Тема 4. Метод конечных разностей. Вариационно-разностный метод. Метод Бубнова-Галеркина. Метод Канторовича-Власова.

Аналитическое решение граничных задач возможно только в некоторых частных случаях. Моделирование большинства реальных физических и технических систем приводит к необходимости численного (приближённого) решения дифференциальных уравнений или их систем.

В настоящее время существует два основных подхода к приближённому решению дифференциальных уравнений. Первый основан на решение уравнений в их дифференциальной форме, а второй – в интегральной форме. При этом итегральная форма может быть получена как на основе вариационных принципов, так и с использованием интегрально-дифференциальных преобразований основанных на минимизации погрешности приближённого решения или отыскания стационарных точек энергетического функционала [1, 19, 29, 35].

Метод конечных разностей (МКР)

Сущность данного метода заключается в том, что рассматриваемый дифференциальный оператор заменяется разностным. При этом рассматриваемая область как в пространстве, так и по времени покрывается сеткой, в узлах которой вычисляются значения разностных производных [1, 18].

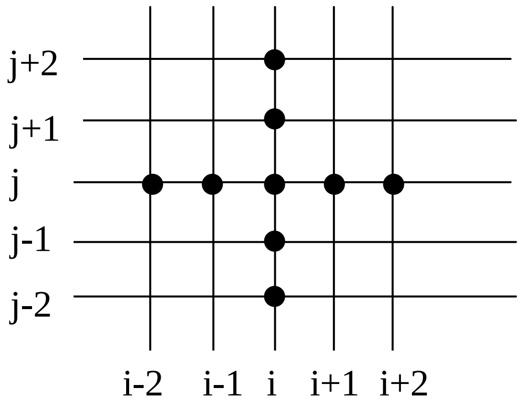

Рисунок 3.1. Конечноразностная сетка

Согласно определения:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим часть области, представленной на рисунке 3.1. В этом случае для первой производной по одной из переменных в точке (i, j) будем иметь:

$$f'_{ij} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{f_{ij} - f_{i-1j}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_{ij} - f_{i+1j}}{x_i - x_{i+1}}. \qquad (3.2)$$

Учитывая, что шаг сетки постоянный, складываем два последних тождества в (3.1):

$$f'_{ij} \approx \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора можно оценить погрешность найденных значений разностных производных.

Для нахождения разностных производных второго порядка положим:

$\varphi = f'$,

тогда, воспользовавшись одним из выражений (3.2) – (3.3), найдём значение первой производной для φ. Например, воспользовавшись (3.3), а затем (3.2), получаем:

$$\varphi'_{ij} \approx \frac{\varphi_{i+1j} - \varphi_{i-1j}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{f_{i+1j} - f_{ij}}{\Delta x} - \frac{f_{ij} - f_{i-1j}}{\Delta x} \right) = \frac{f_{i+1j} - 2 f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta x^2}$$

или

$$f''_{ij} \approx \frac{f_{i+1j} - 2 f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta x^2}. \qquad (3.4)$$

Аналогично рассуждая можно получить производные более высоких порядков и смешанные:

$$f'''_{ij} \approx \frac{- f_{i-2j} + 2 f_{i-1j} - 2 f_{i+1j} + f_{i+2j}}{2\Delta x^3}, \qquad (3.5)$$

$$f^{IV}_{ij} \approx \frac{f_{i-2j} - 4 f_{i-1j} + 6 f_{ij} - 4 f_{i+1j} + f_{i+2j}}{\Delta x^4}, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1j+1} - f_{ij+1} - f_{i+1j} + f_{ij}}{\Delta x \Delta y}, \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial^4 f_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{f_{i-1j-1} - 2 f_{ij-1} + f_{i+1j-1} - 2\left(f_{i-1j} - 2 f_{ij} + f_{i+1j}\right) + f_{i-1j-1} - 2 f_{ij+1} + f_{i+1j+1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}. \qquad (3.8)$$

Воспользовавшись формулами (3.2) – (3.3) в другом порядке, можно получить нецентральные выражения для разностных производных высокого порядка. В частности, нецентральные разностные производные используются при аппроексимации дифференциальных операторов на границах.

Кроме того, воспользовавшись вышеизложенным, несложно получить разностные выражения и для нерегулярного шага сетки.

Найденные значения разностных производных подставляются в исходное дифференциальное уравнение и граничные и (или) начальные условия. В итоге будет получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции в узловых точках.

