x|}$ è* ***Δ-Hausdorff****.* □

Si noti che la precedente definizione è rilevante quando Δ non è chiuso per negazione, perché $a \not\equiv_\Delta b$ significa che esiste $\gamma(x) \in \Delta$ tale che vale $\gamma(a) \wedge \neg\gamma(b)$, quindi basta prendere $\varphi = \gamma$ e $\psi = \neg\gamma$.

Possiamo associare a Δ una topologia su $\mathcal{U}^{|x|}$. Una base di chiusi della topologia è formata dagli insiemi della forma $\varphi(\mathcal{U})$ per $\varphi(x) \in \Delta$. I chiusi sono quindi gli insiemi definiti da Δ-tipi $p(x)$. Le nozioni di insieme denso o con interno denso, e di spazio compatto definite qui sopra coincidono con quelle usuali in topologia. Solo la definizione 11.3 si allontana da quella standard in topologia (per la nozione standard avremmo dovuto usare $a \neq b$ invece di $a \not\equiv_\Delta b$). Infatti, a parte casi banali, in $\mathcal{U}^{|x|}$ esistono sempre coppie di elementi distinti $a \equiv_\Delta b$ che quindi hanno gli stessi intorni aperti. Questo mostra che $\mathcal{U}^{|x|}$ non soddisfa l'assioma di separazione T_0. Ma la differenza è innocua, perché si verifica facilmente che la richiesta in 11.3 implica che la topologia indotta sul quoziente $\mathcal{U}^{|x|}/\equiv_\Delta$ soddisfa l'usuale assioma di separazione T_2.

Nelle applicazioni in questo capitolo $\mathcal{U}$ è un modello saturo e $\Delta = L(A)$. Come $\mathcal{D}$ prenderemo un insieme della forma $\neg p(\mathcal{U})$ con $p(x) \subseteq L(A)$. Vedi 11.10. Avere interno $L(A)$-denso si riduce all'esistenza di una formula $\varphi(x) \in Ł(A)$ tale che $\varphi(x) \to p(x)$.

In topologia generale la seguente proprietà è detta **regolarità** e segue dalla proprietà di Hausdorff e dalla compattezza (ed è assolutamente ovvia quando Δ è chiuso per negazione). La dimostrazione ripete l'argomento usato in topologia ed è riportata solo per completezza.

11.4 Proposizione *Fissiamo $\Delta = \{\wedge\vee\}\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$ ed una tupla di variabili x tali che $\mathcal{U}^{|x|}$ sia Δ-Hausdorff e Δ-compatto. Allora per ogni $\xi(x) \in \Delta$ non banale esistono $\varphi(x), \psi(x) \in \Delta$, dove $\psi(x)$ è non banale, tali che $\neg\psi(x) \to \varphi(x)$ e $\varphi(x) \to \neg\xi(x)$.*

Dimostrazione Fissiamo un arbitrario $b \vDash \neg\xi(x)$ e sia

$$q(x) \quad = \quad \Big\{\varphi(x) \in \Delta \ : \ \neg\psi(x) \to \varphi(x) \text{ per qualche } \psi(x) \in \Delta \text{ tale che } \neg\psi(b)\Big\}.$$

Mostriamo che se $a \vDash q(x)$ allora $a \equiv_\Delta b$. Se $a \not\equiv_\Delta b$ dalla definizione 11.3 otteniamo due formule $\psi(x), \varphi(x) \in \Delta$ tali che $\neg\psi(x) \to \varphi(x)$ e $\neg\psi(b) \wedge \neg\varphi(a)$. Quindi $a \nvDash q(x)$. Ora verifichiamo che $q(x) \wedge \xi(x)$ è inconsistente: se per assurdo esistesse $a \vDash q(x) \wedge \xi(x)$, per quanto dimostrato sopra, $a \equiv_\Delta b$ contraddicendo $\neg\xi(b)$. Quindi $q(x) \vdash \neg\xi(x)$

Per compattezza, otteniamo $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x) \in q(x)$ tali che

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \ \rightarrow\ \neg\xi(x).$$

Dalla definizione di $q(x)$ otteniamo $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x) \in \Delta$ tali che

$$\text{i.}\qquad \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\psi_i(x) \ \rightarrow\ \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x).$$

L'antecedente in i è soddisfatto da b, quindi la formula $\bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ è non banale, come richiesto. □

11.5 Teorema *Fissiamo $\Delta = \{\wedge\vee\}\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$ ed una tupla di variabili x. Entrambe le seguenti ipotesi implicano che $\mathcal{U}^{|x|}$ è Δ-Baire:*

1. *$\mathcal{U}^{|x|}$ è Δ-Hausdorff e Δ-compatto.*
2. *$\mathcal{U}^{|x|}$ è $\neg\Delta$-compatto.*

Dimostrazione Siano $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{U}^{|x|}$, per $i \in \omega$, insiemi con interno Δ-denso. Fissiamo una formula $\xi(x) \in \Delta$ non banale. Usando ripetutamente il lemma 11.4 possiamo costruire due sequenze di formule $\varphi_i(x), \psi_i(x) \in \Delta$ tali che $\neg\psi_{i+1}(x) \rightarrow \varphi_i(x)$ e $\varphi_i(x) \rightarrow \neg\psi_i(x)$. Inoltre per la densità di $\mathcal{D}_i$ possiamo richiedere che $\psi_0(x) = \xi(x)$ e $\neg\psi_{i+1}(x) \rightarrow x \in \mathcal{D}_i$. Il tipo $\{\varphi_i(x) : i \in \omega\}$ è finitamente consistente, quindi per compattezza realizzato in $\mathcal{U}$. Una qualsiasi sua realizzazione appartiene sia a $\neg\xi(\mathcal{U})$ che a tutti gli insiemi $\mathcal{D}_i$.

La costruzione è più semplice assumendo 2: è sufficiente costruire la sequenza di formule $\neg\psi_i(x)$ e appellarsi alla $\neg\Delta$-compattezza. I dettagli vengono lasciati al lettore. □

Scriveremo **$\Delta(b)$** per l'insieme delle formule della forma $\xi(x, b)$ per qualche $\xi(x, z) \in \Delta$ e indicheremo con **$\Delta(A)$** l'unione di $\Delta(b)$ con b che corre tra le tuple di elementi di A (di lunghezza arbitraria). Scriveremo

$$\text{m.}\qquad \boldsymbol{M \preceq_\Delta \mathcal{U}} \qquad\qquad \text{se } M^{|x|} \cap \neg\varphi(\mathcal{U}) \neq \varnothing \text{ per ogni } \varphi(x) \in \Delta(M) \text{ non banale.}$$

A parole, diremo che $M \subseteq \mathcal{U}$ è un **Δ-modello**. Osserviamo che $M \subseteq \mathcal{U}$ è un Δ-modello se e solo se $M^{|x|}$ è **$\Delta(M)$-denso**.

Quando $\Delta = L$ allora $M \preceq_\Delta \mathcal{U}$ si riduce a $M \preceq \mathcal{U}$. Infatti la condizione in m è quella richiesta dal test di Tarki-Vaught. Quando $\Delta = L(A)$ la condizione in m è equivalente a $A \subseteq M \preceq \mathcal{U}$. Infatti, se Δ contiene la formula $a \neq x'$, con x' una variabile in x, allora gli insiemi Δ-densi contengono a.

Se Δ contiene tutte le formule della forma $fz \neq x'$, con f simbolo di funzione, allora i Δ-modelli sono sottostrutture di $\mathcal{U}$. Un caso notevole è quando $\Delta = L_{\mathrm{qf}}$, allora per $M \preceq_\Delta \mathcal{U}$ a volte si scrive $M \preceq_1 \mathcal{U}$, a parole si dice che M è una **sottostruttura 1-elementare** di $\mathcal{U}$, oppure che M è **esistenzialmente chiusa** in $\mathcal{U}$. Un termine alternativo per Δ-modello potrebbe essere struttura **$\neg\Delta$-esistenzialmente chiusa** in $\mathcal{U}$ (ma qui optiamo per il termine più breve).

11.6 Lemma *Fissiamo $\Delta = \{\forall\wedge\vee\}\Delta \subseteq L(\mathcal{U})$ numerabile. Fissiamo anche due tuple di variabili x e z. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|x|}$ un insieme con interno Δ-denso. Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ l'insieme dei b tali che $\mathcal{D}$ ha interno $\Delta(b)$-denso. Allora $\mathcal{B}$ è Δ-comagro.*

Dimostrazione Esplicitando la definizione, notiamo che $\mathcal{B}$ è formato dalle tuple b tali tali che per ogni $\xi(x, z) \in \Delta$ vale una delle seguenti due alternative:

b1. $\neg\xi(x,b)$ è inconsistente;

b2. esiste $\varphi(x,z)\in\Delta$ non banale tale che $\neg\varphi(x,b)\to x\in\mathcal{D}\wedge\neg\xi(x,b)$.

Sia $\mathcal{B}_\xi$ l'insieme delle tuple b che soddisfano b1 e b2 per $\xi(x,z)$ fissata. È sufficiente mostrare che ogni $\mathcal{B}_\xi$ ha interno Δ-denso (perché allora $\mathcal{B}=\bigcap_{\xi\in\Delta}\mathcal{B}_\xi$, e Δ numerabile per ipotesi). Fissiamo quindi un arbitraria $\psi(z)\in\Delta$ non banale, dobbiamo esibire una $\sigma(z)\in\Delta$ non banale tale che

c. $\neg\sigma(z)\to z\in\mathcal{B}_\xi\wedge\neg\psi(z)$.

Consideriamo due casi. Se $\neg\psi(z)\wedge\neg\xi(x,z)$ è inconsistente, allora $\neg\psi(z)\to z\in\mathcal{B}_\xi$ per b1, e quindi c è realizzata con $\psi(z)$ per $\sigma(z)$. Se invece $\neg\psi(z)\wedge\neg\xi(x,z)$ è consistente, allora usiamo che $\mathcal{D}$ ha interno Δ-denso per ottenere $\varphi(x)\in\Delta$ non banale tale che

d. $\neg\varphi(x)\to x\in\mathcal{D}\wedge\exists z\,[\neg\psi(z)\wedge\neg\xi(x,z)]$.

Si noti che la formula $\exists z\,[\neg\psi(z)\wedge\neg\xi(x,z)]$ sta in $\neg\Delta$ grazie all'ipotesi $\Delta=\{\forall\wedge\vee\}\Delta$. Ora scegliamo come $\neg\sigma(z)$ la formula $\exists x\,[\neg\varphi(x)\wedge\neg\psi(z)\wedge\neg\xi(x,z)]$ che è consistente per d. Verifichiamo c. La verità di $\neg\sigma(z)\to\neg\psi(z)$ è immediata da d. Per verificare $\neg\sigma(z)\to z\in\mathcal{B}_\xi$, fissiamo un b tale che $\neg\sigma(b)$, ovvero tale che $\neg\varphi(x)\wedge\neg\psi(b)\wedge\neg\xi(x,b)$ è consistente. Quindi $b\in\mathcal{B}_\xi$ perché, di nuovo per d, la formula $\neg\varphi(x)\wedge\neg\psi(b)$ soddisfa quanto richiesto da b2. □

11.7 Corollario *Sotto le ipotesi del lemma 11.6 e con la stessa notazione. Se $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{U}^{|x|}$ è un insieme Δ-comagro, allora l'insieme $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{U}^{|z|}$ delle tuple b tali che $\mathcal{C}$ è $\Delta(b)$-comagro è Δ-comagro.*

Dimostrazione Se $\mathcal{C}$ è l'intersezione di un'infinità numerabile di aperti-densi $\mathcal{D}_i$. L'insieme $\mathcal{B}_i$ delle tuple b tali che $\mathcal{D}_i$ ha interno denso è comagro per il lemma 11.6. L'insieme $\mathcal{B}$ dell'enunciato è l'intersezione di tutti questi $\mathcal{B}_i$. È immediato che l'intersezione di un insieme numerabile di comagri è un comagro. Quindi $\mathcal{B}$ è comagro. □

11.8 Teorema di omissione dei tipi (formulazione topologica) *Fissiamo $\Delta=\{\forall\vee\wedge\}\Delta\subseteq L(\mathcal{U})$ numerabile. Fissiamo anche una tupla di variabili x. Sia $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{U}^{|x|}$ un insieme con interno Δ-denso. Supponiamo che $\mathcal{U}^{|x|}$ sia $\Delta(A)$-Baire per ogni A finito. Allora esiste un Δ-modello M tale che $\mathcal{D}$ ha interno $\Delta(M)$-denso. Lo stesso vale sostituendo "ha interno denso" con "è comagro".*

Dimostrazione Il modello M si costruisce come l'unione di una catena $\langle A_i : i<\omega\rangle$ di insiemi. La strategia è la stessa usata per dimostrare il teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù. Le condizioni da soddisfare in questo caso sono quelle date da m che gioca il ruolo del test di Tarski-Vaught. Durante la costruzione richiederemo che $\mathcal{D}$ abbia interno $\Delta(A_i)$-denso. Segue che $\mathcal{D}$ sarà anche $\Delta(M)$-denso come richiesto. Nel secondo caso, che sia comagro). Quindi

Posto $A_0=\varnothing$, al passo $i+1$ fissiamo una enumerazione di lunghezza ω di tutte le formule non banali di $\Delta(A_i)$. Sia $i=\langle i_1,i_2\rangle$ e scegliamo b soluzione $\neg\varphi_{i_1}(x)$, la i_1-esima formula nell'enumerazione di $\Delta(A_{i_2})$. Inoltre richiediamo che $\mathcal{D}$ abbia interno $\Delta(A_i,b)$-denso. Un tale b esiste perché per il lemma 11.6 l'insieme di questi b è $\Delta(A_i)$-comagro quindi per ipotesi $\Delta(A_i)$-denso.

Si verifica facilmente (vedi dimostrazione 3.40) che M è un Δ-modello. □

11.9 Definizione *Diremo che il tipo $p(x)$ è* ***Δ-isolato*** *se vale per qualche $\psi(x) \in \Delta$ non banale $\neg\psi(x) \to p(x)$. Se Δ=$\{\vee\}\Delta$ questo significa $p(\mathfrak{U})$ ha interno non vuoto. Nel caso Δ=$\{\neg,\vee\}\Delta$ un Δ-tipo completo è isolato se e solo se è principale (cfr. paragrafo 5.2).* □

Ricordiamo che omettere un tipo vuol dire non realizzarlo, ovvero ***M* omette *p*(*x*)** se $M \subseteq \neg p(\mathfrak{U})$.

11.10 Teorema di omissione dei tipi (formulazione classica) *Assumiamo L numerabile e fissiamo un insieme di parametri A, anche numerabile. Sia $p(x) \subseteq L(A)$ un tipo non isolato (intendiamo $L(A)$-isolato). Allora esiste $M \preceq \mathfrak{U}$ che contiene A ed omette $p(x)$.*

Dimostrazione Sia $\Delta = L(A)$. Sia $\mathcal{D} = \neg p(\mathfrak{U})$ poiché $p(x)$ non è Δ-isolato allora $\mathcal{D}$ ha interno Δ-denso. Per il teorema 11.8 esiste Δ-modello M tale che $\mathcal{D}$ è $\Delta(M)$-denso. Poiché Δ contiene L otteniamo $M \preceq \mathfrak{U}$ e, poiché Δ contiene le formule $a \neq x'$ per ogni $a \in A$ e x' variabile in x, otteniamo $A \subseteq M$. Ora, $\Delta(M)$ contiene anche le formule $c \neq x$ per ogni $c \in M^{|x|}$ e quindi la densità implica $M^{|x|} \subseteq \mathcal{D}$. Ovvero, M omette $p(x)$. □

11.11 Esercizio Si dia una dimostrazione diretta del teorema 11.10. Suggerimento: per poter usare una costruzione alla Löwenheim-Skolem all'ingiù serve prima mostrare che se $p(x)$ non è isolato da nessuna formula in $L(B)$ allora ogni formula consistente $\varphi(x) \in L(B)$ ha una soluzione a tale che $p(x)$ non è isolato da nessuna formula in $L(B,a)$. Il tipo $q(y) = \mathrm{tp}(a/B)$ va costruito con un processo di *diagonalizzazione* imponendo, per ogni $\varphi(y,x) \in L(B)$, che $\varphi(a,x)$ non isoli $p(x)$. L'idea è la stessa del lemma 11.6, i dettagli ben più semplici. □

11.2 Modelli atomici e modelli primi

In questo paragrafo T è una teoria completa senza modelli finiti ed $\mathfrak{U}$ è un suo modello saturo $\mathfrak{U}$ di cardinalità $> |L| + \omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

I questo paragrafo studieremo la seguente nozione:

11.12 Definizione *Fissiamo A, un insieme arbitrario di parametri. Diremo che* ***M* è un modello primo su *A*** *se per ogni modello N contenente A esiste un'immersione elementare $h : M \to N$ che fissa A. Diremo che* ***M* è un modello primo** *tout court se è primo sul vuoto.* □

Non esiste una perfetta controparte sintattica alla nozione di modello primo. La nozione di modello atomico è ciò che più si avvicina. Le due nozioni coincidono solo se ristrette ai modelli numerabili.

11.13 Definizione *Fissiamo A, un insieme arbitrario di parametri. Diremo che* ***M* è un modello atomico su *A*** *se $A \subseteq M$ e per ogni b, tupla finita di elementi di M, il tipo $p(x) = tp(b/A)$ è isolato. Diremo che* ***M* è un modello atomico** *tout court se è atomico sul vuoto.* □

Fissiamo A. Ricordiamo che una formula $\varphi(x)$ è completa se è consistente e soddisfa alle seguenti condizioni (tra loro ovviamente equivalenti):

1. $\varphi(x) \to \psi(x)$ oppure $\varphi(x) \to \neg\psi(x)$ per ogni formula $\psi(x) \in L(A)$;

2. $\varphi(x) \to \psi(x)$ per ogni formula $\psi(x) \in L(A)$ consistente con $\varphi(x)$;

3. esiste un unico tipo $p(x) \in S(A)$ che contiene $\varphi(x)$.

La nozione dipende sensibilmente sia da A che dalla tupla x che però spesso si devono intuire dal contesto. Quando è importante essere espliciti scriveremo **completa in $L_x(A)$**. Quindi un modello M è atomico su A se e solo se ogni $a \in M^{|x|}$, con x tupla finita, soddisfa una formula completa in $L_x(A)$. Il seguente lemma è immediato.

11.14 Lemma *Se $\varphi(x,z)$ è completa in $L_{x,z}(A)$ allora $\exists z\, \varphi(x,z)$ è completa in $L_x(A)$.* □

Fissati A ed x, diremo che **i tipi isolati sono densi** se per ogni $\psi(x) \in L(A)$ consistente esiste una formula $\varphi(x) \in L(A)$ completa tale che $\varphi(x) \to \psi(x)$. Con la terminologia introdotta nel paragrafo 11.1 questo vuol dire che l'insieme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|x|}$, unione di $\varphi(\mathcal{U})$ per $\varphi(x) \in L(A)$ completa, ha interno $L(A)$-denso.

