Consistency results concerning ω_1-trees

Andrea Gadotti

14 ottobre 2016

Università di Torino

Relatore: Prof. Matteo Viale

Correlatore: Prof. Sy Friedman

Indice

Alberi

Alberi

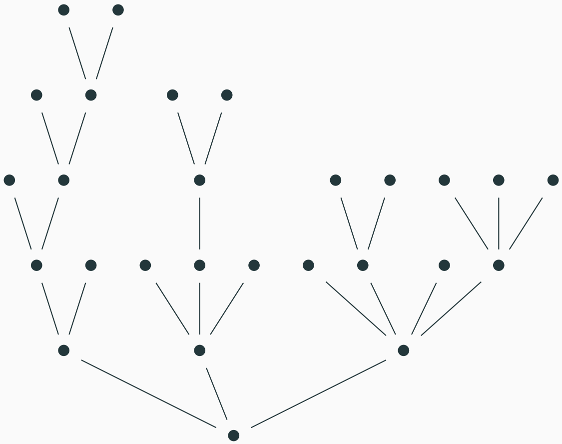
Definizione

Un *albero* è un insieme parzialmente ordinato $(T, <)$ tale che, per ogni $x \in T$, l'insieme

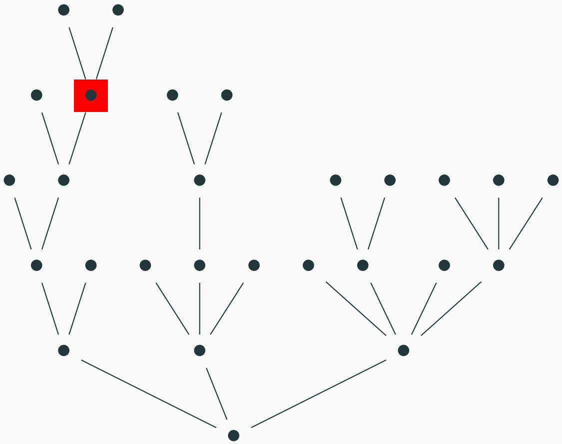
$$\downarrow x := \{y \in T : y < x\}$$

è bene ordinato da $<$. Gli elementi di T vengono detti *nodi*.

Alberi

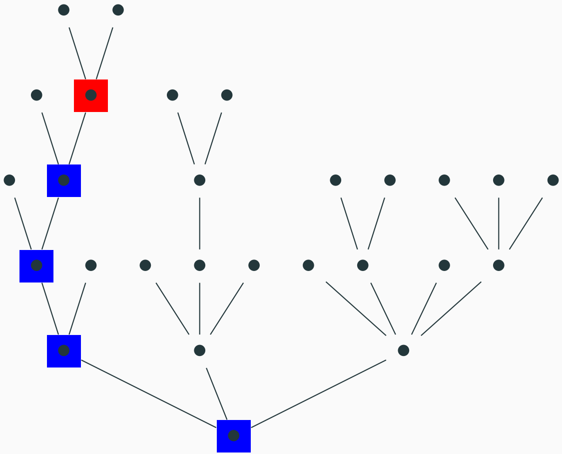


Alberi



x

Alberi



$\color{red}{x}, \ \color{blue}{\downarrow x}$

L'albero ${}^{<\omega}2$

L'insieme delle sequenze binarie finite è

$$ {}^{<\omega}2 := \{s \mid s\colon n \to 2 \text{ per qualche } n < \omega\}. $$

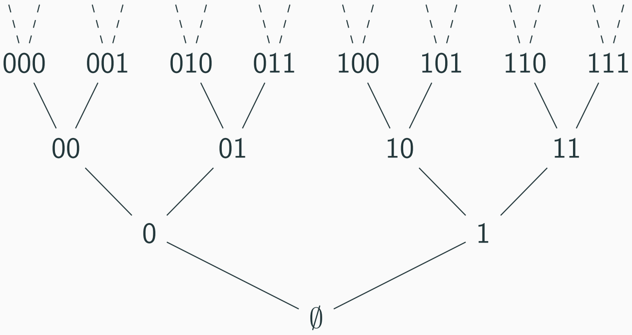
Se definiamo l'ordine su ${}^{<\omega}2$ dato da $s < t \Leftrightarrow s \subsetneq t$, otteniamo un albero binario.

