Consistency results concerning ω_1-trees

Andrea Gadotti

14 ottobre 2016

Università di Torino

Relatore: Prof. Matteo Viale

Correlatore: Prof. Sy Friedman

Indice

L’ipotesi di Suslin

Alcune proprietà elementari per gli ordini

Consideriamo un ordine parziale $(P, <)$.

Definizione

$(P, <)$ è un ordine **lineare** se ogni due elementi di P sono confrontabili, ovvero $\forall x, y \in P\ [x < y \vee y < x \vee x = y]$.

Definizione

$(P, <)$ è **denso** se, per ogni $x, y \in P$ tali che $x < y$, esiste $z \in P$ tale che $x < z < y$.

Definizione

$(P, <)$ è **Dedekind-completo** se ogni sottoinsieme superiormente limitato ha un estremo superiore in P.

La condizione della catena numerabile

Definiamo ora una proprietà meno nota:

La condizione della catena numerabile

Definiamo ora una proprietà meno nota:

Definizione

Diciamo che un ordine parziale $(P, <)$ soddisfa la **condizione della catena numerabile** (ccc) se ogni famiglia di intervalli aperti mutualmente disgiunti è numerabile.

La condizione della catena numerabile

Definiamo ora una proprietà meno nota:

Definizione

Diciamo che un ordine parziale $(P, <)$ soddisfa la **condizione della catena numerabile** (ccc) se ogni famiglia di intervalli aperti mutualmente disgiunti è numerabile.

È noto che la retta reale $(\mathbb{R}, <)$ con l'ordine canonico è un ordine lineare, denso e Dedekind-completo. Inoltre, $(\mathbb{R}, <)$ soddisfa anche la ccc.

La condizione della catena numerabile

Definiamo ora una proprietà meno nota:

Definizione

Diciamo che un ordine parziale $(P, <)$ soddisfa la **condizione della catena numerabile** (ccc) se ogni famiglia di intervalli aperti mutualmente disgiunti è numerabile.

È noto che la retta reale $(\mathbb{R}, <)$ con l'ordine canonico è un ordine lineare, denso e Dedekind-completo. Inoltre, $(\mathbb{R}, <)$ soddisfa anche la ccc.

$\mathbb{R}$: 

La condizione della catena numerabile

Definiamo ora una proprietà meno nota:

Definizione

Diciamo che un ordine parziale $(P, <)$ soddisfa la **condizione della catena numerabile** (ccc) se ogni famiglia di intervalli aperti mutualmente disgiunti è numerabile.

È noto che la retta reale $(\mathbb{R}, <)$ con l'ordine canonico è un ordine lineare, denso e Dedekind-completo. Inoltre, $(\mathbb{R}, <)$ soddisfa anche la ccc.

$\mathbb{R}$: 

 $\in \mathbb{Q}$

La retta reale è separabile

Osservazione

Nell'argomento rappresentato graficamente, abbiamo in realtà usato il fatto che $\mathbb{R}$ è **separabile**, ovvero ammette un sottoinsieme numerabile la cui chiusura topologica è tutto $\mathbb{R}$ (ad esempio, $\mathbb{Q}$ è un tale sottoinsieme).

Caratterizzazione della retta reale come ordine

La retta reale è caratterizzabile in termini di queste proprietà:

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind-completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

Caratterizzazione della retta reale come ordine

La retta reale è caratterizzabile in termini di queste proprietà:

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind-completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

L'**ipotesi di Suslin** (SH), formulata da Suslin nel 1920, afferma che il teorema resta valido se sostituiamo l'ipotesi di separabilità con la più debole ccc.

Caratterizzazione della retta reale come ordine

La retta reale è caratterizzabile in termini di queste proprietà:

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind-completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

L'**ipotesi di Suslin** (SH), formulata da Suslin nel 1920, afferma che il teorema resta valido se sostituiamo l'ipotesi di separabilità con la più debole ccc.

Domanda

L'ipotesi di Suslin è vera o falsa?

Caratterizzazione della retta reale come ordine

La retta reale è caratterizzabile in termini di queste proprietà:

Teorema (Cantor, 1895)

Sia $(R, \prec)$ *un insieme linearmente ordinato, denso, senza estremi, separabile e Dedekind-completo. Allora* $(R, \prec)$ *è isomorfo a* $(\mathbb{R}, <)$.

L'**ipotesi di Suslin** (SH), formulata da Suslin nel 1920, afferma che il teorema resta valido se sostituiamo l'ipotesi di separabilità con la più debole ccc.

Domanda

L'ipotesi di Suslin è vera o falsa?

