

§ 3.3. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ БАЛАНСА (ИНТЕГРОИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД)

Свойство консервативности разностной схемы. Мы рассмотрели вопросы построения разностных схем, связанные с наличием временной переменной и соответствующего дифференциального оператора. Однако проблемы возникают и при выборе вида аппроксимации пространственного дифференциального оператора. В предыдущем параграфе этот оператор аппроксимировался самым простейшим образом — производные в дифференциальном уравнении и граничных условиях заменялись конечными разностями. Но оказывается, что такой подход не всегда приводит к успеху. Для более сложных задач, описываемых нелинейными уравнениями и уравнениями с переменными коэффициентами, замена производных конечными разностями может привести к схемам, которые будут иметь большую погрешность, либо вообще окажутся непригодными для счета.

Рассмотрим пример такой неудачной разностной схемы для одномерного стационарного уравнения с переменной теплопроводностью $\lambda(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x) \frac{dT}{dx} \right] = -q_v, \quad (3.31)$$

которое в случае непрерывно дифференцируемой функции $\lambda(x)$ можно переписать в виде

$$\lambda(x) \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} = -q_v \quad (3.32)$$

Для построения разностной схемы заменим в (3.32) производные разностными отношениями. Аппроксимация второй производной была рассмотрена в § 3.1, соотношение (3.8). Первую производную в точке $x = x_n$ можно аппроксимировать левой или правой разностями с погрешностью $O(h)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_n - T_{n-1}}{h}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{n+1} - T_n}{h}$$

и центральной разностью с погрешностью $O(h^2)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2h}.$$

Аппроксимация центральной разностью имеет более высокий порядок, ее мы и будем использовать ниже. Вводя сеточные функции u_n и $\lambda_n = \lambda(x_n)$, заданные на равномерной сетке $x_n = (n-1)h$, получим

$$\lambda_n \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})}{2h} \frac{(u_{n+1} - u_{n-1})}{2h} = -q_v. \quad (3.33)$$

Нетрудно убедиться, что если функции $\lambda(x)$ и $T(x)$ имеют необходимое число производных, то разностное уравнение (3.33) аппроксимирует дифференциальное уравнение (3.32) со вторым порядком.

Прежде чем перейти к анализу разностной схемы (3.33), остановимся на важных требованиях, предъявляемых к любым разностным схемам, которые соответствуют дифференциальным уравнениям, получаемым на основе записи законов сохранения энергии, массы, количества движения для произвольного объема сплошной среды. Очевидно, что для получения разностного решения, хорошо описывающего реальный процесс изменения температурного поля в количественном и качественном отношении, целесообразно потребовать выполнения закона сохранения энергии и для разностного решения.

Для непрерывного точного решения закон сохранения выполняется для произвольной области тела. Для разностного решения требование выполнения закона сохранения имеет важную особенность, обусловленную дискретным разбиением тела. А именно, поскольку разностное решение ищется в отдельных точках тела, то необходимо разбить тело на такое же число элементарных объемов, каждый из которых будет включать одну точку, а затем потребовать выполнения закона сохранения как для произвольного элементарного объема так и для любой области, составленной из этих элементарных объемов (а следовательно, и для всего тела). Последнее требование будет выполнено, если обеспечить условие согласования тепловых потоков для любых соседних объемов, заключающееся в равенстве значений протекающих через общую границу тепловых потоков.

Отметим, что обычно требуют *точного* выполнения сформулированных условий при конечном разбиении расчетной области, а не только при стремлении максимального размера элементарной области к нулю. Это позволяет получать правдоподобные решения даже на грубых сетках.

Разностные схемы, при которых получаются численные решения, удовлетворяющие закону сохранения энергии, называются *консервативными*.

Теперь рассмотрим, как обстоит дело со схемой (3.33). Сначала выберем элементарные объемы. В принципе их можно назначать различным образом, устанавливая границы объемов в произвольных местах между расчетными узлами. Однако наиболее естественным и широко распространенным является выбор границ элементарных

объемов в серединах отрезков, образованных соседними узлами (рис. 3.5). Таким образом в данном случае элементарные объемы имеют вид: $[0, h/2]$, $[x_2 - h/2, x_2 + h/2]$, ..., $[l - h/2, l]$.

