

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семёнов

***РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ
МЕТОДОВ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК***

Учебное пособие

2-е издание

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим специальностям

Ульяновск
2010

УДК 519.6 (075)
ББК 22.311 я7
А 67

Рецензенты: кафедра прикладной математики УлГУ
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор А. А. Бутов);
д-р физ.-мат. наук, профессор УлГУ В. Л. Леонтьев.

Под общей редакцией д-ра физ.-мат. наук, профессора П. А. Вельмисова

Анкилов, А. В.

А 67 Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок : учебное пособие / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семёнов; под общ. ред. П. А. Вельмисова. – 2-е изд. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 179 с.

ISBN 978-5-9795-0712-5

В пособии представлены алгоритмы численного решения некоторых линейных краевых или начально-краевых задач математической физики. Приведены постановки лабораторных работ с использованием математически ориентированного пакета MathCAD, даны примеры их выполнения.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курсы современных численных методов, для аспирантов, научных работников и инженеров, применяющих численные методы для решения прикладных задач.

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика» УлГТУ в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013гг.), ГК №П1122.

Печатается в авторской редакции.

УДК 519.6 (075)
ББК 22.311 я7

© Анкилов А. В., Вельмисов П. А.,
Семёнов А. С., 2008

© Анкилов А. В., Вельмисов П. А.,
Семёнов А. С., 2010

© Оформление. УлГТУ, 2010

ISBN 978-5-9795-0712-5

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
1. Математическое моделирование физических задач	8
1.1. Вывод уравнений одномерной теплопроводности	8
1.2. Постановка краевой задачи одномерной стационарной теплопроводности	10
1.3. Постановка начально-краевой задачи нестационарной одномерной теплопроводности	12
1.4. Постановка краевых задач двухмерной стационарной теплопроводности	12
1.5. Вывод уравнений поперечных колебаний струны	13
1.6. Вывод уравнений продольных и крутильных колебаний стержня	16
1.7. Постановка статических краевых задач для струны и стержня .	19
1.8. Краевые задачи в теории колебаний струн и стержней	19
1.9. Основные термины	21
2. Решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка	22
2.1. Постановка задачи	22
2.2. Алгоритм метода Галеркина	22
2.3. Алгоритм вариационного метода Ритца	25
2.4. Алгоритм интегрального метода наименьших квадратов	28
2.5. Построение систем пробных и поверочных функций	29
2.6. Задание к лабораторной работе	43
2.7. Выполнение работы в компьютерном классе	44
2.8. Порядок выполнения лабораторной работы	45
2.9. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример	46
2.10. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера	63
2.12. Основные термины	68
2.13. Вопросы для самоконтроля	68
3. Решение начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения методом Галеркина	70
3.1. Постановка задачи и алгоритм метода	70
3.2. О построении функции $u_0(x, t)$	75
3.3. Задание к лабораторной работе	78
3.4. Выполнение работы в компьютерном классе	80
3.5. Порядок выполнения лабораторной работы	81
3.6. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример	82
3.7. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера	96

3.8. Основные термины	102
3.9. Вопросы для самоконтроля	102
4. Решение начально-краевой задачи для одномерного гиперболического уравнения методом Галеркина	103
4.1. Постановка задачи и алгоритм метода	103
4.2. Задание к лабораторной работе	108
4.3. Выполнение работы в компьютерном классе	110
4.4. Порядок выполнения лабораторной работы	111
4.5. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример	111
4.6. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера	131
4.7. Основные термины	136
4.8. Вопросы для самоконтроля	136
5. Решение первой краевой задачи для двухмерного эллиптического уравнения методом Галеркина	138
5.1. Постановка задачи и алгоритм метода	138
5.2. Задание к лабораторной работе	140
5.3. Выполнение работы в компьютерном классе	142
5.4. Порядок выполнения лабораторной работы	142
5.5. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример	143
5.6. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера	156
5.7. Основные термины	162
5.8. Вопросы для самоконтроля	162
6. Прикладной математический пакет «Mathcad»	163
6.1. О системе «Mathcad».....	163
6.2. Основные понятия и функции	164
6.3. Операторы математического анализа	166
6.4. Функции и операторы матриц	167
6.5. Создание декартовых графиков на плоскости и в пространстве	168
6.6. Программные блоки	171
Приложение	172
Заключение	179
Библиографический список	179

Предисловие

Целый ряд современных методов, предназначенных для решения самых разнообразных задач математической физики, базируется на идеях ученых Б. В. Галеркина и В. Ритца. К этим методам относятся, например, методы взвешенных невязок и вариационные методы [1,2].

В настоящем пособии представлены возможные алгоритмы применения метода Галеркина и интегрального метода наименьших квадратов, относящихся к группе методов взвешенных невязок, и вариационного метода Ритца при численном решении краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, метода Галеркина при численном решении линейной начально-краевой задачи для одномерного параболического, одномерного гиперболического уравнений и первой краевой задачи для двухмерного эллиптического уравнения.

В новом методе можно быстрее разобраться, если с помощью него решать конкретные задачи. В качестве источников таких задач в пособии описаны задачи теплопроводности и задачи о колебаниях струн и стержней.

Для проведения вычислительного эксперимента, согласно алгоритму метода, выбранного для решения конкретной задачи, в пособии приведены постановки лабораторных работ. Для выполнения лабораторных работ разработаны в прикладной системе **MathCAD 2001 professional** файлы ODE.mcd, Parab.mcd, Hyperb.mcd, Ellipt.mcd.

В начале каждого файла дается задание на лабораторную работу, а в конце приведены варианты заданий, номера которых студенты получают от преподавателя. Тексты программ подробно описывают все действия и операции. Для удобства изучения сами тексты с разобранными тестирующими примерами приведены в пособии.

Прежде чем приступать к выполнению своего задания, необходимо рассмотреть пример, для которого исследование уже проведено. Далее нужно руководствоваться подсказками, указаниями и заданиями, выделенными красным цветом (в пособии выделено жирным шрифтом).

Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей, а также специальности «Прикладная математика», изучающих курсы современных численных методов, и может быть полезным при постановке спецкурсов по численным методам, обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям в частных производных, уравнениям математической физики, теории теплопроводности, теории колебаний упругих тел. Оно будет полезным также для аспирантов и инженеров, применяющих численные методы к решению прикладных задач.

Пособие, как и соответствующие спецкурсы, ставит своей целью развитие процесса взаимосвязи математической и специальной подготовки инженеров.

В частности, это учебное пособие может быть использовано для постановки лабораторных работ по спецкурсу «Численные методы решения задач математической физики» для студентов специальности «Прикладная математика». Цель данного спецкурса – связать общую теорию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных гиперболического, параболического и эллиптического типов с численными методами решения задач математической физики.

Выписка из ГОС ВПО по направлению подготовки 231300 – Прикладная математика (квалификация (степень) «бакалавр»):

Код УЦ ООП	Учебные циклы и проектируемые результаты их освоения
Б.2	Математический и естественнонаучный цикл
	<p>Выписка из базовой части. В результате изучения базовой части цикла студент должен:</p> <p>знать:</p> <ul style="list-style-type: none">– основные положения теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории устойчивости;– основные типы уравнений математической физики и методы их вывода из физических моделей;– методы точного решения базовых уравнений математической физики; <p>уметь:</p> <ul style="list-style-type: none">– определять возможности применения теоретических положений дифференциальных уравнений для постановки и решения конкретных прикладных задач;– решать уравнения с частными производными первого порядка, уравнения диффузии (теплопроводности), волновое и Гельмгольца с постоянными коэффициентами, уравнение Шредингера для одномерного осциллятора; <p>владеть:</p> <ul style="list-style-type: none">– стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных

	<p>уравнений и теории устойчивости и их применением к решению прикладных задач;</p> <ul style="list-style-type: none"> – классическими методами решения уравнений математической физики (характеристик, разделения переменных, преобразования Фурье, отражения, функции Грина) при анализе математических моделей реальных систем.
Б.3	<p>Профессиональный цикл</p>
	<p>Выписка из базовой части.</p> <p>В результате изучения базовой части цикла студент должен:</p> <p>знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> – численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений; <p>уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> – пользоваться современным программным обеспечением – пакетами MATLAB и Mathcad; – проводить моделирование систем управления в средах MATLAB и Mathcad; – решать задачи кинематики, статики и динамики для систем материальных точек и абсолютно твердых тел, включая задачи теории колебаний; решать статические и динамические краевые и вариационные задачи теории упругости, решать задачи гидро- и аэродинамики, решать задачи электро- и магнитостатики, рассчитывать процессы в квазистационарных и быстропеременных электромагнитных полях, рассчитывать движение частиц в электромагнитных полях; <p>владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками формализации прикладных задач; способностью выбирать конкретные методы анализа и синтеза для ее решения; – навыками решения формализованных физико-механических задач.

1. Математическое моделирование физических задач

1.1. Вывод уравнений одномерной теплопроводности

Пусть дано материальное тело, расположенное между точками $x = a$ и $x = b$ оси Ox , продольный размер которого значительно превосходит размеры поперечного сечения, например, тонкий стержень, длинный трубопровод и т. д. В дальнейшем будем называть это тело стержнем. Будем считать площадь $S(x)$ поперечного сечения (перпендикулярного оси Ox) настолько малой, что всем точкам одного сечения в момент времени t можно приписать одну и ту же температуру $u(x, t)$. Будем считать, что стержень теплоизолирован вдоль боковой поверхности, а внутри стержня нет источников или стоков (поглотителей) тепла.

Рассмотрим элемент стержня между его сечениями с абсциссами x и $x + dx$. Найдем количество тепла, которое накапливается в элементе за время dt . Согласно закону Фурье интенсивность $q(x, t)$ теплового потока в сечении x определяется выражением:

$$q(x, t) = -K(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

где $K(x)$ – коэффициент теплопроводности ($K(x) > 0$). Тогда разность dQ' между количеством тепла, вошедшим в элемент через сечение x и вышедшим через сечение $x + dx$ за время dt , будет равна:

$$dQ' = -K(x)S(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt - \left[-K(x + dx)S(x + dx) \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} dt \right].$$

Используя формулу Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Пеано для функций $K(x + dx)$, $S(x + dx)$, $u'_x(x + dx, t)$, имеем

$$\begin{aligned} dQ' = & -K(x)S(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt + (K(x) + K'(x)dx + o(dx))(S(x) + S'(x)dx + o(dx)) \times \\ & \times \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx + o(dx) \right) dt = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x)S(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) dx dt + o(dx dt). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Напомним, что символом $o(x)$ обозначается величина бесконечно малая более высокого порядка, чем x .

С другой стороны, за счет притока тепла температура в элементе изменяется, и количество тепла dQ , поглощаемое элементом за время dt , равно

$$dQ = \int_x^{x+dx} C(v)S(v)\rho(v)(u(v, t + dt) - u(v, t))dv,$$

где $C(x)$ – теплоемкость; $\rho(x)$ – объемная плотность вещества стержня ($C(x) > 0, \rho(x) > 0$).

Откуда, на основании теоремы о среднем для определяемого интеграла, получаем равенство

$$dQ = c(\xi)\rho(\xi)S(\xi)(u(\xi, t + dt) - u(\xi, t))dx, \quad x < \xi < x + dx,$$

которое при помощи теоремы Лагранжа о конечных приращениях преобразуется к виду

$$dQ = c(\xi)\rho(\xi)S(\xi)\frac{\partial u(\xi, t + \theta dt)}{\partial t}dtdx, \quad \theta \in (0,1). \quad (1.2)$$

Приравнявая, на основании закона сохранения энергии, выражения (1.1), (1.2) и осуществляя предельный переход при $dt \rightarrow 0$, получаем одномерное уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(KS\frac{\partial u}{\partial x}\right) = C\rho S\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Предположим теперь, что внутри стержня происходит выделение или поглощение тепла (это имеет место, например, при прохождении по телу электрического тока или вследствие происходящих в нем химических реакций). Тогда количество тепла, накопленное в элементе стержня за время dt за счет внутренних источников, будет равно $dQ^o = SF(x,t)dxdxdt$, где $F(x,t)$ – плотность тепловых источников внутри стержня. Уравнение теплопроводности с учетом внутренних источников тепла принимает вид $dQ = dQ' + dQ^o$ или

$$C\rho S\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(KS\frac{\partial u}{\partial x}\right) + SF. \quad (1.3)$$

Предположим далее, что на боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Тогда тепловой поток, проходящий за время dt через боковую поверхность элемента, согласно закону Ньютона пропорционален разности температур поверхности тела и окружающей среды и определяется выражением

$$dQ^* = -\beta_*(x)[u(x,t) - T(x,t)]dxdxdt,$$

где $T(x,t)$ – температура внешней среды; $\beta_*(x)$ – коэффициент теплообмена, зависящий от свойств материала стержня и внешней среды, режима взаимодействия (условий контакта) стержня с внешней средой, а также от геометрических характеристик поперечного сечения. Уравнение теплопроводности с учетом внутренних источников тепла и теплообмена на боковой поверхности имеет вид

$$dQ = dQ' + dQ^* + dQ^o$$

или

$$C\rho S\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[KS\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \beta_*(u - T) + SF(x,t). \quad (1.4)$$

Заметим, что если тепло распространяется в жидкости, которая движется со скоростью $V(x,t)$ параллельно оси x , то уравнение теплопроводности запишется следующим образом:

$$C\rho S \left[\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[KS \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \beta_*(u - T) + SF(x, t).$$

Если тело однородно, т. е. C, ρ, K – постоянные, и площадь сечения S постоянна, то уравнение (1.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_*(u - T)}{C\rho S} + \frac{F(x, t)}{C\rho},$$

где $a^2 = K / C\rho$ – коэффициент температуропроводности.

Аналогично уравнению (1.3) выводится уравнение, описывающее процесс распространения тепла в трехмерных телах

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [K(x, y, z) \cdot \operatorname{grad} u] + F(x, y, z, t)$$

или в развернутой форме

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t). \quad (1.5)$$

Для однородных тел уравнение (1.5) удобно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{F(x, y, z, t)}{C\rho}, \quad a^2 = \frac{K}{C\rho}.$$

Для двумерных тепловых полей в пластинах, тонких плитах уравнение (1.5) примет вид

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F(x, y, t) \quad (1.6)$$

или для однородных пластин

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{F(x, y, t)}{C\rho}, \quad a^2 = \frac{K}{C\rho}.$$

1.2. Постановка краевой задачи одномерной стационарной теплопроводности

Согласно (1.4) стационарное (установившееся во времени) распределение теплового поля в стержне постоянного поперечного сечения ($S(x) = \text{const}$) описывается уравнением

$$L[y] = [K(x)y']' - \beta(x)y = g(x). \quad (1.7)$$

В (1.7) введены обозначения

$$y(x) = u(x), \quad \beta(x) = \beta_*(x) / S, \quad g(x) = -F(x) - \beta(x)T(x).$$

Перечислим основные типы граничных условий (на примере левого конца стержня при $x = a$).

а) Известная температура при $x = a$: $y(a) = T_a$.

б) Задана интенсивность теплового потока через торцевое сечение $x = a$: $-K_a y'(a) = q_a$, $K_a = K(a)$. В частности, если стержень теплоизолирован при $x = a$, то $y'(a) = 0$.

в) На конце $x = a$ имеет место теплообмен с окружающей средой известной температуры T_a :

$$-K_a y'(a) = -\alpha_a [y(a) - T_a], \quad K_a = K(a).$$

Здесь α_a – коэффициент теплообмена на конце $x = a$. Последнее условие (условие Ньютона) означает, что тепловой поток, передаваемый в единицу времени с единицы площади поверхности в окружающую среду, пропорционален разности температур поверхности тела и окружающей среды.

Аналогичные краевые условия могут быть заданы и на правом конце стержня при $x = b$. Например, условие теплообмена при $x = b$ имеет вид

$$-K_b y'(b) = \alpha_b (y(b) - T_b).$$

В таблице 1.1 приведены возможные варианты краевых условий для определения стационарного распределения температуры в стержне согласно уравнению (1.7).

Таблица 1.1
Варианты краевых условий для уравнения (1.7)

$\begin{matrix} x \\ \text{№} \end{matrix}$	$x = a$	$x = b$
1	$y = T_a$	$y = T_b$
2	$y = T_a$	$-K_b y' = q_b$
3	$y = T_a$	$-K_b y' = \alpha_b (y - T_b)$
4	$-K_a y' = q_a$	$y = T_b$
5	$-K_a y' = q_a$	$-K_b y' = q_b$
6	$-K_a y' = q_a$	$-K_b y' = \alpha_b (y - T_b)$
7	$-K_a y' = -\alpha_a (y - T_a)$	$y = T_b$
8	$-K_a y' = -\alpha_a (y - T_a)$	$-K_b y' = q_b$
9	$-K_a y' = -\alpha_a (y - T_a)$	$-K_b y' = \alpha_b (y - T_b)$

Напомним еще раз используемые в таблице 1.1 обозначения:

$K_a = K(a)$, $K_b = K(b)$ – коэффициенты теплопроводности;

α_a, α_b – коэффициенты теплообмена на левом и правом концах стержня соответственно;

T_a, T_b – температуры, которые поддерживаются на концах стержня при $x = a$ и при $x = b$;

q_a, q_b – интенсивности тепловых потоков при $x = a$ и при $x = b$.

Очевидно, что все приведенные в таблице 1.1 варианты краевых условий можно записать в виде

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = a_2 \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = b_2, \end{cases} \quad (1.8)$$

при соответствующем выборе значений коэффициентов a_i, b_i .

Например, для первого варианта условий из таблицы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = T_a, \\ b_0 &= 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = T_b; \end{aligned}$$

а для девятого –

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_a, \quad a_1 = -K_a, \quad a_2 = \alpha_a T_a, \\ b_0 &= \alpha_b, \quad b_1 = K_b, \quad b_2 = \alpha_b T_b; \end{aligned}$$

Таким образом, математическая задача одномерной стационарной теплопроводности формулируется следующим образом: требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[a, b]$ обыкновенному линейному дифференциальному уравнению (1.7), а на концах отрезка – граничным условиям (1.8).

1.3. Постановка начально-краевой задачи нестационарной одномерной теплопроводности

В разделе 1.2 рассмотрена краевая задача для одномерного стационарного уравнения теплопроводности (1.7), которая представляет собой краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В случае нестационарной теплопроводности к краевым (граничным) условиям (1.8) добавляется начальное условие в некоторый начальный момент времени $t = t_0$ (обычно $t = 0$)

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (1.9)$$

и говорят, что задана начально-краевая задача для уравнения *параболического типа* (1.4).

1.4. Постановка краевых задач двумерной стационарной теплопроводности

Согласно (1.6) стационарное (установившееся во времени) распределение теплового поля в пластине описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -F(x, y). \quad (1.10)$$

При решении краевых задач для уравнения *эллиптического типа* (1.10) наиболее часто используются три типа краевых условий.

а) Краевая задача с граничными условиями первого рода (*первая краевая задача*).

Требуется найти решение уравнения (1.10) в некоторой области D , принимающее на границе этой области заданные значения. Т. е. нужно найти

(применительно к рассматриваемой задаче) стационарное распределение температуры внутри области, если задана температура на границе этой области

$$u|_{\Gamma_D} = g(x, y). \quad (1.11)$$

Здесь Γ_D – граница области D , $g(x, y)$ – известная функция.

б) Краевая задача с граничными условиями второго рода (*вторая краевая задача*).

Требуется найти решение уравнения (1.10) в некоторой области, на границе которой задана внешняя нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ (т. е. на границе задана интенсивность теплового потока)

$$-K \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D} = q(x, y) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D} + \bar{q}(x, y) = 0, \quad (1.12)$$

где $\bar{q} = \frac{q}{K}$. Здесь Γ_D – граница области D , $q(x, y)$ – интенсивность теплового потока. При этом, если $q > 0$, то тепловой поток направлен наружу, а если $q < 0$, то тепловой поток направлен внутрь области. При $q = 0$ имеем условие теплоизоляции $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

в) Краевая задача с граничными условиями третьего рода (*третья краевая задача*).

Требуется найти решение уравнения (1.9) в некоторой области, которое удовлетворяет на границе условию

$$-K \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D} = \lambda(u|_{\Gamma_D} - T) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D} = \bar{\lambda}(u|_{\Gamma_D} - T), \quad (1.13)$$

где $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{K}$. Здесь Γ_D – граница области D , на которой задан теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T ; λ – коэффициент теплообмена.

Если на различных частях границы Γ_D заданы условия различного рода, то такие условия и соответствующие им задачи называют *смешанными*.

1.5. Вывод уравнений поперечных колебаний струны

Рассмотрим тонкую гибкую упругую нить (струну), которая в положении равновесия занимает отрезок $[a, b]$ оси Ox и концы которой закреплены. Полагая струну тонкой, пренебрегаем весом струны по сравнению с внутренними силами натяжения и внешней нагрузкой. Полагая струну гибкой, считаем, что внутренние усилия, возникающие в струне, направлены по касательной к мгновенному профилю в каждой точке, т. е. струна не

сопротивляется изгибу. Предполагаем также, что внешние силы лежат в вертикальной плоскости, в которой совершают колебания точки струны.

Рассмотрим элемент струны между точками x и $x+dx$ (рис. 1.1) и обозначим смещение точек струны через $u(x,t)$, а длину элемента струны через ds .

Тогда

$$ds = \int_x^{x+dx} \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

откуда, предполагая смещение струны $u(x,t)$ малыми настолько, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \ll 1, \quad (1.14)$$

получаем $ds \approx dx$, т. е. в пределах принятой точности удлинения участков струны в процессе колебаний не происходит. Следовательно, согласно закону Гука величина натяжения в каждой точке струны не меняется со временем и является функцией только x , т. е. $T = T(x)$.

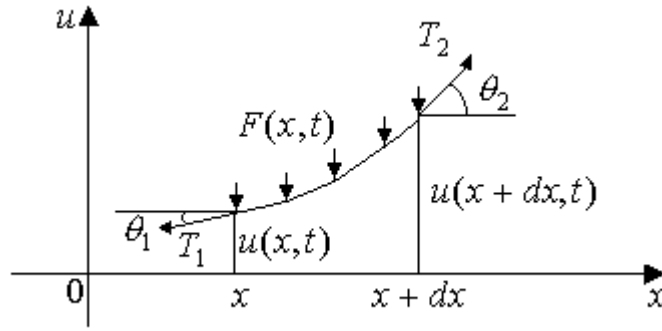


Рис. 1.1. Иллюстрация к выводу уравнения колебаний струны

Запишем условия динамического равновесия элемента струны, на который действуют в плоскости Oxu силы натяжения $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x+dx)$, внешняя распределенная по длине дуги с линейной плотностью $F(x,t)$ поперечная сила и сила инерции, направленная вдоль оси Ou .

Проектируя силы на ось Ox , получаем

$$T(x+dx)\cos(\theta_2) - T(x)\cos(\theta_1) = 0. \quad (1.15)$$

Так как, согласно тождествам тригонометрии и геометрического смысла производной,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} \right)^2}}, \\ \cos(\theta_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

то, учитывая условие (1.15), из (1.16) получим $T(x + dx) = T(x)$. Откуда, в силу произвольности выбора точек x и $x + dx$, следует, что величина натяжения не зависит и от x , т. е. является постоянной, $T(x) = T_0 = \text{const}$.

Проектируя теперь все силы на ось Ou , получаем

$$\int_x^{x+dx} \rho(z) \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} dz = T_0 \sin(\theta_2) - T_0 \sin(\theta_1) + \int_x^{x+dx} F(z, t) dz, \quad (1.17)$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность струны.

Аналогично формулам (1.16) устанавливаем

$$\sin(\theta_2) = \frac{\text{tg}(\theta_2)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta_2)}} = \frac{\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{\text{tg}(\theta_1)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta_1)}} = \frac{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^2}},$$

откуда, согласно условию (1.14), имеем

$$\sin(\theta_2) \approx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}, \quad \sin(\theta_1) \approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Теперь, применяя для входящих в формулу (1.17) интегралов теорему о среднем, а для $u'_x(x + dx, t)$ – формулу Тейлора первого порядка с остатком в форме Пеано, получаем

$$\rho(\xi_1) \frac{\partial^2 u(\xi_1, t)}{\partial t^2} dx = T_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx + o(dx) \right) + F(\xi_2, t) dx,$$

где ξ_1 и ξ_2 принадлежат отрезку $[x, x + dx]$. Почленно деля последнее равенство на dx и осуществляя предельный переход при $dx \rightarrow 0$, получаем уравнение колебания струны следующего вида:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (1.18)$$

Если струна дополнительно по всей длине связана с вязкоупругим основанием, то для описания ее колебания можно получить уравнение

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta(x, t) \left(u(x, t) - \int_0^t Q(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau \right) - \gamma(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F(x, t), \quad (1.19)$$

где $\beta(x, t), \gamma(x, t)$ – коэффициенты жесткости и демпфирования основания; $Q(x, t, \tau)$ – ядро релаксации, учитывающее изменение с течением времени физико-механических свойств материала основания (т. е. его старение).

Заметим, что при выводе уравнения (1.19) предполагалось, что реакция основания пропорциональна его деформации (модель Винклера).

В статических задачах профиль струны $u = u(x)$ определяется, согласно (1.12), решением уравнения

$$u'' - \frac{\beta(x)}{T_0} u = -\frac{F(x)}{T_0}. \quad (1.20)$$

1.6. Вывод уравнений продольных и крутильных колебаний стержня

Для вязкоупругого тела при одномерном растяжении (сжатии) связь между деформацией (относительным удлинением) $\varepsilon(x, t)$ и напряжением $\sigma(x, t)$ представляется формулой

$$\sigma(x, t) = E(x, t) \left(\varepsilon(x, t) - \int_0^t R(x, t, \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau \right) + \alpha(x, t) \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t}, \quad (1.21)$$

где E – модуль упругости; R – ядро релаксации, учитывающее старение материала тела; α – коэффициент внутреннего трения. Заметим, если $R \equiv 0$ и $\alpha \equiv 0$, то получаем закон Гука для упругого тела.

Рассмотрим элемент стержня (рис. 1.2), заключенный между поперечным сечением с координатами x и $x + dx$.

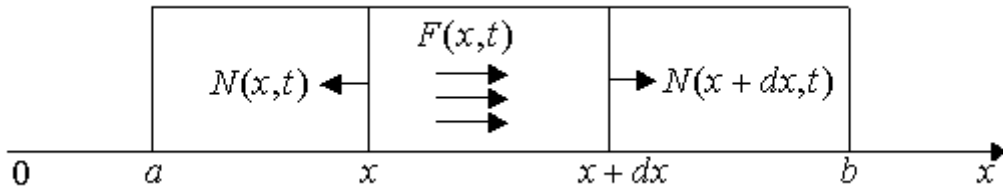


Рис. 1.2 Иллюстрация к выводу уравнения продольных колебаний стержня

В сечении « x » на элемент действует сила $N(x, t) = \sigma(x, t)S(x)$, где $S(x)$ – площадь сечения, в сечении « $x + dx$ » – сила $N(x + dx, t) = \sigma(x + dx, t)S(x + dx)$. Предполагая, что на стержень действует внешняя нагрузка, распределенная по длине стержня с объемной плотностью $F(x, t)$, аналогично выводу уравнения (1.18) получаем уравнение продольных колебаний стержня следующего вида:

$$\rho(x)S(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (S(x)\sigma(x, t)) + S(x)F(x, t), \quad (1.22)$$

где $\rho(x)$ – объемная плотность материала стержня; $u(x, t)$ – продольное смещение сечения стержня с координатой x в момент времени t от положения, которое занимало это сечение, когда стержень находился в ненапряженном состоянии.

Учитывая, что

$$\varepsilon(x, t) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

и подставляя (1.21) в (1.22), имеем

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x)E(x,t) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R(x,t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right] + \alpha(x,t)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + S(x)F(x,t).$$

Если боковая поверхность стержня скреплена с вязкоупругим основанием (модель Винклера), то приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x)E(x,t) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R(x,t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right] + \alpha(x,t)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) - \beta(x,t) \left[u(x,t) - \int_0^t Q(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau \right] - \\ - \gamma(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + S(x)F(x,t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $\beta(x,t), \gamma(x,t)$ – коэффициенты жесткости и демпфирования основания; $Q(x,t,\tau)$ – ядро релаксации основания. Заметим, что форма записи уравнения (1.23) не изменится, если считать S и ρ зависящими от времени t .

Статические продольные смещения $u(x)$ сечений стержня определяются, согласно (1.23), решением уравнения

$$[S(x)E(x)u'] - \beta(x)u = -S(x)F(x). \quad (1.24)$$

Для вязкоупругого стержня, находящегося в состоянии кручения (рис. 1.3), связь между напряжением τ , вызванным сдвигом образующей на угол φ , и этим углом φ может быть представлена формулой

$$\tau(x,t) = G(x,t) \left[\varphi(x,t) - \int_0^t R(x,t,\tau)\varphi(x,\tau)d\tau \right] + \alpha(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}, \quad (1.25)$$

где G – модуль сдвига; R – ядро релаксации стержня; α – коэффициент внутреннего трения.

Заметим, если $R \equiv 0, \alpha \equiv 0$, то получаем известный закон сдвига для упругого тела.

Если обозначить через $u(x,t)$ угол поворота сечения с координатой x , то (см. рис. 1.3) из равенства $rdu = \varphi dx$, имеем

$$\varphi = r \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.26)$$

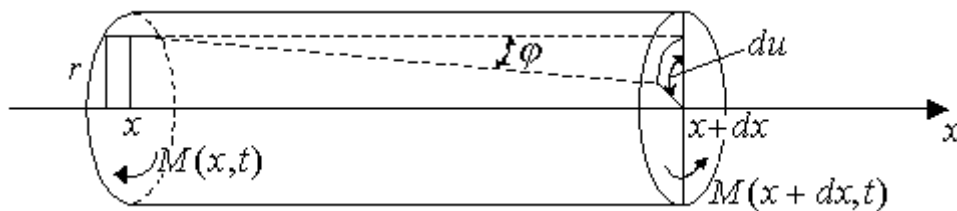


Рис.1.3. Иллюстрация к выводу уравнения крутильных колебаний стержня

Крутящий момент $M(x,t)$, действующий в сечении S стержня, соответствующем координате x , определяется формулой

$$M(x,t) = \iint_S r \tau ds.$$

Отсюда, используя выражения (1.25), (1.26), получаем

$$M(x,t) = J_0(x)G(x,t) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R(x,t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right] + \alpha(x,t)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad (1.27)$$

где $J_0 = \iint_S r^2 dS$ – полярный момент инерции сечения.

Рассмотрим элемент стержня, заключенный между поперечными сечениями с координатами x и $x+dx$ (рис. 1.3). В сечении « x » действует крутящий момент $M(x,t)$, в сечении « $x+dx$ » – $M(x+dx,t)$. Предполагая, что на стержень действует крутящий момент внешних сил, распределенный по длине стержня с линейной плотностью $F(x,t)$, из уравнения динамического равновесия получаем

$$\rho(\xi_1)J_0(\xi_1) \frac{\partial^2 u(\xi_1,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + o(dx) + F(\xi_2,t)dx,$$

где ρ – плотность стержня; ξ_1 и ξ_2 – принадлежат $[x, x+dx]$. Откуда аналогично уравнению (1.18) получаем уравнение крутильных колебаний стержня

$$\rho(x)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + F(x,t),$$

которое, с учетом (1.27), принимает вид

$$\begin{aligned} \rho(x)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(J_0(x)G(x,t) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R(x,t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right] + \right. \\ & \left. + \alpha(x,t)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + F(x,t). \end{aligned}$$

Если боковая поверхность стержня скреплена с вязкоупругим основанием (модель Винклера), то для описания крутильных колебаний приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \rho(x)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(J_0(x)G(x,t) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R(x,t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} d\tau \right] + \right. \\ & \left. + \alpha(x,t)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) - \beta(x,t) \left[u(x,t) - \int_0^t Q(x,t,\tau)u(x,\tau) d\tau \right] - \\ & - \gamma(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где β, γ, Q – коэффициенты жесткости, демпфирования и ядро релаксации основания.

Заметим, что форма записи уравнения (1.27) не изменится, если считать ρ и J_0 функциями двух переменных x и t .

Статические углы поворота $u(x)$ сечений стержня при кручении определяются, согласно (1.28), решением уравнения

$$[J_0(x)G(x)u']' - \beta(x)u(x) = -F(x). \quad (1.29)$$

1.7. Постановка статических краевых задач для струны и стержня

В статическом варианте профиль струны, продольные и угловые перемещения сечений стержня, согласно (1.20), (1.24) и (1.29), определяется решением уравнения

$$L(y) \equiv (K(x)y')' - \beta(x)y = g(x), \quad (1.30)$$

где $y(x) = u(x); a \leq x \leq b$;

$K(x) = T_0, g(x) = -F(x)$, если рассматривается задача (1.20);

$K(x) = S(x)E(x), g(x) = -S(x)F(x)$, если – задача (1.24);

$K(x) = J_0(x)G(x), g(x) = -F(x)$, если – задача (1.29).

Перечислим основные типы граничных условий при $x = a$ для уравнений (1.20), (1.24), (1.29) в обозначениях уравнения (1.30).

а) $y(a) = 0$; это условие соответствует жесткому закреплению левого конца струны и стержня.

б) $K(a)y'(a) = q_a$; это условие соответствует заданию на левом конце стержня продольной силы $N(a) = q_a$ для задачи (1.24) и заданию крутящего момента $M(a) = q_a$ в случае задачи (1.29). В частности, если левый конец свободен, то $q_a = 0$.

в) $K(a)y'(a) = \alpha_a y(a)$; это условие соответствует упругому закреплению левого конца стержня, когда $q_a = \alpha_a y(a)$ (q_a или равно $N(a)$, или $-M(a)$), где α_a – соответствующий задаче (1.24) или (1.29) коэффициент закрепления.

Аналогичные краевые условия могут быть заданы и на правом конце струны или стержня при $x = b$. Очевидно, что все возможные варианты краевых условий для уравнения (1.30) можно получить из условий (1.8) при соответствующем выборе значений коэффициентов a_i, b_i .

Таким образом, рассматриваемые статические краевые задачи для струны и стержня математически формулируется так же, как и задача стационарной теплопроводности из раздела 1.2.

1.8. Краевые задачи в теории колебаний струн и стержней

Предположим, что геометрические и прочностные характеристики упругих тел (струны, стержня) и оснований, на которые они опираются, зависят только от x , и запишем уравнения движения без учета демпфирования и старения.

Уравнение продольных колебаний струны

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta(x)u(x,t) + F(x,t). \quad (1.31)$$

Уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x)S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x)E(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \beta(x)u(x,t) + S(x)F(x,t). \quad (1.32)$$

Уравнение крутильных колебаний стержня

$$\rho(x)J_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[J_0(x)G(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \beta(x)u(x,t) + F(x,t). \quad (1.33)$$

Уравнения (1.31)–(1.33) являются уравнениями *гиперболического типа*.

Рассмотрим гармонические колебания упругих тел. В этом случае решение уравнений (1.31)–(1.33) и приложенную внешнюю нагрузку $F(x,t)$ представим в виде:

$$u(x,t) = u_*(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad F(x,t) = F_*(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.34)$$

где ω (частота колебаний) и φ – постоянные. Тогда для $u_*(x) = y(x)$ получим уравнение (1.30), в котором $F(x)$ следует заменить на $F_*(x)$, а $\beta(x)$ – на $\beta_*(x)$, где

$$\beta_*(x) = \beta(x) - \rho(x)\omega^2 \text{ соответствует уравнению (1.31),}$$

$$\beta_*(x) = \beta(x) - \rho(x)S(x)\omega^2 \text{ – уравнению (1.32),}$$

$$\beta_*(x) = \beta(x) - \rho(x)J_0(x)\omega^2 \text{ – уравнению (1.33).}$$

Приведем основные типы граничных условий при $x = a$.

а) $u(x,t) = \xi_a(t)$; это условие соответствует движению левого конца струны или стержня по закону $\xi_a(t)$.

б) $K(a) \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = q_a(t)$; это условие соответствует заданию на левом конце стержня продольной силы $N(a,t) = q_a(t)$ для задачи (1.32) и заданию крутящего момента $M(a,t) = q_a(t)$ в случае задачи (1.33). В частности, если левый конец свободен, то $q_a = 0$.

в) $K(a) \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = \alpha_a [u(a,t) - \eta_a(t)]$; это условие соответствует упругому закреплению левого сечения стержня, движущегося (вращающегося) по закону $\eta_a(t)$.

Предполагая функции $\xi_a(t), \eta_a(t), q_a(t)$ периодическими во времени, аналогично (1.34) положим

$$\xi_a(t) = \xi_a^0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \eta_a(t) = \eta_a^0 \sin(\omega t + \varphi), \quad q_a(t) = q_a^0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где ξ_a^0, η_a^0, q_a^0 – постоянные. Тогда для $u_*(x) = y(x)$ будем иметь граничные условия следующего вида:

$$\text{а) } y(a) = \xi_a^0;$$

$$\text{б) } K(a)y'(a) = q_a^0;$$

$$\text{в) } K(a)y'(a) = \alpha_a [y(a) - \eta_a^0]$$

Условия на правом конце $x = b$ задаются аналогично.

Замечание. Аналогичные краевые задачи получим в случае, когда

$$u(x, t) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$F(x, t) = F_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$\xi_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$\eta_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$q_a(t) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

где $\omega_n, \varphi_n, \xi_n, \eta_n, q_n, q_0$ – постоянные; $u_0(x)$ – решение стационарных краевых задач, описанных в разделе 1.7; а $u_n(x)$ – решение краевых задач, рассмотренных выше в этом разделе.

Следует иметь в виду, что частоты колебаний ω_n являются в общем случае неизвестными величинами, определяемыми в процессе решения задачи.

1.9. Основные термины

Струна, стержень, пластина, тело.

Температура, тепловой поток, интенсивность теплового потока, количество тепла, коэффициент теплопроводности, теплообмен, коэффициент температуропроводности.

Краевые (граничные) условия, начальные условия.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, краевая задача одномерной стационарной теплопроводности.

Уравнение параболического типа, начально-краевая задача одномерной нестационарной теплопроводности.

Уравнение эллиптического типа. Первая, вторая, третья краевая задача. Краевая задача двухмерной стационарной теплопроводности.

Уравнение гиперболического типа, начально-краевая задача. Уравнения продольных колебаний струны, продольных и крутильных колебаний стержня.

Гармонические колебания упругих тел.

2. Решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу: требуется на отрезке $[a, b]$ найти решение $Y(x)$ дифференциального уравнения

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

или

$$L[y] \equiv (K(x)y')' - \beta(x)y = g(x), \quad (2.2)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = a_2, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = b_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $p(x), q(x), f(x), K(x)$ ($K(x) > 0$), $K'(x), \beta(x), g(x)$ – заданные функции, непрерывные на $[a, b]$; $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – заданные действительные числа, причем

$$a_0^2 + a_1^2 > 0, \quad b_0^2 + b_1^2 > 0. \quad (2.4)$$

Напомним, что в отличие от имеющей всегда единственное решение задачи Коши для уравнений (2.1), (2.2), краевая задача (2.1), (2.3) или (2.2), (2.3) может иметь или одно решение, или бесконечно много решений, или, наконец, может совсем не иметь решений.

Везде далее будем предполагать существование единственного решения $Y(x)$ поставленной краевой задачи, что часто вытекает из физического смысла того явления или процесса, математическое моделирование которого привело к задаче (2.1), (2.3) или (2.2), (2.3).

Заметим, что уравнение (2.1) может быть сведено к уравнению (2.2) после умножения (2.1) на положительный множитель

$$K(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}, \quad (2.5)$$

и тогда $\beta(x) = -K(x)q(x)$, $g(x) = K(x)f(x)$. И наоборот, уравнение (2.2) может быть сведено к уравнению (2.1), для этого достаточно разделить обе части уравнения (2.2) на $K(x)$ и ввести обозначение

$$p(x) = K'(x)/K(x), \quad q(x) = -\beta(x)/K(x), \quad f(x) = g(x)/K(x).$$

2.2. Алгоритм метода Галеркина

В методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (2.1), (2.3) строится функциональная последовательность $\{y_n(x)\}_0^\infty$ из пробных решений $y_n(x)$ следующим образом.

Задаемся на отрезке $[a, b]$ некоторой системой дважды непрерывно дифференцируемых функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3), а функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, называемые пробными функциями, линейно независимы на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Составляем функцию

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \quad (2.7)$$

с неизвестными пока постоянными коэффициентами C_1, C_2, \dots, C_n . Подчеркнем, что в силу линейности условий (2.3), функция (2.7) при любых значениях C_1, \dots, C_n удовлетворяет этим условиям. Подставляя функцию $y_n(x)$ из (2.7) вместо $y(x)$ в уравнение (2.1), получаем функцию

$$R(C_1, C_2, \dots, C_n, x) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i], \quad (2.8)$$

которая называется невязкой. Как видно из (2.8), невязка линейно зависит от параметров C_1, C_2, \dots, C_n и является характеристикой отклонения функции (2.7) от точного решения $Y(x)$ задачи (2.1), (2.3). Во всяком случае, если при некоторых значениях параметров C_1, C_2, \dots, C_n невязка на $[a, b]$ тождественно равна нулю, то $Y(x) \equiv y_n(x)$ в силу единственности $Y(x)$.

Однако в общем случае невязка оказывается отличной от нуля. Поэтому подбираем значения параметров C_1, \dots, C_n так, чтобы невязка в каком-то смысле была бы наименьшей. В обобщенном методе Галеркина значения параметров C_1, \dots, C_n определяются из системы уравнений

$$(R(C_1, \dots, C_n, x), W_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

где

$$(\varphi(x), g(x)) = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx, \quad (2.10)$$

а $W_1(x), \dots, W_n(x)$ – заданные непрерывные и линейно независимые на $[a, b]$ функции, часто называемые поверочными функциями. Заметим, что если в качестве поверочных функций взять пробные, то получится метод Галеркина в авторском варианте [1]. Заметим также, что если $W_1(x), \dots, W_n(x)$ входят в полную систему функций, то при $n \rightarrow \infty$ равенства (2.9) свидетельствуют об ортогональности невязки всем элементам полной системы [3]. Значит, невязка сходится при $n \rightarrow \infty$ к нулю в среднем, и можно ожидать сходимости последовательности (2.7) к точному решению $Y(x)$ в среднем, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(Y(x) - y_n(x), Y(x) - y_n(x))} = 0.$$

Записав условие (2.9) в развернутом виде, для определения значений параметров C_1, \dots, C_n получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kj} &= (L[u_j] W_k(x)) = \int_a^b (u_j'' + p u_j' + q u_j) W_k dx, \\ b_k &= (f(x) - L[u_0] W_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0'' - p u_0' - q u_0) W_k dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решив систему (2.11) и подставив определяемые этим решением значения параметров C_1, \dots, C_n в (2.7), заканчиваем построение пробного решения $y_n(x)$.

Опишем теперь возможный алгоритм приближенного решения задачи (2.1), (2.3) методом Галеркина, предполагая, что $y_n(x)$ сходится к $Y(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

1. Подготовительный шаг алгоритма. На этом шаге выбираем функцию $u_0(x)$, пробные функции $u_1(x), \dots, u_n(x)$ и поверочные функции $W_1(x), \dots, W_n(x)$. Находим функцию $R_0(x) = L[u_0] - f(x)$, т. е. невязку от подстановки $u_0(x)$ в уравнение (2.1). Если $\forall x \in [a, b]: R_0(x) = 0$, то $u_0(x) = Y(x)$, и вычисления заканчиваем. Если же $R_0(x) \neq 0$, то переходим к следующему шагу алгоритма.

2. Первый шаг алгоритма. Строим $y_1(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x)$, определив значение C_1 из решения системы (2.11) при $n = 1$. Находим невязку

$$R(C_1, x) = L[u_0] - f(x) + C_1 L[u_1] = R_0(x) + C_1 L[u_1].$$

Если $\forall x \in [a, b]: R(C_1, x) = 0$, то $Y(x) = y_1(x)$, и задача решена, если же $R(C, x) \neq 0$, то находим

$$\max_{[a, b]} |y_1(x) - u_0(x)| = \Delta_{11} \quad \text{или} \quad \max_{[a, b]} |R(C_1, x)| = \Delta_{12}.$$

Если $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$ или $\Delta_{12} \leq \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 заданные меры точности приближенного решения, то полагаем $Y(x) \approx y_1(x)$ и вычисления заканчиваем, если же $\Delta_{11} > \varepsilon_1$ или $\Delta_{12} > \varepsilon_2$, то переходим к вычислениям на следующем шаге и т. д.

Таким образом, на m -м ($m \geq 1$) шаге алгоритма строим функцию

$$y_m(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^m C_i u_i(x),$$

определив значения C_1, \dots, C_m из решения системы (2.11) при $n = m$, и определяем невязку

$$R(C_1, \dots, C_m, x) = R_0(x) + \sum_{i=1}^m C_i L[u_i].$$

Если $\forall x \in [a, b]: R(C_1, \dots, C_m, x) = 0$, то $Y(x) = y_m(x)$, и вычисления заканчиваем.

Если $R(C_1, \dots, C_m, x) \neq 0$, то находим

$$\Delta_{m1} = \max_{[a,b]} |y_m(x) - y_{m-1}(x)| \text{ или } \Delta_{m2} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_m, x)|.$$

Если $\Delta_{m1} \leq \varepsilon_1$ или $\Delta_{m2} \leq \varepsilon_2$, то $Y(x) \approx y_m(x)$, если же $\Delta_{m1} > \varepsilon_1$ или $\Delta_{m2} > \varepsilon_2$ – переходим к $(m+1)$ -му шагу.

2.3. Алгоритм вариационного метода Ритца

Идея вариационного метода состоит в замене краевой задачи (2.2), (2.3) равносильной задачей об отыскании дважды непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $Y(x)$, доставляющей экстремум следующему функционалу

$$J(y) = \int_a^b (K(x)y'^2 + \beta(x)y^2 + 2g(x)y)dx + \alpha_b(y^2(b) - 2T_b y(b)) + \alpha_a(y^2(a) - 2T_a y(a)) + 2q_b y(b) - 2q_a y(a), \quad (2.13)$$

причем значения параметров $\alpha_a, \alpha_b, q_a, q_b, T_a, T_b$ в этом функционале определяются в зависимости от значений $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ по таблице 2.1.