11.15 Proposizione *Assumiamo L ed A numerabili. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *esiste un modello M atomico su A;*

2. *per ogni tupla x finita, i tipi isolati sono densi.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Sia $\psi(x) \in L(A)$. Se $\psi(x)$ è consistente (in $\mathcal{U}$) allora è consistente in ogni modello, quindi anche in M. Sia allora $a \in M$ tale che $a \vDash \psi(x)$. Per l'osservazione di cui sopra, grazie all'ipotesi abbiamo che esiste $\varphi(x)$ completa tale che $a \vDash \varphi(x)$. Quindi $\varphi(x) \to \psi(x)$. Dimostriamo ora 2⇒1. Il modello atomico richiesto è unione di una catena di insiemi $\langle A_i : i \in \omega \rangle$. Posto $A_0 = A$, assumiamo come ipotesi induttiva che $A_i = A, a$ dove a è un tupla finita che è soluzione di una formula $\varphi(x)$ completa in $L_x(A)$. Sia dunque $\psi(a, y)$ una formula consistente che vogliamo sia soddisfatta in M. (Tralasciamo i dettagli sull'enumerazione delle formule che sono come nella dimostrazione 3.41 del teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù.) Allora $\varphi(x) \wedge \psi(x,y) \in L(A)$ è consistente e per 2 esiste una formula completa in $L_{x,y}(A)$ tale che

$$\varphi'(x,y) \quad \to \quad \varphi(x) \wedge \psi(x,y)$$

dalla completezza di $\varphi(x)$ segue $\varphi(x) \to \exists y\, \varphi'(x,y)$ e quindi, poichè vale $\varphi(a)$, allora vale $\exists y \varphi'(a,y)$, ovvero $\varphi'(a,y)$ è consistente. Sia b una qualsiasi sua soluzione, che sarà quindi anche soluzione di $\psi(a,y)$. Posto $A_{i+1} = A, a, b$ l'ipotesi induttiva è preservata. Infine, dal lemma 11.14 segue che M è atomico. □

Mettiamo in evidenza una proprietà che useremo implicitamente nel seguito. La formula $\xi(a,x)$ isola il tipo $p(a,x)$ se vale $\xi(a,x) \to p(a,x)$. Quest'espressione è equivalente alla congiunzione di $\xi(a,x) \to \varphi(a,x)$ al variare di $\varphi(a,x)$ in $p(a,x)$. Quindi se k è una mappa elementare definita in a vale anche $\xi(ka,x) \to p(ka,x)$ e possiamo concludere che $\xi(ka,x)$ isola il tipo $p(ka,x)$.

Il seguente lemma caratterizza i modelli atomici con una proprietà di estendibilità delle mappe elementari. La proprietà è una sorta di duale di quella che caratterizzava la saturazione: qui fissiamo il dominio della mappa invece che il codominio.

Chiameremo k una mappa elementare ***A*-elementare** se $k \cup \mathrm{id}_A$ è anche elementare ovvero, se k preserva la verità di tutte le formule a parametri in A.

11.16 Lemma *Assumiamo L ed A numerabili, ed $A \subseteq M$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *M è atomico su A;*
2. *per ogni $A \subseteq N$, ogni mappa finita A-elementare $k : M \to N$, ed ogni $b \in M$, esiste una mappa A-elementare $h : M \to N$ che estende k ed è definita in b;*
3. *come 2 ma con $k = \varnothing$ e $b \in M^{<\omega}$.*

Se L o A non sono numerabili rimangono comunque valide le implicazioni 1$\Rightarrow$2$\Leftrightarrow$3.

Dimostrazione Per dimostrare 1$\Rightarrow$2 fissiamo una tupla c che enumera $\operatorname{dom} k$ e sia $\xi(x, y)$ la formula che isola il tipo $p(x, y) = \operatorname{tp}(c, b/A)$. Poiché $k : M \to N$ è elementare $\xi(kc, x)$ ha una soluzione $d \in N$. Poiché $\xi(kc, x) \to p(kc, x)$ otteniamo $p(kc, d)$. Quindi $k{=}h \cup \{\langle b, d\rangle\}$ è l'estensione richiesta.

L'implicazione 2$\Rightarrow$3 è chiara. Per dimostrare 3$\Rightarrow$1 assumiamo $\neg$1. Esiste quindi una tupla finita di elementi di M tale che il tipo $p(x){=}\operatorname{tp}(b/A)$ non è isolato. Poiché sia T che A sono numerabili, possiamo usare il teorema di omissione dei tipi per ottenere un modello N che contiene A ed omette $p(x)$. Quindi nessuna mappa elementare $h : M \to N$ può essere definita in b. □

11.17 Teorema *Assumiamo L ed A numerabili. Per ogni modello M, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *M è numerabile ed atomico su A;*
2. *M è primo su A.*

Dimostrazione Per dimostrare la direzione 1$\Rightarrow$2 fissiamo un arbitrario modello N che contiene A e costruiamo un'immersione A-elementare $h : M \to N$ costruendo una catena $\langle h_i : i < \omega\rangle$ tale che ogni $h_i : M \to N$ è una mappa A-elementare finita. La catena comincia con $h_0 = \varnothing$ e soddisfa alla condizione $b_i \in \operatorname{dom} h_{i+1}$, dove b_i è i-esimo elemento di M in una qualche fissata enumerazione. La condizione 2 del lemma 11.16 assicura l'esistenza di questa catena.

Per dimostrare la direzione 2$\Rightarrow$1 assumiamo che M sia primo su A. La numerabilità è ovvia: visto che esistono modelli numerabili ed M deve potersi immergere in questi, M non può che essere numerabile. Inoltre M dev'essere atomico perché verifica la condizione 3 del lemma 11.16, dato che le immersioni elementari sono per definizione mappe elementari totali. □

11.18 Teorema *Assumiamo L ed A numerabili. Allora due modelli primi su A sono isomorfi.*

Dimostrazione Siano M ed N due modelli primi su A. Per il teorema 11.17 questi sono modelli numerabili e atomici su A. L'isomorfismo $h : M \to N$ viene costruito con il metodo dell'andirivieni. La catena di funzioni finite $\langle h_i : i < \omega\rangle$ verrà costruita in modo tale che ogni $h_i : M \to N$ sia A-elementare e $b_i \in \operatorname{dom} h_{i+1}$ e $c_i \in \operatorname{img} h_{i+1}$, dove b_i e c_i sono gli i-esimi elementi di M ed N in una qualche fissata enumerazione. La catena comincia con $h_0 = \varnothing$. Al passo induttivo usiamo la caratterizzazione dei modelli atomici data da 2 del lemma 11.16 per trovare una mappa finita A-elementare $h_{i+1/2} : N \to M$ definita in c_i che estende h_i^{-1} e quindi prendiamo per $h_{i+1} : M \to N$ una qualsiasi estensione finita

A-elementare di $h^{-1}_{i+1/2} : M \to N$ definita in b_i. □

11.19 Esercizio Sia M un modello atomico su A e sia b una tupla finita di elementi di M. È M è atomico su A, b? Suggerimento: può usare il lemma 11.16, o anche una dimostrazione sintattica. □

11.20 Esercizio Si dimostri che ogni modello atomico è debolmente ω-omogeneo. Si dimostri che se L è numerabile ogni modello primo è omogeneo. □

11.21 Esercizio Una teoria fortemente minimale ha sempre un modello primo? □

11.22 Esercizio Si consideri la teoria T_{rg}. Per quali insiemi A esiste un modello atomico su A? Si risponda alla stessa domanda per la teoria T_{oldse}. □

11.3 Teorie sottili

Anche in questo paragrafo T è una teoria completa senza modelli finiti ed $\mathfrak{U}$ è un suo modello saturo $\mathfrak{U}$ di cardinalità $> |L| + \omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

Una teoria T si dice **sottile** (in inglese, **small**) se $S_x(T)$ è numerabile, per ogni tupla finita x. Una teoria sottile è in particolare numerabile.

11.23 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è sottile;*
2. *esiste un modello numerabile saturo.*

Dimostrazione L'implicazione 2⇒1 è ovvia, dato che i tipi completi sono tipi di qualche tupla $b \in M$. Quindi sono al più quanti la cardinalità del modello, ovvero una quantità numerabile per ipotesi. Per dimostrare 1⇒2 osserviamo che se T è sottile esiste un modello numerabile debolmente ω-saturo. Ogni sua estensione è ovviamente anche debolmente satura. Ogni modello numerabile ha un'estensione ad un modello numerabile omogeneo (esercizio 8.24 con $\mathfrak{U}$ per N). Questo, è saturo per l'esercizio 8.23. □

Quindi le principali teorie introdotte nei capitoli precedenti sono sottili.

11.24 Esercizio Dalla proposizione 11.23 segue immediatamente che per $|x| < \omega$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T è sottile;
2. per ogni A finito $S_x(A)$ è numerabile.

Se ne dia una dimostrazione sintattica diretta. □

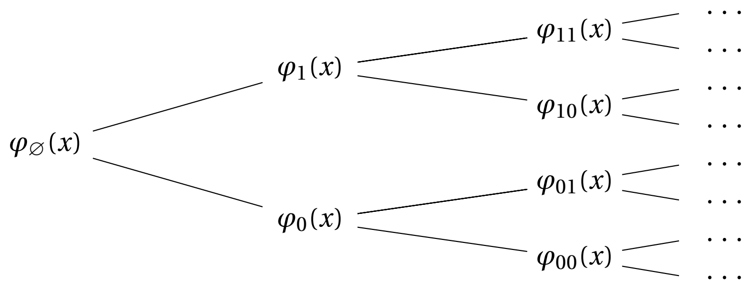
11.25 Esercizio Il linguaggio contiene ω predicati unari. Sia T la teoria definita nell'esercizio **??**. Si dimostri che T non è sottile. □

11.26 Definizione *Un albero binario di formule è una sequenza di formule $\langle \varphi_s(x) : s \in 2^{<\omega} \rangle$ tali che:*

1. $\varphi_{s0}(x) \vee \varphi_{s1}(x) \to \varphi_s(x)$;

2. $\varphi_{s0}(x) \wedge \varphi_{s1}(x)$ *è inconsistente.* □

In figura, la rappresentazione di un albero binario di formule:



Ad ogni ramo $\alpha \in 2^\omega$ di un albero binario associamo il tipo $p_\alpha(x) = \{\varphi_{\alpha\restriction n} \ : \ n \in \omega\}$. Per saturazione, i tipi $p_\alpha(x)$ sono tutti consistenti.

11.27 Proposizione *Se L è numerabile, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è sottile;*

2. *non esiste un albero binario di formule pure.*

L'implicazione 1⇒2 vale anche se L non è numerabile.

Dimostrazione Per dimostrare 1⇒2 è sufficiente osservare che i tipi $p_\alpha(x)$, per $\alpha \in 2^\omega$, sono mutualmente inconsistenti.

Per dimostrare 2⇒1 assumiamo che $S_x(T)$ sia più che numerabile e costruiamo un albero binario di formule. Prendiamo come $\varphi_\varnothing(x)$ la formula $x{=}x$ e supponiamo di aver definito $\varphi_s(x)$. Indichiamo con A_s, l'insieme dei tipi in $S_x(T)$ consistenti con $\varphi_s(x)$. Assumiamo come ipotesi induttiva che A_s sia più che numerabile. Mostriamo che esiste una formula $\psi(x)$ tale che, posto

$$\varphi_{s0} \ = \ \varphi_s(x) \wedge \psi(x) \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \varphi_{s1} \ = \ \varphi_s(x) \wedge \neg\psi(x),$$

sia A_{s0} che A_{s1} sono più che numerabili. Supponiamo per assurdo che una tale formula $\psi(x)$ non esista. Fissiamo un enumerazione delle formule pure $\langle \psi_i(x) : i \in \omega \rangle$. Definiamo $B_0 = A_s$ e sia B_{i+1} l'insieme dei tipi in B_i che contengono $\psi_i(x)$, se questo è più che numerabile, altrimenti B_{i+1} è l'insieme dei tipi che contengono $\neg\psi_i(x)$. In entrambi i casi B_i ha complemento numerabile. Avremo quindi

$$S_x(T) \smallsetminus \bigcap_{i\in\omega} B_i \ \text{ è numerabile} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \bigcap_{i\in\omega} B_i \ \text{ contiene un solo tipo.}$$

Questo contraddice la non numerabilità di $S_x(T)$. □

11.28 Proposizione *Se per ogni $|x| < \omega$, non esiste un albero binario di formule in $L_x(A)$ allora esiste un modello atomico su A.*

Dimostrazione Dimostriamo la contronominale. Omettiamo per chiarezza la referenza all'insieme di parametri A. Assumiamo che un modello atomico non esista. Equivalentemente, per la proposizione 11.15 che i tipi isolati non siano densi. Quindi esiste una formula consistente $\varphi_\varnothing(x)$ che non è conseguenza di nessuna formula completa. Supponiamo di aver definito, per $s \in 2^{<\omega}$, una formula $\varphi_s(x)$ consistete. Cerchiamo una formula $\psi(x)$ tale che sia $\varphi_{s0}(x) := \varphi_s(x) \wedge \psi(x)$ che $\varphi_{s1}(x) := \varphi_s(x) \wedge \neg\psi(x)$ sono consistenti.

Una tale $\psi(x)$ deve esistere altrimenti $\varphi_s(x)$ sarebbe completa e per ipotesi $\varphi_\varnothing(x)$ non è conseguenza di una formula completa. Così otteniamo un albero binario di formule. □

11.4 Categoricità numerabile

Anche in questo paragrafo T è una teoria completa con un modello infinito ed $\mathfrak{U}$ è un suo modello saturo $\mathfrak{U}$ di cardinalità $> |L| + \omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

Ricordiamo che una teoria T si dice ***ω*-categorica** se ha, a meno di isomorfismi, un unico modello numerabile. Sappiamo, dall'esercizio 6.31 che una teoria numerabile ω-categorica è completa.

11.29 Teorema (Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius) *Sia T una teoria numerabile. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1 *T è ω-categorica;*

2 *ogni tipo puro in un numero finito di variabili è isolato.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Se T è ω-categorica tutti i suoi modelli numerabili sono primi (dato che tra due modelli numerabili c'è un isomorfismo, mentre per Löwenheim-Skolem ogni modello più che numerabile ammette un modello numerabile come sottostruttura elementare) e quindi atomici. Osserviamo ora che per ogni tupla finita a, grazie a Löwenheim-Skolem esiste un modello numerabile che la contiene. Questo modello è atomico, quindi $\mathrm{tp}(a)$ è isolato. Ogni tipo è sottoinsieme di un tipo completo, e in particolare ogni tipo soddisfacibile è sottoinsieme del tipo di qualche tupla. Quindi è anch'esso isolato, ovvero tutti i tipi puri in un numero finito di variabili sono isolati. Dimostriamo 2⇒1. Da 2 segue che tutti i modelli di T sono atomici, quindi tutti quelli numerabili sono primi, e perciò T è ω-categorica per il teorema 11.18. □

Dal seguente teorema otteniamo immediatamente altre caratterizzazioni dell'ω-categoricità.

11.30 Teorema *Fissiamo anche una tupla di variabili x di arietà finita n. Sia A un insieme di parametri. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$S_x(A)$ è finito;*
2. *il numero delle orbite $O(a/A)$ per $|a| = n$ è finito;*
3. *ogni tipo $p(x) \subseteq L(A)$ è isolato;*
4. *a meno di equivalenza, esiste un numero finito formule $\psi(x) \in L(A)$.*

Dimostrazione L'equivalenza $1 \Leftrightarrow 2$ è immediata per l'omogeneità di $\mathfrak{U}$, poiché in ogni struttura omogenea N vale $O(a/A) = p(N)$ con $p(x) = \mathrm{tp}(a/A)$. Dimostriamo $1 \Rightarrow 3$. Se il numero di tipi completi è finito, $\neg p(x)$ è equivalente alla disgiunzione di tipi. Quindi $p(x)$ è equivalente ad una formula, ovvero è isolato. Viceversa, per dimostrare $3 \Rightarrow 1$, osserviamo che i tipi $S_x(A)$ ricoprono $\mathfrak{U}$, quindi anche le formule che li isolano (che sono a loro equivalenti, dato che i tipi sono completi) formano un ricoprimento di $\mathfrak{U}$. Per compattezza questo ricoprimento dev'essere finito. Mostriamo che $3 \Rightarrow 4$. Sia $\psi(x) \in L(A)$. Se

$\psi(x)$ è consistente, allora è soddisfatta da qualche $a \in \mathfrak{U}$, ovvero $\psi(x) \to \bigvee_{a \models \psi(x)} \mathrm{tp}(a/A)$. Per ogni a, sia $\psi_a(x)$ una formula che isola $\mathrm{tp}(a/A)$. Poiché i $\mathrm{tp}(a/A)$ sono completi, essi sono equivalenti alle $\psi_a(x)$, e quindi in particolare queste sono formule complete. In conclusione otteniamo $\psi(x) \leftrightarrow \bigvee_{a \models \psi(x)} \psi_a(x)$. Ma le formule $\psi_a(x)$ sono in numero finito per 1. Il viceversa, $4 \Rightarrow 3$, è altrettanto semplice. □

11.31 Corollario *Le quattro proprietà considerate nel teorema 11.30*

1. *sono inconsistenti per A infinito;*
2. *se valgono per $A = \varnothing$ e per ogni n allora valgono per tutti gli insiemi A finiti;*
3. *se valgono per un qualche A finito, allora valgono anche per $A = \varnothing$.*

Dimostrazione Quando A è infinito i tipi completi sono infiniti, questo dimostra 1. Se la proprietà 4 del teorema 11.30 vale per le formule pure allora, sostituendo alcune variabili con parametri, otteniamo che questa vale anche su un arbitrario insieme finito A, questo dimostra 2. Infine, se la proprietà 1 del teorema 11.30 vale per un qualche A allora vale anche per ogni $B \subseteq A$. □

11.32 Corollario *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *T è ω-categorica;*
2. *per ogni n, il numero di tipi puri completi in n variabili è finito;*
3. *per ogni n, il numero delle orbite di tuple di arietà n è finito;*
4. *per ogni n, il numero di formule pure in n variabili è finito.* □

La dimostrazione della seguente proposizione è lasciata per esercizio

11.33 Proposizione *Sia T numerabile. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è ω-categorica;*
2. *per un qualche A finito, esiste un modello che è sia saturo che primo su A.* □

Concludiamo con un curioso risultato di Vaught. Modificano l'esempio presentato nell'esercizio 6.6 non è difficile costruire teorie complete con esattamente n modelli per ogni $3 \leq n < \omega$.

11.34 Proposizione *Se T è una teoria completa non ω-categorica allora T ha almeno 3 modelli tra loro non isomorfi.*

Dimostrazione Se T non è sottile ha un continuo di modelli. Assumiamo quindi che T sia sottile. Esistono quindi un modello primo M ed un modello saturo numerabile N. Questi non sono isomorfi perché T non è ω-categorica. Per una qualche tupla x di lunghezza finita esiste un tipo $p(x)$ non isolato. Fissiamo una tupla a di elementi di N che realizza $p(x)$. Sia $M_1 \preceq N$ un modello primo su a. Quindi M_1 non è isomorfo a M e non è nemmeno isomorfo ad N per la proposizione 11.33. □

11.35 Esercizio Assumiamo L numerabile, sia T una teoria completa ω-categorica. Si dimostri che per ogni A finito $\langle A\rangle_{\mathfrak{U}}$ è una struttura finita. □

11.36 Esercizio Assumiamo L numerabile. Supponiamo che T sia ω-categorica. Sia A un insieme di parametri finito è T anche ω-categorica su A? (Ovvero ogni coppia di modelli M ed N che contengono A esiste un isomorfismo $h : M \to N$ che fissa A.) E se A è un insieme infinito? □

11.37 Esercizio Si dimostri che se esiste un modello M che realizza un numero finito di tipi in $S_x(T)$, per ogni tupla finita x, allora T è ω-categorica. □

11.5 Versione giocattolo di un teorema di Zilber

Come applicazione mostriamo se T è teoria ω-categorica e fortemente minimale allora T non è finitamente assiomatizzabile.

Anche in questo paragrafo T è una teoria completa senza modelli finiti ed $\mathfrak{U}$ è un suo modello saturo di cardinalità $> |L|+\omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

Diremo che T ha la **proprietà del modello finito** se per ogni enunciato φ esiste A struttura finita tale che

pmf $\qquad \mathfrak{U} \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad A \vDash \varphi$

La proprietà è rilevante per la seguente:

11.38 Proposizione *Una teoria T senza modelli finiti con la proprietà del modello finito non è finitamente assiomatizzabile.*

Dimostrazione Se T fosse finitamente assiomatizzabile allora $T \vdash \varphi \vdash T$ per un qualche enunciato φ. E quindi $A \vDash T$ per una qualche struttura finita, ma $T \vdash \exists^{>k} x\,(x{=}x)$ per ogni k. Contraddizione. □

Abbiamo bisogno della seguente definizione. Diremo che C è un **insieme omogeneo** per ogni coppia di tuple $a, c \in C$ tale che $a \equiv c$ e per ogni elemento $b \in C$ esiste un elemento $d \in C$ tale che $a\,b \equiv c\,d$.

