Тема 1. Построение математической модели на микро и макроуровнях. Построение физической модели

При проектировании машиностроительных изделий, машин и комплексов, а также других технических объектов широко используется моделирование [2, 9, 15, 27, 34].

Моделирование представляет собой процесс замены объекта исследования его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. Модель – это физический или абстрактный образ объекта, удобный для изучения и позволяющий адекватно отображать физические свойства и характеристики объекта [34]. Удобство проведения исследований может определяться различными факторами: легкостью и доступностью получения информации, сокращением сроков и уменьшением материальных затрат на исследование и др.

Различают моделирование физическое и математическое. При использовании физического моделирования строят физическую модель, которая соответствующим образом отображает основные физические свойства и характеристики моделируемого объекта.

Физическое моделирование при создании сложных технических объектов сопряжено с большими временными и материальными затратами. Обычно изготавливался макетный или опытный образец технического объекта, проводились испытания, в процессе которых определялись его выходные параметры и характеристики, оценивались надежность функционирования и степень выполнения технических требований, предъявляемых к объекту. Если вариант технической разработки оказывался неудачным, все повторялось сначала, т. е. осуществлялось повторное проектирование, изготовление опытного образца, испытания и т. д.

Математическое моделирование связано с построением математической модели, представляющей собой математические соотношения, графы, схемы, диаграммы и т. п. Оно широко используется как в научных исследованиях, так и при проектировании.

Математическое моделирование позволяет посредством математических символов и зависимостей составить описание функционирования технического объекта в окружающей внешней среде, определить выходные параметры и характеристики, получить оценку показателей эффективности и качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта. Применение математического моделирования при проектировании позволяет отказаться от физического моделирования, значительно сократить объемы испытаний и доводочных работ, обеспечить создание технических объектов с высокими показателями эффективности и качества. Одним из основных компонентов системы проектирования в этом случае становится математическая модель [23, 34].

Математическая модель – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. В качестве математических объектов выступают числа, переменные, множества, векторы, матрицы и т. п. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется математическим моделированием. В конструкторской практике под математическим моделированием обычно понимается процесс построения математической модели, а проведение исследований на модели в процессе проектирования называют вычислительным экспериментом. Для осуществления вычислительного эксперимента необходимо разработать алгоритм реализации математической модели.

Алгоритм автоматизированного проектирования представляет собой совокупность предписаний, обеспечивающих выполнение операций и процедур проектирования, необходимых для получения проектного решения. Алгоритм, записанный в форме, воспринимаемой вычислительной машиной, представляет собой программную модель. Процесс программирования называют программным моделированием.

На различных этапах и стадиях проектирования технических систем используются различные математические модели. На ранних стадиях обычно модели простые, но чем подробнее проработка проекта, тем сложнее нужна модель. Математические модели могут представлять собой системы дифференциальных уравнений, системы алгебраических уравнении, простые алгебраические выражения, бинарные отношения, матрицы и др. Сложные модели требуют больших затрат времени на проведение вычислительных экспериментов. Системы уравнений таких моделей обычно отличаются плохой обусловленностью, что создает проблемы обеспечения устойчивости вычислительного процесса, достижения необходимой точности при приемлемых затратах времени [18, 26, 28, 34].

Поскольку все проектные работы носят оптимизационный характер, то решать системы уравнений для получения искомого результата приходится многократно. Ситуация усугубляется также многомерностью и многокритериальностью задач. На заключительных этапах проектирования часто приходится использовать вероятностные модели с тем, чтобы исследовать процессы функционирования технической системы в условиях, максимально приближенных к реальным [2, 9, 27, 28].

Если система проектирование потребует слишком больших затрат времени на разработку проекта изделия, то она вряд ли получит широкое практическое применение.

При автоматизированном проектировании используются теоретические и экспериментальные, детерминированные и вероятностные, статические и динамические, структурные и функциональные модели и др. В практике применяются методы получения этих моделей: методы планирования эксперимента, регрессионного и корреляционного анализа, методы оптимизации.

При проектировании технических объектов используют множество видов математических моделей, в зависимости от уровня иерархии, степени декомпозиции системы, аспекта, стадии и этапа проектирования.

