Тема 5. Метод граничных элементов и технология его применения

В методе граничных элементов исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду, содержащему только значения переменных на границах области [6, 8, 21].

Схема дискретизации требует разбиения лишь границы, а не всей области (отсюда и название метода). Очевидно, что дискретизация границы порождает меньшую систему общих уравнений задачи, чем дискретизация всего тела. Таким образом, МГЭ уменьшает размерность исходной задачи на единицу, т. е. для трехмерных задач получаются двумерные граничные элементы на поверхности. Применение МГЭ обычно приводит к плотно заполненным матрицам. Это означает, что требования к ресурсам памяти и время вычисления будут расти пропорционально квадрату размера задачи. Пользуясь принципом суперпозиции и функциями влияния (функциями Грина) в МГЭ, находят такие нагрузки, прикладываемые в бесконечной области на воображаемой границе тела которые обеспечивают удовлетворение граничных условий заданного ограниченного тела.

Граница тела дискретизируется отдельными элементами, называемыми граничными (ГЭ). Тело условно продолжается за границы так, чтобы оно превратилось в часть бесконечной области (или конечной, но такой, для которой могут быть получены функции влияния). Каждый ГЭ загрузим некоторой распределенной нагрузкой. Она может приниматься равномерно распределенной, изменяться в пределах ГЭ по линейному или более сложному закону. Путем интегрирования функций влияния по области ГЭ выразим напряжения и перемещения, вызываемые нагрузкой на единичном ГЭ, в любой точке области.

Достоинства

В 80е метод граничного элемента (МГЭ) рассматривался как возможный конкурент метода конечных элементов (МКЭ). Основное преимущество по сравнению с МКЭ — точное удовлетворение исходному дифференциальному уравнению внутри расчетной области. В задачах с бесконечной границей МГЭ имеет преимущество из-за легкого её учета.

Недостатки

Недостатками традиционной постановки метода являются:

Рассматриваются граничные условия одного типа либо Дирихле, либо Неймана, смешанная задача не рассмотрена. (Не составляет труда записать уравнения смешанной задачи, но они не имеют теории решения.)

Граница должна быть гладкой. (Полученные при решении задачи Неймана сингулярные интегралы не существуют в угловых точках кусочно гладкой границы.)

Матрица результирующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), заменяющей интегральное, — полностью заполненная, в отличие от МКЭ, в котором она содержит большое количество нулей (хотя в МКЭ матрица на единицу размерности больше, так как сетка элементов наносится на всю область, а не только на границу).

Сложности

Так же к недостаткам можно отнести техническую сложность МГЭ:

Вычисление сингулярных интегралов представляет трудность. Они могут быть вычислены, например, с помощью формулы Стокса, после замены границы набором плоских элементов. Либо с помощью их регулярного представления (Перлин П. И.).

Разрешающие уравнения (обобщенные) Фредгольма второго рода, находятся на границе круга сходимости. То есть либо само уравнение, либо союзное к нему имеют собственные решения (отличные от нуля решения при нулевой правой части) . Что в частности, не позволяет искать решение внешней задачи Дирихле на основе потенциала двойного слоя, так как условие разрешимости нельзя сформулировать, — в общем случае неизвестна собственная функция союзного уравнения. (Хотя исходная задача имеет единственное решение, — потенциал двойного слоя не удовлетворяет «условию излучения».) Способ перехода к модифицированным уравнениям известен. (Если к ним не переходить, то например, при решении внутренней задачи Неймана определитель матрицы СЛАУ при уменьшении характерного размера сети граничных элементов стремится к нулю.)

В целом

Можно сказать, что в рамках традиционной постановки задачи Дирихле, Неймана (и соответствующие им теории упругости) для гладкой границы успешно решаются. Можно использовать аналитическое интегрирование (не всегда это рационально с точки зрения расхода машинных ресурсов) и метод последовательных приближений решения СЛАУ (на основе модифицированных уравнений), для доказательства сходимости которых используется теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Из-за сложности реализации и ограниченной сферы применения интерес к методу уменьшился. По крайней мере, заменой МКЭ, как ожидалось, он не стал.

Существует большое число постановок, отличных от традиционной. В том числе в тех случаях, когда математическая теория отсутствует, а уравнения записать можно. Например, решение на основе уравнения Фредгольма первого рода, для чего необходимо производить регуляризацию, иначе задача является некорректно поставленной (при небольшом изменении правой части, решение изменяется значительно). Смешанной задачи, где необходимо учесть возможное появление неограниченной производной искомой функции вблизи точки смены граничных условий даже при гладкой границе. Обобщение для кусочно гладкой границы (в плоском случае) можно производить с помощью уравнений для гладкой границы, путём введения весовых функций, полученных на основе исследования асимптотик решений для клина.