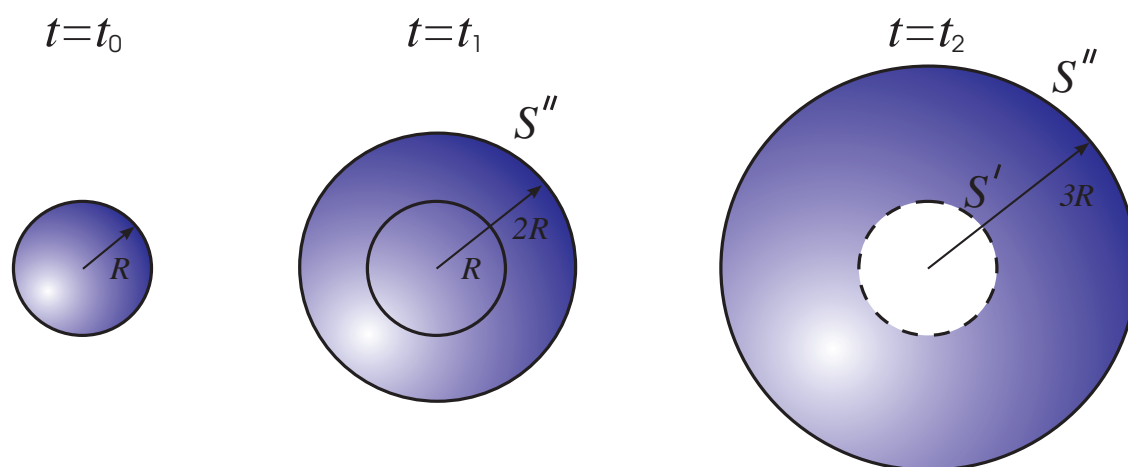


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.В. Алексеев

КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Часть 2



Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2005

ББК 22.311

А47

Под научной редакцией чл.-корр. РАН В.В. Васиной

Рецензенты:

А.А. Буренин, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Н.Н. Фролов, доктор физ.-мат. наук, профессор;

И.А. Шишмарев, доктор физ.-мат. наук, профессор

Алексеев Г.В.

А47

Классические методы математической физики. Учебное пособие. Часть 2. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005. – 416 с.
ISBN 5-7444-1177-1

Книга представляет собой вторую часть учебного пособия по классическим методам математической физики, подготовленное автором для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений. В нем выводятся дифференциальные уравнения в частных производных, моделирующие различные физические процессы, и излагаются классические методы решений начально-краевых задач для основных уравнений математической физики. Написана на основе методологии математического моделирования. Большое внимание в ней уделяется как изложению строгих математических методов решения задач математической физики, так и физическому анализу полученных решений. Книга может быть полезной для математиков, физиков, а также специалистов, интересующихся прикладными вопросами теории дифференциальных уравнений с частными производными.

А 1704020000
180(03)-2005

ББК 22.311

© Г.В. Алексеев, 2005

© Издательство
Дальневосточного
университета, 2005

ISBN 5-7444-1177-1

Оглавление

ГЛАВА 4. Метод разделения переменных (метод Фурье) и волновые процессы в ограниченных областях	6
§1. Одномерное волновое уравнение	6
1.1. Применение метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны	6
1.2. Обоснование метода Фурье	10
1.3. Физический анализ решения	11
1.4. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах	13
1.5. Вынужденные колебания струны с подвижными концами	16
1.6. Некоторые замечания о методе Фурье	17
§2. Одномерное волновое уравнение с переменными коэффициентами	18
2.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье	18
2.2. Некоторые свойства решения спектральной задачи	20
2.3. Представление решения в виде ряда Фурье	24
2.4. Единственность и устойчивость решения начально-краевой задачи	25
§3. Многомерное волновое уравнение	30
3.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье. Сведение к многомерной спектральной задаче	30
3.2. Двумерное волновое уравнение в прямоугольной области. Свободные колебания прямоугольной мембраны	34
3.3. Физический анализ решения волнового уравнения в прямоугольнике	37
3.4. Двумерное волновое уравнение в круге. Свободные колебания круглой мембраны	40
§4. Элементы теории сферических функций. Приложения к решению задачи об излучении звука колеблющейся сферой	46
4.1. Постановка задачи об излучении звука колеблющейся сферой	46
4.2. Простейшие сферические функции. Полиномы Лежандра	47
4.3. Присоединение функции Лежандра	49
4.4. Фундаментальные сферические функции	53
4.5. Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля	55

4.6. Решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Сферические волны	57
ГЛАВА 5. Параболические уравнения и тепловые процессы	59
§1. Первая краевая задача. Принцип максимума	59
1.1. Постановка задачи	59
1.2. Принцип максимума.	63
§2. Решение первой краевой задачи в \mathbb{R}^1 методом Фурье	66
§3. Задача Коши для уравнения теплопроводности в \mathbb{R}	73
3.1. Постановка и единственность решения задачи Коши в \mathbb{R}	73
3.2. Применение метода Фурье	74
3.3. Обоснование метода Фурье	77
3.4. Задача Коши для неоднородного уравнения. Понятие о методе интегральных преобразований	80
3.5. Физический анализ решения	83
ГЛАВА 6. Элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций	86
§1. Уравнение Лапласа. Сингулярные решения и гармонические потенциалы	86
1.1. Определение гармонической функции	86
1.2. Сингулярные решения оператора Лапласа	87
1.3. Физический смысл сингулярного решения. Потенциалы монополей, диполей и мультиполей	90
1.4. Объемные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя	94
1.5. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров	97
§2. Формулы Грина	104
2.1. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса и Грина	104
2.2. Интегральное представление функции из класса C^2	109
§3. Простейшие свойства гармонических функций	114
3.1. Случай функций одной переменной	114
3.2. Основные свойства гармонических функций в пространстве \mathbb{R}^n	114
3.3. Единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа	120
§4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге	124
4.1. Постановка краевых задач. Применение метода Фурье	124
4.2. Интеграл Пуассона	129
4.3. О решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и вне шара.	135
§5. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач для уравнения Пуассона	137