При переходе к более высокому иерархическому уровню система низшего уровня становится элементом системы нового уровня, и наоборот, при переходе к низшему уровню элемент становится системой. Как правило, чем ниже уровень иерархии технического объекта, тем более детальное описание его физических свойств. В итоге, на низших уровнях используют наиболее сложные математические модели. На высших уровнях могут быть применены более простые модели, хотя бы простой аппроксимацией моделей низших иерархических уровней.

Величины, характеризующие состояние технического объекта в процессе его функционирования, называют фазовыми переменными. Вектор фазовых переменных задает точку в пространстве, называемом фазовым пространством. Фазовое пространство, в отличие от геометрического, многомерное. Его размерность определяется количеством используемых фазовых координат [34].

Обычно в уравнениях математической модели фигурируют не все фазовые переменные, а только часть из них, достаточная для однозначной идентификации состояния объекта. Такие фазовые переменные называют базисными координатами. Через базисные координаты могут быть вычислены значения и всех остальных фазовых переменных.

К математическим моделям предъявляются требования адекватности, экономичности, универсальности. Эти требования противоречивы, поэтому обычно для проектирования каждого объекта используют свою оригинальную модель.

Модель считается адекватной, если отражает исследуемые свойства с приемлемой точностью. Точность оценивается степенью совпадения предсказанных в процессе вычислительного эксперимента на модели значении выходных параметров с истинными их значениями.

Погрешность модели ε в по всей совокупности m учитываемых выходных параметров оценивается одной из норм вектора $\vec{\varepsilon}_{м} = (\varepsilon_1, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ [34]:

$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_{м}\| = \max|\varepsilon_j|, \quad j \in [1:m], \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_j = (\tilde{y}_j - y_j)/y_j$ – относительная погрешность модели по j-му выходному параметру; $\tilde{y}_j$ – значение j-го выходного параметра, полученное в результате вычислительного эксперимента на принятой для проектирования математической модели; y_j – значение того же параметра, полученное при испытаниях технического объекта в контролируемых тестовых условиях или в вычислительном эксперименте на более сложной математической модели, точность которой проверена и отвечает принятой норме.

Математические модели технических объектов, используемые при проектировании, предназначены для анализа процессов функционирования объектов и оценки их выходных параметров. Они должны отображать физические свойства объектов, существенные для решения конкретных задач проектирования. При этом математическая модель должна быть как можно проще, но в то же время обеспечивать адекватное описание анализируемого процесса.

В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных иерархических уровня: метауровень; макроуровень; микроуровень.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

На макроуровне объект проектирования рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных элементов.

На микроуровне объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных. На микроуровне проектируют неделимые по функциональному признаку элементы технической системы, называемые базовыми элементами. Примерами таких элементов являются рамы, панели, корпусные детали, валы и др. Проектирование их основано на анализе сложно-напряженного состояния. Базовый элемент рассматривается как система, состоящая из множества однотипных функциональных элементов одной и той же физической природы, взаимодействующих между собой и находящихся под воздействием внешней среды и других элементов технического объекта, также являющихся внешней средой по отношению к базовому элементу [34].

Микроуровень – это нижний иерархический уровень декомпозиции объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания. На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой, динамические системы с распределенными параметрами. Их также называют непрерывными системами. Функционирование этих систем описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами [34]

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0, \quad (1.2)$$

или в компактной форме

$$L\varphi(\vec{Z}) = \Theta(\vec{Z}), \quad (1.3)$$

где L – дифференциальный оператор; φ – искомая функция (фазовая координата); x_i – пространственные координаты; n – количество пространственных координат; t – время; Z – вектор независимых переменных; $\Theta(\vec{Z})$– известная функция независимых координат.

Независимыми переменными в этих моделях являются пространственные координаты x_i и время t. Фазовая координата – функция независимых переменных.

