Andrea Gadotti 27 marzo 2014 - Revisione 0

Teoria dei Modelli - Terzo foglio di esercizi

Esercizio 1

Espandiamo il linguaggio L_{os} con un predicato binario r. Chiamiamo L questo linguaggio. Sia T la teoria che dice che $<$ ed r definiscono rispettivamente un ordine lineare e una relazione di equivalenza. Si assiomatizzi una teoria per cui vale un lemma di estensione analogo a quello che vale per i modelli di T_{oldse} con T al posto di T_{ol}. (Non serve riportare la dimostrazione, è sufficiente l'assiomatizzazione.)

Soluzione 1 (per scherzare) Sia $T := \{\bot\}$.

Soluzione 2 Sia $T = T_{\text{oldse}} \cup \{\sigma\}$, dove

$$\sigma := \forall x, y, z(x < y \Rightarrow \exists u(x < u < y \wedge r(u, z)))$$

Esercizio 2

Sia N un grafo aleatorio e sia $M \subseteq N$ con $N \setminus M$ finito. È vero che anche M è un grafo aleatorio?

Soluzione Sì. nb è banalmente soddisfatta grazie alla Proposizione 6.14. Supponiamo ora $\{x_i : i \leq n\}$ e $\{y_j : j \leq m\}$ sottoinsiemi disgiunti di M, per qualche $n, m \in \mathbb{N}$. Il testimone z richiesto da ga è ottenuto calcolandolo in N prendendo $X := \{x_i : i \leq n\} \cup (N \setminus M)$ e $Y := \{y_j : j \leq m\}$, che ha senso perché $N \setminus M$ è finito per ipotesi.

Esercizio 3

Sia N un grafo aleatorio si dimostri che esistono un grafo aleatorio $M \subseteq N$ ed un elemento $b \in N$ tale che $r(b, M) = M$.

Soluzione Sia $b \in N$. Sia $c \in N$ tale che $r(c, b)$, che si trova applicando banalmente nb e ga. Costruiamo M per induzione su $\mathbb{N}$. Poniamo $M_0 := \{c\}$. Supponiamo di avere già costruito M_i, e costruiamo M_{i+1} espandendo M_i in questo modo: per ogni possibile n-upla $\{x_i\}_{i \leq n}$ e m-upla $\{y_j\}_{j \leq m}$ di elementi di M_i, aggiungiamo a M_{i+1} il testimone z dell'enunciato ga calcolato in N, prendendo $X := \{x_i\}_{i \leq n} \cup \{b\}$ e $Y := \{y_j\}_{j \leq m}$. Definiamo ora $M := \cup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. È chiaro che per ogni $m \in M$ vale $r(b, m)$. Resta da controllare che M è aleatorio. Ma questo è vero, perché per ogni n-upla $\{x_i\}_{i \leq n}$ e m-upla $\{y_j\}_{j \leq m}$ di elementi di M, esiste un $i \in \mathbb{N}$ tale che M_i le contiene, e quindi $M_{i+1} \subseteq M$ contiene il relativo testimone z.

Esercizio 4

Siano N_1 ed N_2 due grafi aleatori numerabili e sia $c \in N_1$ un elemento fissato. Sia N un grafo che ha per dominio l'unione disgiunta di N_1 ed N_2 e come archi quelli di N_1 più quelli di N_2 più quelli che congiungono c a tutti i vertici di N_1. È N un grafo ultraomogeneo? Esiste una formula senza parametri che definisce N_1?

Soluzione

- N non è ultraomogeneo. Infatti, siano $n_1 \in N_1$ e $n_2 \in N_2$, e sia $k : \{n_2\} \to \{n_1\}$, $k(n_2) = n_1$, che è un'immersione parziale. Supponiamo per assurdo che esista un isomorfismo $g : N \to N$ che estende k. N_1 e N_2 sono aleatori per ipotesi, quindi per ogni punto $m_i \in N_i$, esiste un terzo punto $c_i \in N_i$ tale che $r(c_i, n_i)$ e $r(c_i, m_i)$. Ma N_1 e N_2 sono disgiunti e scollegati per ipotesi. Quindi, dato che f preserva la relazione r, necessariamente deve essere $f[N_1] = N_2$ e $f[N_2] = N_1$. Ma allora $f(c) \in N_2$ dovrebbe essere in relazione con tutti i vertici di N_2, e questo è impossibile perché contraddice banalmente l'aleatorietà di N_2.

- Osserviamo che c è definibile mediante la formula

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \forall n_1, n_2 \big(\neg\exists y(r(n_1, y) \wedge r(n_2, y)) \Rightarrow \\ ((r(x, n_1) \wedge \neg r(x, n_2)) \vee (r(x, n_2) \wedge \neg r(x, n_1)) \\ \vee\, x = n_1 \vee x = n_2\big)\end{aligned}$$

  e quindi possiamo definire N_1 mediante

$$\psi(x) = r(x, c)$$