Теперь перейдем к проверке условий сохранения энергии для элементарных объемов и условий согласования тепловых потоков на

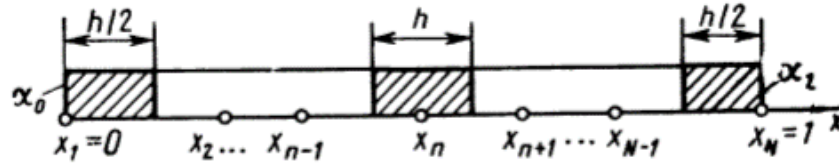


Рис. 3.5

их границах. Для точного решения закон сохранения энергии для элементарного объема $[x_n - h/2, x_n + h/2]$ записывается в виде

$$-q(x_n - h/2) + q(x_n + h/2) = \int_{x_n - h/2}^{x_n + h/2} q_v dx \quad (3.34)$$

или

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_n - h/2} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_n + h/2} = q_v h, \quad (3.35)$$

и условие согласования выполняется автоматически, поскольку поток, протекающий через общую границу двух объемов, равен для любого из них значению $\lambda \frac{dT}{dx}$ в их общей граничной точке.

Для разностного решения закон сохранения записывается также в виде (3.34), но значения тепловых потоков должны быть теперь выражены через разностное решение.

Для получения разностного аналога соотношения (3.35) перепишем уравнение (3.33) в виде

$$\left(\lambda_n - \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}}{4} \right) \frac{(u_n - u_{n-1})}{h} - \left(\lambda_n + \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}}{4} \right) \frac{(u_{n+1} - u_n)}{h} = q_v h, \quad (3.36)$$

в котором члены $\lambda_n - (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})/4$ и $\lambda_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})/4$ являются оценками значений $\lambda(x_n - h/2)$ и $\lambda(x_n + h/2)$. Первое слагаемое в (3.36) соответствует потоку, проходящему через сечение $x_n - h/2$, а второе — через сечение $x_n + h/2$. Видно, что для схемы (3.36) не выполняется условие согласования тепловых потоков. Действительно, соотношение (3.36) записано для элементарного

объема с центром в точке x_n . Для соседнего левого объема с центром в точке x_{n-1} оно будет иметь вид

$$\left(\lambda_{n-1} - \frac{\lambda_n - \lambda_{n-2}}{4}\right) \frac{(u_{n-1} - u_{n-2})}{h} - \left(\lambda_{n-1} + \frac{\lambda_n - \lambda_{n-2}}{4}\right) \frac{(u_n - u_{n-1})}{h} = q_v h. \quad (3.37)$$

Значение потока через границу $x_{n-1} + h/2 = x_n - h/2$ из (3.36) не совпадает с соответствующим значением из (3.37):

$$\left(\lambda_{n-1} + \frac{\lambda_n - \lambda_{n-2}}{4}\right) \frac{(u_n - u_{n-1})}{h} \neq \left(\lambda_n - \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}}{4}\right) \frac{(u_n - u_{n-1})}{h}.$$

Очевидно, что условие согласования для тепловых потоков будет выполнено, если тепловой поток на границе $x_n - h/2$ записать так:

$$q_{n-1}|_{x_{n-1}+h/2} = q_n|_{x_n-h/2} \approx \lambda(x_n - h/2) \frac{u_n - u_{n-1}}{h}.$$

Представляя аналогичным образом поток на правой границе элементарного объема с центром в точке x_n , получаем вместо (3.33) разностное уравнение

$$\lambda(x_n - h/2) \frac{u_n - u_{n-1}}{h} - \lambda(x_n + h/2) \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = q_v h. \quad (3.38)$$

Разобранный пример показывает, что консервативность схемы не обеспечить без принятия специальных мер. Поэтому в настоящее время в большинстве случаев разностные уравнения получают не из аппроксимации операторов дифференциального уравнения, а из непосредственной аппроксимации самих соотношений теплового баланса, записанных для элементарных объемов. При этом для тепловых потоков на границах используются выражения, обеспечивающие выполнение условий согласования. Этот способ построения консервативных разностных схем называется *интегро-интерполяционным методом* или *методом баланса*.