Размерность задачи определяется числом пространственных координат: при n = 1 – объект одномерный; при n = 2 – двумерный; при n = 3 – трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида (1.2), если несколько фазовых переменных, т.е. вектор $\vec{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ – системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют стационарной, в противном случае – нестационарной. Стационарная задача характеризует статическое состояние технического объекта. Динамические режимы функционирования объекта относятся к нестационарным задачам и для их оценки требуются исследования переходных процессов.

На всех рассмотренных иерархических уровнях используют следующие виды математических моделей: детерминированные и вероятностные, теоретические и экспериментальные факторные, линейные и нелинейные, динамические и статические, непрерывные и дискретные, функциональные и структурные.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования.

В инвариантной форме математическая модель представляется системой уравнений, вне связи с методом решения этих уравнений.

В алгоритмической форме соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма – последовательности вычислений.

Аналитическая модель представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин. Такие модели получают на основе физических законов, либо в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы. К ним относятся также регрессионные модели, получаемые на основе результатов эксперимента.

Графическая модель представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, диаграмм и т. п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей.

Построение физической модели

При рассмотрении технических процессов различной физической природы, удается выделить отдельные агрегаты или узлы, каждый из которых в зависимости от переносимой и преобразуемой физической субстанции можно рассматривать как электрическую, механическую, тепловую, гидравлическую систему. При всей сложности моделируемых систем, используя принцип декомпозиции, их можно представить совокупностью простейших типовых элементов, описываемых сравнительно несложными математическими моделями макроуровня [15]. Среди внешних и выходных параметров, характеризующих состояние каждого такого элемента, удается выделить величины, имеющие смысл потенциалов и потоков физических субстанций (например, напряжение и сила электрического тока, разность температур и тепловой поток и т.п.). Эти величины будем называть потенциальными и потоковыми соответственно. Связь между этими величинами устанавливают при помощи так называемых уравнений состояния элемента, в которые входят также и его внутренние параметры.

Для анализа физических процессов, протекающих в типовых элементах разнообразных технических объектов, рассмотрим простейшие элементы электрических цепей – резистор, идеальные конденсатор и индуктивность. Резистор является характерным представителем типового элемента, обладающего свойством оказывать сопротивление переносу электрических зарядов. Для прохождения через такой элемент потока этой субстанции необходимо располагать напряжением между входов и выходом. Конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд при повышении напряжения, а индуктивность – свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить электрический ток неизменным.

Оказывается, что среди простейших типовых элементов, в которых протекают процессы иной физической природы по сравнению с электрической системой, существуют элементы со свойствами, аналогичными указанным свойствам резистора, конденсатора и индуктивности. Поэтому рассмотрение целесообразно начать с уравнений состояния простейших элементов электрической цепи, а затем по аналогии с ними строить математические модели типовых элементов, характерных для других технических систем.

Математической моделью резистора (закон Ома), описывающей протекание через него электрического тока, является формула

$$\Delta U = I\,R, \qquad (1.4)$$

где ΔU – падение электрического напряжения на резисторе, измеряемая в вольтах (В); I – сила электрического, измеряемая в амперах (А) соответственно (рисунок 1.1,а); R – сопротивление резистора, измеряемое в омах (Ом).

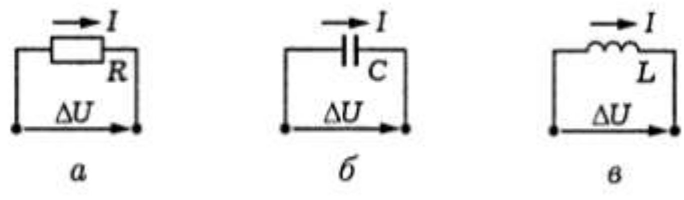

Рисунок 1.1 – Простейшие пассивные электрические двухполюсники

Электрическая энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивления при протекании через резистор тока, переходит в тепловую энергию, причем измеряемая в ваттах (Вт) мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = \Delta U\, I = I^2 R = \frac{(\Delta U)^2}{R}. \qquad (1.5)$$

Электрический конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд Q, измеряемый в кулонах (Кл), пропорционально разности потенциалов ΔU на его обкладках, причем

$$Q = \Delta U\, C, \qquad (1.6)$$

где C – емкость конденсатора, измеряемая в фарадах (Ф). Для идеального конденсатора с постоянной емкостью при изменении ΔU во времени t в цепи, содержащей последовательно включенный конденсатор (рисунок 1.1,б), протекает ток силой