5.1. Постановка основных краевых задач в случае пространства \mathbb{R}^3	137
5.2. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач	139
5.3. Краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости	143
5.4. Некоторые необходимые условия существования решений краевых задач	144
§6. Дополнительные свойства гармонических функций	145
ГЛАВА 7. Элементы теории потенциала	152
§1. Объемные потенциалы и их свойства	152
1.1. Определение объемного потенциала. Непрерывная дифференцируемость объемного потенциала в пространстве \mathbb{R}^n	152
1.2. Существование производных второго порядка от объемного потенциала	155
1.3. Обзор дополнительных свойств объемного потенциала. Эллиптическая регулярность	159
§2. Элементы теории потенциалов простого и двойного слоя	163
2.1. Определение потенциала двойного слоя	163
2.2. Теорема о скачке для потенциала двойного слоя.	167
2.3. Потенциал простого слоя. Теорема о скачке производных от потенциала простого слоя.	170
2.4. Обзор дополнительных свойств потенциалов простого и двойного слоя	172
§3. Метод граничных интегральных уравнений	175
§4. Метод функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона	182
§5. Элементы теории интегральных уравнений	190
Литература	193

ГЛАВА 4. Метод разделения переменных (метод Фурье) и волновые процессы в ограниченных областях

§1. Одномерное волновое уравнение

1.1. Применение метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны. Метод Фурье, или метод разделения переменных, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о свободных колебаниях однородной струны длины l , закрепленной на концах. Указанная задача сводится к решению одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

в области $Q_T = (0, l) \times (0, T]$, где $0 < T < \infty$, при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.3)$$

Здесь константа $a > 0$ имеет смысл скорости распространения волн по струне, а φ_0 и φ_1 – заданные функции, имеющие соответственно смысл начального отклонения и начальной скорости колебания точек струны. Предполагая, что решение u задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно, поставим своей ближайшей целью найти его в явном (аналитическом) виде, более конкретно – в виде функционального ряда.

Будем сначала искать частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (1.4)$$

Здесь $T(t)$ и $X(x)$ – неизвестные пока функции, каждая из которых зависит только от одной переменной. Подставляя (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

После деления на $a^2 X T$ (или, как говорят, *разделения переменных*), приходим к равенству

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (1.5)$$

Левая часть равенства (1.5) зависит только от t , а правая – только от x . Поэтому это равенство возможно лишь в том случае, когда и левая и правая части не зависят ни от x , ни от t , т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (1.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения: уравнение

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad (1.6)$$

для T и уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (1.7)$$

для X . Чтобы получить нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю, решения уравнения (1.1) вида (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (1.7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: *найти такие значения параметра λ , при которых уравнение (1.7) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям (1.8)*. Эти значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие решения – *собственными функциями* задачи (1.7), (1.8), а сама задача (1.7), (1.8) называется *спектральной задачей*, или *задачей Штурма–Лиувилля*.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (1.7), (1.8). Для этого рассмотрим отдельно три случая: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$.

1) При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (1.8), получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \quad (1.9)$$

Как легко заметить, определитель системы (1.9) отличен от нуля; следовательно, $C_1 = 0, C_2 = 0$ и поэтому $X(x) \equiv 0$.

2) При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия (1.8) дают $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0$, $C_1 + C_2 l = 0$. Отсюда $C_1 = 0, C_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3) При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (1.7) имеет вид $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Удовлетворяя граничным условиям (1.8), получим $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot$

$0 = 0$, $C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Из первого уравнения следует $C_1 = 0$, а из второго получаем $C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому приходим к равенству $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, т. е. $\sqrt{\lambda} = (k\pi/l)$, где k – любое целое число. Отсюда следует, что нетривиальные решения задачи (1.7), (1.8) возможны лишь при значениях $\lambda = \lambda_k$, где

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Этим собственным значениям отвечают собственные функции – нетривиальные решения уравнения (1.7)

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (1.11)$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что положительные и отрицательные значения k , равные по абсолютной величине, дают собственные значения $\lambda_{-k} = \lambda_k$, а соответствующие собственные функции могут отличаться лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для k брать только целые положительные значения. С учетом этого можно сделать вывод о том, что *множество всех чисел λ_k в (1.10) и функций X_k в (1.11) образует совокупность всех собственных значений и собственных функций спектральной задачи (1.7), (1.8)*.

Подставим далее в (1.6) вместо λ значения λ_k и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}, \quad (1.12)$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. В соответствии с (1.4) введем функции

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Из построения вытекает, что функции u_k при любом k и любых a_k и b_k удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2). То же самое справедливо и для любой линейной комбинации функций (1.13), а также ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.14)$$

при условии, что он равномерно вместе с производной по t сходится в замкнутой области $\overline{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$, и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t внутри Q_T . Остается определить постоянные a_k и b_k в (1.14) так, чтобы ряд (1.14) удовлетворял и начальным условиям (1.3).

Продифференцируем ряд (1.14) по t . Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) и (1.15) в начальные условия (1.3), приходим к соотношениям

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.16)$$

Формулы (1.16) представляют собой разложения заданных функций φ_0 и φ_1 в ряд Фурье по синусам (1.11) в интервале $(0, l)$. Из теории рядов Фурье (см., например, [19, с.317]) вытекает, что система (1.11) является полной, например, в пространстве непрерывных функций $C[0, l]$, причем коэффициенты a_k и b_k разложений (1.16) однозначно определяются по (непрерывным) функциям φ_0 и φ_1 с помощью формул

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.17)$$

Тем самым решение исходной задачи (1.1)–(1.3) построено. Оно имеет вид ряда (1.14), где a_k и b_k определяются формулами (1.17), при условии, конечно, что ряд (1.14) равномерно сходится в замкнутой области \overline{Q}_T вместе с производной $\partial u / \partial t$ (при выполнении этих условий ряд (1.14) удовлетворяет граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3)), и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t в Q_T (при выполнении этих условий ряд (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке $(x, t) \in Q_T$).

Изложенный выше метод нахождения решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в виде функционального ряда (1.14) носит название *метода разделения переменных* или *метода Фурье* по имени французского математика Ж.Фурье, который с достаточной полнотой развил этот метод в начале 19-го века. (Сама же идея применения метода разделения переменных для решения волнового уравнения была предложена впервые другим французским математиком Ж.Д. Аламбером в 1749 г.). Как вытекает из предыдущих рассуждений, суть этого метода в применении к задаче (1.1)–(1.3) заключается в том, чтобы: 1) построить достаточно широкий набор частных решений u_k исходного уравнения (1.1), удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.2), в виде произведения (1.13) двух функций: T_k и X_k – зависящих от одной переменной, соответственно t или x и 2) составив ряд (1.14) из указанных частных решений, подобрать в нем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы, с одной стороны, ряд (1.14) сходил

равномерно в замкнутой области \overline{Q}_T (вместе с производной $\partial u/\partial t$), и его можно было дважды почленно дифференцировать по x и t внутри Q_T , а с другой стороны, чтобы ряд (1.14) удовлетворял начальным условиям (1.3). Исследованию равномерной сходимости ряда (1.14), т. е. обоснованию применения метода Фурье для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), посвящен следующий пункт.