Spoiler

Nessuna delle due.

Alberi "bassi"

Alberi di altezza $\leq \omega$

Diamo per il momento una definizione semplificata di albero:

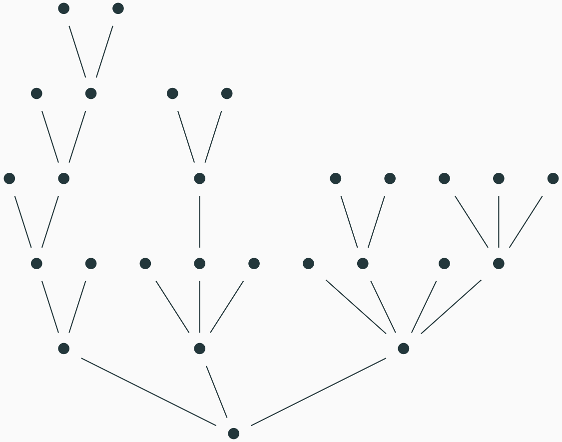
Definizione

Un **albero** è un insieme parzialmente ordinato $(T, <)$ tale che, per ogni $x \in T$, l'insieme

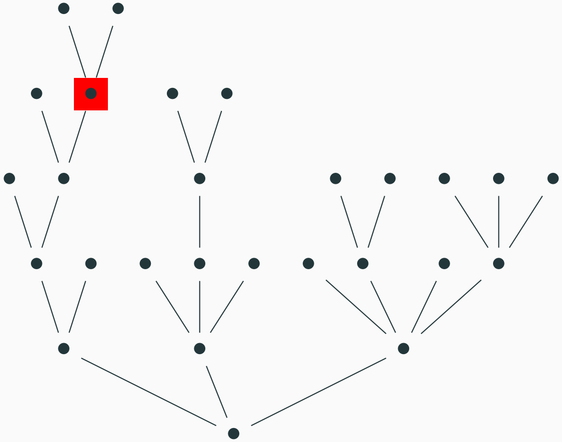
$$\downarrow x := \{y \in T : y < x\}$$

è finito e linearmente ordinato da $<$. Gli elementi di T vengono detti **nodi**.

Alberi di altezza $\leq \omega$

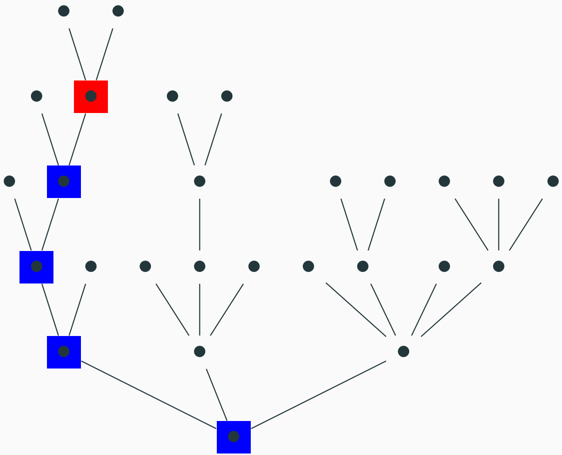


Alberi di altezza $\leq \omega$



X

Alberi di altezza $\leq \omega$



$\color{red}{x}$, $\color{blue}{\downarrow x}$

L'albero ${}^{<\omega}2$

Ricordiamo che ω indica semplicemente $\mathbb{N}$.

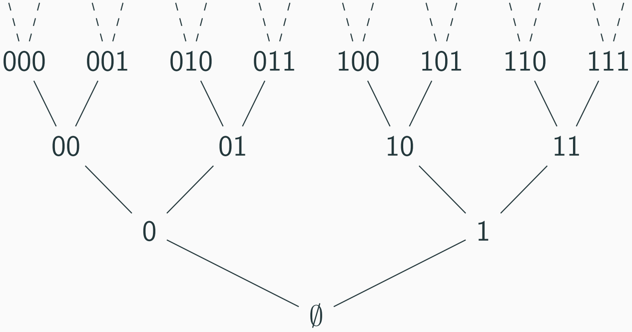
L’albero ${}^{<\omega}2$

Ricordiamo che ω indica semplicemente $\mathbb{N}$.

L’insieme delle sequenze binarie finite è

$$ {}^{<\omega}2 := \{s \mid s \colon n \to 2 \text{ per qualche } n < \omega\}. $$

Se definiamo l’ordine su ${}^{<\omega}2$ stabilendo che $s < t$ se e solo se s è un prefisso di t, otteniamo un albero binario.