Таблица 2.1

Значения параметров функционала

№	a_0	a_1	b_0	b_1	T_a	T_b	α_a	α_b	q_a	q_b
1	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	a_2/a_0	b_2/b_0	0	0	0	0
2	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	a_2/a_0	0	0	0	0	$-\frac{b_2}{b_1}K(b)$
3	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	a_2/a_0	b_2/b_0	0	$\frac{b_0}{b_1}K(b)$	0	0
4	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	b_2/b_0	0	0	$-\frac{a_2}{a_1}K(a)$	0
5	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	0	$-\frac{a_2}{a_1}K(a)$	$-\frac{b_2}{b_1}K(b)$
6	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	b_2/b_0	0	$\frac{b_0}{b_1}K(b)$	$-\frac{a_2}{a_1}K(a)$	0
7	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	a_2/a_0	b_2/b_0	$-\frac{a_0}{a_1}K(a)$	0	0	0
8	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	a_2/a_0	0	$-\frac{a_0}{a_1}K(a)$	0	0	$-\frac{b_2}{b_1}K(b)$
9	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	a_2/a_0	b_2/b_0	$-\frac{a_0}{a_1}K(a)$	$\frac{b_0}{b_1}K(b)$	0	0

В методе Ритца для нахождения приближенного решения краевой задачи (2.2), (2.3) строится функциональная последовательность $\{y_n(x)\}_0^\infty$ из пробных решений $y_n(x)$ следующим образом.

Как и в методе Галеркина, задаемся на $[a, b]$ функцией $u_0(x)$ и пробными функциями $u_1(x), \dots, u_n(x)$, такими, что $u_0(x)$ удовлетворяет условиям (2.3), а $u_1(x), \dots, u_n(x)$ удовлетворяют однородным условиям (2.6), и составляем функцию

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (2.14)$$

где C_i ($i = \overline{1, n}$) – некоторые постоянные. Значения постоянных C_i ($i = \overline{1, n}$) подберем так, чтобы функция (2.14) доставляла экстремум функционалу (2.13). Подставляя $y(x) = y_n(x)$ в (2.13), получаем квадратичную функцию переменных C_1, \dots, C_n

$$\begin{aligned} J(y_n(x)) = & \int_a^b \left[K(x) \left(u'_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u'_i(x) \right)^2 + \beta(x) \left(u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2g(x) \left(u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \right) \right] dx + \alpha_b \left[\left(u_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(b) \right)^2 - 2T_b \left(u_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(b) \right) \right] + \\ & + \alpha_a \left[\left(u_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(a) \right)^2 - 2T_a \left(u_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(a) \right) \right] + \\ & + 2q_b \left(u_0(b) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(b) \right) - 2q_a \left(u_0(a) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(a) \right) = \varphi(C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Необходимые условия экстремума функции (2.15), как известно из математического анализа, имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.16)$$

Записав условия (2.16) в развернутом виде, для определения значений переменных C_1, C_2, \dots, C_n получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kj} = & \int_a^b (K(x) u'_k u'_j + \beta(x) u_k u_j) dx + \alpha_b u_k(b) u_j(b) + \alpha_a u_k(a) u_j(a); \\ b_k = & - \int_a^b (K(x) u'_0 u'_k + (\beta(x) u_0 + g(x)) u_k) dx - (\alpha_b (u_0(b) - T_b) + q_b) u_k(b) - \\ & - (\alpha_a (u_0(a) - T_a) - q_a) u_k(a). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решив систему (2.17) и подставив определяемые этим решением значения постоянных C_1, C_2, \dots, C_n в (2.14), завершаем построение пробного решения $y_n(x)$.

Опишем теперь возможный алгоритм приближенного решения задачи (2.2), (2.3) методом Ритца, предполагая, что $\{y_n(x)\}_0^\infty$ сходится к $Y(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

1. Подготовительный шаг алгоритма. На этом шаге определяем значения параметров функционала (2.13) в соответствии с таблицей 2.1.

Выбираем функции $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ и находим функцию

$$R_0(x) = L(u_0) - g(x) = K(x)u_0'' + K'(x)u_0'(x) - \beta(x)u_0(x) - g(x),$$

т. е. невязку от подстановки $u_0(x)$ в уравнение (2.2). Если $\forall x \in [a, b]: R_0(x) = 0$, то $u_0(x) = y_0(x)$ – искомое решение и вычисления заканчиваем. Если же $R_0(x) \neq 0$, то переходим к следующему шагу алгоритма.

2. Первый шаг алгоритма. Строим функцию $y_1(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x)$, определив значение C_1 из решения системы (2.17) при $n = 1$.

Находим невязку

$$R(C_1, x) = L[y_1] - g(x) = K(x)(u_0'' + C_1 u_1'') + \\ + K'(x)(u_0' + C_1 u_1') - \beta(x)(u_0 + C_1 u_1) - g(x).$$

Если $\forall x \in [a, b]: R(C_1, x) = 0$, то $Y(x) = y_1(x)$, и задача решена.

Если $R(C_1, x) \neq 0$ на $[a, b]$, то находим

$$\max_{[a, b]} |y_1(x) - u_0(x)| = \Delta_{11}$$

или

$$\max_{[a, b]} |R(C_1, x)| = \Delta_{12}.$$

Если $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$ или $\Delta_{12} \leq \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 – заданные меры точности приближенного решения, то полагаем $Y(x) \approx y_1(x)$ и вычисления заканчиваем. Если же $\Delta_{11} > \varepsilon_1$ или $\Delta_{12} > \varepsilon_2$, то переходим к вычислениям на следующем шаге.

Таким образом, на m -м шаге ($m \geq 1$) алгоритма сначала строим функцию

$$y_m(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^m C_i u_i(x),$$

определив значения C_1, C_2, \dots, C_m из решения системы (2.17) при $n = m$, а затем находим невязку

$$R(C_1, \dots, C_m, x) = L(y_m) - g(x) = K(x) \left(u_0'' + \sum_{j=1}^m C_j u_j'' \right) + \\ + K'(x) \left(u_0' + \sum_{j=1}^m C_j u_j' \right) - \beta(x) \left(u_0 + \sum_{j=1}^m C_j u_j \right) - g(x).$$

Если $\forall x \in [a, b]: R(C_1, \dots, C_m, x) = 0$, то $Y(x) = y_m(x)$. Если $R(C_1, \dots, C_m, x) \neq 0$, то находим $\Delta_{m1} = \max_{[a, b]} |y_m(x) - y_{m-1}(x)|$ или $\Delta_{m2} = \max_{[a, b]} |R(C_1, \dots, C_m, x)|$. Если $\Delta_{m1} \leq \varepsilon_1$ или $\Delta_{m2} \leq \varepsilon_2$, то $Y(x) \approx y_m(x)$, если же $\Delta_{m1} > \varepsilon_1$ или $\Delta_{m2} > \varepsilon_2$, то переходим к $(m+1)$ -му шагу, и т. д.

2.4. Алгоритм интегрального метода наименьших квадратов

Для нахождения приближенного решения задачи (2.1), (2.3) интегральным методом наименьших квадратов строится функциональная последовательность $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ из пробных решений вида

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x), \quad (2.19)$$

где $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ – функции, удовлетворяющие таким же условиям и требованиям, что и аналогичные функции в методах Галеркина и Ритца.

Подставляя пробное решение (2.19) вместо $y(x)$ в уравнение (2.1), получим невязку

$$R(C_1, \dots, C_n, x) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i]. \quad (2.20)$$

Напомним, что функция (2.20), линейно зависящая от параметров C_1, \dots, C_n , является характеристикой уклонения пробного решения (2.19) от точного решения задачи $Y(x)$. Поэтому подберем значения C_1, \dots, C_n так, чтобы они доставляли глобальный минимум следующей функции переменных C_1, \dots, C_n

$$\varphi(C_1, \dots, C_n) = (R(C_1, \dots, C_n, x), R(C_1, \dots, C_n, x)) = \int_a^b R^2(C_1, \dots, C_n, x) dx. \quad (2.21)$$

Заметим, что, так как $\varphi(C_1, \dots, C_n)$ из (2.21) неотрицательная квадратичная функция n переменных, то глобальный минимум ее существует и совпадает с локальным.

Необходимые условия локального минимума функции (2.21) дают

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_k} = 2 \left(R, \frac{\partial R}{\partial C_k} \right) = 0, k = \overline{1, n},$$

откуда

$$\left(R, \frac{\partial R}{\partial C_k} \right) = \int_a^b R(x, C_1, \dots, C_n) \frac{\partial R(x, C_1, \dots, C_n)}{\partial C_k} dx = 0. \quad (2.22)$$

Записав условия (2.22) в развернутом виде, для определения значений переменных C_1, \dots, C_n получаем неоднородную систему уравнений n -го порядка

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.23)$$

где

$$a_{kj} = \int_a^b L[u_k]L[u_j]dx; \quad (2.24)$$

Решив систему (2.23) и подставив определяемые этим решением значения параметров C_1, \dots, C_n в (2.19), завершаем построение пробного решения $y_n(x)$.

2.5. Построение систем пробных и поверочных функций

[illegible]

$$\alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) \equiv 0. \quad (2.25)$$

[illegible]

Для построения $u_0(x)$ и линейно независимой на $[a, b]$, системы пробных функций $u_1(x), \dots, u_n(x)$, являющихся многочленами, можно применить метод неопределенных коэффициентов.

Например, предположим $u_0 = A = P_0(x)$, из условий (2.3) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно A

$$\begin{cases} a_0 A = a_2, \\ b_0 A = b_2. \end{cases}$$

В том случае, когда эта система совместна, коэффициент A определяется. Если система не совместна, то ищем аналогичным образом $u_0(x)$ в виде $u_0(x) = A + Bx = P_1(x)$ и т. д., до тех пор, пока не будет найдена $u_0(x) = P_{r_0}(x)$, удовлетворяющая условиям (2.3).

Далее, используя условия (2.6), методом неопределенных коэффициентов определяем последовательно так же, как и $u_0(x)$,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= P_{r_1}(x), \quad r_1 \geq 0; \\ u_2(x) &= P_{r_2}(x), \quad r_2 > r_1; \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(x) &= P_{r_n}(x), \quad r_n > r_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Пример 1. Построить $u_0(x)$ и систему из пяти пробных функций для задачи с краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 1, \\ y(1) + y'(1) = -4. \end{cases} \tag{2.27}$$

Решение. Пусть $u_0(x) = A$, тогда $u'_0 = 0$ и условия (2.27) дают несовместную систему из уравнений $A = 1$ и $A = -4$.

Пусть $u_0 = A + Bx$, тогда $u'_0 = B$ и условия (2.27) дают

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ B = -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6, \\ B = -5. \end{cases}$$

Итак, $u_0 = 6 - 5x$.

Определяем $u_1(x)$. Если $u_1 = A$ или $u_1 = A + Bx$, то однородные условия, соответствующие условиям (2.27), выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за требования линейной независимости пробных функций.

Ищем $u_1(x) = A + Bx + Cx^2$ ($C \neq 0$), тогда $u'_1 = B + 2Cx$, и из однородных условий, соответствующих (2.27), получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C = 0. \end{cases}$$

Видим, что система имеет множество решений

$$G = \{(A, B, C): A = 3\alpha, B = -3\alpha, C = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Выбираем одно решение из G при $\alpha = \frac{1}{3}$, тогда

$$u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2.$$

Аналогично, используя формулу $u_k = A_0 + A_1x + \dots + A_{k+1}x^{k+1}$, находим

$$u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3, u_3(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^4, u_4(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^5, u_5(x) = 1 - x + \frac{1}{7}x^6.$$

Пример 2. Построить $u_0(x)$ и систему из трех пробных функций для задачи с краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 1, \\ y(2) - y'(2) = 2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Решение. Если $u_0(x)$, то условия (2.28) приводят к несовместной системе

$$\begin{cases} A = 1, \\ A = 2. \end{cases}$$

Предположим, что $u_0 = A + Bx$, тогда $u'_0 = B$ и условия (2.28) дают

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B - B = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ A + B = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ 0 = 1, \end{cases}$$

тоже несовместную систему.

Полагаем $u_0 = A + Bx + Cx^2$, тогда $u'_0 = B + 2Cx$ и условия (2.28) дают

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B - B = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ A + B = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ 0 = 1, \end{cases}$$

которая несовместна.

Ищем $u_0(x)$ в виде $u_0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, тогда $u'_0 = B + 2Cx + 3Dx^2$, и из (2.28) имеем

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B + 4C + 8D - B - 4C - 12D = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ A + B - 4D = 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Гаусса в матричной форме, чтобы найти все решения системы.

Прямой ход метода:

$$\begin{array}{cccc|c} A & B & C & D & \\ \hline \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 2 \end{array} \right) & \sim & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) & \sim & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array}$$

Видим, что система совместна, ибо ранг матрицы системы (rg) равен рангу расширенной матрицы и равен 2. Так как число неизвестных системы, равное

четырем, больше $rg = 2$, то система неопределена, и все множество решений G_0 системы получаем обратным ходом метода Гаусса, придавая двум неизвестным C и B произвольные значения. Получаем

$$G_0 = \left\{ (A, B, C, D) : A = 1 - \alpha_1, B = \alpha_1, C = \alpha_2, D = -\frac{1}{4}; \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Выбираем решение из G_0 при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда

$$u_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^3.$$

Определяем теперь $u_1(x)$. Если $u_1(x) = A \neq 0$, то однородные условия, соответствующие условиям (2.28), выполняются при $A = 0$, что недопустимо. Пусть $u_1(x) = A + Bx$, $u_1'(x) = B$, и из однородных условий, соответствующих условиям (2.28), имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A + B = 0.$$

Эта система неопределена, ее множество решений

$$G_1 = \{(A, B) : A = -\alpha, B = \alpha; \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Выбираем одно ненулевое решение при $\alpha = -1$, тогда $u_1(x) = 1 - x$.

Ищем $u_2(x)$. Пусть $u_2(x) = A + Bx + Cx^2$ ($C \neq 0$), тогда $u_2' = D + 2Cx$ и однородные условия дают систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + B + 0C = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, находим множество решений

$$G_2 = \{(A, B, C) : A = -\alpha_1, B = \alpha_1, C = \alpha_2; \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Выбирая одно ненулевое решение ($C \neq 0$), при $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, получаем $u_2(x) = 1 - x - x^2$.

Находим $u_3(x)$. Если $u_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ($D \neq 0$), то $u_3'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2$, и из однородных условий имеем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + B + 0C - 4D = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ D = 0, \end{cases}$$

которая противоречит условию $D \neq 0$.

Пусть теперь $u_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ($E \neq 0$), тогда $u_3'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3$, и из однородных условий получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 4C + 8D + 16E - B - 4C - 12D - 32E = 0, \\ A + B = 0, \\ A + B + 0C - 4D - 16E = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Решая ее методом Гаусса, получаем множество решений

$$G_3 = \{(A, B, C, D, E) : A = -\alpha_1, B = \alpha_1, C = \alpha_2, D = -4\alpha_3, E = \alpha_3; \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Выбирая одно ненулевое решение ($E \neq 0$) при $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$, имеем $u_3(x) = 1 - x + x^2 - 4x^3 + x^4$.

II. Подчеркнем, что если пробные функции выбираются на множестве многочленов, то их всегда можно найти методом неопределенных коэффициентов, причем неоднозначно. Например, в возможные системы пробных функций $u_i(x)$ можно включить многочлены

$$u_{m+i}(x) = (x-a)^{n_1+i} (b-x)^{n_2}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

или

$$u_{m+i}(x) = (x-a)^{n_1} (b-x)^{n_2+i}, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

где

$$n_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 = 0; \\ 2, & \text{если } a_1 \neq 0; \end{cases} \quad n_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } b_1 = 0; \\ 2, & \text{если } b_1 \neq 0; \end{cases} \quad m \leq n_1 + n_2 = l,$$

а остальные функции $u_1(x), \dots, u_m(x)$ следует определить среди многочленов $P_0(x), \dots, P_{l-1}(x)$ методом неопределенных коэффициентов.

Пример 3. Построить систему пробных функций для задачи (2.2) с однородными краевыми условиями

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0, \\ y(1) + y'(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $n_1 + n_2 = 4$, то из примера 1 выписываем первые две пробные функции $u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2$, $u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3$ (все многочлены порядка меньше 4, удовлетворяющие краевым условиям).

Таким образом, учитывая, что $n_1 = 2, n_2 = 2$, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = C_1 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 \right) + C_2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^3 \right) + \sum_{k=3}^n C_k (1-x)^2 x^{k-1},$$

если функции $u_k(x)$ ($k \geq 3$) взять в виде (2.29). Если же в виде (2.30), то

$$y_n(x) = C_1 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 \right) + C_2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^3 \right) + \sum_{k=3}^n C_k (1-x)^{k-1} x^2.$$

III. При выборе систем поверочных функций полезно вспомнить о системах функций, ортогональных на некотором отрезке. Например, известно [3], что многочлены Лежандра, определяемые формулой

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

ортогональны на $[-1, 1]$. Так что, если в качестве поверочных функций $W_k(x)$ решено взять, например, первые пять многочленов Лежандра, ортогональных на $[a, b]$, то в первые пять выражений из (2.31):

$$W_1 = P_0(t) = 1, \quad W_2 = P_1(t) = t, \quad W_3 = P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$W_4 = P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad W_5 = P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

следует подставить

$$t = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right).$$

IV. Важным источником для построения ортогональных на $[a, b]$ пробных функций является множество решений задачи, называемой задачей на собственные значения для дифференциального оператора $L[y] = y''$ [3].

Рассмотрим конкретный пример такой задачи.

Пример 4. Требуется найти действительные значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (2.32)$$

удовлетворяющие однородным условиям

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0, \\ y(1) + y'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Решение. Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнения (2.32) будет иметь вид $y = C_1 x + C_2$. Пытаясь удовлетворить условиям (2.33), получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением, так как ему соответствует единственное тривиальное ($y \equiv 0$) решение задачи (2.32), (2.33).

Пусть $\lambda < 0$, тогда $y = C_1 e^{-\delta x} + C_2 e^{\delta x}$, $\delta = \sqrt{-\lambda}$, и условия (2.33) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \delta C_1 + \delta C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\delta} + C_2 e^{\delta} - \delta C_1 e^{-\delta} + \delta C_2 e^{\delta} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \delta)C_1 + (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 - \delta)C_1 e^{-\delta} + (1 + \delta)C_2 e^{\delta} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \delta)C_1 + (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 + \delta)(e^{\delta} - e^{-\delta})C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 - \delta)C_1 = 0. \end{cases}$$

Получим нетривиальное решение задачи (2.32), (2.33) при $\delta = 1, C_2 = 0$ и собственная функция имеет вид

$$y_1 = e^{-x}.$$

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда $y = C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x)$, $\gamma = \sqrt{\lambda}$, и краевые условия (2.33) дают

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} C_1 + \gamma C_2 = 0, \\ C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma - C_1 \gamma \sin \gamma + C_2 \gamma \cos \gamma = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} C_1 = -\gamma C_2, \\ C_1 (\cos \gamma - \gamma \sin \gamma) + C_2 (\sin \gamma + \gamma \cos \gamma) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} C_1 = -\gamma C_2, \\ C_2 (-\gamma (\cos \gamma - \gamma \sin \gamma) + \sin \gamma + \gamma \cos \gamma) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\gamma C_2, \\ C_2 (1 + \lambda) \sin \gamma = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Видим, что существуют нетривиальные решения задачи (2.32), (2.33), если $\sin \gamma = 0$, т. е. $\gamma = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, множество собственных значений определяется формулой $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n = 1, 2, \dots$, а множество собственных функций, соответствующих собственному значению λ_n , имеет базисную функцию

$$y_n = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) - \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) = \sin(n\pi x) - n\pi \cos(n\pi x).$$

Окончательно получим множество собственных значений и соответствующих им собственных функций:

$$y_1 = e^{-x}, y_{n+1} = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) - \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) = \sin(n\pi x) - n\pi \cos(n\pi x),$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, n = 1, 2, \dots$$

Для того чтобы убедиться в ортогональности на $[0, 1]$ функций $y_n(x), y_m(x)$ ($n \neq m$), достаточно проверить, что

$$(y_n, y_m) = \int_0^1 y_n(x) y_m(x) dx = 0.$$

V. Пример 4 показывает, что полную систему пробных или поверочных функций $u_i(x)$, $i \geq 1$ можно составить из последовательно определяемых нетривиальных решений задачи (2.32), (2.6) трех видов:

$$u(x) = Ae^{\delta x} + Be^{-\delta x}, \quad \delta > 0; \quad (2.34)$$

$$u(x) = Ax + B; \quad (2.35)$$

$$u(x) = A \cos(\delta x) + B \sin(\delta x), \quad \delta > 0. \quad (2.36)$$

Приведем теперь еще несколько примеров построения пробных решений задачи (2.1) с некоторыми вариантами краевых условий (2.3).

Пример 5. Построить пробное решение (2.7) с краевыми условиями $y'(0) = 2$, $y'(1) = 3$.

Решение. Пусть $u_0 = Bx + Cx^2$. Тогда из граничных условий находим $B = 2$, $B + 2C = 3$, т. е. $B = 2$, $C = 1/2$. Итак,

$$u_0(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2.$$

Построим пробные функции, используя формулы (2.34) – (2.36).

Ищем нетривиальное решение вида (2.34). Удовлетворяя однородным краевым условиям, получаем

$$\begin{cases} -\delta A + \delta B = 0, \\ -\delta A e^{-\delta} + \delta B e^{\delta} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A, \\ \delta A (e^{\delta} - e^{-\delta}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A = 0, B = 0,$$

следовательно, нетривиального решения нет.

Ищем нетривиальное решение вида (2.35). Из однородных краевых условий, получаем

$$\begin{cases} A = 0, \\ A = 0, \end{cases} \Rightarrow A = 0, B \neq 0,$$

следовательно, $u_1(x) = 1$.

Ищем нетривиальное решение вида (2.36). Из однородных краевых условий, получим

$$\begin{cases} \delta B = 0, \\ -\delta A \sin \delta + \delta B \cos \delta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = C, \forall C \in R, \\ \delta = n\pi, n \in N. \end{cases}$$

Следовательно, имеем счетное множество нетривиальных решений $u_k(x) = \cos((k-1)\pi x)$, $k = 2, 3, \dots$

Таким образом, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = \left(2x + \frac{1}{2}x^2 \right) + C_1 + \sum_{k=2}^n C_k \cos((k-1)\pi x).$$

Если же функции $u_k(x)$ ($k \geq 1$) взять в виде (2.29), то

$$y_n(x) = \left(2x + \frac{1}{2}x^2 \right) + C_1 + C_2 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) + \sum_{k=3}^n C_k (1-x)^2 x^{k-1},$$

если же – в виде (2.30), то

$$y_n(x) = \left(2x + \frac{1}{2}x^2 \right) + C_1 + C_2 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) + \sum_{k=3}^n C_k (1-x)^{k-1} x^2,$$

где многочлены $P_0(x) = 1$, $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ удовлетворяют однородным граничным условиям и найдены среди многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ с неопределенными коэффициентами.

Пример 6. Построить пробное решение для краевой задачи с условиями $y'(0) = 2$, $y(1) = 4$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов находим $u_0(x) = 2 + 2x$.

Определяя пробные функции из множества (2.34) – (2.36), устанавливаем, что существуют только нетривиальные решения вида (2.36), причем $B = 0$,

$$A \neq 0, \delta = \frac{2k-1}{2}\pi, k = 1, 2, 3, \dots, u_k(x) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right), k \in N.$$

Следовательно,

$$y_n(x) = 2 + 2x + \sum_{k=1}^n C_k \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right).$$

Используя же пробные функции вида (2.29) или (2.30), получаем

$$y_n(x) = 2 + 2x + C_1(x^2 - 1) + \sum_{k=2}^n C_k x^k (1-x)$$

или

$$y_n(x) = 2 + 2x + C_1(x^2 - 1) + \sum_{k=2}^n C_k x^2 (1-x)^{k-1},$$

где многочлен $P_2(x) = x^2 - 1$ удовлетворяет однородным граничным условиям и найден среди многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами.

Пример 7. Построить пробное решение для краевой задачи с условиями $2y'(0) = y(0) - 1, y(1) = 3$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов находим

$$u_0(x) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x.$$

Ищем нетривиальное решение вида (2.34). Удовлетворяя однородным краевым условиям, получаем

$$\begin{cases} A + B + 2\delta A - 2\delta B = 0, \\ Ae^{-\delta} + Be^{\delta} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -Be^{2\delta}, \\ B(1 - e^{2\delta} - 2\delta e^{2\delta} - 2\delta) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, существует нетривиальное решение, только в том случае, если существует отрицательный корень уравнения:

$$(1 - 2\delta) = (1 + 2\delta)e^{2\delta}. \quad (2.37)$$

Рисунок 2.1 показывает, что отрицательных корней нет. Получим только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

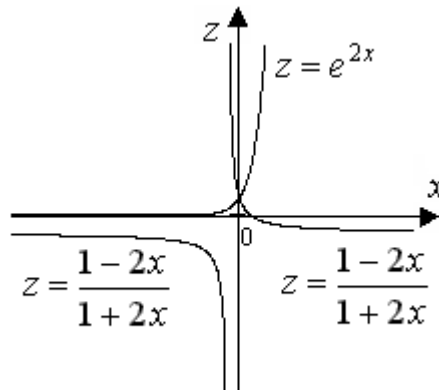


Рис. 2.1. Геометрическая иллюстрация корня уравнения (2.37)

Ищем нетривиальное решение вида (2.35). Из однородных краевых условий, получаем

$$\begin{cases} 2A - B = 0, \\ A + B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \end{cases}$$

следовательно, существует только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

Ищем нетривиальное решение вида (2.36). Из однородных краевых условий, получим

$$\begin{cases} 2\delta B - A = 0, \\ A \cos \delta + B \sin \delta = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $2\delta B = A$, а значения δ являются положительными корнями уравнения $\operatorname{tg} \delta = -2\delta$.

Последнее уравнение имеет счетное множество корней $\delta_1, \delta_2, \dots$, что подтверждает рисунок 2.2. Их значения определяются приближенными численными методами, например, метод хорд, метод Ньютона, методом итерации или методом половинного деления. В системе MathCAD корни уравнений отыскиваются с помощью стандартной функции *root* (см. раздел 6.2).

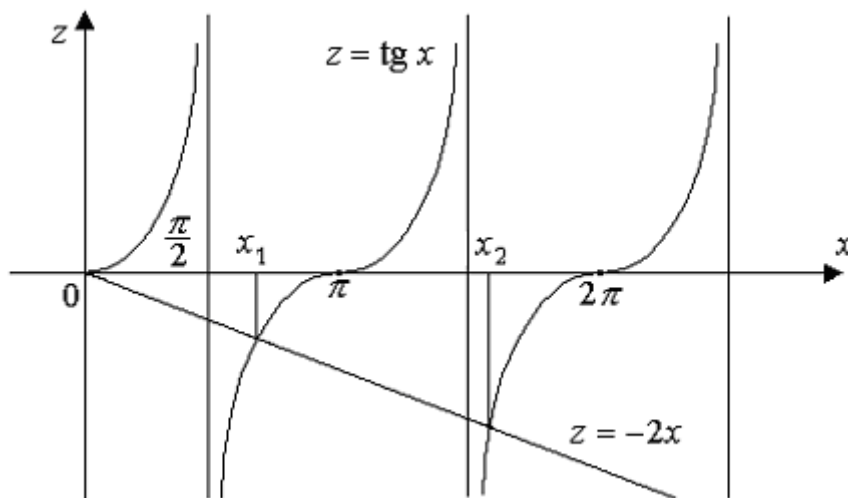


Рис. 2.2. Геометрическая иллюстрация корней уравнения $\operatorname{tg} x = -2x$

Следовательно,

$$u_k(x) = 2\delta_k \cos(\delta_k x) + \sin(\delta_k x), \quad k \geq 1.$$

Таким образом, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x + \sum_{k=1}^n C_k (2\delta_k \cos(\delta_k x) + \sin(\delta_k x)).$$

Если использовать пробные функции вида (2.29), (2.30), то получаем

$$y_n(x) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x + C_1(3x^2 - x - 2) + \sum_{k=2}^n C_k x^k (1 - x),$$

или

$$y_n(x) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x + C_1(3x^2 - x - 2) + \sum_{k=2}^n C_k x^2 (1 - x)^{k-1},$$

где многочлен $P_2(x) = 3x^2 - x - 2$ удовлетворяет однородным граничным условиям и найден среди многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами.

Пример 8. Построить пробное решение для краевой задачи с условиями $y(0) + 2y'(0) = 1$, $y(1) - 3y'(1) = 3$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов находим $u_0(x) = 2 - \frac{x}{2}$.

Определяя пробные функции из множества (2.34) – (2.36), устанавливаем, что существует нетривиальное решение вида (2.34), причем $B \neq 0$, $A = -\frac{1-2\delta}{1+2\delta}B$, а δ является единственным положительным корнем уравнения

$$e^{2\delta} = \frac{(2\delta+1)(3\delta+1)}{(2\delta-1)(3\delta-1)}. \quad (2.38)$$

Последнее подтверждает рисунок 2.3.

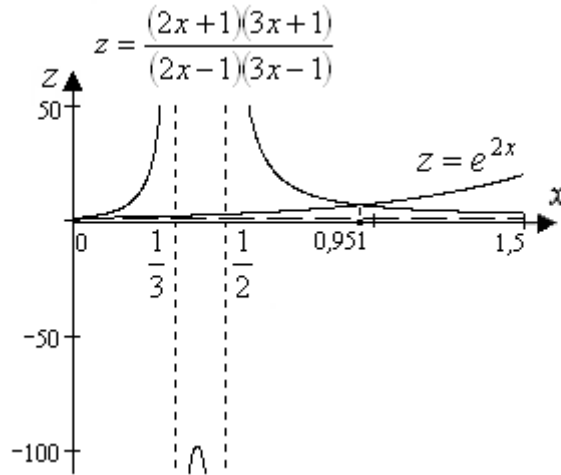


Рис. 2.3. Геометрическая иллюстрация корней уравнения (2.38)

Уравнение (2.38) имеет корень $\delta_1 \approx 0,951$, который может быть найден любым численным методом. Следовательно,

$$u_1(x) = e^{\delta_1 x} + \frac{2\delta_1 - 1}{2\delta_1 + 1} e^{-\delta_1 x} \approx e^{0.951x} + 3,217e^{-0.951x}.$$

Нетривиального решения вида (2.35) не существует. Найдем нетривиальные решения вида (2.36): $A = -2\delta B$, $B \neq 0$, а значения δ являются положительными корнями уравнения $\operatorname{tg} \delta = \frac{5\delta}{1-6\delta^2}$. Таких корней это уравнение имеет счетное множество $\delta_2, \delta_3, \dots$, что подтверждает рисунок 2.4, их значения определяются численным методом.

Следовательно,

$$u_k(x) = 2\delta_k \cos(\delta_k x) - \sin(\delta_k x), \quad k \geq 2.$$

Таким образом, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = 2 - \frac{x}{2} + C_1 \left(e^{\delta_1 x} + \frac{2\delta_1 - 1}{2\delta_1 + 1} e^{-\delta_1 x} \right) + \sum_{k=2}^n C_k (2\delta_k \cos(\delta_k x) - \sin(\delta_k x)).$$

Если использовать пробные функции вида (2.29), (2.30), то получаем

$$y_n(x) = 2 - \frac{x}{2} + C_1 (4x^2 - 5x + 10) + C_2 (5x^3 - 8x^2) + \sum_{k=3}^n C_k x^{k-1} (1-x)^2,$$

или

$$y_n(x) = 2 - \frac{x}{2} + C_1(4x^2 - 5x + 10) + C_2(5x^3 - 8x^2) + \sum_{k=3}^n C_k x^2 (1-x)^{k-1},$$

где многочлены $P_2(x) = 4x^2 - 5x + 10$, $P_3(x) = 5x^3 - 8x^2$ удовлетворяют однородным граничным условиям и найдены среди многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ с неопределенными коэффициентами.

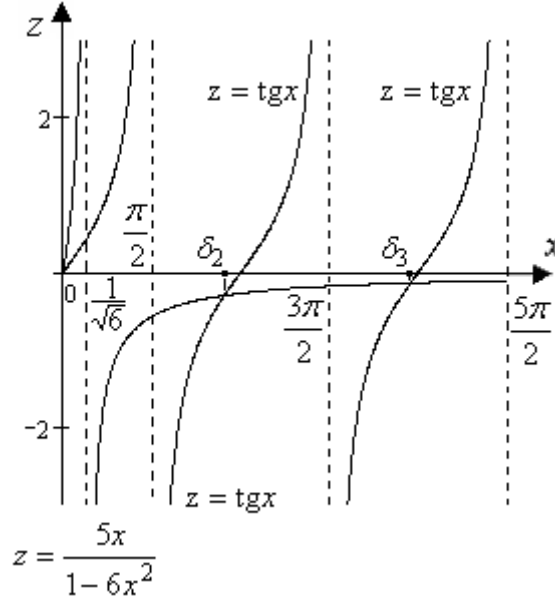


Рис. 2.4. Геометрическая иллюстрация корней уравнения $\operatorname{tg} \delta = \frac{5\delta}{1-6\delta^2}$

Пример 9. Построить пробное решение для краевой задачи с условиями $y(0) + 2y'(0) = 3$, $y(1) + y'(1) = 6$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов находим $u_0(x) = x^2 + x + 1$.

Определяя пробные функции из множества (2.34) – (2.36), устанавливаем:

1. Не существуют нетривиальные решения вида (2.34);
 2. Существуют нетривиальные решения вида (2.35), причем $A = -\frac{1}{2}B$, $B \neq 0$, так что можно взять $u_1(x) = x - 2$;

3. Существуют нетривиальные решения вида (2.36), причем $A = -2\delta B$, $B \neq 0$, а значения δ являются положительными корнями уравнения $\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\delta}{1+\delta^2}$.

Последнее уравнение имеет счетное множество таких корней $\delta_2, \delta_3, \dots$. Их значения определяются численными методами.

для определения собственных значений.

Таким образом, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = x^2 + x + 1 + C_1(x - 2) + \sum_{k=2}^n C_k (2\delta_k \cos(\delta_k x) - \sin(\delta_k x)).$$

Если использовать пробные функции вида (2.29), (2.30), то получаем

$$y_n(x) = x^2 + x + 1 + C_1(x - 2) + C_2(3x^3 - 4x^2 + x - 2) + \sum_{k=3}^n C_k x^{k-1} (1 - x)^2,$$

или

$$y_n(x) = x^2 + x + 1 + C_1(x - 2) + C_2(3x^3 - 4x^2 + x - 2) + \sum_{k=3}^n C_k x^2 (1 - x)^{k-1},$$

где многочлены $P_1(x) = x - 2$, $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 2$ удовлетворяют однородным граничным условиям и найдены среди многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ с неопределенными коэффициентами.

Пример 10. Построить пробное решение для краевой задачи с условиями $2y(0) + y'(0) = 1$, $y(2) - y'(2) = 3$.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов находим $u_0(x) = 5x - 2$.

Определяя пробные функции из множества (2.34) – (2.36), устанавливаем, что существуют нетривиальные решения вида (2.34), причем $B \neq 0$, $A = \frac{\delta - 2}{\delta + 2} B$, а δ являются положительными корнями уравнения

$$e^{4\delta} = \frac{(2 + \delta)(1 + \delta)}{(2 - \delta)(1 - \delta)}. \quad (2.39)$$

Последнее уравнение имеет два положительных корня, что подтверждает рисунок 2.5.

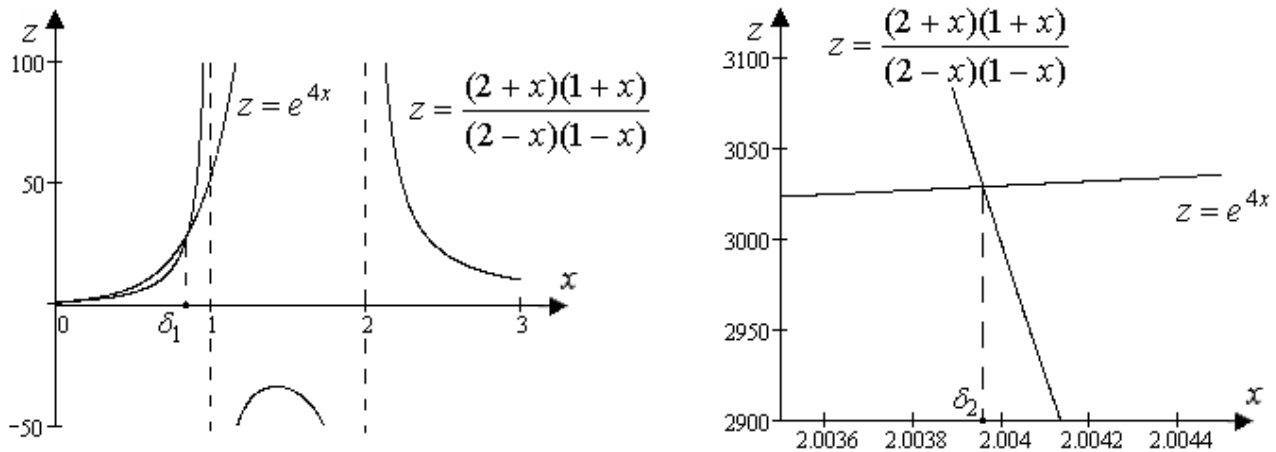


Рис. 2.5. Геометрическая иллюстрация корней уравнения (2.39)

Уравнение (2.39) имеет корни $\delta_1 \approx 0,8454095$, $\delta_2 \approx 2,0039559$, которые могут быть найдены любым численным методом. Следовательно,

$$u_1(x) = e^{\delta_1 x} + \frac{\delta_1 + 2}{\delta_1 - 2} e^{-\delta_1 x} \approx e^{0,8454095x} - 2,464432 e^{-0,8454095x},$$

$$u_2(x) = e^{\delta_2 x} + \frac{\delta_2 + 2}{\delta_2 - 2} e^{-\delta_2 x} \approx e^{2,0039559x} + 1012,147906 e^{-2,0039559x}.$$

Нетривиального решения вида (2.35) не существует. Найдем нетривиальные решения вида (2.36): $A = -\frac{\delta}{2}B$, $B \neq 0$, а значения δ являются положительными корнями уравнения $\operatorname{tg} 2\delta = \frac{3\delta}{2-\delta^2}$. Таких корней это уравнение имеет счетное множество $\delta_3, \delta_4, \dots$, что подтверждает рисунок 2.6, их значения определяются численным методом.

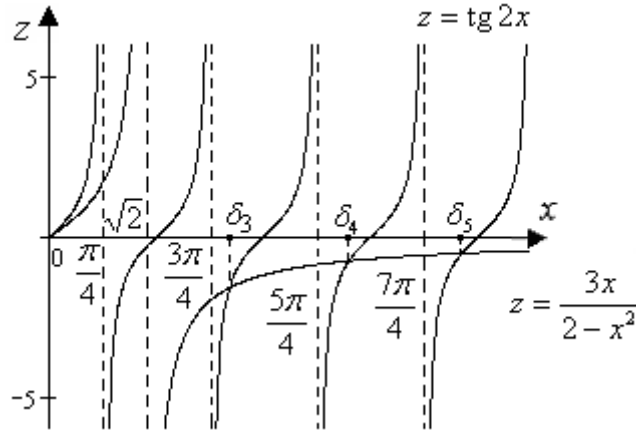


Рис. 2.6. Геометрическая иллюстрация корней уравнения $\operatorname{tg} 2\delta = \frac{3\delta}{2-\delta^2}$

Следовательно,

$$u_k(x) = \delta_k \cos(\delta_k x) - 2 \sin(\delta_k x), \quad k \geq 3.$$

Таким образом, пробное решение можно искать в виде

$$y_n(x) = 5x - 2 + C_1 \left(e^{\delta_1 x} + \frac{\delta_1 + 2}{\delta_1 - 2} e^{-\delta_1 x} \right) + C_2 \left(e^{\delta_2 x} + \frac{\delta_2 + 2}{\delta_2 - 2} e^{-\delta_2 x} \right) + \sum_{k=3}^n C_k (\delta_k \cos(\delta_k x) - 2 \sin(\delta_k x)).$$

Если использовать пробные функции вида (2.29), (2.30), то получаем

$$y_n(x) = 5x - 2 + C_1 x^2 + C_2 (x^3 + 8x - 4) + \sum_{k=3}^n C_k x^{k-1} (1-x)^2,$$

или

$$y_n(x) = 5x - 2 + C_1 x^2 + C_2 (x^3 + 8x - 4) + \sum_{k=3}^n C_k x^2 (1-x)^{k-1},$$

где многочлены $P_2(x) = x^2$, $P_3(x) = x^3 + 8x - 4$ удовлетворяют однородным граничным условиям и найдены среди многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ с неопределенными коэффициентами.

2.6. Задание к лабораторной работе

Используя методы Галеркина, Ритца и интегральный метод наименьших квадратов, найти наиболее точное приближенное аналитическое решение

$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + \frac{d_0 + d_1 x}{x^2 - 1} y' + \frac{d_2}{\sqrt{1 - x^2}} y &= 0, \\ a_0 y(a) + a_1 y'(a) &= a_2, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) &= b_2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

из пробных решений, построенных: 1) методом Галеркина при помощи системы из n пробных функций – многочленов (2.26) и двух систем поверочных функций, одна из которых составлена из пробных функций, а вторая – из многочленов Лежандра (2.31); 2) методом Ритца при помощи двух систем из n пробных функций – многочленов (2.26) и функций вида (2.34) – (2.36); 3) интегральным методом наименьших квадратов при помощи двух систем из n пробных функций – многочленов (2.26) и многочленов (2.29).

Наиболее точное решение установить сравнением мер точности полученных приближенных решений

$$\varepsilon_1 = \max_{[a,b]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|, \quad \varepsilon_2 = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_n, x)|, \quad \varepsilon_3 = \max_{[a,b]} |Y_K(x) - y_n(x)|,$$

где $Y_K(x)$ – решение, полученное на ЭВМ с использованием стандартных функций прикладной системы MathCAD, описанными в главе 6. Сделать выводы о возможностях использованных методов. Оформить и защитить отчет.

Варианты заданий, определяемые различными наборами значений параметров $d_0, d_1, d_2, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, a, b$ задачи (2.40) приведены в таблице 2.2.

Лабораторная работа выполняется с использованием прикладной системы MathCAD, в которой реализуются алгоритмы построения пробных решений $y_m(x)$ методами Галеркина, Ритца и интегральным методом наименьших квадратов.

Перед обращением к программе необходимо подготовить числовые и строчные данные:

$d_0, d_1, d_2, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – параметры задачи;

a, b – концы отрезка интегрирования;

n – число параметров C_1, \dots, C_n в пробном решении (значение параметра n задает преподаватель);

аналитические выражения для пробных функций $u_0(x), \dots, u_n(x)$ и для поверочных функций $W_1(x), \dots, W_n(x)$.

Аналитические выражения набираются по определенным правилам, описанным в главе 6.

После введения числовых и строчных данных программа автоматически производит расчет: компьютерного решения $Y_K(x)$; значений коэффициентов C_1, \dots, C_n ; пробных решений $y_{n-1}(x), y_n(x)$; сравнения $y_n(x)$ с $y_{n-1}(x)$ и $y_n(x)$ с $Y_K(x)$; невязок; параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Таблица 2.2

Варианты заданий лабораторной работы

№ вар.	a	b	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	d_0	d_1	d_2
1	0	0,8	1	0	-0,5	1	0	0,5	2	0	6
2	0	0,8	1	0	0	1	0	0,1	2	0	12
3	0	0,8	0	1	0,5	1	0	0,2	2	0	6
4	0	0,8	0	1	0	1	0	0,1	2	0	8
5	0	0,8	1	0	-0,4	0	1	-0,2	2	0	20
6	0	0,8	1	0	-0,5	1	0	0,5	0	2	6
7	0	0,8	1	0	0	1	0	0,1	0	2	12
8	0	0,8	0	1	0,5	1	0	0,2	0	2	6
9	0	0,8	0	1	0	0	1	0,1	0	2	8
10	0	0,8	1	0	-0,4	0	1	-0,2	0	2	20
11	0	0,6	1	0	0,2	1	0	0,8	2	0	10
12	0	0,6	0	1	0,15	0	1	0,2	2	0	15
13	0	0,6	0	1	-0,1	1	0	0,4	2	0	18
14	0	0,6	1	0	-0,2	1	0	-0,8	2	0	14
15	0	0,6	1	1	0,5	0	1	-1,0	0	2	12
16	0	0,6	1	1	0,4	1	0	1	0	2	4
17	0	0,6	1	0	0,4	1	1	0,2	0	2	6
18	0	0,4	1	0	0	1	0	0,9	0	2	15
19	0	0,4	1	0	1	1	0	-0,13	0	2	24
20	0	0,4	1	0	0	1	0	-1,1	0	2	35
21	0	0,4	1	0	0	1	0	-0,35	0	2	9
22	0	0,4	0	1	1	0	1	-1	2	0	1
23	0	0,5	1	-1	0,2	0	1	1	2	0	4
24	0	0,5	-1	0	0,4	1	0	0,6	2	0	6
25	0	0,5	0	1	2	1	0	0,4	2	0	8

2.7. Выполнение работы в компьютерном классе

1. Прежде чем начать выполнение лабораторной работы на ЭВМ, внимательно ознакомьтесь с данной инструкцией.

2. При необходимости включите сами (или попросите лаборанта) питание компьютера. После того, как система загрузится, запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Mathcad, если же ярлык отсутствует, то открываем программу через кнопку «Пуск» (Программы → Mathsoft → Mathcad).

3. Узнайте у лаборанта расположение файла ODE.mcd и откройте его (File → Open или, если программа русифицирована, Файл → Открыть). При любой ошибке ввода программы нужно обратиться к лаборанту.

4. Прочитайте в начале файла задание на лабораторную работу и просмотрите пример выполнения работы, для которого исследование уже проведено. Программа файла ODE.mcd состоит из шести пунктов «1. Постановка задачи», «2. Получение приближенного решения с помощью программного блока в системе MathCAD», «3. Получение приближенного решения методом Галеркина», «4. Получение приближенного решения вариационным методом Ритца», «5. Получение приближенного решения интегральным методом наименьших квадратов», «6. Выводы». Цели и задачи каждого из пунктов описаны ниже.