1.2. Обоснование метода Фурье. Возможность применения метода Фурье для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) основывается на следующей теореме о достаточных условиях равномерной сходимости функционального ряда (1.14) и его почленного дифференцирования.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если функция φ_0 дважды непрерывно-дифференцируема на интервале $[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0, \quad (1.18)$$

а функция φ_1 непрерывно-дифференцируема на $[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0, \quad (1.19)$$

то функция u , определяемая рядом (1.14), имеет непрерывные производные второго порядка в замкнутой области \overline{Q}_T и удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке $(x, t) \in \overline{Q}_T$, граничным условиям (1.2) при $t \in [0, T]$ и начальным условиями (1.3) при $x \in [0, l]$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (1.14) по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в \overline{Q}_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям в (1.17) и принимая во внимание (1.18) и (1.19), получим

$$a_k = - \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3}, \quad b_k = - \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{ak^3}, \quad (1.20)$$

где

$$b_k^{(3)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad a_k^{(2)} = \frac{2}{al} \int_0^l \varphi_1''(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.21)$$

Нетрудно видеть, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \quad (1.22)$$

сходятся. Действительно, применяя неравенство Коши, имеем

$$\frac{|a_k^{(2)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + |a_k^{(2)}|^2 \right], \quad \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + |b_k^{(3)}|^2 \right].$$

В таком случае сходимость рядов (1.22) вытекает из очевидной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ (см., например, [18, с. 425]) и рядов $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(2)}|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k^{(3)}|^2$. Последние сходятся как ряды, составленные из квадратов коэффициентов сходящегося ряда Фурье [19, с. 311].

Подставляя (1.20) в ряд (1.14), получим

$$u(x, t) = - \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(b_k^{(3)} \cos \frac{k\pi at}{l} + \frac{1}{a} a_k^{(2)} \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.23)$$

Этот ряд мажорируется в замкнутой области $\overline{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$ числовым рядом

$$\left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(|b_k^{(3)}| + \frac{1}{a} |a_k^{(2)}| \right),$$

который, очевидно, сходится. (Это доказывается так же, как и сходимость рядов (1.22)). Отсюда следует, согласно признаку равномерной сходимости функционального ряда [19], абсолютная и равномерная сходимость ряда (1.14) в замкнутой области \overline{Q}_T , откуда, в свою очередь, вытекает, что ряд (1.14) удовлетворяет граничным условиям (1.2) и первому начальному условию в (1.3).

Аналогичным образом показывается, что ряды, полученные (формально) однократным либо двухкратным дифференцированием ряда (1.14), мажорируются в \overline{Q}_T сходящимися числовыми рядами, а следовательно, равномерно сходятся в \overline{Q}_T . Поскольку каждый член ряда (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке $(x, t) \in \overline{Q}_T$, то отсюда следует, что ряд (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) по крайней мере в каждой точке $(x, t) \in \overline{Q}_T$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из теоремы 1.1 вытекает, что при выполнении ее условий на начальные функции φ_0 и φ_1 существует по крайней мере одно решение задачи (1.1)–(1.3) и это решение имеет вид ряда (1.14), а из теоремы единственности, которая будет доказана в более общем случае в § 2 (см. теорему 2.1), вытекает, что ряд (1.14) является единственным решением задачи (1.1)–(1.3).

1.3. Физический анализ решения. Вернемся к полученному решению задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда (1.14) и обсудим его физический смысл. Введем обозначения

$$a_k = \alpha_k \sin \varphi_k, \quad b_k = \alpha_k \cos \varphi_k, \quad \left(\alpha_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right), \quad (1.24)$$

с помощью которых запишем (1.14) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi at}{l} + \varphi_k \right). \quad (1.25)$$

k -ый член ряда (1.25)

$$\alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi at}{l} + \varphi_k \right), \quad (1.26)$$

будучи решением волнового уравнения (1.1), описывает волну, которую называют *k -ой гармонической волной* или *k -ой гармоникой*. Такое название обусловлено тем, что в отвечающей волне (1.26) процессе движения струны каждая ее точка совершает гармоническое колебательное движение (вверх–вниз) с одной и той же начальной фазой φ_k , круговой частотой ω_k и переменной (зависящей от x) амплитудой $A_k(x)$, определяемыми формулами

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{l} = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad A_k(x) = \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.27)$$

Здесь ρ – плотность струны, T – натяжение струны.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{(k-1)l}{k}, l \quad (1.28)$$

амплитуда $A_k(x)$ обращается в нуль, так что в этих точках, называемых *узлами k -ой гармоники*, колебательного процесса не происходит, т. е. волна (1.26) как бы стоит в них. С учетом этого гармонику (1.26) называют *k -ой стоячей волной*. В точках же

$$\frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \dots, \frac{(2k-1)l}{2k} \quad (1.29)$$

амплитуда $A_k(x)$ достигает наибольшей по модулю величины, так как функция $\sin(k\pi x/l)$ в этих точках достигает максимального абсолютного значения, равного единице. Указанные точки называют *пучностями* для k -ой гармоники.

Следует отметить, что сам по себе процесс колебания струны не представляет собой особого интереса для человечества. Гораздо большую ценность для людей представляет собой следствие этого процесса, а именно *звук*, который неизменно сопровождает процесс колебания струны (или, как говорят физики, *излучается* при колебании струны). Не имея возможности останавливаться здесь на объяснении физического процесса распространения звуковых колебаний в среде и физиологическом процессе вос-

приятия звука органами слуха человека, отметим, что излучаемый струной звук представляет собой суперпозицию (сумму) простейших гармонических звуковых колебаний, называемых *простыми тонами*. Каждый (k -ый) такой тон отвечает конкретной (k -ой) гармонике струны, т. е. излучается, когда струна совершает чистое гармоническое колебание, описываемое функцией (1.26). Частота первого (самого низкого) тона совпадает с частотой ω_1 первой гармоники струны, частота второго тона совпадает с частотой ω_2 , и т. д. Здесь с учетом (1.27) имеем

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}a = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \dots \quad (1.30)$$

Амплитуда k -го тона определяется амплитудой α_k k -ой гармоники, которая в силу (1.24) и (1.17) убывает с ростом k как коэффициент сходящегося ряда Фурье. С учетом этого влияние всех гармоник на звук, излучаемый струной, сводится к созданию *тембра*, т. е. качества звука. Последнее определяется, с одной стороны, основной частотой ω_1 , зависящей согласно (1.30) от длины l , плотности ρ и натяжения T струны, а с другой стороны – характером убывания к нулю амплитуд α_k гармоник. Поскольку тембр звука, издаваемого струной, зависит от параметров l , ρ и T , то, меняя эти параметры и выбирая нужным образом функции φ_0 и φ_1 , можно создать звук, наиболее приятный в музыкальном отношении. Более подробно об этом можно прочитать в литературе по физиологической акустике (см. также [56, с. 93–96]).

