Тема 3. Понятие граничной задачи.
Основные вариационные принципы

При решении задач о стационарных тепловых состояниях однородных тел, об установившихся диффузионных процессах, о потенциале поля тяготения и др.

Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка и принадлежат к уравнениям эллиптического типа.

Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными образуют важнейший класс уравнений математической физики. Многие задачи сводятся к решению уравнения Лапласа, например, задача о стационарном распределении температуры в теле [15, 25]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (2.1)$$

где $u = u(x,y,z)$ – есть функция точки (x,y,z) трехмерного ортогонального пространства.

Выражение, стоящее в левой его части, называют лапласианом функции и, а правило, по которому образуется это выражение, – оператором Лапласа. Оператор Лапласа принято обозначать символом Δ, вследствие чего уравнение (2.1) может быть записано в форме

$$\Delta u = 0. \quad (2.2)$$

Оператор Лапласа в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат определяется соответственно:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (2.3)$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (2.4)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (2.5)$$

Часто приходится рассматривать более общее уравнение

$$\Delta u = f(x,y,z). \quad (2.6)$$

где $f(x,y,z)$ – заданная функция. Такое уравнение называется уравнением Пуассона. К нему приводят, например, задачи о распределении температуры в теле при наличии источника тепла [17, 34].

Каждое из приведенных эллиптических уравнений имеет бесконечное множество решении. Действительно, как уже было отмечено, уравнение Лапласа описывает стационарное распределение температуры в теле. Однако в одном и том же теле, может быть бесконечное множество стационарных распределений температуры. Все зависит от того, каковы характеристики той внешней среды, в которую помещено это тело. Влияние внешней среды часто может быть описано условиями на границе тела. Вот почему наряду с уравнениями, описывающими процессы, происходящие внутри тела, задаются условия на границе. Задача нахождения решения эллиптического уравнения при заданных граничных условиях называется граничной задачей.

Первая краевая задача (задана Дирихле) состоит в нахождении решения u уравнения (2.2, 2.6), если известно значение этого решения во всех точках границы:

$$u(x,y,z)=g(x,y,z) \qquad (\{x,y,z\}\in S), \quad (2.7)$$

где S – граница области G, $g(x,y,z)$ – заданная функция.

Физический смысл этой задачи в случае теплопроводности состоит в нахождении стационарного распределения температуры в теле, при известных температурах на поверхности этого тела.

Вторая краевая задача (задача Неймана) состоит в нахождении решения и уравнения (2.2, 2.6) при условии на границе

$$D_\nu u=g(x,y,z) \qquad (\{x,y,z\}\in S), \quad (2.8)$$

где D_ν – специальный оператор, ν – единичный вектор внешней нормали к границе S в точке (x,y,z).

Физический смысл этой задачи в случае теплопроводности состоит в нахождении стационарного распределения температуры в теле, если задан тепловой поток на поверхности тела.

Третья краевая задача состоит в нахождении решения и уравнения (2.2, 2.6) при условии на границе

$$D_\nu u+h(x,y,z)u(x,y,z)=g(x,y,z) \qquad (\{x,y,z\}\in S), \quad (2.9)$$

где $h(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ – заданные функции.

К такой задаче приводит нас, например, определение стационарно-то распределения температуры в теле, если происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона:

$$D_\nu u=h(x,y,z)(u_0(x,y,z)-u(x,y,z)), \quad (2.10)$$

где $u_0(x,y,z)$ – температура окружающей среды.

Можно рассмотреть более общую постановку граничной задачи, когда граница S состоит из двух частей – S_1 и S_2, на каждой из которых задается свое граничное условие. Такие краевые задачи называют смешанными [35].

Наряду с эллиптическими уравнениями важный класс уравнений математической физики составляют уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u= f(x,y,z). \quad (2.11)$$

Такие уравнения появляются при описании многих нестационарных процессов (теплопередачи, диффузии и т.д.). При этом переменная t означает время.