L'albero ${}^{<\omega}2$

L'insieme delle sequenze binarie finite è

$$^{<\omega}2 := \{s \mid s \colon n \to 2 \text{ per qualche } n < \omega\}.$$

Se definiamo l'ordine su ${}^{<\omega}2$ dato da $s < t \Leftrightarrow s \subsetneq t$, otteniamo un albero binario.



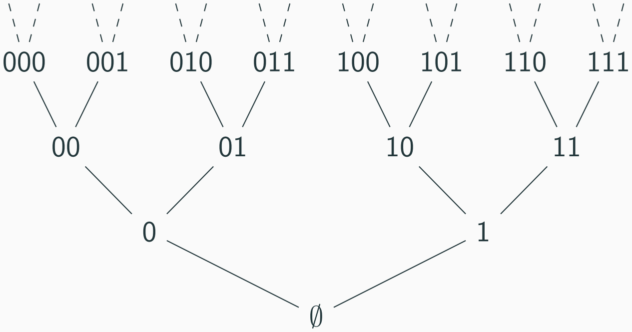
Nozioni di base

Sia T un albero.

- L'*altezza* di $x \in T$ è l'ordinale type($\downarrow x$).
- L'α*-esimo livello di* T è l'insieme degli elementi di T che hanno altezza α.
- L'*altezza di* T è il più piccolo ordinale γ tale che l'altezza di ogni $x \in T$ è $< \gamma$.
- Un *ramo* è un sottoinsieme linearmente ordinato massimale di T. L'altezza di un ramo si definisce nello stesso modo.
- Un ramo è *cofinale in* T se ha la stessa altezza di T.

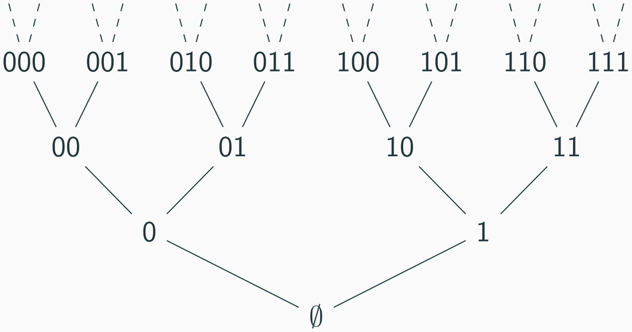
L'albero ${}^{<\omega}2$

In ${}^{<\omega}2$, l'altezza di un nodo corrisponde alla sua lunghezza vista come sequenza. Perciò il livello n-esimo contiene tutte e sole le sequenze in ${}^{<\omega}2$ che hanno lunghezza n.



L'albero ${}^{<\omega}2$

Quindi ${}^{<\omega}2$ ha altezza ω e tutti i suoi livelli sono insiemi finiti. Inoltre, $\{0^n : n < \omega\}$ è un ramo infinito (dove 0^n indica la sequenza $\underbrace{0000\ldots}_{n}$).



La Tree Property

Il Lemma di König

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Il Lemma di König

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Osservazione

Possiamo sostituire "T ha un ramo infinito" con "T ha un ramo di altezza ω" oppure "T ha un ramo cofinale".

Il Lemma di König

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Osservazione

Possiamo sostituire "T ha un ramo infinito" con "T ha un ramo di altezza ω" oppure "T ha un ramo cofinale".

Domanda

Possiamo generalizzare il lemma di König per cardinali maggiori di ω?