1.4. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Рассмотрим в этом пункте задачу определения вынужденных колебаний однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешних источников с объемной плотностью $f(x, t)$. Указанная задача сводится к нахождению решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T = (0, l) \times (0, T], \quad (1.31)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.32)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.33)$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u = v + w. \quad (1.34)$$

Здесь v – решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T, \quad (1.35)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.36)$$

и однородным начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad (0, l), \quad (1.37)$$

а w – решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad Q_T, \quad (1.38)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.39)$$

и неоднородным начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.40)$$

Решение v задачи (1.35)–(1.37) описывает *вынужденные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы с плотностью f в (1.35), причем в отсутствие начальных возмущений. Решение задачи (1.38)–(1.40) описывает *свободные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые происходят без действия внешней силы, а лишь под действием начального возмущения струны. Поскольку задача (1.38)–(1.40) о свободных колебаниях струны уже решена в п.1.2, то для решения исходной задачи (1.31)–(1.33) достаточно найти решение v задачи (1.35)–(1.37). Как и в п.1.1, применим для этого метод Фурье.

Следуя методу Фурье, будем искать решение v в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.41)$$

В таком случае граничные условия (1.36) удовлетворяются автоматически, если, конечно, ряд (1.41) сходится равномерно в \overline{Q}_T . Определим теперь функции $T_k(t)$ в (1.41) так, чтобы ряд (1.41) удовлетворял уравнению

(1.35) и обоим начальным условиям в (1.37). Подставляя (1.41) в (1.35) и рассуждая формально, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t)] \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x, t), \quad (1.42)$$

где $\omega_k = k\pi a/l$. Предположим, что функцию f можно разложить в ряд Фурье по синусам (1.11) в интервале $(0, l)$:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.43)$$

Здесь коэффициенты $f_k(t)$, зависящие от t как от параметра, определяются аналогично (1.17) формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.44)$$

Соотношения (1.42) и (1.43) фактически представляют собой разложения одной и той же функции f в ряд Фурье по синусам $\sin(k\pi x/l)$. Приравнявая соответствующие коэффициенты обоих разложений, приходим к равенствам

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.45)$$

При каждом $k = 1, 2, \dots$ (1.45) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции T_k . Чтобы однозначно определить T_k , зададим с учетом однородности начальных условий в (1.37) начальные условия

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.46)$$

Решение уравнения (1.45) при начальных условиях (1.46) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \quad (1.47)$$

или (после подстановки вместо $f_k(\tau)$ их выражений из (1.44))

$$T_k(t) = \frac{2}{l\omega_k} \int_0^t [\sin \omega_k(t - \tau) \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{k\pi x}{l} dx] d\tau. \quad (1.48)$$

Подставляя найденные выражения для T_k в ряд (1.41), получим функцию u , которая с учетом (1.46) и является искомым решением задачи (1.35)–(1.37) при естественном условии равномерной сходимости ряда (1.41) и ряда, полученного почленным дифференцированием (1.41) по t , в замкнутой области \overline{Q}_T , а рядов, полученных двукратным почленным дифференцированием ряда (1.41) по x и t , в области Q_T . Можно показать, рассуждая по той же схеме, что и в теореме 1.1, что равномерная сходимость соответствующих рядов будет обеспечена, если выполняются условия

$$f \in C^2(\overline{Q}_T) \text{ и } f(0, t) = 0, f(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.49)$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что решение исходной задачи (1.31)–(1.33) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.50)$$

Здесь функции T_k определяются из (1.48), а коэффициенты a_k и b_k определяются формулами (1.17). Физический анализ решения проводится по той же схеме, что и в п. 1.3, и мы на нем не будем останавливаться.

1.5. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.

В заключение этого параграфа рассмотрим общую задачу об определении вынужденных колебаний однородной струны под действием внешних источников с плотностью f и начальных возмущений φ_0 и φ_1 в предположении, что концы струны не закреплены, а движутся по заданному закону. Указанная задача сводится к нахождению решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в } Q_T, \quad (1.51)$$

удовлетворяющего неоднородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в } (0, T] \quad (1.52)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в } (0, l). \quad (1.53)$$

Для нахождения решения задачи (1.51)–(1.53) сведем ее с помощью замены зависимой переменной к задаче с однородными краевыми условиями, а далее воспользуемся изложенным в п. 1.4 методом решения последней. С этой целью введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (1.54)$$

Ясно, что

$$w|_{x=0} = g_1(t), \quad w|_{x=l} = g_2(t). \quad (1.55)$$

Решение u задачи (1.51)–(1.53) будем искать в виде

$$u = v + w, \quad (1.56)$$

где v – новая неизвестная функция. Из линейности граничных и начальных условий в (1.52), (1.53) и (1.55) вытекает, что функция v должна удовлетворять однородным граничным условиям $v|_{x=0} = 0$, $v|_{x=l} = 0$ и начальным условиям

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \varphi_0(x) - g_1(0) - [g_2(0) - g_1(0)]\frac{x}{l} \equiv \bar{\varphi}_0(x),$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) - g'_1(0) - [g'_2(0) - g'_1(0)]\frac{x}{l} \equiv \bar{\varphi}_1(x).$$

Подставляя далее (1.56) в уравнение (1.51), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - g''_1(t) - [g''_2(t) - g''_1(t)]\frac{x}{l}.$$

В результате исходная задача (1.51)–(1.53) свелась к задаче нахождения функции v из условий

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, \quad v|_{t=0} = \bar{\varphi}_0(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{\varphi}_1(x). \quad (1.57)$$

Определив решение v задачи (1.57) изложенным в п. 1.4 методом и подставив в (1.56), получим искомое решение исходной задачи (1.51)–(1.53).

1.6. Некоторые замечания о методе Фурье. Описанный выше метод Фурье применяется по аналогичной схеме и для решения других задач математической физики: как одномерных так и многомерных, стационарных либо нестационарных, в пространственных областях, как с прямолинейными границами типа прямоугольника на плоскости \mathbb{R}^2 либо параллелепипеда в пространстве \mathbb{R}^3 , так и с криволинейными границами типа круга и эллипса в \mathbb{R}^2 , шара, эллипсоида, сфероида и т. д. в \mathbb{R}^3 . Следует, однако, отметить, что метод Фурье можно применять для решения лишь достаточно узкого класса задач математической физики, а именно, тех задач, которые (выражаясь языком современной терминологии) допускают *разделение переменных*.