Без дополнительных ограничений искомая функция $u(t,x)$ из уравнения (2.11) определяется неоднозначно. В полном соответствии с эллиптическими уравнениями можно задавать дополнительные граничные условия. Кроме граничных условий типа (2.7-2.9), для однозначного определения $u(t,x)$ требуется задавать начальные условия вида

$$u = u_0(x, y, z) \qquad (t = 0). \quad (2.12)$$

Принцип возможных перемещений Лагранжа

Вариационные или энергетические методы исследования конструкций образуют мощный и широко применяемый подход к построению соотношений для конечных элементов. Простейшие варианты этих методов используются для расчета инженерных конструкций.

Вариационные принципы механики конструкций описываются с учетом их дальнейшего использования для построения конечно-элементных соотношений. Таким образом, предполагается, что соотношения между силами и перемещениями для каждого отдельного конечного элемента можно построить независимо, а построение соотношений для всей конструкции – отдельная процедура. Однако энергетический метод позволяет по-иному подойти к методу конечных элементов и получить глобальные соотношения, суммируя энергию отдельных элементов.

Вариационные принципы теории упругости позволяют свести проблему определения напряженно-деформированного состояния тела к задаче отыскания минимума того или иного функционала. На этом основаны различные прикладные методы расчета, в которых удается получить приближенное решение задачи, не прибегая к интегрированию системы дифференциальных уравнений теории упругости. Вариационные принципы составляют теоретический фундамент метода конечных элементов, позволяя, в частности, обосновать его сходимость к точному решению [1, 10, 22].

Рассмотрим упругое тело, находящееся в равновесии под действием объемных $R = \{R_x, R_y, R_z\}$ и поверхностных $P = \{P_x, P_y, P_z\}$ сил. Внешние силы совершат некоторую работу, которая затрачивается исключительно на деформацию. При этом изменится потенциальная энергия положения внешних сил. При разгрузке за счет накопленной потенциальной энергии может быть совершена такая же работа, какая была затрачена на деформацию тела.

Потенциальная энергия, накопленная деформированным элементарным параллелепипедом со сторонами *dx*, *dy*, *dz* равна

$$W = \frac{1}{2}\sigma^T \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^T \sigma, \quad (2.13)$$

где $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}\}$ – матрицы напряжений и деформаций.

Потенциальная энергия деформации, накопленная всем телом равна

$$U = \int W d\tau. \quad (2.14)$$

Принцип возможных перемещений применительно к упругому телу, согласно которому работа внешних сил на возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии деформации записывается в виде

$$\delta U = \delta A. \quad (2.15)$$

Полная потенциальная энергия системы равна

$$V = U - A. \quad (2.16)$$

Вариационное уравнение Лагранжа записывается в виде

$$\delta V = \delta(U - A) = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку U и A вычисляются для равновесного состояния тела, уравнение (2.17) утверждает, что в состоянии равновесия полная энергия системы имеет стационарное значение. Стационарное значение является минимумом. Если тело, находящееся в состоянии устойчивого равновесия, под действием какого-либо внешнего воздействия несколько изменит свою форму, то после устранения этого воздействия оно снова займет первоначальное положение. При возвращении в исходное положение будет совершена работа, т. е. высвободится некоторое количество потенциальной энергии. Значит, в возмущенном положении тело обладает большей потенциальной энергией, чем в положении устойчивого равновесия.

Если удастся найти перемещения, удовлетворяющие вариационному уравнению Лагранжа (2.17), то при этом автоматически будут удовлетворены уравнения равновесия, а также статические граничные условия. Вариационный принцип Лагранжа состоит в следующем: из всех перемещений, допускаемых наложенными на тело связями, в действительности имеют место такие, при которых полная анергия системы V минимальна.

Принцип возможных сил Кастильяно

Пусть для упругого тела известны напряжения σ, деформации ε и перемещения *u*, возникающие при действии внешних нагрузок *R* и *P*.

Напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности.

Принцип дополнительных виртуальных работ записывается в виде [1, 9, 10]:

$$\delta U^* = \delta A^*. \quad (2.18)$$

Из уравнения (2.18) следует, что для совместного напряженного состояния вариация дополнительной энергии деформации равна вариации дополнительной работы внешних сил.