Un albero di altezza ω_1

Consideriamo l'albero $(T, <)$ dove

$$T := \{s \mid s\colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

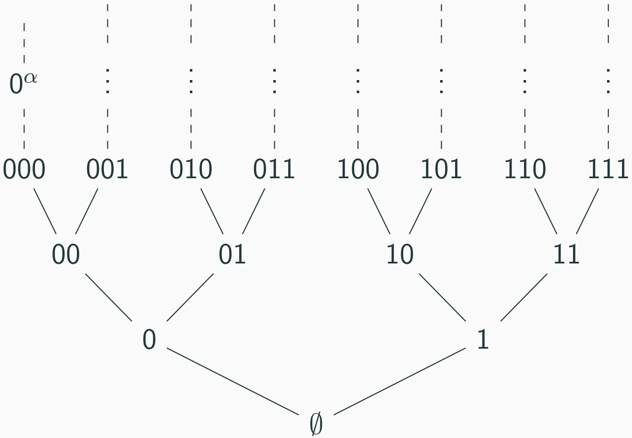
e $<$ è come prima $\subsetneq$.

Un albero di altezza ω_1

Consideriamo l'albero $(T, <)$ dove

$$T := \{s \mid s\colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

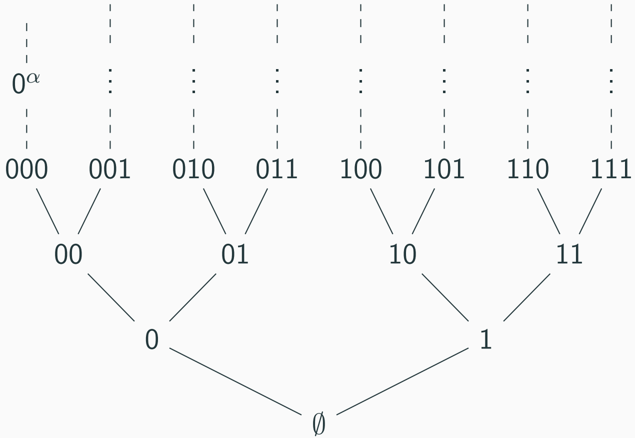
e $<$ è come prima $\subsetneq$.



Un albero di altezza ω_1

Osservazione

T ha altezza ω_1 e i livelli di T sono tutti numerabili. In più, $\{0^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ è un ramo in T di altezza ω_1. Non tutti i rami hanno altezza ω_1: $\{1^n : n < \omega\}$ è un ramo di altezza ω.



La Tree Property

Sia κ un cardinale. Diciamo che κ ha la *tree property*, in simboli TP(κ), se è vero il seguente enunciato:

Se T è un albero di altezza κ i cui livelli hanno taglia $< \kappa$, allora T ha un ramo di altezza κ.

La Tree Property

Sia κ un cardinale. Diciamo che κ ha la *tree property*, in simboli TP(κ), se è vero il seguente enunciato:

Se T è un albero di altezza κ i cui livelli hanno taglia $< \kappa$, allora T ha un ramo di altezza κ.

Osservazione

Il Lemma di König afferma che vale TP(ω).

Gli alberi di Aronszajn

Definizione

Se T è un controesempio per $\mathrm{TP}(\kappa)$, allora T si dice *κ-albero di Aronszajn*.

Quindi T è un κ-albero di Aronszajn se ha altezza κ e livelli di cardinalità $< \kappa$, ma non ha nessun ramo di altezza κ.

Gli alberi di Aronszajn

Definizione

Se T è un controesempio per $\mathrm{TP}(\kappa)$, allora T si dice *κ-albero di Aronszajn*.

Quindi T è un κ-albero di Aronszajn se ha altezza κ e livelli di cardinalità $< \kappa$, ma non ha nessun ramo di altezza κ.

Teorema (Aronszajn, 1934)

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn.

Gli alberi di Aronszajn

Teorema (Specker, 1949)

Sia κ un cardinale infinito. Se $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, allora esiste un κ^+-albero di Aronszajn.

L'ipotesi del continuo

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'ipotesi del continuo

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'*ipotesi del continuo*, in simboli CH, è un'ipotesi formulata da Cantor e afferma che un tale insieme X non esiste.

L'ipotesi del continuo

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'*ipotesi del continuo*, in simboli CH, è un'ipotesi formulata da Cantor e afferma che un tale insieme X non esiste.

Nel 1940, Kurt Gödel dimostrò che nel sistema di assiomi ZFC, CH non può essere dimostrata falsa. Ovvero, CH è *consistente* con ZFC.