11.39 Lemma *Se T è numerabile e ω-categorica ed ogni insieme finito è contenuto in un insieme finito omogeneo allora T ha la proprietà del modello finito.*

Dimostrazione Per convenienza conviene dimostrare pmf anche per formule con parametri. Dimostreremo che per ogni n esiste $A \subseteq \mathfrak{U}$, sottostruttura finita tale che pmf vale per tutti gli A-enunciati φ tali che

\# $\qquad$ numero dei parametri φ + numero di quantificatori di $\varphi \leq n$.

Fissato n scegliamo un qualsiasi A omogeneo in cui tutti i tipi $p(z)$ con z di lunghezza n vengono realizzati. Lasciamo al lettore verificare che A è una sottostruttura (l'idea è simile a quella esposta nel seguito). Le ipotesi su T garantiscono l'esistenza di un insieme finito con queste proprietà. Ora dimostriamo pmf per induzione.

Per le formule atomiche non c'è nulla da dimostrare e così pure per il passo induttivo dei connettivi booleani. Vediamo quindi il passo induttivo del quantificatore esistenziale.

Consideriamo quindi la formula $\exists y\, \varphi(c, y)$ dove $c \in A^{<n}$ e $|y| = 1$. La direzione $\Leftarrow$ è ovvia dall'ipotesi induttiva notando che se la formula $\exists y\, \varphi(c, y)$ è soddisfa la condizione #, anche le formule $\varphi(c, d)$ soddisfano questa condizione. Per dimostrare l'implicazione $\Rightarrow$, assumiamo $\mathfrak{U} \models \exists y\, \varphi(c, y)$. Siano $a \in A^{<n}$ e $b \in A$ una soluzione di $\varphi(x, y)$ con $a \equiv c$. Una soluzione esiste in A perché per ipotesi A realizza tutti i tipi con n variabili. Quindi per l'omogeneità di A esiste d tale che $a, b \equiv c, d$. □

11.40 Proposizione *Se T è fortemente minimale, allora ogni insieme algebricamente chiuso è omogeneo.*

Dimostrazione Sia quindi C un insieme algebraicamente chiuso e siano $a, c \in C$ tuple tali che $a \equiv c$. Sia b un elemento di C. Consideriamo il caso in cui $b \in \operatorname{acl} a$. Sia f un automorfismo di $\mathfrak{U}$ che manda a in c e sia $d := f b \in \operatorname{acl} c \subseteq C$. Allora $a, b \equiv c, d$ come richiesto. Nel caso in cui $b \notin \operatorname{acl} a$, osserviamo che ogni $d \notin \operatorname{acl} c$ è tale che $a, b \equiv c, d$ e che un tale d esiste in C altrimenti $C = \operatorname{acl} c \neq \operatorname{acl} a$ che contraddirebbe l'ipotesi $a \equiv c$. □

Raccogliendo quanto sopra dimostrato otteniamo il seguente:

11.41 Teorema *Se T è ω-categorica e fortemente minimale allora non è finitamente assiomatizzabile.*

Dimostrazione Quando T è ω-categorica la chiusura algebrica di un insieme finito è un insieme finito. Quindi dalla proposizione 11.40 segue che T soddisfa le ipotesi del lemma 11.39. Quindi ha la proprietà del modello finito e per la proposizione 11.38 non è finitamente assiomatizzabile. □

Se nel teorema 11.41 indeboliamo le ipotesi richiedendo solamente che T sia totalmente categorica, otteniamo un famoso teorema di Boris Zilber. (Una teoria si dice *totalmente categorica* se in ogni cardinalità ha esattamente un modello a meno di isomorfismi.) Lo stesso teorema è stato anche dimostrato indipendentemente da Cherlin, Harrington e Lachlan con una prova che sfrutta la classificazione dei gruppi finiti semplici. Questo teorema ha segnato la nascita di quella che ora si chiama *teoria geometrica della stabilità*, in inglese *geometric stability theory*, che studia quelle proprietà geometriche della teoria dei modelli cui abbiamo brevemente accennato nel capitolo 10.

Il teorema di Zilber richiede un percorso molto lungo. Il teorema 11.41 è comunque un passaggio obbligato e porterà il lettore un passo più avanti.

11.42 Esercizio Assumiamo L numerabile. Sia T una teoria completa fortemente minimale. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T è ω-categorica;
2. tutti gli insiemi finiti hanno chiusura algebrica finita. □

Capitolo 12

Definibilità e automorfismi

Fin'ora abbiamo usato elementi dell'universo come parametri per definire insiemi. In questo capitolo vedremo che anche gli insiemi definibili possono essere usati come parametri per definire insiemi o elementi. Vedremo anche come estendere il concetto di elemento algebrico agli insiemi definibili.

In questo capitolo introduciamo $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$, evitando di usare i linguaggi a più sorte. Alcune dimostrazioni risultano più lunghe ma la notazione più semplice le rende meno oscure.

Per tutto questo capitolo fissiamo un linguaggio L ed una teoria completa T senza modelli finiti. Fissiamo anche un modello saturo $\mathcal{U}$ di cardinalità maggiore di $|L|+\omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

12.1 Elementi immaginari e definibilità

Denoteremo con $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$ l'unione di $\mathcal{U}$ con l'insieme dei suoi sottoinsiemi definibili. Definibili, si intende, con parametri in $\mathcal{U}$ e di arietà finita. Questi verranno chiamati **(elementi) immaginari**, per contrasto chiameremo **reali** gli usuali elementi di $\mathcal{U}$. Questo è un leggero abuso di terminologia (in letteratura il termine *immaginari* ha un significato leggermente diverso). La nostra scelta verrà giustificata più avanti, vedi esercizio 13.9. In questo capitolo con le lettere a, b, ecc. denoteremo tuple di elementi $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$ e le lettere A, B, ecc. denoteranno sottoinsiemi di $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$, sempre col vincolo di avere cardinalità piccola. L'etimologia del simbolo verrà spiegata più avanti.

Ogni automorfismo $f:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ agisce in modo naturale anche sugli insiemi definibili: l'insieme definibile a viene mappato nell'insieme

$$f[a] \;=\; \big\{fx \,:\, x\in a\big\}.$$

Questo è un insieme definibile: se a è l'insieme definito da $\varphi(x;c)$ allora $f[a]$ è l'insieme definito da $\varphi(x;fc)$. Scriveremo fa o $f(a)$ per l'insieme $f[a]$, identificando la notazione per gli insiemi definibili con quella per gli elementi.

Sia $A\subseteq\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$. Denotiamo con $\mathbf{Aut}(\mathcal{U}/A)$ l'insieme degli automorfismi di $\mathcal{U}$ che fissano tutti gli elementi di A. Gli elementi immaginari si intendono fissati come insiemi. Se a è una tupla di elementi di $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$, con $\mathbf{O}(a/A)$ denoteremo l'**orbita di *a* su *A*** ovvero

$$\mathbf{O}(a/A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{fa \,:\, f\in\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)\}.$$

Diremo che $a\in\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$ è **Galois-definibile** su A se $\mathrm{O}(a/A)$ consiste del solo elemento a. O equivalentemente se $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/a) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$, ovvero ogni automorfismo che fissa A fissa anche a.

Ora vogliamo dare una caratterizzazione sintattica di $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A$. Per far questo dobbiamo permettere l'uso di insiemi definibili come parametri nelle formule. Una **formula a parametri in $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$**, si costruisce induttivamente con tutti gli usuali connettivi logici, a partire dalle seguenti formule atomiche:

1. le usuali formule atomiche del prim'ordine con parametri (reali) in A;
2. le formule atomiche della forma $t \in a$ dove $a \in A$ è un elemento immaginario e t è una tupla di termini a parametri (reali) in A.

La semantica di queste formule è quella naturale: è come se avessimo aggiunto al linguaggio un nuovo predicato $x \in a$ per ogni insieme definibile, predicato che viene interpretato nell'insieme a.

Con le formule in questo nuovo linguaggio non otteniamo nuovi insiemi definibili: se in una formula a parametri in A sostituiamo $t \in a$ con $\sigma(t)$, dove $\sigma(x)$ è una qualsiasi definizione di a, otteniamo una formula equivalente a parametri reali. Questa sarà una formula a parametri in AB per qualche insieme di parametri reali B. La ragione per introdurre una nuova definizione è che in generale non esiste una scelta canonica per B.

Per quanto osservato sopra, il modello $\mathfrak{U}$ realizza tutti i tipi $p(x) \subseteq L(A)$ finitamente consistenti a parametri in un qualsiasi $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$. Se a è una tupla di elementi reali, scriveremo $\boldsymbol{p(x) = \mathrm{tp}(a/A)}$ per l'insieme delle formule a parametri in A soddisfatte da a; anche la notazione $\boldsymbol{a \equiv_A b}$ si estende in modo naturale ad insiemi che contengono parametri immaginari.

12.1 Lemma *Sia $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ e siano a e b due tuple reali tali che $a \equiv_A b$. Allora esiste un automorfismo $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tale che $ha = b$.*

Dimostrazione È sufficiente estendere la mappa $k = \{\langle a, b\rangle\}$ ad un automorfismo che fissa A. L'usuale argomento per andirivieni si generalizza perché la saturazione si $\mathfrak{U}$ implica anche la realizzazione dei tipi finitamente consistenti a parametri in $\mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$. □

Quindi possiamo argomentare per omogeneità su insiemi $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ ed ottenere per esempio il seguente corollario.

12.2 Corollario *Sia $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ e sia a una tupla reale. Sia $p(x) = tp(a/A)$. Allora $p(\mathfrak{U}) = O(a/A)$.* □

Se a è un elemento reale diremo che **a è definibile su A** se esiste una formula $\varphi(x) \in L(A)$ tale che $\varphi(a) \wedge \exists^{=1} x\, \varphi(x)$, ovvero a è l'unica soluzione di $\varphi(x)$. Quando a è un elemento immaginario diremo che **a è definibile su A** se $a = \varphi(\mathfrak{U})$ per una qualche formula $\varphi(x) \in L(A)$. Scriveremo $\boldsymbol{\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A}$ per la **chiusura definibile di A**, ovvero l'insieme degli elementi reali ed immaginari che sono definibili su A. Se a è una tupla di elementi di $\mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$, diremo che a è definibile se tutti gli elementi enumerati da a sono definibili. (Si veda esercizio 12.5.)

12.3 Teorema *Per ogni $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ ed $a \in \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *a è Galois-definibile su A;*
2. *a è definibile su A .*

Dimostrazione L'implicazione $2 \Rightarrow 1$ è immediata. Per dimostrare $1 \Rightarrow 2$ considereremo separatamente i casi a reale ed a immaginario. (Il formalismo per trattarli simultaneamente non è stato introdotto.)

Se $a \in \mathfrak{U}$ è fissato da tutti gli automorfismi che fissano A, allora per 12.1 il tipo $p(x) = \mathrm{tp}(a/A)$ ha come unica soluzione a. Per saturazione $p(x)$ contiene una formula $\varphi(x)$ con un'unica soluzione.

Sia $a \in \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}} \smallsetminus \mathfrak{U}$ fissato da tutti gli automorfismi che fissano A. Sia $\sigma(x;b)$ una qualsiasi definizione di a e sia $p(z) = \mathrm{tp}(b/A)$. Per omogeneità, se $c \equiv_A b$, allora esiste $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tale che $h(b) = c$. Quindi $\sigma(\mathfrak{U}, c) = \sigma(\mathfrak{U}, h(b)) = h(\sigma(\mathfrak{U}, b)) = h(a) = a$, dove la terza uguaglianza vale perchè h è un automorfismo. Ovvero $c \vDash \mathrm{tp}(b/A) \Rightarrow \sigma(\mathfrak{U}, c) = a$. Perciò otteniamo

$$p(z) \quad \to \quad \forall x\,[\sigma(x;z) \leftrightarrow x \in a].$$

Per compattezza esiste una formula $\varphi(z)$ in $p(z)$ tale che

$$\varphi(z) \quad \to \quad \forall x\,[\sigma(x;z) \leftrightarrow x \in a]$$

È immediato verificare che $\exists z\,[\varphi(z) \wedge \sigma(x;z)]$ definisce a. □

Il teorema mostra che la nozione Galois-teoretica di definibilità coincide con quella sintattica. Il termine Galois-definibile in queste note non verrà più usato. Si osservi che per introdurre la nozione sintattica di definibilità dobbiamo distingue tra elementi ed insiemi. La nozione Galois-teoretica di definibilità è più semplice ed elegante di quella sintattica ma è molto difficile da utilizzare e per questo abbiamo cercato equivalenti sintattici. In alcuni contesti (al di fuori della logica del prim'ordine) non si ha chiara intuizione della corretta nozione di *definibile*. Generalmente in questi casi si parte dalla nozione Galois-teoretica.

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente proposizione.

12.4 Proposizione *Le seguenti affermazioni valgono per ogni $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$:*

1. *Se $a \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A$ allora $a \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} B$ per un qualche $B \subseteq A$ finito.*
2. *$A \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A$.*
3. *$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} A)$.* □

12.5 Esercizio Sia $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ e sia a una tupla finita di elementi di $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$, diciamo $a_1, \ldots, a_n$ con $a_i \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

re Se in a occorrono solo di elementi reali allora esiste una formula $\varphi(x) \in L(A)$ tale che $\varphi(a) \wedge \exists^{=1} x\, \varphi(x)$.

im Se a è composta solo di elementi immaginari allora l'insieme $a_1 \times \cdots \times a_n$ è definibile su A. □

12.6 Esercizio Per $A, B \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$, sia $p(x) \subseteq L(B)$ e supponiamo che $p(\mathfrak{U})$ sia invariante su A. Si dimostri che $p(\mathfrak{U}) = q(\mathfrak{U})$ per qualche $q(x) \subseteq L(A)$. Suggerimento: ragionando come per il teorema 12.3 si dimostri che ogni insieme definibile che contiene $p(\mathfrak{U})$ contiene un A-definibile che a sua volta contiene $p(\mathfrak{U})$.

12.2 Elementi algebrici

Sia $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ e sia a un elemento di $\mathcal{U}^{\text{eq}}$. Se l'orbita $\mathrm{O}(a/A)$ è finita diremo che ***a* è Galois-algebrico su *A***.

Ora, vogliamo dare una caratterizzazione sintattica di questa nozione. Sia a un elemento reale. Riprendiamo la definizione data nel paragrafo 10.2, con la differenza (irrilevante) è che ora i parametri sono in $\mathcal{U}^{\text{eq}}$. Diremo che ***a* è algebrico su *A*** se è soluzione di una qualche formula che ha un numero finito di soluzioni, ovvero se esiste una formula $\varphi(x)$ con parametri in A tale che $\varphi(a) \wedge \exists^{=n} x\, \varphi(x)$ per un qualche n. Una tale formula $\varphi(x)$ verrà chiamata **formula algebrica**. Analogamente un **tipo algebrico** è un tipo con un numero finito di soluzioni. La **chiusura algebrica (reale)** di A è l'insieme degli elementi reali algebrici su A, verrà denotato con **acl*A***.

Per definire il corrispondente sintattico di un immaginario Galois-algebrico abbiamo bisogno della seguente nozione. Siano x e y due tuple finite di uguale lunghezza. Diremo che la formula $\varepsilon(x, y)$ è un'**equivalenza** se definisce una relazione d'equivalenza; diremo che è un'**equivalenza finita** se ha un numero finito di classi di equivalenza.

Sia $\varepsilon(x, y) \in L(A)$ un'equivalenza. Le classi di equivalenza di $\varepsilon(x, y)$ sono definibili con parametri in A più un qualsiasi elemento della classe. Gli automorfismi che fissano A mappano coppie equivalenti in coppie equivalenti, quindi mappano classi di equivalenza in altre classi di equivalenza. Se $\varepsilon(x, y)$ è un'equivalenza finita, le sue classi hanno necessariamente un'orbita finita: sono Galois-algebriche su A. Lo stesso vale per insiemi che sono unione di classi di una equivalenza finita. Un **elemento immaginario algebrico su *A*** è un insieme definibile che è unione di classi di una qualche equivalenza finita definibile con parametri in A.

Scriveremo **acl$^{\text{eq}}$*A*** per la **chiusura algebrica di *A* in $\mathcal{U}^{\text{eq}}$**, ovvero l'insieme degli elementi reali ed immaginari che sono algebrici su A. Se a è una tupla, diremo che a è algebrica se tutti gli elementi enumerati da a sono algebrici. Abbiamo bisogno del seguente seguente lemma tecnico.

12.7 Lemma *Sia $\varepsilon(x, y)$ un'equivalenza e sia $p(x)$ un tipo. Se solo un numero finito di classi di equivalenza di $\varepsilon(x, y)$ intersecano $p(x)$, allora esiste un'equivalenza finita $\eta(x, y)$ che coincide con $\varepsilon(x, y)$ su $p(x)$. (Tutto con parametri in un qualche $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$.)*

Dimostrazione È sufficiente mostrare $\varepsilon(x, y)$ induce una partizione finita di una qualche $\varphi(x)$, congiunzione di formule in $p(x)$. Infatti, data la formula $\varphi(x)$, come equivalenza $\eta(x, y)$ possiamo prendere

$$[\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)] \;\wedge\; [\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow \varepsilon(x, y)].$$

Questa è un'equivalenza finita perché raccoglie tutte le tuple in $\neg\varphi(x)$ un'unica classe. Per dimostrare l'esistenza della formula $\varphi(x)$ richiesta, consideriamo il tipo:

$$\bigwedge_{i \le n} p(x_i) \;\wedge \bigwedge_{i<j\le n} \neg\varepsilon(x_i, x_j).$$

Se n è sufficientemente grande, questo tipo è contraddittorio per ipotesi. L'esistenza della formula $\varphi(x)$ segue per saturazione. □

Dimostriamo per gli elementi di $\mathcal{U}^{\text{eq}}$ l'analogo del teorema 8.34.

12.8 Lemma *Fissiamo $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ sia $a \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ con $O(a/A)$ infinita. Allora $O(a/A)$ ha cardinalità* *di* $\mathfrak{U}$.

Dimostrazione Il caso a reale è l'esercizio 8.34, quindi assumiamo a sia un elemento immaginario. Fissiamo una definizione $\sigma(x;b)$ di a e sia $p(z)=\mathrm{tp}(b/A)$. Supponiamo per assurdo che $\mathrm{O}(a/A)$ abbia cardinalità piccola. Il seguente è un tipo inconsistente

$$p(z) \cup \Big\{\neg\forall x\big[x\in c \leftrightarrow \sigma(x;z)\big] \;:\; c\in \mathrm{O}(a/A)\Big\}$$

Infatti, quest'ultimo è equivalente a

$$\begin{aligned}
&p(z) \cup \Big\{\neg\big[f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};z)\big] \;:\; f_i\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)\Big\}\\
\equiv\; &p(z) \wedge \bigwedge_{f_i\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{U},A)} \neg\big[f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};z)\big]\\
\equiv\; &\neg\Big[\neg p(z) \vee \bigvee_{f_i\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{U},A)} \big[f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};z)\big]\Big]\\
\equiv\; &\neg\Big[p(z) \rightarrow \bigvee_{f_i\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{U},A)} \big[f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};z)\big]\Big]
\end{aligned}$$

che è chiaramente insoddisfacibile per 12.1. Per saturazione (e per l'ipotesi assurda) esiste un insieme finito $C\subseteq \mathrm{O}(a/A)$ tale che

$$p(z) \rightarrow \bigvee_{c_i\in C} \forall x\big[x\in c_i \leftrightarrow \sigma(x;z)\big]$$

ovvero esistono $f_1,\dots,f_n\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tali che

$$p(z) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};z)$$

ovvero

$$d\equiv_A b \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} f_i(a)=\sigma(\mathfrak{U};d)$$

Ma questo implica che $\mathrm{O}(a/A)$ è finita, perchè se $h\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ allora $h(a)=h(\sigma(\mathfrak{U},b))=\sigma(\mathfrak{U},h(b))=\sigma(\mathfrak{U},d)$ con $d\equiv_A b$, e perciò $h(a)=f_1(a)\vee\ldots\vee h(a)=f_n(a)$. □

12.9 Teorema *Per ogni* $A\subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ *ed ogni* $a\in\mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$ *le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. a *è Galois-algebrico su* A*;*
2. a *è algebrico su* A*;*
3. a *è definibile su* M *per ogni modello tale che* $A\subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} M$*;*

Dimostrazione Consideriamo prima il caso a reale. (Con notazione leggermente diversa, questo caso è già stato considerato nel paragrafo 10.2. Rivediamo comunque l'argomento.) Per dimostrare l'implicazione 1⇒2 assumiamo 1. Quindi $p(x)=\mathrm{tp}(a/A)$ è un tipo algebrico. Per compattezza, $p(x)$ contiene una formula algebrica, quindi 2.