Nozioni di base

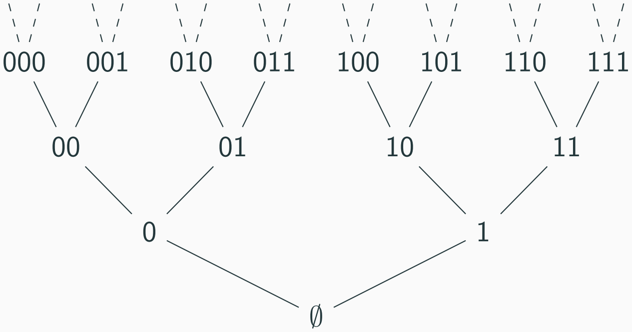
Sia T un albero. Possiamo definire in modo ovvio l'**altezza** di un nodo in T e l'*n*-**esimo livello** di T. Inoltre, se l'altezza massima dei nodi in T è n, allora diciamo che T ha altezza $n+1$. Se i nodi in T hanno altezza arbitrariamente grande, diciamo che T ha altezza ω, i.e. il primo cardinale infinito.

Definizione

Un **ramo** in T è un sottoinsieme linearmente ordinato massimale di T. L'altezza di un ramo si definisce come quella degli alberi.

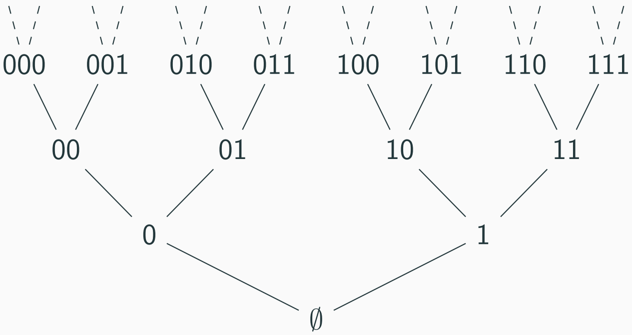
L'albero $^{<\omega}2$

In $^{<\omega}2$, l'altezza di un nodo corrisponde alla sua lunghezza vista come sequenza. Perciò il livello n-esimo contiene tutte e sole le sequenze in $^{<\omega}2$ che hanno lunghezza n.



L'albero ${}^{<\omega}2$

Quindi ${}^{<\omega}2$ ha altezza ω e tutti i suoi livelli sono insiemi finiti. Inoltre, $\{0^n : n < \omega\}$ è un ramo infinito (dove 0^n indica la sequenza $\underbrace{0000\ldots}_{n}$).



Il Lemma di König

Le osservazioni fatte per ${}^{<\omega}2$ valgono in generale:

Il Lemma di König

Le osservazioni fatte per ${}^{<\omega}2$ valgono in generale:

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Il Lemma di König

Le osservazioni fatte per ${}^{<\omega}2$ valgono in generale:

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Osservazione

Possiamo sostituire "T ha un ramo infinito" con "T ha un ramo di altezza ω".

Il Lemma di König

Le osservazioni fatte per ${}^{<\omega}2$ valgono in generale:

Lemma (König, 1927)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo infinito.

Osservazione

Possiamo sostituire "T ha un ramo infinito" con "T ha un ramo di altezza ω".

Domanda

Possiamo generalizzare il lemma di König per cardinali maggiori di ω?

Isomorfismi di alberi

Isomorfismi di alberi

Definizione

Consideriamo due alberi $(T_1, <_1)$ e $(T_2, <_2)$. Un **isomorfismo** di T_1 con T_2 è un isomorfismo d'ordini, ovvero una biezione $\sigma\colon T_1 \to T_2$ tale che $x <_1 y \Leftrightarrow \sigma(x) <_2 \sigma(y)$.

Isomorfismi di alberi

Definizione

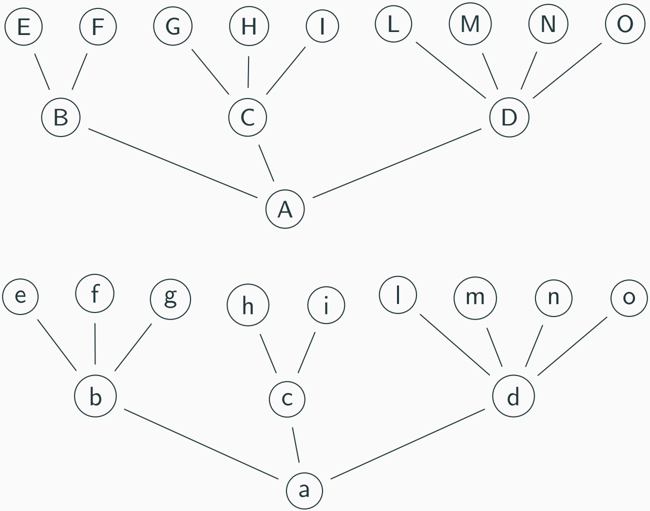
Consideriamo due alberi $(T_1, <_1)$ e $(T_2, <_2)$. Un **isomorfismo** di T_1 con T_2 è un isomorfismo d'ordini, ovvero una biezione $\sigma\colon T_1 \to T_2$ tale che $x <_1 y \Leftrightarrow \sigma(x) <_2 \sigma(y)$.