Возможность такого разделения зависит, с одной стороны, от рассматриваемого уравнения с частными производными, которое либо должно быть уравнением с постоянными коэффициентами (как уравнение (1.1)), либо

должно иметь переменные коэффициенты специальной структуры (см., например, § 2 и 3), а с другой стороны, она зависит от вида рассматриваемой пространственной области. В частности, разделение переменных в трехмерном волновом уравнении (с постоянными коэффициентами), рассматриваемом в некоторой области Ω с криволинейной границей S , возможно лишь в том случае, когда граница S совпадает с координатной поверхностью одной из 11 систем координат. К числу таких поверхностей относятся, например, цилиндр, сфера, эллипсоид и сфероид (т. е. эллипсоид вращения).

Отметим при этом, что для применения метода Фурье в таких случаях волновое уравнение необходимо рассматривать не в декартовых, а в криволинейных координатах, в которых граница S совпадает с соответствующей координатной поверхностью; т. е. в цилиндрических координатах, если S – цилиндр, сферических координатах, если S – сфера и т. д. Последующее применение метода разделения переменных к таким уравнениям приводит к необходимости нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами специальной структуры, имеющими особенности в одной или нескольких точках. Указанные решения называются *специальными функциями* математической физики. Два примера использования специальных функций, а именно, цилиндрических функций Бесселя, Ханкеля и сферических функций Ханкеля при решении волнового уравнения в круге либо во внешности сферы, будут приведены соответственно в § 3 и 4 этой главы. Детальное описание свойств специальных функций и примеры их применения для решения задач математической физики можно найти, например, в [37, 56].

§2. Одномерное волновое уравнение с переменными коэффициентами

2.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье. Рассмотрим одномерное (гиперболическое) волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u \equiv p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p'(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u \text{ в } Q_T. \quad (2.1)$$

Здесь ρ, p и q – заданные на интервале $[0, l]$ функции, $Q_T = (0, l) \times (0, T]$, $0 < T < \infty$. Пусть требуется найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\alpha u(0, t) - \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T] \quad (2.2)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.3)$$

Здесь α, β, γ и δ – некоторые константы, φ_0 и φ_1 – заданные на $(0, l)$ начальные функции. Будем предполагать, что выполняются условия

- (i) функции ρ, p, p', q непрерывны на $[0, l]$ и $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$, $\rho(x) \geq \rho_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geq 0 \forall x \in [0, l]$;
- (ii) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ и $\alpha + \beta \neq 0$, $\gamma + \delta \neq 0$.

Из результатов § 1 гл. 2 вытекает, что при выполнении условий (i) (2.1) представляет собой гиперболическое уравнение, описывающее одномерные волновые процессы в неоднородных средах.

Применим для нахождения решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) метод Фурье. Следуя ему, будем искать частные решения уравнения (2.1), удовлетворяющие граничным условиям (2.2), в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.1), получим соотношение

$$\rho(x)X(x)T''(t) = T(t)[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x)T(t),$$

которое после разделения переменных принимает вид

$$\frac{[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.5)$$

Левая часть равенства (2.5) зависит только от x , а правая часть – только от t . Поэтому это равенство возможно лишь тогда, когда каждая из этих частей равна константе. Обозначим ее через $-\lambda$. Тогда из (2.5) приходим к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно неизвестных функций T и X :

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (2.6)$$

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]X(x) = 0. \quad (2.7)$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (2.1) вида (2.4), удовлетворяющие граничным условиям (2.2), необходимо, чтобы функция X удовлетворяла граничным условиям

$$\alpha X(0) - \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0. \quad (2.8)$$

В результате мы приходим к следующей задаче, называемой *спектральной задачей*, либо задачей *Штурма-Лиувилля*: найти такие значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.7), удовлетворяющие граничным условиям (2.8). Те значения параметра λ , при которых спектральная задача (2.7), (2.8) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а сами эти решения –

собственными функциями, отвечающими данному собственному значению (сравните с аналогичным определением в § 1).

2.2. Некоторые свойства решения спектральной задачи. Можно доказать (см., например, [11, § 22], [21, гл. 32], [48, гл. 2]), что при выполнении условий (i), (ii) существует счетное множество собственных значений спектральной задачи (2.7), (2.8). Указанные собственные значения вещественны, простые, и их можно занумеровать так, что выполняется условие

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty. \quad (2.9)$$

Докажем, например, что собственные значения простые. Предположим противное, что некоторое собственное значение λ является кратным. Последнее означает, что для этого λ существует два линейно независимых решения уравнения (2.7), удовлетворяющих граничным условиям (2.8). Тогда и общее решение уравнения (2.7), представляющее собой их линейную комбинацию, также обязано удовлетворять этим условиям. Но это не верно.

Каждому собственному значению λ_k отвечает собственная функция X_k , определяемая с точностью до постоянного множителя. Выберем ее так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1. \quad (2.10)$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (2.10), будем называть *нормированными* (с весом ρ).

Докажем, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны с весом ρ на интервале $(0, l)$, т. е. что

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0 \quad (k \neq m). \quad (2.11)$$

Действительно, пусть λ_k и λ_m – два различных собственных значения, а X_k и X_m – отвечающие им собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.8) и соответственно уравнениям

$$[p(x) X_k'(x)]' + [\lambda_k \rho(x) - q(x)] X_k(x) = 0,$$

$$[p(x) X_m'(x)]' + [\lambda_m \rho(x) - q(x)] X_m(x) = 0.$$

Умножим первое равенство на X_m , второе – на X_k и вычтем. Получим равенство

$$X_m(x) [p(x) X_k'(x)]' - X_k(x) [p(x) X_m'(x)]' + (\lambda_k - \lambda_m) \rho(x) X_k(x) X_m(x) = 0,$$

которое, как нетрудно видеть, можно переписать в виде

$$(\lambda_k - \lambda_m)\rho(x)X_k(x)X_m(x) + \frac{d}{dx}\{p(x)[X_m(x)X'_k(x) - X_k(x)X'_m(x)]\} = 0.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от 0 до l , получим

$$(\lambda_m - \lambda_k) \int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = p(x)[X_m(x)X'_k(x) - X_k(x)X'_m(x)] \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание граничные условия (2.8), легко убеждаемся, что правая часть в (2.12) равна нулю. В таком случае из (2.12) следует, что

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = 0.$$

Отсюда в силу условия $\lambda_m \neq \lambda_k$ вытекает (2.11).