Dimostriamo 2⇒3. Supponiamo che a sia algebrico su A. Sia $\varphi(x)\in L(A)$ una formula algebrica soddisfatta da a. Per un qualche n vale $\exists^{=n}x\,\varphi(x)$. Se $A\subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} M$ allora $\varphi(x)$ è equivalente ad una formula a parametri in M. Per l'algebricità $\varphi(M)=\varphi(\mathfrak{U})$. Quindi $a\in M$.

Per dimostrare 3⇒1 assumiamo ¬1. Quindi $\mathrm{O}(a/A)$ è infinita, e di conseguenza ha la stessa cardinalità di $\mathfrak{U}$. Fissiamo un arbitrario modello M tale che $A\subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} M$. Per ragioni di cardinalità, $\mathrm{O}(a/A)\nsubseteq M$, e quindi esiste un automorfismo $f\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tale che $f\,a\notin M$. Allora $a\notin f^{-1}[M]$ quindi ¬3. (Cfr. esercizio **??**.)

Ora consideriamo il caso a immaginario. Dimostriamo 1⇒2. Supponiamo che a sia definibile dalla formula $\sigma(x; b)$, per un qualche tupla reale b. Sia $p(w) = \mathrm{tp}(b/A)$. Per 1, l'equivalenza

$$\varepsilon(w, z) \quad = \quad \forall x \left[\sigma(x; w) \leftrightarrow \sigma(x; z)\right]$$

induce una partizione finita di $p(\mathcal{U})$. Per il lemma 12.7, esiste un'equivalenza finita $\varepsilon'(w, z)$ che coincide con $\varepsilon(w, z)$ su $p(\mathcal{U})$. Definiamo

$$\psi(x; z) \quad = \quad \exists w \left[\sigma(x; w) \wedge \varepsilon'(w, z)\right].$$

Chiaramente $\psi(x; b)$ è equivalente a $\sigma(x; b)$, ma $\psi(x; c)$ definisce al variare di c un numero finito di insiemi. Definiamo

$$\eta(x, y) \quad = \quad \forall z \left[\psi(x; z) \leftrightarrow \psi(y; z)\right].$$

Questa è una relazione di equivalenza finita, infatti se fissiamo $c_1, \ldots, c_n$ tali che $\psi(x; c_i)$ definiscano tutti gli insiemi della forma $\psi(\mathcal{U}, c)$ otteniamo

$$\eta(x, y) \quad \leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \left[\psi(x; c_i) \leftrightarrow \psi(y; c_i)\right].$$

Quindi $\eta(x, y)$, in quanto intersezione di n relazioni di equivalenza, ciascuna con 2 classi, ha al più 2^n classi. L'insieme $\psi(x; b)$ è unione di classi di $\eta(x, y)$. Infatti $\psi(x; b)$ è una classe di equivalenza di della relazione $\psi(x; b) \leftrightarrow \psi(y; b)$ che è raffinata da $\eta(x, y)$.

L'implicazione 2⇒3 segue dalla seguente osservazione. Se $\varepsilon(x, y) \in L(A)$ è un'equivalenza con n classi, allora queste sono definibili su A più un qualsiasi insieme di n tuple tra loro non equivalenti. La formula

$$\exists x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg\varepsilon(x_i, x_j)$$

vale in $\mathcal{U}$ e, per elementarità, vale in ogni modello che contiene A.

L'argomento per dimostrare 3⇒1 è lo stesso che nel caso reale. Fissiamo un modello M tale che $A \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}} M$. Per il lemma 12.8, se $\mathrm{O}(a/A)$ è infinita allora ha la cardinalità di $\mathcal{U}$ e per questioni di cardinalità esiste un $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che fa non è definibile su M. Quindi a non è definibile su $f^{-1}[M]$. □

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente proposizione.

12.10 Proposizione *Sia $A \subseteq \mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$.*

1. *Se $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A$ allora $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} B$ per un qualche $B \subseteq A$ finito.*
2. *$A \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A$.*
3. *$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A)$.* □

12.11 Esercizio Mostrare che per ogni $A \subseteq \mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$ e ogni coppia di tuple reali a, b, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $a \equiv_{\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A} b$;
2. $\varepsilon(a, b)$ per ogni $\varepsilon(x, y)$ relazione di equivalenza finita a parametri in A.

Soluzione: Supponiamo ¬2 e fissiamo $\varepsilon(x, y)$, un controesempio a 2. Sia $d \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A$ la classe di equivalenza di a. Allora $a \in d$ e $b \notin d$. Quindi ¬1. Viceversa, se ¬1, fissiamo $\varphi(x)$ una formula a parametri in $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A$ soddisfatta da a e non da b. L'insieme definito da $\varphi(x)$ appartiene ad $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}} A$ ed è quindi unione di classi di una equivalenza finita $\varepsilon(x, y)$ a parametri in A. Quindi $\neg\varepsilon(a, b)$ e così otteniamo $\neg 2$. $\square$

12.12 Esercizio Data una formula $\varphi(z, x)$, definiamo $\varepsilon(x, y) = \forall z\ [\varphi(z, x) \leftrightarrow \varphi(z, y)]$, chiaramente una relazione di equivalenza. Si dimostri che se $\varepsilon(x, y)$ ha un numero finito di classi anche la relazione di equivalenza definita da $\eta(z, w) = \forall x\ [\varphi(z, x) \leftrightarrow \varphi(w, x)]$ ha un numero finito di classi. $\square$

12.13 Esercizio Sia $\varepsilon(x, y)$ una formula e sia $p(x)$ un tipo. Se $\varepsilon(x, y)$ definisce una relazione di equivalenza su $p(\mathfrak{U})$, allora esiste una relazione di equivalenza $\eta(x, y)$ che coincide con $\varepsilon(x, y)$ su $p(\mathfrak{U})$. (Tutto con parametri in un qualche $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$.) $\square$

Capitolo 13

L'eliminazione degli immaginari.

Per tutto questo capitolo fissiamo un linguaggio L ed una teoria completa T senza modelli finiti. Fissiamo anche un modello saturo $\mathcal{U}$ di cardinalità $\kappa > |L| + \omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

13.1 L'eliminazione degli immaginari

Introduciamo due varianti di eliminazione degi immaginari: l'eliminazione debole è per alcune applicazioni più naturale dell'eliminazione forte.

13.1 Definizione *Diremo che T* ***ammette eliminazione degli immaginari*** *se per ogni insieme definibile a esiste una formula pura $\sigma(x;z)$, dove z è una tupla di lunghezza finita arbitraria, tale che*

ei $$\exists^{=1} z\, \forall x \left[x \in a \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z) \right]$$

Un testimone di $\exists^{=1} z$ in ei è detto ***parametro canonico*** *dell'insieme a. Un insieme può avere diversi parametri canonici, ovviamente ognuno relativo ad una diversa formula $\sigma(x;z)$.*

Diremo che T ammette eliminazione ***debole*** *degli immaginari se invece*

edi $$\exists^{=k} z\, \forall x \left[x \in a \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z) \right].$$

per un qualche intero positivo k.

È utile permettere a z di essere la tupla vuota, in questo caso leggiamo ei e edi omettendo $\exists^{=1} z$ ed $\exists^{=k} z$. Quindi ogni insieme $\varnothing$-definibile ha sempre almeno un parametro canonico: la tupla vuota. □

La definizione di eliminazione degli immaginari fa riferimento a elementi di $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$. Per poter parlare di una proprietà di T bisogna verificare che se vale in $\mathcal{U}$ allora vale anche in un qualsiasi altro modello saturo di T. Questo segue facilmente dal teorema 13.11, ma una dimostrazione diretta è anche semplice.

13.2 Esercizio Si dimostri che se ei e edi valgono in $\mathcal{U}$ allora valgono anche in qualsiasi altro modello saturo $\mathcal{V}$. □

Cominciamo con un teorema che caratterizza l'eliminazione debole.

13.3 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ammette eliminazione debole degli immaginari;*
2. *ogni immaginario a è definibile su $\operatorname{acl} a$, la sua chiusura algebrica reale.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Assumiamo la notazione della definizione 13.1. Da edi segue che le soluzioni della formula $\forall x\, [x \in a \leftrightarrow \sigma(x;z)]$ appartengono ad $\operatorname{acl} a$ ed ovviamente a è definibile su una qualsiasi di queste.

Dimostriamo 2⇒1. Possiamo assumere che a non sia $\varnothing$-definibile (per questi edi vale banalmente). Fissiamo una formula $\sigma(x;b)$ che definisce l'insieme a per una qualche tupla b algebrica su $\operatorname{acl} a$. Fissiamo quindi una formula algebrica $\delta(w)$ soddisfatta da b dove a occorre come parametro immaginario. Sia $\psi(w,z)$ la formula che si ottiene da $\delta(w)$ sostituendo le occorrenze di $x \in a$ con $\sigma(x;z)$. Quindi $\delta(w) \leftrightarrow \psi(w,c)$ per ogni c tale che $\forall x\, [x \in a \leftrightarrow \sigma(x;c)]$. La seguente formula è consistente

a $$\forall x\, \Big[x \in a \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z) \,\wedge\, \psi(z,z)\Big]$$

perché b è una sua soluzione. Quindi il teorema è dimostrato se verifichiamo che la formula a è algebrica. Mostreremo che le soluzioni di a sono anche soluzioni di $\delta(w)$. Sia c una qualsiasi soluzione di a. Quindi $\psi(c,c)$ deve essere vera, altrimenti a sarebbe vuoto e quindi $\varnothing$-definibile. Quindi otteniamo $\forall x\, [x \in a \leftrightarrow \sigma(x;c)]$, ma allora $\psi(w,c)$ è equivalente a $\delta(w)$ e da $\psi(c,c)$ segue che c è soluzione di $\delta(w)$. □

Diremo che a e b, due tuple di elementi di $\mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$, sono **interdefinibili** se $a \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$ e $b \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$, in breve, se $\operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) = \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$. Per il teorema 12.3 questo è equivalente ad affermare che $\operatorname{Aut}(\mathcal{U}/a) = \operatorname{Aut}(\mathcal{U}/b)$ ovvero ogni automorfismo che fissa a fissa anche b e viceversa.

13.4 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ammette eliminazione debole degli immaginari;*
2. *ogni immaginario è interdefinibile con un immaginario finito (un insieme finito).*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Assumiamo 1 sia a un immaginario. Sia b l'insieme delle soluzioni della formula

$$\forall x\, \Big[x \in a \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\Big].$$

Quindi b è finito e $b \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(a)$. Inoltre, a è definibile dalla formula $\exists z\, [z \in b \wedge \sigma(x;z)]$ e quindi $a \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$. Ora dimostriamo 2⇒1. Assumiamo $\operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) = \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$ per qualche b immaginario finito e mostriamo che a è definibile su $\operatorname{acl}(a)$. Questo è sufficiente per il teorema 13.3. Se $b_1,\dots,b_n$ sono gli elementi di b allora ovviamente $b_1,\dots,b_n \in \operatorname{acl}(a)$. Rimane solo da verificare che $a \in \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}}(b_1,\dots,b_n)$. Fissiamo una formula $\sigma(x,b)$ che definisce a e che usa b come parametro immaginario, se in questa formula sostituiamo le occorrenze di $t \in b$ con $t = b_1 \vee \dots \vee t = b_n$, otteniamo una formula $\varphi(x,b_1,\dots,b_n)$ che definisce a. □

Il seguente lemma è funzionale alla dimostrazione del teorema 13.6

13.5 Lemma *La seguente è una condizione sufficiente per l'eliminazione debole degli immaginari.*

a. *per ogni $A \subseteq \mathcal{U}^{\mathrm{eq}}$, ogni formula $\varphi(z) \in L(A)$ consistente ha una soluzione in $\operatorname{acl} A$.*

Dimostrazione Verifichiamo la condizione 2 del teorema 13.3. Sia $\sigma(x;c)$ una formula che definisce a. Usando a, la formula $\forall x\big[x \in a \leftrightarrow \sigma(x;z)\big]$ ha una soluzione b in $\operatorname{acl} a$. Quindi a è definibile su $\operatorname{acl} a$ da $\sigma(x;b)$. □

13.6 Teorema *Assumiamo che T sia fortemente minimale e che $\operatorname{acl}\varnothing$ sia infinito. Allora T ha eliminazione debole degli immaginari.*

Dimostrazione Dimostriamo la condizione a del lemma 13.5. Sia $\varphi(z)$ una formula consistente a parametri in un qualche $A \subseteq \mathfrak{U}^{\mathrm{eq}}$. Procediamo per induzione sull'arietà della tupla z. Se z è la tupla vuota è banalmente vero. Consideriamo la formula $\varphi(z,x)$ dove $|x| = 1$. Per ipotesi induttiva $\exists x\, \varphi(z,x)$ ha una soluzione $\operatorname{acl} A$. Sia c questa soluzione. Ora è sufficiente mostrare che $\varphi(c,x)$ ha soluzione in $\operatorname{acl} A$. Questa è una formula a parametri in $\operatorname{acl} A$ con una singola variabile libera. Quindi se è algebrica ha una soluzione in $\operatorname{acl}(\operatorname{acl} A) = \operatorname{acl} A$, altrimenti è co-algebrica (perchè T è fortemente minimale) ed ha comunque una soluzione in $\operatorname{acl} A \supseteq \operatorname{acl}\varnothing$ che per ipotesi è un insieme infinito. □

Passiamo a considerare l'eliminazione (forte) degli immaginari.

13.7 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T ammette eliminazione degli immaginari;*
2. *ogni immaginario a è definibile su $\operatorname{dcl} a$, la sua chiusura definibile reale;*
3. *ogni immaginario è interdefinibile con una tupla finita di elementi reali.*

Dimostrazione La dimostrazione di $1\Leftrightarrow 2$ è identica a quella del teorema 13.3, si sostituisca algebrico con definibile e di prenda $k = 1$. L'equivalenza $2\Leftrightarrow 3$ è ovvia. □

13.8 Teorema *La teoria T^p_{acf} ammette eliminazione degli immaginari.*

Dimostrazione Dal teorema 13.6 sappiamo che T^p_{acf} ha eliminazione debole degli immaginari. Quindi per il teorema 13.4 è sufficiente dimostrare che T^p_{acf} elimina gli immaginari finiti. Sia $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ dove ogni b_i è una tupla $b_{i,1}, \dots, b_{i,m}$. Ad un tale b associamo il termine

$$t(b_1, \dots, b_n, x, y) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} \Big(x - \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}\, y_k\Big).$$

Abbiamo scritto y per la tupla di variabili $\langle y_1, \dots, y_m\rangle$. Si osservi che un automorfismo che fissa b, come insieme, mappa questo termine in uno equivalente. Ovvero se $f b = b$ allora $t(b_1, \dots, b_n, x, y) = t(f b_1, \dots, f b_n, x, y)$ per ogni x, y. Diciamo f fissa l'interpretazione del termine t. Riscriviamo t come somma di monomi e sia c la tupla che elenca i coefficienti di questi monomi in un fissato ordine. Allora c determina univocamente l'interpretazione di t e viceversa, la tupla c è univocamente determinata dall'interpretazione di t. Quindi tutti gli automorfismi che fissano b fissano c, ovvero $\operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}} c \subseteq \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}} b$. Per dimostrare l'inclusione inversa sia f un automorfismo che fissa c. Allora $t(b_1, \dots, b_n, x, y) = t(f b_1, \dots, f b_n, x, y)$ per ogni x, y. Dalla forma di t è immediato che possiamo associare ad ogni i un unico i' tale che

$$\sum_{k=1}^{m} f b_{i,k}\, y_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} b_{i',k}\, y_k.$$

Questo implica che $f b_i = b_{i'}$, ovvero f fissa l'insieme b. Per l'arbitrarietà di f, possiamo concludere che $\operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}} b \subseteq \operatorname{dcl}^{\mathrm{eq}} c$. $\square$

13.9 Esercizio In letteratura generalmente per immaginario si intende una classe di equivalenza di una relazione di equivalenza $\varnothing$-definibile. Questo esercizio richiede di dimostrare che la nostra definizione e quella standard sostanzialmente coincidono. (È solo un cambiamento di punto focale: qui, per accorciare la filiera dei concetti, trattiamo con insieme stesso invece che con parametri che lo definiscono.)

Assumiamo la condizione ei valga per ogni a che è classe di di una equivalenza $\varnothing$-definibile. Si dimostri che T ha eliminazione degli immaginari. Suggerimento: si pensi alla relazione di equivalenza $\forall x\, [\sigma(x;z) \leftrightarrow \sigma(x;w)]$. $\square$

13.10 Esercizio Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T ha eliminazione debole degli immaginari;
2. per ogni immaginario a esiste il minimo insieme algebricamente chiuso $A \subseteq \mathfrak{U}$ su cui a è definibile (ovvero per ogni $B \subseteq \mathfrak{U}$, se a è definibile su B, allora $A \subseteq \operatorname{acl} B$);

13.2 L'eliminazione uniforme

Riformuliamo in modo equivalente la condizione per l'eliminazione degli immaginari. Per ogni formula pura $\varphi(x, w)$ e per ogni tupla reale c esiste una formula pura $\sigma(x;z)$ tale che

$$\exists^{=1} z\, \forall x \Big[\varphi(x, c) \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\Big].$$

A priori, la formula $\sigma(v,z)$ potrebbe dipendere in modo assolutamente selvaggio da c. Diremo che ***T* ammette eliminazione uniforme degli immaginari** se $\sigma(x;z)$ dipende solo da $\varphi(x, w)$. Ovvero, se per ogni formula pura $\varphi(x, w)$ esiste una formula pura $\sigma(x;z)$ tale che

$$\text{eui} \qquad \forall w\, \exists^{=1} z\, \forall x \Big[\varphi(x, w) \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\Big].$$

Il seguente teorema mostra che l'uniformità si ottiene gratis dalla eliminazione semplice degli immaginari.

13.11 Teorema *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *T ha eliminazione uniforme degli immaginari;*
2. $\operatorname{dcl}\varnothing$ *contiene almeno due elementi e T ha eliminazione degli immaginari.*

Dimostrazione Per dimostrare 1⇒2 assumiamo l'eliminazione uniforme ed esibiamo due elementi reali definibili. Prendendo come w la coppia w_1, w_2 e come $\varphi(x, w)$ la formula $w_1 = w_2$ da eui otteniamo una formula pura $\sigma(x;z)$ tale che

$$\forall w_1, w_2\, \exists^{=1} z\, \forall x \Big[w_1 = w_2 \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\Big].$$

Questa implica sia $\exists^{=1} z\, \forall x\, \sigma(x;z)$ che $\exists^{=1} z\, \forall x \neg\sigma(x;z)$. I testimoni di queste due formule sono due distinte tuple in $\operatorname{dcl}\varnothing$. Quindi $\operatorname{dcl}\varnothing$ contiene almeno due elementi.