Метод теплового баланса. Приведем основные этапы применения этого метода:

область, в которой ищется решение, разбивается на элементарные объемы (элементарные ячейки), построенные вокруг каждого узла сетки;

для всех внутренних и граничных ячеек записывают уравнения теплового баланса, включающие значения тепловых потоков на границах ячеек; при записи уравнений баланса для ячеек, прилегающих к границам, используют граничные условия;

аппроксимируют члены, входящие в уравнения теплового баланса, выражая их через значения сеточной функции; при этом аппроксимационные выражения для тепловых потоков должны удовлетворять условию согласования.

Поскольку число ячеек равно числу узлов пространственного разбиения, то в результате этих действий получают полную систему алгебраических уравнений — разностную схему, при решении которой можно определить разностное решение.

Проиллюстрируем описанную методику построения разностной схемы на примере стационарного уравнения теплопроводности для стержня с боковым теплообменом:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(x) \frac{dT}{dx} \right] - \alpha_v(x) T + q_v(x) = 0, \quad (3.39)$$

где $\alpha_v = \alpha U/S$; U — периметр; S — площадь поперечного сечения; α — коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности.

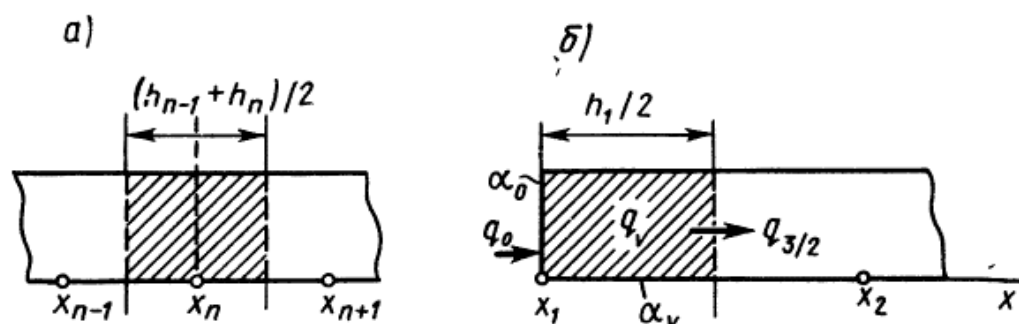


Рис. 3.6

Пусть выбрана неравномерная пространственная сетка $\{x_n\}_{n=1}^N$, шаг $h_n = x_{n+1} - x_n$. Элементарные ячейки для всех внутренних узлов x_n построим, отступая от каждого узла на половину шага влево и вправо (рис. 3.6, а). Элементарная ячейка для узла x_n представляет собой отрезок $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$, $x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2$.

Уравнение теплового баланса для внутренней элементарной ячейки $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ имеет вид

$$-q_{n+1/2} + q_{n-1/2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (-\alpha_v T + q_v) dx = 0, \quad (3.40)$$

где $q_{n\pm 1/2} = -\lambda(x) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_{n\pm 1/2}}$ — тепловые потоки на границах.

Уравнение (3.40) представляет собой закон сохранения энергии для элементарной ячейки и имеет следующий смысл:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{поток от} \\ (n+1)\text{-й} \\ \text{ячейки в} \\ n\text{-ю} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{поток от} \\ (n-1)\text{-й} \\ \text{ячейки в} \\ n\text{-ю} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{поток от} \\ n\text{-й} \\ \text{ячейки в} \\ \text{среду} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{мощность} \\ \text{источников} \\ \text{в } n\text{-й} \\ \text{ячейке} \end{array} \right\} = 0.$$

Все составляющие уравнения баланса отнесены к единице площади поперечного сечения и выражены в Вт/м².

При вычислении теплового потока с боковой поверхности будем считать, что температура не изменяется на отрезке $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$, т. е.

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_v T dx \approx T_n \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_r dx. \quad (3.41)$$

Рассмотрим способы приближенного вычисления потоков $q_{n-1/2}$ и $q_{n+1/2}$. Один из них, удовлетворяющий условию согласования, был уже рассмотрен, см. (3.38):

$$q_{n-1/2} \approx \lambda(x_{n-1/2}) \frac{u_{n-1} - u_n}{h_{n-1}}, \quad q_{n+1/2} \approx \lambda(x_{n+1/2}) \frac{u_n - u_{n+1}}{h_n}. \quad (3.42)$$

Однако более подробный анализ показывает, что эти соотношения целесообразно использовать только в случае непрерывного и не слишком резкого изменения теплопроводности на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$.