5. Для набора функций нужно либо воспользоваться всплывающим меню инструментов «Calculator», либо ввести ее с клавиатуры, используя следующие символы арифметических действий и стандартных функций: сложение – ‘+’; вычитание – ‘-’; умножение – ‘*’; деление – ‘/’; возведение в степень – ‘^’; квадратный корень – ‘\’; синус – $\sin(x)$; косинус – $\cos(x)$; экспонента – $\exp(x)$; натуральный логарифм – $\ln(x)$. При вводе числовых данных, являющихся десятичными дробями, целую и дробную части нужно разделять точкой (например, 0.5, 1.5 и т. д.).

6. Порядок выполнения работы Вам укажет программа подсказками и заданиями, выделенными красным цветом.

7. Для формирования файла отчета запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Microsoft Word, если же ярлык отсутствует, то открываем программу через кнопку «Пуск». Открываем новый документ. В начале документа необходимо оформить титульный лист, описать математическую постановку задачи и результаты выполнения подготовительных расчетов. Затем скопировать основные результаты расчетов из программы ODE.mcd в документ и оформить итоговый отчет. Копирование – ‘Ctrl’+‘Insert’, вставка – ‘Shift’+‘Insert’. Сохранить документ как «ФамилияСтудента_группа_ODE.doc» и распечатать. Пример файла отчета приведен в приложении А.

2.8. Порядок выполнения лабораторной работы

Рекомендуется следующий порядок выполнения лабораторной работы.

1. Изучить разделы 1.1–1.2, 2.1–2.7 и подготовить ответы на контрольные вопросы из раздела 2.12.

2. Пройти собеседование с преподавателем, получить допуск к выполнению работы на ЭВМ, номер варианта задания и значение параметра n .

3. В соответствии с вариантом задания выполнить подготовительный шаг алгоритма методов Галеркина, Ритца и метода наименьших квадратов и подготовить, если $u_0(x)$ не является точным решением задачи, все числовые и строчные исходные данные для расчетов на ЭВМ.

4. Выполнить основную расчетную часть лабораторной работы в системе MathCAD. Следует скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_i пробных решений и набрать в отчете решения с этими коэффициентами. Так же необходимо скопировать в этот файл пункт «6. Выводы».

5. Оформить и распечатать файл отчета по лабораторной работе, который должен содержать титульный лист, математическую постановку задачи, результаты выполнения подготовительных расчетов, основные результаты расчетов на ЭВМ, выводы о возможностях использованных методов и наиболее приближенное к точному аналитическое решение.

6. Защитить отчет.

2.9. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример

В данном разделе приведен текст программы ODE.mcd, разработанной для решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методами Галеркина, Рунге и интегральным методом наименьших квадратов. В тексте разбирается получение пробного решения $y_5(x)$ (т.е. задается $n = 5$) на отрезке $[0, 1]$ для краевой задачи

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= 2x^2 - 6x + 2, \\ y(0) + y'(0) &= 1, \\ y(1) + y'(1) &= -4.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Лабораторная работа

«Решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка»

Задание на лабораторную работу

1. В пункте «Постановка задачи» ввести вместо данных примера непрерывные функции: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи: a , b , a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 своего варианта.

2. В пункте «Получение приближенного решения с помощью программного блока в системе MathCAD» показано, как в системе MathCAD краевая задача сводится к задаче Коши и решается с помощью стандартной функции. Необходимо скопировать график полученной интегральной кривой в файл отчета.

3. В пункте «Получение приближенного решения методом Галеркина» ввести вместо данных примера полученную самостоятельно систему пробных функций $V(k, x)$ – многочленов вида (2.26). Выполнить построение приближенных решений задачи $y_n(x)$, взяв в качестве проверочных функций пробные и функции Лежандра. Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_k пробных решений и набрать в отчете решения с этими коэффициентами.

4. В пункте «Получение приближенного решения вариационным методом Рунца» ввести вместо данных примера полученную самостоятельно систему пробных функций $V1(k, x)$ – функций вида (2.34) – (2.36). Выполнить построение приближенных решений задачи $y_n(x)$, взяв в качестве пробных функций многочлены (2.26) и функции вида (2.34) – (2.36). Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_k пробных решений и набрать в отчете решения с этими коэффициентами.

5. В пункте «Получение приближенного решения интегральным методом наименьших квадратов» ввести вместо данных примера полученную самостоятельно систему пробных функций $V2(k, x)$ – многочленов вида (2.29). Выполнить построение приближенных решений задачи $y_n(x)$, взяв в качестве пробных функций многочлены (2.26) и многочлены (2.29). Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_k пробных решений и набрать в отчете решения с этими коэффициентами.

6. Скопировать результаты пункта «Выводы» в файл отчета, и, анализируя их, сделать в файле отчета выводы о точности построенных решений методами Галеркина, Рунца и методом наименьших квадратов.

Постановка задачи

Требуется на отрезке $[a, b]$ найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p(x) \cdot \frac{d}{dx}y + q(x) \cdot y = f(x)$$

удовлетворяющее условиям

$$a0 \cdot y(a) + a1 \cdot \frac{d}{dx}y(a) = a2$$

$$b0 \cdot y(b) + b1 \cdot \frac{d}{dx}y(b) = b2$$

Введите (вместо уже введенных для примера данных) **непрерывные функции** $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и **числовые параметры** a , b , $a0$, $a1$, $a2$, $b1$, $b2$ задачи

$$\begin{array}{llllllll} p(x) := -3 & q(x) := 2 & f(x) := 2x^2 - 6x + 2 \\ a := 0 & b := 1 & a0 := 1 & a1 := 1 & a2 := 1 & b0 := 1 & b1 := 1 & b2 := -4 \end{array}$$

Получение приближенного решения с помощью программного блока в системе MathCAD

Найдем «точное решение» $y(x)$, используя стандартные функции системы MathCAD. Для этого представим дифференциальное уравнение в виде нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка, полагая $y0=y$, $y1=y'$:

$$\frac{d}{dx} y_0 = y_1$$

$$\frac{d}{dx} y_1 = -p(x) y_1 - q(x) \cdot y_0 + f(x)$$

Граничные условия:

$$a_0 \cdot y_0(a) + a_1 \cdot y_1(a) = a_2$$

$$b_0 \cdot y_0(b) + b_1 \cdot y_1(b) = b_2$$

Чтобы решить эту краевую задачу, сведем ее сначала к задаче Коши

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -p(x) y_1 - q(x) y_0 + f(x) \end{pmatrix}$$

$$x_f := \frac{a+b}{2}$$

Введем в вектор v_1 возможные значения $y(a)$, если $a_0 = 0$, и $y'(a)$ в противном случае, в вектор v_2 – $y(b)$, если $b_0=0$, и $y'(b)$ в противном случае (начальные приближения).

$$v_{1_0} := 1$$

$$v_{2_0} := 1$$

$$load1(a, v_1) := \begin{pmatrix} \text{if} \left(a_0 = 0, v_{1_0}, \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \cdot v_{1_0} \right) \\ \text{if} \left(a_0 = 0, \frac{a_2}{a_1}, v_{1_0} \right) \end{pmatrix}$$

$$load2(b, v_2) := \begin{pmatrix} \text{if} \left(b_0 = 0, v_{2_0}, \frac{b_2}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} \cdot v_{2_0} \right) \\ \text{if} \left(b_0 = 0, \frac{b_2}{b_1}, v_{2_0} \right) \end{pmatrix}$$

$$score(x_f, y) := y$$

$$S := bvalfit \left(v_1, v_2, a, b, \frac{a+b}{2}, D, load1, load2, score \right)$$

$$S = (0.153224 \quad 0.062349)$$

Первый коэффициент вектора S – точное значение $y(a)$, если $a_0=0$, и $y'(a)$ в противном случае, второй коэффициент – точное значение $y(b)$, если $b_0=0$, и $y'(b)$ в противном случае. Т. е. свели краевую задачу к задаче Коши.

Найдем решение этой задачи Коши, разбив отрезок на N частей

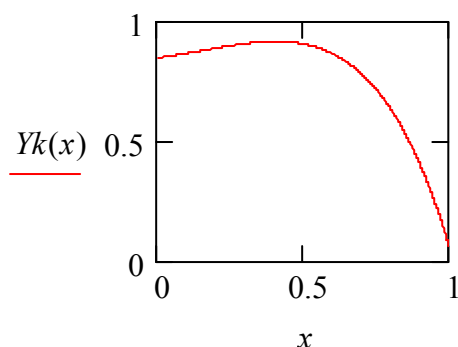
$$y_0 := \text{if} \left[a_0 \neq 0, \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \cdot (S^T)_0, (S^T)_0 \right]$$

$$y_1 := \text{if} \left[a_0 \neq 0, (S^T)_0, \frac{a_2}{a_1} \right]$$

Для нахождения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений используется метод Рунге-Кутты, заложенный в программный блок `odesolve(x,b,[step])`, где x – переменная интегрирования, b – конечная точка, $[step]$ – число частичных отрезков (в примере 10000). Найдём решение задачи:

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &Y''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + q(x) \cdot Y(x) = f(x) \\ &Y(0) = y0 \quad Y'(0) = y1 \\ &Yk := \text{Odesolve}(x, b, 10000) \end{aligned}$$

Интегральная кривая имеет вид

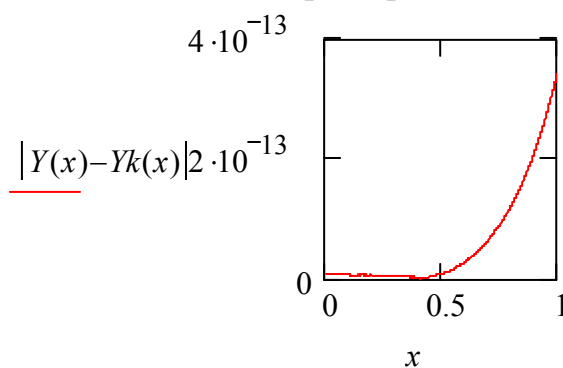


Скопируйте график полученной интегральной кривой в файл отчета.

В некоторых случаях возможно найти точное аналитическое решение. Для данного примера решение имеет вид

$$Y(x) := \frac{e^2 + 7}{2(e^2 - e)} e^x - \frac{7 + e}{3(e^2 - e)} \cdot e^{2x} + x^2$$

Сравним аналитическое и компьютерное решения



Наибольшая разность равна

$$\varepsilon := 3.414 \times 10^{-13}$$

т. е. компьютерное решение найдено достаточно точно.

Построим решения краевой задачи методами Галеркина, Рунге и методом наименьших квадратов.

Введите порядок пробного решения $U_n = V(0, x) + \sum_{k=1}^n C_k V(k, x) :$

$$n := 5$$

Получение приближенного решения методом Галеркина

Введите систему пробных функций вида (2.26):

$$V(k, x) := \text{if} \left(k = 0, 6 - 5x, 1 - x + \frac{x^{k+1}}{k+2} \right)$$

Введем оператор, соответствующий левой части уравнения

$$L(k, x, V) := \frac{d^2}{dx^2} V(k, x) + p(x) \cdot \frac{d}{dx} V(k, x) + q(x) \cdot V(k, x)$$

1. В качестве проверочных функций возьмем пробные

$$W(k, x) := V(k, x)$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (f(x) - L(0, x, V)) \cdot W(i, x) dx$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b L(j, x, V) \cdot W(i, x) dx$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (1.132936 \quad -2.499320 \quad -2.647392 \quad 0.073920 \quad -1.213380)$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot V(k, x)$$

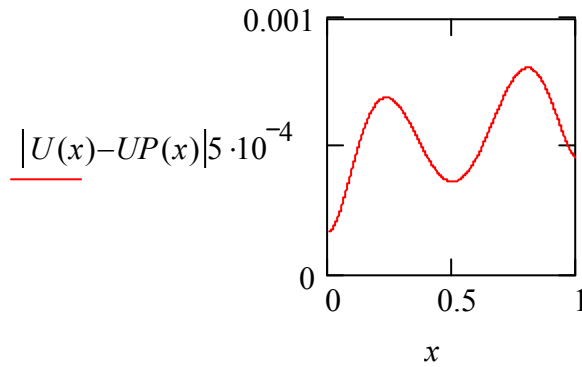
Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения.

Для этого решим систему уравнений $A_1 C = B_1$, где A_1 – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_1 – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$C1 := \text{if} \left[n \neq 1, (\text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := \text{if} \left(n \neq 1, V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} C1_{k-1} \cdot V(k, x), V(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$

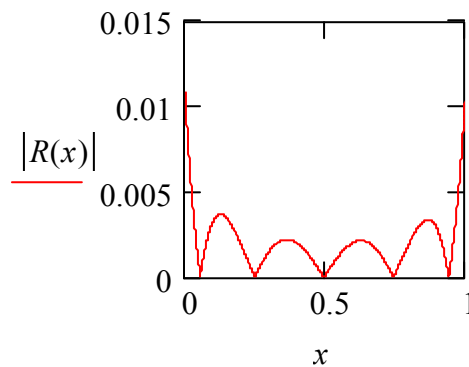


Замените старое значение меры точности $\varepsilon 11$ наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$ (для этого необходимо кликнуть мышью по графику, где в левом верхнем углу появится наибольшее значение, скопировать это значение и заменить на него уже имеющееся ниже значение $\varepsilon 11$)

$$\varepsilon 11 := 8.066 \times 10^{-4}$$

Найдем невязку полученного решения

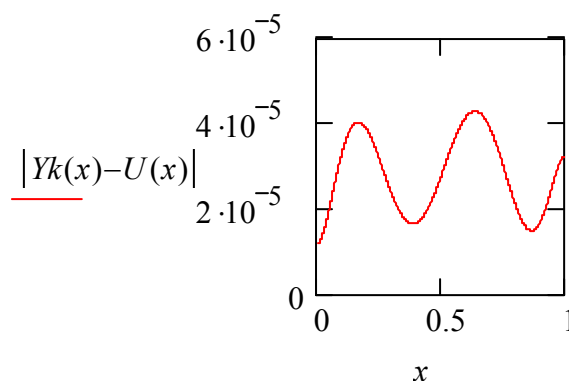
$$R(x) := L(0, x, V) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot L(i, x, V)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 21$ наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 21 := 0.011$$

Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 31$ наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 31 := 4.289 \times 10^{-5}$$

2. В качестве проверочных функций возьмем многочлены Лежандра

$$P(k, t) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right]$$

$$W(k, x) := P \left[k, \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (f(x) - L(0, x, V)) \cdot W(i-1, x) dx$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b L(j, x, V) \cdot W(i-1, x) dx$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (1.136001 \quad -2.510888 \quad -2.637995 \quad 0.080164 \quad -1.220506)$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k , наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

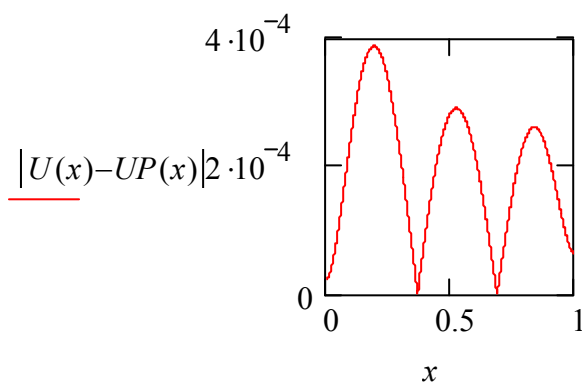
$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot V(k, x)$$

Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения. Для этого решим систему уравнений $A_1 C = B_1$, где A_1 – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_1 – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$C1 := \text{if} \left[n \neq 1, (\text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := \text{if} \left(n \neq 1, V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} C1_{k-1} \cdot V(k, x), V(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$

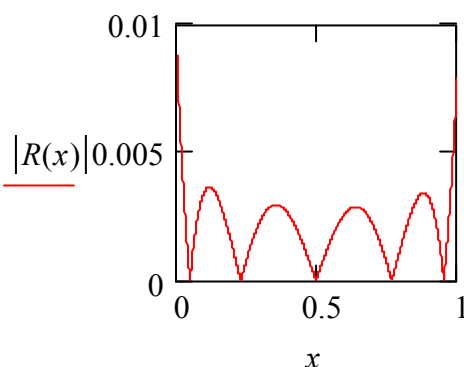


Замените старое значение меры точности ε_{12} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{12} := 3.876 \times 10^{-4}$$

Найдем невязку полученного решения

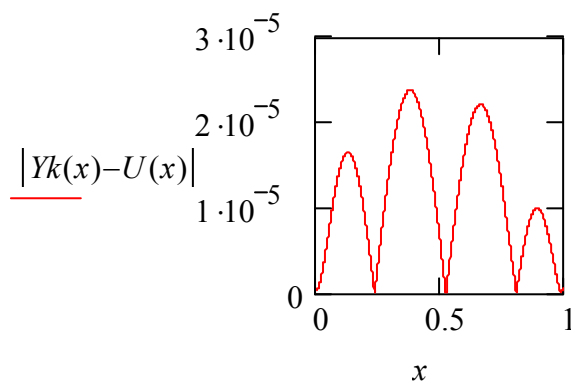
$$R(x) := L(0, x, V) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot L(i, x, V)$$



Замените старое значение меры точности ε_{22} наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{22} := 8.786 \times 10^{-3}$$

Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности ε_{32} наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{32} := 2.381 \times 10^{-5}$$

Получение приближенного решения вариационным методом Рунца

Введем обозначения

$$K(x) := \exp\left(\int_a^x p(t)dt\right) \quad \beta(x) := -K(x) \cdot q(x) \quad g(x) := K(x) \cdot f(x)$$

Вычислим значения параметров функционала

$$\begin{aligned} Ta &:= \text{if}\left(a0 \neq 0, \frac{a2}{a0}, 0\right) & Ta &= 1 \\ Tb &:= \text{if}\left(b0 \neq 0, \frac{b2}{b0}, 0\right) & Tb &= -4 \\ \alpha a &:= \text{if}\left(a0 \neq 0 \wedge a1 \neq 0, -\frac{a0}{a1} \cdot K(a), 0\right) & \alpha a &= -1 \\ \alpha b &:= \text{if}\left(b0 \neq 0 \wedge b1 \neq 0, \frac{b0}{b1} \cdot K(b), 0\right) & \alpha b &= 0.049787 \\ qa &:= \text{if}\left(a0 = 0 \wedge a1 \neq 0, -\frac{a2}{a1} \cdot K(a), 0\right) & qa &= 0 \\ qb &:= \text{if}\left(b0 = 0 \wedge b1 \neq 0, -\frac{b2}{b1} \cdot K(b), 0\right) & qb &= 0 \end{aligned}$$

Введем оператор, соответствующий левой части уравнения

$$Ll(k, x, V) := \frac{d}{dx} \left(K(x) \cdot \frac{d}{dx} V(k, x) \right) - \beta(x) \cdot V(k, x)$$

1. В качестве пробных функций возьмем многочлены вида (2.26).

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$\begin{aligned} N(k, x) &:= \frac{d}{dx} V(k, x) \\ i &:= 1..n \quad j := 1..n \\ B_{i-1} &:= \int_a^b [K(x) \cdot N(0, x) \cdot N(i, x) + (\beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \cdot V(i, x)] dx - \\ &\quad - [\alpha b \cdot (V(0, b) - Tb) + qb] \cdot V(i, b) - [\alpha a \cdot (V(0, a) - Ta) - qa] \cdot V(i, a) \\ A_{i-1, j-1} &:= \int_a^b [K(x) \cdot N(i, x) \cdot N(j, x) + \beta(x) \cdot V(i, x) \cdot V(j, x)] dx + \\ &\quad + \alpha b \cdot V(i, b) \cdot V(j, b) + \alpha a \cdot V(i, a) \cdot V(j, a) \end{aligned}$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B \quad C^T = (1.140938 \quad -2.564241 \quad -2.466128 \quad -0.133009 \quad -1.130778)$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k , наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

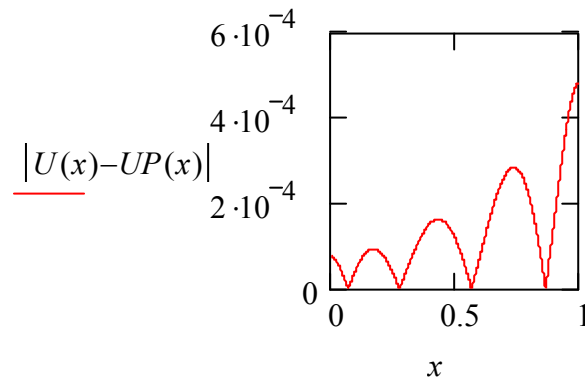
$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot V(k, x)$$

Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения. Для этого решим систему уравнений $A_I C = B_I$, где A_I – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_I – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$CI := \text{if} \left[n \neq 1, (\text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := \text{if} \left(n \neq 1, V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} CI_{k-1} \cdot V(k, x), V(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$

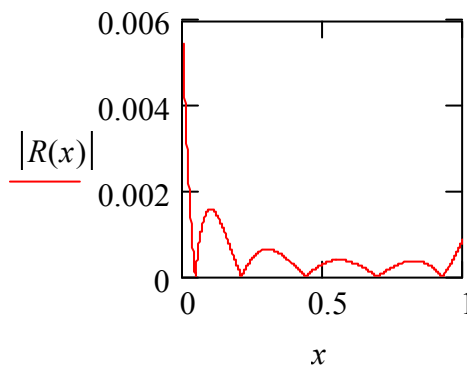


Замените старое значение меры точности ε_{13} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{13} := 4.801 \times 10^{-4}$$

Найдем невязку полученного решения

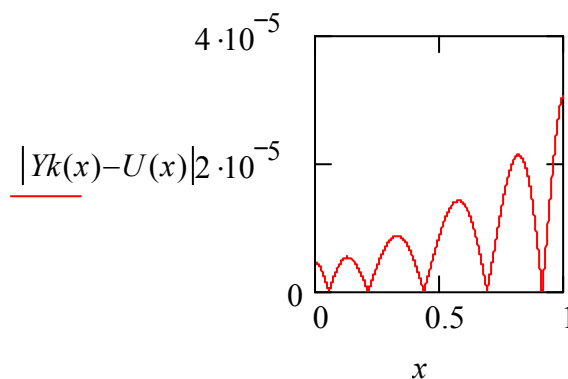
$$R(x) := LI(0, x, V) - g(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot LI(i, x, V)$$



Замените старое значение меры точности ε_{23} наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{23} := 4.606 \times 10^{-3}$$

Сравним решения, полученные методом Рунца и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности ε_{33} наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{33} := 3.062 \times 10^{-5}$$

2. В качестве пробных функций возьмем систему функций (2.34) – (2.36)

Введите систему пробных функций:

$$VI(k, x) := \text{if}[k = 0, 6 - 5 \cdot x, \text{if}[k = 1, e^{-x}, \sin[(k - 1) \cdot \pi \cdot x] - (k - 1) \cdot \pi \cdot \cos[(k - 1) \cdot \pi \cdot x]]]$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$NI(k, x) := \frac{d}{dx} VI(k, x)$$

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$\begin{aligned} B_{i-1} &:= \int_a^b [K(x) \cdot NI(0, x) \cdot NI(i, x) + (\beta(x) \cdot VI(0, x) + g(x)) \cdot VI(i, x)] dx - \\ &- [\alpha b \cdot (VI(0, b) - Tb) + qb] \cdot VI(i, b) - [\alpha a \cdot (VI(0, a) - Ta) - qa] \cdot VI(i, a) \\ A_{i-1, j-1} &:= \int_a^b [K(x) \cdot NI(i, x) \cdot NI(j, x) + \beta(x) \cdot VI(i, x) \cdot VI(j, x)] dx + \\ &+ \alpha b \cdot VI(i, b) \cdot VI(j, b) + \alpha a \cdot VI(i, a) \cdot VI(j, a) \end{aligned}$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -4.539001 & 0.209285 & -8.526397 \times 10^{-3} & 1.313665 \times 10^{-3} & -2.017812 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k , наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

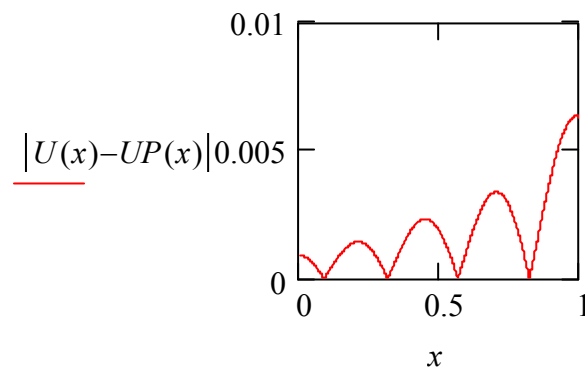
$$U(x) := VI(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot VI(k, x)$$

Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения. Для этого решим систему уравнений $A_1 C = B_1$, где A_1 – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_1 – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$C1 := \text{if} \left[n \neq 1, (\text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := \text{if} \left(n \neq 1, VI(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} C1_{k-1} \cdot VI(k, x), VI(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $(n-1) = 4$

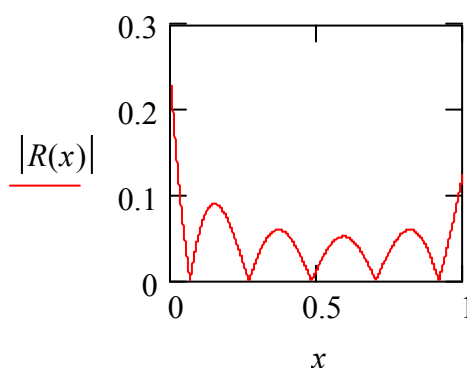


Замените старое значение меры точности $\varepsilon14$ наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon14 := 6.344 \times 10^{-3}$$

Найдем невязку полученного решения

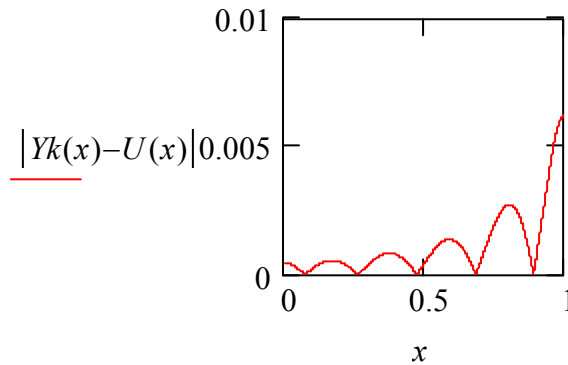
$$R(x) := LI(0, x, VI) - g(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot LI(i, x, VI)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon24$ наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon24 := 0.229$$

Сравним решения, полученные методом Рунца и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности ε_{34} наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{34} := 6.182 \times 10^{-3}$$

Получение приближенного решения интегральным методом наименьших квадратов

1. В качестве пробных функций возьмем многочлены вида (2.26).

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (f(x) - L(0, x, V)) \cdot L(i, x, V) dx$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b L(i, x, V) \cdot L(j, x, V) dx$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (1.137761 \quad -2.526122 \quad -2.595731 \quad 0.033207 \quad -1.202339)$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

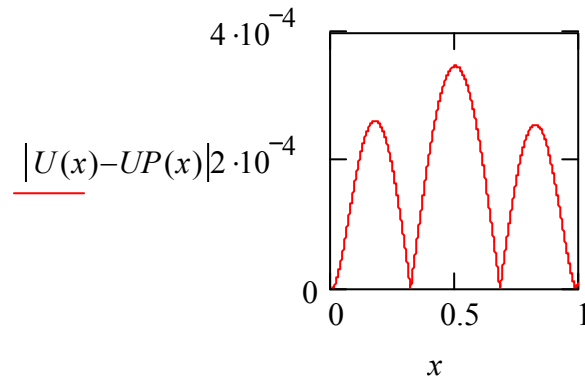
$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot V(k, x)$$

Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения. Для этого решим систему уравнений $A_1 C = B_1$, где A_1 – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_1 – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$CI := if \left[n \neq 1, (submatrix(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot submatrix(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := if \left(n \neq 1, V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} CI_{k-1} \cdot V(k, x), V(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$

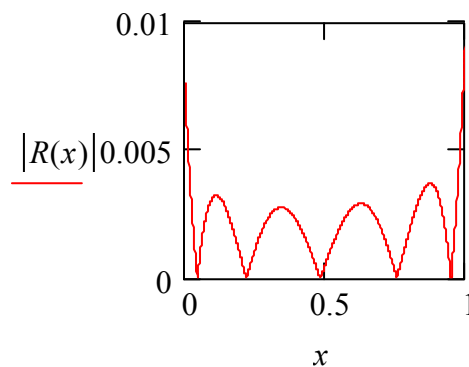


Замените старое значение меры точности ε_{15} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{15} := 3.475 \times 10^{-4}$$

Найдем невязку полученного решения

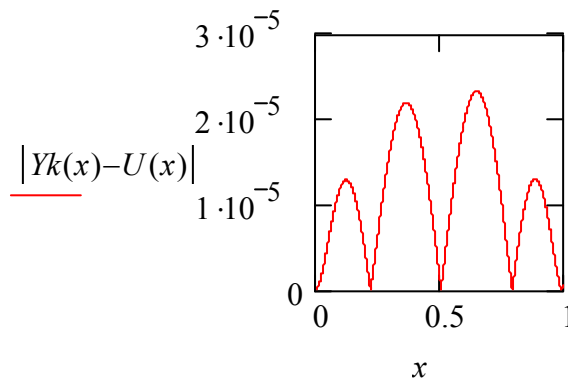
$$R(x) := L(0, x, V) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot L(i, x, V)$$



Замените старое значение меры точности ε_{25} наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{25} := 9.123 \times 10^{-3}$$

Сравним решения, полученные интегральным методом наименьших квадратов и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности ε_{35} наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{35} := 2.334 \times 10^{-5}$$

2. В качестве пробных функций возьмем систему функций (2.29).

Введите систему пробных функций:

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k = 0, 6 - 5 \cdot x, \text{if} \left[k = 1, 1 - x + \frac{x^2}{3}, \text{if} \left[k = 2, 1 - x + \frac{x^3}{4}, (1 - x)^2 \cdot x^{k-1} \right] \right] \right]$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1 .. n \quad j := 1 .. n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (f(x) - L(0, x, V2)) \cdot L(i, x, V2) dx$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b L(i, x, V2) \cdot L(j, x, V2) dx$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (4.207857 \quad -9.361081 \quad -1.023365 \quad -0.337991 \quad -0.171763)$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

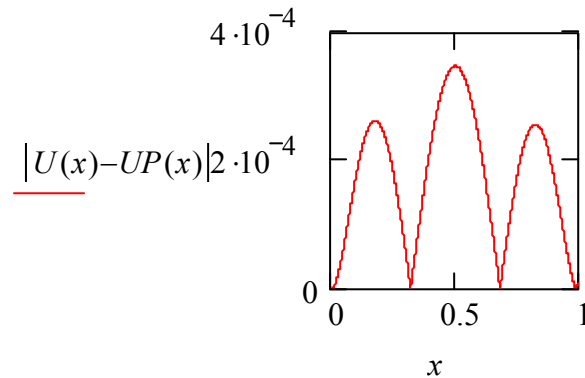
$$U(x) := V2(0, x) + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot V2(k, x)$$

Найдем вектор коэффициентов C_k для предыдущего пробного решения. Для этого решим систему уравнений $A_1 C = B_1$, где A_1 – угловая матрица $(n-1)$ -го порядка матрицы A , а B_1 – вектор-столбец, содержащий первые $(n-1)$ элементы столбца B .

$$C1 := \text{if} \left[n \neq 1, (\text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2))^{-1} \cdot \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0), 10 \right]$$

$$UP(x) := \text{if} \left(n \neq 1, V2(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} C1_{k-1} \cdot V2(k, x), V2(0, x) \right)$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$

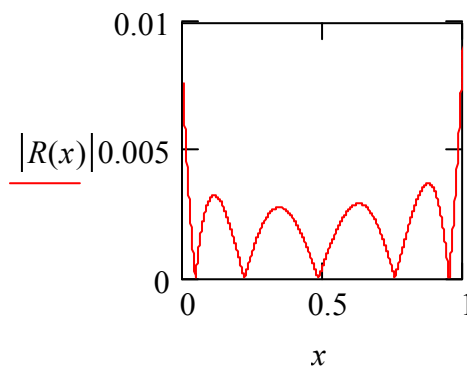


Замените старое значение меры точности $\varepsilon 16$ наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 16 := 3.475 \times 10^{-4}$$

Найдем невязку полученного решения

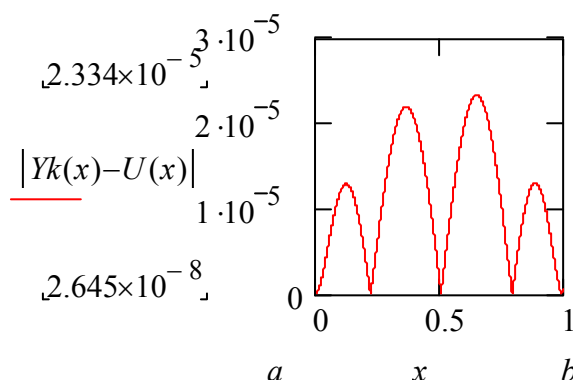
$$R(x) := L(0, x, V2) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} \cdot L(i, x, V2)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 26$ наибольшим значением $|R(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 26 := 9.123 \times 10^{-3}$$

Сравним решения, полученные интегральным методом наименьших квадратов и с помощью стандартной функции системы MathCAD



Замените старое значение меры точности ε_{36} наибольшим значением $|Y(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{36} := 2.334 \times 10^{-5}$$

Выводы

Таким образом, при $n = 5$ получаем следующие результаты:

1. Метод Галеркина. Использование в качестве пробных функций многочленов (2.26) и двух систем поверочных функций: многочленов (2.26) и многочленов Лежандра:

Поверочные ф-ции	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Многочлены (2.26)	$\varepsilon_{11} = 0.000807$	$\varepsilon_{21} = 0.011$	$\varepsilon_{31} = 0.000043$
Многочл. Лежандра	$\varepsilon_{12} = 0.000388$	$\varepsilon_{22} = 0.008786$	$\varepsilon_{32} = 0.000024$

2. Вариационный метод Рунца. Использование двух систем пробных функций: многочленов (2.26) и собственных функций краевой задачи (2.32), (2.6):

Пробные функции	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Многочлены (2.26)	$\varepsilon_{13} = 0.00048$	$\varepsilon_{23} = 0.004606$	$\varepsilon_{33} = 0.000031$
Функции (2.34) – (2.36)	$\varepsilon_{14} = 0.006344$	$\varepsilon_{24} = 0.229$	$\varepsilon_{34} = 0.006182$

3. Интегральный метод наименьших квадратов. Использование в качестве пробных функций двух систем многочленов вида (2.26) и (2.29)

Пробные функции	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Многочлены (2.26)	$\varepsilon_{15} = 0.000348$	$\varepsilon_{25} = 0.009123$	$\varepsilon_{35} = 0.000023$
Многочлены (2.29)	$\varepsilon_{16} = 0.000348$	$\varepsilon_{26} = 0.009123$	$\varepsilon_{36} = 0.000023$

Скопируйте в файл отчета полученные результаты, сделайте выводы о наилучшем приближении и методе его получения.

2.10. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера

Выполним основную расчетную часть лабораторной работы в системе MathCAD для краевой задачи (2.41).

1. Запускаем программу MathCAD. Открываем файл ODE.mcd (текст программы приведен в разделе 2.9). В пункте «Постановка задачи» вводим числовые параметры $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, a, b$ и функции $p(x), q(x), f(x)$, входящие в задачу (2.41)

$$p(x) = -3, \quad q(x) = 2, \quad f(x) = 2x^2 - 6x + 2,$$

$$a = 0, \quad b = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -4.$$

Замечание. Для задачи (2.40) необходимо еще ввести числовые параметры d_0, d_1, d_2 , входящие в функции $p(x), q(x)$.

2. В пункте «Получение приближенного решения с помощью программного блока в системе MathCAD» записываем дифференциальное уравнение (2.41) в виде нормальной системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'_0 = y_1,$$

$$y'_1 = 3y_1 - 2y_0 + 2x^2 - 6x + 2.$$

Далее с помощью функции *bvalfit* (см. раздел 6.2) краевую задачу приводим к задаче Коши, получая начальные условия

$$y'(0) = 0,153224,$$

$$y(0) = 1 - y'(0) = 0,846776.$$

Решая полученную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, используя метод Рунге-Кутты, заложенный в программный блок *odesolve* (см. раздел 6.6), находим решение дифференциального уравнения $y = Y(x)$, разбив отрезок $[0, 1]$ на $N = 10000$ частей (в дальнейшем будем называть его точным решением). Копируем график полученного решения (рис. 2.2) в файл отчета.

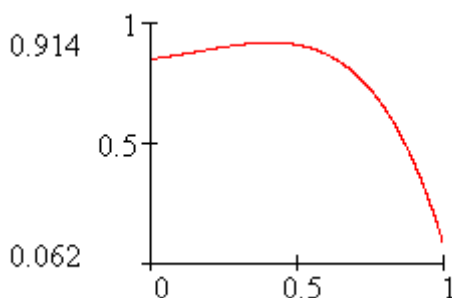


Рис.2.2. График точного решения

Заметим, что поставленная задача имеет единственное точное решение $y = y(x)$ вида

$$y = \frac{1}{2} \frac{e^2 + 7}{(e^2 - e)} e^x - \frac{7 + e}{3(e^2 - e)} e^{2x} + x^2 = 1,5403e^x - 0,6935e^{2x} + x^2, \quad (2.42)$$

которое получено аналитическим методом, известным из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Сравнение функций $y(x)$ и $Y(x)$ показывает, что погрешность не превышает $3,414 \times 10^{-13}$. Следовательно, решение $Y(x)$ найдено достаточно точно.

Замечание. Компьютерное решение будет тем точнее, чем больше число точек разбиения введено в функцию *odesolve*.

Вводим порядок пробных решений $n = 5$.

3. В пункте «Получение приближенного решения методом Галеркина» в качестве пробных функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_5(x)$ используем функции, построенные в примере 1 раздела 2.5,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 6 - 5x, & u_1(x) &= 1 - x + \frac{1}{3}x^2, & u_2(x) &= 1 - x + \frac{1}{4}x^3, \\ u_3(x) &= 1 - x + \frac{1}{5}x^4, & u_4(x) &= 1 - x + \frac{1}{6}x^5, & u_5(x) &= 1 - x + \frac{1}{7}x^6. \end{aligned}$$

Замечание. Процедуру получения многочленов вида (2.26) необходимо описать в файле отчета.

3.1. Воспользовавшись указаниями из раздела 2.5, в качестве поверочных функций возьмем пробные $u_1(x), \dots, u_5(x)$

$$\begin{aligned} W_1(x) &= 1 - x + \frac{1}{3}x^2, & W_2(x) &= 1 - x + \frac{1}{4}x^3, & W_3(x) &= 1 - x + \frac{1}{5}x^4, \\ W_4(x) &= 1 - x + \frac{1}{6}x^5, & W_5(x) &= 1 - x + \frac{1}{7}x^6. \end{aligned}$$

В результате расчета по программе при $n = 5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,132936 \quad -2,499320 \quad -2,647392 \quad 0,073920 \quad -1,213380).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$\begin{aligned} y_5(x) &= u_0(x) + 1,132936u_1(x) - 2,499320u_2(x) - 2,647392u_3(x) + \\ &\quad + 0,073920u_4(x) - 1,213380u_5(x). \end{aligned}$$

Анализируя график функции $|y_5(x) - y_4(x)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{11} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,0008066.$$

Анализируя график невязки решения $y_5(x)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{21} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,011.$$

Анализируя график функции $|Y(x) - y_5(x)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{31} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,0000289.$$

3.2. Воспользовавшись указаниями из раздела 2.5, в качестве поверочных функций возьмем многочлены Лежандра

$$W_1(x) = 1, \quad W_2(x) = 2x - 1, \quad W_3(x) = \frac{1}{2}(3(2x - 1)^2 - 1),$$

$$W_4(x) = \frac{1}{2}(5(2x - 1)^3 - 3(2x - 1)), \quad W_5(x) = \frac{1}{8}(35(2x - 1)^4 - 30(2x - 1)^2 + 3).$$

В результате расчета по программе при $n = 5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,136001 \quad -2,510888 \quad -2,637995 \quad 0,080164 \quad -1,220506).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$y_5(x) = u_0(x) + 1,136001u_1(x) - 2,510888u_2(x) - 2,637995u_3(x) + \\ + 0,080164u_4(x) - 1,220506u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{12} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,0003876,$$

$$\varepsilon_{22} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,008786,$$

$$\varepsilon_{32} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,00002381.$$

4. Найдем на отрезке $[0, 1]$ приближенное значение краевой задачи (2.41) методом Ритца.

Сводим задачу (2.41) к задаче (2.2), (2.3), определяя, согласно (2.5),

$$K(x) = \exp\left(\int_0^x (-3)dt\right) = e^{-3x}.$$

Получаем задачу

$$(K(x)y')' - \beta(x)y = g(x),$$

$$y(0) + y'(0) = 1,$$

$$y(1) + y'(1) = -4, \tag{2.43}$$

где $K'(x) = -3e^{-3x}$; $\beta(x) = -2e^{-3x}$; $g(x) = (2x^2 - 6x + 2)e^{-3x}$.

Определяем параметры функционала (2.13). Так как $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$, то в соответствии с таблицей 2.1 имеем

$$T_a = \frac{a_2}{a_0} = 1, \quad T_b = \frac{b_2}{b_0} = -4, \quad \alpha_a = -\frac{a_0}{a_1} k(a) = -e^{-0} = -1,$$

$$\alpha_b = \frac{b_0}{b_1} k(b) = e^{-3} = 0,04979, \quad q_a = q_b = 0.$$

4.1. В пункте «Получение приближенного решения вариационным методом Ритца» в качестве пробных функций используем также функции, полученные в примере 1 раздела 2.5:

$$u_0(x) = 6 - 5x; \quad u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2; \quad u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3;$$

$$u_3(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^4; \quad u_4(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^5; \quad u_5(x) = 1 - x + \frac{1}{7}x^6;$$

причем $R(u_0) \neq 0$.

В результате расчета по программе ODE.mcd при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,140938 \quad -2,564241 \quad -2,466128 \quad -0,133009 \quad -1,130778).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$y_5(x) = u_0(x) + 1,140938u_1(x) - 2,564241u_2(x) - 2,466128u_3(x) - 0,133009u_4(x) - 1,130778u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{13} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,0004801,$$

$$\varepsilon_{23} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,004606,$$

$$\varepsilon_{33} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,00003062.$$

4.2. В качестве пробных функций используем функции, полученные в примере 4 раздела 2.5:

$$u_0(x) = 6 - 5x; \quad u_1(x) = e^{-x}; \quad u_2(x) = \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x); \quad u_3(x) = \sin(2\pi x) - 2\pi \cos(2\pi x);$$

$$u_4(x) = \sin(3\pi x) - 3\pi \cos(3\pi x); \quad u_5(x) = \sin(4\pi x) - 4\pi \cos(4\pi x);$$

причем $R(u_0) \neq 0$.

Замечание. Процедуру получения функций вида (2.34) – (2.36) необходимо описать в файле отчета.

В результате расчета по программе ODE.mcd при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (-4,539001 \quad 0,209285 \quad -0,008526 \quad 0,001314 \quad -0,000202).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$y_5(x) = u_0(x) - 4,539001u_1(x) + 0,209285u_2(x) - 0,008526u_3(x) + 0,001314u_4(x) - 0,000202u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{14} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,006344,$$

$$\varepsilon_{24} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,229,$$

$$\varepsilon_{34} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,006182.$$

5. Найдем приближенное решение краевой задачи (2.41) интегральным методом наименьших квадратов.

5.1. В пункте «Получение приближенного решения интегральным методом наименьших квадратов» в качестве пробных функций используем функции вида (2.26), полученные в примере 1 раздела 2.5:

$$u_0(x) = 6 - 5x, \quad u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2, \quad u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3, \\ u_3(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^4, \quad u_4(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^5, \quad u_5(x) = 1 - x + \frac{1}{7}x^6.$$

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,137761 \quad -2,526122 \quad -2,595731 \quad 0,033207 \quad -1,202339).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$y_5(x) = u_0(x) + 1,137761u_1(x) - 2,526122u_2(x) - 2,595731u_3(x) + \\ - 0,033207u_4(x) - 1,202339u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{15} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,0003475,$$

$$\varepsilon_{25} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,009123,$$

$$\varepsilon_{35} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,000023.$$

5.2. В качестве пробных функций используем функции вида (2.29) полученные в примере 3 раздела 2.5:

$$u_0(x) = 6 - 5x, \quad u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2, \quad u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3, \\ u_3(x) = (1-x)^2 x^2, \quad u_4(x) = (1-x)^2 x^3, \quad u_5(x) = (1-x)^2 x^4.$$

Замечание. Процедуру получения функций вида (2.29), необходимо описать в файле отчета.

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (4,207857 \quad -9,361081 \quad -1,023365 \quad -0,337991 \quad -0,171763).$$

Подставив коэффициенты C_k , набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$y_5(x) = u_0(x) + 4,207857u_1(x) - 9,361081u_2(x) - 1,023365u_3(x) - \\ - 0,337991u_4(x) - 0,171763u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{16} = \max_{[a,b]} |y_5(x) - y_4(x)| = 0,0003475,$$

$$\varepsilon_{26} = \max_{[a,b]} |R(C_1, \dots, C_5, x)| = 0,009123,$$

$$\varepsilon_{36} = \max_{[a,b]} |Y(x) - y_5(x)| = 0,000023.$$

2.11. Основные термины

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка, краевые (граничные) условия, краевая задача.

Точное, приближенное, пробное решения уравнения. Невязка пробного решения уравнения.

Пробные и поверочные функции, линейная независимость и ортогональность функций, функциональная последовательность.

Численный метод, алгоритм.

Методы взвешенных невязок: метод Галеркина, метод наименьших квадратов.

Вариационный метод Ритца, функционал.

2.12. Вопросы для самоконтроля

1. Опишите алгоритм решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка аналитическим методом.

2. Каким образом уравнение (2.1) свести к равносильному уравнению типа (2.2)?

3. Найдите решение краевой задачи (2.41) аналитическим методом.

4. Каковы отличия краевой задачи от задачи Коши?

5. Каким условиям должны удовлетворять пробные функции в методе Галеркина?

6. Как находится функция, названная в методе Галеркина невязкой пробного решения?

7. Какими свойствами должны обладать поверочные функции в методе Галеркина?