Per dimostrare 2⇒1, assumiamo 2 e fissiamo una formula $\varphi(x, w)$ e chiamiamo 0 ed 1 i due elementi $\varnothing$-definibili che esistono per ipotesi. Vogliamo dimostrare l'esistenza di una formula pura $\sigma(x;z)$ tale che

$\sharp$ $$\forall w\, \exists^{=1} z\, \forall x \left[\varphi(x,w) \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\right].$$

Possiamo assumere che $\varphi(x,a)$ sia consistente per ogni a, infatti se necessario possiamo sostituire $\varphi(x,w)$ con la formula

$$\varphi^*(x,y,w) \;=\; \left[\varphi(x,w) \,\wedge\, y{=}0\right] \,\vee\, \left[\neg\exists x\, \varphi(x,w) \,\wedge\, y{\neq}0\right].$$

(La tupla x,y gioca il ruolo della x.) Chiaramente $\varphi^*(x,y,a)$ è consistente per ogni a e inoltre $\varphi^*(x,0,w)$ è equivalente a $\varphi(x,w)$. Quindi se esiste $\sigma^*(x,y,z)$ tale che

$$\forall w\, \exists^{=1} z\, \forall x,y \left[\varphi^*(x,y,w) \;\leftrightarrow\; \sigma^*(x,y,z)\right].$$

allora formula $\sigma^*(x,0,z)$ è come richiesto in $\sharp$. (Il lettore può verificare l'unicità della soluzione in z tenendo presente che il valore di verità di $\varphi^*(x,y,w)$ è costante per $y{\neq}0$.)

Quindi assumiamo che $\varphi(x,a)$ sia consistente per ogni a e proseguiamo nella dimostrazione. Sia $p(w)$ il tipo che contiene le formule

$$\neg\exists^{=1} z\, \forall x \left[\varphi(x,w) \;\leftrightarrow\; \sigma(x;z)\right].$$

al variare di $\sigma(x;z)$ tra le formule pure. Poiché abbiamo assunto l'eliminazione degli immaginari, $p(w)$ non può essere coerente. Quindi esistono alcune formule $\sigma_i(x,z)$ tali che

$\natural$ $$\forall w \bigvee_{i=0}^{n} \exists^{=1} z\, \forall x \left[\varphi(x,w) \;\leftrightarrow\; \sigma_i(x,z)\right].$$

Il teorema è dimostrato se riusciamo in qualche modo a spostare la disgiunzione immediatamente davanti alle formule $\sigma_i(x,z)$.

Possiamo assumere che se $\sigma_i(x,b)$ è consistente allora non esiste $c{\neq}b$ tale che $\sigma_i(x,b) \leftrightarrow \sigma_i(x,c)$. Infatti se così non fosse è sufficiente sostituire $\sigma_i(x,z)$ con

$$\sigma_i(x,z) \,\wedge\, \neg\exists y \left[y{\neq}z \wedge \forall x \left[\sigma_i(x,y) \leftrightarrow \sigma_i(x,z)\right]\right].$$

Poiché $\varphi(x,a)$ è consistente per ogni a, la sostituzione non inficia la validità di $\natural$. Possiamo anche assumere che se $\sigma_i(x,b)$ è consistente allora non esiste $(c,j){\neq}(b,i)$ tale che $\sigma_i(x,b) \leftrightarrow \sigma_j(x,c)$. Se così non fosse possiamo sostituire $\sigma_i(x,z)$ con

$$\sigma_i(x,z) \,\wedge\, \bigwedge_{j<i} \neg\exists y\, \forall x \left[\sigma_j(x,y) \leftrightarrow \sigma_i(x,z)\right].$$

Di nuovo la consistenza di $\varphi(x,a)$ garantisce la validità di $\natural$.

Ora fissiamo delle tuple distinte $d_0,\ldots,d_n$ tutte della stessa lunghezza e tutte $\varnothing$-definibili (avendo a disposizione 2 tuple $\varnothing$-definibili possiamo facilmente definire $d_0,\ldots,d_n$). Verifichiamo che da $\natural$ segue

$$\forall w\, \exists^{=1} z,y\, \forall x \left[\varphi(x,w) \;\leftrightarrow\; \bigvee_{i=1}^{n} \left[\sigma_i(x,z) \,\wedge\, y{=}d_i\right]\right].$$

(La tupla z,y gioca il ruolo della z.) Dato a, la consistenza di

$\flat$ $$\forall x \left[\varphi(x,a) \;\leftrightarrow\; \bigvee_{i=1}^{n} \left[\sigma_i(x,z) \,\wedge\, y{=}d_i\right]\right]$$

segue immediatamente da $\natural$. Per mostrare che la soluzione è unica osserviamo che se anche $b,d_i{\neq}c,d_j$ fossero due soluzioni di $\flat$ allora $\sigma_i(x,b) \leftrightarrow \sigma_j(x,c)$ per qualche $(b,i){\neq}(c,j)$ contrariamente a quanto assunto sulla formula $\sigma(x;z)$. □

13.12 Esercizio Si dimostri che T ha eliminazione uniforme degli immaginari se e solo se per ogni relazione di equivalenza 0-definibile esiste una funzione 0-definibile che sceglie un rappresentante per ogni classe. Ricordiamo che una funzione è detta definibile se il suo grafo è definibile. Dire che f sceglie un rappresentante per ogni classe significa che $a \sim fa = fb$ per ogni $a \sim b$. $\square$

Capitolo 14

Indiscernibili e indipendenza

Lavori in corso

Vietato l'accesso ai non addetti ai lavori

Per tutto questo capitolo fissiamo un linguaggio L ed una teoria completa T senza modelli finiti. Fissiamo anche un modello saturo $\mathcal{U}$ di cardinalità κ, un cardinale inaccessibile maggiore di $|L|+\omega$. La notazione e le assunzioni implicite sono quelle presentate nel paragrafo 8.3.

14.1 Tipi invarianti

Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$, dove z è una tupla possibilmente infinita. Scriveremo

$$O(\mathcal{D}/A) \quad = \quad \big\{f[\mathcal{D}] \;:\; f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)\big\}$$

Diremo che $\mathcal{D}$ è un **insieme invariante su A**, oppure **A-invariante** se $O(\mathcal{D}/A) = \{\mathcal{D}\}$. Per omogeneità, gli insiemi A-invarianti sono unione di classi di equivalenza della relazione $\equiv_A$, ovvero unione di insiemi della forma $p(\mathcal{U})$ per $p \in S_z(A)$. Quindi il numero degli insiemi invarianti è $2^{|S_z(A)|}$, dove $|S_z(A)| \leq 2^{|L_z(A)|}$. Diremo che $\mathcal{D}$ è **invariante** tout court se è invariante su qualche A. Poiché abbiamo richiesto che κ sia inaccessibile, esistono κ insiemi invarianti.

Ora sia x una tupla di variabili possibilmente infinita e sia $p(x) \subseteq L(\mathcal{U})$. Diremo che p è un **tipo invariante su A**, oppure **A-invariante**, se per ogni formula $\varphi(x,z)$ pura (la tupla x è fissa mentre z varia con φ)

i1 $\quad \varphi(x,a) \in p \;\Leftrightarrow\; \varphi(x,fa) \in p \qquad$ per ogni ogni $a \in \mathcal{U}^{|z|}$ ed ogni $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$.

È possibile identificare un tipo con la famiglia di insiemi della forma

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} \quad = \quad \big\{a \in \mathcal{U}^{|z|} \;:\; \varphi(x,a) \in p\big\}$$

al variare di $\varphi(x,z)$ tra le formule pure. Allora dire che p è invariante su A è equivalente ad affermare che gli insiemi $\mathcal{D}_{p,\varphi}$ sono tutti invarianti su A.

Diremo che p **non splitta su A** se per ogni formula pura $\varphi(x,z)$

i2 $\quad a \equiv_A a' \;\Rightarrow\; \big(\varphi(x,a) \in p \Leftrightarrow \varphi(x,a') \in p\big) \qquad$ per ogni $a, a' \in \mathcal{U}^{|z|}$.

Quando p è completo i2 diventa

i2' $\quad a \equiv_A a' \;\Rightarrow\; \varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,a') \in p$

Per l'omogeneità di $\mathfrak{U}$, non splittare è equivalente ad essere invariante. Un'ulteriore formulazione: p è invariante su A se e solo se

i3 $\quad a \equiv_A a' \;\Rightarrow\; a \equiv_{A,b} a' \qquad$ per ogni $a, a' \in \mathfrak{U}^{|z|}$ e per ogni $b \vDash p_{\restriction A,a,a'}$.

14.2 Tipi finitamente soddisfacibili e coeredi

Sia $p(x) \subseteq L(\mathfrak{U})$ un tipo. Diremo che p è **finitamente soddisfacibile** in A se $\varphi(A) \neq \varnothing$ per ogni $\varphi(x)$ congiunzione di formule in p. Un tipo p' che estende p ed è finitamente soddisfacibile in A si dice essere un **coerede** di p su A, se p' è un tipo globale lo chiameremo **coerede globale**.

È importante da tener presente che per elementarità ogni tipo $p(x) \subseteq L(M)$ è finitamente soddisfacibile in M.

14.1 Proposizione *Sia $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale. Se p è finitamente soddisfacibile in A, allora p è A-invariante.*

Dimostrazione Se p non contiene la formula $\varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,a')$, per completezza contiene la formula $\varphi(x,a) \nleftrightarrow \varphi(x,a')$. Ma p è finitamente soddisfatto in A, quindi esiste $c \in A^{|x|}$ tale che $\varphi(c,a) \nleftrightarrow \varphi(c,a')$. Quindi $a \not\equiv_A a'$. Questo dimostra i2'. □

14.2 Lemma *Sia $p(x) \subseteq L(B)$ un tipo finitamente soddisfacibile in A e sia b un elemento arbitrario. Allora $p(x)$ può essere esteso ad un tipo $p'(x) \in S(B,b)$ finitamente soddisfacibile in A.*

Dimostrazione Esiste un tipo $p'(x) \subseteq L(B,b)$ massimale tra i tipi finitamente soddisfacibili che contengono p. Verifichiamo che p' è completo. Se per assurdo p' non contiene né $\varphi(x,b)$ né $\neg\varphi(x,b)$ per una qualche formula $\varphi(x,z) \in L(B)$, allora né $p' \cup \{\varphi(x,b)\}$ né $p' \cup \{\neg\varphi(x,b)\}$ sono finitamente soddisfacibili in A. Allora per una qualche formula $\psi(x) \in p'$ né $\psi(x) \wedge \varphi(x,b)$ né $\psi(x) \wedge \neg\varphi(x,b)$ è soddisfatta in A. Quindi $\psi(x)$ non è soddisfatta in A, ma questo contraddice la soddisfacibilità finita di p'. □

14.3 Corollario *Ogni $p(x) \subseteq L(\mathfrak{U})$ tipo finitamente soddisfacibile in A ha un coerede globale.* □

14.3 Sequenze di Morley e indiscernibili

Nel seguito α denota un ordinale qualsiasi, ed x è una tupla di variabili possibilmente infinita. Se $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ è un tipo globale A-invariante, una sequenza $c = \langle c_i : i < \alpha \rangle$ tale che

1. $\quad c_i \;\vDash\; p_{\restriction A, c_{\restriction i}}(x)$

si chiama una **sequenza di Morley** di p su A. In particolare se p è finitamente soddisfacibile in A diremo che c è una **sequenza di coeredi**. Spesso diremo semplicemente sequenza di Morley o di coeredi senza specificare il tipo globale $p(x)$ o specificando al suo posto un tipo $q(x) \subseteq L(A)$. In questo caso si intende che $p(x)$ è un qualsiasi tipo globale che estende $q(x)$ ed è invariante su A, rispettivamente, finitamente soddisfacibile in A.

14.4 Lemma *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. $c = \langle c_i : i < \alpha\rangle$ *è una sequenza di coeredi;*

b. $c_{n+1} \equiv_{A,c_{\restriction n}} c_n$ *e inoltre se* $\varphi(c_{\restriction n}, c_n)$ *allora esiste* $a \in A^{|x|}$ *tale che* $\varphi(c_{\restriction n}, a)$. *(Per ogni* $n < \alpha$ *e per ogni formula* $\varphi(x_{\restriction n}, x) \in L(A)$*.)*

Dimostrazione Dimostriamo a⇒b. Assumiamo a e sia $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale finitamente soddisfatto in A tale che $c_i \models p_{\restriction A, c_{\restriction i}}(x)$. La richiesta $c_{n+1} \equiv_{A,c_{\restriction n}} c_n$ è immediata. Se $\varphi(c_{\restriction n}, c_n)$ allora $\varphi(c_{\restriction n}, x)$ appartiene a p e quindi $\varphi(c_{\restriction n}, A) \neq \varnothing$ per la soddisfacibilità finita di p.

Dimostriamo ora b⇒a. Assumiamo b e sia

$$q(x) \quad = \quad \big\{\varphi(c_{\restriction n}, x) \in L(A, c_{\restriction n}) \ : \ \varphi(c_{\restriction n}, c_n), \ \ n < \alpha\big\}.$$

Chiaramente c è una sequenza di Morley di un qualsiasi tipo globale che estende q. Quindi è sufficiente mostrare che q è finitamente soddisfatto in A. Ogni singola formula in q è finitamente soddisfatta in A per quanto richiesto da b, quindi è sufficiente verificare che q è chiuso per congiunzione. Fissiamo due formule in q, diciamo $\varphi_i(c_{\restriction n_i}, x)$ per $i = 1, 2$. Queste formule sono soddisfatte da c_{n_i}, rispettivamente. Per ipotesi $c_{n+1} \equiv_{A,c_{\restriction n}} c_n$ quindi entrambe le formule sono soddisfatte da c_n con $n = \max\{n_1, n_2\}$. □

14.5 Definizione *Dato un insieme I linearmente ordinato dalla relazione $<_I$, diremo che $c = \langle c_i : i \in I\rangle$ è una* **sequenza di indiscernibili** *su A se se per ogni $n < \omega$*

$$c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}} \ \equiv_A \ c_{j_0}, \ldots, c_{j_{n-1}} \quad \text{per ogni } i_0 <_I \cdots <_I i_{n-1} \text{ ed ogni } j_0 <_I \cdots <_I j_{n-1}.. \qquad \square$$

Per snellire il linguaggio introduciamo alcune abbreviazioni (non sono terminologia standard). Scriveremo $\boldsymbol{c' \sqsubseteq c}$ intendendo che $c' = c_{i_0} \ldots, c_{i_n}$ con $i_0 <_I \cdots <_I i_n$ e chiameremo c' una **sottosequenza finita** di c. Se $J \subseteq I$ scriveremo $c_{\restriction J}$ per la sottosequenza $\langle c_j : j \in J\rangle$.

Il seguente lemma mostra che le sequenze di Morley sono in particolare sequenze di indiscernibili.

14.6 Lemma *Sia $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale A-invariante e sia $c = \langle c_i : i < \alpha\rangle$ una sequenza di Morley di p su A. Allora c è una sequenza di indiscernibili su A.*

Dimostrazione Dimostriamo per induzione su $n < \omega$ che

$$c_0, \ldots, c_{n-1} \ \equiv_A \ c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}} \quad \text{per ogni } i_0 < \cdots < i_{n-1} < \alpha.$$

Per $n = 0$ l'affermazione è vuota, quindi assumiamo che valga per n e dimostriamo che

$$c_0, \ldots, c_{n-1}, c_n \ \equiv_A \ c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}, c_{i_n}.$$

vale per ogni $i_0 < \cdots < i_{n-1} < i_n < \alpha$. Osserviamo che, essendo c una sequenza di Morley, $c_n \equiv_{A,c_{\restriction n}} c_m$ per ogni $m > n$. Quindi possiamo equivalentemente dimostrare che

$$c_0, \ldots, c_{n-1}, c_{i_n} \ \equiv_A \ c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}, c_{i_n}.$$

Ma questa è la stessa cosa che scrivere

$$c_0, \ldots, c_{n-1} \ \equiv_{A, c_{i_n}} \ c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}.$$

E quest'ultima equivalenza segue dall'ipotesi induttiva e dall'invarianza di p (cfr. i3 del paragrafo 14.1). □

Se c è una sequenza di indiscernibili su A questo è un tipo completo.

14.7 Proposizione *Sia I un insieme ordinato di cardinalità $\le \kappa$ e sia $J \subseteq I$ Sia $c = \langle c_j : j \in J\rangle$ una sequenza di indiscernibili su A. Allora esiste una sequenza $a = \langle a_i : i \in I\rangle$ di indiscernibili su A che estende c (cioè $c = a_{\restriction J}$).*

Dimostrazione Sia $z = \langle z_i : i \in I\rangle$ una sequenza di variabili. Definiamo

$$q(z) \quad = \quad \Big\{\varphi(z') \in L(A) \ : \ \text{dove } z' \sqsubseteq z \ \text{ e } \ \varphi(c') \ \text{ per ogni } \ c' \sqsubseteq c,\ |c'| = |z'|\Big\}$$

È immediato che q è un tipo completo e che se $a \vDash q$ allora a è una sequenza di indiscernibili tale che $a_{\restriction I} \equiv_A c$. Quindi esiste $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$ tale che $f a$ è una sequenza di indiscernibili che prolunga c. □

14.8 Proposizione *Sia c una sequenza infinita di indiscernibili su A. Allora esiste un modello $M \supseteq A$ tale che c è indiscernibile su M.*

La proposizione è generalmente dimostrata applicando il teorema di Erdős-Rado che vedremo più avanti. Qui, come esercizio sui coeredi, riportiamo una dimostrazione con metodi meno sofisticati.

Dimostrazione Supponiamo per cominciare che $c = \langle c_i : i < \omega\rangle$. Il seguente tipo è finitamente soddisfacibile in A, c:

$$p(x) \quad = \quad \Big\{\varphi(x) \in L(A, c) \ : \ \varphi(c_i) \text{ per ogni } i \text{ sufficientemente grande}\Big\}$$

Si noti che p è un tipo completo finitamente soddisfatto in c. Sia $a = \langle a_i : i < \omega\rangle$ una sequenza coeredi su c di $p(x)$. Verifichiamo che c è una sequenza di indiscernibili su A, a, ovvero che il seguente enunciato 1_n vale per ogni n ed ogni formula $\varphi \in L(A)$.

1_n $\qquad \varphi(c', a_{\restriction n}) \ \leftrightarrow \ \varphi(c'', a_{\restriction n})$ per qualsiasi $c', c'' \sqsubseteq c$ di uguale lunghezza finita.

Si osservi che 1_{n+1} è una conseguenza di 1_n e del seguente 2_n (rimpiazzando ψ con la formula opportuna)

2_n $\quad \psi(c, a_{\restriction n}, a_n) \ \rightarrow \ \psi(c, a_{\restriction n}, c_i)$ per qualsiasi i sufficientemente grande.

Dimostriamo 2_n per induzione su n. Verifichiamo 2_0. Supponiamo $\psi(a_0)$. Poiché p è completo, $\psi(x)$ appartiene a p e dalla definizione di p otteniamo 2_0. Assumiamo 2_{n-1}. Poiché a è una sequenza di coeredi, da $\psi(c, a_{\restriction n}, a_n)$ otteniamo $\psi(c, a_{\restriction n}, c_i)$ vale per qualche i. Possiamo assumere che $i > j$ per ogni c_j che occorre in $\psi(c, a_{\restriction n}, a_n)$. (Perché? Qui si usa $|c| = \omega$.) Quindi da 1_{n-1} otteniamo $\psi(c, a_{\restriction n}, c_i)$ per ogni i sufficientemente grande.

Da quanto dimostrato segue che c, a è una sequenza di indiscernibili su A. In particolare $f a = c$ per qualche $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}/A)$. Ma a è una sequenza di indiscernibili su qualsiasi modello N che contiene c. Di conseguenza c è una sequenza di indiscernibili su $f[N]$. Quindi $f[N]$ è il modello M richiesto. □

14.9 Esercizio Si dimostri che se $a \equiv_M b$ allora esiste una sequenza $\langle c_i : i \in \omega\rangle$ di indiscernibili su M tale che $c_0 = a$ e $c_1 = b$.

14.4 Una dimostrazione del teorema di Ramsey

Vediamo una semplice applicazione delle sequenze di coeredi. Introduciamo la seguente notazione (fastidiosamente oscura, ma standard). Scriveremo $[X]^n$ per l'insieme dei sottoinsiemi di X di cardinalità n. Dati quattro cardinali λ, η e n, k scriveremo $\lambda \to (\eta)^n_k$

se per ogni $f : [\lambda]^n \to k$ esiste un $X \subseteq \lambda$ di cardinalità $\geq \eta$ omogeneo per f, ovvero tale che f è costante sull'insieme $[X]^n$.

