Andrea Gadotti 23 marzo 2014 - Revisione 0

Teoria dei Modelli - Secondo foglio di esercizi

Esercizio 1

Fissiamo un insieme di formule Δ e sia $\{\forall\}\Delta$ la chiusura di Δ per quantificazione universale. Sia $h : M \to N$ un Δ-morfismo. Si dimostri che se è suriettivo, allora è anche un $\{\forall\}\Delta$-morfismo.

Soluzione Osserviamo che per ipotesi vale $\forall c \in N \exists b \in M(c = h(b))$. Allora, per ogni formula $\varphi(x, y)$ in Δ e ogni tupla $a \in (\operatorname{dom} h)^{|x|}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
M \vDash \forall y \varphi(a, y) &\Rightarrow M \vDash \varphi(a, b) \text{ per ogni tupla } b \in M^{|y|} \\
&\Rightarrow M \vDash \varphi(a, b) \text{ per ogni tupla } b \in (\operatorname{dom} h)^{|y|} \\
&\Rightarrow M \vDash \varphi(ha, hb) \text{ per ogni tupla } b \in (\operatorname{dom} h)^{|y|} \\
&\Rightarrow M \vDash \varphi(ha, c) \text{ per ogni tupla } c \in N^{|y|} \\
&\Rightarrow N \vDash \forall y \varphi(ha, y)
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si dimostri che per ogni tipo $p \subseteq \Delta$ le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. p è principale;
2. $\varphi \vdash p$ dove φ è congiunzione di formule in p;
3. $\varphi \vdash p \vdash \varphi$ per qualche formula φ.

Soluzione Sia q il filtro generato da p in $\mathbb{P}(\Delta)$.

- 1. $\Rightarrow$ 2. Poiché p è principale, si ha che $q = \{\psi \in \mathbb{P}(\Delta) : \varphi' \vdash \psi\}$ per qualche $\varphi' \in \mathbb{P}(\Delta)$. Per il lemma 5.11, $q = \{\psi \in \mathbb{P}(\Delta) : p \vdash \psi\}$. Ovviamente $p \vdash p$, quindi $\varphi' \vdash p$. Inoltre $\varphi' \vdash \varphi'$, quindi $p \vdash \varphi'$. Per compattezza, esiste $p' \subseteq p$ finito tale che $p' \vdash \varphi'$. Sia $\varphi := \wedge p'$. Si ha che $\varphi \vdash \varphi' \vdash p$.
- 2. $\Rightarrow$ 3. Ovvio.
- 3. $\Rightarrow$ 1. Poiché $p \vdash \varphi$, per compattezza esiste $p' \subseteq p$ finito tale che $p' \vdash \varphi$. Sia $\psi := \wedge p'$. Si ha che $p \vdash \psi \vdash \varphi \vdash p$, ovvero $q = \uparrow \psi$.

Esercizio 3

Usando il lemma 5.16 si dia una dimostrazione concisa del corollario 5.15.

Soluzione L'implicazione 1. $\Rightarrow$ 2. è ovvia per il lemma 5.11. Per l'implicazione 2. $\Rightarrow$ 1., vogliamo mostrare che $A := p \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \Delta \text{ e } p \nvdash \varphi\}$ è consistente.

Dimostriamo il contrappositivo. Supponiamo allora $A \vdash \psi$ e $\forall \vdash \neg\psi$. Allora per compattezza esiste $B \subseteq A$ finito tale che $B \vdash \psi$ e $B \vdash \neg\psi$. [1]
Se p è inconsistente, allora la tesi è banalmente vera. Supponiamo allora p consistente. Allora $B \cap \{\neg\varphi : \varphi \in \Delta \text{ e } p \nvdash \varphi\} = \{\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n\}$ per qualche $n > 0$. Quindi $p \cup \{\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n\} \vdash \perp$. Questo significa $p \vdash \neg(\neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_n) \vdash \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$. Ma ogni φ_i sta in Δ ed è tale che $p \nvdash \varphi_i$, e per il lemma 5.16 abbiamo finito.

[1] In realtà gli insiemi per ψ e $\neg\psi$ sarebbero diversi, ma basta prendere l'unione.