8. Как в методе Галеркина строится система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов пробного решения? Проверьте истинность формул (2.11), (2.12).

9. В каком случае невязка пробного решения сходится к нулю в среднем при $n \rightarrow \infty$?

10. Опишите алгоритм приближенного решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом Галеркина.

11. В чем основная идея вариационного подхода к решению краевой задачи (2.2), (2.3)?

12. Проверьте правильность данных, представленных в таблице 2.1.

13.Какими свойствами должны обладать пробные функции в методе Ритца?

14.Как в методе Ритца находится невязка пробного решения?

15.Как в методе Ритца строится система алгебраических уравнений для определения коэффициентов пробного решения? Проверьте справедливость соотношений (2.17), (2.18).

16.Опишите алгоритм приближенного решения краевой задачи (2.2),(2.3) методом Ритца.

17.Как в методе наименьших квадратов строится система линейных уравнений для определения параметров пробного решения?

18.Получите самостоятельно развернутый вид условий (2.22), проверив тем самым справедливость формул (2.23), (2.24).

19.Опишите алгоритм приближенного решения краевой задачи (2.1), (2.3) интегральным методом наименьших квадратов.

20.Докажите, что ортогональная на $[a, b]$ система функций, среди которых нет тождественно равной нулю, линейно независима.

21.Приведите пример пробных функций для решения задачи методами Галеркина, Ритца и интегральным методом наименьших квадратов.

22.Приведите пример построения пробных функций методом неопределенных коэффициентов.

23.Напишите два многочлена Лежандра, ортогональные на отрезке $[2; 4]$, и проверьте их ортогональность.

24.Приведите пример задачи на собственные значения (уравнение и краевые условия).

25.Напишите две собственные функции задачи (2.32), (2.33) и проверьте их ортогональность.

26.Приведите физические интерпретации изучаемой краевой задачи.

3. Решение начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения методом Галеркина

3.1. Постановка задачи и алгоритм метода

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу. Требуется в двумерной области

$$D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$L[u(x, t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(x, t)u = g(x, t), \quad (3.1)$$

удовлетворяющее двум краевым (граничным) условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.3)$$

где $K(x, t)$, $K'_x(x, t)$, $\beta(x, t)$, $g(x, t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ – заданные, непрерывные на D функции ($K(x, t) > 0$); a_0, a_1, b_0, b_1 – заданные действительные числа, причем $a_0^2 + a_1^2 > 0$, $b_0^2 + b_1^2 > 0$; $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе с $f'(x)$ и такая, что

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0). \end{cases} \quad (3.4)$$

Напомним, что в такой форме может быть поставлена задача одномерной нестационарной теплопроводности, рассмотренная в разделе 1.1. Например, типичная задача о нестационарной теплопередаче путем теплопроводности в однородном стержне единичной длины, концы которого поддерживаются при температурах T_1 и T_2 , при начальном распределении температуры вдоль стержня по закону

$$T(x, 0) = T_1 + (\sin(\pi x) + x)(T_2 - T_1)$$

получается как частный случай сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = 1, \quad K(x, t) = 1, \quad \beta(x, t) = 0, \quad g(x, t) = 0 \\ a_0 &= 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = T, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = T, \\ f(x) &= (\sin(\pi x) + x)(T_2 - T_1) + T_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (3.1)–(3.4) строится функциональная последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ из пробных решений $u_n(x, t)$ следующим образом.

Задаемся в области D некоторой системой дважды дифференцируемых функций $u_0(x, t), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (3.2), а пробные функции $u_i(x)$ ($i \geq 1$) являются линейно независимыми на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Составляем функцию

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x) \quad (3.7)$$

с неизвестными пока функциями $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$, зависящими только от аргумента t .

Подчеркнем, что в силу линейности условий (3.2) и (3.6), функция (3.7) удовлетворяет условиям (3.2) при любых функциях $v_1(t), \dots, v_n(t)$. Значит, следует так определить $v_i(t)$ ($i \geq 1$) и количество (n) этих функций, чтобы $u_n(x, t)$ из (3.7) удовлетворяла уравнению (3.1) и начальному условию (3.3) с заданной точностью.

Подставляя $u_n(x, t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение (3.1), получаем невязку

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n \frac{dv_k}{dt} u_k(x) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - K(x, t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n v_k u_k'' \right) - \\ & - \frac{\partial K}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n v_k u_k' \right) - \beta(x, t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^n v_k u_k \right) - g(x, t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} R_1(v_1, \dots, v_n, x, t) = & \sum_{k=1}^n u_k \frac{dv_k}{dt} - \sum_{k=1}^n \left(K u_k'' + \frac{\partial K}{\partial x} u_k' + \beta u_k \right) v_k - \\ & - \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя $u_n(x, 0)$, полученную из (3.7) при $t = 0$, в (3.3), находим невязку

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x, 0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x). \quad (3.9)$$

Невязки R_1 и R_2 являются характеристиками отклонения функции (3.7) от точного решения $U(x, t)$ задачи (3.1)–(3.4). Во всяком случае, если при некотором наборе функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$ $R_1 \equiv 0$ и $R_2 \equiv 0$, то функция $u_n(x, t)$ из (3.7) – точное решение $U(x, t)$.

В общем случае эти невязки оказываются отличными от нуля. Поэтому накладываем дополнительные условия на функции $v_k(t)$ и их начальные значения $v_k(0)$ так, чтобы невязки в каком-то смысле были бы наименьшими.

В обобщенном методе Галеркина эти условия определяются системой уравнений:

$$(R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.10)$$

$$(R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.11)$$

где $w_1(x), \dots, w_n(x)$ – заданные линейно независимые на $[a, b]$ поверочные функции и

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x)W(x)dx.$$

Напомним здесь, что если поверочные функции $w_1(x), \dots, w_n(x)$ входят в полную на $[a, b]$ систему функций, то можно ожидать сходимости последовательности $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ в среднем к точному решению $U(x, t)$ [1].

Запишем условия (3.10) в развернутом виде

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial}{\partial x} (Ku'_j) + \beta u_j \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} (u_j, w_k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} (Ku'_j) + \beta u_j, w_k \right) v_j - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k(x) \right) = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj}(t) v_j = b_k(t), \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.12)$$

где

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \quad (3.13)$$

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (Ku'_j) + \beta u_j, w_k \right) = \int_a^b \left(Ku''_j + \frac{\partial K}{\partial x} u'_j + \beta u_j \right) w_k dx, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} b_k(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, w_k(x) \right) = \\ &= \int_a^b \left(K \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k dx, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$A = (a_{kj})_n, \quad C = (c_{kj})_n, \quad B = (b_k)_{n,1}, \quad V = (v_j)_{n,1},$$

то система (3.12) в матричном виде запишется так

$$A \frac{dV}{dt} = CV + B. \quad (3.16)$$

Покажем, что матрица A всегда невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Рассмотрим однородную линейную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\sum_{j=1}^n (u_j, w_k) \lambda_j = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Если $\det A = 0$, то система (3.17) имеет множество ненулевых решений. Пусть одним из таких решений является совокупность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, где, например, $\lambda_m \neq 0$. Подставляя это решение в уравнение системы (3.17), суммируя все получившиеся при этом равенства и используя свойства скалярного произведения, получаем

$$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, w_1 + \dots + w_n) = 0, \quad \lambda_m \neq 0.$$

Так как функции $w_k(x)$ линейно независимы, то $w_1 + \dots + w_n \neq 0$. Значит, должно выполняться тождество $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \equiv 0$, $\lambda_m \neq 0$. Но это невозможно из-за линейной независимости функций u_1, \dots, u_n . Значит, ненулевых решений у системы (3.17) нет, а для этого необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$. Таким образом, матрица A невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу A^{-1} .

Теперь из (3.16) получаем

$$\frac{dV}{dt} = A^{-1}(CV + B). \quad (3.18)$$

Таким образом, функции $v_j(t)$ должны удовлетворять нормальной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка. Заметим, что если функции $K(x, t), \beta(x, t)$ зависят только от x , то система (3.18) – система с постоянными коэффициентами. Заметим так же, что если в качестве проверочных функций выбраны пробные, которые ортогональны, то матрицы A и A^{-1} являются диагональными матрицами.

Запишем теперь в развернутом виде условия (3.11). Получаем

$$\begin{aligned} & \left(u_0(x, 0) + \sum_{j=1}^n v_j(0) u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) + (u_0(x, 0) - f(x), w_k(x)) = 0; \end{aligned}$$

или

$$\sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) = (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)), \quad k = \overline{1, n};$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.19)$$

где a_{kj} определяются формулами (3.13), а

$$d_k = (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0(x, 0)) w_k(x) dx.$$

Если ввести матрицу $D = (d_k)_{n,1}$, то из (3.19) получаем

$$V(0) = A^{-1} D. \quad (3.20)$$

Таким образом, для нахождения функций $V_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, определяющих пробное решение (3.7), получаем задачу Коши для нормальной системы (3.18) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с начальными условиями (3.20). Решив указанную задачу Коши и подставив определяемые этим решением функции $v_k(t)$ в (3.7), заканчиваем построение пробного решения $u_n(x, t)$.

Опишем возможный алгоритм построения приближенного решения задачи (3.1)–(3.3) методом Галеркина, предполагая, что последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ сходится равномерно к точному решению $U(x, t)$.

1. Подготовительный шаг алгоритма. На этом шаге выбираем функцию $u_0(x, t)$ и находим невязку $R_{10}(x, t) = L[u_0] - g(x, t)$ от подстановки функции $u_0(x, t)$ в уравнение (3.1). Находим невязку $R_{20}(x) = u_0(x, 0) - f(x)$ для условия (3.3). Определяем

$$\max_D |R_{10}(x, t)| = \Delta_{10} \text{ и } \max_{[a,b]} |R_{20}(x)| = \Delta_{20}.$$

Если $\Delta_{10} \leq \varepsilon_1$ и $\Delta_{20} \leq \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 заданные меры точности приближенного решения, то полагаем $U(x, t) \simeq u_0(x, t)$. В противном случае переходим к следующему шагу алгоритма, предварительно выбрав $u_j(x)$ и проверочные $w_k(x)$ функции.

2. Первый шаг алгоритма. Определив функцию $v_1(t)$ из решения задачи Коши (3.18), (3.20) при $n = 1$, строим функции $u_1(x, t) = u_0 + v_1(t)u_1(x)$. Находим по формулам (3.8), (3.9) невязки $R_{11}(v_1(t), x, t)$, $R_{21}(v_1(0), x)$ и определяем $\max_D |R_{11}(v_1, x, t)| = \Delta_{11}$ и $\max_{[a,b]} |R_{21}(v_1(0), x)| = \Delta_{21}$. Если $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$ и $\Delta_{21} \leq \varepsilon_2$, то полагаем $U(x, t) \simeq u_1(x, t)$, и вычисления заканчиваем. В противном случае переходим к вычислениям на втором шаге алгоритма и т. д.

Таким образом, на m -ом ($m \geq 1$) шаге алгоритма строим функцию

$$u_m(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^m v_k(t) u_k(x),$$

определив предварительно функции $v_1(t), \dots, v_m(t)$ из решения задачи Коши (3.18), (3.20) при $n = m$. Находим по формулам (3.8), (3.9) невязки

$$R_{1m}(v_1(t), \dots, v_m(t), x, t), \quad R_{2m}(v_1(0), \dots, v_m(0), x),$$

а затем вычисляем

$$\max_D |R_{1m}(v_1(t), \dots, v_m(t), x, t)| = \Delta_{1m} \text{ и } \max_{[a,b]} |R_{2m}(v_1(0), \dots, v_m(0), x)| = \Delta_{2m}.$$

Если $\Delta_{1m} \leq \varepsilon_1$ и $\Delta_{2m} \leq \varepsilon_2$, то полагаем $U(x, t) \simeq u_m(x, t)$, в противном случае переходим к $(m + 1)$ -му шагу алгоритма.

3.2. О построении функции $u_0(x, t)$

Пробные и проверочные функции можно выбирать так же или такими же методами, как описано в предыдущей главе.

Поэтому обсудим здесь только возможность построения функции $u_0(x, t)$ в виде многочлена относительно x с коэффициентами, зависящими от t , и рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих эту возможность.

Например, положив $u_0(x, t) = A(t)$, из условий (3.2) получаем систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} a_0 A(t) = a_2(t), \\ b_0 A(t) = b_2(t), \end{cases}$$

и если $a_0 b_2 \equiv b_0 a_2$, то система совместна и $A(t) = \frac{a_2(t)}{a_0}$. Если же $a_0 b_2 \not\equiv b_0 a_2$, то

система несовместна, и ищем $u_0(x, t)$ в виде

$$u_0(x, t) = A(t) + B(t) \cdot x = P_1(x, t).$$

Для определения $A(t)$ и $B(t)$ из условий (3.2) получаем систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} a_0 \cdot A(t) + (a_0 a + a_1) \cdot B(t) = a_2(t), \\ b_0 \cdot A(t) + (b_0 b + b_1) \cdot B(t) = b_2(t); \end{cases}$$

которую можно исследовать, используя теорему Кронекера-Капелли, как линейную неоднородную алгебраическую систему относительно неизвестных функций $A(t)$ и $B(t)$.

Если $\delta_1 = a_0(b_0 b + b_1) - b_0(a_0 a + a_1) \neq 0$, то система совместна и определена при этом

$$A(t) = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_0 a + a_1 \\ b_2 & b_0 b + b_1 \end{vmatrix}}{\delta_1}, \quad B(t) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\delta_1},$$

и функция $u_0(x, t) = P_1(x, t)$ определяется однозначно. Если $\delta_1 = 0$, то система несовместна, и ищем $u_0(x, t)$ в виде

$$u_0(x, t) = A(t) + B(t) \cdot x + C(t) \cdot x^2 = P_2(x, t).$$

Для определения $A(t)$ и $B(t)$ из условий (3.2) получаем систему

$$\begin{cases} a_0 \cdot A(t) + (a_0 a + a_1) \cdot B(t) + (a_0 a^2 + 2a_1 a) \cdot C(t) = a_2(t), \\ b_0 \cdot A(t) + (b_0 b + b_1) \cdot B(t) + (b_0 b^2 + 2b_1 b) \cdot C(t) = b_2(t); \end{cases}$$

если $\delta_2 = a_0(b_0 b^2 + 2b_1 b) - b_0(a_0 a^2 + 2a_1 a) \neq 0$, то система совместна и неопределена, причем $B(t)$ можно придавать произвольные значения. Если $\delta_2 = 0$, то система несовместна, и ищем $u_0(x, t)$ в виде

$$u_0(x, t) = A(t) + B(t) \cdot x + C(t) \cdot x^2 + D(t) \cdot x^3 = P_3(x, t).$$

Условия (3.2) приводят к системе

$$\begin{cases} a_0 \cdot A(t) + (a_0 a + a_1) \cdot B(t) + (a_0 a^2 + 2a_1 a) \cdot C(t) + (a_0 a^3 + 3a_1 a^2) \cdot D(t) = a_2(t), \\ b_0 \cdot A(t) + (b_0 b + b_1) \cdot B(t) + (b_0 b^2 + 2b_1 b) \cdot C(t) + (b_0 b^3 + 3b_1 b^2) \cdot D(t) = b_2(t). \end{cases}$$

Покажем, что это система всегда совместна и, следовательно, неопределена. Для этого надо доказать, что для любых значений параметров a, b, a_0, b_0, a_1, b_1 не могут выполняться все условия несовместности, отмеченные выше, одновременно

$$\begin{cases} a_0(b_0 b + b_1) - b_0(a_0 a + a_1) = 0, \\ a_0(b_0 b^2 + 2b_1 b) - b_0(a_0 a^2 + 2a_1 a) = 0, \\ a_0(b_0 b^3 + 3b_1 b^2) - b_0(a_0 a^3 + 3a_1 a^2) = 0, \\ a_0 b_2 \neq b_0 a_2. \end{cases}$$

Введем обозначения $x_1 = a_0 b_0$, $x_2 = a_0 b_1$, $x_3 = -b_0 a_1$ и заметим, что, в силу ограничений на параметры $(a_0^2 + a_1^2 > 0, b_0^2 + b_1^2 > 0)$ и последнего из выписанных условий несовместности, переменные x_1 , x_2 и x_3 одновременно в ноль обратиться не могут. Тогда первые три условия несовместности можно записать в виде линейной однородной системы относительно x_1 , x_2 и x_3

$$\begin{cases} (b - a) \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (b^2 - a^2) \cdot x_1 + 2bx_2 + 2ax_3 = 0, \\ (b^3 - a^3) \cdot x_1 + 3b^2 x_2 + 3a^2 x_3 = 0, \end{cases}$$

которая должна иметь ненулевое решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель третьего порядка

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} b - a & 1 & 1 \\ b^2 - a^2 & 2b & 2a \\ b^3 - a^3 & 3b^2 & 3a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее невозможно, так как $\delta_3 = (b - a)^4$ и $a \neq b$.

Таким образом, при любых значениях параметров a, b, a_0, a_1, b_0, b_1 всегда найдется хотя бы одна функция вида $u_0(x, t) = P_3(x, t)$, удовлетворяющая условиям (3.2).

Пример 1. Построить $u_0(x, t)$ для задачи с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0, t) + \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t, \\ u(1, t) + \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -4t. \end{cases} \quad (3.21)$$

Решение. Пусть $u_0(x, t) = A(t)$, тогда условия (3.21) дают

$$\begin{cases} A(t) = t, \\ A(t) = -4t; \end{cases} \Rightarrow 5t \equiv 0,$$

т. е. – несовместную систему. Если теперь $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x$, то условия (3.21) приводят к системе

$$\begin{cases} A(t) + B(t) = t, \\ A(t) + 2B(t) = -4t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) = 6t, \\ B(t) = -5t. \end{cases}$$

Следовательно, в качестве функции $u_0(x, t)$ можно взять функцию $u_0(x, t) = (6 - 5x)t$.

Пример 2. Построить функцию $u_0(x, t)$ для задачи с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0, t) + \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = e^{-t}, \\ u(2, t) - \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = 2e^{-2t}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Решение. Пусть $u_0(x, t) = A(t)$, тогда условия (3.22) дают

$$\begin{cases} A(t) = e^{-t}, \\ A(t) = 2e^{-2t}; \end{cases} \Rightarrow e^{-t} - 2e^{-2t} \equiv 0,$$

т. е. – несовместную систему. Если теперь $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x$, то условия (3.22) приводят также к несовместной системе

$$\begin{cases} A(t) + B(t) = e^{-t}, \\ A(t) + B(t) = 2e^{-2t}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Полагая $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x + C(t)x^2$, снова получаем несовместную систему (3.23). Ищем поэтому $u_0(x, t)$ в виде $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x + C(t)x^2 + D(t)x^3$. Из условий (3.22) имеем

$$\begin{aligned} & \begin{cases} A(t) + B(t) = e^{-t}, \\ A(t) + 2B(t) + 4C(t) + 8D(t) - B(t) - 4C(t) - 12D(t) = 2e^{-2t}; \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} A(t) + B(t) = e^{-t}, \\ A(t) + B(t) - 4D(t) = 2e^{-2t}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) + B(t) = e^{-t}, \\ -4D(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили совместную систему. Одним из решений ее будет, например, следующая совокупность функций $A(t) = e^{-t}$, $B(t) = 0$, $C(t) = 0$, $D(t) = -0,5e^{-2t} + 0,25e^{-t}$.

Таким образом, $u_0(x, t) = e^{-t} + (0,25e^{-t} - 0,5e^{-2t})x^3$.

Пример 3. Построить $u_0(x, t)$ и систему из пяти пробных функций для задачи с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0, t) = c_2 = \text{const}, \\ u(l, t) = c_3 = \text{const}, \quad c_2 \neq c_3. \end{cases} \quad (3.24)$$

Решение. Если $u_0(x) = A$, то получаем из (3.24) несовместную систему

$$\begin{cases} A = c_2, \\ A = c_3. \end{cases}$$

Если $u_0(x) = A + Bx$, то условия задачи (3.24) дают

$$\begin{cases} A = c_2, \\ A + lB = c_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = c_2, \\ B = \frac{c_3 - c_2}{l}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u_0(x) = c_2 + \frac{x}{l}(c_3 - c_2).$$

Построим систему пробных функций вида (2.28) для задачи с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(l) = 0. \end{cases}$$

Так как $n_1 + n_2 = 2$, то отыскиваем все многочлены порядка меньше 2, удовлетворяющие краевым условиям. Если $u_1 = A$ или $u_1 = A + Bx$, то однородные условия выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за требования линейной независимости пробных функций. Поэтому в качестве пробных функций можно взять

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x(x-l), \quad u_2(x) = x^2(x-l), \quad u_3(x) = x^3(x-l), \\ u_4(x) &= x^4(x-l), \quad u_5(x) = x^5(x-l). \end{aligned}$$

3.3. Задание к лабораторной работе

Рассматривается начально-краевая задача: в двумерной области

$$D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

найти решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.25)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = c_2, \quad u(l, t) = c_3; \quad (3.26)$$

$$u(x,0) = f(x) = c_4 x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 l^2}{l} x + c_2; \quad (3.27)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные величины.

Заметим, что эта задача получается как частный случай задачи (3.1)–(3.3) при $a=0$, $b=l$, $K(x,t) \equiv c_1$, $\beta(x,t) \equiv 0$, $g(x,t) \equiv 0$, $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=c_2$, $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=c_3$.

Варианты заданий, определяемые различными наборами значений постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 задачи (3.25)–(3.27) и параметра T , приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Варианты задания к лабораторной работе

№	l	c_1	c_2	c_3	c_4	T
1	π	0,1	1	3	1	1
2	$0,5\pi$	0,2	2	4	– 1	1
3	$0,25\pi$	0,4	3	5	1	1
4	π	0,1	3	1	– 1	1
5	$0,5\pi$	0,2	4	2	1	1
6	$0,25\pi$	0,4	5	3	– 1	1
7	π	0,3	1	2	1	1
8	$0,5\pi$	0,5	2	3	– 1	1
9	$0,25\pi$	0,6	4	5	1	1
10	π	0,7	1	4	– 1	1

Лабораторная работа выполняется с использованием прикладной системы MathCAD, которая реализует алгоритм построения пробных решений $u_m(x,t)$ задачи (3.25)–(3.27) методом Галеркина.

Перед обращением к программе необходимо подготовить числовые и строчные данные.

Числовые данные:

l – правый конец отрезка изменения переменной x ;

c_1, c_2, c_3, c_4 – числовые параметры задачи (3.25)–(3.27);

n – число параметров C_1, \dots, C_n в пробном решении (значение параметра n задает преподаватель);

T – значение параметра T задачи.

Строчные данные:

аналитические выражения для функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$;

аналитические выражения для поверочных функций $w_1(x), \dots, w_n(x)$.

После введения числовых и строчных данных программа автоматически производит расчет значений $v_1(T), \dots, v_n(T)$, построение графиков разности пробного решения и точного решения, разности пробного решения и

предыдущего пробного решения, таблиц невязок $R_1(x, T)$ и $R_2(x)$, на основании которых определяются меры точности полученного решения.

В лабораторной работе требуется:

1. Методом Фурье (методом разделения переменных) найти точное аналитически заданное решение $U(x, t)$ задачи (3.25)–(3.27) и построить график точного решения при $t = T$, т. е. функцию $v(x) = U(x, T)$.
2. Методом Галеркина найти три пробных решения $u_n(x, T)$, используя нормированные системы пробных и поверочных функций, тип которых задает преподаватель.
3. Определить меры точности полученных решений. Сделать вывод о точности решений и записать лучшее из них.
4. Оформить и защитить отчет.

3.4. Выполнение работы в компьютерном классе

1. Прежде чем начать выполнение лабораторной работы на ЭВМ, внимательно ознакомьтесь с данной инструкцией.

2. При необходимости включите сами (или попросите лаборанта) питание компьютера. После того, как система загрузится, запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Mathcad, если же ярлык отсутствует, тогда открываем программу через кнопку «Пуск» (Программы → Mathsoft → Mathcad).

3. Узнайте у лаборанта расположение файла Parab.mcd и откройте его (File → Open или, если программа русифицирована, Файл → Открыть). При любой ошибке ввода программы нужно обратиться к лаборанту.

4. Прочитайте в начале файла задание на лабораторную работу и просмотрите пример выполнения работы, для которого исследование уже проведено. Программа файла Parab.mcd состоит из четырех пунктов «Постановка задачи», «Получение точного решения», «Получение приближенного решения», «Выводы». Цели и задачи каждого из пунктов описаны ниже.

5. Для набора функций нужно либо воспользоваться всплывающим меню инструментов «Calculator», либо ввести ее с клавиатуры, используя следующие символы арифметических действий и стандартных функций: сложение – ‘+’; вычитание – ‘-’; умножение – ‘*’; деление – ‘/’; возведение в степень – ‘^’; квадратный корень – ‘\’; синус – $\sin(x)$; косинус – $\cos(x)$; экспонента – $\exp(x)$; натуральный логарифм – $\ln(x)$. При вводе числовых данных, являющихся десятичными дробями, целую и дробную части нужно разделять точкой (например, 0.5, 1.5 и т. д.).

6. Порядок выполнения работы Вам укажет программа подсказками и заданиями, выделенными красным цветом.

7. Для формирования файла отчета запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Microsoft Word, если же ярлык отсутствует, то открываем программу через кнопку «Пуск». Открываем новый документ. В начале документа необходимо оформить титульный лист, описать математическую постановку задачи и результаты выполнения подготовительных расчетов. Затем скопировать основные результаты расчетов из программы Parab.mcd в документ и оформить итоговый отчет. Копирование – ‘Ctrl’+‘Insert’, вставка – ‘Shift’+‘Insert’. Сохранить документ как «ФамилияСтудента_группа_Parab.doc» и распечатать. Файл отчета оформить аналогично приложению А, описывающему выполнение лабораторной работы №1.

3.5. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Повторить главу 1. Изучить разделы 3.1–3.6 данной главы и подготовить ответы на контрольные вопросы из раздела 3.9.

2. Пройти собеседование с преподавателем, получить допуск к выполнению работы на ЭВМ, номер варианта задания, значение параметра n и указания по выбору пробных и поверочных функций.

3. Выполнить первый пункт задания, связанный с построением ряда Фурье для точного решения задачи $U(x, t)$ и нахождением длины отрезка этого ряда, обеспечивающую точность решения 0,001.

4. Выполнить подготовительный шаг алгоритма метода Галеркина и, если $u_0(x)$ не является точным решением задачи, подготовить все числовые и строчные данные для расчетов и в пункте «Постановка задачи» программы Parab.mcd ввести их вместо данных примера, введенных изначально.

5. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число, намного превышающее найденное в 3-м пункте число слагаемых в разложении точного решения в тригонометрический ряд Фурье (чтобы гарантировать достаточную точность решения и в дальнейшем считать его точным). Скопировать график получившегося точного решения $U(x, T)$ в файл отчета.

6. В пункте «Получение приближенного решения» рассмотрено применение трех систем пробных и поверочных функций. По заданию преподавателя ввести (вместо уже введенных для примера) системы пробных $V_1(k, x)$ и поверочных $W(k, x)$ функций, указанных во 2-м пункте (см. раздел 3.6). Выполнить построение n -го пробного решения задачи. Следует скопировать в файл отчета вектор коэффициентов $v_k(T)$ (элементы вектора $Y_{100,k}$ программы) пробных решений и набрать в отчете решение с этими коэффициентами. Так же необходимо скопировать в этот файл пункт «Выводы».

7. Оформить и распечатать файл отчета по лабораторной работе, который должен содержать титульный лист, математическую постановку задачи и ее физическую интерпретацию, результаты выполнения подготовительных

расчетов, основные результаты расчетов на ЭВМ, выводы о возможностях использованных систем пробных и поверочных функций и наиболее приближенное к точному аналитическое решение.

8. Защитить отчет.

3.6. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример

В данном пункте приведен текст программы Parab.mcd, разработанной для решения начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения методом Галеркина. В тексте разбирается получение значений пробного решения $u_5(x, t)$ при $t = 1$ задачи: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в области

$$D = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1\}$$

уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

и условиям

$$u(0, t) = 1, \quad u(\pi, t) = 2, \quad (3.29)$$

$$u(x, 0) = f(x) = 1 + \left(\frac{1}{\pi} - \pi \right) x + x^2 = 1 - 2.8233x + x^2. \quad (3.30)$$

Задача (3.28)–(3.30) является частным случаем задачи (3.25)–(3.27) при $c_1 = 0,1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$, $t = T = 1$.

Использовать три системы пробных и поверочных функций:

1. Пробные и поверочные функции – многочлены (2.28);
2. Пробные функции – многочлены (2.28), поверочные функции – многочлены Лежандра (2.31);
3. Пробные и поверочные функции – тригонометрические функции $\sin(2k - 1)x$.

Лабораторная работа

«Решение начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения методом Галеркина»

Задание на лабораторную работу

1. В пункте «Постановка задачи» ввести вместо данных примера непрерывные функции уравнения $K(x)$ ($K > 0$), $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи a , b , a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 своего варианта.

2. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число слагаемых в разложении решения в ряд, намного превышающее найденное аналитически число, обеспечивающее точность решения 0.001. Скопировать график полученной интегральной кривой в файл отчета.

3. В пункте «Получение приближенного решения» выполнить построение n -го пробного решения задачи тремя системами пробных и поверочных

функций. Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов $Y_{100,k}$ пробного решения и набрать в отчете решение с этими коэффициентами при $t=T$.

4. Скопировать результаты пункта «Выводы» в файл отчета, и, анализируя их, сделать в файле отчета выводы о точности построенных решений.

Постановка задачи

Требуется в двумерной области $D=\{(x, t) \mid a \leq x \leq b, t \geq 0\}$ найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}U - K(x, t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - \frac{d}{dx}K(x, t) \cdot \frac{d}{dx}U - \beta(x, t) \cdot U = g(x, t)$$

удовлетворяющее двум краевым условиям

$$a0 \cdot U(a, t) + a1 \cdot \frac{d}{dx}U(a, t) = a2(t)$$

$$b0 \cdot U(b, t) + b1 \cdot \frac{d}{dx}U(b, t) = b2(t)$$

и начальному условию

$$U(x, 0) = f(x)$$

Рассмотрим случай, когда функции K , β , g , $a2$, $b2$ не зависят от t .

Введите непрерывные функции уравнения $K(x)$ ($K>0$), $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$ и числовые параметры задачи a , b , $a0$, $a1$, $a2$, $b0$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$, $c3$, $c4$

$$c1 := 0.1 \quad c2 := 1 \quad c3 := 2 \quad c4 := 1$$

$$K(x) := c1 \quad \beta(x) := 0 \quad g(x) := 0$$

$$a := 0 \quad b := \pi$$

$$a0 := 1 \quad a1 := 0 \quad a2 := c2 \quad b0 := 1 \quad b1 := 0 \quad b2 := c3$$

$$f(x) := c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c2$$

то есть

$$f(x) \rightarrow x^2 + \frac{(1 - \pi^2)}{\pi} \cdot x + 1$$

Проверим соответствие граничных и начальных условий

$$\text{if} \left[a0 \cdot f(a) + a1 \cdot \left(\frac{d}{da} f(a) \right) = a2, "Yes", "No" \right] = "Yes"$$

$$\text{if} \left[b0 \cdot f(b) + b1 \cdot \left(\frac{d}{db} f(b) \right) = b2, "Yes", "No" \right] = "Yes"$$

Если хотя бы одно условие не выполняется ($= "No"$), то задача поставлена не корректно.

Введите конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование для вашего варианта

$$T := 1$$

Получение точного решения

Найдем точное решение $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x) = 0, \gamma(x) = 0, K(x) = c1 = \text{const}$, то решение имеет вид

$$U(x, t) = U0(x, t) + \sum_{k=1}^M A_k \cdot e^{-c1 \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin\left(\frac{k \pi x}{b-a}\right).$$

Введите число слагаемых, обеспечивающих достаточно большую точность решения (для примера $M=3$ обеспечивает точность 0,001, поэтому возьмем число, намного превышающее данное, например, $M=30$)

$$M := 30$$

Если $a1=0, b1=0$, то функцию $U0(x, t)$ можно взять в виде

$$U0(x) := \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} \quad U0(x) \rightarrow 1 + \frac{x}{\pi}$$

Вычислим коэффициенты A_k

$$i := 1..M$$

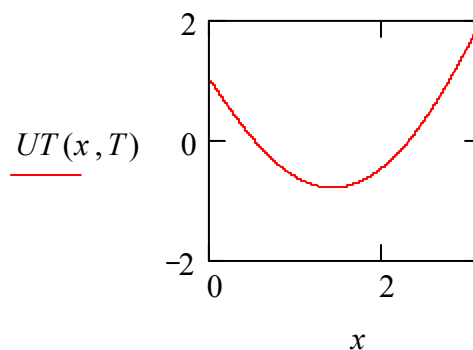
$$A2_{i-1} := \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx$$

$$f(x) - U0(x) \rightarrow x^2 + \frac{(1 - \pi^2)}{\pi} \cdot x - \frac{x}{\pi}$$

Следовательно, точное решение $U(x, t)$ имеет вид

$$UT(x, t) := U0(x) + \sum_{k=1}^M A2_{k-1} \cdot e^{-c1 \cdot \frac{k^2 \cdot \pi^2}{(b-a)^2} t} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{b-a}\right)$$

График точного решения при $t=T$



Скопируйте график полученной интегральной кривой в файл отчета.

Получение приближенного решения

Введите порядок пробного решения $U_n = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) H(k, t).$

$n := 5$

1. Введите систему пробных функций:

$k := 1 .. n$

$$V0(k, x) := (x - a)^k \cdot (x - b)$$

Нормируем их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты

$i := 1 .. 6$

$$VV_{i-1} := \sqrt{\int_a^b (V0(i, x))^2 dx}$$

Получили нормированные пробные функции

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{V0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

Введите функции $V1(k, x)$ и $V2(k, x)$, равные первой и второй производной от функции $V(k, x)$

$k := 1 .. n$

$$V1(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(x - a)^k + (x - b) \cdot k \cdot (x - a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \text{if} \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x - a)^{k-1} + (x - b) \cdot k \cdot (k - 1) \cdot (x - a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right]$$

Введите систему проверочных функций:

$$W(k, x) := V(k, x)$$

т.е. для примера в качестве проверочных возьмем пробные функции.

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$A \cdot \frac{d}{dt} H = C \cdot H + B$ для отыскания функций $H_k(t)$ с начальными условиями

$$A \cdot H(0) = D1:$$

$i := 1 .. n$

$$B_{i-1} := \int_a^b \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \cdot W(i, x) dx$$

$i := 1 .. n \quad j := 1 .. n$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$C_{i-1,j-1} := \int_a^b \left[K(x) \cdot V2(j,x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(j,x) + \beta(x) \cdot V(j,x) \right] \cdot W(i,x) dx$$

$i := 1..n$

$$Dl_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0,x)) \cdot W(i,x) dx$$

Приведем систему к виду $\frac{d}{dt}H = A1 \cdot H + B1$ с начальными условиями

$$H(0) = D2$$

$$A1 := A^{-1} \cdot C \quad B1 := A^{-1} \cdot B \quad D2 := A^{-1} \cdot D1$$

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H := D2$$

$$D(t,H) := A1 \cdot H + B1$$

$$Y := rkfixed(H,0,T,100,D)$$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

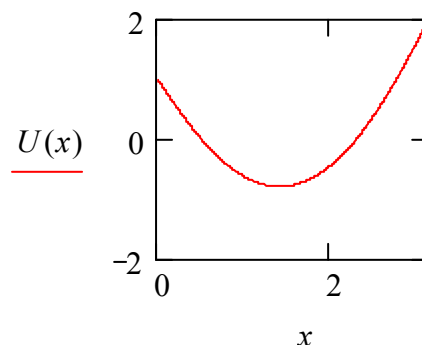
$$Y_{100,k} = \begin{pmatrix} 2.454 \\ 1.5038 \\ -2.1978 \\ 1.7511 \\ -0.665 \end{pmatrix}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$ наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x,1)=U_0(x)+2.454U_1(x)+1.504U_2(x)-2.198U_3(x)+1.751U_4(x)-0.665U_5(x)$.

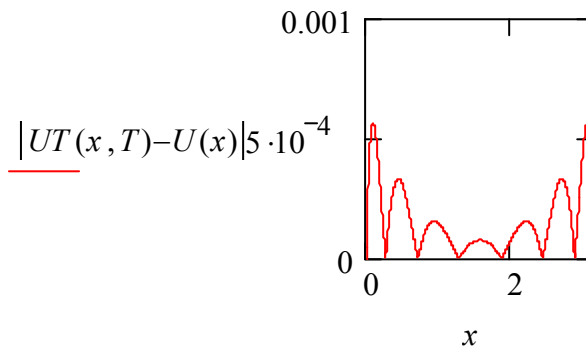
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0,x) + \sum_{k=1}^n V(k,x) \cdot Y_{100,k}$$

График пробного решения



Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{11} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$ (для этого необходимо кликнуть мышью по графику, где в левом верхнем углу появится наибольшее значение, скопировать это значение и заменить на него уже имеющееся ниже значение ε_{11})

$$\varepsilon_{11} := 5.639 \times 10^{-4}$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$DIP := \text{submatrix}(DI, 0, n-2, 0, 0)$$

$$AIP := AP^{-1} \cdot CP$$

$$HP := AP^{-1} \cdot DIP$$

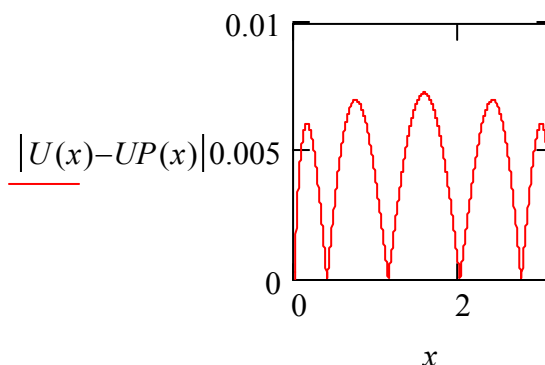
$$D(t, HP) := AIP \cdot HP$$

$$YP := \text{rkfixed}(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100, k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t = T$



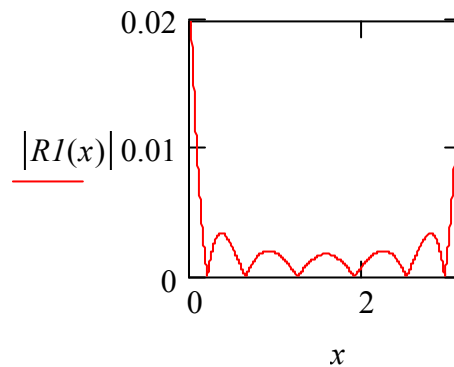
Замените старое значение меры точности ε_{21} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{21} := 7.272 \times 10^{-3}$$

Найдем невязки полученного пробного решения.

При $t=T$ получим невязку

$$R1(x) := \sum_{k=1}^n \left(V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n A1_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, z} \right) - \sum_{k=1}^n \left[K(x) \cdot V2(k, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(k, x) + \right. \\ \left. + \beta(x) \cdot V(k, x) \right] \cdot Y_{100, k} - \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right)$$

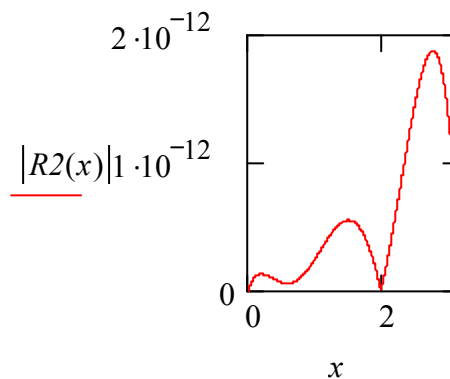


Замените старое значение меры точности $\varepsilon 3l$ наибольшим значением $|R1(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 3l := 0.019$$

При $t=0$ получим невязку

$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 4l$ наибольшим значением $|R2(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 4l := 1.871 \times 10^{-12}$$

2. Введите систему пробных и поверочных функций (для примера в качестве пробных функций возьмем функции пункта 1, а поверочными функциями возьмем многочлены Лежандра):

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{V0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$$k := 1..n$$

$$\begin{aligned}
V1(k, x) &:= \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} \right] \\
V2(k, x) &:= \text{if} \left[k \neq 0, \text{if} \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} + (x-b) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x-a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right] \\
P(k, t) &:= \text{if} \left[k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right] \\
W(k, x) &:= \frac{P \left[k-1, \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]}{\sqrt{\int_a^b \left[P \left[k-1, \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right] \right]^2 dx}}
\end{aligned}$$

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$A \cdot \frac{d}{dt} H = C \cdot H + B$ для отыскания функций $H_k(t)$ с начальными условиями

$$A \cdot H(0) = D1$$

$$i := 1 .. n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1 .. n \quad j := 1 .. n$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$C_{i-1, j-1} := \int_a^b \left[K(x) \cdot V2(j, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(j, x) + \beta(x) \cdot V(j, x) \right] \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1 .. n$$

$$D1_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx$$

Приведем систему к виду $\frac{d}{dt} H = A1 \cdot H + B1$ с начальными условиями $H(0) = D2$

$$A1 := A^{-1} \cdot C$$

$$B1 := A^{-1} \cdot B$$

$$D2 := A^{-1} \cdot D1$$

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H := D2$$

$$D(t, H) := A1 \cdot H + B1$$

$$Y := rkfixed(H, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

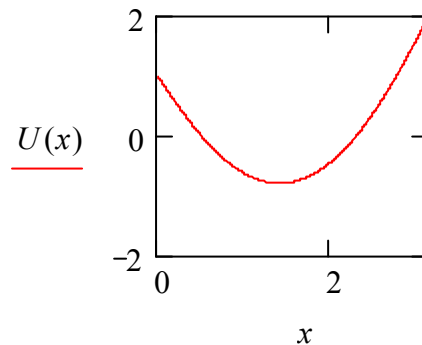
$$Y_{100,k} = \begin{pmatrix} 2.4678 \\ 1.4224 \\ -2.0088 \\ 1.5563 \\ -0.591 \end{pmatrix}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$ наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x,1)=U_0(x)+2.4678U_1(x)+1.4224U_2(x)-2.0088U_3(x)+1.5563U_4(x)-0.591U_5(x)$.

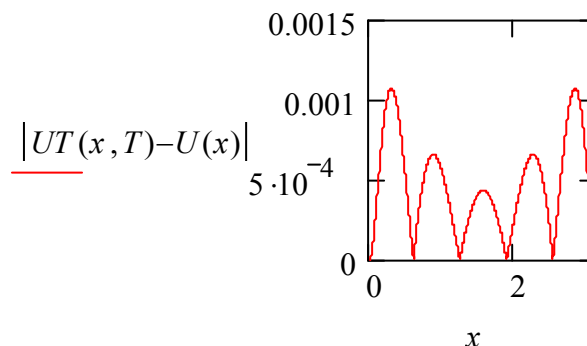
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100,k}$$

График пробного решения



Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{l2} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{l2} := 1.072 \times 10^{-3}$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$DIP := \text{submatrix}(DI, 0, n-2, 0, 0)$$

$$AIP := AP^{-1} \cdot CP$$

$$HP := AP^{-1} \cdot DIP$$

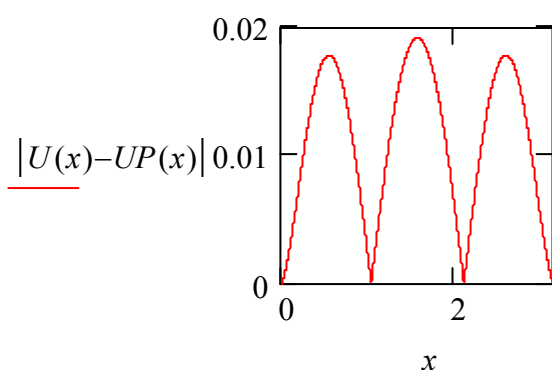
$$D(t, HP) := AIP \cdot HP$$

$$YP := \text{rkfixed}(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100, k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t = T$



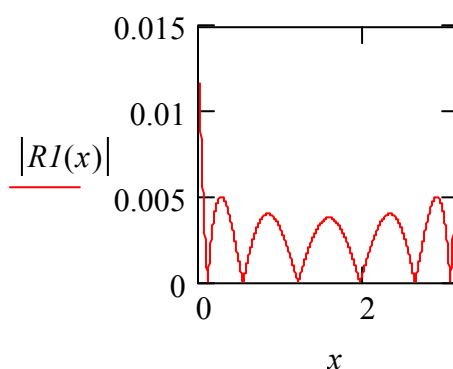
Замените старое значение меры точности ε_{22} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{22} := 0.019$$

Найдем невязки полученного пробного решения.

При $t = T$ получим невязку

$$R1(x) := \sum_{k=1}^n \left(V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n A1_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, z} \right) - \sum_{k=1}^n \left[K(x) \cdot V2(k, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(k, x) + \right. \\ \left. + \beta(x) \cdot V(k, x) \right] \cdot Y_{100, k} - \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right)$$

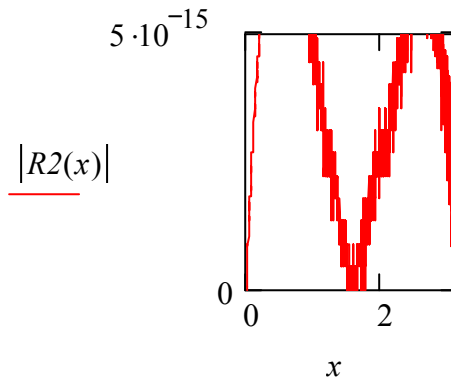


Замените старое значение меры точности ε_{32} наибольшим значением $|R1(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{32} := 0.012$$

При $t=0$ получим невязку

$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{42} наибольшим значением $|R2(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{42} := 7.55 \times 10^{-15}$$

3. Введите систему пробных и поверочных функций (для примера в качестве пробных и поверочных функций возьмем систему тригонометрических функций):

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{\sin \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} \right]$$

$$k := 1..n$$

$$V1(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \cos \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} \right]$$

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, -\frac{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2 \cdot \sin \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, 0 \right]$$

$$W(k, x) := V(k, x)$$

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$A \cdot \frac{d}{dt}H = C \cdot H + B$ для отыскания функций $H_k(t)$ с начальными условиями

$$A \cdot H(0) = D1$$

$$i := 1 .. n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \frac{d}{dx} K(x) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right) \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1 .. n$$

$$j := 1 .. n$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$C_{i-1, j-1} := \int_a^b \left[K(x) \cdot V2(j, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(j, x) + \beta(x) \cdot V(j, x) \right] \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1 .. n$$

$$D1_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx$$

Приведем систему к виду $\frac{d}{dt}H = A1 \cdot H + B1$ с начальными условиями

$$H(0) = D2$$

$$A1 := A^{-1} \cdot C$$

$$B1 := A^{-1} \cdot B$$

$$D2 := A^{-1} \cdot D1$$

Найдем решение получившейся системы дифференциальных уравнений:

$$H := D2$$

$$D(t, H) := A1 \cdot H + B1$$

$$Y := rkfixed(H, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

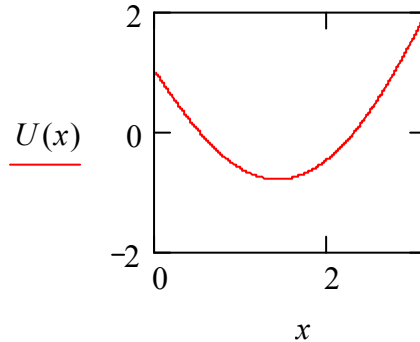
$$Y_{100, k} = \begin{pmatrix} -2.8878 \\ -0.0481 \\ -2.0958 \times 10^{-3} \\ -6.9289 \times 10^{-5} \\ -1.3289 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$ наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x,1)=U_0(x)-2.8878U_1(x)-0.0481U_2(x)-0.0021U_3(x)-0.000069U_4(x)-0.000001U_5(x)$.