Osservazioni

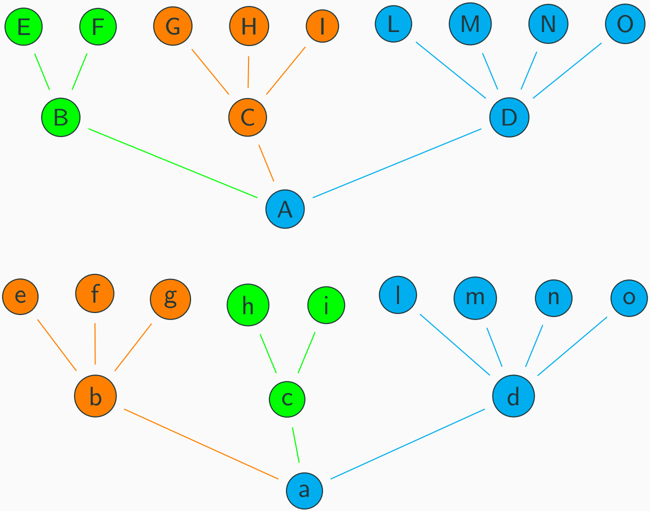
Se σ è un isomorfismo di T_1 con T_2, è immediato che:

- Per ogni $x \in T_1$, x e $\sigma(x)$ hanno la stessa altezza.
- T_1 e T_2 hanno la stessa altezza.
- L'immagine di un ramo di altezza α è un ramo di altezza α.

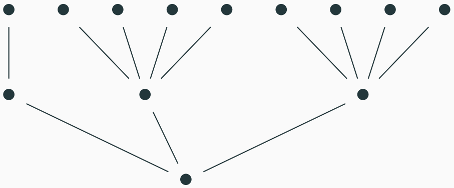
Esempio: due alberi isomorfi

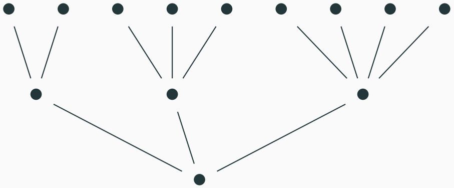


Esempio: due alberi isomorfi

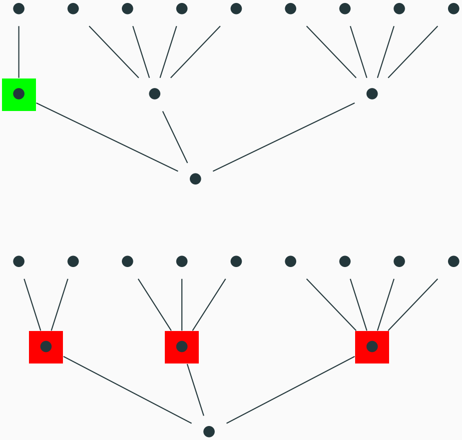


Esempio: due alberi non isomorfi





Esempio: due alberi non isomorfi



Definizione

Un albero $(T, <)$ si dice **normale** se:.

(i) T ha un'unica radice;

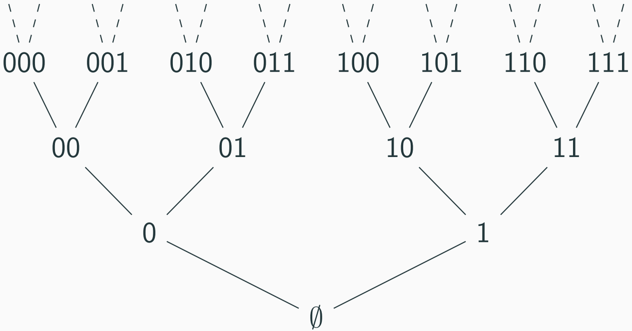
(ii) ogni livello di T è numerabile;

(iii) se x non è massimale in T, allora ci sono esattamente due **successori immediati** di x;

(iv) se $x \in T$ allora c'è un $y > x$ ad ogni livello superiore di T;

${}^{<\omega}2$ è normale

L'albero delle sequenze binarie finite ${}^{<\omega}2$ è chiaramente normale.