L'ipotesi del continuo

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'*ipotesi del continuo*, in simboli CH, è un'ipotesi formulata da Cantor e afferma che un tale insieme X non esiste.

Nel 1940, Kurt Gödel dimostrò che nel sistema di assiomi ZFC, CH non può essere dimostrata falsa. Ovvero, CH è *consistente* con ZFC.

Nel 1963, Paul Cohen introdusse la tecnica del *forcing* per dimostrare che anche $\neg$CH è consistente con ZFC. Quindi, complessivamente, CH è *indipendente* da ZFC.

L'ipotesi del continuo generalizzata

L'*ipotesi del continuo generalizzata*, in simboli GCH, è il seguente enunciato:

Sia X un insieme infinito. Non esiste nessun insieme Y tale che $|X| < |Y| < |\mathcal{P}(X)|$.

L'ipotesi del continuo generalizzata

L'*ipotesi del continuo generalizzata*, in simboli GCH, è il seguente enunciato:

Sia X un insieme infinito. Non esiste nessun insieme Y tale che
$$|X| < |Y| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Anche GCH è indipendente da ZFC.

Torniamo a TP(κ)

Definizione

Un cardinale infinito κ è *regolare* se, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di taglia $< \kappa$, $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$ implica $|\mathcal{F}| = \kappa$. I cardinali infiniti non regolari si dicono *singolari*.

Torniamo a $\mathsf{TP}(\kappa)$

Definizione

Un cardinale infinito κ è *regolare* se, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di taglia $< \kappa$, $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$ implica $|\mathcal{F}| = \kappa$. I cardinali infiniti non regolari si dicono *singolari*.

Lemma

Assumiamo che GCH *valga. Sia κ un cardinale regolare. Allora $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.*

Torniamo a TP(κ)

Definizione

Un cardinale infinito κ è *regolare* se, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di taglia $< \kappa$, $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$ implica $|\mathcal{F}| = \kappa$. I cardinali infiniti non regolari si dicono *singolari*.

Lemma

Assumiamo che GCH *valga. Sia* κ *un cardinale regolare. Allora* $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Corollario

Assumiamo che GCH *valga. Sia* κ *un cardinale regolare. Allora esiste un* κ^{+}*-albero di Aronszajn.*

La tree property per κ successore di un cardinale singolare oppure in assenza di GCH è tuttora oggetto di ricerca.

L'ipotesi di Suslin

L'ipotesi di Suslin

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

L'ipotesi di Suslin

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

L'*ipotesi di Suslin* (SH) afferma che il teorema resta valido se sostituiamo l'ipotesi di separabilità con la più debole *condizione della catena numerabile* (ccc): ogni collezione di intervalli aperti non vuoti e mutualmente disgiunti è numerabile.

Le linee di Suslin

Definizione

Una *linea di Suslin* è un insieme linearmente ordinato, denso e che soddisfa la ccc, ma non è separabile.

Definizione

Una *linea di Suslin* è un insieme linearmente ordinato, denso e che soddisfa la ccc, ma non è separabile.

Si verifica facilmente che per un insieme linearmente ordinato e denso, considerare il completamento di Dedekind ed aggiungere/eliminare estremi non influisce sulla proprietà di separabilità. Perciò:

Le linee di Suslin

Definizione

Una *linea di Suslin* è un insieme linearmente ordinato, denso e che soddisfa la ccc, ma non è separabile.

Si verifica facilmente che per un insieme linearmente ordinato e denso, considerare il completamento di Dedekind ed aggiungere/eliminare estremi non influisce sulla proprietà di separabilità. Perciò:

Fatto

L'ipotesi di Suslin è vera se e solo se non esiste nessuna linea di Suslin.

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice *anticatena* se

$$\forall x, y \in A \, [x \not< y \ \wedge \ y \not< x].$$

Gli alberi di Suslin

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice *anticatena* se

$$\forall x, y \in A\ [x \nless y \ \wedge \ y \nless x].$$

Definizione

Un *albero di Suslin* è un albero di altezza ω_1 tale che ogni ramo è numerabile ed ogni anticatena è numerabile.