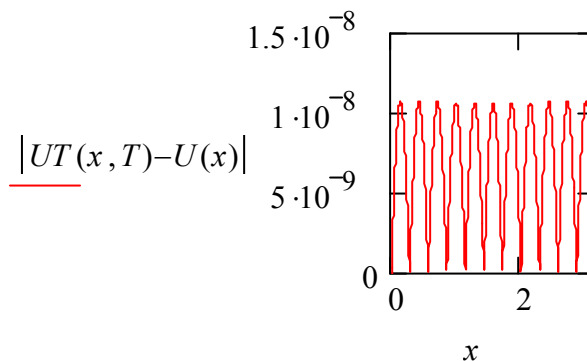
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100, k}$$

График пробного решения



Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{13} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{13} := 1.068 \times 10^{-8}$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$DIP := \text{submatrix}(DI, 0, n-2, 0, 0)$$

$$AIP := AP^{-1} \cdot CP$$

$$HP := AP^{-1} \cdot DIP$$

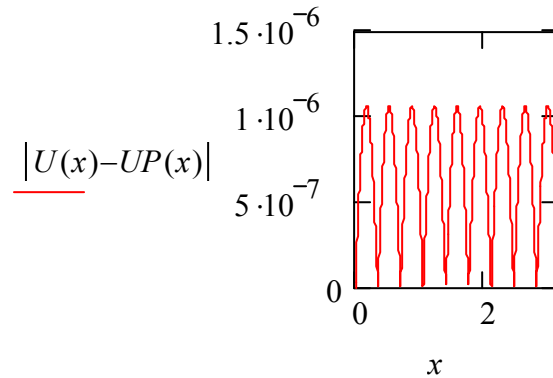
$$D(t, HP) := AIP \cdot HP$$

$$YP := \text{rkfixed}(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100, k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t=T$



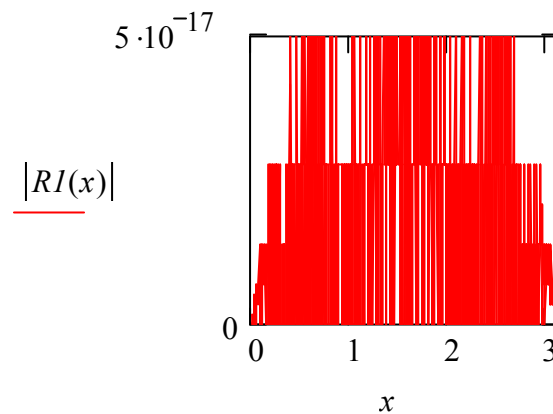
Замените старое значение меры точности ε_{23} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{23} := 1.06 \times 10^{-6}$$

Найдем невязки полученного пробного решения.

При $t=T$ получим невязку

$$R1(x) := \sum_{k=1}^n \left(V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n A1_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, z} \right) - \sum_{k=1}^n \left[K(x) \cdot V2(k, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(k, x) + \right. \\ \left. + \beta(x) \cdot V(k, x) \right] \cdot Y_{100, k} - \left(K(x) \cdot V2(0, x) + \left(\frac{d}{dx} K(x) \right) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x) \right)$$

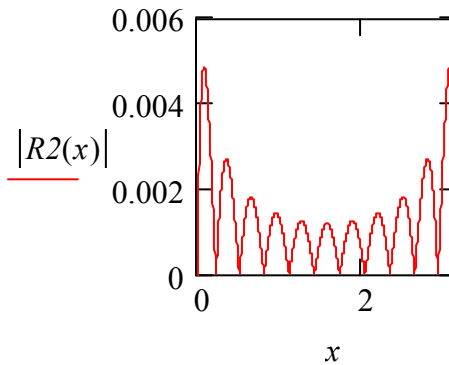


Замените старое значение меры точности ε_{33} наибольшим значением $|R1(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{33} := 5 \times 10^{-17}$$

При $t=0$ получим невязку

$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{43} наибольшим значением $|R_2(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{43} := 4.852 \times 10^{-3}$$

Выводы

Таким образом, при $n = 5$ получаем следующие результаты использования трех систем пробных и поверочных функций при $t=T$

	$\max U(x,T)-u_n(x,T) $	$\max u_n(x,T)-u_{n-1}(x,T) $	$\max R1_n(x,T) $	$\max R2_n(x) $
1.	$\varepsilon_{11} = 0.000564$	$\varepsilon_{21} = 0.007272$	$\varepsilon_{31} = 0.019$	$\varepsilon_{41} = 1.871 \times 10^{-12}$
2.	$\varepsilon_{12} = 0.001072$	$\varepsilon_{22} = 0.019$	$\varepsilon_{32} = 0.012$	$\varepsilon_{42} = 7.55 \times 10^{-15}$
3.	$\varepsilon_{13} = 1.068 \times 10^{-8}$	$\varepsilon_{23} = 1.06 \times 10^{-6}$	$\varepsilon_{33} = 0$	$\varepsilon_{43} = 0.004852$

Сделайте вывод о точности трех полученных решений и запишите лучшее из них. (В примере третья система пробных и поверочных тригонометрических функций дает лучшее приближение решения дифференциального уравнения.)

3.7. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера

Выполним расчетную часть лабораторной работы. Найдем решение $u(x, t)$ при $t=1$ задачи (3.28) – (3.30). Ее можно интерпретировать как задачу одномерной нестационарной теплопроводности, когда концы стержня поддерживаются при постоянных температурах и известна начальная температура стержня.

Найдем точное решение этой задачи методом разделения переменных [4,5]. Известно, что для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\},$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

решение имеет вид [4]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c_1 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad (3.31)$$

где A_n – коэффициенты Фурье

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \quad (3.32)$$

Найдем решение волнового уравнения с неоднородными граничными условиями (3.28)–(3.30). На основании примера 3 получим функцию

$$u_0(x) = 1 + \frac{x}{\pi},$$

поэтому ищем $U(x,t)$ в виде

$$U(x,t) = V(x,t) + 1 + \frac{x}{\pi}. \quad (3.33)$$

Тогда из (3.28)–(3.30) для определения функции $V(x,t)$ получаем следующую задачу с однородными условиями

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (3.34)$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(\pi,t) = 0, \quad (3.35)$$

$$V(x,0) = \psi(x) = x(x - \pi). \quad (3.36)$$

Подставляя в (3.31), (3.32)

$$c_1 = 0, \quad l = \pi, \quad \psi(x) = x(x - \pi),$$

получим решение

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-0.1n^2 t} \sin(nx),$$

где

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - x\pi) \sin(nx) dx.$$

Интегрируя два раза по частям, получаем

$$A_n = \frac{4}{\pi n^3} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n = 2m; \\ -\frac{8}{\pi n^3}, & n = 2m - 1. \end{cases}$$

Таким образом, точное решение задачи (3.28)–(3.30) аналитически задается выражением

$$U(x,t) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-0.1(2m-1)^2 t}}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x) \quad (3.37)$$

Найдем такое значение $m = M$, при котором функция

$$\hat{U}(x,1) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{e^{-0.1(2m-1)^2}}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x) \quad (3.38)$$

приближенно с абсолютной точностью $\varepsilon = 0,001$ определяет функцию (3.37) на множестве

$$G = \{(x, t) \in D : 0 \leq x \leq \pi, t = T = 1\},$$

т. е. $\forall x \in [0, \pi] : |U(x, 1) - \hat{U}(x, 1)| = \Delta \leq 0,001.$ (3.39)

Оценим сверху величину Δ .

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{e^{-0,1(2m-1)^2}}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x) \right| = \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{e^{-0,1(2m-1)^2}}{(2m-1)^3} |\sin((2m-1)x)| \leq \\ &\leq \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{e^{-0,1(2m-1)^2}}{(2m-1)^3} \leq \frac{8e^{-0,1(2M+1)^2}}{\pi(2M+1)^3} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(2M+1)^3}{(2m-1)^3} e^{-0,1[(2m-1)^2 - (2M+1)^2]} \leq \\ &\leq \frac{8e^{-0,1(2M+1)^2}}{\pi(2M+1)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2M+1)^3}{(2M+2k-1)^3} e^{-0,1(2k-2)(4M+2k)} \leq \frac{8e^{-0,1(2M+1)^2}}{\pi(2M+1)^3} \times \\ &\times \left(1 + \left(\frac{2M+1}{2M+3} \right)^3 e^{-0,2(4M+4)} + \left(\frac{2M+1}{2M+5} \right)^3 e^{-0,4(4M+6)} + \left(\frac{2M+1}{2M+7} \right)^3 e^{-0,6(4M+8)} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{8e^{-0,1(2M+1)^2}}{\pi(2M+1)^3} (1 + e^{-0,8(M+1)} + e^{-1,6(M+1)} + \dots) = \frac{8e^{-0,1(2M+1)^2}}{\pi(2M+1)^3} \cdot \frac{1}{1 - e^{-0,8(M+1)}} = \delta(M). \end{aligned}$$

Значит, условие (3.39) будет заведомо выполнено, если

$$\delta(M) = \frac{8}{\pi(2M+1)^3} \cdot \frac{e^{-0,1(2M+1)^2}}{1 - e^{-0,8(M+1)}} \leq 0,001. \quad (3.40)$$

Найдем подбором наименьшее значение M , при котором выполняется условие (3.40). Получаем

$$\delta(1) = \frac{8e^{-0,9}}{3,1416 \cdot 27 \cdot (1 - e^{-1,6})} = 0,0480 > 0,001,$$

$$\delta(2) = 0,0018 > 0,001, \quad \delta(3) = 0,0006 < 0,001.$$

Следовательно, $M = 3$.

Итак, функция

$$\hat{U}(x, 1) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^3 \frac{e^{-0,1(2m-1)^2}}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x)$$

по меньшей мере с точностью $\varepsilon = 0,001$ определяет значения функции $U(x, 1)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Замечание. Процедуру получения функции $u_0(x, t)$ и решения методом Фурье необходимо описать в файле отчета.

Копируем график полученного решения при $T = 1$ (рис. 3.1) из файла Parab.mcd в файл отчета.

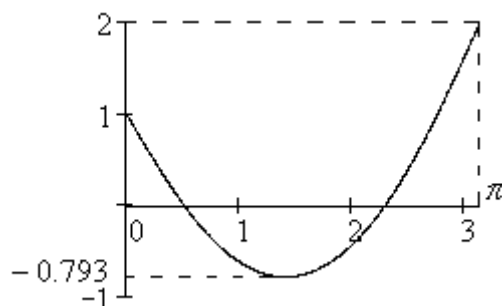


Рис.3.1. График точного решения

Построим теперь приближенное решение методом Галеркина, выбрав $u_0(x) = 1 + \frac{x}{\pi}$ (тогда $f(x) - u_0(x) = x \cdot (x - 3,1416)$) и используя разные варианты пробных и поверочных функций.

Вводим порядок пробных решений $n = 5$.

1 вариант. Построим систему пробных функций вида (2.28) для задачи с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Так как $n_1 + n_2 = 2$, то отыскиваем все многочлены порядка меньше 2, удовлетворяющие краевым условиям. Если $u_1 = A$ или $u_1 = A + Bx$, то однородные условия выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за требования линейной независимости пробных функций. Поэтому в качестве пробных и поверочных функций выбираем нормированные функции

$$u_k(x) = \frac{1}{\|u_k^*\|} u_k^*(x), \quad k = \overline{1,5}; \quad (3.41)$$

где

$$u_k^*(x) = x^k (x - \pi), \quad \|u_k^*\| = \sqrt{\int_0^\pi (u_k^*(x))^2 dx} = \frac{\pi^{k+1,5}}{\sqrt{(k+1)(2k+1)(2k+3)}}.$$

Т. е.

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{30}{\pi}} \cdot \frac{x}{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) = 0,98364 \cdot x \cdot (0,31831 \cdot x - 1), \\ u_2 &= \sqrt{\frac{105}{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{\pi} \right)^2 \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) = 0,58576 \cdot x^2 \cdot (0,31831 \cdot x - 1), \\ u_3 &= \sqrt{\frac{252}{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{\pi} \right)^3 \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) = 0,28885 \cdot x^3 \cdot (0,31831 \cdot x - 1), \\ u_4 &= \sqrt{\frac{495}{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{\pi} \right)^4 \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) = 0,12886 \cdot x^4 \cdot (0,31831 \cdot x - 1), \\ u_5 &= \sqrt{\frac{858}{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{\pi} \right)^5 \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) = 0,05400 \cdot x^5 \cdot (0,31831 \cdot x - 1). \end{aligned}$$

Замечание. Процедуру получения всех пробных и поверочных функций необходимо описать в файле отчета.

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (2,454 \quad 1,5038 \quad -2,1978 \quad 1,7511 \quad -0,665).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) + 2,454u_1(x) + 1,5038u_2(x) - 2,1978u_3(x) + \\ + 1,7511u_4(x) - 0,665u_5(x).$$

Анализируя график функции $|u_5(x,1) - U(x,1)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{11} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 0,0005639.$$

Анализируя график функции $|u_5(x,1) - u_4(x,1)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{21} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 0,007272.$$

Анализируя график невязки $|R_1(x,1)|$ решения $u_5(x,1)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{31} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 0,019.$$

Анализируя график невязки $|R_2(x)|$ решения $u_5(x,1)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{41} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 1,871 \cdot 10^{-12}.$$

2 вариант. В качестве пробных возьмем функции (3.41), а в качестве поверочных – нормированные многочлены Лежандра (2.31), которые ортогональны на отрезке $[0,\pi]$, т. е. функции

$$w_k(x) = \frac{1}{\|P_{k-1}(x)\|} P_{k-1}(x), k = \overline{1,5};$$

где

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 - 1 \right),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \left(5 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^3 - 3 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} \left(35 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^4 - 30 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 + 3 \right),$$

$$\|P_k\| = \sqrt{\int_0^\pi (P_k(x))^2 dx} = \left(\frac{\pi}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$w_1(x) = 0.5642,$$

$$w_2(x) = 0.9772 \cdot (0.6366x - 1),$$

$$w_3(x) = 0.6308 \cdot (3 \cdot (0.6366x - 1)^2 - 1),$$

$$w_4(x) = 0.7464 \cdot (0.6366 \cdot x - 1) \cdot (5 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^2 - 3),$$

$$w_5(x) = 0.2116 \cdot (35 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^4 - 30 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^3 + 3).$$

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (2,4678 \quad 1,4224 \quad -2,0088 \quad 1,5563 \quad -0,591).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) + 2,4678u_1(x) + 1,4224u_2(x) - 2,0088u_3(x) + \\ + 1,5563u_4(x) - 0,591u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{12} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 0,001072,$$

$$\varepsilon_{22} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 0,019,$$

$$\varepsilon_{32} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 0,012,$$

$$\varepsilon_{42} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 7.55 \cdot 10^{-15}.$$

3 вариант. В качестве пробных и поверочных функций выбираем нормированные функции

$$u_k(x) = \frac{1}{\|u_k^*\|} u_k^*(x), \quad k = \overline{1,5};$$

где

$$u_k^*(x) = \sin((2k-1)x), \quad \|u_k^*\| = \sqrt{\int_0^\pi (u_k^*(x))^2 dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Т. е. $u_1(x) = 0,7979 \cdot \sin(x), \quad u_1''(x) = -0,7979 \cdot \sin(x);$

$$u_2(x) = 0,7979 \cdot \sin(3x), \quad u_2''(x) = -7,181 \cdot \sin(3x);$$

$$u_3(x) = 0,7979 \cdot \sin(5x), \quad u_3''(x) = -19,95 \cdot \sin(5x);$$

$$u_4(x) = 0,7979 \cdot \sin(7x), \quad u_4''(x) = -39,10 \cdot \sin(7x);$$

$$u_5(x) = 0,7979 \cdot \sin(9x), \quad u_5''(x) = -64,63 \cdot \sin(9x).$$

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (-2,8878 \quad -0,0481 \quad -0,0021 \quad -0,000069 \quad -0,000001).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) - 2,8878u_1(x) - 0,0481u_2(x) - 0,0021u_3(x) - \\ - 0,000069u_4(x) - 0,000001u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{13} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 1,068 \cdot 10^{-8},$$

$$\varepsilon_{23} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 1,06 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{33} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 5 \cdot 10^{-17},$$

$$\varepsilon_{43} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 4,852 \cdot 10^{-3}.$$

3.8. Основные термины

Уравнение параболического типа. Начально-краевая задача, граничные и начальные условия.

Точное, приближенное, пробное решения уравнения. Невязки пробного решения уравнения. Метод Галеркина. Пробные и поверочные функции.

3.9. Вопросы для самоконтроля

1. Приведите физические интерпретации задачи (3.1)–(3.3).
2. Найдите решение задачи (3.1)–(3.3) с условиями (3.5) методом разделения переменных.
3. Найдите решение задачи (3.1)–(3.3) с условиями (3.5) операционным методом, используя преобразование Лапласа.
4. Каким условиям должны удовлетворять пробные функции?
5. Какими свойствами должны обладать поверочные функции?
6. Как находятся, согласно алгоритму метода Галеркина для решения задачи (3.1)–(3.3), функции R_1 и R_2 , названные невязками?
7. Как строится система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $v_k(t)$ пробного решения? Постройте эту систему для задачи (3.1)–(3.3).
8. Как определяются начальные условия в задаче Коши относительно функций $v_k(t)$? Найти уравнения, определяющие эти условия для задачи (3.1)–(3.3).
9. Какие условия обеспечивают сходимость в среднем последовательности пробных решений к точному решению задачи (3.1)–(3.3)?
10. Приведите конкретный пример пробных функций для задачи (3.1)–(3.3).
11. Как нормировать пробную или поверочную функцию на отрезке $[a,b]$?
12. Как проверить ортогональность функций на $[a,b]$?
13. Как проверить ортонормированность функций на $[a,b]$?

4. Решение начально-краевой задачи для одномерного гиперболического уравнения методом Галеркина

4.1. Постановка задачи и алгоритм метода

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: в двумерной области

$$D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$L[u(x, t)] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - K_1(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(x, t)u = g(x, t), \quad (4.1)$$

удовлетворяющее двум краевым (граничным) условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x), \quad (4.4)$$

где $\gamma(x, t)$, $K_1(x, t)$ ($K_1 \geq 0$), $K_2(x, t)$, $\beta(x, t)$, $g(x, t)$ – заданные, непрерывные на D функции; $a_2(t)$, $b_2(t)$ – дифференцируемые на $[0, \infty)$ функции; a_0, a_1, b_0, b_1 – заданные действительные числа, причем $a_0^2 + a_1^2 > 0$, $b_0^2 + b_1^2 > 0$; $f(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе с $f'(x)$ и такая, что

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0); \end{cases}$$

$\varphi(x)$ – заданная функция, непрерывная на $[a, b]$ вместе со своей производной и такая, что

$$\begin{cases} a_0 \varphi(a) + a_1 \varphi'(a) = \frac{da_2(0)}{dt}, \\ b_0 \varphi(b) + b_1 \varphi'(b) = \frac{db_2(0)}{dt}. \end{cases}$$

Напомним, что в такой форме может быть поставлена задача о поперечных колебаниях струны или задача о продольных или крутильных колебаниях стержня, рассмотренные в главе 1.

В методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (4.1)–(4.4) строится функциональная последовательность $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ из пробных решений $u_n(x, t)$ следующим образом. Задаемся в области D некоторой

системой дважды дифференцируемых функций $u_0(x, t), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (4.2), а пробные функции $u_i(x)$ ($i \geq 1$) являются линейно независимыми на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Составляем функцию

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x) \quad (4.6)$$

с неизвестными пока функциями $v_1(t), \dots, v_n(t)$, зависящими только от аргумента t .

Подчеркнем, что в силу линейности условий (4.2) и (4.5), функция (4.6) удовлетворяет условиям (4.2) при любых функциях $v_1(t), \dots, v_n(t)$. Значит, следует так определить $v_i(t)$ ($i \geq 1$) и количество (n) этих функций, чтобы $u_n(x, t)$ из (4.6) удовлетворяла уравнению (4.1) и начальным условиям (4.3), (4.4) с заданной точностью.

Подставляя $u_n(x, t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение (4.1), получаем невязку

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial v_k}{\partial t} \right) u_k(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \\ & - K_1(x, t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n v_k u_k'' \right) - K_2(x, t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n v_k u_k' \right) - \beta(x, t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^n v_k u_k \right) - g(x, t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} R_1(v_1, \dots, v_n, x, t) = & \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} - \gamma \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial v_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^n (K_1 u_k'' + K_2 u_k' + \beta u_k) v_k - \\ & - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставляя $u_n(x, 0)$ в (4.3), находим невязку

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x, 0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x). \quad (4.8)$$

Подставляя $\frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t}$, находим невязку

$$R_3(\dot{v}_1(0), \dots, \dot{v}_n(0), x) = \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{v}_k(0) u_k(x) - \varphi(x). \quad (4.9)$$

Невязки R_1 , R_2 и R_3 являются характеристиками отклонения функции (4.6) от точного решения $U(x, t)$ задачи (4.1)–(4.4). Во всяком случае, если при некотором наборе функций $v_j(t)$ $R_1 \equiv 0$, $R_2 \equiv 0$ и $R_3 \equiv 0$, то функция $u_n(x, t)$ из (4.6) – точное решение.

В общем случае эти невязки оказываются отличными от нуля. Поэтому накладываем дополнительные условия на функции $v_k(t)$ и их начальные значения $v_k(0)$, $\dot{v}_k(0)$, так, чтобы невязки в каком-то смысле были бы наименьшими.

В обобщенном методе Галеркина эти условия определяются системами уравнений:

$$(R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.10)$$

$$(R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.11)$$

$$(R_3(\dot{v}_1(0), \dots, \dot{v}_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.12)$$

где $w_1(x), \dots, w_n(x)$ – заданные линейно независимые на $[a, b]$ поверочные функции; а

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x)W(x)dx.$$

Напомним здесь, что если поверочные функции $w_1(x), \dots, w_n(x)$ входят в полную на $[a, b]$ систему функций, то можно ожидать сходимости последовательности $\{u_n(x, t)\}_0^\infty$ в среднем к точному решению $U(x, t)$ [1].

Запишем условия (4.10) в развернутом виде

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{d^2 v_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n \gamma u_j \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n (K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j) v_j - \right. \\ \left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

или

$$\left(\sum_{j=1}^n (u_j, w_k) \frac{d^2 v_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n (\gamma u_j, w_k) \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n (K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j, w_k) v_j - \right. \\ \left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{d^2 v_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n h_{kj} \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj} v_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.13)$$

где

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \quad (4.14)$$

$$h_{kj}(t) = \int_a^b \gamma(x, t) u_j(x) w_k(x) dx, \quad (4.15)$$

$$c_{kj}(t) = \int_a^b (K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j) w_k dx, \quad (4.16)$$

$$b_k(t) = \int_a^b \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k(x) dx, \quad (4.17)$$

$$k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$A = (a_{kj})_n, \quad H = (h_{kj})_n, \quad C = (c_{kj})_n, \quad B = (b_k)_{n,1}, \quad V = (v_j)_{n,1},$$

то система (4.13) в матричном виде запишется так

$$A \frac{d^2 V}{dt^2} = -H \frac{dV}{dt} + CV + B.$$

Так как матрица A невырожденная, то отсюда получаем

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = A^{-1} \left(-H \frac{dV}{dt} + CV + B \right). \quad (4.18)$$

Таким образом, функции $v_j(t)$ должны удовлетворять системе из n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Заметим, что если функции $\gamma(x, t), K_1(x, t), K_2(x, t), \beta(x, t)$ зависят только от x , то система (4.18) – система с постоянными коэффициентами. Заметим так же, что если в качестве проверочных функций выбраны пробные, которые ортогональны, то матрицы A и A^{-1} являются диагональными матрицами.

Запишем теперь в развернутом виде условия (4.11). Получаем

$$\begin{aligned} & \left(u_0(x, 0) + \sum_{j=1}^n v_j(0) u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) + (u_0(x, 0) - f(x), w_k(x)) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x)) v_j(0) = (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)), \quad k = \overline{1, n};$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.19)$$

где a_{kj} определяются формулами (4.14), а

$$d_k = (f(x) - u_0(x, 0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0(x, 0)) w_k(x) dx. \quad (4.20)$$

Если ввести матрицу $D = (d_k)_{n,1}$, то из (4.19) получаем

$$V(0) = A^{-1} D. \quad (4.21)$$

Теперь запишем в развернутом виде условия (4.12). Получаем

$$\left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{dv_j(0)}{dt} u_j(x) - \varphi(x), w_k(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(u_j(x), w_k(x) \right) \frac{dv_j(0)}{dt} + \left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} - \varphi(x), w_k(x) \right) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{dv_j(0)}{dt} = r_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.22)$$

где a_{kj} определяются формулами (4.14), а

$$r_k = \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t}, w_k(x) \right) = \int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} \right) w_k(x) dx. \quad (4.23)$$

Если ввести матрицу $R = (r_k)_{n,1}$, то из (4.22) получаем

$$\frac{dV(0)}{dt} = A^{-1} R. \quad (4.24)$$

Заметим, что если $\varphi(x) \equiv 0$ и $u_0(x, t)$ зависят только от x , то $\dot{v}_k(0) = 0$, $k = \overline{1, n}$ и $R_3 \equiv 0$.

Таким образом, для нахождения функций $v_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, определяющих пробное решение (4.6), получаем задачу Коши для канонической системы (4.18) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ с начальными условиями (4.21) и (4.24). Решив указанную задачу Коши и подставив определяемые этим решением функции $v_k(t)$ в (4.6), заканчиваем построение пробного решения $u_n(x, t)$.

Опишем возможный алгоритм построения приближенного решения задачи (4.1)–(4.4) методом Галеркина, предполагая, что последовательность $\{u_n(x, t)\}_1^\infty$ сходится равномерно к точному решению $U(x, t)$.

1. Подготовительный шаг алгоритма. На этом шаге выбираем функцию $u_0(x, t)$ и находим невязку $R_{10}(x, t) = L[u_0] - g(x, t)$ от подстановки функции $u_0(x, t)$ в уравнение (4.1). Находим невязку $R_{20}(x) = u_0(x, 0) - f(x)$ для условия (4.3) и невязку $R_{30}(x) = \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} - \varphi(x)$ для условия (4.4). Определяем $\max_D |R_{10}(x, t)| = \Delta_{10}$, $\max_{[a, b]} |R_{20}(x)| = \Delta_{20}$ и $\max_{[a, b]} |R_{30}(x)| = \Delta_{30}$. Если $\Delta_{10} \leq \varepsilon_1$, $\Delta_{20} \leq \varepsilon_2$ и $\Delta_{30} \leq \varepsilon_3$, где ε_1 , ε_2 и ε_3 – заданные меры точности приближенного решения, то полагаем $U(x, t) \simeq u_0(x, t)$. В противном случае переходим к следующему шагу алгоритма, предварительно выбрав пробные $u_j(x)$ и поверочные $w_k(x)$ функции. Как выбирать пробные и поверочные функции, показано в разделе 3.2 данной работы.

2. Первый шаг алгоритма. Определив функцию $v_1(t)$ из решения задачи Коши (4.18), (4.21) и (4.24) при $n=1$, строим функцию $u_1(x,t) = u_0 + v_1(t)u_1(x)$. Находим по формулам (4.7)–(4.9) невязки $R_{11}(v_1(t), x, t), R_{21}(v_1(0), x), R_{31}(\dot{v}_1(0), x)$ и определяем $\max_D |R_{11}(v_1, x, t)| = \Delta_{11}$, $\max_{[a,b]} |R_{21}(v_1(0), x)| = \Delta_{21}$ и $\max_{[a,b]} |R_{31}(\dot{v}_1(0), x)| = \Delta_{31}$. Если $\Delta_{11} \leq \varepsilon_1$, $\Delta_{21} \leq \varepsilon_2$ и $\Delta_{31} \leq \varepsilon_3$, то полагаем $U(x,t) \simeq u_1(x,t)$ и вычисления заканчиваем. В противном случае переходим к вычислениям на втором шаге алгоритма и т. д.

Таким образом, на m -м ($m \geq 1$) шаге алгоритма строим функцию

$$u_m(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^m v_k(t)u_k(x),$$

определив предварительно функции $v_1(t), \dots, v_m(t)$ из решения задачи Коши (4.18), (4.21), (4.24) при $n=m$. Находим по формулам (4.7)–(4.9) невязки $R_{1m}(v_1(t), \dots, v_m(t), x, t), R_{2m}(v_1(0), \dots, v_m(0), x), R_{3m}(\dot{v}_1(0), \dots, \dot{v}_m(0), x)$, а затем вычисляем $\max_D |R_{1m}| = \Delta_{1m}$, $\max_{[a,b]} |R_{2m}| = \Delta_{2m}$, $\max_{[a,b]} |R_{3m}| = \Delta_{3m}$. Если $\Delta_{1m} \leq \varepsilon_1, \Delta_{2m} \leq \varepsilon_2, \Delta_{3m} \leq \varepsilon_3$, то полагаем $U(x,t) \simeq u_m(x,t)$, в противном случае переходим к $(m+1)$ -му шагу алгоритма.

4.2. Задание к лабораторной работе

Рассматривается начально-краевая задача: в двумерной области

$$D = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

найти решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.25)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = c_2, \quad u(l,t) = c_3; \quad (4.26)$$

$$u(x,0) = f(x) = c_4 x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 l^2}{l} x + c_2; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) = 0; \quad (4.28)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные величины.

Заметим, что эта задача получается как частный случай задачи (4.1)–(4.4) при $a=0$, $b=l$, $\gamma(x,t) \equiv 0$, $K_1(x,t) \equiv c_1$, $K_2(x,t) \equiv 0$, $\beta(x,t) \equiv 0$, $g(x,t) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$, $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=c_2$, $b_0=1$, $b_1=0$, $b_2=c_3$.

Варианты заданий, определяемые различным набором значений постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 задачи (4.25)–(4.27) и параметра T , приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Варианты задания к лабораторной работе

№	l	c_1	c_2	c_3	c_4	T
1	3	9	0,1	– 0,1	1	1
2	2	4	– 0,1	0,1	– 1	1
3	1	1	0,1	0,2	1	1
4	3	4/9	0,2	0,1	– 1	1
5	2	9	– 0,1	0,1	1	1
6	1	4	0,1	– 0,1	– 1	1
7	2	9	– 0,1	– 0,2	1	1
8	3	1/4	– 0,1	0,1	– 1	1
9	1	4/9	0,2	0,1	1	1
10	3	4	0,1	0,2	– 1	1

Лабораторная работа выполняется с использованием прикладной системы MathCAD, которая реализует алгоритм построения пробных решений $u_m(x, t)$ задачи (4.25)–(4.28) методом Галеркина.

Перед обращением к программе необходимо подготовить числовые и строчные данные.

Числовые данные:

l – правый конец отрезка изменения переменной x ;

c_1 – числовой параметр уравнения (4.25);

c_2, c_3, c_4 – числовые параметры условий (4.26), (4.27);

n – число параметров C_1, \dots, C_n в пробном решении (значение параметра n задает преподаватель);

T – значение параметра T задачи.

Строчные данные:

аналитические выражения для функции $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$;

аналитические выражения поверочных функций $w_1(x), \dots, w_n(x)$.

После введения числовых и строчных данных программа автоматически производит расчет значений $v_1(T), \dots, v_n(T)$, построение графиков разности пробного решения и точного решения, разности пробного решения и предыдущего пробного решения, таблиц невязок $R_1(x, T)$ и $R_2(x)$, на основании которых определяются меры точности полученного решения. Заметим, что для рассматриваемой задачи $R_3(x) \equiv 0$.

В лабораторной работе требуется:

1. Методом Фурье (методом разделения переменных) найти точное аналитически заданное решение $U(x, t)$ задачи (4.25)–(4.28) и построить график точного решения при $t = T$, т. е. функции $v(x) = U(x, T)$.

2. Методом Галеркина найти три пробных решения $u_n(x, T)$, используя нормированные системы пробных и поверочных функций, тип которых задает преподаватель.

3. Определить меры точности полученных решений. Сделать вывод о точности решений и выписать лучшее из них.
4. Оформить и защитить отчет.

4.3. Выполнение работы в компьютерном классе

1. Прежде чем начать выполнение лабораторной работы на ЭВМ, внимательно ознакомьтесь с данной инструкцией.

2. При необходимости включите сами (или попросите лаборанта) питание компьютера. После того, как система загрузится, запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Mathcad, если же ярлык отсутствует, тогда открываем программу через кнопку «Пуск» (Программы → Mathsoft → Mathcad).

3. Узнайте у лаборанта расположение файла Hyperb.mcd и откройте его (File → Open или, если программа русифицирована, Файл → Открыть). При любой ошибке ввода программы нужно обратиться к лаборанту.

4. Прочитайте в начале файла задание на лабораторную работу и просмотрите пример выполнения работы, для которого исследование уже проведено. Программа файла Hyperb.mcd состоит из четырех пунктов «Постановка задачи», «Получение точного решения», «Получение приближенного решения», «Выводы». Цели и задачи каждого из пунктов описаны ниже.

5. Для набора функций нужно либо воспользоваться всплывающим меню инструментов «Calculator», либо ввести ее с клавиатуры, используя следующие символы арифметических действий и стандартных функций: сложение – ‘+’; вычитание – ‘-’; умножение – ‘*’; деление – ‘/’; возведение в степень – ‘^’; квадратный корень – ‘\’; синус – $\sin(x)$; косинус – $\cos(x)$; экспонента – $\exp(x)$; натуральный логарифм – $\ln(x)$. При вводе числовых данных, являющихся десятичными дробями, целую и дробную части нужно разделять точкой (например, 0.5, 1.5 и т. д.).

6. Порядок выполнения работы Вам укажет программа подсказками и заданиями, выделенными красным цветом.

7. Для формирования файла отчета запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Microsoft Word, если же ярлык отсутствует, то открываем программу через кнопку «Пуск». Открываем новый документ. В начале документа необходимо оформить титульный лист, описать математическую постановку задачи и результаты выполнения подготовительных расчетов. Затем скопировать основные результаты расчетов из программы Hyperb.mcd в документ и оформить итоговый отчет. Копирование – ‘Ctrl’+‘Insert’, вставка – ‘Shift’+‘Insert’. Сохранить документ как «ФамилияСтудента_группа_Hyperb.doc» и распечатать. Файл отчета оформить аналогично приложению А, описывающему выполнение лабораторной работы №1.

4.4. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Повторить разделы 1.2, 3.2, изучить разделы 4.1–4.5 данной работы и подготовить ответы на контрольные вопросы из раздела 4.7.

2. Пройти собеседование с преподавателем; получить номер варианта работы, значение параметра n и указания по выбору пробных и поверочных функций.

3. Выполнить первый пункт задания, связанный с построением ряда Фурье для точного решения задачи $U(x, t)$ и нахождением длины отрезка этого ряда, обеспечивающую точность решения 0,001.

4. Выполнить подготовительный шаг алгоритма метода Галеркина и, если $u_0(x)$ не является точным решением задачи, подготовить все числовые и строчные данные для расчетов и в пункте «Постановка задачи» программы Nuretb.mcd ввести их вместо данных примера, введенных изначально.

5. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число, намного превышающее найденное в 3-м пункте число слагаемых в разложении точного решения в тригонометрический ряд Фурье (чтобы гарантировать достаточную точность решения и в дальнейшем считать его точным). Скопировать график получившегося точного решения $U(x, T)$ в файл отчета.

6. В пункте «Получение приближенного решения» рассмотрено применение трех систем пробных и поверочных функций. По заданию преподавателя ввести (вместо уже введенных для примера) системы пробных $V_1(k, x)$ и поверочных $W(k, x)$ функций, указанных во 2-м пункте (см. раздел 4.5). Выполнить построение n -го пробного решения задачи. Следует скопировать в файл отчета вектор коэффициентов $v_k(T)$ (элементы вектора $Y_{100,k}$ программы) пробных решений и набрать в отчете решение с этими коэффициентами. Так же необходимо скопировать в этот файл пункт «Выводы».

7. Оформить и распечатать файл отчета по лабораторной работе, который должен содержать титульный лист, математическую постановку задачи и ее физическую интерпретацию, результаты выполнения подготовительных расчетов, основные результаты расчетов на ЭВМ, выводы о возможностях использованных систем пробных и поверочных функций и наиболее приближенное к точному аналитическое решение.

8. Защитить отчет.

4.5. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример

В данном пункте приведен текст программы Nuretb.mcd, разработанной для решения начально-краевой задачи для одномерного гиперболического уравнения методом Галеркина. В тексте разбирается получение пробного

решения $u_5(x, t)$ при $t = 1$ задачи: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в области

$$D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1\}$$

уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.29)$$

и условиям

$$u(0, t) = 1, \quad u(\pi, t) = 2, \quad (4.30)$$

$$u(x, 0) = f(x) = 1 + \left(\frac{1}{\pi} - \pi\right)x + x^2 = 1 - 2,8233x + x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (4.31)$$

Задача (4.29)–(4.31) является частным случаем задачи (4.25)–(4.28) при $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$, $t = T = 1$.

Использовать три системы пробных и поверочных функций:

1. Пробные и поверочные функции – многочлены (2.28);
2. Пробные функции – многочлены (2.28), поверочные функции – многочлены Лежандра (2.31);
3. Пробные и поверочные функции – тригонометрические функции $\sin(2k - 1)x$.

Лабораторная работа ***«Решение начально-краевой задачи для одномерного гиперболического уравнения методом Галеркина»***

Задание на лабораторную работу

1. В пункте «Постановка задачи» ввести вместо данных примера непрерывные функции уравнения $K1(x)$ ($K > 0$), $K2(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $g(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ и числовые параметры задачи a , b , $a0$, $a1$, $a2$, $b0$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$, $c3$, $c4$ своего варианта.

2. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число слагаемых в разложении решения в ряд, намного превышающее найденное аналитически число, обеспечивающее точность решения 0.001. Скопировать график полученной интегральной кривой в файл отчета.

3. В пункте «Получение приближенного решения» выполнить построение n -го пробного решения задачи тремя системами пробных и поверочных функций. Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов $Y_{100,k}$ пробного решения и набрать в отчете решение с этими коэффициентами при $t = T$.

4. Скопировать результаты пункта «Выводы» в файл отчета, и, анализируя их, сделать в файле отчета выводы о точности построенных решений.

Постановка задачи

Требуется в области $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, t \geq 0\}$ найти решение $U(x, t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} U + \gamma(x, t) \cdot \frac{d}{dt} U - K1(x, t) \cdot \frac{d^2}{dx^2} U - K2(x, t) \cdot \frac{d}{dx} U - \beta(x, t) \cdot U = g(x, t)$$

удовлетворяющее двум краевым условиям

$$a0 \cdot U(a, t) + a1 \cdot \frac{d}{dx} U(a, t) = a2(t)$$

$$b0 \cdot U(b, t) + b1 \cdot \frac{d}{dx} U(b, t) = b2(t)$$

и начальным условиям

$$U(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{d}{dt} U(x, 0) = \phi(x)$$

Рассмотрим случай, когда функции $\gamma, K1, K2, \beta, g, a2, b2$ не зависят от t . Введите непрерывные функции уравнения $\gamma(x), K1(x)$ ($K1 > 0$), $K2(x), \beta(x), g(x), f(x), \phi(x)$ и числовые параметры задачи $a, b, a0, a1, a2, b0, b1, b2, c1, c2, c3, c4$

$$\begin{aligned} c1 &:= 1 & c2 &:= 1 & c3 &:= 2 & c4 &:= 1 \\ \gamma(x) &:= 0 & K1(x) &:= c1 & K2(x) &:= 0 & \beta(x) &:= 0 & g(x) &:= 0 \\ a &:= 0 & b &:= \pi \\ a0 &:= 1 & a1 &:= 0 & a2 &:= c2 & b0 &:= 1 & b1 &:= 0 & b2 &:= c3 \\ \phi(x) &:= 0 & f(x) &:= c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c2 \end{aligned}$$

то есть

$$f(x) \rightarrow x^2 + \frac{(1 - \pi^2)}{\pi} \cdot x + 1$$

Проверим соответствие граничных и начальных условий

$$\begin{aligned} \text{if} \left[a0 \cdot f(a) + a1 \cdot \left(\frac{d}{da} f(a) \right) = a2, \text{"Yes"}, \text{"No"} \right] &= \text{"Yes"} \\ \text{if} \left[b0 \cdot f(b) + b1 \cdot \left(\frac{d}{db} f(b) \right) = b2, \text{"Yes"}, \text{"No"} \right] &= \text{"Yes"} \\ \text{if} \left[a0 \cdot \phi(a) + a1 \cdot \left(\frac{d}{da} \phi(a) \right) = 0, \text{"Yes"}, \text{"No"} \right] &= \text{"Yes"} \end{aligned}$$

$$\text{if} \left[b0 \cdot \phi(b) + b1 \cdot \left(\frac{d}{db} \phi(b) \right) = 0, "Yes", "No" \right] = "Yes"$$

Если хотя бы одно условие не выполняется (= "No"), то задача поставлена не корректно.

Введите конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование вашего варианта

$$T := 1$$

Получение точного решения

Найдем точное решение $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0, \gamma(x)=0, g(x)=0, K2(x)=0, K1(x)=c1=const$, то решение имеет вид

$$U(x, t) = U0(x) + \sum_{k=1}^M \left(A_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c1} \cdot t \right) + B_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c1} \cdot t \right) \right) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right)$$

Введите число слагаемых, обеспечивающих достаточно большую точность решения (для примера $M=14$ обеспечивает точность 0,001, поэтому возьмем число, превышающее данное, например, $M=30$)

$$M := 30$$

Если $a1=0, b1=0$, то функцию $U0(x)$ можно взять в виде

$$U0(x) := \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)}$$

$$U0(x) \rightarrow 1 + \frac{x}{\pi}$$

Вычислим коэффициенты A_k, B_k

$$i := 1..M$$

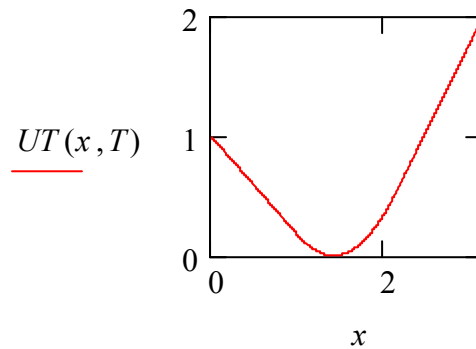
$$A2_{i-1} := \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U0(x)) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a} \right) dx$$

$$B2_{i-1} := \frac{2}{\pi \cdot i} \cdot \int_a^b \phi(x) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a} \right) dx$$

Следовательно, точное решение $U(x, t)$ имеет вид

$$UT(x, t) := U0(x) + \sum_{k=1}^M \left(A2_{k-1} \cdot \cos \left(\frac{k \cdot \pi \cdot \sqrt{c1} \cdot t}{b-a} \right) + B2_{k-1} \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot \sqrt{c1} \cdot t}{b-a} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{b-a} \right)$$

График точного решения при $t=T$



Скопируйте график полученной интегральной кривой в файл отчета.

Получение приближенного решения

Введите порядок пробного решения $U_n = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x)H(k, t)$.

$$n := 5$$

1. Введите систему пробных функций:

$$k := 1 .. n$$

$$V0(k, x) := (x - a)^k \cdot (x - b)$$

Нормируем их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты

$$i := 1 .. n$$

$$VV_{i-1} := \sqrt{\int_a^b (V0(i, x))^2 dx}$$

Получили нормированные пробные функции

$$k := 0 .. n$$

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{V0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

Введите функции $V1(k, x)$ и $V2(k, x)$, равные первой и второй производной от функции $V(k, x)$

$$k := 0 .. n$$

$$V1(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(x - a)^k + (x - b) \cdot k \cdot (x - a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \text{if} \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x - a)^{k-1} + (x - b) \cdot k \cdot (k - 1) \cdot (x - a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right]$$

Введите систему поверочных функций:

$$W(k, x) := V(k, x)$$

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B \text{ для отыскания функций } H_k(t) \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } A \cdot H(0) = D1, A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N1$$

$$i := 1 .. n$$

$$j := 1 .. n$$

$$A_{i-1,j-1} := \int_a^b V(j,x) \cdot W(i,x) dx$$

$$M_{i-1,j-1} := - \int_a^b \gamma(x) \cdot V(j,x) \cdot W(i,x) dx$$

$$C_{i-1,j-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(j,x) + K2(x) \cdot V1(j,x) + \beta(x) \cdot V(j,x)) \cdot W(i,x) dx$$

$$i := 1 .. n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(0,x) + K2(x) \cdot V1(0,x) + \beta(x) \cdot V(0,x) + g(x)) \cdot W(i,x) dx$$

$$D1_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0,x)) \cdot W(i,x) dx$$

$$N1_{i-1} := \int_a^b \phi(x) \cdot W(i,x) dx$$

$$\text{Приведем систему к виду } \frac{d^2}{dt^2} H = M1 \cdot \frac{d}{dt} H + C1 \cdot H + B1 \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } H(0) = D2, \frac{d}{dt} H(0) = N2$$

$$M1 := A^{-1} \cdot M \quad C1 := A^{-1} \cdot C \quad B1 := A^{-1} \cdot B$$

$$D2 := A^{-1} \cdot D1 \quad N2 := A^{-1} \cdot N1$$

Приведем к нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} H = AA \cdot H + BB \text{ с начальными условиями } H(0) = D2:$$

$$i := 1 .. n$$

$$D2_{n+i-1} := N2_{i-1}$$

$$i := 1 .. n$$

$$j := 1 .. n$$

$$\begin{aligned}
AA_{i-1,j-1} &:= 0 \\
AA_{n+i-1,n+j-1} &:= MI_{i-1,j-1} \\
AA_{n+i-1,j-1} &:= CI_{i-1,j-1} \\
AA_{i-1,n+j-1} &:= \text{if}(i=j, 1, 0) \\
i &:= 1..n \\
BB_{n+i-1} &:= BI_{i-1} \\
BB_{i-1} &:= 0
\end{aligned}$$

Найдем решение системы дифференциальных уравнений $dH/dt = AA \cdot H + BB$.