14.10 Teorema *Per n, k un'arbitraria coppia di numeri naturali positivi $\omega \to (\omega)^n_k$.*

Dimostrazione Sia $f : [\omega]^n \to k$ una funzione data. Sia L un linguaggio che contiene i simboli di relazione n-aria $r_0, \ldots, r_{k-1}$. Sia M una struttura con dominio ω con interpretazione

$$r_i^M \quad = \quad \Big\{\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \;:\; \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in [\omega]^n \;\text{ e }\; f\big(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}\big) = i\Big\}$$

Possiamo assumere che M sia sottostruttura elementare di un modello saturo $\mathfrak{U}$. Sia $c = \langle c_i : i < \omega\rangle$ una sequenza di coeredi su M. Questa sequenza esiste in $\mathfrak{U}$. In M vale

$$\bigwedge_{0 \leq i < j < n} x_i \neq x_j \quad \to \quad \bigvee_{i<k} r_i(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

Segue che tutte le n-tuple di elementi distinti di c soddisfano la stessa relazione r_h che, per risparmiare sugli indici, nel seguito indicheremo semplicemente con r. Il teorema segue dall'esistenza di una sequenza $a = \langle a_i : i < \omega\rangle$ con la stessa proprietà, ma costituita da elementi di M. (Si osservi che nessuno degli elementi di c appartiene ad M.) Questa sequenza a è costruita per induzione come segue.

Assumiamo come ipotesi induttiva che che tutte le tuple di n elementi distinti di $a_{\restriction m}, c_{\restriction n}$ soddisfano r e definiamo a_m. Osserviamo che per indiscernibilità la stessa proprietà vale per la tupla $a_{\restriction m}, c_{\restriction n}, c_n$. Questo può essere scritto con una formula $\varphi(a_{\restriction m}, c_{\restriction n}, c_n)$. Quindi esiste un $a_m \in M$ tale che $\varphi(a_{\restriction m}, c_{\restriction n}, a_m)$. Chiaramente $a_{\restriction m}, a_m, c_{\restriction n}$ soddisfa l'ipotesi induttiva. □

14.5 Il prodotto di tipi

La seguente proposizione mostra che possiamo ragionevolmente parlare di tipo delle di Morley di p. Questo paragrafo è dedicato alla descrizione sintattica di questo tipo.

14.11 Proposizione *Sia $p \in S_x(\mathfrak{U})$ un tipo globale A-invariante e supponiamo che a e b siano due sequenze di Morley di p su A. Allora $a \equiv_A c$.*

Dimostrazione Per indiscernibilità, è sufficiente mostrare che $a_{\restriction i} \equiv_A c_{\restriction i}$ per ogni $i < \omega$. Ragioniamo per induzione, assumiamo l'equivalenza come ipotesi induttiva, fissiamo una formula $\varphi(\bar{x}_{\restriction i}, x) \in L(A)$ e dimostriamo che

$$\varphi(a_{\restriction i}, a_i) \quad \leftrightarrow \quad \varphi(c_{\restriction i}, c_i)$$

Se $\varphi(a_{\restriction i}, a_i)$ allora $\varphi(a_{\restriction i}, x) \in p$. Per l'ipotesi induttiva e per l'invarianza di p otteniamo che anche $\varphi(c_{\restriction i}, x) \in p$ e di qui $\varphi(c_{\restriction i}, c_i)$. L'equivalenza segue per simmetria. □

Per poter semplificare la definizione 14.13 abbiamo bisogno del seguente lemma tecnico:

14.12 Lemma *Dati $p(x), q(y) \in S(\mathfrak{U})$, e due insiemi A_i, per $i = 0, 1$ su cui $q(y)$ è invariante, fissiamo $\varphi(x, y) \in L(A_0 \cap A_1)$ e delle tuple a_i, b_i tali che $a_i \vDash p_{\restriction A_i}$ e $b_i \vDash q_{\restriction A_i, a_i}$. Allora $\varphi(a_0, b_0) \leftrightarrow \varphi(a_1, b_1)$.*

Dimostrazione Supponiamo per cominciare che $A_0 = A_1$ e denotiamo questo insieme con A. Assumiamo $\varphi(a_0, b_0)$ e quindi, per la completezza di q, che $\varphi(a_0, y) \in q$. Per la completezza di p abbiamo che $a_0 \equiv_A a_1$. Quindi, per l'invarianza di q otteniamo $\varphi(a_1, y) \in q$ e da questo segue $\varphi(a_1, b_1)$.

Per concludere, consideriamo il caso $A_0 \neq A_1$. Sia $A = A_0 \cup A_1$ e fissiamo $a_2 \models p_{\restriction A}$ e $b_2 \models q_{\restriction A, a_2}(y)$. Per quanto sopra dimostrato otteniamo $\varphi(a_0, b_0) \leftrightarrow \varphi(a_2, b_2)$ ed anche $\varphi(a_2, b_2) \leftrightarrow \varphi(a_1, b_1)$. □

Conviene immaginarsi questa operazione di prodotto come il passo induttivo per la costruzione di una sequenza di Morley.

14.13 Definizione *Dati $p(x), q(y) \in S(\mathfrak{U})$ dove $q(y)$ è un tipo invariante, definiamo il prodotto di p e q come il tipo:*

$$\boldsymbol{p(x) \otimes q(y)} \quad = \quad \Big\{\varphi(x, y) \ : \ \textit{esistono } a, b \models \varphi(x, y) \ \wedge \ p_{\restriction A}(x) \ \wedge \ q_{\restriction A, a}(y)\Big\}$$

L'insieme A nella definizione è uno qualsiasi che contiene i parametri di $\varphi(x, y)$ e su cui $q(y)$ è invariante. Il lemma 14.12 assicura che la definizione non dipende dal particolare insieme scelto. □

Il lemma 14.12 ha anche la seguente importante conseguenza:

14.14 Corollario *Se $p(x), q(y) \in S(\mathfrak{U})$ e $q(y)$ è invariante, allora $p(x) \otimes q(y)$ è un tipo completo.*

Dimostrazione Sia $\varphi(x, y) \in L(\mathfrak{U})$. Fissiamo un insieme A contenente i parametri di $\varphi(x, y)$ e su cui $q(y)$ sia invariante. Fissiamo a, b arbitrari tali che $a \models p_{\restriction A}(x)$ e $b \models q_{\restriction A, a}(y)$. Dal lemma 14.12 otteniamo che $\varphi(x, y) \in p(x) \otimes q(y)$ se e solo se $\varphi(a, b)$. □

14.15 Corollario *Se $p(x), q(y) \in S(\mathfrak{U})$ sono tipi globali A-invarianti, allora anche $p(x) \otimes q(y)$ è A-invariante.*

Dimostrazione Sia $\varphi(x, y, z) \in L$, sia c arbitrario tale che $\varphi(x, y, c) \in p(x) \otimes q(y)$, e sia $c' \equiv_A c$. Fissiamo $a \models p_{\restriction A, c, c'}$. Poiché p è invariante su A, otteniamo $a, c \equiv_A a, c'$. Ora fissiamo un b arbitrario tale che $b \models q_{\restriction A, c, c', a}$. Per l'invarianza di q su A otteniamo $a, b, c \equiv_A a, b, c'$ e quindi $\varphi(a, b, c')$. Seque che $\varphi(x, y, c) \in p(x) \otimes q(y)$. □

14.16 Proposizione *Se $p(x), q(y) \in S(\mathfrak{U})$ sono finitamente soddisfacibili su A, allora $p(x) \otimes q(y)$ è finitamente soddisfacibile su A.*

Dimostrazione Sia $\varphi(x, y) \in p(x) \otimes q(y)$ arbitraria e fissiamo un B contenente A ed i parametri di $\varphi(x, y)$. Quindi esistono $a, b \models \varphi(x, y) \wedge p_{\restriction B}(x) \wedge q_{\restriction B, a}(y)$. Allora $\varphi(a, y) \in q$, e quindi $\varphi(a, b')$ per un qualche $b' \in A$. Allora $\varphi(x, b') \in p$, e quindi $\varphi(a', b')$ per qualche $a' \in A$. □

Dato $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale invariante. Sia $\langle x_i : i < \omega \rangle$ una sequenza di tuple di variabili con $|x| = |x_i|$. Definiamo induttivamente

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(x_0) &= p(x_0); \\
p^{(n+1)}(x_0, \dots, x_n) &= p^{(n)}(x_0, \dots, x_{n-1}) \otimes p(x_n); \\
p^{(\omega)}(x_i : i < \omega) &= \bigcup_{n < \omega} p^{(n+1)}(x_0, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

La seguente proposizione giustifica la definizione di $p^{(\omega)}$, la dimostrazione è immediata.

14.17 Proposizione *Sia $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale A-invariante. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. $\langle c_i : i < \omega \rangle$ *è una sequenze di Morley di p su A;*

2. $\langle c_i : i < \omega \rangle \vDash p^{(\omega)}|_A$

La seguente proposizione tornerà utile nei prossimi paragrafi, si osservi che non è una conseguenza della proposizione 14.17 perché qui l'invarianza su A non è tra le ipotesi.

14.18 Proposizione *Sia $p(x) \in S(\mathfrak{U})$ un tipo globale invariante ed A un insieme arbitrario. Allora ogni $\langle c_i : i < \omega \rangle \vDash p^{(\omega)}|_A$ è una sequenza di indiscernibili su A.*

Dimostrazione È sufficiente verificare che se $\langle c_i : i < \omega \rangle \vDash p^{(\omega)}|_A$ allora $c_{i_0}, \ldots, c_{i_n} \vDash p^{(n+1)}|_A$ per ogni $i_0 < \cdots < i_n < \omega$. $\square$

Capitolo 15

Tipi forti

Lavori in corso

Vietato l'accesso ai non addetti ai lavori

15.1 Tipi forti di Lascar

Sia z una tupla possibilmente infinita. Diremo che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ è **quasi A-invariante** (o anche **Lascar A-invariante**) se è invariante su M per ogni modello $M \supseteq A$. Data la tupla $a \in \mathcal{U}^{|z|}$, scriveremo $\mathcal{L}(a/A)$ per l'intersezione di tutti gli insiemi quasi A-invarianti che contengono A. Chiaramente $\mathcal{L}(a/A)$ è quasi A-invariante. Diremo che a e b hanno lo stesso **tipo forte di Lascar** su A se $a \in \mathcal{D} \leftrightarrow b \in \mathcal{D}$ per ogni $\mathcal{D}$ quasi invariante su A, ovvero se $\mathcal{L}(a/A) = \mathcal{L}(b/A)$. In notazione scriveremo $a \overset{\text{L}}{\equiv}_A b$.

15.1 Proposizione *Gli insiemi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ quasi A-invarianti sono al più $2^{2^{|T|+|A|+|z|}}$.*

Dimostrazione Sia N un modello che contiene una copia A-isomorfa di ogni modello $M \supseteq A$ di cardinalità $\geq |T| + |A|$. Ogni insieme quasi A-invariante è invariante su uno di questi modelli, quindi tutti sono invarianti su N. Il modello N ha cardinalità $\leq 2^{|T|+|A|}$ e come già osservato gli insiemi invarianti su N sono al più $2^{|N|+|z|}$. □

Vediamo ora una diversa rappresentazione dei tipi di Lascar. Il **grafo di Lascar** su A ha come nodi gli elementi di $\mathcal{U}^{|z|}$ e come archi le coppie a, b tali che $a \equiv_M b$ per qualche modello $M \supseteq A$. Scriveremo $d_A(a, b)$ per la distanza di tra a e b nel grafo di Lascar su A. Ovvero $d_A(a, b) \leq n$ se esiste una sequenza $a_0, \ldots, a_n$ tale che $a = a_0$, $b = a_n$, ed $a_i \equiv_{M_i} a_{i+1}$ per qualche $M_i \supseteq A$. Scriveremo $d_A(a, b) < \infty$ se a e b appartengono alla stessa componente connessa del grafo.

15.2 Proposizione *Per ogni $a \in \mathcal{U}^{|z|}$ abbiamo $\mathcal{L}(a/A) = \{c : d_A(a, c) < \infty\}$.*

Dimostrazione Per dimostrare l'inclusione $\supseteq$ è sufficiente mostrare che tutti gli insiemi quasi A-invarianti contengono l'insieme di destra. Se $\mathcal{D}$ è quasi A-invariante e $a \in \mathcal{D}$ allora $\mathcal{D}$ contiene anche ogni c tale che $a \equiv_M c$ per un qualche modello $M \supseteq A$, ovvero ogni c tale che $d_A(a, c) \leq 1$. Segue che $\mathcal{D}$ contiene anche tutti i c tali che $d_A(a, c) < \infty$.

Per dimostrare l'inclusione $\subseteq$ mostriamo che l'insieme di destra quasi A-invariante. Infatti, se la sequenza $a_0, \ldots, a_n$ testimonia $d_A(a,c) \le n$ e se $c' \equiv_M c$ per un qualche $M \supseteq A$, allora allora la sequenza $a_0, \ldots, a_n, c'$ testimonia $d_A(a,c') \le n+1$. □

Scriveremo **Autf($\mathfrak{U}/A$)** per il sottogruppo di Aut($\mathfrak{U}/A$) generato dagli automorfismi che fissano (puntualmente) un qualche modello $M \supseteq A$. (La "f" sta per *fort*, il francese per *strong*.) La seguente equivalenza è immediata conseguenza della proposizione 15.2:

$$a \overset{\mathrm{L}}{\equiv}_A b \quad \Leftrightarrow \quad a = f\,b \ \text{ per un qualche } f \in \mathrm{Autf}(\mathfrak{U}/A).$$

Si osservi che Autf($\mathfrak{U}/A$) è normale in Aut($\mathfrak{U}/A$).

Ricordiamo che $\kappa = |\mathfrak{U}|$ è un cardinale inaccessibile, ovvero è regolare ed è limite forte. Quest'ultima proprietà (che useremo nella dimostrazione che segue) afferma che $2^\lambda < \kappa$ per ogni $\lambda < \kappa$.

15.3 Proposizione *Per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{U}^{|z|}$, ed ogni $A \subseteq M$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{D}$ è quasi A-invariante;*
2. *tutti gli insiemi in $O(\mathcal{D}/A)$ sono M-invarianti;*
3. *$O(\mathcal{D}/A)$ ha cardinalità $< \kappa$;*
4. *se $c = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è una sequenza A-indiscernibile, allora $c_0 \in \mathcal{D} \leftrightarrow c_1 \in \mathcal{D}$.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è ovvia perché tutti gli insiemi in $O(\mathcal{D}/A)$ sono quasi A-invarianti. Per 2⇒3 è sufficiente osservare che ci sono $< \kappa$ insiemi invarianti su M. Dimostriamo 3⇒4. Assumiamo ¬4, e sia $\langle c_i : i < \kappa \rangle$ una sequenza di A-indiscernibili che estende c. Definiamo la relazione di equivalenza

$$E(x,y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad x \in \mathcal{C} \leftrightarrow y \in \mathcal{C} \quad \text{per ogni} \quad \mathcal{C} \in O(\mathcal{D}/A)$$

È immediato dalla definizione che $E(x,y)$ è A-invariante. Poiché $\neg E(c_0, c_1)$, per l'indiscernibilità possiamo concludere che $\neg E(c_i, c_j)$ per ogni $i < j$. Quindi $E(x,y)$ ha κ classi di equivalenza. Poiché κ è un cardinale limite forte, questo è incompatibile con 3.

Dimostriamo 4⇒1. Sia $a \equiv_M b$, per qualche $M \supseteq A$. Sia $p(z)$ un coerede globale di $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$. Sia $c = \langle c_i : i < \omega \rangle$ una sequenza di Morley di $p(z)$ su M, a, b. Allora sia a, c che b, c sono sequenze A-indiscernibili su M. Da 4 otteniamo le due equivalenze $a \in \mathcal{D} \leftrightarrow c_0 \in \mathcal{D} \leftrightarrow b \in \mathcal{D}$ e quindi 1. □

Ci sono al più $2^{2^{|M|+|z|}}$ insiemi $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{U}^{|z|}$ invarianti su M. Quindi abbiamo il seguente importante corollario.

15.4 Corollario *Per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{U}^{|z|}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *$O(\mathcal{D}/A)$ ha cardinalità $< \kappa$;*
2. *$O(\mathcal{D}/A)$ ha cardinalità $\le 2^{2^{|T|+|A|+|z|}}$.* □

15.5 Esercizio Si dimostri che per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{U}^{|z|}$, ed ogni $A \subseteq M$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\mathcal{D}$ è quasi A-invariante;

2. ogni $c = \langle c_i : i < \omega \rangle$ sequenza A-indiscernibile è $A, \mathcal{D}$-indiscernibile. $\square$

15.2 I tipi forti di Kim-Pillay

Capitolo 16

Insiemi esternamente definibili

Lavori in corso

Vietato l'accesso ai non addetti ai lavori

16.1 Insiemi approssimabili

Dati $A \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ chiameremo $D = \mathcal{D} \cap A^{|z|}$ la **traccia** di $\mathcal{D}$ su A. Per ogni formula $\psi(z) \in L(\mathcal{U})$ definiamo $\boldsymbol{\psi(A)} = \psi(\mathcal{U}) \cap A^{|z|}$ ovvero $\psi(A)$ è la traccia su A dell'insieme definibile $\psi(\mathcal{U})$.

Diremo che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ è un insieme **approssimabile** di sorta $\varphi(x;z)$ se per ogni insieme finito $B \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ esiste un $b \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $\varphi(b,B) = \mathcal{D} \cap B$. La terminologia non è standard.

Presentiamo lo stesso concetto da una prospettiva diversa. Diremo che $\mathcal{D}$ è **esternamente definibile** di sorta $\varphi(x;z)$ se è la traccia su $\mathcal{U}$ di un insieme definibile con parametri in un'estensione elementare di $\mathcal{U}$ ovvero, riformulando la nozione senza menzionare elementi al di fuori di $\mathcal{U}$, se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p,\varphi}$ per un qualche tipo globale $p \subseteq S_x(\mathcal{U})$. La notazione è definita nel paragrafo 14.1. Queste due nozioni coincidono per la seguente proposizione. La dimostrazione è una semplice applicazione della compattezza.

16.1 Proposizione *Per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{D}$ è approssimabile;*
2. *$\mathcal{D}$ è esternamente definibile.* □

Nella definizione di approssimabile abbiamo fissato una sorta $\varphi(x;z)$ ovvero abbiamo richiesto che la definizione fosse uniforme (altrimenti ogni insieme sarebbe banalmente approssimabile). È utile osservare che se estendiamo la richiesta di approssimabilità a insiemi B sufficientemente grandi possiamo omettere la richiesta di uniformità.

16.2 Proposizione *Per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{D}$ è approssimabile;*
2. *per ogni $B \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ di cardinalità $\leq (|L| + \omega)^+$ esiste $\psi(z) \in L(\mathcal{U})$ tale che $\psi(B) = \mathcal{D} \cap B$.*

16.2 Formule stabili

Fissiamo una sorta $\varphi(x;z)$ ed un insieme di parametri A e sia $\Delta_{\varphi,A} = \{\varphi(x;a) \ : \ a \in A^{|z|}\}$. Ad ogni insieme $B \subseteq A^{|z|}$ associamo il seguente $\Delta^{\pm}_{\varphi,A}$-tipo

$$\big\{\varphi(x;a) \ \ a \in B\big\} \cup \big\{\neg\varphi(x;a) \ : \ a \in A^{|z|} \smallsetminus B\big\}$$

che qui denoteremo con $\boldsymbol{\varphi(x;A) = B}$. Quest'ultima è notazione non standard. Se consistente, $\varphi(x;A) = B$ è completo come $\Delta^{\pm}_{\varphi,A}$-tipo. L'insieme dei $\Delta^{\pm}_{\varphi,A}$-tipi completi verrà denotato con $\boldsymbol{S_\varphi(A)}$.