Приближение (3.42) базируется на предположении о *малом изменении производной* dT/dx на соответствующих интервалах. Оно неправомерно в случае резкого изменения теплопроводности $\lambda(x)$, например, при наличии точки разрыва у $\lambda(x)$ на рассматриваемом интервале. Поэтому целесообразно строить приближение для потока исходя из предположения о *малом изменении потока* $q(x)$ на соответствующих интервалах. Очевидно, что при малых h поток мало изменяется даже в случае разрыва $\lambda(x)$. Из закона Фурье имеем

$$q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{q(x)}{\lambda(x)}. \quad (3.43)$$

Проинтегрируем равенство (3.43) по отрезку $[x_{n-1}, x_n]$:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dT}{dx} dx = T_n - T_{n-1} = - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx.$$

Предполагая, что $q(x)$ мало меняется на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$, положим $q(x) \approx q_{n-1/2}$ и вынесем $q_{n-1/2}$ за интеграл. Тогда получим

$$T_n - T_{n-1} \approx -q_{n-1/2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\lambda(x)}.$$

Таким образом, тепловые потоки через границы элементарной ячейки выражаются через разности температур в узлах так:

$$q_{n+1/2} \approx \lambda_{n+1/2} \frac{T_n - T_{n+1}}{h_n}, \quad q_{n-1/2} \approx \lambda_{n-1/2} \frac{T_{n-1} - T_n}{h_{n-1}}, \quad (3.44)$$

где $\lambda_{n+1/2}$, $\lambda_{n-1/2}$ — эффективные теплопроводности отрезков $[x_n, x_{n+1}]$ и $[x_{n-1}, x_n]$, соответственно

$$\lambda_{n+1/2} = h_n \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}, \quad \lambda_{n-1/2} = h_{n-1} \left[\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}.$$

Очевидно, что аппроксимация (3.44) удовлетворяет условию согласования потоков.

Подставляя полученные выражения для тепловых потоков в уравнение теплового баланса (3.40) для элементарной ячейки, получаем следующее разностное уравнение:

$$\lambda_{n+1/2} \frac{u_{n+1} - u_n}{h_n} + \lambda_{n-1/2} \frac{u_n - u_{n-1}}{h_{n-1}} + (q_{vn} - \alpha_{vn} u_n) \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} = 0, \quad (3.45)$$

где

$$\alpha_{vn} = \frac{1}{l_n} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \alpha_v(x) dx,$$

$$q_{vn} = \frac{1}{l_n} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q_v(x) dx,$$

$l_n = (h_n + h_{n-1})/2$ — длина элементарной ячейки, величины α_{vn} и q_{vn} представляют собой средние по объему (в одномерном случае по длине) ячейки значения α_v и q_v .

Можно показать, что разностное уравнение (3.45) аппроксимирует уравнение (3.39) с порядком $O(h^2)$ на равномерной сетке и с порядком $O(h)$ на неравномерной сетке.

В случае непрерывности функций $\lambda(x)$, $\alpha_v(x)$, $q_v(x)$ интегралы от них обычно заменяют простейшими квадратурными формулами. Для q_v и α_v чаще всего полагают

$$q_{vn} \approx q_v(x_n), \quad \alpha_{vn} \approx \alpha_v(x_n),$$

т. е. заменяют соответствующие интегралы формулой прямоугольников.

Эффективные теплопроводности $\lambda_{n\pm 1/2}$ вычисляют одним из следующих способов:

$$a) \lambda_{n\pm 1/2} = \lambda(x_{n\pm 1/2}); \quad (3.46)$$

$$b) \lambda_{n\pm 1/2} = [\lambda(x_{n\pm 1}) + \lambda(x_n)]/2; \quad (3.47)$$

$$в) \lambda_{n\pm 1/2} = 2\lambda(x_n)\lambda(x_{n\pm 1})/[\lambda(x_n) + \lambda(x_{n\pm 1})]. \quad (3.48)$$

Последнюю формулу можно трактовать как результат суммирования двух последовательных сопротивлений участков с теплопроводностями $\lambda(x_n)$ и $\lambda(x_{n\pm 1})$ длиной $h/2$ каждый.

