Andrea Gadotti 27 aprile 2014 - Revisione 1

Teoria dei Modelli - Quinto foglio di esercizi

Esercizio 0

Sia $\varphi(z)$ una formula consistente. Si dimostri che se $b \in \operatorname{acl}(A, a)$ per ogni $a \models \varphi(z)$ allora $b \in \operatorname{acl}(A)$.

Soluzione Sia M un modello che contiene A. Poiché $\varphi(z)$ è consistente in $\mathfrak{U}$, allora deve esserlo anche in M, ovvero M contiene una qualche soluzione a di M. Quindi grazie al teorema 10.6 si ha che $b \in M$. Per arbitrarietà di M e di nuovo per il teorema 10.6 si ha la tesi.

Esercizio 1

Lavoriamo all'interno di un modello $\mathfrak{U}$ saturo e di cardinalità grande. Si dimostri che per ogni $A \subseteq N$ esiste un M tale che $\operatorname{acl}A = M \cap N$.

Soluzione Sia $\lambda := |L| + |A| + \omega$. Riprendiamo lo schema della dimostrazione del teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù, la versione in 3.41. Scegliamo questa versione della dimostrazione in quanto avremo bisogno di aggiungere un solo elemento ad ogni passo.
Procediamo per induzione transfinita come in 3.41, definendo $A_0 := A$. Per il passo induttivo, richiediamo anche che $\operatorname{acl}(A_i) \cap N \subseteq \operatorname{acl}(A)$. Fissiamo una variabile x ed enumeriamo tutte le formule $\langle \varphi_k(x) : k < \lambda \rangle$ a parametri in A_i che sono consistenti in $\mathfrak{U}$. Ora, sia $i = \langle i_1, i_2 \rangle$, in una fissata enumerazione di λ^2 di lunghezza λ e scegliamo b soluzione della i_1-esima formula a parametri in A_{i_2} tale che $\operatorname{acl}(A_i, b) \cap N \subseteq \operatorname{acl}(A)$ (dimostreremo alla fine che un tale b esiste). Definiamo $A_{i+1} = A_i \cup \{b\}$. Definiamo M come l'unione degli A_i. Usando il criterio di Tarski-Vaught si vede subito che $M \preceq \mathfrak{U}$. Inoltre, per costruzione, $\operatorname{acl}(M) \cap N = M \cap N \subseteq \operatorname{acl}(A)$. L'inclusione $\operatorname{acl}(A) \subseteq M \cap N$ è banale perché M e N sono due modelli che contengono A.
Dimostriamo ora che, sotto l'ipotesi induttiva, esiste un b come richiesto. Si vede facilmente che la richiesta su b equivale a chiedere che b realizzi il tipo $p(x)$ così definito (scriviamo φ al posto di φ_{i_1}):

$$\big\{\varphi(x)\big\} \cup \big\{\psi(b, x) \to \neg\exists^{\leq n} y\, \psi(y, x) \ : \ b \in N \smallsetminus \operatorname{acl}(A), \quad \psi(y, x) \in L(A_i), \quad n \leq \omega\big\}$$

Occorre mostrare quindi che $p(x)$ è consistente in $\mathfrak{U}$. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora per saturazione non è nemmeno finitamente consistente. Questo significa che esiste (un sottoinsieme finito di ω, o equivalentemente, nel nostro caso, esiste) $\overline{n} \in \omega$, ed esistono un numero finito di formule $\psi_j(y, x)$ a parametri in A_i, $1 \leq j \leq m$ per qualche m naturale, ed esistono un numero finito di $b_k \in N \smallsetminus \operatorname{acl}(A)$, $1 \leq k \leq m$, tali che per ogni $x \in \mathfrak{U}$ vale

$$\neg\varphi(x) \vee [\psi_1(b_1, x) \wedge \exists^{\leq \overline{n}} y\, \psi_1(y, x)] \vee ... \vee [\psi_m(b_m, x) \wedge \exists^{\leq \overline{n}} y\, \psi_m(y, x)]$$

Sia $b = (b_1, \cdots, b_m)$. Possiamo ovviamente riscrivere ogni ψ_j in modo che per ogni $x \in \mathfrak{U}$ valga

$$\neg\varphi(x) \ \vee \ [\psi_1(b,x) \wedge \exists^{\leq \overline{n}} y \, \psi_1(y,x)] \vee ... \vee [\psi_m(b,x) \wedge \exists^{\leq \overline{n}} y \, \psi_m(y,x)]$$

Sia q una qualsiasi soluzione di $\varphi(x)$ (che esiste perché $\varphi(x)$ consistente in $\mathfrak{U}$ per ipotesi). Allora deve valere $\psi_j(b,q) \wedge \exists^{\leq n} y \, \psi_j(y,q)$ per qualche j. Ovvero b è algebrico su $A_i \cup \{q\}$, i.e. $b \in \operatorname{acl}(A_i, q)$ per ogni $q \vDash \varphi(x)$. Ma allora per l'Esercizio 0 abbiamo che $b \in acl(A_i)$. Ma per ipotesi $b \in N \setminus \operatorname{acl}(A)$, il che contraddice l'ipotesi induttiva.

Esercizio 2

Sia T una teoria fortemente minimale. Siano $M \preceq N$ tali che $\dim N = \dim M + 1$. Si dimostri che non esiste un modello K tale che $M \prec K \prec N$.

Soluzione Supponiamo per assurdo che esista K modello tale che $M \prec K \prec N$. Allora $\exists a \in K \setminus M$ e $\exists b \in N \setminus K$. Sia B_M una base per M, che esiste per 10.16 (T fortemente minimale per ipotesi). Allora, poiché $\operatorname{acl}(B_m) = M$, si ha che $\operatorname{acl}(B_m) \cup \{a\}$ è indipendente per 10.14. Dato che $B_m \cup \{a\} \subseteq K$, allora $\operatorname{acl}(B_m \cup \{a\}) \subseteq \operatorname{acl}(K) = K$. Quindi $\dim K \geq \dim M + 1$.
Ripetendo lo stesso ragionamento con K, N e b otteniamo $\dim N \geq \dim K + 1 \geq \dim M + 2$, contro le ipotesi.

Esercizio 3

Sia T una teoria fortemente minimale. Si dimostri che ogni insieme infinito algebricamente chiuso è un modello.

Soluzione Utilizziamo il criterio di Tarski-Vaught. Sia $\varphi(x)$ una formula a parametri in A consistente in $\mathfrak{U}$. Se $\varphi(x)$ è algebrica, allora è soddisfatta da qualche $a \in \operatorname{acl}(A) = A$. Se invece $\varphi(x)$ non è algebrica, allora definisce un insieme infinito. Poiché T è minimale, questo insieme deve essere cofinito. Ma poiché A è infinito, A deve necessariamente contenere una soluzione di $\varphi(x)$.