Unicità degli alberi normali

Unicità degli alberi normali

Osservazione

È immediato dimostrare per induzione che due qualsiasi alberi normali (di altezza $\leq \omega$), se hanno la stessa altezza allora sono isomorfi.

Unicità degli alberi normali

Osservazione

È immediato dimostrare per induzione che due qualsiasi alberi normali (di altezza $\leq \omega$), se hanno la stessa altezza allora sono isomorfi.

Domanda

Vale lo stesso anche per alberi più alti?

Ricapitolando

Abbiamo quindi tre domande a cui rispondere:

1) L'ipotesi di Suslin è vera?
2) Il Lemma di König si può generalizzare a cardinali $> \omega$?
3) Due alberi normali di uguale altezza $> \omega$ sono isomorfi?

Ricapitolando

Abbiamo quindi tre domande a cui rispondere:

1) L'ipotesi di Suslin è vera?
2) Il Lemma di König si può generalizzare a cardinali $> \omega$?
3) Due alberi normali di uguale altezza $> \omega$ sono isomorfi?

La tesi si occupa di rispondere a queste domande, oltre a presentare alcuni dei risultati correlati più importanti.
Descriveremo ora brevemente le risposte ai quesiti posti sopra.

Alberi

Alberi

Per trattare alberi di altezza arbitraria, è necessario innanzitutto generalizzare la definizione stessa di albero. Ricordiamo che:

Definizione

Un ordine parziale $(P, <)$ è un **buon ordine** se è un ordine lineare ed ogni sottoinsieme di P ha un minimo.

Alberi

Per trattare alberi di altezza arbitraria, è necessario innanzitutto generalizzare la definizione stessa di albero. Ricordiamo che:

Definizione

Un ordine parziale $(P, <)$ è un **buon ordine** se è un ordine lineare ed ogni sottoinsieme di P ha un minimo.

Definizione

Un **albero** è un insieme parzialmente ordinato $(T, <)$ tale che, per ogni $x \in T$, l'insieme

$$\downarrow x := \{y \in T : y < x\}$$

è bene ordinato da $<$.

D'ora in poi, quando usiamo il termine albero ci riferiamo alla definizione appena data.

Nozioni di base

Consideriamo un albero $(T, <)$ e un nodo $x \in T$. Poiché $\downarrow x$ è un insieme bene ordinato, c'è un ordinale isomorfo ad esso. Tale ordinale si dice **tipo d'ordine** di $\downarrow x$. Diciamo che x **ha altezza** α se il tipo d'ordine di $\downarrow x$ è α.

Nozioni di base

Consideriamo un albero $(T, <)$ e un nodo $x \in T$. Poiché $\downarrow x$ è un insieme bene ordinato, c'è un ordinale isomorfo ad esso. Tale ordinale si dice **tipo d'ordine** di $\downarrow x$. Diciamo che x **ha altezza** α se il tipo d'ordine di $\downarrow x$ è α.

Le definizioni di livello e di altezza di un albero/ramo si generalizzano in modo immediato rispetto a quelle date in precedenza, usando però la nuova definizione di altezza di un nodo.

Un albero di altezza ω_1

Il cardinale ω_1 è il più piccolo ordinale che non si inietta in ω.

Un albero di altezza ω_1

Il cardinale ω_1 è il più piccolo ordinale che non si inietta in ω.

Consideriamo l'albero $(T, <)$ dove

$$T := \{s \mid s \colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

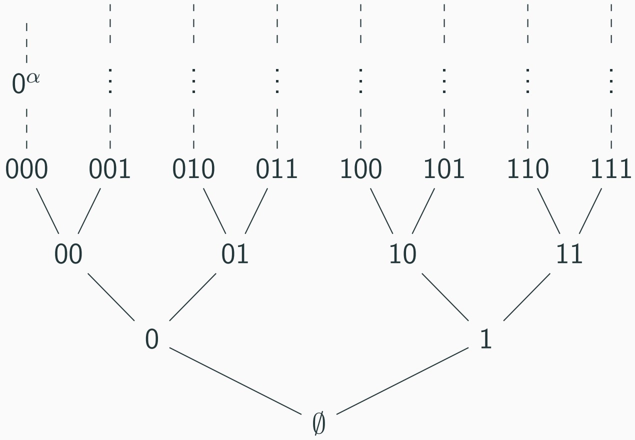
e $s < t$ se e solo se s è un prefisso di t.