Подчеркнем, что если функции λ , α_v , q_v имеют разрывы между узлами, то для повышения точности разностной схемы, как правило, следует вычислять интегралы точно. Особенно это существенно в случае многомерных задач, когда приходится вести расчет при достаточно грубых сетках.

Мы рассмотрели построение разностной схемы методом баланса для стационарного уравнения. Его целесообразно применять и для нестационарного уравнения. В принципе вопрос о том, на каком временном слое брать аппроксимацию пространственного оператора, мы уже обсудили в § 3.2. Поэтому для перехода к нестационарной задаче достаточно в приведенных выше аппроксимациях пространственного оператора поставить у сеточных функций индекс настоящего j или предыдущего ($j - 1$) момента времени. Однако для уравнений, содержащих коэффициенты, зависящие от времени, целесообразно использовать метод баланса в нестационарном варианте. Кроме того, на основе такого подхода проще получать аппроксимации для граничных условий и пояснять их физический смысл.

Рассмотрим построение консервативной разностной схемы в случае нестационарного уравнения для стержня с боковым теплообменом:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \alpha_v(x) T + q_v(x, \tau). \quad (3.49)$$

Уравнение теплового баланса для ячейки $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ на промежутке времени от τ_{j-1} до τ_j имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} c\rho (T^j - T^{j-1}) dx &= \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left[-q_{n+1/2} + q_{n-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (q_v - \alpha_v T) dx \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Здесь выражение в левой части представляет собой количество теплоты, идущее на нагрев элементарной ячейки. Аппроксимируем левую часть (3.50) выражением

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} c\rho (T^j - T^{j-1}) dx \approx (T_n^j - T_n^{j-1}) (c\rho)_n \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}.$$

В правой части равенства (3.50) для аппроксимации интегралов по пространственной переменной используем выражения, приведенные выше. Для аппроксимации интегралов по времени нужно принять какое-то предположение о характере изменения температуры во времени на интервале $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Примем, что в любой точке этого

интервала температура постоянна и равна средневзвешенному значению от T_n^{j-1} и T_n^j :

$$T_n(\tau) \approx \sigma T_n^j + (1 - \sigma) T_n^{j-1},$$

где σ — параметр, который может принимать значение от 0 до 1. Тогда при вычислении интеграла по времени получаем следующее выражение:

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} T_n(\tau) d\tau \approx \Delta\tau [\sigma T_n^j + (1 - \sigma) T_n^{j-1}].$$

Подставляя выражения для тепловых потоков в уравнение баланса (3.50), записываем разностную схему

$$\begin{aligned} c\rho \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} \cdot \frac{(u_n^j - u_n^{j-1})}{\Delta\tau} = & \sigma \left[\lambda_{n+1/2} \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h_n} + \right. \\ & \left. + \lambda_{n-1/2} \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h_{n-1}} \right] + (1 - \sigma) \left[\lambda_{n+1/2} \frac{u_{n+1}^{j-1} - u_n^{j-1}}{h_n} + \right. \\ & \left. + \lambda_{n-1/2} \frac{u_n^{j-1} - u_{n-1}^{j-1}}{h_{n-1}} \right] + q_{vn}^j \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} - \\ & - \alpha_{vn} \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} [\sigma u_n^j + (1 - \sigma) u_n^{j-1}], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\text{где } q_{vn}^j = \frac{1}{l_n \Delta\tau} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q_v(x, \tau) dx d\tau.$$

Уравнения (3.51) записываются для всех внутренних точек тела. При $\sigma = 0$ получаем явную схему, при $\sigma = 1$ — неявную, при $\sigma = 1/2$ — схему Кранка — Николсона.

Аппроксимация граничных условий. Перейдем к рассмотрению разностных уравнений для элементарных объемов, прилегающих к границам, в которых будут учтены граничные условия третьего рода (3.2) и которые замкнут общую систему уравнений разностной схемы.