Gli alberi di Suslin

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice *anticatena* se

$$\forall x, y \in A\ [x \not\leq y\ \ \wedge\ \ y \not\leq x].$$

Definizione

Un *albero di Suslin* è un albero di altezza ω_1 tale che ogni ramo è numerabile ed ogni anticatena è numerabile.

Teorema (Kurepa, 1935)

Esiste una linea di Suslin se e solo se esiste un albero di Suslin.

L'indipendenza di SH

L'esistenza di alberi di Suslin non è dimostrabile né refutabile in ZFC. Più precisamente:

Teorema (Tennenbaum, 1963)

C'è un modello di ZFC *in cui esiste un albero di Suslin.*

Teorema (Solovay-Tennenbaum, 1971)

C'è un modello di ZFC *in cui non esiste nessun albero di Suslin.*

Per entrambi i risultati venne utilizzata la tecnica del forcing.

La consistenza di SH: uno sguardo alla dimostrazione

Supponiamo che T sia un albero di Suslin (in V). Osserviamo che capovolgendo T “all'ingiù”, otteniamo un insieme di condizioni per il forcing. Inoltre:

- Poiché ogni anticatena in T è numerabile, tale insieme insieme ha la ccc (nel senso del forcing).
- Ogni filtro generico G per T è un ramo di altezza ω_1. Ovvero, in $V[G]$, T ha un ramo cofinale.

Quindi, se T è un albero di Suslin e prendiamo T come insieme di condizioni per il forcing, otteniamo che in ogni estensione generica T non è più un albero di Suslin. Ovvero, per annullare la “suslinità” di un T fissato, possiamo fare forcing con T stesso.

La consistenza di SH: uno sguardo alla dimostrazione

Problema

Il forcing appena descritto "annienta" un determinato albero di Suslin, ma può succedere che allo stesso tempo ne produca di nuovi.

Per risolvere questa complicazione serve un qualche tipo di iterazione. Un approccio naïve rischia però di non preservare i cardinali. Il problema venne definitivamente risolto da Solovay e Tennenbaum nel 1965, che introdussero il *forcing iterato* e lo usarono per dimostrare la consistenza di SH.

L'ipotesi di Kurepa

Gli alberi di Kurepa

Definizione

Un *albero di Kurepa* è un albero di altezza ω_1 tale che ogni livello è numerabile e in cui ci sono almeno $\aleph_2$ rami cofinali distinti.

L'*ipotesi di Kurepa* asserisce che esistono alberi di Kurepa.

Gli alberi di Kurepa

Definizione

Un *albero di Kurepa* è un albero di altezza ω_1 tale che ogni livello è numerabile e in cui ci sono almeno $\aleph_2$ rami cofinali distinti.

L'*ipotesi di Kurepa* asserisce che esistono alberi di Kurepa.

L'ipotesi di Kurepa è consistente con ZFC:

Teorema (Stewart, 1966)

C'è un modello di ZFC *in cui esiste un albero di Kurepa.*

L'ipotesi di Kurepa e i cardinali inaccessibili

Definizione

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e $2^\lambda < \kappa$ per ogni cardinale $\lambda < \kappa$.

Fatto

ZFC *non può dimostrare che l'esistenza di un cardinale inaccessibile è consistente con* ZFC.

L'ipotesi di Kurepa e i cardinali inaccessibili

Definizione

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e $2^\lambda < \kappa$ per ogni cardinale $\lambda < \kappa$.

Fatto

ZFC *non può dimostrare che l'esistenza di un cardinale inaccessibile è consistente con* ZFC.

Teorema (Silver, 1971)

Assumiamo che esista un cardinale inaccessibile. Allora c'è un modello di ZFC *in cui non esistono alberi di Kurepa.*

Si dimostra che, se non esistono alberi di Kurepa, allora esiste un cardinale inaccessibile. Quindi l'esistenza di cardinali inaccessibili è *equiconsistente* con la negazione dell'ipotesi di Kurepa.