Un albero di altezza ω_1

Il cardinale ω_1 è il più piccolo ordinale che non si inietta in ω.
Consideriamo l'albero $(T, <)$ dove

$$T := \{s \mid s \colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

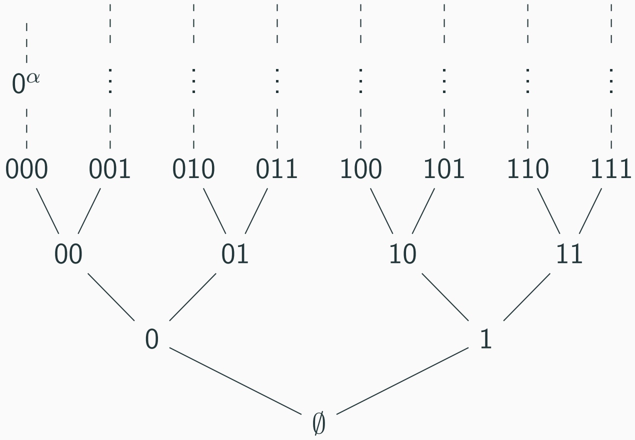
e $s < t$ se e solo se s è un prefisso di t.



Un albero di altezza ω_1

Osservazione

T ha altezza ω_1 e i livelli di T sono tutti numerabili. In più, $\{0^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ è un ramo in T di altezza ω_1. Non tutti i rami hanno altezza ω_1: $\{1^n : n < \omega\}$ è un ramo di altezza ω.



La Tree Property

Lemma (König)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo di altezza ω.

Lemma (König)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo di altezza ω.

Definizione

Sia κ un cardinale. T è un κ-**albero di Aronszajn** se ha altezza κ e livelli di cardinalità $< \kappa$, ma non ha nessun ramo di altezza κ.

Osservazione

Il Lemma di König afferma che non ci sono ω-alberi di Aronszajn.

Gli alberi di Aronszajn e la Tree Property

Lemma (König)

Sia T un albero di altezza ω. Se i livelli di T sono insiemi finiti, allora T ha un ramo di altezza ω.

Definizione

Sia κ un cardinale. T è un κ-**albero di Aronszajn** se ha altezza κ e livelli di cardinalità $< \kappa$, ma non ha nessun ramo di altezza κ.

Osservazione

Il Lemma di König afferma che non ci sono ω-alberi di Aronszajn.

La **tree property** per κ, in simboli $\mathrm{TP}(\kappa)$, è l'affermazione:

Non esistono κ-alberi di Aronszajn.

Gli alberi di Aronszajn

Quindi TP(κ) generalizza il lemma di König ad un generico κ.

Gli alberi di Aronszajn

Quindi TP(κ) generalizza il lemma di König ad un generico κ. Ma TP(κ) non è vera per ogni κ:

Gli alberi di Aronszajn

Quindi TP(κ) generalizza il lemma di König ad un generico κ. Ma TP(κ) non è vera per ogni κ:

Teorema (Aronszajn, 1934)

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn.

Gli alberi di Aronszajn

Quindi TP(κ) generalizza il lemma di König ad un generico κ. Ma TP(κ) non è vera per ogni κ:

Teorema (Aronszajn, 1934)

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn.

Teorema (Specker, 1949)

Sia κ un cardinale infinito. Se $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, allora esiste un κ^+-albero di Aronszajn.

Quindi TP(κ) generalizza il lemma di König ad un generico κ. Ma TP(κ) non è vera per ogni κ:

Teorema (Aronszajn, 1934)

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn.

Teorema (Specker, 1949)

Sia κ un cardinale infinito. Se $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, allora esiste un κ^+-albero di Aronszajn.

La tree property in tutti gli altri casi è tuttora oggetto di ricerca.

L’indipendenza dell’ipotesi di Suslin

Gli alberi di Suslin

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice **anticatena** se

$$\forall x, y \in A \, [x \not< y \;\wedge\; y \not< x].$$

Ogni livello è banalmente un'anticatena.

Gli alberi di Suslin

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice **anticatena** se

$$\forall x, y \in A \; [x \not< y \;\; \wedge \;\; y \not< x].$$

Ogni livello è banalmente un'anticatena.

Definizione

Un **albero di Suslin** è un albero di altezza ω_1 tale che ogni ramo è numerabile ed ogni anticatena è numerabile.

Gli alberi di Suslin

Definizione

Un sottoinsieme A di un albero si dice **anticatena** se

$$\forall x, y \in A\ [x \not< y \ \wedge \ y \not< x].$$

Ogni livello è banalmente un'anticatena.

Definizione

Un **albero di Suslin** è un albero di altezza ω_1 tale che ogni ramo è numerabile ed ogni anticatena è numerabile.