Возьмем для определенности элементарную ячейку $[0, h_1/2]$, прилегающую к границе $x = 0$ (рис. 3.6, б). При записи закона сохранения энергии для элементарной ячейки будем использовать чисто неявную схему (при $\sigma = 1$), а также полученные выше выражения (3.44) для тепловых потоков. Тепловой поток (все потоки относим к единице площади поперечного сечения стержня), выходящий из ячейки через границу $x = h_1/2$, равен

$$q_{1+1/2} = \lambda_{1+1/2} \frac{T_1^j - T_2^j}{h_1}, \text{ где } \lambda_{1+1/2} = h_1 \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1};$$

тепловой поток, рассеиваемый в среду на границе, $q^I = \alpha_0 T_1^i$; мощность, выделяемая внутренними источниками, $q^{II} = q_{v1}^i h_1/2$; тепловой поток, рассеиваемый с боковой поверхности, $q^{III} = \alpha_{v1} T_1^i h_1/2$; мощность, расходуемая на нагрев элементарного объема,

$$q^{IV} = c \rho \frac{h_1}{2} \cdot \frac{(T_1^i - T_1^{i-1})}{\Delta \tau},$$

Из закона сохранения энергии следует

$$-q_{1+1/2} - q^I + q_0 + q^{II} - q^{III} - q^{IV} = 0$$

или

$$\lambda_{1+1/2} \frac{u_2^i - u_1^i}{h_1} - \alpha_0 u_1^i + q_0 + \frac{h_1}{2} \left(q_{v1}^i - \alpha_{v1} u_1^i - c \rho \frac{u_1^i - u_1^{i-1}}{\Delta \tau} \right) = 0. \quad (3.52)$$

Первые три слагаемых (3.52) совпадают с простейшей аппроксимацией граничного условия (3.24), использованной выше в § 3.2 и полученной простой заменой производной $\frac{\partial T}{\partial x}$ конечной разностью. Дополнительные слагаемые учитывают действие внутренних источников, теплообмен с боковой поверхности и затраты теплоты на нагрев элементарной ячейки. Эти слагаемые пропорциональны h_1 , поэтому при $h_1 \rightarrow 0$ обе аппроксимации граничного условия становятся идентичными. Можно показать, что погрешность аппроксимации граничного условия уравнением (3.52) — $O(h_1^2)$, а уравнением (3.24) — $O(h_1)$.

Аналогичным образом строится разностная аппроксимация граничного условия при $x = l$.

Как видно из (3.52), пренебрежение второй группой слагаемых приводит, например, к тому, что не учитывается мощность, рассеиваемая в области, прилегающей к границе на расстоянии $h_1/2$.

При небольшом числе пространственных узлов это может привести к заметным потерям мощности. Например, при $N = 11$, $h = l/10$ и $q_v = \text{const}$ «теряется» 10 % полной мощности, что, разумеется, приводит к занижению перегревов. Еще большие значения может принимать погрешность разностного решения без учета мощности в прилегающих к границе областях в многомерных задачах, поскольку в этом случае пространственные сетки довольно грубые и объем приграничных областей может составлять значительную долю общего объема тела.

Отметим, что при использовании явной схемы аппроксимация граничных условий проводится аналогично рассмотренному выше случаю неявной схемы, но потоки $q_{3/2}$, q^I и q^{II} записываются че-

рез значения температуры с предыдущего момента времени T_{i-1}^{j-1} и T_1^{j-1} . При этом несколько изменяется по сравнению с (3.28) условие устойчивости. Оно становится зависящим от значений коэффициентов теплоотдачи на торцах и имеет вид

$$\Delta \tau \leq \min \left\{ \frac{h^2}{2a(1+\alpha_0 h/\lambda)}, \frac{h^2}{2a(1+\alpha_l h/\lambda)} \right\}.$$

Система уравнений (3.51) для внутренних точек $n = 2, \dots, N-1$ и уравнений типа (3.52) для граничных точек представляет собой консервативную неявную схему численного решения задачи (3.49), (3.2). Если просуммировать все уравнения разностной схемы для $n = 1, \dots, N$, то получим сеточный аналог закона сохранения энергии для всей области $[0, l]$. Учитывая, что выполняется условие согласования тепловых потоков на границах элементарных ячеек, в результате суммирования придем к равенству, записанному ниже для упрощения обозначений при $h = \text{const}$:

$$\begin{aligned} h \left(\frac{q_{v1}^j}{2} + \frac{q_{vN}^j}{2} + \sum_{n=2}^{N-1} q_{vn}^j \right) + q_0 + q_l = \alpha_0 u_1^j + \alpha_l u_N^j + \\ + h \left(\frac{\alpha_{v1} u_1^j}{2} + \frac{\alpha_{vN} u_N^j}{2} + \sum_{n=2}^{N-1} \alpha_{vn} u_n^j \right) + \\ + \frac{c \rho h}{\Delta \tau} \left[\frac{(u_1^j - u_1^{j-1})}{2} + \frac{(u_N^j - u_N^{j-1})}{2} + \sum_{n=2}^{N-1} (u_n^j - u_n^{j-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Формула (3.53) имеет следующий смысл: сумма мощности внутренних источников и потоков теплоты, выделяющейся на границах, равна сумме тепловых потоков, уходящих в среду через границы и рассеиваемых через боковую поверхность, и мощности, расходуемой на нагрев стержня. Заметим, что если величины q_{vn} получены при $q_v = q_v(x)$ путем приближенного вычисления соответствующих интегралов, то «сеточная» полная мощность отличается от истинного значения полной мощности в исходной постановке задачи на величину погрешности квадратурных формул интегрирования.

Свойство монотонности. Кроме условия наличия свойства консервативности к разностной схеме можно предъявить еще одно разумное требование, выполнение которого обычно проверяют на практике. Чтобы его сформулировать, запишем разностное уравнение (3.51) для внутреннего элементарного объема с центром в точке x_n в виде

$$b_n u_n^j = a_n u_{n+1}^j + c_n u_{n-1}^j + d_n u_n^{j-1} + e_n u_{n+1}^{j-1} + f_n u_{n-1}^{j-1} + g_n, \quad (3.54)$$

где коэффициенты имеют следующие значения (при $\lambda = \text{const}$, $h = \text{const}$, $\alpha_v = 0$):

$$b_n = 2\sigma + c\rho h^2/\lambda\Delta\tau, \quad a_n = c_n = \sigma, \\ d_n = c\rho h^2/\lambda\Delta\tau - 2(1 - \sigma), \quad e_n = f_n = (1 - \sigma), \quad g_n = q_v h^2/\lambda.$$

Разностное решение u_n^i должно правильно качественно отражать свойства различных точных решений. Из физических соображений вытекает, что при прочих равных условиях увеличение любой температуры, стоящей в правой части равенства (3.54), должно приводить к возрастанию значения u_n^i . Отсюда следует, что коэффициенты a_n , c_n , d_n , e_n , f_n не должны принимать отрицательных значений, если $b_n > 0$. В противном случае мы рискуем получить физически неправдоподобные решения.

Видно, что все коэффициенты, кроме d_n , всегда положительные. Условие положительности для d_n имеет вид

$$c\rho h^2/\lambda\Delta\tau - 2(1 - \sigma) > 0 \text{ или } \Delta\tau \leq \frac{c\rho h^2}{2\lambda(1 - \sigma)}. \quad (3.55)$$

Для явной схемы (при $\sigma = 0$) условие (3.55) совпадает с условием устойчивости (3.30). Для схемы Кранка — Николсона (при $\sigma = 1/2$), которая устойчива при любом соотношении между $\Delta\tau$ и h , из (3.55) вытекает ограничение на шаг по времени, обусловленное требованием получения физически правдоподобных решений. Действительно, если не выполняется условие (3.55), то при моделировании процессов, для которых точные решения представляют собой монотонные по времени функции $T(x, \tau)$, могут получаться разностные решения, колеблющиеся по времени и по пространственной координате. Условие отсутствия колебаний разностного решения при моделировании процессов с монотонно изменяющейся температурой называется *условием монотонности разностной схемы*. Таким образом, недостатком схемы Кранка — Николсона, о котором мы упоминали в § 3.2, является отсутствие монотонности при превышении некоторой критической величины шага по времени. Заметим, что отсутствие монотонности не означает практической непригодности разностной схемы для счета. Однако в этом случае следует иметь в виду, что качественное поведение разностного решения (изменение u_n^i в пространстве и во времени) может противоречить физическому смыслу, хотя количественно величина погрешности разностного решения $|e_n^i| = |T_n^i - u_n^i|$ может быть и достаточно мала.

Отметим, что в наиболее благоприятном положении с рассмотренной точки зрения находится неявная схема ($\sigma = 1$), у которой условие (3.55) переходит в $d_n = c\rho h^2/\lambda\Delta\tau > 0$ и выполняется всегда.