Una formula $\varphi(x;z)$ si dice **instabile** se per ogni n esiste una sequenza $\langle c_i \ : \ i < n\rangle$ di tuple in $\mathcal{U}^{|x|}$ ed una sequenza $\langle a_i \ : \ i < n\rangle$ di tuple in $\mathcal{U}^{|z|}$ tali che

ins. $\quad \varphi(c_i, a_j) \quad \Leftrightarrow \quad i < j \qquad$ per ogni $i, j < n$

Se $\varphi(x;z)$ è instabile allora per compattezza ins vale anche sostituendo $(n, \leq)$ con un qualsiasi ordine lineare $(I, \leq_I)$. L'unica ovvia limitazione è che $|I| \leq \kappa$. Diremo che $\varphi(x;z)$ è **stabile** se non è instabile.

Diremo che $\varphi(x;z)$ ha **rango binario infinito** (questa termine non è standard) se per ogni n esiste una sequenza $\langle a_s \ : \ s \in 2^{<n}\rangle$ di tuple in $\mathcal{U}^{|z|}$ tale che per ogni $s \in 2^n$ i seguenti tipi siano consistenti

rbi. $\quad p_s(x) \quad = \quad \big\{\varphi(x; a_{s\restriction i}) \ : \ s(i) = 0, \ \ i < n\big\} \cup \big\{\neg\varphi(x; a_{s\restriction i}) \ : \ s(i) = 1, \ \ i < n\big\}.$

Di nuovo, per compattezza se $\varphi(x;z)$ ha rango binario infinito allora possiamo sostituire n con qualsiasi ordinale $\leq \kappa$.

16.3 Proposizione *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\varphi(x;z)$ *è una formula instabile;*
2. $\varphi(x;z)$ *ha rango binario infinito.*

Dimostrazione Dimostriamo 1⇒2. Ordiniamo $2^{<\omega}$ linearmente per induzione su n. Supponiamo di aver ordinato linearmente $2^{<n}$. Estendiamo quest'ordine a $2^{\leq n}$ stipulando che $s0 < s < s1$ per ogni $s \in 2^n$ e che s è l'unico elemento tra $s0$ ed $s1$. Da 1 otteniamo che per ogni n esiste una sequenza $\langle c_s \ : \ s \in 2^{\leq n}\rangle$ tale che

\# $\quad \varphi(c_s, a_r) \quad \Leftrightarrow \quad s < r \qquad$ per ogni $s, r \in 2^{\leq n}$

ora è immediato che per ogni $s \in 2^n$ la tupla c_s testimonia la consistenza del tipo $p_s(x)$ definito in rbi. Questo dimostra che il rango binario di $\varphi(x;z)$ è infinito.

Dimostriamo 2⇒1. Se per ogni $s \in 2^n$ tutti i tipi $p_s(x)$ definiti in rbi sono consistenti, allora fissati $c_s \models p_s(x)$ otteniamo # come richiesto. □

16.4 Corollario *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\varphi(x;z)$ *è una formula instabile;*
2. $|S_\varphi(\mathcal{U})| = 2^\kappa$*;*

4. $|S_\varphi(\mathcal{U})| > \kappa$*.*

Dimostrazione Per dimostrare l'implicazione 1⇒2 assumiamo $\varphi(x;z)$ abbia rango infinito. Posto $\bar{z} = \langle z_s : s \in 2^{<\kappa}\rangle$ i seguenti tipi sono finitamente in $\mathcal{U}$ per ogni $\alpha \in 2^\kappa$:

$$p_\alpha(x, \bar{z}) \quad = \quad \big\{\varphi(x; z_{\alpha\restriction i}) \ : \ \alpha(i) = 0, \ \ i < \kappa\big\} \cup \big\{\neg\varphi(x; z_{\alpha\restriction i}) \ : \ \alpha(i) = 1, \ \ i < \kappa\big\}.$$

Quindi, posto $\bar{x} = \langle x_\alpha : \alpha \in 2^\kappa \rangle$ e

$$p(\bar{x}, \bar{z}) \quad = \quad \bigcup_{\alpha \in 2^\kappa} p_\alpha(x_\alpha, \bar{z}).$$

otteniamo che $\exists \bar{x}\, p(\bar{x}, \bar{z})$ è finitamente consistente. Quest'ultimo ha κ variabili libere e quindi è realizzato in $\mathcal{U}$, diciamo da $\bar{a} = \langle a_s : s \in 2^{<\kappa} \rangle$. Ora si osservi che i tipi globali $p_\alpha(x, \bar{a})$ sono mutualmente inconsistenti la variare di $\alpha \in 2^\kappa$. Quindi $|S_\varphi(\mathcal{U})| = 2^\kappa$.

L'implicazione 2⇒3 è banale. Dimostriamo 3⇒1. Assumiamo 3 e mostriamo che il rango binario di $\varphi(x;z)$ è infinito. Supponiamo aver costruito $\langle a_s : s \in 2^{<n} \rangle$ tale che ogni tipo $p_s(x)$ definito in rbi abbia più di κ estensioni in $S_\varphi(\mathcal{U})$. L'estensione dell'albero all'altezza $n+1$ si ottiene procedendo come nella dimostrazione della proposizione 11.27. □

16.5 Corollario *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\varphi(x;z)$ *è una formula stabile;*
2. *ogni insieme* $\mathcal{D}$ *esternamente definibile di sorta* $\varphi(x;z)$ *allora è definibile da una combinazione booleana positiva di insiemi della forma* $\varphi(a, \mathcal{U})$ *per qualche* $a \in \mathcal{U}^{|x|}$*;*
2. *ogni insieme* $\mathcal{D}$ *esternamente definibile di sorta* $\varphi(x;z)$ *è definibile.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è un corollario del teorema 17.2. Per l'implicazione 2⇒1 osserviamo che se $\varphi(x;z)$ è instabile allora ha rango binario infinito esistono quindi 2^κ tipi globali $S_\varphi(\mathcal{U})$, ad ognuno corrisponde un diverso insieme esternamente definibile. Non ci sono abbastanza formule in $L(\mathcal{U})$ per definirli tutti. □

16.6 Esercizio Si dimostri che per ogni A infinito le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $|S_\varphi(A)| = 2^{|A|}$
2. $|S_\varphi(A)| > |A|$. □

16.7 Esercizio Si dimostri che per ogni cardinale infinito λ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $|S_\varphi(\mathcal{U})| = 2^\kappa$
2. $|S_\varphi(A)| = 2^{|A|}$ per qualche insieme A infinito;
3. $|S_\varphi(A)| = 2^\lambda$ per qualche insieme A di cardinalità λ. □

16.3 Approssimazioni monotone

Diremo che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ è un insieme **approssimabile dall'interno** di sorta $\varphi(x;z)$ se per ogni insieme finito $B \subseteq \mathcal{D}$ esiste un $b \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $B \subseteq \varphi(b, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{D}$. Diremo che è **approssimabile dall'esterno** di sorta $\varphi(x;z)$ se per ogni insieme finito B tale che $\mathcal{D} \subseteq \neg B$ esiste un $b \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $\mathcal{D} \subseteq \varphi(b, \mathcal{U}) \subseteq \neg B$. Ovvero se $\neg\mathcal{D}$ è approssimabile dall'interno di sorta $\neg\varphi(x;z)$.

16.8 Esempio Sia $\mathcal{U} \vDash T_{\text{oldse}}$ e sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$ un intervallo. Allora $\mathcal{D}$ è approssimabile sia dall'esterno che dall'interno con la formula $x_1 < z < x_2$. Se $\mathcal{U} \vDash T_{\text{rg}}$ ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$ è approssimabile. Ogni insieme D di cardinalità piccola è approssimabile dall'esterno ma, per quanto affermato nell'esercizio 6.16, non è approssimabile dall'interno. $\square$

16.9 Esercizio Si dimostri che se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ è approssimabile sia dall'interno che dall'esterno allora possiamo trovare un unica formula per entrambe le approssimazioni. $\square$

Osserviamo che l'equivalente della proposizione 16.2

16.10 Proposizione *Per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{D}$ è approssimabile dall'interno;*
2. *per ogni $B \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ di cardinalità $\leq |T|^+$ esiste $\psi(z) \in L(\mathcal{U})$ tale che $B \subseteq \psi(\mathcal{U}) = \mathcal{D}$.*

16.11 Proposizione *Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|w,z|}$ un insieme approssimabile dall'interno. Allora anche l'insieme $\mathcal{C} = \{z : \exists w \langle w, z\rangle \in \mathcal{D}\}$ è approssimabile dall'interno. Se $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ sono insiemi approssimabili dall'interno allora anche $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ e $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ sono approssimabili dall'interno.*

Dimostrazione Sia $\varphi(x; w, z)$ una formula che approssima $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|w,z|}$ dall'interno. Verifichiamo che la formula $\psi(x, z) = \exists w\, \varphi(x; w, z)$ approssima $\mathcal{C}$ dall'interno. Sia $C \subseteq \mathcal{C}$ e fissiamo un qualsiasi insieme $D \subseteq \mathcal{D}$ tale che $\forall z \in C\, \exists w \langle w, z\rangle \in D$. Esiste un b tale che $D \subseteq \varphi(b, \mathcal{U}, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{D}$ ed è immediato verificare che $C \subseteq \psi(b, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}$.

La seconda affermazione è ovvia. $\square$

Indicheremo con $L\langle r\rangle$ il linguaggio ottenuto espandendo L con un predicato $|z|$-ario r. Indicheremo con $\langle \mathcal{U}, \mathcal{D}\rangle$ la struttura di segnatura $L\langle r\rangle$ che espande $\mathcal{U}$ ed interpreta r con $\mathcal{D}$. Quando non c'è rischio di ambiguità identificheremo l'insieme $\mathcal{D}$ con la struttura $\langle \mathcal{U}, \mathcal{D}\rangle$. Per esempio, scriveremo $\mathcal{D} \equiv_A \mathcal{C}$ per abbreviare $\langle \mathcal{U}, \mathcal{D}\rangle \equiv_A \langle \mathcal{U}, \mathcal{C}\rangle$ o diremo che $\mathcal{C}$ è saturo intendendo che tale è la struttura $\langle \mathcal{U}, \mathcal{C}\rangle$.

16.12 Proposizione *Per ogni A ed ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ esiste $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ saturo tale che $\mathcal{C} \equiv_A \mathcal{D}$.*

Dimostrazione Dal teorema 8.4 otteniamo $\langle \mathcal{U}', \mathcal{D}'\rangle$, un'estensione elementare satura di $\langle \mathcal{U}, \mathcal{D}\rangle$. In particolare $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}'$ sono due strutture sature della stessa cardinalità. Quindi esiste un isomorfismo $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ che fissa A. Allora $f[\mathcal{D}']$ è l'insieme $\mathcal{C}$ richiesto. $\square$

16.13 Proposizione *Se $\mathcal{D}$ è approssimabile da $\varphi(x; z)$, tale è anche ogni $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$. Lo stesso vale per l'approssimabilità dall'interno e dall'esterno.*

Dimostrazione L'insieme $\mathcal{D}$ è approssimabile da $\varphi(x; z)$ se e solo se per ogni n vale

$$\forall z_1, \ldots, z_n\, \exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \Big[\varphi(x; z_i) \leftrightarrow z_i \in \mathcal{D}\Big].$$

Ed è approssimabile dall'interno se

$$\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}\, \exists x \left[\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x; z_i) \wedge \forall z \big[\varphi(x; z) \to z \in \mathcal{D}\big]\right].$$

Quindi lo stesso vale anche per ogni $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$. $\square$

Definiamo $\neg^i = \neg \ldots (i \text{ volte}) \ldots \neg$. Scriveremo anche $\notin^i$ per $\neg^i(\cdot \in \cdot)$.

16.14 Lemma *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ un insieme saturo approssimabile da una formula nip e sia A arbitrario. Allora ogni tipo globale A-invariante $p(z)$ contiene una formula $\psi(z)$ tale che $\psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}$ o $\psi(\mathcal{U}) \subseteq \neg\mathcal{C}$.*

Dimostrazione Poiché $\mathcal{C}$ è approssimabile da una formula nip, non può esistere alcuna sequenza infinita $\langle b_i : i < \omega\rangle$ di tuple tali che

1. $$b_i \quad \models \quad p(z)|_{A,b_{\restriction i}} \;\; \wedge \;\; z \notin^i \mathcal{C}.$$

Sia quindi n massimale tale che $\langle b_i : i < n\rangle$ soddisfa 1. Allora

$$p(z)|_{A,b_{\restriction n}} \rightarrow z \notin^n \mathcal{C}.$$

Per saturazione possiamo sostituire $p(z)|_{A,b_{\restriction n}}$ con una formula $\psi(z)$. Quindi se n è pari otteniamo $\psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}$, se è n dispari $\psi(\mathcal{U}) \subseteq \neg\mathcal{C}$. □

Si osservi che $p(z) \in S(\mathcal{U})$ è finitamente soddisfatto in A se e solo se contiene il tipo

$$q(z) \quad = \quad \big\{\neg\varphi(z) \in L(\mathcal{U}) \;:\; \varphi(A) = \varnothing\big\}.$$

Abbiamo quindi il seguente:

16.15 Corollario *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ un insieme saturo approssimabile da una formula nip e sia A arbitrario. Allora esistono due formule $\psi_i(z)$, dove $i < 2$, tali che $\psi_i(z) \rightarrow z \notin^i \mathcal{C}$ e, se $q(z)$ è il tipo definito sopra, $q(z) \rightarrow \psi_0(z) \vee \psi_1(z)$.*

Dimostrazione Se $a \models q(z)$ allora $\mathrm{tp}(a/A)$ è finitamente soddisfatto in A e quindi ha un'estensione ad un coerede globale. Quindi, per il lemma 16.14, $q(\mathcal{U})$ è ricoperto da formule $\psi(z)$ tali che $[\psi(z) \rightarrow z \in \mathcal{C}] \vee [\psi(z) \rightarrow z \notin \mathcal{C}]$. La conclusione segue per compattezza. □

16.16 Corollario *Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ un insieme approssimabile da una formula nip. Allora $\mathcal{D}$ è approssimabile dall'interno.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$ saturo. Dato $A \subseteq \mathcal{C}$, sia $q(z) \subseteq L(A)$ come nel corollario 16.15. Chiaramente $A \subseteq q(\mathcal{U})$ e quindi $A \subseteq \psi_0(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}$. L'insieme A ha cardinalità piccola ma arbitraria quindi, per il lemma **??**, $\mathcal{C}$ è approssimabile dall'interno. Dalla proposizione 16.13 segue che anche $\mathcal{D}$ è approssimabile dall'interno. □

Denotiamo con $\mathcal{U}^{\mathrm{Sh}}$ l'espansione di $\mathcal{U}$ ottenuta aggiungendo un simbolo di relazione per ogni insieme approssimabile. Dalla proposizione 16.12 il corollario 16.16 otteniamo che se T è nip allora $\mathrm{Th}(\mathcal{U}^{\mathrm{Sh}})$ ammette eliminazione dei quantificatori. Un risultato dovuto a Shelah (da cui l'apice) con una dimostrazione ben più complessa. L'idea di riportarsi agli insiemi quasi-definibili è di Chernikov e Simon. Loro parlano di *definizioni oneste di tipi*, ma la dimostrazione è essenzialmente quella qui riportata.

16.4 Sottosequene convergenti

Diremo che una sequenza di insiemi $\langle\mathcal{D}_i : i < \omega\rangle$ converge a $\mathcal{D}$ se per ogni $a \in \mathcal{U}^{|z|}$ si ha che per ogni $i < \omega$ sufficientemente grande $a \in \mathcal{D}_i \leftrightarrow a \in \mathcal{D}$.

16.17 Proposizione *Sia $\varphi(x; z)$ una formula arbitraria. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\varphi(x; z)$ è una formula nip;*
2. *ogni sequenza di definibili di sorta $\varphi(x; z)$ quasi indiscernibile è convergente;*
3. *ogni sequenza di definibili di sorta $\varphi(x; z)$ ha una sottosequenza convergente.*

Dimostrazione L'equivalenza 1⇔2 è immediata. L'implicazione 2⇒3 vale perché ogni sequenza ha una sottosequenza quasi indiscernibile. Per dimostrare 3⇒2 assumiamo ¬2 e fissiamo una sequenza $a = \langle a_i : i < \omega\rangle$ indiscernibile per cui esiste $b \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $b \in^i a_i$ per ogni $i < \omega$. Per indiscernibilità lo stesso vale per ogni sottosequenza di a. Quindi nessuna sottosequenza converge. □

16.18 Proposizione ? *Sia $\mathcal{D}$ un insieme approssimabile in M di sorta $\varphi(x;z)$, una formula nip. Allora $\mathcal{D}$ è limite di una sequenza di insiemi definibili in M.*

Capitolo 17

Un po' di combinatoria

Lavori in corso

Vietato l'accesso ai non addetti ai lavori

Fissiamo un'insieme infinito Ω e sia $\Delta \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un insieme non vuoto. Dato $B \subseteq \Omega$ scriveremo $\boldsymbol{\Delta \restriction B}$ per l'insieme $\{\varphi \cap B \,:\, \varphi \in \Delta\}$. L'insieme $\varphi \cap B$ è talvolta chiamato la **traccia** di φ su B.

Sia $\leq_I$ un ordine su un insieme I. Diremo che Δ **realizza** $\leq_I$ se esiste $B \subseteq \Omega$ ed esistono $\{\varphi_i : i \in I\}$ tali che

$$\varphi_i \cap B \subseteq \varphi_j \cap B \quad \Leftrightarrow \quad i \leq_I j.$$

Oggetto del nostro interesse sono insiemi Δ che *non* realizzano tipi di ordine troppo complessi. Ci concentreremo sui seguenti due tipi d'ordine finiti. Scriveremo $\boldsymbol{\leq_k}$ per l'ordine usuale sull'insieme $k = \{0, \ldots, k-1\}$ e scriveremo $\boldsymbol{\subseteq_k}$ per l'ordine su $\mathcal{P}(k)$ indotto dall'inclusione insiemistica.

Si noti che il ruolo dell'insieme B nella definizione di realizzazione è fondamentale. Consideriamo $\Omega = \mathbb{R}$ e come Δ prendiamo l'insieme degli insiemi della forma $A \cup \{f(A)\}$ dove $A \subseteq \mathbb{Z}$ ed $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ è un'arbitraria biiezione. Con $B = \Omega$ possiamo realizziare solo ordini banali, mentre qualsiasi ordine numerabile è realizzato con $B = \mathbb{Z}$.

Nel contesto della teoria dei modelli, $\Omega = \mathcal{U}^{|z|}$, dove z è una tupla di variabili finita, e Δ contiene insiemi della forma $\varphi(c, \mathcal{U})$ dove $\varphi(x, z)$ è fissata e c varia in $\mathcal{U}^{|z|}$. In questo contesto, avendo a disposizione il teorema di compattezza, è sufficiente considerare insiemi $B \subseteq \mathcal{U}^{|z|}$ finiti.

17.1 La proprietà dell'ordine

Dato un intero positivo h, scriveremo $\boldsymbol{\Delta_{\wedge h}}$ per l'insieme i cui elementi sono intersezione di una qualche tupla $\varphi_1 \ldots \varphi_h \in \Delta$.