Рассмотрим применение метода конечных разностей для решения уравнений параболлического типа на примере уравнения теплопроводности для стержня [25, 35]:

$$c\rho\frac{\partial T(t,x)}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}+Q(t,x)\,,\quad t>0\,,\ x\in\Omega\,, \qquad (3.9)$$

$$T(0,x)=\phi(x)\,,\ x\in\Omega\,,$$

$$T(t,x)=\psi(t)\,,\ x\in\Gamma\,,$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала стержня;

$Q(t, x)$ – источник тепла внутри тела;

с – удельная теплоемкость;

ρ – плотность материала стержня.

Подставим (3.2) и (3.4) в (3.9), получаем:

$$c\rho\frac{T_{ij}-T_{ij-1}}{\Delta t}=\lambda\frac{T_{i+1j}-2T_{ij}+T_{i-1j}}{2\Delta x^2}+Q_{ij}\,, \qquad (3.10)$$

$$T_{i0}=\phi_i\,,$$

$$T_{oj}=\psi 1_j\,,\ T_{nj}=\psi 2_j\,,\ i=\overline{0,n}\,,\ \ j=\overline{0,m}\,.$$

Проведя необходимые преобразования, получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволит найти неизвестную температуру стержня на заданном временном интервале.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости [1, 12, 14]. Как известно, решение плоской задачи теории упругости сводится к решению уравнения совместности деформаций в виде бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial\varphi^4}{\partial y^4}=0\ , \qquad (3.11)$$

где φ – функция напряжений Эри.

Подставляя (3.6) и (3.8) в (3.11), учитывая граничные условия, приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим краевую задачу определения прогибов тонкой прямоугольной пластинки [1, 12, 14]. Данная задача описывается дифференциальным уравнением четвёртого порядка Софи-Жермен:

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}=\frac{q}{D}, \qquad (3.12)$$

где ω – функция прогибов, q – нагрузка, D – цилиндрическая жёсткость.

Вариационно-разностный метод

Сущность данного метода заключается в том, что рассматриваемый вариационная формулировка исследуемой задачи, куда и осуществляется подстановка разностных производных [1, 10, 22].

Рассмотрим уравнения параболлического типа на примере уравнения теплопроводности для стержня. Как известно, данное уравнение имеет вид (3.9). Функционал полной энергии для данной задачи будет иметь вид:

$$Э = \int_V \left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \left(Q - c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right)T \right] dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2}h\left(T - T_\infty\right)^2 \right] dS\,. \qquad (3.13)$$

Согласно вариационному принципу Лагранжа, истинная функция удовлетворяет уравнению:

$$\delta Э(T) = 0$$

или

$$\frac{\partial Э}{\partial \{T\}} = 0\,. \qquad (3.14)$$

Подставим выражения для разностных производных (3.2) – (3.4) в (3.13) и выполним численно интегрирование, то получим, что полная энергия зависит от T_{ij}: $Э(T_{ij})$, следовательно, вариационный принцип (3.14) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial Э}{\partial T_{ij}} = 0\,. \qquad (3.15)$$

Соотношения (3.15) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволит найти искомую температуру.

Метод Бубнова-Галеркина

Данный метод используется для решения краевых задач и позволяет найти приближённое аналитическое решение [1, 17].

Запишем произвольное дифференциальное уравнение в виде:

$$L(w) = 0\,, \qquad (3.16)$$

где L – произвольный дифференциальный оператор.

Сущность метода заключается в том, что искомую функцию представляем в виде линейной комбинации нескольких базисных функций с произвольными постоянными коэффициентами, например:

$$w \approx \omega(x, y) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j(x, y), \qquad (3.17)$$

где α_j – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению;

$f_j(x, y)$ – базисные функции, которые задаются так, чтобы они удовлетворяли всем (кинематическим и силовым) граничным условиям.

Подставим (3.17) в исходное дифференциальное уравнение (3.16) и вычислим невязку – функцию, определяющую насколько полученные соотношения отличаются от тождества:

$N(x, y) = L(\omega) \neq 0$

Потребуем, чтобы невязка была ортогональной базисным функциям, т.е.

$$\iint_{\Omega} N(x, y) f_j(x, y) = 0\,. \qquad (3.18)$$

Соотношения (3.18) представляют собой систему из N линейных алгебраических уравнений относительно α_j, реашая которую находим искомую функцию (3.17).

Метод Канторовича-Власова

Основная идея данного метода заключается в понижении размерности исходной задачи за счёт увеличения числа дифференциальных уравнений [1, 18].

Искомую функцию представляем в виде линейной комбинации нескольких базисных функций с произвольными неизвестными функциями, например:

$$w \approx \omega(x, y) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(y) f_j(x), \qquad (3.17)$$

где $\varphi_j(y)$ – N неизвестных функций, подлежащих определению.

Далее поступаем аналогично, как и в методе Бубнова-Галеркина.