$H := D2$

$D(t, H) := AA \cdot H + BB$

$Y := \text{rkfixed}(H, 0, T, 100, D)$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

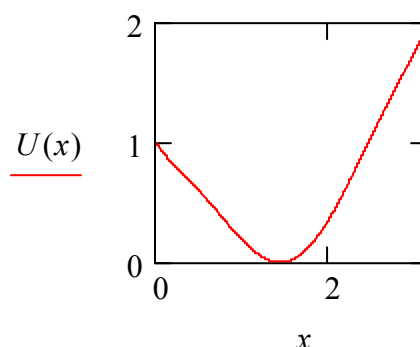
$$\begin{aligned}
&k := 1..n \\
Y_{100,k} &= \begin{pmatrix} 1.4891 \\ -2.0906 \\ 9.0874 \\ -11.0421 \\ 4.1935 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x, 1) = U_0(x) + 1.4891U_1(x) - 2.0906U_2(x) + 9.0874U_3(x) - 11.0421U_4(x) + 4.1935U_5(x)$.

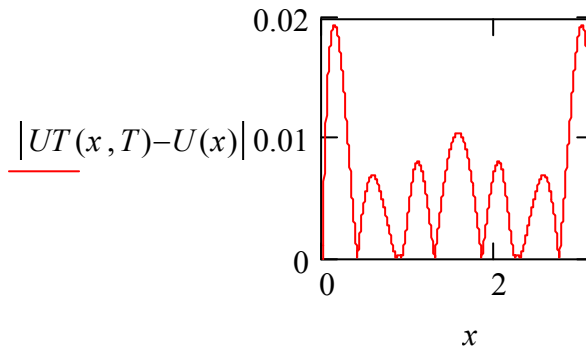
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100,k}$$

График пробного решения



Сравним решения, полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{ll} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$ (для этого необходимо кликнуть мышью по графику, где в левом верхнем углу появится наибольшее значение, скопировать это значение и заменить на него уже имеющееся ниже значение ε_{ll})

$$\varepsilon_{ll} := 0.019$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$MP := \text{submatrix}(M, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$BP := \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0)$$

$$D1P := \text{submatrix}(D1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$N1P := \text{submatrix}(N1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$M1P := AP^{-1} \cdot MP$$

$$C1P := AP^{-1} \cdot CP$$

$$B1P := AP^{-1} \cdot BP$$

$$D2P := AP^{-1} \cdot D1P$$

$$N2P := AP^{-1} \cdot N1P$$

$$i := 1..n-1 \quad j := 1..n-1$$

$$AAP_{i-1, j-1} := 0$$

$$AAP_{n+i-2, n+j-2} := M1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{n+i-2, j-1} := C1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{i-1, n+j-2} := \text{if}(i = j, 1, 0)$$

$$i := 1..n-1$$

$$D2P_{n+i-2} := N2P_{i-1}$$

$$BBP_{i-1} := 0 \quad BBP_{n+i-2} := B1P_{i-1}$$

$$HP := D2P$$

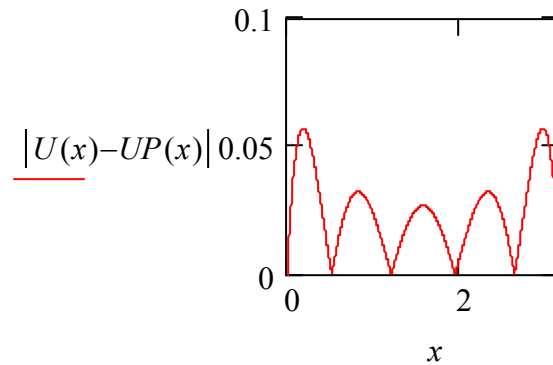
$$D(t, HP) := AAP \cdot HP + BBP$$

$$YP := \text{rkfixed}(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t=T$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100,k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t=T$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 2l$ наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 2l := 0.057$$

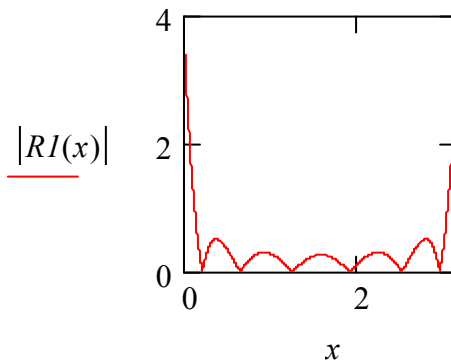
Найдем невязки полученного пробного решения

При $t=T$ получим невязку

$$RI(x) := \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \left[\sum_{z=1}^n (MI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,n+z} + CI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,z}) + BI_{k-1} \right] \right] -$$

$$- \gamma(x) \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n (MI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,n+z}) \right] - \sum_{k=1}^n [KI(x) \cdot V2(k, x) + K2(x) \cdot VI(k, x) +$$

$$+ \beta(x) \cdot V(k, x)] \cdot Y_{100,k} - (KI(x) \cdot V2(0, x) + K2(x) \cdot VI(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x))$$

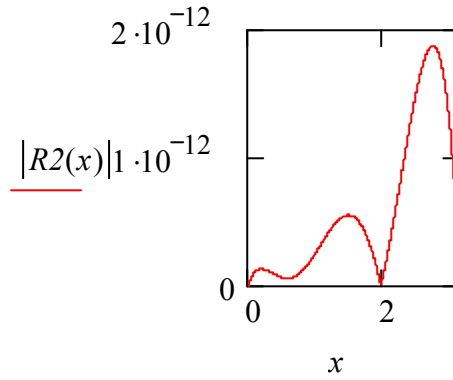


Замените старое значение меры точности $\varepsilon 3l$ наибольшим значением $|RI(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon 3l := 3.382$$

При $t=0$ получим невязки $R2(x)$ и $R3(x)$

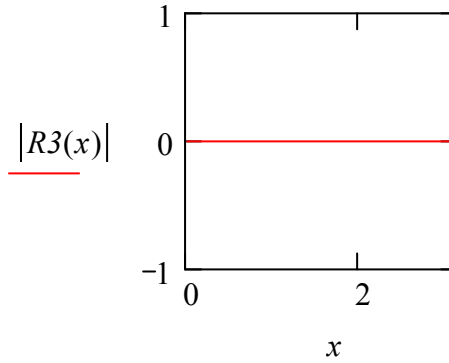
$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 41$ наибольшим значением $|R2(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon 41 := 1.864 \times 10^{-12}$$

$$R3(x) := -\phi(x) + \sum_{k=1}^n N2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности $\varepsilon 51$ наибольшим значением $|R3(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon 51 := 0$$

2. Введите систему пробных и поверочных функций (для примера в качестве пробных функций возьмем функции пункта 1, а поверочными функциями возьмем многочлены Лежандра):

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{V0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$$k := 0..n$$

$$V1(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(x - a)^k + (x - b) \cdot k \cdot (x - a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \text{if} \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x - a)^{k-1} + (x - b) \cdot k \cdot (k - 1) \cdot (x - a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right]$$

$$P(k, t) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right]$$

$$W(k, x) := \frac{P\left[k-1, \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]}{\sqrt{\int_a^b \left[P\left[k-1, \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]\right]^2 dx}}$$

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B \text{ для отыскания функций } H_k(t) \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } A \cdot H(0) = D1, A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N1$$

$$i := 1 .. n$$

$$j := 1 .. n$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$M_{i-1, j-1} := - \int_a^b \gamma(x) \cdot V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$C_{i-1, j-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(j, x) + K2(x) \cdot V1(j, x) + \beta(x) \cdot V(j, x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1 .. n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(0, x) + K2(x) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$D1_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$N1_{i-1} := \int_a^b \phi(x) \cdot W(i, x) dx$$

$$\text{Приведем систему к виду } \frac{d^2}{dt^2} H = M1 \cdot \frac{d}{dt} H + C1 \cdot H + B1 \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } H(0) = D2, \frac{d}{dt} H(0) = N2$$

$$M1 := A^{-1} \cdot M$$

$$C1 := A^{-1} \cdot C$$

$$B1 := A^{-1} \cdot B$$

$$D2 := A^{-1} \cdot D1$$

$$N2 := A^{-1} \cdot N1$$

Приведем к нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}H = AA \cdot H + BB \text{ с начальными условиями } H(0) = D2$$

$$i := 1..n$$

$$D2_{n+i-1} := N2_{i-1}$$

$$i := 1..n$$

$$j := 1..n$$

$$AA_{i-1,j-1} := 0$$

$$AA_{n+i-1,n+j-1} := M1_{i-1,j-1}$$

$$AA_{n+i-1,j-1} := C1_{i-1,j-1}$$

$$AA_{i-1,n+j-1} := \text{if}(i = j, 1, 0)$$

$$i := 1..n$$

$$BB_{n+i-1} := B1_{i-1}$$

$$BB_{i-1} := 0$$

Найдем решение системы дифференциальных уравнений $dH/dt = AA \cdot H + BB$.

$$H := D2$$

$$D(t, H) := AA \cdot H + BB$$

$$Y := \text{rkfixed}(H, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

$$k := 1..n$$

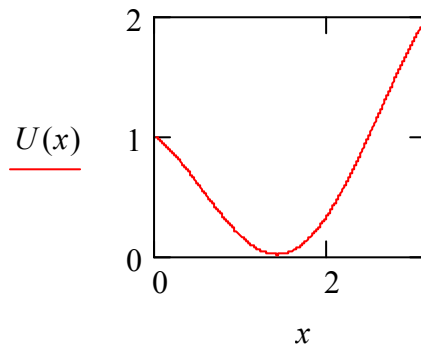
$$Y_{100,k} = \begin{pmatrix} 0.877496 \\ 1.61338 \\ 0.366355 \\ -2.008929 \\ 0.762946 \end{pmatrix}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$ наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x,1) = U_0(x) + 0.877496U_1(x) + 1.61338U_2(x) + 0.366355U_3(x) - 2.008929U_4(x) + 0.762946U_5(x)$.

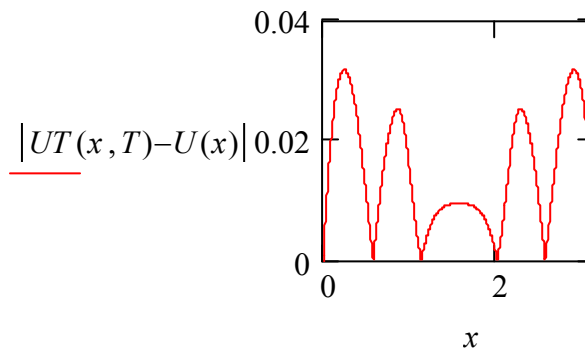
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100,k}$$

График пробного решения



Сравним решения полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{l2} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{l2} := 0.032$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$MP := \text{submatrix}(M, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$BP := \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0)$$

$$D1P := \text{submatrix}(D1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$N1P := \text{submatrix}(N1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$M1P := AP^{-1} \cdot MP \quad C1P := AP^{-1} \cdot CP \quad B1P := AP^{-1} \cdot BP$$

$$D2P := AP^{-1} \cdot D1P \quad N2P := AP^{-1} \cdot N1P$$

$$i := 1..n-1 \quad j := 1..n-1$$

$$AAP_{i-1, j-1} := 0$$

$$AAP_{n+i-2, n+j-2} := M1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{n+i-2, j-1} := C1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{i-1, n+j-2} := \text{if}(i = j, 1, 0)$$

$$i := 1..n-1$$

$$D2P_{n+i-2} := N2P_{i-1}$$

$$BBP_{i-1} := 0 \quad BBP_{n+i-2} := B1P_{i-1}$$

$$HP := D2P$$

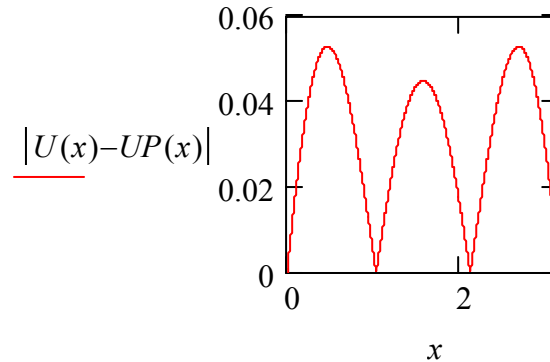
$$D(t, HP) := AAP \cdot HP + BBP$$

$$YP := rkfixed(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t=T$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100, k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t=T$



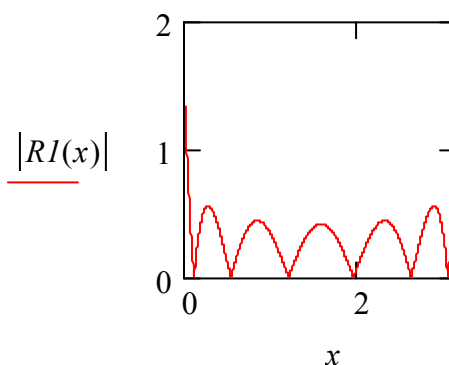
Замените старое значение меры точности ε_{22} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{22} := 0.053$$

Найдем невязки полученного пробного решения

При $t=T$ получим невязку

$$RI(x) := \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \left[\sum_{z=1}^n (MI_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z} + CI_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, z}) + BI_{k-1} \right] \right] - \\ - \gamma(x) \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n (MI_{k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z}) \right] - \sum_{k=1}^n [KI(x) \cdot V2(k, x) + K2(x) \cdot VI(k, x) + \\ + \beta(x) \cdot V(k, x)] \cdot Y_{100, k} - (KI(x) \cdot V2(0, x) + K2(x) \cdot VI(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x))$$

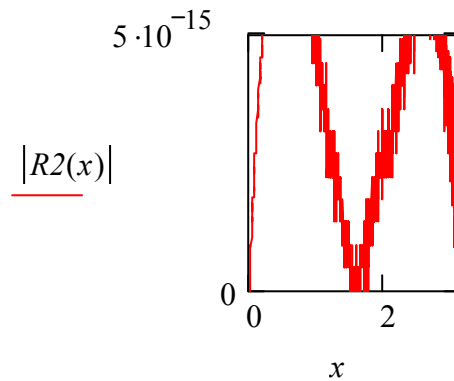


Замените старое значение меры точности ε_{32} наибольшим значением $|RI(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{32} := 1.341$$

При $t=0$ получим невязки $R2(x)$ и $R3(x)$

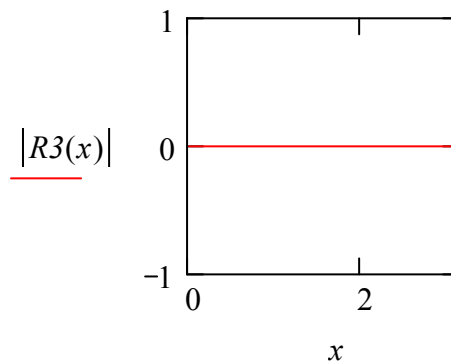
$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{42} наибольшим значением $|R2(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{42} := 7.55 \times 10^{-15}$$

$$R3(x) := -\phi(x) + \sum_{k=1}^n N2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{52} наибольшим значением $|R3(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{52} := 0$$

3. Введите систему пробных и поверочных функций (для примера в качестве пробных и поверочных функций возьмем систему тригонометрических функций):

$$V(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{\sin \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b - a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{b0 \cdot a2 \cdot b - b2 \cdot a0 \cdot a}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} + \frac{(b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2) \cdot x}{a0 \cdot b0 \cdot (b - a)} \right]$$

$k := 1..n$

$$V1(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \cos \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{b2 \cdot a0 - b0 \cdot a2}{a0 \cdot b0 \cdot (b-a)} \right]$$

$$V2(k, x) := \text{if} \left[k \neq 0, -\frac{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2 \cdot \sin \left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, 0 \right]$$

$$W(k, x) := V(k, x)$$

Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B \text{ для отыскания функций } H_k(t) \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } A \cdot H(0) = D1, A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N1$$

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$A_{i-1, j-1} := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$M_{i-1, j-1} := - \int_a^b \gamma(x) \cdot V(j, x) \cdot W(i, x) dx$$

$$C_{i-1, j-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(j, x) + K2(x) \cdot V1(j, x) + \beta(x) \cdot V(j, x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$i := 1..n$$

$$B_{i-1} := \int_a^b (K1(x) \cdot V2(0, x) + K2(x) \cdot V1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$D1_{i-1} := \int_a^b (f(x) - V(0, x)) \cdot W(i, x) dx$$

$$N1_{i-1} := \int_a^b \phi(x) \cdot W(i, x) dx$$

$$\text{Приведем систему к виду } \frac{d^2}{dt^2} H = M1 \cdot \frac{d}{dt} H + C1 \cdot H + B1 \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } H(0) = D2, \frac{d}{dt} H(0) = N2$$

$$M1 := A^{-1} \cdot M$$

$$C1 := A^{-1} \cdot C$$

$$B1 := A^{-1} \cdot B$$

$$D2 := A^{-1} \cdot D1$$

$$N2 := A^{-1} \cdot N1$$

Приведем к нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}H = AA \cdot H + BB \text{ с начальными условиями } H(0) = D2$$

$$i := 1..n$$

$$D2_{n+i-1} := N2_{i-1}$$

$$i := 1..n$$

$$j := 1..n$$

$$AA_{i-1,j-1} := 0$$

$$AA_{n+i-1,n+j-1} := M1_{i-1,j-1}$$

$$AA_{n+i-1,j-1} := C1_{i-1,j-1}$$

$$AA_{i-1,n+j-1} := \text{if}(i = j, 1, 0)$$

$$i := 1..n$$

$$BB_{n+i-1} := B1_{i-1}$$

$$BB_{i-1} := 0$$

Найдем решение системы дифференциальных уравнений $dH/dt = AA * H + BB$.

$$H := D2$$

$$D(t, H) := AA \cdot H + BB$$

$$Y := \text{rkfixed}(H, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, при $t=T$ получим следующие коэффициенты

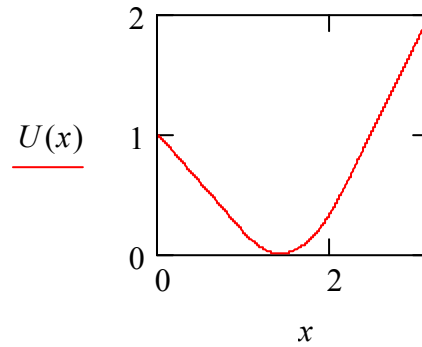
$$Y_{100,k} = \begin{pmatrix} -1.724395 \\ 0.117022 \\ -7.242543 \times 10^{-3} \\ -7.0149 \times 10^{-3} \\ 3.988888 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$ наберите в файле отчета получившееся пробное решение. Для примера решение имеет вид $U(x,1) = U_0(x) - 1.724395U_1(x) + 0.117022U_2(x) - 0.007243U_3(x) - 0.007015U_4(x) + 0.003989U_5(x)$.

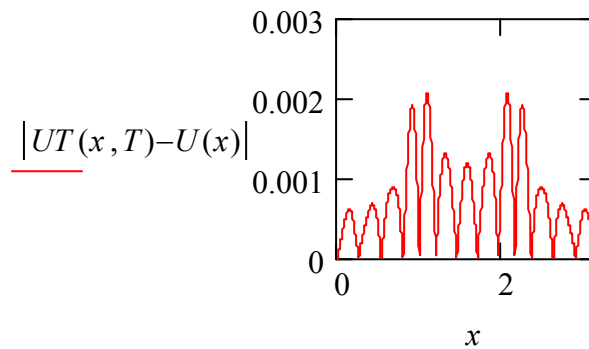
Пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t = T$ имеет вид

$$U(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100,k}$$

График пробного решения



Сравним решения полученные методом Галеркина и с помощью метода Фурье при $t=T$



Замените старое значение меры точности ε_{13} наибольшим значением $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{13} := 2.073 \times 10^{-3}$$

Получим матрицу предыдущего (для $n = 4$) пробного решения

$$AP := \text{submatrix}(A, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$MP := \text{submatrix}(M, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$CP := \text{submatrix}(C, 0, n-2, 0, n-2)$$

$$BP := \text{submatrix}(B, 0, n-2, 0, 0)$$

$$D1P := \text{submatrix}(D1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$N1P := \text{submatrix}(N1, 0, n-2, 0, 0)$$

$$M1P := AP^{-1} \cdot MP$$

$$C1P := AP^{-1} \cdot CP$$

$$B1P := AP^{-1} \cdot BP$$

$$D2P := AP^{-1} \cdot D1P$$

$$N2P := AP^{-1} \cdot N1P$$

$$i := 1..n-1$$

$$j := 1..n-1$$

$$AAP_{i-1, j-1} := 0$$

$$AAP_{n+i-2, n+j-2} := M1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{n+i-2, j-1} := C1P_{i-1, j-1}$$

$$AAP_{i-1,n+j-2} := \text{if}(i = j, 1, 0)$$

$$i := 1 .. n - 1$$

$$D2P_{n+i-2} := N2P_{i-1}$$

$$i := 1 .. n - 1$$

$$BBP_{i-1} := 0$$

$$BBP_{n+i-2} := B1P_{i-1}$$

$$HP := D2P$$

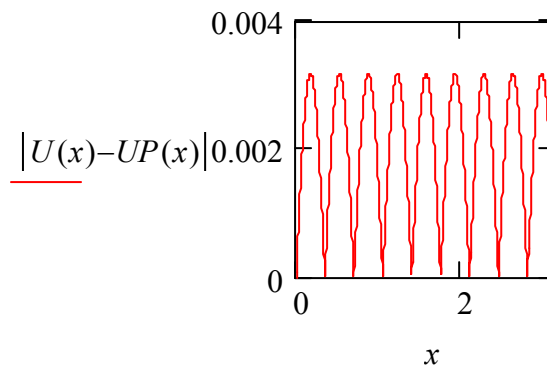
$$D(t, HP) := AAP \cdot HP + BBP$$

$$YP := \text{rkfixed}(HP, 0, T, 100, D)$$

Следовательно, предыдущее пробное решение $U(x)$ для $n = 5$ при $t=T$ имеет вид

$$UP(x) := V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100,k}$$

Сравним полученные решения для $n = 5$ и $n = 4$ при $t=T$



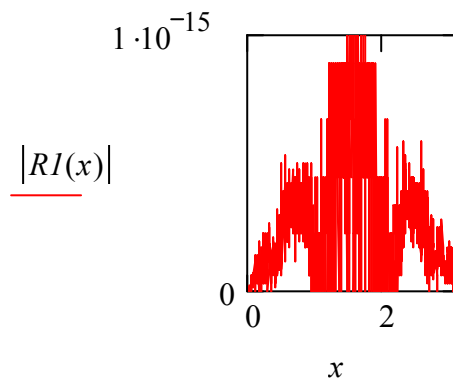
Замените старое значение меры точности ε_{23} наибольшим значением $|U(x) - UP(x)|$ на отрезке $[a, b]$

$$\varepsilon_{23} := 3.183 \times 10^{-3}$$

Найдем невязки полученного пробного решения.

При $t=T$ получим невязку

$$\begin{aligned} RI(x) := & \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \left[\sum_{z=1}^n (MI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,n+z} + CI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,z}) + BI_{k-1} \right] \right] - \\ & - \gamma(x) \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n (MI_{k-1,z-1} \cdot Y_{100,n+z}) \right] - \sum_{k=1}^n [KI(x) \cdot V2(k, x) + K2(x) \cdot VI(k, x) + \\ & + \beta(x) \cdot V(k, x)] \cdot Y_{100,k} - (KI(x) \cdot V2(0, x) + K2(x) \cdot VI(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \end{aligned}$$

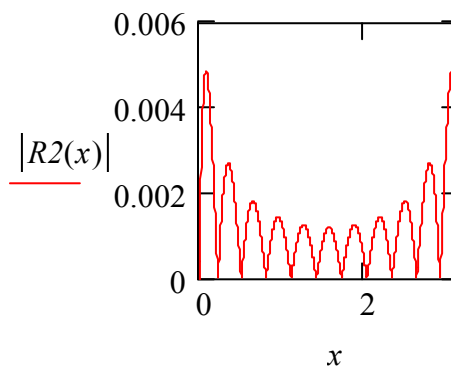


Замените старое значение меры точности ε_{33} наибольшим значением $|R1(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{33} := 1.776 \times 10^{-15}$$

При $t=0$ получим невязки $R2(x)$ и $R3(x)$

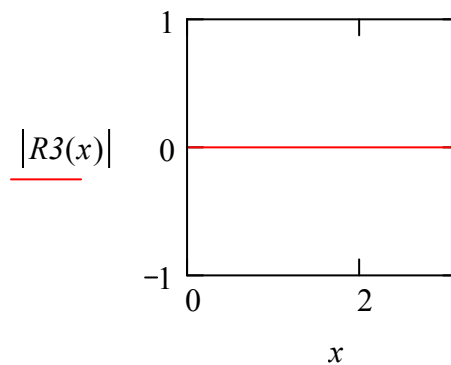
$$R2(x) := V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{43} наибольшим значением $|R2(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{43} := 4.852 \times 10^{-3}$$

$$R3(x) := -\phi(x) + \sum_{k=1}^n N2_{k-1} \cdot V(k, x)$$



Замените старое значение меры точности ε_{53} наибольшим значением $|R_3(x)|$ на отрезке $[a,b]$

$$\varepsilon_{53} := 0$$

Выводы

Таким образом, при $n = 5$ получаем следующие результаты использования трех систем пробных и поверочных функций при $t=T$

	$\max U(x,T) - u_n(x,T) $	$\max u_n(x,T) - u_{n-1}(x,T) $	$\max R1_n(x,T) $	$\max R2_n(x) $	$\max R3_n(x) $
1.	$\varepsilon_{11} = 0.019$	$\varepsilon_{21} = 0.057$	$\varepsilon_{31} = 3.382$	$\varepsilon_{41} = 1.864 \times 10^{-12}$	$\varepsilon_{51} = 0$
2.	$\varepsilon_{12} = 0.032$	$\varepsilon_{22} = 0.053$	$\varepsilon_{32} = 1.341$	$\varepsilon_{42} = 7.55 \times 10^{-15}$	$\varepsilon_{52} = 0$
3.	$\varepsilon_{13} = 0.002073$	$\varepsilon_{23} = 0.003183$	$\varepsilon_{33} = 1.776 \times 10^{-15}$	$\varepsilon_{43} = 0.004852$	$\varepsilon_{53} = 0$

Сделайте вывод о точности трех полученных решений и запишите лучшее из них. (В примере третья система пробных и поверочных тригонометрических функций дает лучшее приближение решения дифференциального уравнения.)

4.6. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера

Выполним расчетную часть лабораторной работы. Найдем решение $u(x, 1)$ задачи (4.29) – (4.31). Ее можно интерпретировать как задачу о поперечных колебаниях струны с закрепленными концами и с начальным профилем, определяемым равенством (4.31).

Найдем точное решение этой задачи методом разделения переменных [4,5]. Известно, что для волнового уравнения с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\},$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x)$$

решение имеет вид

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi\sqrt{c_1}}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{c_1}}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (4.32)$$

где A_n, B_n – коэффициенты Фурье

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad (4.33)$$

Найдем решение волнового уравнения с неоднородными граничными условиями (4.29)–(4.31). Ищем $U(x, t)$ в виде

$$U(x,t) = V(x,t) + 1 + \frac{x}{\pi}. \quad (4.34)$$

Процедура отыскания функции $u_0(x) = 1 + \frac{x}{\pi}$ описано в предыдущей главе.

Тогда из (4.29)–(4.31) для определения функции $V(x,t)$ получаем следующую задачу с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (4.35)$$

$$V(0,t) = 0, \quad V(\pi,t) = 0, \quad (4.36)$$

$$V(x,0) = x(x-\pi), \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (4.37)$$

Подставляя в (4.32), (4.33)

$$c_1 = 1, \quad l = \pi, \quad \psi(x) = x(x-\pi), \quad \varphi(x) = 0,$$

получим решение

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx),$$

где

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - x\pi) \sin(nx) dx, \quad B_n = 0.$$

Интегрируя два раза по частям, получаем

$$A_n = \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m; \\ -\frac{8}{\pi n^3}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Таким образом, точное решение задачи (4.29)–(4.31) аналитически задается выражением

$$U(x,t) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)t)}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x). \quad (4.38)$$

Найдем такое значение $m = M$, при котором функция

$$\hat{U}(x,1) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\cos(2m-1)}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x) \quad (4.39)$$

приблизенно с абсолютной точностью $\varepsilon = 0,001$ определяет функцию (4.38) на множестве

$$G = \{(x,t) \in D : 0 \leq x \leq \pi, t = T = 1\},$$

$$\text{т. е. } \forall x \in [0, \pi] : |U(x,1) - \hat{U}(x,1)| = \Delta \leq 0,001. \quad (4.40)$$

Оценим сверху величину Δ .

$$\Delta = \left| \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x) \right| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} |\sin((2m-1)x)| \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \leq \frac{8}{\pi} \int_M^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3} = \frac{8}{\pi} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{(2x-1)^2} \right) \Big|_M^{\infty} = \frac{2}{\pi(2M-1)^2}.$$

Значит, условие (4.40) будет заведомо выполнено, если

$$\delta(M) = \frac{2}{\pi(2M-1)^2} \leq 0,001. \quad (4.41)$$

Подбором устанавливаем, что наименьшее значение M при котором выполняется условие (4.41), равно 14.

Итак, функция

$$\hat{U}(x,1) = 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{14} \frac{\cos(2m-1)}{(2m-1)^3} \sin((2m-1)x)$$

гарантированно с точностью $\varepsilon = 0,001$ определяет значения функции $U(x,1)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Замечание. Процедуры получения функции $u_0(x, t)$ и решения методом Фурье необходимо описать в файле отчета.

Копируем график полученного решения при $T=1$ (рис. 4.1) из файла Giperb.mcd в файл отчета.

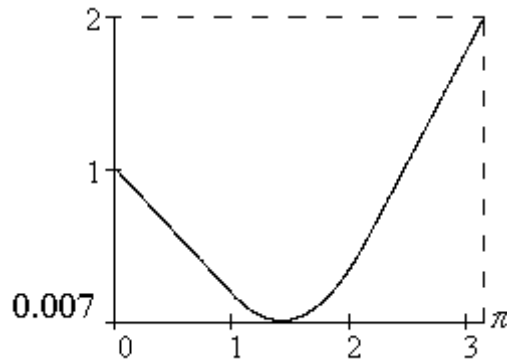


Рис.4.1. График точного решения

Построим теперь приближенное решение методом Галеркина, выбрав $u_0(x) = 1 + \frac{x}{\pi}$, тогда $f(x) - u_0(x) = x \cdot (x - 3,1416)$, и используя разные варианты пробных и поверочных функций.

Вводим порядок пробных решений $n = 5$.

1 вариант. Построим систему пробных функций вида (2.28) для задачи с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Так как $n_1 + n_2 = 2$, то отыскиваем все многочлены порядка меньше 2, удовлетворяющие краевым условиям. Если $u_1 = A$ или $u_1 = A + Bx$, то однородные условия выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за

требования линейной независимости пробных функций. Поэтому в качестве пробных и поверочных функций выбираем нормированные функции

$$u_k(x) = \frac{1}{\|u_k^*\|} u_k^*(x), \quad k = \overline{1,5}; \quad (4.42)$$

где

$$u_k^*(x) = x^k(x - \pi), \quad \|u_k^*\| = \sqrt{\int_0^\pi (u_k^*(x))^2 dx} = \frac{\pi^{k+1,5}}{\sqrt{(k+1)(2k+1)(2k+3)}}.$$

Замечание. Процедуру получения всех пробных и поверочных функций необходимо описать в файле отчета.

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (1,4891 \quad -2,0906 \quad 9,0874 \quad -11,0421 \quad 4,1935).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) + 1,4891u_1(x) - 2,0906u_2(x) + 9,0874u_3(x) - 11,0421u_4(x) + 4,1935u_5(x).$$

Анализируя график функции $|u_5(x,1) - U(x,1)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{11} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 0,019.$$

Анализируя график функции $|u_5(x,1) - u_4(x,1)|$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{21} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 0,057.$$

Анализируя график невязки $|R_1(x,1)|$ решения $u_5(x,1)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{31} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 3,382.$$

Анализируя график невязки $|R_2(x)|$ решения $u_5(x,1)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{41} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 1,864 \cdot 10^{-12}.$$

Анализируя график невязки $|R_3(x)|$ решения $u_5(x,1)$, определяем значение меры точности

$$\varepsilon_{51} = \max_{[0,\pi]} |R_3(x)| = 0.$$

2 вариант. В качестве пробных возьмем функции (4.42), а в качестве поверочных – нормированные многочлены Лежандра (2.31), которые ортогональны на отрезке $[0, \pi]$, т. е. функции

$$w_k(x) = \frac{1}{\|P_{k-1}(x)\|} P_{k-1}(x), \quad k = \overline{1,5};$$

где

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 - 1 \right),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \left(5 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^3 - 3 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} \left(35 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^4 - 30 \left(\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 + 3 \right),$$

$$\| P_k \| = \sqrt{\int_0^{\pi} (P_k(x))^2 dx} = \left(\frac{\pi}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$w_1(x) = 0.5642,$$

$$w_2(x) = 0.9772 \cdot (0.6366x - 1),$$

$$w_3(x) = 0.6308 \cdot (3 \cdot (0.6366x - 1)^2 - 1),$$

$$w_4(x) = 0.7464 \cdot (0.6366 \cdot x - 1) \cdot (5 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^2 - 3),$$

$$w_5(x) = 0.2116 \cdot (35 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^4 - 30 \cdot (0.6366 \cdot x - 1)^3 + 3).$$

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (0,877496 \quad 1,61338 \quad 0,366255 \quad -2,008929 \quad 0,762946).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) + 0,877496u_1(x) + 1,61338u_2(x) + 0,366255u_3(x) - \\ - 2,008929u_4(x) + 0,762946u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{12} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 0,032,$$

$$\varepsilon_{22} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 0,053,$$

$$\varepsilon_{32} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 1,341,$$

$$\varepsilon_{42} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 7.55 \cdot 10^{-15},$$

$$\varepsilon_{52} = \max_{[0,\pi]} |R_3(x)| = 0.$$

3 вариант. В качестве пробных и поверочных функций выбираем нормированные функции

$$u_k(x) = \frac{1}{\|u_k^*\|} u_k^*(x), k = \overline{1,5};$$

где

$$u_k^*(x) = \sin((2k-1)x), \quad \|u_k^*\| = \sqrt{\int_0^\pi (u_k^*(x))^2 dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Т. е. $u_1(x) = 0,7979 \cdot \sin(x); \quad u_2(x) = 0,7979 \cdot \sin(3x);$
 $u_3(x) = 0,7979 \cdot \sin(5x); \quad u_4(x) = 0,7979 \cdot \sin(7x); \quad u_5(x) = 0,7979 \cdot \sin(9x).$

В результате расчета по программе при $n=5$ получим вектор коэффициентов

$$(Y_{100,k})^T = (-1,724395 \quad 0,117022 \quad -0,007243 \quad -0,007015 \quad -0,003989).$$

Подставив коэффициенты $Y_{100,k}$, набираем в файле отчета получившееся пробное решение:

$$u_5(x,1) = u_0(x) - 1,724395u_1(x) + 0,117022u_2(x) - 0,007243u_3(x) - \\ - 0,007015u_4(x) - 0,003989u_5(x).$$

Определяем значения мер точности:

$$\varepsilon_{13} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - U(x,1)| = 2,073 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_{23} = \max_{[0,\pi]} |u_5(x,1) - u_4(x,1)| = 3,183 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_{33} = \max_{[0,\pi]} |R_1(x,1)| = 1,776 \cdot 10^{-15},$$

$$\varepsilon_{43} = \max_{[0,\pi]} |R_2(x)| = 4,852 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_{53} = \max_{[0,\pi]} |R_3(x)| = 0.$$

4.6. Основные термины

Уравнение гиперболического типа, начально-краевая задача.

Точное, приближенное, пробное решения уравнения. Невязки пробного решения уравнения.

Метод Галеркина. Пробные и поверочные функции.

4.7. Вопросы для самоконтроля

1. Приведите физические интерпретации задачи (4.1)–(4.4).
2. Каким условиям должны удовлетворять пробные функции?
3. Какими свойствами должны обладать поверочные функции?
4. Как находятся, согласно алгоритму метода Галеркина для решения задачи (4.1)–(4.4), функции R_1 , R_2 и R_3 , названные невязками?

5. Как строится система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $v_k(t)$ пробного решения? Постройте эту систему для задачи (4.1)–(4.4).

6. Как определяются начальные условия в задаче Коши относительно функций $v_k(t)$? Найти уравнения, определяющие эти условия для задачи (4.1)–(4.4).

7. Приведите конкретный пример пробных функций для задачи (4.1)–(4.4).

8. Как нормировать пробную или поверочную функцию на отрезке $[a, b]$?

9. Как проверить ортогональность функций на $[a, b]$?

10. Как проверить ортонормированность функций на $[a, b]$?

11. Опишите алгоритм аналитического метода решения задач Коши для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

12. Опишите алгоритм сведения канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений к равносильной нормальной системе.

5. Решение первой краевой задачи для двумерного эллиптического уравнения методом Галеркина

5.1. Постановка задачи и алгоритм метода

Рассмотрим следующую задачу. Требуется в плоской замкнутой области D найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри D уравнению

$$K_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_3(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + K_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + K_5(x, y) \cdot u = f(x, y), \quad (5.1)$$

а на границе Γ_D области D – краевому условию

$$u(M) \Big|_{M \in \Gamma_D} = g(M), \quad (5.2)$$

где $K_1(x, y)$ ($K_1 > 0$), $K_2(x, y)$ ($K_2 > 0$), $K_3(x, y)$, $K_4(x, y)$, $K_5(x, y)$, $f(x, y)$, $g(M)$ – заданные непрерывные функции.

Напомним, что в такой форме может быть поставлена первая краевая задача двумерной стационарной теплопроводности, рассмотренная в главе 1.

Заметим, что частным случаем задачи (5.1)–(5.2) является задача Дирихле на плоскости [1].

В методе Галеркина для нахождения приближенного решения задачи (5.1)–(5.2) строится функциональная последовательность $\{u_n(x, y)\}_0^\infty$ из пробных решений $u_n(x, y)$ следующим образом.

Зададим в области D некоторую систему дважды дифференцируемых функций $v_0(x, y)$, $v_1(x, y)$, ..., $v_n(x, y)$ таких, что $v_0(x, y)$ удовлетворяет краевому условию (5.2), а пробные функции $v_i(x, y)$ ($i \geq 1$) являются линейно независимыми на D и удовлетворяют однородному граничному условию

$$v_i(M) \Big|_{M \in \Gamma_D} = 0. \quad (5.3)$$

Составляем функцию

$$u_n(x, y) = v_0(x, y) + \sum_{k=1}^n C_k \cdot v_k(x, y) \quad (5.4)$$

с неизвестными пока постоянными коэффициентами C_k . Заметим, что, в силу линейности относительно $u(x, y)$ граничного условия (5.2), функция (5.4) при любых значениях C_1, \dots, C_n удовлетворяет ему. Подставляя $u_n(x, y)$ из (5.4) вместо $u(x, y)$ в уравнение (5.1), получаем функцию

$$R_n(x, y, C_1, \dots, C_n) = L[v_0] + \sum_{k=1}^n C_k L[v_k] - f(x, y), \quad (5.5)$$

где введено обозначение

$$L(v) \equiv K_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial v}{\partial x} + K_4 \frac{\partial v}{\partial y} + K_5 \cdot v.$$

Функцию (5.5) называют невязкой. Она линейно зависит от параметров C_1, \dots, C_n и является характеристикой уклонения $u_n(x, y)$ от точного решения $U(x, y)$ задачи. Если невязка (5.5) тождественно равна нулю внутри области D , то $U(x, y) = u_n(x, y)$. В общем случае невязка оказывается отличной от нуля и, следуя Галеркину, значения параметров C_1, \dots, C_n определяем из системы уравнений

$$(R_n(x, y, C_1, \dots, C_n), W_k(x, y)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.6)$$

где

$$(v(x, y), g(x, y)) = \iint_D v(x, y) \cdot g(x, y) dx dy \quad (5.7)$$

является скалярным произведением двух функций, а $W_k(x, y)$ – заданные непрерывные и линейно независимые на D функции, называемые поверочными. Заметим, что в качестве поверочных функций можно взять пробные. Если $W_k(x, y)$ входят в полную систему функций, то при $n \rightarrow \infty$ из равенств (5.6) следует сходимость невязки к нулю в среднем.

Запишем условие (5.6) в развернутом виде, для определения значений параметров C_k получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot C_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kj} &= (L[v_j], W_k) = \iint_D L[v_j] \cdot W_k dx dy, \\ b_k &= (f - L[v_0], W_k) = \iint_D (f - L[v_0]) \cdot W_k dx dy. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Решив систему (5.8) и подставив определяемые этим решением значения C_k в (5.4), заканчиваем построение пробного решения $u_n(x, y)$.

Опишем возможный алгоритм приближенного решения задачи (5.1), (5.2) методом Галеркина, предполагая, что последовательность $u_n(x, y)$ сходится поточечно к $U(x, y)$.

1. Подготовительный шаг алгоритма. На этом шаге выбираем функцию $v_0(x, y)$, пробные функции $v_1(x, y), \dots, v_n(x, y)$ и поверочные функции $W_1(x, y), \dots, W_n(x, y)$. Заметим, что пробные и поверочные функции можно строить или выбирать, руководствуясь соображениями, изложенными в разделе 2.5, и подробно описаны в работах [1], [2]. Затем находим функцию $R_0(x, y) = L[v_0] - f(x, y)$, т. е. невязку от подстановки $u_0(x, y)$ в уравнение (5.1). Если $\forall (x, y) \in D: R_0(x, y) = 0$, то $v_0(x, y) = U(x, y)$ и вычисление заканчиваем. Если же $R_0(x, y) \neq 0$, то переходим к следующему шагу алгоритма.

2. Первый шаг алгоритма. Строим функцию $u_1 = v_0(x, y) + C_1 \cdot v_1(x, y)$, определив значение C_1 из решения системы (5.8) при $n = 1$. Находим невязку $R_1(x, y, C_1) = L[v_0] - f(x, y) + C_1 L[v_1] = R_0(x, y) + C_1 L[v_1]$. Если $R_1(x, y, C_1) \equiv 0$, то $U = u_1(x, y)$ и задача решена, если же $R_1(x, y, C_1) \neq 0$, то находим $\max_D |u_1(x, y) - v_0(x, y)| = \Delta_1$. Если $\Delta_1 \leq \varepsilon$, где ε – заданная мера точности приближенного решения, то полагаем $U(x, y) \approx u_1(x, y)$ и вычисления заканчиваем. Если же $\Delta_1 > \varepsilon$, то переходим к вычислениям на следующем шаге и т. д.

Таким образом, на m -м шаге ($m \geq 1$) строим функцию

$$u_m(x, y) = v_0(x, y) + \sum_{i=1}^m C_i v_i(x, y),$$

определив значения C_1, \dots, C_m из решения системы (5.8) при $n = m$, и определяем невязку

$$R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) = R_0(x, y) + \sum_{i=1}^m C_i L(v_i).$$

Если $R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) \equiv 0$, то $U(x, y) = u_m(x, y)$ и вычисления заканчиваем. Если $R_m(x, y, C_1, \dots, C_m) \neq 0$, то находим $\Delta_m = \max_D |u_m - u_{m-1}|$. Если $\Delta_m \leq \varepsilon$, то $U(x, y) \approx u_m(x, y)$, если же $\Delta_m > \varepsilon$, то переходим к $(m + 1)$ -му шагу.

5.2. Задание к лабораторной работе

Требуется в плоской области (в прямоугольнике)

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри области D дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c(a - x)xy, \quad (5.10)$$

а на границе области D – краевым условиям

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = d, \quad (5.11)$$

где a, b, c, d – некоторые заданные числовые параметры задачи.

Заметим, что эта задача является частным случаем задачи (5.1)–(5.2), при $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = K_4 = K_5 = 0$, $f(x, y) = c(a - x)xy$. Ее можно интерпретировать как задачу двумерной стационарной теплопроводности, когда на границе плоской замкнутой области поддерживается постоянная температура и задана плотность тепловых источников внутри области.

Варианты заданий, определяемые различными наборами значений параметров задачи, приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Варианты заданий к лабораторной работе

№	a	b	c	d	№	a	b	c	d
1	3	π	2	5	11	π	3	-2	-6
2	π	3	1	6	12	2	2	1	-5
3	1	1	-2	10	13	1	1	2	9
4	π	π	1	6	14	4	4	-1	1
5	4	4	-1	9	15	2	2	-1	9
6	3	3	π	4	16	3	3	-2	3
7	2	2	3	8	17	2	2	8	3
8	π	π	-3	3	18	4	4	-2	1
9	1	1	2	3	19	π	π	2	8
10	π	π	-2	2	20	1	1	2	-4

Лабораторная работа выполняется на ЭВМ с использованием математически ориентированной среды MathCAD для реализации алгоритма построения пробных решений $u_m(x, y)$ для задачи (5.10)–(5.11).

Перед обращением к программе необходимо подготовить числовые и строчные данные.

Числовые данные:

a – правый конец отрезка изменения переменной x ;

b – правый конец отрезка изменения переменной y ;

c и d – численные значения параметров из уравнения (5.10) и условия (5.11).

n – число параметров C_1, \dots, C_n в пробном решении (значение параметра n задает преподаватель);

Строчные данные:

– аналитические выражения для пробных и поверочных функций, которые программа нормирует автоматически.