Teorema (Kurepa, 1935)

L'ipotesi di Suslin è vera se e solo se non esiste nessun albero di Suslin.

L'ipotesi del continuo

Se X è un insieme, denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità.

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'ipotesi del continuo

Se X è un insieme, denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità.

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'**ipotesi del continuo**, in simboli CH, è un'ipotesi avanzata da Cantor nel 1878 e afferma che un tale insieme X non esiste.

Se X è un insieme, denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità.

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L’**ipotesi del continuo**, in simboli CH, è un’ipotesi avanzata da Cantor nel 1878 e afferma che un tale insieme X non esiste.

Nel 1940, Kurt Gödel dimostrò che nel sistema di assiomi ZFC, CH non può essere dimostrata falsa. Ovvero, CH è **consistente** con ZFC.

L'ipotesi del continuo

Se X è un insieme, denotiamo con $|X|$ la sua cardinalità.

Domanda

Esiste un insieme X tale che $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

L'**ipotesi del continuo**, in simboli CH, è un'ipotesi avanzata da Cantor nel 1878 e afferma che un tale insieme X non esiste.

Nel 1940, Kurt Gödel dimostrò che nel sistema di assiomi ZFC, CH non può essere dimostrata falsa. Ovvero, CH è **consistente** con ZFC.

Nel 1963, Paul Cohen introdusse la tecnica del **forcing** per dimostrare che anche $\neg$CH è consistente con ZFC. Quindi, complessivamente, CH è **indipendente** da ZFC.

L'indipendenza di SH

L'esistenza di alberi di Suslin non è dimostrabile né refutabile in ZFC. Più precisamente:

Teorema (Tennenbaum, 1963)

C'è un modello di ZFC *in cui esiste un albero di Suslin.*

Teorema (Solovay-Tennenbaum, 1971)

C'è un modello di ZFC *in cui non esiste nessun albero di Suslin.*

Per entrambi i risultati venne utilizzata la tecnica del forcing.

La consistenza di SH: uno sguardo alla dimostrazione

Supponiamo che T sia un albero di Suslin (in V). Osserviamo che capovolgendo T "all'ingiù", otteniamo un insieme di condizioni per il forcing. Inoltre:

- Poiché ogni anticatena in T è numerabile, tale insieme ha la ccc (nel senso del forcing).
- Ogni filtro generico G per T è un ramo di altezza ω_1. Ovvero, in $V[G]$, T ha un ramo cofinale.

Quindi, se T è un albero di Suslin e prendiamo T come insieme di condizioni per il forcing, otteniamo che in ogni estensione generica T non è più un albero di Suslin. Ovvero, per annullare la "suslinità" di un T fissato, possiamo fare forcing con T stesso.

La consistenza di SH: uno sguardo alla dimostrazione

Problema

Il forcing appena descritto "annienta" un determinato albero di Suslin, ma può succedere che allo stesso tempo ne produca di nuovi.

Per risolvere questa complicazione serve un qualche tipo di iterazione. Un approccio naïve rischia però di non preservare i cardinali. Il problema venne definitivamente risolto da Solovay e Tennenbaum nel 1965, che introdussero il **forcing iterato** e lo usarono per dimostrare la consistenza di SH.

Isomorfismi e automorfismi

Gli alberi normali

Generalizziamo la nozione di albero normale ad alberi più alti:

Definizione

Un albero $(T, <)$ di altezza $\alpha \leq \omega_1$ si dice **normale** se:.

(i) T ha un'unica radice;

(ii) ogni livello di T è numerabile;

(iii) se x non è massimale in T, allora ci sono esattamente due **successori immediati** di x;

(iv) se $x \in T$ allora c'è un $y > x$ ad ogni livello superiore di T;

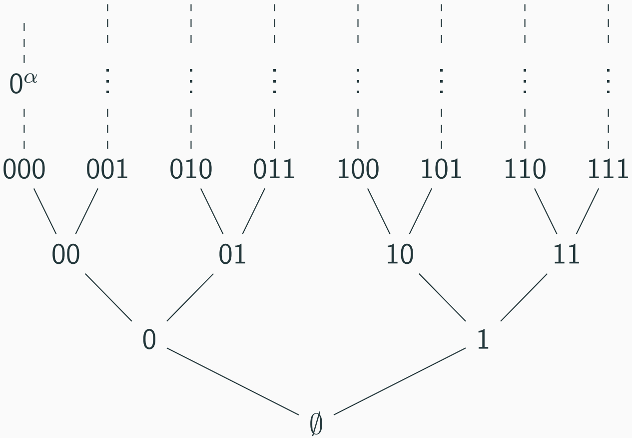
(v) se $\eta < \alpha$ è un ordinale limite e $x, y \in \mathcal{L}_\eta^T$ sono tali che $\downarrow x = \downarrow y$, allora $x = y$.