Из свойства ортогональности собственных функций легко следует, что все собственные значения задачи (2.7), (2.8) вещественны. Покажем, более того, что все они неотрицательны. Действительно, пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ – все собственные значения задачи (2.7), (2.8), а X_1, X_2, \dots – отвечающая им ортонормированная (с весом ρ) система собственных функций. Согласно определению, имеем

$$[p(x)X'_k(x)]' - q(x)X_k(x) = -\lambda_k\rho(x)X_k(x). \quad (2.13)$$

Умножая обе части на X_k , интегрируя и принимая во внимание (2.10), получим

$$\lambda_k = - \int_0^l \{[p(x)X'_k(x)]' - q(x)X_k(x)\} X_k(x)dx.$$

Отсюда, после интегрирования первого слагаемого по частям, будем иметь

$$\lambda_k = \int_0^l [p(x)(X'_k(x))^2 + q(x)X_k^2(x)]dx - [p(x)X_k(x)X'_k(x)] \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (2.14)$$

Предположим, что

$$[p(x)X_k(x)X'_k(x)] \Big|_{x=0}^{x=l} \leq 0. \quad (2.15)$$

Так как $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, то из формулы (2.14) непосредственно следует, что $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, в дополнение к (2.9) имеет место

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad (2.16)$$

Легко проверить, что условие (2.15) выполняется при следующих наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях, являющихся частными случаями условий (2.2):

$$\begin{aligned} 1) X(0) = X(l) = 0; \quad 2) X'(0) = X'(l) = 0; \\ 3) X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь h_1 и h_2 – положительные числа.

Отметим еще одно важное свойство собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8) – свойство полноты в пространстве $C^1[0, l]$. Оно состоит в том, что любая функция $v \in C^1[0, l]$ разлагается в ряд Фурье

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x),$$

сходящийся к v в среднем. Последнее означает, что

$$\int_0^l |v(x) - \sum_{k=1}^N a_k X_k(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Здесь коэффициенты a_k определяются формулами

$$a_k = \int_0^l \rho(x) v(x) X_k(x) dx. \quad (2.18)$$

Перечислим кратко еще раз основные свойства собственных значений и функций задачи (2.7), (2.8), справедливые при выполнении условий (i), (ii).

1. Существует счетное множество собственных значений и отвечающих им собственных функций задачи (2.7), (2.8), причем выполняется (2.9).

2. Собственные значения λ_k простые.

3. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $(0, l)$, т. е. удовлетворяют условию (2.11).

4. Система собственных функций $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в пространстве $C^1[0, l]$.

5. В случае, когда граничные условия таковы, что выполняются условия (2.15), например, имеют вид, указанный в (2.17), все собственные значения неотрицательны, так что выполняется условие (2.16). При этом равенство $\lambda_1 = 0$ в (2.16) выполняется тогда и только тогда, когда отвечающая λ_1 собственная функция X_1 есть константа, отличная от нуля. Последнее выполняется, например, в случае, когда $q(x) \equiv 0$, а граничные условия в (2.2) имеют смысл условий Неймана, т. е. имеют вид условий 2) в (2.17).

В заключение этого пункта приведем явные формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8) в том частном случае, когда $\rho = 1$, $p = 1$, $q = 0$, так что (2.1) переходит в волновое уравнение (1.1) при $a = 1$, а (2.7) принимает вид

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{в} \quad (0, l).$$

Рассмотрим несколько типов краевых условий в (2.8).

1) $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$, $\delta = 0$. Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = X(l) = 0.$$

В § 1 было показано, что собственные значения и функции соответствующей спектральной задачи определяются соотношениями

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x \quad k = 1, 2, \dots$$

2) $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = -1$, $\delta = 1$. Условия (2.8) принимают вид

$$X'(0) = X'(l) = 0.$$

Простой анализ (см., например, [21]) показывает, что собственные значения λ_k и функции X_k имеют вид

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим еще раз, что именно в случае краевых условий Неймана первое собственное значение равно нулю, а отвечающая ему собственная функция есть константа: $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = \text{const}$.

3) $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Аналогичный анализ (см., например, [21, с. 127]) показывает, что

$$\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

3') $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Условия (2.8) принимают вид

$$X'(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Собственные значения и функции имеют вид

$$\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

4) $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1$. Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + \gamma X(l) = 0.$$

Собственными значениями в данном случае являются корни λ трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\gamma}.$$

Можно показать (см. [7, 21]), что это уравнение имеет счетное множество корней и, следовательно, существует счетное множество собственных значений $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$. Собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

2.3. Представление решения в виде ряда Фурье. Обратимся теперь к уравнению (2.6). Его общее решение при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (2.19)$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. По построению функция

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x) \quad (2.20)$$

при любом $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2). Чтобы найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.3), составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (2.21)$$

Если этот ряд сходится равномерно, как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и t , то его сумма будет по-прежнему удовлетворять уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2). Чтобы эта сумма удовлетворяла и начальным условиям (2.3), необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x). \quad (2.22)$$

Соотношения в (2.22) представляют собой разложения начальных функций φ_0 и φ_1 в ряд Фурье по полной системе собственных функций $\{X_k\}$ спектральной задачи (2.7), (2.8). Предполагая, что соответствующие ряды в (2.22) равномерно сходятся на интервале $[0, l]$, стандартным образом можно определить коэффициенты a_k и b_k . Для этого нужно умножить обе

части каждого из равенств в (2.22) на ρX_k и проинтегрировать по x в пределах от 0 до l . Принимая во внимание (2.10) и предполагая, что $\lambda_k > 0$, получим

$$a_k = \int_0^l \rho(x) \varphi_0(x) X_k(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) X_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив найденные таким образом значения коэффициентов a_k и b_k в ряд (2.21), получим функцию u , являющуюся по построению искомым решением задачи (2.1)–(2.3) при условии, конечно, что ряд (2.21) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием, сходятся в соответствующих областях. Последнее обеспечивается соответствующим аналогом теоремы 1.1, который справедлив при выполнении определенных условий на начальные функции φ_0 и φ_1 и свойства собственных значений и собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8). Более подробно об этом можно прочитать в [7], [11], [21], [48].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. По аналогичной схеме находится решение краевой задачи для неоднородного аналога

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u + f(x, t) \quad (2.23)$$

уравнения (2.1) в предположении, что плотность объемных источников f в (2.23) можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям X_k задачи (2.7), (2.8). Если, к тому же, уравнение (2.23) рассматривается при неоднородных граничных условиях, например, при условиях

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.24)$$

то предварительно задачу (2.23), (2.24), (2.3) следует свести с помощью замены переменных к соответствующей краевой задаче для уравнения вида (2.23) с однородными граничными условиями, а далее применить метод Фурье.