Alberi in L

L'universo costruibile di Gödel

Definizione

La *gerarchia costruibile di Gödel* è la sequenza $\langle L_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\rangle$ definita ricorsivamente così:

$$L_0 = \emptyset;$$
$$L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha);$$
$$L_\eta = \bigcup_{\gamma<\eta} L_\gamma \quad \text{se } \eta \text{ è limite;}$$

dove $\mathrm{def}(L_\alpha)$ è la collezione dei sottoinsiemi di L_α definibili nella struttura $(L_\alpha, \in)$. L'*universo costruibile di Gödel* è $L := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} L_\alpha$.

Fatto

L'enunciato "$V = L$" è consistente con ZFC.

Definizione

Il *principio del diamante* ($\diamondsuit$) afferma che esiste una successione $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ dove $S_\alpha \subseteq \alpha$, tale che per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario in ω_1.

Alberi di Suslin in L

Definizione

Il *principio del diamante* ($\diamondsuit$) afferma che esiste una successione $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ dove $S_\alpha \subseteq \alpha$, tale che per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario in ω_1.

Teorema (Jensen, 1971)

$\diamondsuit$ *implica che esiste un albero di Suslin.*

Definizione

Il *principio del diamante* ($\diamondsuit$) afferma che esiste una successione $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ dove $S_\alpha \subseteq \alpha$, tale che per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario in ω_1.

Teorema (Jensen, 1971)

$\diamondsuit$ *implica che esiste un albero di Suslin.*

Teorema (Jensen, 1971)

$V = L \Rightarrow \diamondsuit$. *In particolare, se* $V = L$ *allora esiste un albero di Suslin.*

Alberi di Suslin in L

Definizione

Il *principio del diamante* ($\diamondsuit$) afferma che esiste una successione $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ dove $S_\alpha \subseteq \alpha$, tale che per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario in ω_1.

Teorema (Jensen, 1971)

$\diamondsuit$ *implica che esiste un albero di Suslin.*

Teorema (Jensen, 1971)

$V = L \Rightarrow \diamondsuit$. *In particolare, se* $V = L$ *allora esiste un albero di Suslin.*

In realtà, Jensen dimostrò "$V = L \Rightarrow$ esiste un albero di Suslin" già nel 1968. Introdusse $\diamondsuit$ più tardi, identificandolo e isolandolo proprio a partire dalla dimostrazione di questo fatto.

Ispirandosi al teorema di Jensen, qualche anno più tardi Solovay dimostrò che:

Teorema (Solovay, 1971)

Se $V = L$, allora esiste un albero di Kurepa.

Alberi di Kurepa in L

Ispirandosi al teorema di Jensen, qualche anno più tardi Solovay dimostrò che:

Teorema (Solovay, 1971)

Se $V = L$, allora esiste un albero di Kurepa.

Anche dalla dimostrazione di questo teorema venne estratto un principio più tecnico è generale: $\diamondsuit^+$.

Alberi di Kurepa in L

Ispirandosi al teorema di Jensen, qualche anno più tardi Solovay dimostrò che:

Teorema (Solovay, 1971)

Se $V = L$, allora esiste un albero di Kurepa.

Anche dalla dimostrazione di questo teorema venne estratto un principio più tecnico è generale: $\diamondsuit^+$.
$\diamondsuit^+$ implica che esiste un albero di Kurepa. Anche $\diamondsuit^+$ vale in L, ma è dimostrabilmente più forte rispetto a $\diamondsuit$.

Automorfismi di alberi

Definizione

Consideriamo due alberi $(T_1, <_1)$ e $(T_2, <_2)$. Un *isomorfismo* di T_1 con T_2 è un isomorfismo d'ordini, ovvero una biezione $\sigma\colon T_1 \to T_2$ tale che $x <_1 y \Leftrightarrow \sigma(x) <_2 \sigma(y)$. Un *automorfismo* di un albero è un isomorfismo con se stesso.