Полная дополнительная энергия системы равна

$$V^* = U^* - A^*. \quad (2.19)$$

Из уравнения следует (2.19) следует уравнение

$$\delta V^* = \delta(U^* - A^*) = 0. \quad (2.20)$$

Вариационное уравнение (2.20) устанавливает, что в действительном напряженном состоянии полная дополнительная энергия системы имеет стационарное значение. Можно показать, что это стационарное значение есть минимум.

На основании сказанного выше сформулируем вариационный принцип Кастильяно: из всех статически возможных напряженных состояний в действительности имеет место такое, для которого полная дополнительная энергия системы минимальна.

Исходя из общей формулировки (2.20), можно вывести первую теорему Кастильяно, устанавливающую, что перемещение точки приложения некоторой силы P в направлении этой силы равно для линейно-упругого тела частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе.

Располагая вариационными уравнениями Лагранжа и Кастильяно, можем теперь дать вариационную постановку задачи теории упругости: если задача решается в перемещениях, то требуется найти такие перемещения u, которые непрерывны внутри тела, удовлетворяют геометрическим граничным условиям и минимизируют полную потенциальную энергию системы V; если задача решается в напряжениях, то требуется найти такие напряжения σ, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и статическим граничным условиям и минимизируют полную дополнительную энергию системы V^*.

Принцип Даламбера

Выдающийся французский математик и философ Даламбер сумел совершить гениальный шаг, распространив на динамику применимость принципа виртуальных перемещений. Идея Даламбера может быть изложена следующим образом [22]. Запишем уравнение Ньютона в следующем виде:

$F + I = 0$, (2.21)

где F – сила, действующая на тело; I – вектор можно рассматривать как силу, создаваемую движением и назовем ее силой инерции.

Важность уравнения (2.21) связана с тем, что в нем содержится нечто большее, чем просто измененная формулировка закона Ньютона. Это уравнение является выражением некоторого принципа. Уравнение (2.21) утверждает, что добавление силы инерции к остальным действующим силам приводит к равновесию. Применив какой-либо критерий равновесия механической системы, мы можем сразу же распространить его на систему, находящуюся в движении, с учетом силы инерции. В результате динамика сводится к статике.

Это не означает, что инженеры могут на практике решать задачи динамики методами статики. Добавление силы инерции I к действующей силе F заменяет задачу о движении задачей о равновесии.

Движение есть явление относительное и исследователь может ввести систему отсчета, движущуюся вместе с телом, и наблюдать за телом из этой системы. Принцип Даламбера акцентирует внимание на силах, а не на движущемся теле, и равновесие данной системы сил можно рассматривать безотносительно к состоянию движения тела, на которое эти силы действуют. Согласно критерию равновесия для произвольной системы сил, должна обратиться в нуль полная виртуальная работа всех сил. Этот критерий использует виртуальные, а не реальные перемещения, и потому он равно применим и к покоящимся, и к движущимся массам.

Даламбер обобщил свои рассуждения о равновесии одной частицы на произвольную механическую систему. Принцип Даламбера утверждает, что любая система сил находится в равновесии, если мы добавляем к приложенным силам силы инерции. Это означает, что полная виртуальная работа всех приложенных сил и сил инерции равна нулю на обратимых перемещениях. Суммарную силу, получающейся в результате сложения силы инерции I_k и заданной силы F_k, действующей на частицу, назовем «эффективной силой» и обозначим ее через F_k^e:

$F_k^e = F_k + I_k$. (2.22)

Принцип Даламбера можно теперь сформулировать следующим образом: полная виртуальная работа эффективных сил равна нулю для всех обратимых виртуальных перемещений, совместимых с заданными кинематическими условиями

$$\sum_{k=1}^{N} F_k^e \cdot \delta R_k = 0. \qquad (2.23)$$

Заданная система приложенных сил в общем случае не находится в равновесии, так как для этого требуется выполнение специальных условий. Полная виртуальная работа этих сил обычно отлична от нуля. Однако само движение системы восполняет этот недостаток. Тело движется таким образом, чтобы дополнительные инерционные силы, порождаемые движением, привели баланс работы к нулю. Таким путем из принципа Даламбера следуют уравнения движения произвольной механической системы.