2.4. Единственность и устойчивость решения начально-краевой задачи. Докажем единственность регулярного решения начально-краевой задачи для уравнения (2.23) из класса $C^2(\overline{Q}_T)$. Для конкретности и простоты вместо общих краевых условий (2.2) будем рассматривать условия Дирихле (2.24).

ТЕОРЕМА 2.1. *Задача Дирихле (2.23), (2.24), (2.3) не может иметь более одного регулярного решения из пространства $C^2(\overline{Q}_T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся энергетическим методом, сущность которого изложена в § 2 гл. 2. Пусть u_1 и u_2 – два решения рассматриваемой

задачи (2.23), (2.24), (2.3) из пространства $C^2(\overline{Q}_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u \quad (2.25)$$

в каждой точке $(x, t) \in \overline{Q}_T$, нулевым начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{в } (0, l) \quad (2.26)$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в } (0, T]. \quad (2.27)$$

Докажем, что $u(x, t) \equiv 0$ в \overline{Q}_T .

Введем в рассмотрение интеграл энергии

$$E(t) = E_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + q(x)u^2 \right] dx. \quad (2.28)$$

Покажем, что он не зависит от t . Действительно, дифференцируя E по t , имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + q(x)u \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx. \quad (2.29)$$

Дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу непрерывности вторых производных решения u в \overline{Q}_T . Интегрируя по частям средний член в правой части (2.29), будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u \right] \frac{\partial u}{\partial t} dx + p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Поскольку функция u удовлетворяет однородному уравнению (2.25) всюду в \overline{Q}_T и однородным граничным условиям (2.27), в силу которых $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=l} = 0$, то правая часть последнего соотношения равна нулю. Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad \text{т.е.} \quad E(t) = \text{const} \quad \text{в } [0, T]. \quad (2.30)$$

Но в силу начальных условий (2.26) имеем

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + q(x) u^2 \right] \Big|_{t=0} dx = 0.$$

Тогда из (2.30) следует, что $E(t) = 0$. Последнее возможно лишь в случае, когда $u(x, t) \equiv 0$ в \overline{Q}_T , т.е. $u_1 = u_2$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. По аналогичной схеме доказывается единственность решения смешанной задачи для уравнения (2.23) при условиях 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u \Big|_{x=0} = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u \Big|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в } (0, T]. \quad (2.31)$$

Здесь h_1 и h_2 – неотрицательные постоянные.

Докажем теперь устойчивость решения u задачи (2.23), (2.24), (2.3) по начальным данным.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть u_1 и u_2 – два решения уравнения (2.23), удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям (2.24) и начальным условиям

$$u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x) \quad \text{в } (0, l), \quad i = 1, 2. \quad (2.32)$$

Тогда разность $u = u_1 - u_2$ может быть сделана сколь угодно малой по модулю в \overline{Q}_T , если выбрать достаточно малыми модули разностей $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\varphi'(x) = \varphi'_1(x) - \varphi'_2(x)$ и $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ на $[0, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу линейности задачи (2.23), (2.24), (2.32) доказательство теоремы эквивалентно доказательству следующего предложения. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.25), однородным граничным условиям (2.27) и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad \text{в } (0, l). \quad (2.33)$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при

$$\max (\|\varphi\|_{C[0,l]}, \|\varphi'\|_{C[0,l]}, \|\psi\|_{C[0,l]}) < \delta, \quad (\|\varphi\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |\varphi(x)|) \quad (2.34)$$

выполняется неравенство

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \equiv \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u(x, t)| < \varepsilon. \quad (2.35)$$

Опять рассмотрим интеграл энергии E_u , определенный соотношением (2.28). Как было выше показано, для функции $u \in C^2(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющей уравнению (2.25) в \overline{Q}_T и граничным условиям (2.27), выполняется тождество $E(t) \equiv E(0)$. Учитывая (2.28) и (2.33), отсюда выводим, что

$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \rho(x) \psi^2(x) + p(x) [\varphi'(x)]^2 + q(x) \varphi^2(x) \} dx. \quad (2.36)$$

Пусть

$$M = \max \{ \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \max_{x \in [0, l]} p(x), \max_{x \in [0, l]} q(x) \}.$$

Тогда из (2.36) выводим с учетом (2.34), что

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^l [\rho(x)(u_t)^2 + p(x)(u_x)^2 + q(x)u^2] dx < \frac{3}{2} M l \delta^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_0^l p(x)(u_x)^2 dx < 3 M l \delta^2. \quad (2.37)$$

Неравенство (2.37) означает, что в каждый момент $t \in [0, T]$ некоторая “норма” функции u на интервале $[0, l]$ мала при малых δ . Используя этот факт, теперь нетрудно показать и малость нормы u в $C(\overline{Q}_T)$. Действительно, используя формулу Ньютона-Лейбница, имеем с учетом условия $u|_{x=0} = 0$, что

$$u(x, t) = \int_0^x u_x dx. \quad (2.38)$$

Из (2.38) получаем, что

$$|u(x, t)| \leq \int_0^x |u_x| dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \sqrt{p(x)} |u_x| dx. \quad (2.39)$$

Оценим правую часть (2.39). Для этого применим известное неравенство Коши–Буняковского

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2}.$$

Используя это неравенство, имеем

$$|u(x, t)| \leq \left[\int_0^x \frac{dx}{p(x)} \right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^x p(x)(u_x)^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Учитывая, что $p(x) \geq p_0 > 0$, и используя (2.37), из (2.40) выводим, что

$$|u(x, t)| < M_1 \delta \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (2.41)$$

Здесь $M_1 = l\sqrt{3M/p_0}$. Полагая $\delta = \varepsilon/M_1$, приходим к (2.35). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Теорема устойчивости имеет место и в случае более общих граничных условий (см. [41, § 19]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Анализ доказательства теоремы 2.2 показывает, что требование малости начальных функций φ, φ' и ψ в норме пространства $C[0, l]$ можно заменить требованием малости интегралов

$$\int_0^l \varphi^2(x) dx, \quad \int_0^l [\varphi'(x)]^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^l \psi^2(x) dx.$$

Это позволяет доказывать устойчивость решения и в других функциональных пространствах. Кроме того, условие $u(0, t) = 0$, используемое при выводе (2.38), можно заменить условием малости $|u(0, t)|$ или $|u(l, t)|$. Наконец, отметим, что утверждение о непрерывной зависимости решения задачи (2.23), (2.24), (2.3) справедливо также и по отношению к возмущениям правой части f уравнения (2.23) в норме пространства $C(\overline{Q}_T)$ (см., например, [41, § 19]).