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{d\Delta U}{dt}. \qquad (1.7)$$

Энергия электрического поля в конденсаторе, измеряемую в джоулях (Дж), рассчитывается по формуле

$$E = Q\frac{\Delta U}{2} = C\frac{(\Delta U)^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (1.8)$$

При изменении во времени силы тока, протекающего через индуктивность, возникает электродвижущая сила (ЭДС) самоиндукции, препятствующая изменению силы тока (рисунок 1.1,в). В случае идеальной (без активного сопротивления) катушки эту ЭДС можно представить как разность потенциалов

$$\Delta U = L\frac{dI}{dt} \qquad (1.9)$$

на концах индуктивной катушки, где L – ее индуктивность, измеряемая в генри (Гн). При прохождении электрического тока через катушку каждый ее виток пронизывает магнитный поток. Для катушки индуктивности принимают, что поток одинаков для всех витков и равен $\Psi = LI$. Величину Ψ называют потокосцеплением и измеряют в веберах (Вб). Энергия магнитного поля катушки, измеряемая в Дж, равна

$$E = \Psi\frac{I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L} \qquad (1.10)$$

В итоге, математической моделью резистора является алгебраическое уравнение, а для конденсатора и индуктивной катушки – имеет форму обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Если считать, что *R, C* и *L* в (1.4) – (1.10) не зависят от силы тока и напряжения, то эти уравнения устанавливают линейную связь между I и ΔU, что является признаком линейности математической модели.

При относитатьном перемещении отдельных элементов механической системы на поверхности их контакта возникают силы трения, препятствующие этому перемещению. Для уменьшения сопротивления трения к поверхности контакта подводят смазочный материал. Тогда скорость v скольжения одной детали относительно другой в первом приближении пропорциональна приложенной силе P (рисунок 1.2,а), т.е. P = kтрSv, где kтр – коэффициент вязкого трения, S – площадь поверхности контакта. Если в этом случае для механической системы в качестве потенциалъпой величины выбрать силу P, а в качестве потоковой – скорость v, то записанное равенство можно рассматривать как аналог формулы (1.4) закона Ома

$$P = k_{тр} S v = R_м v \qquad (1.11)$$

а величину $R_м = k_{тр} S$ – как аналог электрического сопротивления R.

а б

Рисунок 1.2 – Простейшие механические системы

При движении против сил сопротивления вязкого трения совершается работа. Мощность, требуемая для преодоления вязкого трения при поступательном движении, равна $W_{тр} = k_{тр} S v^2 = R_м v^2$. Эта мощность является аналогом мощности тепловыделения на резисторе (1.5).

Рассмотрим продольную деформацию линейно упругого стержня с поперечным сечением площадью S при растяжении силой P можно считать одинаковой по всей длине l стержня (рисунок 1.2,б) и равной в соответствии с законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{ES}, \qquad (1.12)$$

где $\sigma = P/S$ – механическое напряжение в поперечном сечении стержня, E – модуль упругости материала стержня при растяжении (модуль Юнга), измеряемые в паскалях (Па).

При этом торец стержня, подверженный действию силы, переместится относительно закрепленного торца на расстояние $u = \varepsilon l = Pl/(SE)$. При сравнительно медленном изменении во времени t силы P, позволяющем пренебречь силами инерции, получим

$$\frac{du}{dt} = v = \frac{l}{SE}\frac{dP}{dt} = C_м \frac{dP}{dt}, \qquad (1.13)$$

где величина $C_м = l/(SE)$ является аналогом емкости C в (1.7).

Аналогию между математическими моделями типовых элементов механических систем и электрических двухполюсников называют электромеханической. Ее удобно использовать при построении моделей сложных механических систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов.

Рассмотрим тепловые системы, в которых происходит накопление и перенос тепловой энергии. Аналогами электрического напряжения и силы тока в тепловой системе являются разность температур ΔT и тепловой поток Q, измеряемые в кельвинах (К) и ваттах (Вт) соответственно [15, 25].