Isomorfismi di alberi

Definizione

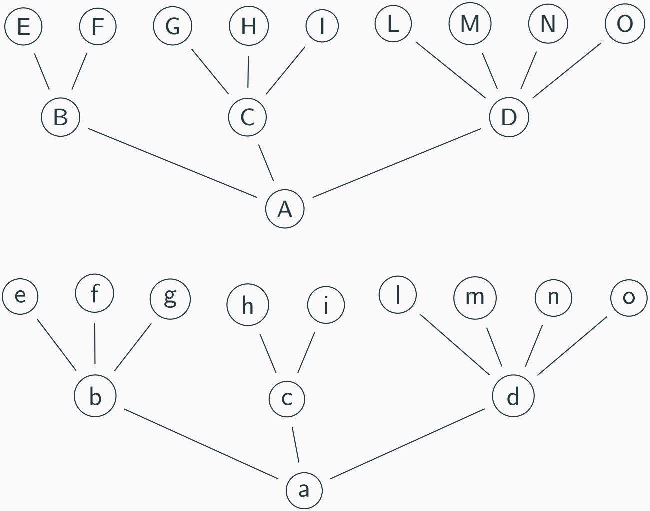
Consideriamo due alberi $(T_1, <_1)$ e $(T_2, <_2)$. Un *isomorfismo* di T_1 con T_2 è un isomorfismo d'ordini, ovvero una biezione $\sigma \colon T_1 \to T_2$ tale che $x <_1 y \Leftrightarrow \sigma(x) <_2 \sigma(y)$. Un *automorfismo* di un albero è un isomorfismo con se stesso.

Osservazioni

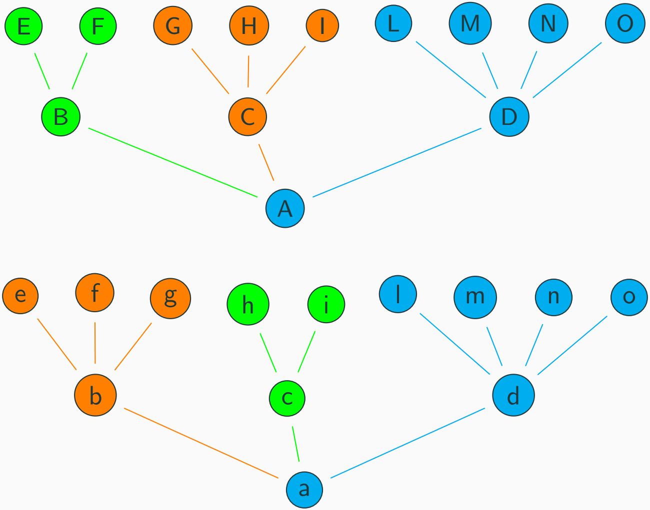
Se σ è un isomorfismo di T_1 con T_2, è immediato che:

- Per ogni $x \in T_1$, x e $\sigma(x)$ hanno la stessa altezza.
- T_1 e T_2 hanno la stessa altezza.
- L'immagine di un ramo di altezza α è un ramo di altezza α.

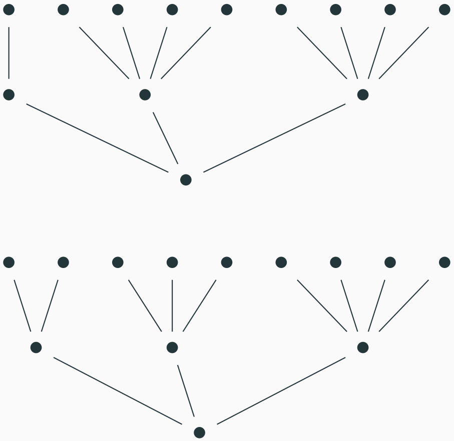
Esempio: due alberi isomorfi



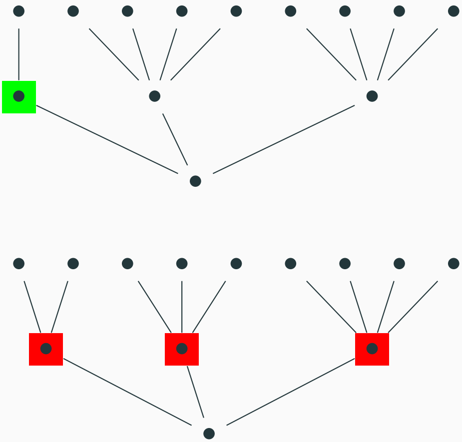
Esempio: due alberi isomorfi



Esempio: due alberi non isomorfi



Esempio: due alberi non isomorfi



Definizione

Un albero $(T, <)$ di altezza $\alpha \leq \omega_1$ si dice *normale* se:.