В лабораторной работе требуется:

1. Используя двойные ряды Фурье, найти точное аналитически заданное решение $U(x, y)$ задачи (5.10)–(5.11). Определить длину отрезка этого ряда, обеспечивающую точность решения 0.001. С помощью ЭВМ построить с шагами $h_x = 0.1a$, $h_y = 0.1b$ трехзначную таблицу и график этого решения.

2. Методом Галеркина найти три пробных решения $u_n(x, T)$, используя нормированные системы пробных и поверочных функций, тип которых задает преподаватель.

3. С помощью полученных мер точности полученных решений сделать вывод об их точности и выписать лучшее из них.

4. Оформить и защитить отчет.

5.3. Выполнение работы в компьютерном классе

1. Прежде чем начать выполнение лабораторной работы на ЭВМ, внимательно ознакомьтесь с данной инструкцией.

2. При необходимости включите сами (или попросите лаборанта) питание компьютера. После того, как система загрузится, запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Mathcad, если же ярлык отсутствует, тогда открываем программу через кнопку «Пуск» (Программы → Mathsoft → Mathcad).

3. Узнайте у лаборанта расположение файла Ellipt.mcd и откройте его (File → Open или, если программа русифицирована, Файл → Открыть). При любой ошибке ввода программы нужно обратиться к лаборанту.

4. Прочитайте в начале файла задание на лабораторную работу и просмотрите пример выполнения работы, для которого исследование уже проведено. Программа файла Ellipt.mcd (см. раздел 5.5) состоит из четырех пунктов «Постановка задачи», «Получение точного решения», «Получение приближенного решения», «Выводы». Цели и задачи каждого из пунктов описаны ниже.

5. Для набора функций нужно либо воспользоваться всплывающим меню инструментов «Calculator», либо ввести ее с клавиатуры, используя следующие символы арифметических действий и стандартных функций: сложение – ‘+’; вычитание – ‘-’; умножение – ‘*’; деление – ‘/’; возведение в степень – ‘^’; квадратный корень – ‘\’; синус – $\sin(x)$; косинус – $\cos(x)$; экспонента – $\exp(x)$; натуральный логарифм – $\ln(x)$. При вводе числовых данных, являющихся десятичными дробями, целую и дробную части нужно разделять точкой (например, 0.5, 1.5 и т. д.).

6. Порядок выполнения работы Вам укажет программа подсказками и заданиями, выделенными красным цветом.

7. Для формирования файла отчета запускаем двойным щелчком левой кнопки мыши на рабочем столе программу Microsoft Word, если же ярлык отсутствует, то открываем программу через кнопку «Пуск». Открываем новый документ. В начале документа необходимо оформить титульный лист, описать математическую постановку задачи и результаты выполнения подготовительных расчетов. Затем скопировать основные результаты расчетов из программы Ellipt.mcd в документ и оформить итоговый отчет. Копирование – ‘Ctrl’+‘Insert’, вставка – ‘Shift’+‘Insert’. Сохранить документ как «ФамилияСтудента_группа_Ellipt.doc» и распечатать. Файл отчета оформить аналогично приложению А, описывающему выполнение лабораторной работы №1.

5.4. Порядок выполнения лабораторной работы.

1. Повторить главу 1. Изучить разделы 5.1–5.3 данной главы и подготовить ответы на контрольные вопросы из раздела 5.7 данной работы.

2. Пройти собеседование с преподавателем; получить номер варианта работы, значение параметра n и указания по выбору пробных и поверочных функций.

3. Выполнить первый пункт задания, связанный с построением двойного ряда Фурье для точного решения задачи $U(x, y)$ и нахождением длины отрезка этого ряда, обеспечивающую точность решения 0,001.

4. Выполнить подготовительный шаг алгоритма метода Галеркина, подготовить все числовые и строчные данные для расчетов и в пункте «Постановка задачи» программы Ellipt.mcd ввести их вместо данных примера, введенных изначально.

5. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число, намного превышающее найденное в 3-м пункте число слагаемых в разложении точного решения в двойной тригонометрический ряд Фурье (чтобы гарантировать достаточную точность решения и в дальнейшем считать его точным). Скопировать график и трехзначную таблицу получившегося точного решения $U(x, y)$ в файл отчета.

6. В пункте «Получение приближенного решения» рассмотрено применение трех систем пробных и поверочных функций. По заданию преподавателя ввести (вместо уже введенных для примера) системы пробных $V_1(k, x)$ и поверочных $W(k, x)$ функций, указанных во 2-м пункте (см. раздел 5.5). Выполнить построение n -го пробного решения задачи. Следует скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_k пробных решений и набрать в отчете решение с этими коэффициентами. Так же необходимо скопировать в этот файл пункт «Выводы».

7. Оформить и распечатать файл отчета по лабораторной работе, который должен содержать титульный лист, математическую постановку задачи и ее физическую интерпретацию, результаты выполнения подготовительных расчетов, основные результаты расчетов на ЭВМ, выводы о возможностях использованных систем пробных и поверочных функций и наиболее приближенное к точному аналитическое решение.

8. Защитить отчет.

5.5. Программа в системе MathCAD и тестирующий пример

В данном разделе приведен текст программы Ellipt.mcd, разработанной для решения первой краевой задачи для двухмерного эллиптического уравнения методом Галеркина. В тексте разбирается получение пробного решения $u_9(x, y)$ задачи: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$$

уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\pi - x)xy, \quad (5.12)$$

а на границе области – условиям

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 10. \quad (5.13)$$

Задача (5.12)–(5.13) является частным случаем задачи (5.10)–(5.11) при $a = b = \pi$, $c = -1$, $d = 10$ и $n = 9$.

Использовать три системы пробных и поверочных функций:

1. Пробные и поверочные функции – произведения многочленов (2.28);
2. Пробные функции – произведения многочленов (2.28), поверочные функции – произведения многочленов Лежандра (2.31);
3. Пробные и поверочные функции – произведения тригонометрических функций $\sin kx \cdot \sin my$.

Лабораторная работа **«Решение первой краевой задачи для двухмерного** **эллиптического уравнения методом Галеркина»**

Задание на лабораторную работу

1. В пункте «Постановка задачи» ввести вместо данных примера непрерывные функции уравнения $K1(x, y)$ ($K1 > 0$), $K2(x, y)$ ($K2 > 0$), $K3(x, y)$, $K4(x, y)$, $K5(x, y)$, $f(x, y)$ и числовые параметры задачи a, b, c, d своего варианта.

2. В пункте «Получение точного решения» программы ввести число слагаемых в разложении в двойной тригонометрический ряд Фурье, намного превышающее найденное аналитически число, обеспечивающее точность решения 0.001. Скопировать таблицу и график решения в файл отчета.

3. В пункте «Получение приближенного решения» выполнить построение n -го пробного решения задачи тремя системами пробных и поверочных функций. Скопировать в файл отчета вектор коэффициентов C_k пробного решения и набрать в отчете решение с этими коэффициентами.

4. Скопировать результаты пункта «Выводы» в файл отчета, и, анализируя их, сделать в файле отчета выводы о точности построенных решений.

Постановка задачи

Требуется в плоской замкнутой области $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ найти функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую внутри D уравнению

$$K1(x, y) \cdot \frac{d^2}{dx^2} U + K2(x, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} U + K3(x, y) \cdot \frac{d}{dx} U + K4(x, y) \cdot \frac{d}{dy} U + K5(x, y) \cdot U = f(x, y)$$

а на границе Γ_D области D краевому условию

$$U(0, y) = U(a, y) = U(x, 0) = U(x, b) = d.$$

Введите непрерывные функции уравнения $K1(x, y)$ ($K1 > 0$), $K2(x, y)$ ($K2 > 0$), $K3(x, y)$, $K4(x, y)$, $K5(x, y)$ и числовые параметры задачи a, b, c, d

$$K1(x, y) := 1 \quad K2(x, y) := 1 \quad K3(x, y) := 0 \quad K4(x, y) := 0 \quad K5(x, y) := 0$$

$$a := \pi \quad b := \pi \quad c := -1 \quad d := 10$$

$$f(x, y) := c \cdot (a - x) \cdot x \cdot y$$

Получение точного решения

Найдем точное решение $U(x, y)$, используя разложение функции в двойной тригонометрический ряд Фурье $U(x, y) = d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{km} \sin(k \pi x / a) \sin(m \pi y / b)$.

Введите число слагаемых, обеспечивающих достаточно большую точность решения (для примера $M=6$ обеспечивает точность 0,001, поэтому возьмем число, превышающее данное, например, $M=27$)

$$M := 27$$

Вычислим коэффициенты H_{km} (Коэффициенты вычислены при условии $K1(x, y)=1$, $K2(x, y)=1$, $K3(x, y)=0$, $K4(x, y)=0$, $K5(x, y)=0$. В противном случае необходимо получить формулу для вычисления коэффициентов и запрограммировать ее)

$$i := 1..M$$

$$j := 1..M$$

$$H_{i-1, j-1} := \frac{-4}{\pi^2 \cdot (i^2 + j^2)} \cdot \left(\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot j \cdot y}{b}\right) dy dx \right)$$

Следовательно, точное решение $U(x, y)$ имеет вид

$$U(x, y) := d + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M H_{k-1, m-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{b}\right)$$

Получим таблицу $U1$ получившегося точного решения, разбив область D на 100 частей

$$i := 0..10$$

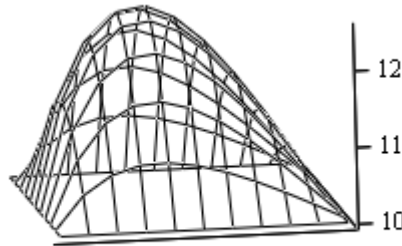
$$j := 0..10$$

$$U1_{i, j} := U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Таблица точного решения

$$U1 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10.182 & 10.357 & 10.518 & 10.655 & 10.758 & 10.812 & 10.796 & 10.685 & 10.438 & 10 \\ 10 & 10.343 & 10.674 & 10.977 & 11.236 & 11.429 & 11.529 & 11.498 & 11.285 & 10.819 & 10 \\ 10 & 10.469 & 10.92 & 11.334 & 11.687 & 11.95 & 12.085 & 12.04 & 11.746 & 11.109 & 10 \\ 10 & 10.549 & 11.076 & 11.56 & 11.972 & 12.279 & 12.435 & 12.38 & 12.034 & 11.29 & 10 \\ 10 & 10.576 & 11.129 & 11.637 & 12.069 & 12.391 & 12.554 & 12.495 & 12.133 & 11.351 & 10 \\ 10 & 10.549 & 11.076 & 11.56 & 11.972 & 12.279 & 12.435 & 12.38 & 12.034 & 11.29 & 10 \\ 10 & 10.469 & 10.92 & 11.334 & 11.687 & 11.95 & 12.085 & 12.04 & 11.746 & 11.109 & 10 \\ 10 & 10.343 & 10.674 & 10.977 & 11.236 & 11.429 & 11.529 & 11.498 & 11.285 & 10.819 & 10 \\ 10 & 10.182 & 10.357 & 10.518 & 10.655 & 10.758 & 10.812 & 10.796 & 10.685 & 10.438 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

График точного решения



$$\min(U1) = 10 \quad \max(U1) = 12.554$$

Скопируйте таблицу и график точного решения в файл отчета.

Получение приближенного решения

Введите $n1 = \sqrt{n}$ – **порядок пробного решения** $U_n = V(0,0,x,y) +$

$$+ \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k,m} V(k,m,x,y)$$

$$n1 := 3$$

1. Введите пробные функции

$$V1(k,m,x,y) := x^k \cdot (a-x) \cdot y^m \cdot (b-y)$$

Нормируем их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты

$$i := 1 \dots n1$$

$$j := 1 \dots n1$$

$$VV_{i-1,j-1} := \sqrt{\int_0^a \int_0^b (V1(i,j,x,y))^2 dx dy}$$

Получили нормированные пробные функции

$$V(k, m, x, y) := \text{if} \left(k + m \neq 0, \frac{V1(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right)$$

Введите поверочные функции (для примера в качестве поверочных возьмем пробные)

$$W(k, m, x, y) := V(k, m, x, y)$$

Введем оператор, соответствующий левой части уравнения

$$L1(k, m, x, y, V) := K1(x, y) \cdot \frac{d^2}{dx^2} V(k, m, x, y) + K2(x, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} V(k, m, x, y) + K3(x, y) \cdot \frac{d}{dx} V(k, m, x, y)$$

$$L(k, m, x, y, V) := L1(k, m, x, y, V) + K4(x, y) \cdot \frac{d}{dy} V(k, m, x, y) + K5(x, y) \cdot V(k, m, x, y)$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..n1 \quad j := 1..n1$$

$$B_{i-1+n1 \cdot (j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy$$

$$i1 := 1..n1 \quad j1 := 1..n1 \quad i2 := 1..n1 \quad j2 := 1..n1$$

$$A_{i1-1+n1 \cdot (j1-1), i2-1+n1 \cdot (j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (2.115416 \quad 0.932257 \quad -0.601769 \quad 0.415005 \quad 0.720142 \quad -0.464849 \quad 1.036596 \quad 2.124301 \times 10^{-12} \quad -1.11211 \times 10^{-12})$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k , наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Следовательно, пробное решение $U(x, y)$ для $n1=3$ имеет вид

$$U(x, y) := V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k-1+n1 \cdot (m-1)} \cdot V(k, m, x, y)$$

Составим таблицу $U2$ получившегося пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U2_{i,j} := U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Сравним точное и приближенное (при $n1=3$) решения, для этого найдем разность матриц этих решений $U1$ и $U2$

Таблица сравнения точного и приближенного решения

$$U12 := U1 - U2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.016 \times 10^{-3} & 1.675 \times 10^{-4} & 4.297 \times 10^{-3} & 4.353 \times 10^{-3} & 5.58 \times 10^{-4} & -4.141 \times 10^{-3} & -6.265 \times 10^{-3} & -2.663 \times 10^{-3} & 4.161 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -6.288 \times 10^{-3} & 1.113 \times 10^{-3} & 8.224 \times 10^{-3} & 8.424 \times 10^{-3} & 2.367 \times 10^{-3} & -4.824 \times 10^{-3} & -7.533 \times 10^{-3} & -1.154 \times 10^{-3} & 9.02 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -7.791 \times 10^{-3} & 1.523 \times 10^{-3} & 0.01 & 0.01 & 2.101 \times 10^{-3} & -6.996 \times 10^{-3} & -0.01 & -2.334 \times 10^{-3} & 0.01 & 0 \\ 0 & -8.744 \times 10^{-3} & 1.455 \times 10^{-3} & 0.011 & 0.01 & 6.529 \times 10^{-4} & -9.833 \times 10^{-3} & -0.014 & -4.992 \times 10^{-3} & 8.991 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -9.081 \times 10^{-3} & 1.358 \times 10^{-3} & 0.011 & 9.795 \times 10^{-3} & -1.116 \times 10^{-4} & -0.011 & -0.015 & -6.298 \times 10^{-3} & 8.289 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -8.744 \times 10^{-3} & 1.455 \times 10^{-3} & 0.011 & 0.01 & 6.529 \times 10^{-4} & -9.833 \times 10^{-3} & -0.014 & -4.992 \times 10^{-3} & 8.991 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -7.791 \times 10^{-3} & 1.523 \times 10^{-3} & 0.01 & 0.01 & 2.101 \times 10^{-3} & -6.996 \times 10^{-3} & -0.01 & -2.334 \times 10^{-3} & 0.01 & 0 \\ 0 & -6.288 \times 10^{-3} & 1.113 \times 10^{-3} & 8.224 \times 10^{-3} & 8.424 \times 10^{-3} & 2.367 \times 10^{-3} & -4.824 \times 10^{-3} & -7.533 \times 10^{-3} & -1.154 \times 10^{-3} & 9.02 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -4.016 \times 10^{-3} & 1.675 \times 10^{-4} & 4.297 \times 10^{-3} & 4.353 \times 10^{-3} & 5.58 \times 10^{-4} & -4.141 \times 10^{-3} & -6.265 \times 10^{-3} & -2.663 \times 10^{-3} & 4.161 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U12_{ij}|$ равно

$$\varepsilon11 := \max(|\max(U12)|, |\min(U12)|) \quad \varepsilon11 = 0.015$$

Найдем предыдущее пробное решение

$$i := 1..n1 - 1$$

$$j := 1..n1 - 1$$

$$B1_{i-1+(n1-1)(j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy$$

$$i1 := 1..n1 - 1$$

$$j1 := 1..n1 - 1$$

$$i2 := 1..n1 - 1$$

$$j2 := 1..n1 - 1$$

$$A1_{i1-1+(n1-1)(j1-1), i2-1+(n1-1)(j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $A1 * C1 = B1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов $C1_k$

$$C1 := A1^{-1} \cdot B1$$

$$C1^T = \begin{pmatrix} 1.848825 & -4.985595 \times 10^{-15} & 2.30589 & 5.134781 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Получим матрицу предыдущего (для $n1 = 2$) пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$UP(x, y) := \text{if} \left[n1 \neq 1, V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n1-1} \sum_{m=1}^{n1-1} C1_{k-1+(n1-1)(m-1)} \cdot V(k, m, x, y), V(0, 0, x, y) \right]$$

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U3_{i,j} := UP\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Построим таблицу сравнения полученных решений для $n1 = 3$ и $n1 = 2$

$$U23 := U2 - U3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.009 & -0.016 & -0.054 & -0.087 & -0.103 & -0.099 & -0.076 & -0.042 & -0.009 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.036 & 0.01 & -0.04 & -0.083 & -0.103 & -0.093 & -0.057 & -0.01 & 0.022 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.065 & 0.049 & 0 & -0.043 & -0.06 & -0.044 & -0 & 0.048 & 0.065 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.087 & 0.08 & 0.036 & -0.004 & -0.017 & 0.004 & 0.05 & 0.096 & 0.099 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.095 & 0.092 & 0.051 & 0.012 & 1.03 \times 10^{-13} & 0.023 & 0.07 & 0.114 & 0.112 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.087 & 0.08 & 0.036 & -0.004 & -0.017 & 0.004 & 0.05 & 0.096 & 0.099 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.065 & 0.049 & 0 & -0.043 & -0.06 & -0.044 & -0 & 0.048 & 0.065 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.036 & 0.01 & -0.04 & -0.083 & -0.103 & -0.093 & -0.057 & -0.01 & 0.022 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.009 & -0.016 & -0.054 & -0.087 & -0.103 & -0.099 & -0.076 & -0.042 & -0.009 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U23_{ij}|$ равно

$$\varepsilon 21 := \max(|\max(U23)|, |\min(U23)|) \quad \varepsilon 21 = 0.11439$$

Найдем невязку полученного пробного решения

$$R(x, y) := \sum_{k=1}^{nl} \sum_{m=1}^{nl} C_{k-1+nl(m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y)$$

Получим таблицу невязки пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$i := 0..10 \quad j := 0..10$$

$$U4_{i,j} := R\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Таблица невязки

$$U4 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0.04 & -0.044 & -0.048 & -0.072 & -0.121 & -0.189 & -0.253 & -0.278 & -0.215 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.221 & -0.096 & 5.561 \times 10^{-4} & 0.05 & 0.049 & 6.201 \times 10^{-3} & -0.055 & -0.097 & -0.068 & 0.096 & 0.476 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.376 & -0.14 & 0.019 & 0.095 & 0.094 & 0.04 & -0.032 & -0.073 & -0.019 & 0.207 & 0.699 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.478 & -0.17 & 0.024 & 0.109 & 0.101 & 0.029 & -0.06 & -0.109 & -0.046 & 0.217 & 0.779 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.535 & -0.189 & 0.024 & 0.111 & 0.094 & 9.108 \times 10^{-3} & -0.094 & -0.152 & -0.086 & 0.195 & 0.796 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.554 & -0.195 & 0.023 & 0.11 & 0.09 & -4.53 \times 10^{-14} & -0.108 & -0.169 & -0.103 & 0.183 & 0.796 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.535 & -0.189 & 0.024 & 0.111 & 0.094 & 9.108 \times 10^{-3} & -0.094 & -0.152 & -0.086 & 0.195 & 0.796 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.478 & -0.17 & 0.024 & 0.109 & 0.101 & 0.029 & -0.06 & -0.109 & -0.046 & 0.217 & 0.779 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.376 & -0.14 & 0.019 & 0.095 & 0.094 & 0.04 & -0.032 & -0.073 & -0.019 & 0.207 & 0.699 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.221 & -0.096 & 5.561 \times 10^{-4} & 0.05 & 0.049 & 6.201 \times 10^{-3} & -0.055 & -0.097 & -0.068 & 0.096 & 0.476 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -0.04 & -0.044 & -0.048 & -0.072 & -0.121 & -0.189 & -0.253 & -0.278 & -0.215 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U4_{ij}|$ равно

$$\varepsilon 31 := \max(|\max(U4)|, |\min(U4)|) \quad \varepsilon 31 = 0.79611$$

2. Введите пробные функции (для примера в качестве пробных функций возьмем функции пункта 1, а проверочными функциями возьмем многочлены Лежандра):

$$VI(k, m, x, y) := x^k \cdot (a - x) \cdot y^m \cdot (b - y)$$

Нормируем их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты

$$i := 1..nl$$

$$j := 1..nl$$

$$VV_{i-1, j-1} := \sqrt{\int_0^a \int_0^b (VI(i, j, x, y))^2 dx dy}$$

Получили нормированные пробные функции

$$V(k, m, x, y) := \text{if} \left(k + m \neq 0, \frac{VI(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d \right)$$

Введите проверочные функции:

$$P(k, t) := \text{if} \left[k \neq 0, \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, 1 \right]$$

$$k := 1..nl$$

$$m := 1..nl$$

$$W(k, m, x, y) := \frac{P \left[k - 1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \right]}{\sqrt{\int_0^a \left[P \left[k - 1, \frac{2}{a} \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \right]^2 dx}} \cdot \frac{P \left[m - 1, \frac{2}{b} \cdot \left(y - \frac{b}{2} \right) \right]}{\sqrt{\int_0^b \left[P \left[m - 1, \frac{2}{b} \cdot \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \right]^2 dy}}$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..nl$$

$$j := 1..nl$$

$$B_{i-1+nl \cdot (j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy$$

$$i1 := 1..nl$$

$$j1 := 1..nl$$

$$i2 := 1..nl$$

$$j2 := 1..nl$$

$$A_{i1-1+nl \cdot (j1-1), i2-1+nl \cdot (j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (2.012859 \quad 0.919679 \quad -0.59365 \quad 0.465166 \quad 0.797172 \quad -0.514572 \quad 1.074989 \quad -3.138911 \times 10^{-13} \quad 1.875523 \times 10^{-13})$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Следовательно, пробное решение $U(x,y)$ для $n1 = 3$ имеет вид

$$U(x,y) := V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k-1+n1 \cdot (m-1)} \cdot V(k,m,x,y)$$

Построим таблицу $U2$ получившегося пробного решения, разбив область D на 100 частей, и график этого решения

$i := 0..10$

$j := 0..10$

$$U2_{i,j} := U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Сравним точное и приближенное (при $n1 = 3$) решения, для этого найдем разность матриц этих решений $U1$ и $U2$

Таблица сравнения точного и приближенного решения

$$U12 := U1 - U2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.011 & 0.015 & 0.013 & 0.004 & -0.005 & -0.012 & -0.011 & -0.003 & 0 \\ 0 & 0.006 & 0.019 & 0.026 & 0.021 & 0.006 & -0.011 & -0.022 & -0.019 & -0.006 & 0 \\ 0 & 0.009 & 0.025 & 0.032 & 0.024 & 0.004 & -0.018 & -0.032 & -0.029 & -0.011 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.028 & 0.035 & 0.025 & 0.001 & -0.025 & -0.041 & -0.038 & -0.017 & 0 \\ 0 & 0.011 & 0.029 & 0.036 & 0.025 & -0 & -0.027 & -0.045 & -0.041 & -0.019 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.028 & 0.035 & 0.025 & 0.001 & -0.025 & -0.041 & -0.038 & -0.017 & 0 \\ 0 & 0.009 & 0.025 & 0.032 & 0.024 & 0.004 & -0.018 & -0.032 & -0.029 & -0.011 & 0 \\ 0 & 0.006 & 0.019 & 0.026 & 0.021 & 0.006 & -0.011 & -0.022 & -0.019 & -0.006 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.011 & 0.015 & 0.013 & 0.004 & -0.005 & -0.012 & -0.011 & -0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U12_{ij}|$ равно

$$\varepsilon12 := \max(|\max(U12)|, |\min(U12)|) \quad \varepsilon12 = 0.045$$

Найдем предыдущее пробное решение

$i := 1..n1 - 1$

$j := 1..n1 - 1$

$$B1_{i-1+(n1-1) \cdot (j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x,y) - L(0,0,x,y,V)) \cdot W(i,j,x,y) dx dy$$

$i1 := 1..n1 - 1$

$j1 := 1..n1 - 1$

$i2 := 1..n1 - 1$

$j2 := 1..n1 - 1$

$$A1_{i1-1+(n1-1)(j1-1), i2-1+(n1-1)(j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $A1 \cdot C1 = B1$ матричным методом, получим вектор коэффициентов $C1_k$

$$C1 := A1^{-1} \cdot B1$$

$$C1^T = \left(1.78035 \quad 6.202586 \times 10^{-14} \quad 2.379093 \quad 1.416573 \times 10^{-14} \right)$$

Получим матрицу предыдущего (для $n1 = 2$) пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$UP(x, y) := \text{if} \left[n1 \neq 1, V(0, 0, x, y) + \sum_{k=1}^{n1-1} \sum_{m=1}^{n1-1} C1_{k-1+(n1-1)(m-1)} \cdot V(k, m, x, y), V(0, 0, x, y) \right]$$

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U3_{i,j} := UP \left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10} \right)$$

Построим таблицу сравнения полученных решений для $n1 = 3$ и $n1 = 2$

$$U23 := U2 - U3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.007 & -0.021 & -0.06 & -0.092 & -0.107 & -0.101 & -0.075 & -0.039 & -0.007 & 0 \\ 0 & 0.031 & 0.001 & -0.049 & -0.091 & -0.107 & -0.092 & -0.051 & -0.001 & 0.029 & 0 \\ 0 & 0.059 & 0.038 & -0.01 & -0.051 & -0.062 & -0.039 & 0.01 & 0.062 & 0.076 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.069 & 0.025 & -0.011 & -0.018 & 0.011 & 0.065 & 0.114 & 0.113 & 0 \\ 0 & 0.087 & 0.08 & 0.039 & 0.005 & 4.263 \times 10^{-14} & 0.031 & 0.086 & 0.134 & 0.127 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.069 & 0.025 & -0.011 & -0.018 & 0.011 & 0.065 & 0.114 & 0.113 & 0 \\ 0 & 0.059 & 0.038 & -0.01 & -0.051 & -0.062 & -0.039 & 0.01 & 0.062 & 0.076 & 0 \\ 0 & 0.031 & 0.001 & -0.049 & -0.091 & -0.107 & -0.092 & -0.051 & -0.001 & 0.029 & 0 \\ 0 & 0.007 & -0.021 & -0.06 & -0.092 & -0.107 & -0.101 & -0.075 & -0.039 & -0.007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U23_{ij}|$ равно

$$\varepsilon_{22} := \max(|\max(U23)|, |\min(U23)|) \quad \varepsilon_{22} = 0.13375$$

Найдем невязку полученного пробного решения

$$R(x, y) := \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k-1+n1(m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y)$$

Получим таблицу невязки пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U4_{i,j} := R \left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10} \right)$$

Таблица невязки

$$U4 = \begin{pmatrix} 0 & -0.023 & -0.01 & 1.323 \times 10^{-3} & -0.011 & -0.054 & -0.122 & -0.193 & -0.232 & -0.189 & 0 \\ -0.182 & -0.042 & 0.063 & 0.115 & 0.108 & 0.052 & -0.028 & -0.094 & -0.093 & 0.042 & 0.395 \\ -0.301 & -0.053 & 0.107 & 0.171 & 0.151 & 0.067 & -0.04 & -0.121 & -0.107 & 0.083 & 0.543 \\ -0.373 & -0.057 & 0.131 & 0.195 & 0.155 & 0.042 & -0.095 & -0.195 & -0.182 & 0.037 & 0.565 \\ -0.411 & -0.059 & 0.143 & 0.203 & 0.147 & 0.012 & -0.147 & -0.262 & -0.253 & -0.021 & 0.544 \\ -0.423 & -0.059 & 0.146 & 0.204 & 0.142 & -1.039 \times 10^{-13} & -0.167 & -0.288 & -0.281 & -0.045 & 0.531 \\ -0.411 & -0.059 & 0.143 & 0.203 & 0.147 & 0.012 & -0.147 & -0.262 & -0.253 & -0.021 & 0.544 \\ -0.373 & -0.057 & 0.131 & 0.195 & 0.155 & 0.042 & -0.095 & -0.195 & -0.182 & 0.037 & 0.565 \\ -0.301 & -0.053 & 0.107 & 0.171 & 0.151 & 0.067 & -0.04 & -0.121 & -0.107 & 0.083 & 0.543 \\ -0.182 & -0.042 & 0.063 & 0.115 & 0.108 & 0.052 & -0.028 & -0.094 & -0.093 & 0.042 & 0.395 \\ 0 & -0.023 & -0.01 & 1.323 \times 10^{-3} & -0.011 & -0.054 & -0.122 & -0.193 & -0.232 & -0.189 & 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U4_{ij}|$ равно

$$\varepsilon_{32} := \max(|\max(U4)|, |\min(U4)|) \quad \varepsilon_{32} = 0.56477$$

3. Введите пробные функции

$$Vl(k, m, x, y) := \sin\left(\frac{\pi \cdot k \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{b}\right)$$

Нормируем их. Для этого вычислим нормировочные коэффициенты

$$i := 1..nl$$

$$j := 1..nl$$

$$VV_{i-1, j-1} := \sqrt{\int_0^a \int_0^b (Vl(i, j, x, y))^2 dx dy}$$

Получили нормированные пробные функции

$$V(k, m, x, y) := \text{if}\left(k + m \neq 0, \frac{Vl(k, m, x, y)}{VV_{k-1, m-1}}, d\right)$$

Введите проверочные функции (для примера в качестве проверочных возьмем пробные функции)

$$W(k, m, x, y) := V(k, m, x, y)$$

Найдем коэффициенты системы уравнений $AC=B$ для определения коэффициентов пробных решений C_k

$$i := 1..nl$$

$$j := 1..nl$$

$$B_{i-1+nl \cdot (j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x, y) - L(0, 0, x, y, V)) \cdot W(i, j, x, y) dx dy$$

$$i1 := 1..nl$$

$$j1 := 1..nl$$

$$i2 := 1..nl$$

$$j2 := 1..nl$$

$$A_{i1-1+n1 \cdot (j1-1), i2-1+n1 \cdot (j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $AC=B$ матричным методом, получим вектор коэффициентов C_k

$$C := A^{-1} \cdot B$$

$$C^T = (4 \quad 3.943335 \times 10^{-14} \quad 0.02963 \quad -0.8 \quad 6.222324 \times 10^{-15} \quad -0.011396 \quad 0.266667 \quad -1.738087 \times 10^{-15} \quad 5.486968 \times 10^{-3})$$

Скопируйте в файл отчета этот вектор. Подставив коэффициенты C_k , наберите в файле отчета получившееся пробное решение.

Следовательно, пробное решение $U(x,y)$ для $n1 = 3$ имеет вид

$$U(x,y) := V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k-1+n1 \cdot (m-1)} \cdot V(k,m,x,y)$$

Построим таблицу $U2$ получившегося пробного решения, разбив область D на 100 частей, и график этого решения

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U2_{i,j} := U\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Сравним точное и приближенное (при $n1 = 3$) решения, для этого найдем разность матриц этих решений $U1$ и $U2$

Таблица сравнения точного и приближенного решения

$$U12 := U1 - U2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.015 & -0.012 & 0.007 & 0.021 & 0.011 & -0.015 & -0.025 & 0.005 & 0.049 & 0 \\ 0 & -0.028 & -0.024 & 0.011 & 0.036 & 0.018 & -0.031 & -0.051 & 0.005 & 0.087 & 0 \\ 0 & -0.038 & -0.032 & 0.014 & 0.047 & 0.023 & -0.042 & -0.069 & 0.006 & 0.115 & 0 \\ 0 & -0.043 & -0.036 & 0.017 & 0.055 & 0.027 & -0.047 & -0.076 & 0.009 & 0.134 & 0 \\ 0 & -0.045 & -0.037 & 0.018 & 0.058 & 0.029 & -0.047 & -0.078 & 0.011 & 0.141 & 0 \\ 0 & -0.043 & -0.036 & 0.017 & 0.055 & 0.027 & -0.047 & -0.076 & 0.009 & 0.134 & 0 \\ 0 & -0.038 & -0.032 & 0.014 & 0.047 & 0.023 & -0.042 & -0.069 & 0.006 & 0.115 & 0 \\ 0 & -0.028 & -0.024 & 0.011 & 0.036 & 0.018 & -0.031 & -0.051 & 0.005 & 0.087 & 0 \\ 0 & -0.015 & -0.012 & 0.007 & 0.021 & 0.011 & -0.015 & -0.025 & 0.005 & 0.049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U12_{ij}|$ равно

$$\varepsilon13 := \max(|\max(U12)|, |\min(U12)|) \quad \varepsilon13 = 0.141$$

Найдем предыдущее пробное решение

$$i := 1..n1 - 1$$

$$j := 1..n1 - 1$$

$$Bl_{i-1+(nl-1)(j-1)} := \int_0^a \int_0^b (f(x,y) - L(0,0,x,y,V)) \cdot W(i,j,x,y) dx dy$$

$$i1 := 1..nl-1$$

$$j1 := 1..nl-1$$

$$i2 := 1..nl-1$$

$$j2 := 1..nl-1$$

$$Al_{i1-1+(nl-1)(j1-1), i2-1+(nl-1)(j2-1)} := \int_0^a \int_0^b L(i2, j2, x, y, V) \cdot W(i1, j1, x, y) dx dy$$

Решая систему уравнений $Al * Cl = Bl$ матричным методом, получим вектор коэффициентов Cl_k

$$Cl := Al^{-1} \cdot Bl$$

$$Cl^T = \begin{pmatrix} 4 & 3.544078 \times 10^{-14} & -0.8 & 5.256785 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Получим матрицу предыдущего (для $nl=2$) пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$UP(x,y) := if \left[nl \neq 1, V(0,0,x,y) + \sum_{k=1}^{nl-1} \sum_{m=1}^{nl-1} Cl_{k-1+(nl-1)(m-1)} \cdot V(k,m,x,y), V(0,0,x,y) \right]$$

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U3_{i,j} := UP\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Построим таблицу сравнения полученных решений для $nl=3$ и $nl=2$

$$U23 := U2 - U3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.046 & 0.056 & 0.024 & -0.021 & -0.04 & -0.015 & 0.035 & 0.067 & 0.053 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0.102 & 0.04 & -0.048 & -0.085 & -0.039 & 0.053 & 0.115 & 0.093 & 0 \\ 0 & 0.112 & 0.133 & 0.045 & -0.077 & -0.133 & -0.075 & 0.05 & 0.137 & 0.115 & 0 \\ 0 & 0.128 & 0.149 & 0.044 & -0.102 & -0.17 & -0.107 & 0.036 & 0.141 & 0.123 & 0 \\ 0 & 0.133 & 0.154 & 0.043 & -0.111 & -0.185 & -0.12 & 0.029 & 0.14 & 0.124 & 0 \\ 0 & 0.128 & 0.149 & 0.044 & -0.102 & -0.17 & -0.107 & 0.036 & 0.141 & 0.123 & 0 \\ 0 & 0.112 & 0.133 & 0.045 & -0.077 & -0.133 & -0.075 & 0.05 & 0.137 & 0.115 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0.102 & 0.04 & -0.048 & -0.085 & -0.039 & 0.053 & 0.115 & 0.093 & 0 \\ 0 & 0.046 & 0.056 & 0.024 & -0.021 & -0.04 & -0.015 & 0.035 & 0.067 & 0.053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U23_{ij}|$ равно

$$\varepsilon23 := \max(|\max(U23)|, |\min(U23)|)$$

$$\varepsilon23 = 0.18513$$

Найдем невязку полученного пробного решения

$$R(x, y) := \sum_{k=1}^{n1} \sum_{m=1}^{n1} C_{k-1+n1(m-1)} \cdot L(k, m, x, y, V) + L(0, 0, x, y, V) - f(x, y)$$

Получим таблицу невязки пробного решения, разбив область D на 100 частей

$$i := 0..10$$

$$j := 0..10$$

$$U4_{i,j} := R\left(a \cdot \frac{i}{10}, b \cdot \frac{j}{10}\right)$$

Таблица невязки

$$U4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.213 & -0.183 & 0.084 & 0.32 & 0.244 & -0.137 & -0.442 & -0.151 & 1.005 & 2.791 \\ 0 & -0.408 & -0.37 & 0.103 & 0.521 & 0.365 & -0.352 & -0.93 & -0.411 & 1.696 & 4.961 \\ 0 & -0.539 & -0.491 & 0.129 & 0.677 & 0.47 & -0.477 & -1.24 & -0.559 & 2.214 & 6.511 \\ 0 & -0.604 & -0.543 & 0.167 & 0.794 & 0.566 & -0.5 & -1.358 & -0.58 & 2.568 & 7.442 \\ 0 & -0.622 & -0.555 & 0.185 & 0.839 & 0.606 & -0.494 & -1.379 & -0.568 & 2.697 & 7.752 \\ 0 & -0.604 & -0.543 & 0.167 & 0.794 & 0.566 & -0.5 & -1.358 & -0.58 & 2.568 & 7.442 \\ 0 & -0.539 & -0.491 & 0.129 & 0.677 & 0.47 & -0.477 & -1.24 & -0.559 & 2.214 & 6.511 \\ 0 & -0.408 & -0.37 & 0.103 & 0.521 & 0.365 & -0.352 & -0.93 & -0.411 & 1.696 & 4.961 \\ 0 & -0.213 & -0.183 & 0.084 & 0.32 & 0.244 & -0.137 & -0.442 & -0.151 & 1.005 & 2.791 \\ 0 & 0 & -3.453 \times 10^{-15} & 2.52 \times 10^{-15} & -8.544 \times 10^{-15} & -3.16 \times 10^{-15} & -1.438 \times 10^{-14} & -2.608 \times 10^{-15} & -6.58 \times 10^{-15} & -3.863 \times 10^{-15} & 0 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение $|U4_{ij}|$ равно

$$\varepsilon33 := \max(|\max(U4)|, |\min(U4)|) \quad \varepsilon33 = 7.75157$$

Выводы

Таким образом, при $n1 = 3$ получаем следующие результаты использования трех систем пробных и поверочных функций

	$\max U(x,y)-u_n(x,y) $	$\max u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y) $	$\max R_n(x,y) $
1.	$\varepsilon11 = 0.01527$	$\varepsilon21 = 0.11439$	$\varepsilon31 = 0.796$
2.	$\varepsilon12 = 0.044826$	$\varepsilon22 = 0.13375$	$\varepsilon32 = 0.564773$
3.	$\varepsilon13 = 0.140652$	$\varepsilon23 = 0.185135$	$\varepsilon33 = 7.751569$

Скопируйте в файл отчета полученные результаты. Сделайте вывод о точности трех полученных решений и запишите лучшее из них. (В примере первая система пробных и поверочных функций дает лучшее приближение решения дифференциального уравнения.)

5.6. Расчетная часть лабораторной работы для тестирующего примера

Выполним расчетную часть лабораторной работы. Найдем решение $u(x, y)$ задачи (5.12) – (5.13).

1. Найдем точное решение $U(x, y)$ этой задачи, используя разложение функции в двойной тригонометрический ряд Фурье [4], [5]. Ищем $U(x, y)$ в виде

$$U(x, y) = 10 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_{mk} \sin kx \cdot \sin my. \quad (5.14)$$

Заметим, что любая функция вида (5.14) удовлетворяет краевым условиям (5.13). Подставляем (5.14) в (5.12), получаем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_{mk}(k^2 + m^2) \sin kx \cdot \sin my = -(\pi - x)xy.$$

Значит, постоянные $H_{mk}(k^2 + m^2)$ должны быть коэффициентами двойного ряда Фурье для функции $(\pi - x)xy$, т. е.

$$H_{mk}(k^2 + m^2) = \frac{4}{\pi^2} \iint_D (\pi - x)xy \cdot \sin kx \cdot \sin my dx dy = \frac{4}{\pi^2} \left(\int_0^{\pi} (\pi - x)x \sin kx dx \cdot \int_0^{\pi} y \sin my dy \right).$$

Отсюда, так как

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)x \cdot \sin kx dx = \left(-(\pi - x)x \cdot \frac{1}{k} \cos kx + (\pi - 2x) \frac{1}{k^2} \sin kx - \frac{2}{k^3} \cos kx \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^3} (1 - (-1)^k),$$

$$\int_0^{\pi} y \cdot \sin my dy = \left(-y \cdot \frac{1}{m} \cos my + \frac{1}{m^2} \sin my \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{m} (-1)^m,$$

то

$$H_{mk} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi(1 - (-1)^k)(-1)^m}{k^3 m(k^2 + m^2)} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(1 - (-1)^k)(-1)^{m+1}}{k^3 m(k^2 + m^2)}.$$

Следовательно, точное решение задачи (5.12)–(5.13) аналитически задается выражением

$$U(x, y) = 10 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)(-1)^{m+1}}{k^3 m(k^2 + m^2)} \sin kx \cdot \sin my. \quad (5.15)$$

Найдем такое значение M , при котором функция

$$\hat{U}(x, y) = 10 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{(1 - (-1)^k)(-1)^{m+1}}{k^3 m(k^2 + m^2)} \sin kx \cdot \sin my \quad (5.16)$$

с точностью $\varepsilon = 0,001$ приближенно определяет $U(x, y)$, т. е.

$$\forall (x, y) \in D: |U(x, y) - \hat{U}(x, y)| = \Delta \leq 0,001. \quad (5.17)$$

Оценим сверху величину Δ .

$$\Delta = \left| \frac{8}{\pi} \sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)(-1)^{m+1}}{k^3 m(k^2 + m^2)} \sin kx \cdot \sin my \right| \leq \frac{16}{\pi} \sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^3 m(k^2 + m^2)} \leq$$

$$\leq \frac{16}{\pi} \iint_{MM}^{\infty \infty} \frac{dx dy}{x^3 y(x^2 + y^2)} = \frac{16}{\pi} \int_M^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \int_M^{\infty} \frac{dy}{y(x^2 + y^2)} = \frac{16}{\pi} \int_M^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Big|_{y=M}^{\infty} =$$

$$= -\frac{16}{\pi} \int_M^{\infty} \frac{1}{x^5} \ln \frac{M}{\sqrt{x^2 + M^2}} dx = -\frac{16}{\pi} \int_M^{\infty} \frac{1}{x^5} \ln \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{M}\right)^2 + 1}} dx = \left| \frac{x}{M} = z, \quad dx = Mdz \right|_{x^5 = z^5 M^5} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{16}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{M^4} \frac{1}{z^5} \ln \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \frac{8}{\pi M^4} \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+z^2)}{z^5} dz = \left| \begin{array}{l} u = \ln(1+z^2), \quad du = \frac{2z}{1+z^2} dz \\ dv = \frac{dz}{z^5}, \quad v = -\frac{1}{4z^4} \end{array} \right| = \\
&= \frac{8}{\pi M^4} \left(-\frac{1}{4z^4} \ln(1+z^2) \right) \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{z}{2(1+z^2) \cdot z^4} dz = \frac{8}{\pi M^4} \left(\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \cdot z^3} \right) = \\
&= \frac{8}{\pi M^4} \left(\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz \right) = \frac{8}{\pi M^4} \left(\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{z^2+1}}{z} - \frac{1}{2z^2} \right) \Big|_1^{\infty} \right) = \\
&= \frac{8}{\pi M^4} \left(\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{\pi M^4}.
\end{aligned}$$

Значит условие (5.17) будет заведомо выполнено, если $\frac{2}{\pi M^4} \leq 0,001$. Отсюда

$$M^4 \geq \frac{2000}{\pi} \approx 636,6, \quad M \geq 6.$$

Итак, функция

$$\hat{U}(x, y) = 10 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^6 \sum_{m=1}^6 \frac{(1 - (-1)^k)(-1)^{m+1}}{k^3 m(k^2 + m^2)} \sin kx \cdot \sin my$$

гарантированно с точностью до 0,001 определяет значение функции (5.15) в прямоугольнике D .

2. Продолжаем выполнение работы в компьютерном классе. Запускаем программу Mathcad. Открываем файл Ellipt.mcd. В пункте «Постановка задачи» программы вводим числовые данные

$$a = \pi \quad b = \pi \quad c = -1 \quad d = 10.$$

3. В пункте «Получение точного решения» вводим число превышающее, найденное в 1-м пункте число $M = 6$, например,

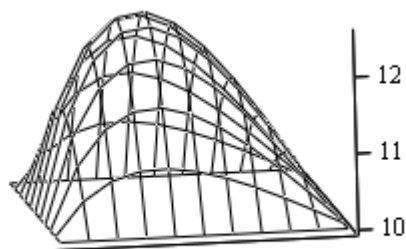
$$M = 27.$$

После этого программа автоматически вычисляет коэффициенты H_{km} и выдает матрицу $U1$ трехзначных значений функции $\hat{U}(x, y)$ с шагом $h = 0,1\pi$ (см. раздел 5.5)

$$U1 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10.108 & 10.211 & 10.305 & 10.381 & 10.435 & 10.457 & 10.437 & 10.364 & 10.223 & 10 \\ 10 & 10.211 & 10.413 & 10.596 & 10.747 & 10.853 & 10.897 & 10.859 & 10.716 & 10.44 & 10 \\ 10 & 10.305 & 10.596 & 10.86 & 11.079 & 11.235 & 11.302 & 11.251 & 11.045 & 10.644 & 10 \\ 10 & 10.381 & 10.747 & 11.079 & 11.358 & 11.558 & 11.648 & 11.59 & 11.336 & 10.828 & 10 \\ 10 & 10.435 & 10.853 & 11.235 & 11.558 & 11.794 & 11.908 & 11.852 & 11.567 & 10.979 & 10 \\ 10 & 10.457 & 10.897 & 11.302 & 11.648 & 11.908 & 12.043 & 12 & 11.711 & 11.083 & 10 \\ 10 & 10.437 & 10.859 & 11.251 & 11.59 & 11.852 & 12 & 11.981 & 11.721 & 11.111 & 10 \\ 10 & 10.364 & 10.716 & 11.045 & 11.336 & 11.567 & 11.711 & 11.721 & 11.529 & 11.02 & 10 \\ 10 & 10.223 & 10.44 & 10.644 & 10.828 & 10.979 & 11.083 & 11.111 & 11.02 & 10.72 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

которую копируем в файл отчета.