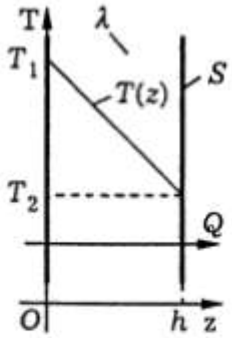

Рисунок 1.3 – Простейшая тепловая система

Многие элементы конструкции тепловых систем могут быть сведены к расчетной схеме плоской стенки толщиной *h* (рисунок 1.3). Если на поверхностях стенки, материал которой имеет коэффициент теплопроводности λ, измеряемый в Вт/(м·К), заданы постоянные значения T_1 и T_2 температур, то при $\lambda = const$ установившееся распределение температуры по толщине стенки будет линейным

$$T(z) = T_1 - \Delta T(z/h), \qquad (1.14)$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$, а z – координата, отсчитываемая внутрь стенки от поверхности с температурой T_1. В этом можно убедиться, решив одномерное уравнение Лапласа $\frac{d^2T(z)}{dz^2} = 0$, описывающее стационарное температурное поле в плоской стенке. В соответствии с эмпирическим законом теплопроводности Фурье, тепловой поток, проходящий через стенку, одна из поверхностей которой имеет площадь *S*, равен $Q = (\lambda/h)S\Delta T$. Отсюда получаем зависимость

$$\Delta T = Q\frac{h}{\lambda S} = QR_m, \qquad (1.15)$$

аналогичную закону Ома (1.4). Величину $R_m = h/(\lambda S)$ в (1.15) называют термическим сопротивлением плоской стенки.

Установленную выше аналогию между математическими моделями элементов тепловых систем и электрических двухполюсников принято называть электротепловой.

Перейдем к рассмотрению простейших типовых элементов, характерных для технических систем, в которых происходит перемещение несжимаемой жидкости. Такие системы принято называть гидравлическими. Электрическому напряжению и силе тока в гидравлической системе соответствуют разность давлений Δp и объемный расход $Q_{ж}$ жидкости, измеряемые в паскалях (Па) и м^3/с соответственно.

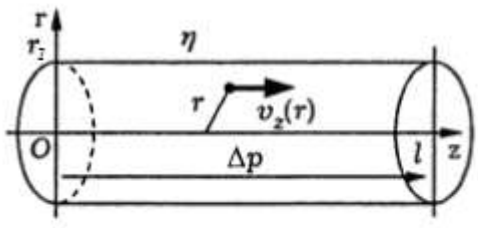

Рисунок 1.4 – Простейшая гидравлическая система

Из курса физики известно, что для участка достаточно длинного трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса *r*, при установившемся ламинарном течении вязкой жидкости справедлива следующая зависимость скорости v_z вдоль оси трубопровода от радиальной координаты *r* [13, 15]:

$$v_z(r) = \frac{r_1^2 - r^2}{4\eta l}\Delta p, \qquad (1.16)$$

где $\eta > 0$ – коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, измеряемый в Па·с, $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ – перепад давления, приходящийся на участок трубопровода длиной *l* (рисунок 1.4). Эту зависимость можно получить, решая уравнение Навье-Стокса. Учитывая (1.16), вычисляем объемный расход жидкости через трубопровод.

$$Q = \int_0^{r_1} 2\pi r v_z(r)dr = \frac{\pi\Delta p}{2\eta l}\int_0^{r_1} r(r_1^2 - r^2)dr = \frac{\pi r_1^4 \Delta p}{8\eta l}, \qquad (1.17)$$

Величину $R = \dfrac{8\eta l}{\pi r_1^4}$ можно рассматривать как гидравлическое сопротивление участка трубопровода длиной *l* и записать $\Delta p = QR$, что аналогично закону Ома в виде (1.4).

Простейшие типовые элементы систем, рассмотренные в данном параграфе, являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение математических моделей макроуровня простейших типовых элементов для описания реальных систем вызывает неизбежные погрешности. При использовании математических моделей макроуровня конкретного типового элемента важно располагать результатом даже с повышенной погрешностью.