(i) T ha un'unica radice;

(ii) ogni livello di T è numerabile;

(iii) se x non è massimale in T, allora ci sono esattamente due *successori immediati* di x;

(iv) se $x \in T$ allora c'è un $y > x$ ad ogni livello superiore di T;

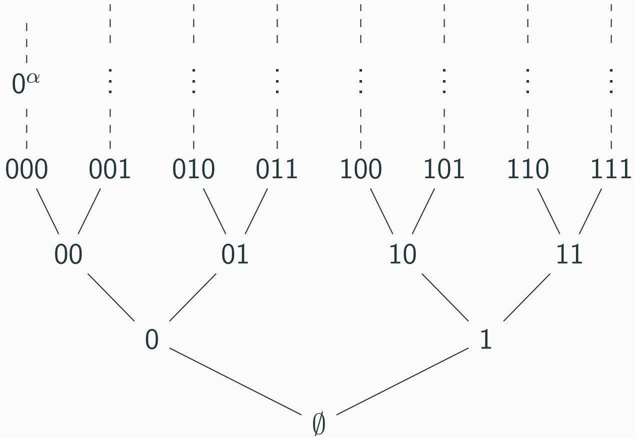
(v) se $\eta < \alpha$ è un ordinale limite e $x, y \in \mathcal{L}_\eta^T$ sono tali che $\downarrow x = \downarrow y$, allora $x = y$.

Un esempio di albero normale

L'albero

$$T := \{s \mid s\colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

considerato prima è normale.



Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali.

Unicità degli alberi normali numerabili

Se “tagliamo” l’albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Teorema

Siano T_1 e T_2 alberi normali di uguale altezza $\alpha < \omega_1$. Allora T_1 e T_2 sono isomorfi.

Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Teorema

Siano T_1 e T_2 alberi normali di uguale altezza $\alpha < \omega_1$. Allora T_1 e T_2 sono isomorfi.

Domanda

È possibile generalizzare il teorema ad alberi normali di altezza ω_1?

Alberi normalizzati

Fatto

Sia T un albero di Aronszajn/Suslin/Kurepa. Allora esiste un albero di Aronszajn/Suslin/Kurepa che è normale.

Alberi normalizzati

Fatto

Sia T un albero di Aronszajn/Suslin/Kurepa. Allora esiste un albero di Aronszajn/Suslin/Kurepa che è normale.

Ovviamente un albero di Aronszajn non può essere isomorfo a un albero di Kurepa, quindi la risposta alla domanda precedente è negativa.

Alberi omogenei e alberi rigidi

Definizione

Un albero T si dice *omogeneo* se, per ogni $x, y \in T$ allo stesso livello, esiste un automorfismo σ di T tale che $\sigma(x) = y$ e $\sigma(y) = x$. Un albero si dice *rigido* se il suo unico automorfismo è l'identità.

Alberi omogenei e alberi rigidi

Definizione

Un albero T si dice *omogeneo* se, per ogni $x, y \in T$ allo stesso livello, esiste un automorfismo σ di T tale che $\sigma(x) = y$ e $\sigma(y) = x$. Un albero si dice *rigido* se il suo unico automorfismo è l'identità.

Usando il fatto che tutti gli alberi normali numerabili della stessa altezza sono isomorfi, è possibile provare che:

Fatto

Tutti gli alberi normali numerabili sono omogenei.

Alberi di Suslin omogenei e rigidi

Teorema (Jensen, 1971)

Se vale $\diamondsuit$, allora esiste un albero di Suslin normale e omogeneo.

Alberi di Suslin omogenei e rigidi

Teorema (Jensen, 1971)

Se vale $\diamondsuit$, allora esiste un albero di Suslin normale e omogeneo.

Teorema (Jensen, 1971)

Se vale $\diamondsuit$, allora esiste un albero di Suslin normale e rigido.

Grazie per l'attenzione!