Andrea Gadotti

Capitolo 6

Esercizio 1

Per tutto questo esercizio, indico con K il campo di spezzamento del polinomio in questione e con G il gruppo di Galois richiesto.

(a) Il polinomio $x^3 - x - 1$ è irriducibile perché è di grado 3 e né 1 né -1 sono radici. Il suo discriminante è $\Delta = 4 - 27 = -23$, che non è un quadrato in $\mathbb{Q}$. Quindi $G \simeq S_3$ (cfr. pag. 270, Lang).

(b) Osservo che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$ dove ε è una radice terza dell'unità diversa da 1. Quindi K è il campo di spezzamento del polinomio separabile x^2+x+1. Perciò $|G| = 2$. È chiaro che i due omomorfismi sono σ_1, σ_2 dati da $\sigma_1 = \mathrm{id}$ e $\sigma_2(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

(c) L'elemento ε dell'esercizio (b) è $\varepsilon = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. È evidente che $\varepsilon \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, quindi anche in questo caso il polinomio $x^2 + x + 1$ è irriducibile e perciò $|G| = 2$ e quindi G è lo stesso del punto (b).

(d) Guardando al punto (c), è immediato che $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, quindi il polinomio si spezza completamente su di esso. Quindi $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ e $G = \{\mathrm{id}\}$.

(e) Si può vedere che il polinomio $x^3 - x - 1$ è irriducibile anche su $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ (trovando esplicitamente le radici). Come abbiamo già osservato nel punto (a), il discriminante è -23, che è un quadrato in $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$. Quindi $G \simeq A_3$.

(f′) $f(x) = x^4 - 5 = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-i\alpha)(x+i\alpha)$ con $\alpha = \sqrt[4]{5}$. Quindi il campo di spezzamento di f è $\mathbb{Q}(i, \alpha)$, che è banalmente un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$ di grado 8. Osservo che esiste $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ determinato da $\tau(i) = -i$. Inoltre $\tau^2 = \mathrm{id}$. D'altra parte, esiste anche $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(i))$ determinato da $\sigma(\alpha) = i\alpha$. Inoltre si può verificare facilmente che $\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3$ sono distinti e che $\sigma^4 = \mathrm{id}$. Poiché τ non coincide con nessuno di questi quattro automorfismi, e osservando (si vede facilmente) che $\tau\sigma = \sigma^3\tau$, trovo che

$$G = < \tau, \sigma \mid \tau\sigma = \sigma^3\tau >$$

ovvero $G \simeq D_4$, che infatti ha 8 elementi, come cercato.

(f″) Sia $F := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. È chiaro che $[K : F] = 4$. Con riferimento al punto (f′), osservo che esiste $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F(\alpha))$ determinato da $\tau(i) = -i$. Inoltre $\tau^2 = \mathrm{id}$. D'altra parte, esiste anche $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F(i))$ determinato da $\sigma(\alpha) = -\alpha$, ed è chiaro che $\mathrm{Gal}(K/F(i)) = \{\mathrm{id}, \sigma\}$, in quanto ogni suo automorfismo deve mandare $\alpha^2 = \sqrt{5}$ in α^2. Si verifica facilmente che $\tau\sigma \in G$ e che $\tau\sigma \neq \tau, \sigma$. Quindi, poiché $|G| = 4$, si trova $G = \{\mathrm{id}, \tau, \sigma, \tau\sigma\}$.

(m) $f(x) = x^n - t = (x - \alpha)(x - \varepsilon\alpha)(x - \varepsilon^2\alpha)...(x - \varepsilon^{n-1}\alpha)$ dove ε è una radice n-esima primitiva di 1 e $\alpha^n = t$. Quindi $K = \mathbb{C}(t)(\alpha, \varepsilon) = \mathbb{C}(\alpha)$. Mostro che $f(x)$ è irriducibile: consideriamo l'anello $\mathbb{C}[t]$. Poiché t è trascendente su $\mathbb{C}$, è chiaro che (t) è massimale, e quindi primo, in $\mathbb{C}[t]$. Quindi, per il criterio di Eisenstein, $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{C}[t]$. Per il lemma di Gauss, $f(x)$ è irriducibile anche sul suo campo delle frazioni, ovvero su $\mathbb{C}(t)$.
Quindi $|G| = n$, ed è chiaro quindi che $G = \langle\sigma\rangle$ dove $\sigma(\alpha) = \varepsilon\alpha$ (e quindi $\sigma^n = \mathrm{id}$).

(n) $f(x) = x^4 - t = (x - \alpha)(x - i\alpha)(x + \alpha)(x + i\alpha)$, dove $\alpha^4 = t$. Quindi $K = \mathbb{R}(t)(i, \alpha) = \mathbb{R}(i, \alpha)$, che ha banalmente grado 4 su $\mathbb{C}(t)$ e quindi 8 su $\mathbb{R}(t)$. Ragionando come nel punto (f′), si trova che $G \simeq D_4$.

Esercizio 3

Grazie al lemma di Gauss, per verificare che i polinomi in questione sono irriducibili su $\mathbb{C}(t)$, è sufficiente verificare che lo siano su $\mathbb{C}[t]$. Ed essendo polinomi di terzo grado, si verifica facilmente che tutti i polinomi dell'esercizio sono irriducibili in quanto non hanno soluzioni in $\mathbb{C}[t]$ (basta guardare i divisori del termine noto). A questo punto, possiamo applicare come in precedenza il ragionamento che sfrutta il discriminante del polinomio. In particolare, si verifica subito che per tutti i polinomi dell'esercizio, tranne l'ultimo, il discriminante non è un quadrato in $\mathbb{C}(t)$. Calcoliamo ora il discriminante dell'ultimo polinomio $x^3 + t^2x - t^3$:

$$\Delta = -4(t^2)^3 - 27(-t^3)^2 = -31t^6$$

che è il quadrato di $i\sqrt{31}t^3 \in \mathbb{C}(t)$.