Также копируем в файл отчета график решения (рис 5.1).



U1

Рис. 5.1. График точного решения

4. Построим теперь приближенные решения задачи методом Галеркина. Для этого в пункте «Получение приближенного решения» вводим порядок приближенного решения (для этого вычисляем $n1 = \sqrt{n} = \sqrt{9} = 3$)

$$n1 = 3.$$

1 вариант. Построим систему произведений пробных функций вида (2.28), зависящих от x и y для задачи с однородными краевыми условиями:

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0.$$

Так как $2(n_1 + n_2) = 4$, то отыскиваем все многочлены порядка меньше 4, удовлетворяющие краевым условиям. Если $u_1 = A_1$, $u_1 = A_1 + A_2x + A_3y$, $u_1 = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2$, $u_1 = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3$, то однородные условия выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за требования линейной независимости пробных функций. Поэтому в качестве пробных и проверочных функций выбираем функции

$$u1_{km}(x, y) = x^k \cdot (\pi - x) \cdot y^m \cdot (\pi - y).$$

Вычисляем нормирующие множители (программа нормирует функции автоматически):

$$V_{km} = \|u1_{km}(x, y)\| = \sqrt{\iint_D (u1_{km}(x, y))^2 dx dy} =$$

$$= \frac{\pi^{k+m+3}}{\sqrt{(k+1)(2k+1)(2k+3)(m+1)(2m+1)(2m+3)}}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n$$

и получаем функции

$$u_{km}(x, y) = \frac{u1_{km}(x, y)}{\|u1_{km}(x, y)\|}. \quad (5.18)$$

Замечание. Процедуру получения всех пробных и поверочных функций необходимо описать в файле отчета.

После этого в программе вычисляются коэффициенты (5.9) системы уравнений (5.8) и, решая эту систему, находятся коэффициенты C_k :

$$C^T = (2,115416 \quad 0,932257 \quad -0,601769 \quad 0,415005$$

$$0,720142 \quad -0,464849 \quad 1,036596 \quad 2,124301 \times 10^{-12} \quad -1,11211 \times 10^{-12})$$

Выписываем получившееся пробное решение при $n = 9$

$$u_9(x, y) = 10 + C_1 u_{11} + C_2 u_{21} + C_3 u_{31} + C_4 u_{12} + C_5 u_{22} + C_6 u_{32} + C_7 u_{13} + C_8 u_{23} + C_9 u_{33} =$$

$$= 10 + 2,115416 \frac{30}{\pi^5} x(\pi - x) \cdot y(\pi - y) + 0,932257 \frac{15\sqrt{14}}{\pi^6} x^2(\pi - x) \cdot y(\pi - y) -$$

$$- 0,601769 \frac{6\sqrt{210}}{\pi^7} x^3(\pi - x) \cdot y(\pi - y) + 0,415005 \frac{15\sqrt{14}}{\pi^6} x(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) +$$

$$+ 0,720142 \frac{105}{\pi^7} x^2(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) - 0,464849 \frac{42\sqrt{15}}{\pi^8} x^3(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) +$$

$$+ 1,036596 \frac{6\sqrt{210}}{\pi^7} x(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y) + 2,124301 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{42\sqrt{15}}{\pi^8} x^2(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y) -$$

$$- 1,11211 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{232}{\pi^9} x^3(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y).$$

Затем в программе автоматически отыскивается предыдущее пробное решение, строятся таблица сравнения точного и приближенного решения, таблица сравнения n -го и $(n-1)$ -го пробных решений, таблица невязки. На основании анализа полученных таблиц, программа автоматически определяет меры точности полученного решения, которые отображаются в пункте «Выводы» для всех трех систем пробных и поверочных функций.

2 вариант. В качестве пробных возьмем функции (5.18), а в качестве поверочных – произведения нормированных многочленов Лежандра (2.31), т. е. функции

$$w_{km}(x, y) = \frac{P_{k-1}(x) \cdot P_{m-1}(y)}{\|P_{k-1}\| \cdot \|P_{m-1}\|}, \quad k, m = \overline{1, 5};$$

$$\text{где } \|P_k\| = \sqrt{\int_0^\pi (P_k(x))^2 dx} = \left(\frac{\pi}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Получим коэффициенты C_k :

$$C^T = \begin{pmatrix} 2,012859 & 0,919679 & -0,59365 & 0,465166 \\ 0,797172 & -0,514572 & 1,074989 & -3,138911 \times 10^{-13} & 1,875523 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Выписываем получившееся пробное решение при $n = 9$

$$\begin{aligned} u_9(x, y) = & 10 + C_1 u_{11} + C_2 u_{21} + C_3 u_{31} + C_4 u_{12} + C_5 u_{22} + C_6 u_{32} + C_7 u_{13} + C_8 u_{23} + C_9 u_{33} = \\ = & 10 + 2,012859 \frac{30}{\pi^5} x(\pi - x) \cdot y(\pi - y) + 0,919679 \frac{15\sqrt{14}}{\pi^6} x^2(\pi - x) \cdot y(\pi - y) - \\ & - 0,59365 \frac{6\sqrt{210}}{\pi^7} x^3(\pi - x) \cdot y(\pi - y) + 0,465166 \frac{15\sqrt{14}}{\pi^6} x(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) + \\ & + 0,797172 \frac{105}{\pi^7} x^2(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) - 0,514572 \frac{42\sqrt{15}}{\pi^8} x^3(\pi - x) \cdot y^2(\pi - y) + \\ & + 1,074989 \frac{6\sqrt{210}}{\pi^7} x(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y) - 3,138911 \times 10^{-13} \cdot \frac{42\sqrt{15}}{\pi^8} x^2(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y) + \\ & + 1,875523 \times 10^{-13} \cdot \frac{232}{\pi^9} x^3(\pi - x) \cdot y^3(\pi - y). \end{aligned}$$

3 вариант. В качестве пробных и поверочных функций выбираем нормированные функции

$$u1_{km}(x, y) = \sin kx \cdot \sin my.$$

Программа автоматически вычисляет нормирующие множители

$$V_{km} = \|u1_{km}(x, y)\| = \sqrt{\iint_D (u1_{km}(x, y))^2 dx dy} = \frac{\pi}{2}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n$$

и получает функции

$$u_{km}(x, y) = \frac{u1_{km}(x, y)}{\|u1_{km}(x, y)\|}.$$

Получим коэффициенты C_k :

$$C^T = \begin{pmatrix} 4 & 3,943335 \times 10^{-14} & 0,02963 & -0,8 \\ 6,222324 \times 10^{-15} & -0,011396 & 0,266667 & -1,738087 \times 10^{-15} & 5,486968 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Выписываем получившееся пробное решение при $n = 9$

$$\begin{aligned} u_9(x, y) = & 10 + C_1 u_{11} + C_2 u_{21} + C_3 u_{31} + C_4 u_{12} + C_5 u_{22} + C_6 u_{32} + C_7 u_{13} + C_8 u_{23} + C_9 u_{33} = \\ = & 10 + 4 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin x \cdot \sin y + 3,943335 \times 10^{-14} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 2x \cdot \sin y + 0,02963 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 3x \cdot \sin y - \\ & - 0,8 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin x \cdot \sin 2y + 6,222324 \times 10^{-15} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 2x \cdot \sin 2y - 0,011396 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 3x \cdot \sin 2y + \\ & + 0,266667 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin x \cdot \sin 3y - 1,738087 \times 10^{-15} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 2x \cdot \sin 3y + \\ & + 5,486968 \times 10^{-3} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin 3x \cdot \sin 3y. \end{aligned}$$

5. Копируем в файл отчета пункт «Выводы»:

	$\max U(x,y)-u_n(x,y) $	$\max u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y) $	$\max R_n(x,y) $
1.	$\varepsilon_{11} = 0.01527$	$\varepsilon_{21} = 0.11439$	$\varepsilon_{31} = 0.796$
2.	$\varepsilon_{12} = 0.044826$	$\varepsilon_{22} = 0.13375$	$\varepsilon_{32} = 0.564773$
3.	$\varepsilon_{13} = 0.140652$	$\varepsilon_{23} = 0.185135$	$\varepsilon_{33} = 7.751569$

Делаем вывод, что лучшее приближение решения дифференциального уравнения дает функция (5.19).

5.6. Основные термины

Уравнение эллиптического типа, краевая задача.

Точное, приближенное, пробное решения уравнения. Невязка пробного решения уравнения.

Метод Галеркина. Пробные и поверочные функции.

5.7. Вопросы для самоконтроля

1. Как находится функция, названная в методе Галеркина невязкой?
2. Как строится система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов пробного решения?
3. Проверьте истинность формул (5.8), (5.9).
4. В каком случае невязка пробного решения сходится при $n \rightarrow \infty$ к нулю в среднем?
5. Опишите алгоритм приближенного решения задачи (5.1)–(5.2) методом Галеркина.
6. Приведите физическую интерпретацию задачи (5.10)–(5.11).
7. Найдите решение задачи (5.10)–(5.11), используя двойной тригонометрический ряд Фурье.
8. Приведите пример пробных функций для задачи (5.10)–(5.11).
9. Как проверить ортогональность функций двух переменных на плоской области D ?
10. Как нормировать функцию двух переменных на области D ?

6. Прикладной математический пакет «MathCAD»

6.1. О системе «MathCAD»

Миллионы людей занимаются математическими расчетами, иногда в силу влечения к таинствам математики и ее внутренней красоте, а чаще в силу профессиональной или иной необходимости, не говоря уже об учебе. Ни одна серьезная разработка в любой отрасли науки и производства не обходится без трудоемких математических расчетов.

Вначале эти расчеты выполнялись на программируемых микрокалькуляторах или с помощью программ на универсальных языках программирования, таких, как Бейсик или Паскаль. Постепенно для облегчения расчетов были созданы специальные математические компьютерные системы.

Одна из самых мощных и эффективных математических систем – MathCAD. Она существует в двух вариантах: стандартном MathCAD Standard и профессиональном MathCAD Professional (PRO). Стандартная версия ориентирована на большинство пользователей, а профессиональная – на профессионалов, серьезно занимающихся математическими расчетами.

Системы MathCAD традиционно занимают особое место среди множества таких систем (MatLAB, Mathematica и др.) и по праву могут называться самыми современными, универсальными и массовыми математическими системами. Они позволяют выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеют чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики.

Системы класса MathCAD предоставляют уже привычные, мощные, удобные и наглядные средства описания алгоритмов решения математических задач. Преподаватели и студенты вузов получили возможность подготовки с их помощью наглядных и красочных обучающих программ в виде электронных книг с действующими в реальном времени примерами. Новейшая система MathCAD PRO настолько гибка и универсальна, что может оказать неоценимую помощь в решении математических задач как школьнику, постигающему азы математики, так и академику, работающему со сложнейшими научными проблемами. Система имеет достаточные возможности для выполнения наиболее массовых символьных (аналитических) вычислений и преобразований.

Исключительно велика роль систем класса MathCAD в образовании. Облегчая и делая интересным решение сложных математических задач, система снимает психологический барьер при изучении математики. Грамотное применение систем в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и технического образования, содействует подлинной интеграции процесса образования в нашей стране.

6.2. Основные понятия и функции

Для работы в системе MathCAD достаточно поместить курсор в желаемое место окна редактирования (красный крестик на цветном дисплее) и затем начать ввод математического выражения (черное обрамление \square , называемое *математической областью*, внутри которой это выражение набирается).

Маленькая черная рамка ■ в математической области есть *поле ввода*. Наличие поля ввода указывает на то, что ввод математического выражения или графика не закончен. Для заполнения этого поля нужно щелкнуть по нему мышью и начать ввод. Для создания математических выражений используются следующие операции.

Арифметические операции: сложение – ‘+’; возведение в степень – ‘^’; факториал – ‘!’; абсолютная величина – ‘|’; умножение – ‘*’; корень n -ой степени – ‘Ctrl’+‘\’ (т. е. необходимо одновременно нажать две клавиши ‘Ctrl’ и ‘\’); квадратный корень – ‘\’; вычитание – ‘-’; суммирование – ‘Ctrl’+‘Shift’+‘4’ (например, $\sum_{i=1}^3 i^2 = 14$); произведение – ‘Ctrl’+‘Shift’+‘3’ (например, $\prod_{i=1}^3 i^2 = 36$).

Логические операторы: больше – ‘>’; меньше – ‘<’; больше либо равно – ‘Ctrl’+‘0’; меньше либо равно – ‘Ctrl’+‘9’; не равно – ‘Ctrl’+‘3’; равно – ‘Ctrl’+‘=’.

Символы присвоений (вводится правая и левая части): присвоение значений переменных и функций (на экране появится “:=”) – ‘:=’; булево равенство (на экране – жирный знак “=”) – ‘Ctrl’+‘=’.

Символы вычислений (вводятся левая часть, а правая вычисляется автоматически): получение числового значения – ‘=’; получение символьного значения (“→”) – ‘Ctrl’+‘.’.

Для определения точности полученного результата необходимо два раза щелкнуть левой кнопкой мыши на поле, его содержащем (или через меню инструментов: Format → Result, или, если программа русифицирована, Формат → Результат), и во всплывающем окне «Format result» установить число десятичных знаков (Точность отображения или Number of decimal places) от 0 до 15. После нажатия кнопки «ОК» результат автоматически будет округлен до необходимого числа знаков.

Введение основных аналитических функций: синус – $\sin(x)$; косинус – $\cos(x)$; тангенс – $\tan(x)$; котангенс – $\cot(x)$; арксинус – $\sin^{-1}(x)$; арккосинус – $\cos^{-1}(x)$; арктангенс – $\tan^{-1}(x)$; арккотангенс – $\cot^{-1}(x)$; экспонента – $\exp(x)$ или e^x ; натуральный логарифм – $\ln(x)$; десятичный логарифм – $\log(x)$; логарифм x по основанию a – $\log_a(x)$; синус гиперболический – $\sinh(x)$; косинус гиперболический – $\cosh(x)$; тангенс гиперболический – $\tanh(x)$; котангенс гиперболический – $\coth(x)$; арксинус гиперболический – $\sinh^{-1}(x)$; арккосинус гиперболический – $\cosh^{-1}(x)$; арктангенс гиперболический – $\tanh^{-1}(x)$; арккотангенс гиперболический – $\coth^{-1}(x)$.

Все *встроенные функции системы Mathcad* можно получить при нажатии ‘Ctrl’+‘E’ (или через меню инструментов: Insert → Function, или, если

программа русифицирована, Вставка → Функция) и во всплывающем окне «Insert function» выбрать необходимую функцию. После нажатия кнопки «ОК» выбранная функция будет вставлена в место, где установлен курсор. В частности, при разработке лабораторных работ были использованы функции:

$rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)$ – возвращает матрицу решений задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение отыскивается численно по методу Рунге-Кутты. Функция имеет пять аргументов: y – вектор, содержащий начальные условия неизвестных функций; $x1, x2$ – начальная и конечная точка интегрирования; $npoints$ – число точек разбиения отрезка $[x1, x2]$ (чем больше, тем точнее найденное решение); D – векторнозначная функция, содержащая правые части дифференциальных уравнений;

$bvalfit(v1, v2, x1, x2, xf, D, load1, load2, score)$ – позволяет привести краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к задаче Коши (которая решается с помощью функции $rkfixed$) и возвращает начальные условия, оставшиеся неизвестными в точке $x1$. Функция имеет девять аргументов: $v1, v2$ – вектора, содержащие предположительные начальные условия, оставшиеся неизвестными в точках $x1$ и $x2$ соответственно; $x1, x2$ – начальная и конечная точка интегрирования; xf – точка между $x1$ и $x2$, в которой траектории решений начинающихся в точках $x1$ и $x2$ будут равны; D – n -элементная векторнозначная функция, содержащая правые части дифференциальных уравнений; $load1, load2$ – векторнозначная функция, в чьи n элементы переписываются величины n неизвестных функций в $x1$ и $x2$ соответственно; $score$ – n -элементная векторнозначная функция используемая для того, чтобы определить как решения сочетаются в точке xf (обычно определяют $score(xf, y) := y$, чтобы решения по всем неизвестным функциям сочетались в xf);

$root(f(x), x, a, b)$ – возвращает корень уравнения $f(x) = 0$ по переменной x на отрезке $[a, b]$;

$if(cond, a, b)$ – возвращает значение a , если условие $cond$ истинно, и значение b , если ложно (в качестве условия $cond$ обычно используется логический оператор, например, $i < 2$).

Задание дискретных величин осуществляется при нажатии ‘;’. Например,

$$i := 0..3 \quad j := 1, 1.1..1.5.$$

Чтобы набрать эти формулы, необходимо с клавиатуры набрать $i:0;3$ и $j:1,1.1;1.5$. Первая формула означает, что i принимает значения 0, 1, 2, 3, а вторая, что j принимает значения 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 (т. е. вторая цифра показывает каков шаг дискретной величины).

С помощью дискретных величин в системе Mathcad можно организовывать простейшие циклы, с помощью которых удобно задавать матрицы и векторы (см. раздел 6.4).

Все описанные символы операторов и основных элементарных функций можно ввести с помощью мыши из всплывающего меню (View → Toolbars →

Calculator, Evaluation, Boolean, Calculus или Вид → Панели инструментов → Арифметика, Вычисления, Логика, Исчисления).

Если необходимо ввести символы греческого алфавита, то необходимо воспользоваться меню View → Toolbars → Greek (Вид → Панели инструментов → Греческий Алфавит).

6.3. Операторы математического анализа

Нахождение производной первого порядка осуществляется по нажатию клавиш 'Shift'+'/'. При этом производную можно вычислить либо в точке, либо получить ее аналитическое выражение. Например, производная в точке

$$x := 13 \quad \frac{d}{dx} x^2 \cdot \ln(x) = 79.689,$$

а аналитически

$$\frac{d}{dx} x^2 \cdot \ln(x) \rightarrow 2x \ln(x) + x.$$

Если задана функция нескольких переменных, то данный оператор вычисляет частную производную по указанной переменной

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy$$

$$\frac{d}{dy} f(x, y) \rightarrow 2y + x.$$

Для нахождения производных высших порядков необходимо нажать 'Ctrl'+'Shift'+'/' и задать порядок производной, переменную дифференцирования и функцию. Например,

$$\frac{d^3}{dx^3} x^2 \cdot \ln(x) \rightarrow \frac{2}{x}.$$

Для вычисления смешанных производных функции нескольких переменных необходимо находить производную по одной переменной от производных по другим переменным. Например,

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{d^2}{dy^2} (x^3 \cdot \ln(y) + \cos(x \cdot y)) \right] \rightarrow \frac{-6}{y^2} - \sin(x \cdot y) \cdot y^3 \cdot x^2 + 6 \cdot \cos(x \cdot y) \cdot y^2 \cdot x + 6 \cdot \sin(x \cdot y) \cdot y.$$

Нахождение неопределенных интегралов, если это возможно, осуществляется по нажатию 'Ctrl'+'I'. Например,

$$\int x \cdot \ln(x) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2.$$

Для вычисления определенных интегралов необходимо нажать 'Shift'+'7' и ввести пределы интегрирования, подынтегральную функцию, переменную интегрирования. После нажатия знака '=' получим числовой результат. Например,

$$\int_1^2 x \cdot \ln(x) dx = 0.636.$$

Все описанные символы операторов математического анализа можно ввести с помощью мыши из всплывающего меню (View → Toolbars → Calculus или Вид → Панели инструментов → Исчисления).

6.4. Функции и операторы матриц

Самый простой способ создания массива чисел состоит в создании массива из пустых полей и их последующем заполнении. Для этого нажмите 'Ctrl'+ 'M', чтобы вызвать диалоговое окно и определите в нем нужное количество строк и столбцов. Нажмите «ОК», чтобы создать массив пустых полей. Щелкните на поле, чтобы выделить его, затем введите требуемое значение. Для перемещения между полями можно также использовать клавишу «Tab».

При определении больших массивов, для каждого элемента которых существует формула, через которую он выражается, удобнее использовать дискретные аргументы. Например, зададим двумерный массив (матрицу)

$$i := 0..2 \quad j := 0..2$$

$$X_{i,j} := i^2 + \frac{j}{2}$$

(чтобы набрать последнюю формулу, необходимо с клавиатуры набрать $X[i, j : i^2 + j/2]$). После этого можно просмотреть получившуюся матрицу целиком, набрав $X =$, любой столбец, набрав X 'Ctrl'+ '6' 1=, или любой элемент матрицы, набрав $X[1,2 =$, и на экране автоматически появится

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1.5 & 2 \\ 4 & 4.5 & 5 \end{pmatrix} \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} \quad X_{1,2} = 2.$$

Для задания векторов необходимо указывать только один индекс. Например,

$$i := 0..2 \quad X_i := i^2 \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

При обращении к матрице необходимо помнить, что нумерация строк и столбцов начинается с 0. Например, если хотим получить элемент, стоящий на пересечении 2-й строки и 3-го столбца, необходимо запросить элемент $X_{1,2}$.

Операторы, определенные для векторов и матриц: сложение – '+'; векторное произведение – 'Ctrl'+ '8'; определитель – '|'; скалярное произведение – '*'; обратная матрица – '^ -1' (т.е. возведение в степень –1); степени матриц – '^'; умножение – '*'; нижний индекс – '['; вычитание – '-'; суммирование элементов – 'Ctrl'+ '4'; верхний индекс – 'Ctrl'+ '6'; транспонирование – 'Ctrl'+ '1'.

Встроенные функции, определенные для матриц:

$\text{rows}(A)$ – число строк матрицы A ;

$\text{cols}(A)$ – число столбцов матрицы A ;

$\text{max}(A)$ – максимальный элемент матрицы A ;

$\text{min}(A)$ – минимальный элемент матрицы A ;

$\text{rank}(A)$ – ранг матрицы A ;

$\text{rref}(A)$ – приведение матрицы A к ступенчатому виду;

$\text{length}(B)$ – количество элементов вектора B ;

$\text{augment}(A,B)$ – объединение матриц A и B (добавлением матрицы B справа к матрице A);

$\text{matrix}(m,n,f)$ – создает матрицу размерности $m \times n$, где элементами матрицы являются значения функции двух переменных $f(i,j)$, $i = 0,1,\dots,m-1$, $j = 0,1,\dots,n-1$;

$\text{submatrix}(A,a,b,c,d)$ – возвращает матрицу, состоящую из всех элементов, которые содержатся в строках с a по b и столбцах с c по d матрицы A ;

Все описанные операторы (кроме встроенных функций) можно ввести с помощью мыши из всплывающего меню (View \rightarrow Toolbars \rightarrow Matrix или Вид \rightarrow Панели инструментов \rightarrow Матрицы).

6.5. Создание декартовых графиков на плоскости и в пространстве

Для создания декартового графика на плоскости нажмите клавишу 'Shift'+ '2' или введите с помощью мыши из всплывающего меню график на плоскости (View \rightarrow Toolbars \rightarrow Graph или Вид \rightarrow Панели инструментов \rightarrow График). В открывшемся поле графика (рис. 6.1) поместите в поле ввода 1 функцию или выражение, которое будет отображаться графически, а в поле ввода 2 непрерывную или дискретную переменную по которой строится график.

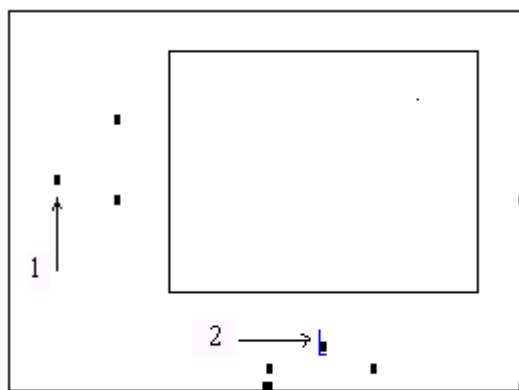


Рис. 6.1. Инициализация графика функции

Затем нажмите клавишу F9, чтобы построить график. По умолчанию, если функция определена, график будет построен на отрезке $[-10, 10]$.

Например, необходимо ввести функцию $f(x) = e^{-2x} + \ln(x)$ и построить график этой функции на интервале (0.3;1.5).

Для этого определяем функцию $f(x)$

$$f(x) := e^{-2x} + \ln(x)$$

и в поле ввода 5 и 6 (рис. 6.2) помещаем начальное и конечное значение интервала 0.3 и 1.5 соответственно. В поле 3 и 4 показываются максимальное и минимальное значение функции на этом интервале.

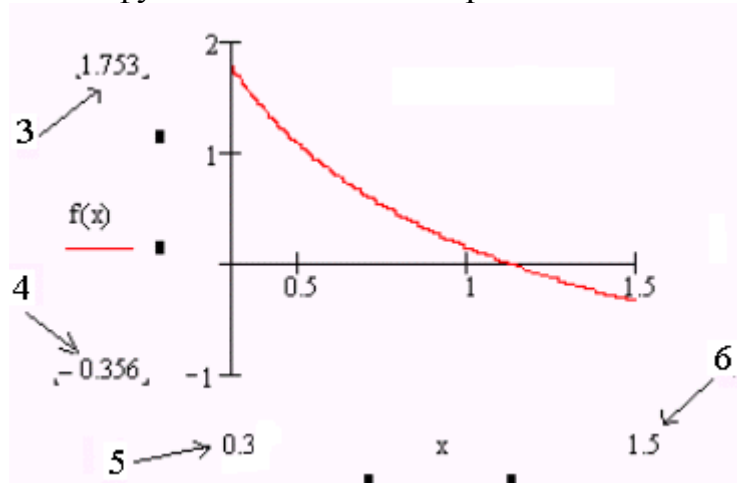


Рис. 6.2. Построение графика функции на отрезке

Чтобы на одном графике изобразить несколько функций, необходимо в поле ввода 1 (рис. 6.1) через запятую перечислить функции или выражения, которые будут отображаться графически, а в поле ввода 2 (рис. 6.1) через запятую соответствующие непрерывные или дискретные переменные (если переменные совпадают, то достаточно указать только одну переменную). Например, на рис. 6.3 построены графики функций $\sin(x)$ и $\ln(y) - 1$.

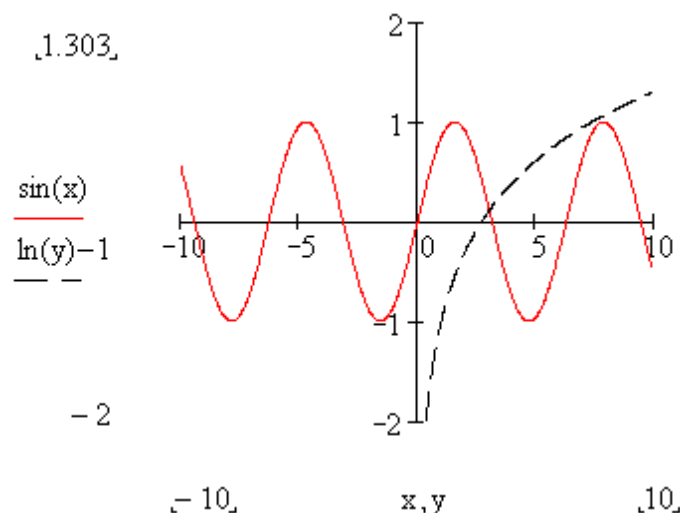


Рис. 6.3. Построение нескольких графиков

Если два раза щелкнуть мышью в поле графика, тогда во всплывающем окне «Formatting Currently Selected X-Y Plot» можно установить параметры отображения осей и линий графика. В первой закладке «X-Y Axes» («Оси

X-Y») можно выбрать вид координатных осей, наложить сеть и установить ее размер, откорректировать масштаб. Во второй закладке «Traces» («След») можно установить параметры всех отображаемых линий (trace 1, trace2 и т. д.): наименование, цвет, толщину, тип (непрерывный, пунктир или точками для дискретных функций). В третьей закладке «Labels» («Метки») можно ввести названия графика и координатных осей.

Для создания декартового графика в пространстве нажмите клавишу 'Ctrl'+ '2' или введите с помощью мыши из всплывающего меню поверхностный график (View → Toolbars → Graph или Вид → Панели инструментов → График). В открывшемся поле графика (рис. 6.4) поместите в поле ввода 7 матрицу размерности $m \times n$, элементами которой являются значения функции $z = f(x, y)$ в точках (x_i, y_j) ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Отображаемая матрица должна содержать, по меньшей мере, 2 столбца и две строки.

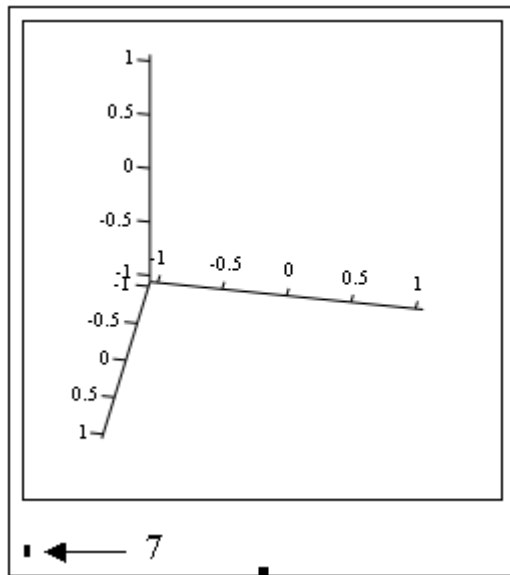


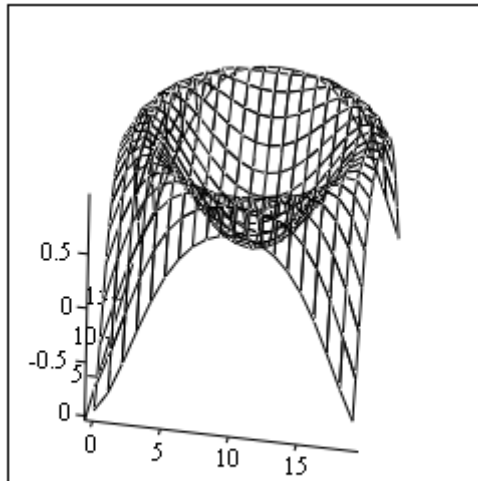
Рис. 6.4. Инициализация графика функции

Затем нажмите клавишу F9, чтобы построить график.

Например, необходимо построить график функции $z = \sin(x^2 + y^2)$, если $x \in [-1.5; 1.5]$, $y \in [-1.5; 1.5]$. Для этого определяем функцию двух переменных и вычисляем значения функции, разбивая отрезки на 20 частей. В результате получим матрицу M .

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \sin(x^2 + y^2) \\ X(x) &:= -1.5 + 0.15 \cdot x \\ Y(y) &:= -1.5 + 0.15 \cdot y \\ F(x, y) &:= f(X(x), Y(y)) \\ m &:= 20 \quad n := 20 \\ M &:= \text{matrix}(m, n, F) \end{aligned}$$

Подставляя матрицу M в поле 7 (рис. 6.4), получим требуемый график



М

Рис. 6.5. График функции

6.6. Программные блоки

Для решения многих задач в системе Mathcad используются программные блоки. В начале любого блока обязательно должно присутствовать служебное слово *Given*, далее идет тело блока и в конце стандартная функция, закрывающая блок.

В частности для решения систем алгебраических уравнений линейных или нелинейных используется программный блок «*Given – Find*». Например,

Given

$$a + 2b + 3c = 1$$

$$4a + 5b + 6c = 2$$

$$7a + 8b + 9c = 3$$

$$Find(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} c - \frac{1}{3} \\ -2c + \frac{2}{3} \\ c \end{pmatrix}.$$

Здесь телом блока является система уравнений, а с помощью функции *Find(x, y, ...)* получаем искомое решение, где x, y, \dots есть скалярные переменные, значения которых ищутся в блоке решения уравнений.

Лабораторная работа №1
«Решение краевой задачи для линейного обыкновенного
дифференциального уравнения второго порядка»

Выполнил: студент группы ПМд-31 Иванов И.И.

Проверил: преподаватель Сидоров С.С.

Описание математической постановки задачи и результаты выполнения подготовительных расчетов

Используя методы Галеркина, Ритца и интегральный метод наименьших квадратов, найти наиболее приближенное к точному аналитическое решение

$y_5(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^5 C_i u_i(x)$ (т.е. $n = 5$) на отрезке $[0, 1]$ для краевой задачи

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 2, \quad (A1)$$

$$y(0) + y'(0) = 1, \quad (A2)$$

$$y(1) + y'(1) = -4$$

из пробных решений, построенных: 1) методом Галеркина при помощи системы из 5 пробных функций – многочленов (2.26) и двух систем поверочных функций, одна из которых составлена из пробных функций, а вторая – из многочленов Лежандра (2.31); 2) методом Ритца при помощи двух систем из 5 пробных функций – многочленов (2.26) и функций вида (2.34) – (2.36); 3) интегральным методом наименьших квадратов при помощи двух систем из 5 пробных функций – многочленов (2.26) и многочленов (2.29).

1) Построим функцию $u_0(x)$ для задачи с краевыми условиями (A2).

Пусть $u_0(x) = A$, тогда $u'_0 = 0$ и условия (A2) дают несовместную систему из уравнений $A = 1$ и $A = -4$.

Пусть $u_0 = A + Bx$, тогда $u'_0 = B$ и условия (2.27) дают

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 2B = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ B = -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6, \\ B = -5. \end{cases}$$

Итак, $u_0 = 6 - 5x$.

2) Построим систему из пяти пробных функций – многочленов (2.26) для задачи с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} y(0) + y'(0) &= 0, \\ y(1) + y'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (A3)$$

Определяем $u_1(x)$. Если $u_1 = A$ или $u_1 = A + Bx$, то однородные условия (A3) выполняются, если $u_1 = 0$, что невозможно из-за требования линейной независимости пробных функций.

Ищем $u_1(x) = A + Bx + Cx^2$ ($C \neq 0$), тогда $u'_1 = B + 2Cx$, и из однородных условий (A3) получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C = 0. \end{cases}$$

Видим, что система имеет множество решений

$$G = \{(A, B, C): A = 3\alpha, B = -3\alpha, C = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Выбираем одно решение из G при $\alpha = \frac{1}{3}$, тогда

$$u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2. \quad (\text{A4})$$

Ищем $u_2(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ($D \neq 0$), тогда $u'_2 = B + 2Cx + 3Dx^2$, и из однородных условий (A3) получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C + 4D = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C + 4D = 0. \end{cases}$$

Полагая $C = 0, D = \frac{1}{4}$, получим

$$u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3. \quad (\text{A5})$$

Ищем $u_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ($E \neq 0$), тогда $u'_3 = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3$, и из однородных условий (3) получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C + 4D + 5E = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C + 4D + 5E = 0. \end{cases}$$

Полагая $C = 0, D = 0, E = \frac{1}{5}$, получим

$$u_3(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^4. \quad (\text{A6})$$

Ищем $u_4(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$ ($F \neq 0$), тогда $u'_4 = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4$, и из однородных условий (A3) получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C + 4D + 5E + 6F = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C + 4D + 5E + 6F = 0. \end{cases}$$

Полагая $C = 0, D = 0, E = 0, F = \frac{1}{6}$, получим

$$u_4(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^5. \quad (A7)$$

Ищем $u_5(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Hx^6$ ($H \neq 0$), тогда $u'_4 = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Hx^5$, и из однородных условий (3) получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 2B + 3C + 4D + 5E + 6F + 7H = 0. \end{cases}$$

Решая ее методом Гаусса, имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + 3C + 4D + 5E + 6F + 7H = 0. \end{cases}$$

Полагая $C = 0, D = 0, E = 0, F = 0, H = \frac{1}{7}$, получим

$$u_5(x) = 1 - x + \frac{1}{7}x^6. \quad (A8)$$

Таким образом, пробное решение будем искать в виде

$$y_5(x) = 6 - 5x + \sum_{i=1}^5 C_i \left(1 - x + \frac{1}{i+2} x^{i+1} \right). \quad (A9)$$

3) Построим систему пробных функций для задачи с однородными краевыми условиями (A3) вида (2.29).

Так как $n_1 + n_2 = 4$, то из предыдущего пункта выписываем первые две пробные функции $u_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2$, $u_2(x) = 1 - x + \frac{1}{4}x^3$ (все многочлены порядка меньше 4, удовлетворяющие краевым условиям).

Таким образом, учитывая, что $n_1 = 2, n_2 = 2$, пробное решение можно искать в виде

$$y_5(x) = 6 - 5x + C_1 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 \right) + C_2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^3 \right) + \sum_{k=3}^5 C_k (1 - x)^2 x^{k-1}. \quad (A10)$$

4) Построим систему пробных функций для задачи с однородными краевыми условиями (A3) вида (2.34) – (2.36).

Ищем нетривиальное решение вида (2.34). Удовлетворяя однородным краевым условиям, получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1 + C_2 - \delta C_1 + \delta C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\delta} + C_2 e^{\delta} - \delta C_1 e^{-\delta} + \delta C_2 e^{\delta} = 0, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \delta)C_1 + (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 - \delta)C_1 e^{-\delta} + (1 + \delta)C_2 e^{\delta} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \delta)C_1 + (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 + \delta)(e^{\delta} - e^{-\delta})C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \delta)C_2 = 0, \\ (1 - \delta)C_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Получим нетривиальное решение при $\delta = 1, C_2 = 0$ и первая пробная функция имеет вид

$$u_1(x) = e^{-x}.$$

Ищем нетривиальное решение вида (2.35). Из однородных краевых условий, получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Нетривиальных решений нет.

Ищем нетривиальное решение вида (2.36). Из однородных краевых условий, получим

$$\begin{cases} C_1 + \delta C_2 = 0, \\ C_1 \cos \delta + C_2 \sin \delta - C_1 \delta \sin \delta + C_2 \delta \cos \delta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\delta C_2, \\ C_1 (\cos \delta - \delta \sin \delta) + C_2 (\sin \delta + \delta \cos \delta) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\delta C_2, \\ C_2 (-\delta (\cos \delta - \delta \sin \delta) + \sin \delta + \delta \cos \delta) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\delta C_2, \\ C_2 (1 + \delta) \sin \delta = 0. \end{cases}$$

Нетривиальные решения задачи существуют, если $\sin \delta = 0$, т. е. $\delta = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, множество пробных функций

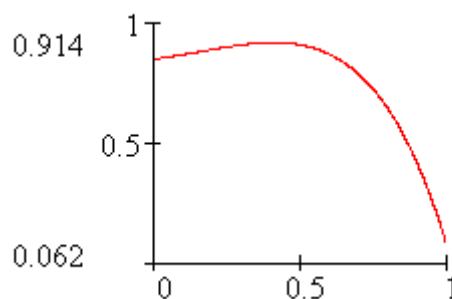
$$u_n(x) = \sin((n-1)\pi x) - (n-1)\pi \cos((n-1)\pi x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Таким образом, пробное решение будем искать в виде

$$y_5(x) = 6 - 5x + C_1 e^{-x} + \sum_{i=2}^5 C_i (\sin((i-1)\pi x) - (i-1)\pi \cos((i-1)\pi x)). \quad (A11)$$

Основные результаты расчетов на ЭВМ

1) График точного решения имеет вид:



2) Получим приближенные решения методом Галеркина в виде (A9).

Если в качестве поверочных функций возьмем пробные $u_1(x), \dots, u_5(x)$, то в результате расчета по программе при $n = 5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,132936 \quad -2,499320 \quad -2,647392 \quad 0,073920 \quad -1,213380)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x + 1,132936\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right) - 2,499320\left(1 - x + \frac{1}{4}x^3\right) - \\ - 2,647392\left(1 - x + \frac{1}{5}x^4\right) + 0,073920\left(1 - x + \frac{1}{6}x^5\right) - 1,213380\left(1 - x + \frac{1}{7}x^6\right).$$

Если в качестве поверочных функций возьмем многочлены Лежандра, то в результате расчета по программе при $n = 5$ получим вектор коэффициентов

$$C = (1,136001 \quad -2,510888 \quad -2,637995 \quad 0,080164 \quad -1,220506)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x + 1,136001\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right) - 2,510888\left(1 - x + \frac{1}{4}x^3\right) - \\ - 2,637995\left(1 - x + \frac{1}{5}x^4\right) + 0,080164\left(1 - x + \frac{1}{6}x^5\right) - 1,220506\left(1 - x + \frac{1}{7}x^6\right).$$

3) Получим приближенные решения методом Рунге.

Ищем решение в виде (A9). В результате расчета получим вектор коэффициентов

$$C = (1,140938 \quad -2,564241 \quad -2,466128 \quad -0,133009 \quad -1,130778)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x + 1,140938\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right) - 2,564241\left(1 - x + \frac{1}{4}x^3\right) - \\ - 2,466128\left(1 - x + \frac{1}{5}x^4\right) - 0,133009\left(1 - x + \frac{1}{6}x^5\right) - 1,130778\left(1 - x + \frac{1}{7}x^6\right).$$

Ищем решение в виде (A11). В результате расчета получим вектор коэффициентов

$$C = (-4,539001 \quad 0,209285 \quad -0,008526 \quad 0,001314 \quad -0,000202)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x - 4,539001e^{-x} + 0,209285(\sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)) - \\ - 0,008526(\sin(2\pi x) - 2\pi \cos(2\pi x)) + 0,001314(\sin(3\pi x) - 3\pi \cos(3\pi x)) - \\ - 0,000202(\sin(4\pi x) - 4\pi \cos(4\pi x)).$$

4) Получим приближенные решения интегральным методом наименьших квадратов.

Ищем решение в виде (A9). В результате расчета получим вектор коэффициентов

$$C = (1,137761 \quad -2,526122 \quad -2,595731 \quad 0,033207 \quad -1,202339)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x + 1,137761\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right) - 2,526122\left(1 - x + \frac{1}{4}x^3\right) - \\ - 2,595731\left(1 - x + \frac{1}{5}x^4\right) + 0,033207\left(1 - x + \frac{1}{6}x^5\right) - 1,202339\left(1 - x + \frac{1}{7}x^6\right).$$

Ищем решение в виде (A10). В результате расчета получим вектор коэффициентов

$$C = (4,207857 \quad -9,361081 \quad -1,023365 \quad -0,337991 \quad -0,171763)$$

и пробное решение имеет вид:

$$y_5(x) = 6 - 5x + 4,207857 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right) - 9,361081 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^3\right) - 1,023365(1-x)^2x^2 - 0,337991(1-x)^2x^3 - 0,171763(1-x)^2x^4.$$

5) Определяем меры точности полученных приближенных решений.

1. Метод Галеркина. Приближенные решения отыскивались в виде (A9).

Поверочные ф-ции	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Многочл. (A4)–(A8)	$\varepsilon 11 = 0.000807$	$\varepsilon 21 = 0.011$	$\varepsilon 31 = 0.000043$
Многочл. Лежандра	$\varepsilon 12 = 0.000388$	$\varepsilon 22 = 0.008786$	$\varepsilon 32 = 0.000024$

2. Вариационный метод Ритца.

Приближенные решения:	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Вида (A9)	$\varepsilon 13 = 0.00048$	$\varepsilon 23 = 0.004606$	$\varepsilon 33 = 0.000031$
Вида (A11)	$\varepsilon 14 = 0.006344$	$\varepsilon 24 = 0.229$	$\varepsilon 34 = 0.006182$

3. Интегральный метод наименьших квадратов.

Приближенные решения:	$\max y_n(x) - y_{n-1}(x) $	$\max R_n(x) $	$\max Yk(x) - y_n(x) $
Вида (A9)	$\varepsilon 15 = 0.000348$	$\varepsilon 25 = 0.009123$	$\varepsilon 35 = 0.000023$
Вида (A11)	$\varepsilon 16 = 0.000348$	$\varepsilon 26 = 0.009123$	$\varepsilon 36 = 0.000023$

Выводы

Сравнение с решением, полученным с помощью метода Рунге-Кутты в системе Mathcad, показывает, что все три метода эффективны при отыскании приближенного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Наиболее близкое к точному аналитическое решение найдено методом наименьших квадратов в виде (A9) или (A10). Кроме того, судя по разности $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$, этот метод дает наиболее быструю сходимость последовательности пробных решений. В тоже время, из анализа невязки полученных решений следует, что наиболее эффективным является метод Ритца при отыскании пробного решения в виде (A9).

Так же следует отметить неэффективность использования при решении данной краевой задачи пробных решений вида (A11).

Заключение

В данном пособии представлено достаточно полное изложение алгоритмов методов взвешенных невязок [1] численного решения линейной краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, линейных начально-краевых задач для одномерных уравнений параболического и гиперболического типов, первой краевой задачи для двухмерного эллиптического уравнения.

Результаты решения указанных задач математической физики подтверждают общие выводы о возможностях таких методов, представленные в монографии [1]. А именно то, что эти методы, во-первых, приводят к достаточной точности получаемых решений и, во-вторых, позволяют достигать приемлемой точности при небольшом (не более пяти) числе пробных и поверочных функций, взятых из младших элементов полной системы функций.

В пособии не обсуждаются вопросы, связанные с проблемой сходимости последовательности пробных решений к искомому точному решению задачи. Не обсуждаются также трудности и пути их преодоления, которые возникают, например, когда получение решения методом Галеркина с необходимой точностью требует сохранения большего числа пробных функций в пробном решении. С обсуждением этих проблем можно ознакомиться в монографии [1].

Библиографический список

1. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. – 352 с.
2. Калиткин, Н. И. Численные методы / Н. И. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
3. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1970. – 720 с.
4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
5. Вельмисов, П. А. Уравнения математической физики: учебное пособие / П. А. Вельмисов, Т. Б. Распутько. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 68 с.
6. Анкилов, А. В. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок : учебное пособие / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Семёнов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 158 с.

Учебное издание

АНКИЛОВ Андрей Владимирович
ВЕЛЬМИСОВ Петр Александрович
СЕМЁНОВ Алексей Степанович

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

Учебное пособие

Ответственный за выпуск П.А. Вельмисов

ЛР №020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 30.12.2010. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 14,51. Тираж 500 экз. (1-й з-д 1–100 экз.). Заказ 360.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.