17.1 Lemma *Per ogni intero positivo h, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. Δ *realizza* $\leq_k$ *per ogni* k*;*
2. $\Delta_{\wedge h}$ *realizza* $\leq_k$ *per ogni* k*.*

Dimostrazione L'implicazione 1⇒2 è ovvia perché $\Delta \subseteq \Delta_{\wedge h}$, dimostriamo quindi 2⇒1. È sufficiente dimostrare il lemma per $h=2$. Supponiamo che B e $\varphi_i, \psi_i \in \Delta \restriction B$, per $i < k$, siano tali che

a. $\varphi_i \cap \psi_i \cap B \subseteq \varphi_j \cap \psi_j \cap B \;\Leftrightarrow\; i \leq j$

Mostriamo che Δ realizza $\leq_{f(k)}$, dove $f(k)$ è una funzione illimitata che verrà definita più sotto. Fissiamo per ogni $i < k$ un elemento

b. $a_i \in \varphi_j \cap \psi_j \cap B \;\Leftrightarrow\; i \leq j$

Osserviamo che b implica che per ogni coppia $j < i \leq k$ vale (almeno) una delle seguenti

c. $a_i \notin \varphi_j \cap B$ o $a_i \notin \psi_j \cap B$

Sia $f(k)$ la massima cardinalità di un insieme $I \subseteq \{0,\ldots,k\}$ tale che per ogni $i, j \in I$ occorre sempre la stessa (diciamo, la prima) delle due possibilità in c. Riassumendo, possiamo assumere che per $i, j \in I$

$$a_i \in \varphi_j \cap B \;\Leftrightarrow\; i \leq j$$

Posto $C = \{a_i \;:\; i \in I\}$ è immediato che $\varphi_i \cap C = \{a_l \;:\; l \in I,\; l < i\}$. Quindi per $i, j \leq f(k)$ avremo

$$\varphi_i \cap C \subseteq \varphi_j \cap C \;\Leftrightarrow\; i \leq j$$

La dimostrazione si conclude notando che per il teorema di Ramsey finito $f(k)$ è una funzione illimitata. □

Diremo che $D \subseteq \Omega$ è **finitamente approssimabile** in Δ se per ogni $B \subseteq \Omega$ finito esiste un $\varphi \in \Delta$ tale che $B \cap \varphi = B \cap D$.

17.2 Teorema *Supponiamo che Δ ometta $\leq_k$ per qualche $k > 0$. Allora ogni $D \subseteq \Omega$ finitamente approssimabile in Δ è unione di insiemi in $\Delta_{\wedge k}$.*

Dimostrazione Mostriamo che per ogni $C \subseteq D$ finito esiste un $\varphi \in \Delta_{\wedge k}$ tale che $C \subseteq \varphi \subseteq D$. Posto $B_0 = C$ definiamo B_i e φ_i induttivamente come segue. Poiché D è finitamente approssimabile in Δ, esiste $\varphi_i \in \Delta$ tale che

$$\varphi_i \cap B_i \;=\; D \cap B_i$$

Se $\varphi_0 \cap \cdots \cap \varphi_i \subseteq D$ terminiamo la costruzione al passo i: abbiamo ottenuto

$$C \;\subseteq\; \varphi_0 \cap \cdots \cap \varphi_i \;\subseteq\; D$$

come desiderato. Altrimenti fissiamo un arbitrario $a_i \in \varphi_0 \cap \cdots \cap \varphi_i \smallsetminus D$ e definiamo $B_{i+1} = B_i \cup \{a_i\}$. Ora osservando che per ogni $i, j \leq h$ otteniamo $\varphi_i \cap B_h \subseteq \varphi_j \cap B_h \Leftrightarrow j \leq i$. (L'ordine è invertito ma è irrilevane.) Quindi la costruzione deve terminare ad un passo $\leq k$.

Per il lemma 17.1 possiamo assumere che $\Delta_{\wedge k}$ ometta $\leq_m$, per un qualche m. Ora usiamo un argomento simile al precedente per mostrare che D è unione di m insiemi in $\Delta_{\wedge k}$.

Posto $B_0 = \varnothing$ definiamo B_i e φ_i induttivamente. Per quanto dimostrato sopra esiste $\varphi_i \in \Delta_{\wedge k}$ tale che

$$B_i \;\subseteq\; \varphi_i \;\subseteq\; D.$$

Se $D = \varphi_0 \cup \cdots \cup \varphi_i$ terminiamo la costruzione con successo. Altrimenti definiamo $B_{i+1} =$

$B_i \cup \{a_i\}$, dove a_i è un arbitrario elemento di $D \smallsetminus \varphi_0 \cup \cdots \cup \varphi_i$. Di nuovo per ogni $i, j \leq h$ otteniamo $\varphi_i \cap B_h \subseteq \varphi_j \cap B_h \Leftrightarrow i \leq j$ quindi la costruzione deve terminare ad un passo $\leq m$. □

Possiamo riformulare il teorema precedente con terminologia topologica usando la seguente topologia su $\mathcal{P}(\Omega)$. Questa è generata dagli aperti della forma $\{D \subseteq \Omega \,:\, A \subseteq D \subseteq B\}$ dove $A, B \subseteq \Omega$ sono rispettivamente un insieme finito ed uno co-finito. Scriviamo $\bar{\Delta}$ per la chiusura di Δ in questa topologia. Il seguente è un'immediata conseguenza del teorema 17.2.

17.3 Corollario *Supponiamo che Δ ometta $\leq_k$ per qualche k allora ogni $D \in \bar{\Delta}$ è combinazione booleana positiva di insiemi in Δ.*

17.2 La dimensione di Vapnik-Chevornenkis

La dimensione di Vapnik-Chervonenkis di Δ, per brevità **VC-dimensione**, è la massima cardinalità di un insieme $B \subseteq \Omega$ finito tale che $\Delta \restriction B = \mathcal{P}B$. Se questo massimo non esiste, diremo che Δ ha VC-dimensione infinita.

Equivalentemente, la VC-dimesione di Δ è il massimo k per cui esiste una tupla $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \Omega$ ed una funzione $\varphi_- : \mathcal{P}(k) \to \Delta$ tale che

$$\# \qquad a_i \in \varphi_J \quad \Leftrightarrow \quad i \in J \ \text{ per ogni } i \in k \text{ ed ogni } J \subseteq k.$$

17.4 Lemma *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Δ realizza $\subseteq_k$;*
2. *Δ ha VC-dimesione $\geq k$.*

Dimostrazione L'implicazione 2⇒1 è immediata. Per dimostrare 1⇒2 supponiamo che Δ realizzi $\subseteq_k$ e fissiamo un insieme $B \subseteq \Omega$ ed una funzione $\varphi_- : \mathcal{P}(k) \to \Delta$ tale che

$$\natural \qquad \varphi_I \cap B \subseteq \varphi_J \cap B \quad \Leftrightarrow \quad I \subseteq J \ \text{ per ogni } I, J \subseteq k.$$

La tupla a che verifica # si ottiene scegliendo per ogni $i \in k$ un qualsiasi $a_i \in B$ tali che

$$a_i \quad \in \quad \varphi_{\{i\}} \smallsetminus \bigcup_{i \notin J} \varphi_J.$$

La verifica di # è immediata, mostriamo gli elementi richiesti esistono. Supponiamo per assurdo che l'insieme sia vuoto. Dal verso ⇐ in ♮ otteniamo

$$\bigcup_{i \notin J} \varphi_J \quad \subseteq \quad \varphi_{k \smallsetminus \{i\}}$$

e quindi $\varphi_{\{i\}} \subseteq \varphi_{k \smallsetminus \{i\}}$. Ancora da ♮, questa volta nel verso ⇒, otteniamo $i \in k \smallsetminus \{i\}$, una contraddizione. □

Dimostriamo ora lemma combiatoriale da cui deriveremo una importante dicotomia scoperta indipendentemente da Shelah, Sauer, e Vapnik-Chervonenkis nei primi anni '70 del secolo scorso. Shelah studiava questa nozione nel contesto della teoria dei modelli, mentre Sauer, Vapnik e Chervonenkis lavoravano in statistica.

17.5 Lemma *Se $\subseteq_k$ non si immerge in $\Delta \restriction B$ allora $|\Delta \restriction B| \;\leq\; \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{|B|}{i}$.*

Dimostrazione Procediamo per induzione su k e, fissato k per induzione su $|B|$. Il caso in cui $k=0$ è banale: perché $\subseteq_0$ si immerge in $\Delta\restriction B$ per qualsiasi B non appena Δ è non vuoto. Anche il caso in cui $B=\varnothing$ è banale per ogni k.

Ora per un dato k supponiamo il lemma vero per ogni Δ e ogni B. Inoltre supponiamo il lemma vero anche per $k+1$ e per Δ e B fissati, dimostriamolo per $k+1$, Δ e B, a con $a\in\Omega$ arbitrario. Definiamo

$$\Gamma \quad = \quad \Big\{\varphi\in\Delta \;:\; \exists\psi\in\Delta\,\big[a\in\varphi\smallsetminus\psi \;\wedge\; \varphi\cap B=\psi\cap B\big]\Big\}$$

e osserviamo che

$$|\Delta\restriction B, a| \quad = \quad |\Delta\restriction B| \;+\; |\Gamma\restriction B|.$$

Ora, l'osservazione cruciale è che non possiamo immergere $\subseteq_k$ in $\Gamma\restriction B$, altrimenti dalla definizione di Γ potremmo anche immergere $\subseteq_{k+1}$ in $\Delta\restriction B, a$ che abbiamo escuso per ipotesi. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva su k a Γ e l'ipotesi induttiva su B a Δ ed ottenere

$$\begin{aligned}
|\Delta\restriction B, a| \quad &\leq \quad \sum_{i=0}^{k+1}\binom{|B|}{i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{|B|}{i}\\
&= \quad \binom{|B|}{0} \;+\; \sum_{i=1}^{k+1}\;\binom{|B|}{i} \;+\; \binom{|B|}{i-1}\\
&= \quad \sum_{i=0}^{k+1}\binom{|B|+1}{i}
\end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

La dicotomia di cui sopra afferma che la funzione (chiamata *shatter function*)

$$S(n,\Delta) \quad = \quad \max\Big\{|\Delta\restriction B| \;:\; B\subseteq\Omega,\ |B|=n\Big\}$$

cresce esponenzialmente, se la VC-dimensione è infinita, oppure cresce polinomialmente con esponente dato dalla VC-dimensione di Δ. Questo, in altre parole, è ciò che afferma il seguente corollario:

17.6 Corollario *Se Δ ha VC-dimensione $k\geq 2$ allora $S(n,\Delta)\leq n^k$ per ogni n.*

Dimostrazione È sufficiente osservare che

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \quad \leq \quad \sum_{i=0}^{k}\frac{n^i}{i!} \quad \leq \quad n^k$$

L'ultima disuguaglianza vale per $k\geq 2$ e si dimostra facilmente per induzione su k. □

Il casi di dimensione 0 ed 1 sono banali e non verranno trattati.

17.3 La co-dimensione

La VC-co-dimensione di Δ è il massimo k per cui esiste una tupla $\varphi_0,\dots,\varphi_{k-1}\in\Delta$ ed una funzione $a_{-}:\mathcal{P}(k)\to\Delta$ tale che

$$a_I\in\varphi_j \quad \Leftrightarrow \quad j\in I \qquad\qquad \text{per ogni } I\subseteq k \text{ ed ogni } j\in k.$$

17.7 Lemma *Se la VC-dimensione di Δ è $\geq 2^k$, allora la VC-co-dimensione è $\leq k$.*

Dimostrazione Supponiamo che la VC-dimensione di Δ sia $\geq 2^k$. Possiamo enumerare le sequenza che testimoniano questo usando sottoinsiemi di k, rispettivamente di $\mathcal{P}(k)$.

Ovvero esistono $\langle a_I : I \subseteq k\rangle$ e $\langle \varphi_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(k)\rangle$ tali che

$$\# \qquad a_I \in \varphi_{\mathcal{J}} \quad \Leftrightarrow \quad I \in \mathcal{J} \qquad \text{per ogni } I \subseteq k \text{ ed ogni } \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}k.$$

Per ogni $j \in k$ definiamo $\mathcal{J}_j = \{I \subseteq k : j \in I\}$. Come caso particolare di # otteniamo

$$a_I \in \varphi_{\mathcal{J}_j} \quad \Leftrightarrow \quad I \in \mathcal{J}_j \qquad \text{per ogni } I \subseteq k \text{ ed ogni } j \in k.$$

ovvero

$$a_I \in \varphi_{\mathcal{J}_j} \quad \Leftrightarrow \quad j \in I \qquad \text{per ogni } I \subseteq k \text{ ed ogni } j \in k.$$

abbreviando $\varphi_{\mathcal{J}_j}$ con φ_j, otteniamo il risultato voluto. □

17.4 Epsilon-approssimazioni

In questo paragrafo μ denota un'arbitraria misura di probabilità su Ω che rende tutti gli insiemi di Δ misurabili. Diremo che $B \subseteq \Omega$, un insieme di cardinalità finita n, è una **ε-approssimazione** di Δ se per ogni $\varphi \in \Delta$

$$\left|\mu(\varphi) - \frac{|B \cap \varphi|}{n}\right| \quad \leq \quad \varepsilon$$

Dato ε vogliamo stimare la grandezza del minimo n per cui esiste una ε-approssimazione di cardinalità n. Uno strumento utile per ridurre la grandezza di un approssimazione è quello della discrepanza che ora definiamo.

Sia $B \subseteq \Omega$ un arbitrario insieme finito, e sia $n = |B|$. Una mappa totale $c : B \to \{-1, +1\}$ è detta una **colorazione** di B. Per $\varphi \in \Delta \cup \{B\}$ scriveremo:

$$c(\varphi) \quad = \quad \sum_{a \in B \cap \varphi} c(a).$$

Definiamo quindi la **discrepanza (relativa)** di $\Delta \restriction B$

$$\delta_B \quad = \quad \min_{c:B \to \{\pm 1\}} \max_{\varphi \in \Delta \cup \{B\}} \frac{c(\varphi)}{n}$$

17.8 Lemma *Sia $B \subseteq \Omega$ una ε-approssimazione di Δ di cardinalità n e con discrepanza δ_B. Allora esiste una $(\varepsilon + 2\delta_B)$-approssimazione $B^+ \subseteq B$ di cardinalità $\leq n/2$.*

Dimostrazione Fissiamo $c : B \to \{-1, +1\}$ tale che $c(\varphi) \leq \delta_B$ per ogni $\varphi \in \Delta \cup \{B\}$ e definiamo $B^+ = c^{-1}[+1]$ e $n^+ = |B^+|$. Possiamo assumere che $n^+ \leq n/2$, altrimenti invertiamo $+1$ con -1. Per ogni $\varphi \in \Delta \cup \{B\}$ abbiamo

$$1. \qquad \begin{aligned} \frac{|B \cap \varphi|}{n} &\leq \frac{2|B^+ \cap \varphi|}{n} + \frac{c(\varphi)}{n} \\ &\leq \frac{2|B^+ \cap \varphi|}{2n^+} + \frac{c(\varphi)}{n} \\ &\leq \frac{|B^+ \cap \varphi|}{n^+} + \delta_B \end{aligned}$$

D'altro canto:

$$2. \qquad \begin{aligned} \frac{|B \cap \varphi|}{n} &\geq \frac{2|B^+ \cap \varphi|}{2n^+ + c(B)} \\ &= \frac{|B^+ \cap \varphi|}{n^+} \cdot \left(1 + \frac{c(B)}{2n^+}\right)^{-1} \\ &\geq \frac{|B^+ \cap \varphi|}{n^+} \cdot \left(1 + \frac{c(B)}{n + c(B)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|B^+\cap\varphi|}{n^+}\cdot\frac{n+c(B)}{n+2c(B)}\\
&\geq \frac{|B^+\cap\varphi|}{n^+}\cdot\frac{n}{n+2c(B)}\\
&\geq \frac{|B^+\cap\varphi|}{n^+}-2\delta_B \qquad \text{quest'ultima perché } \frac{1}{1+x}\leq 1-x.
\end{aligned}
$$

Combinando le disequazioni 1 e 2 otteniamo che per ogni φ

$$\left|\frac{|B\cap\varphi|}{n}-\frac{|B^+\cap\varphi|}{n^+}\right| \leq 2\delta_B$$

e quindi dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\left|\mu(\varphi)-\frac{|B^+\cap\varphi|}{n^+}\right| \leq \varepsilon+2\delta_B$$

Come volevamo dimostrare. □

Possiamo limitare la discrepanza in funzione della cardianlità di B e di $\Delta\restriction B$. Questo limite può essere calcolato con una semplice costruzione probabilistica ovvero mostrando che sceglendo una colorazione aleatoria (rispetto ad una data misura di probabilità) questa verifica il limite richiesto con probabilità positiva.

17.9 Lemma *Dato un insieme finito $B\subseteq\Omega$ poniamo $n=|B|$ e $m=|\Delta\restriction B|$. Allora*

$$\delta_B \leq \frac{1}{n}\sqrt{n\ln(4m)}$$

Dimostrazione □

17.10 Lemma *Per $y\geq 2$ sia $f(y)$ quel (unico) x tale che $y=\dfrac{x}{\ln x}$. Allora $f(y)\leq 2y\ln y$ per ogni $y\geq 2$.*

Dimostrazione Poiché $\dfrac{x}{\ln x}$ è una funzione crescente, la disequazione $f(y)\leq 2y\ln y$ è equivalente a

$$\frac{f(y)}{\ln f(y)} \leq \frac{2y\ln y}{\ln(2y\ln y)}$$

Per la definizione di $f(y)$ il termine sinistro della disequazione è uguale ad y. Quindi la disequazione da dimostrare diventa:

$$y \leq \frac{2y\ln y}{\ln(2y\ln y)}$$

Poiché $0\leq\ln(2\ln y)\leq\ln y$ per ogni $y\geq 2$, la disuguaglianza è immediata da verificare. □

17.11 Lemma *Supponiamo che Δ abbia VC-dimensione $k\geq 2$ e che esistano ε-approssimazioni finite per ε arbitrariamente piccoli. Allora per ogni $0<\varepsilon<2^{-1}$ esiste una ε-approssimazione di cardinalità*

$$\natural \qquad \leq C\frac{k}{\varepsilon^2}\ln\frac{k}{\varepsilon}$$

dove C è una costante assoluta (qui sotto, con approssimazioni un po' generose, otterremo 2^9).

Dimostrazione Sia B_0 una $\varepsilon/2$-approssimazione di Δ di cardinalità n_0. Costruiremo una catena discendente di ε-approssimazioni $B_0\supseteq\cdots\supseteq B_h\supseteq\ldots$ di insiemi di cardinalità n_h con $n_{h+1}\leq n_h/2$, ovvero $n_h\leq 2^{-h}n_0$. La costruzione si interrompe quando la cardinalità B_h soddisfa $\natural$. Osserviamo che, per C=2^9, la funzione in $\natural$ non è mai minore di 2^{14}. Quindi potremo tranquillamente assumere che n_h o $2^{-h}n_0$ siano sufficientemente grandi.

Scriviamo δ_i per la discrepanza di B_i. Per il lemma 17.8 possiamo richiedere che B_h sia una ε-approssimazione se la seguente disuguaglianza è verificata

$$\# \qquad 2\sum_{i=0}^{h}\delta_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Per il lemma 17.9 possiamo richiedere

$$\begin{aligned}\delta_i &\leq \sqrt{\frac{\ln 4n_i^k}{n_i}}\\ &\leq \sqrt{\frac{2k\ln n_i}{n_i}} && \text{poiché possiamo assumere } n_i \geq 4\\ &\leq \sqrt{\frac{2k\ln(2^{-i}n_0)}{2^{-i}n_0}}\end{aligned}$$

Il lettore può facilmente dimostrare per induzione su h che per $n_0 \geq 2^{h+1}$

$$\sum_{i=0}^{h} 2^i \ln(2^{-i}n_0) \leq 2^{h+1}\ln(2^{-h}n_0)$$

Quindi la disequazione # è soddisfatta se

$$2^4\, k\,\frac{\ln(2^{-h}n_0)}{2^{-h}n_0} \leq \varepsilon^2$$

che riscriviamo come

$$2^4\frac{k}{\varepsilon^2} \leq \frac{2^{-h}n_0}{\ln(2^{-h}n_0)}$$

per il lemma 17.10, condizione sufficiente per soddisfare questa disuguaglianza è che

$$2^5\frac{k}{\varepsilon^2}\ln\frac{2^4k}{\varepsilon^2} \leq 2^{-h}n_0$$

a fortiori

$$\flat \qquad 2^8\frac{k}{\varepsilon^2}\ln\frac{k}{\varepsilon} \leq 2^{-h}n_0$$

Sia quindi h il massimo che soddisfa $\flat$, quindi B_h è una ε-approssimazione e, dal fatto che $h+1$ non soddisfa $\flat$, segue che $2^{-h}n_0$, quindi a fortiori n_n, è maggiorato da $\natural$. □