Un esempio di albero normale

L'albero

$$T := \{s \mid s\colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

considerato prima è normale.



Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali.

Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Teorema

Siano T_1 e T_2 alberi normali di uguale altezza $\alpha < \omega_1$. Allora T_1 e T_2 sono isomorfi.

Unicità degli alberi normali numerabili

Se "tagliamo" l'albero precedente ad altezza $\alpha < \omega_1$, otteniamo banalmente un albero $T|\alpha$ di altezza α. Tali $T|\alpha$ per $\alpha < \omega_1$ sono tutti normali. Ma non solo: la famiglia $\{T|\alpha : \alpha < \omega_1\}$ esaurisce la classe degli alberi normali numerabili. Infatti:

Teorema

Siano T_1 e T_2 alberi normali di uguale altezza $\alpha < \omega_1$. Allora T_1 e T_2 sono isomorfi.

Domanda

È possibile generalizzare ulteriormente il teorema ad alberi normali di altezza ω_1?

Alberi normalizzati

Fatto

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn che è normale.

Alberi normalizzati

Fatto

Esiste un ω_1-albero di Aronszajn che è normale.

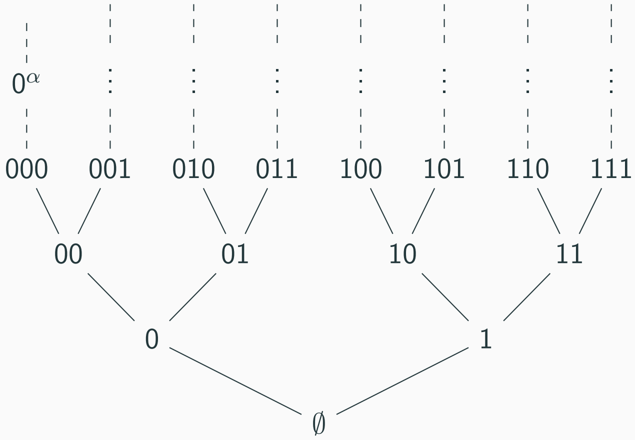
Ovviamente un albero di Aronszajn non può essere isomorfo a un albero che ha rami di altezza ω_1.

Un albero normale con rami di altezza ω_1

Ma l'albero

$$T := \{s \mid s\colon \alpha \to 2 \text{ con } \alpha < \omega_1 \text{ e } s \text{ ha un numero finito di } 1\}$$

considerato prima è normale e ha rami di altezza ω_1!



Un albero normale con rami di altezza ω_1

Quindi esistono alberi normali di altezza ω_1 che non sono isomorfi.

Alberi omogenei e alberi rigidi

Definizione

Un albero T si dice **omogeneo** se, per ogni $x, y \in T$ allo stesso livello, esiste un automorfismo σ di T tale che $\sigma(x) = y$ e $\sigma(y) = x$. Un albero si dice **rigido** se il suo unico automorfismo è l'identità.

Alberi omogenei e alberi rigidi

Definizione

Un albero T si dice **omogeneo** se, per ogni $x, y \in T$ allo stesso livello, esiste un automorfismo σ di T tale che $\sigma(x) = y$ e $\sigma(y) = x$. Un albero si dice **rigido** se il suo unico automorfismo è l'identità.

Usando il fatto che tutti gli alberi normali numerabili della stessa altezza sono isomorfi, è possibile provare che:

Fatto

Tutti gli alberi normali numerabili sono omogenei.

Alberi di Suslin omogenei e rigidi

Teorema (Jensen, 1971)

C'è un modello di ZFC in cui esiste un albero di Suslin normale e omogeneo.

Alberi di Suslin omogenei e rigidi

Teorema (Jensen, 1971)

C'è un modello di ZFC in cui esiste un albero di Suslin normale e omogeneo.

Teorema (Jensen, 1971)

C'è un modello di ZFC in cui esiste un albero di Suslin normale e rigido.

Alberi di Suslin omogenei e rigidi

Teorema (Jensen, 1971)

C'è un modello di ZFC in cui esiste un albero di Suslin normale e omogeneo.

Teorema (Jensen, 1971)

C'è un modello di ZFC in cui esiste un albero di Suslin normale e rigido.

Per dimostrare questi due risultati, Jensen non ricorse al forcing, ma produsse i due alberi di Suslin all'interno dell'universo costruibile di Gödel.

Grazie per l'attenzione!