§3. Многомерное волновое уравнение

3.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье. Сведение к многомерной спектральной задаче. Пусть Ω – некоторая ограниченная область изменения точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства \mathbb{R}^n с границей Γ . Полагая $Q_T = \Omega \times (0, T]$, рассмотрим в Q_T линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu. \quad (3.1)$$

Здесь L – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)u, \quad (3.2)$$

коэффициенты a_{ij} и a которого определены в Ω и удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a \in C(\overline{\Omega}),$$
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad a(x) \geq 0. \quad (3.3)$$

Первое неравенство в (3.3), означающее положительность квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

влечет за собой равномерную эллиптичность оператора L (см. § 1 гл. 2) в Ω . Отсюда, в свою очередь, вытекает, что всюду в области Ω (3.1) является уравнением гиперболического типа и, следовательно, описывает волновые процессы.

Изучим первую начально-краевую задачу для уравнения (3.1): в области Q_T найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (3.4)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (3.5)$$

Следуя методу Фурье, будем искать сначала нетривиальные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие граничному условию (3.4), в виде произведения

$$u(x, t) = v(x)T(t). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.1), будем иметь

$$v(x)T''(t) = [Lv](x)T(t) \equiv \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - a(x)v \right] T(t).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{[Lv](x)}{v(x)} = -\lambda.$$

Здесь λ – константа разделения. Отсюда приходим к двум дифференциальным уравнениям – обыкновенному для T , имеющему вид

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (3.7)$$

и уравнению в частных производных для v :

$$Lv + \lambda v = 0. \quad (3.8)$$

Чтобы получить решения уравнения (3.1) вида (3.6), удовлетворяющие граничному условию (3.4), необходимо, чтобы функция v удовлетворяла граничному условию

$$v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.9)$$

В результате приходим к *многомерной спектральной задаче: найти такие значения λ , при которых уравнение (3.8) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничному условию (3.9)*. Эти значения λ называются *собственными значениями*, а соответствующие решения – *собственными функциями* спектральной задачи (3.8), (3.9).

В предположении, что коэффициенты a_{ij} и a в (3.2) – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (3.3) в области Ω с достаточно гладкой границей, можно доказать, что задача (3.8), (3.9) имеет счетное множество собственных значений и отвечающих им собственных функций (см. [11, § 21], [28, гл. 2], [33], [34, гл. 4], [48, гл. 2], [58, гл. 4]). Указанные собственные значения вещественны, неотрицательны, имеют конечную кратность и могут быть занумерованы так, что выполняется условие

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty. \quad (3.10)$$

С учетом однородности уравнения (3.8) и граничного условия (3.9) собственные функции v_k определяются с точностью до множителя. Выберем его из условия

$$\int_{\Omega} v_k^2(x) dx = 1, \quad (3.11)$$

т. е. будем считать их *нормированными*. Более того, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, так что выполняется условие

$$\int_{\Omega} v_k(x)v_m(x)dx = 0, \quad \lambda_k \neq \lambda_m,$$

и образуют полную систему функций в подходящем функциональном пространстве. Если собственному значению λ_k отвечает несколько линейно независимых собственных функций, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации и считать тем самым эти функции попарно ортогональными. С учетом этого можно считать, что все собственные функции $\{v_k\}$ спектральной задачи (3.8), (3.9) образуют ортонормированную систему.

Ограничимся здесь доказательством свойства неотрицательности собственных значений λ_k . Согласно их определению имеем $Lv_k = -\lambda_k v_k$. Умножим обе части этого равенства на v_k и проинтегрируем по области Ω . Принимая во внимание (3.11), получим

$$\lambda_k = - \int_{\Omega} v_k(x)Lv_k(x)dx = - \int_{\Omega} v_k(x) \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) - a(x)v_k(x) \right] dx.$$

Применяя к первому слагаемому правой части формулу интегрирования по частям в \mathbb{R}^n

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \cos(\mathbf{n}, x_i) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к границе Γ (см., например, [34, с. 104]), будем иметь

$$\lambda_k = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + a(x)v_k^2(x) \right] dx. \quad (3.12)$$

(Интеграл по границе Γ области Ω равен нулю в силу граничного условия $v_k|_{\Gamma} = 0$). Из последнего равенства с учетом последнего условия в (3.3) выводим, что

$$\lambda_k \geq \int_{\Omega} \left[\beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + a(x)v_k^2(x) \right] dx. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что все собственные значения спектральной задачи (3.8), (3.9) на самом деле положительны, так что в дополнение к (3.10) имеем $\lambda_1 > 0$.

Предполагая, что собственные значения λ_k и функции v_k спектральной задачи (3.8), (3.9) известны, подставим далее в (3.7) вместо λ значение λ_k и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (3.14)$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. Решением уравнения (3.1), удовлетворяющим граничному условию (3.4), является по построению любая функция u_k вида

$$u_k(x, t) = T_k(t) v_k(x) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x). \quad (3.15)$$

Действуя далее по стандартной схеме метода Фурье, составим (с учетом кратности собственных значений λ_k) ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x) \quad (3.16)$$

и выберем в нем коэффициенты a_k, b_k так, чтобы сумма ряда (3.16) удовлетворяла начальным условиям (3.5). В результате приходим к следующим соотношениям:

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x), \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} v_k(x). \quad (3.17)$$

Эти равенства представляют собой разложения начальных функций φ_0 и φ_1 в ряд Фурье по системе собственных функций $\{v_k\}$. Если система $\{v_k\}$ является полной, то коэффициенты a_k и b_k определяются стандартным образом и имеют с учетом ортонормированности системы $\{v_k\}$ и условия $\lambda_k > 0$ вид

$$a_k = \int_{\Omega} \varphi_0(x) v_k(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Omega} \varphi_1(x) v_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k и b_k в ряд (3.16), получим функцию u , являющуюся по построению искомым решением начально-краевой задачи (3.1), (3.4), (3.5) при условии, конечно, что ряд (3.16) и ряды, полученные из него двухкратным почленным дифференцированием по x_i и t , равномерно сходятся в соответствующих областях. Последнее обеспечивается соответствующим многомерным аналогом теоремы 1.1, справедливым при выполнении определенных условий на начальные функции φ_0 и φ_1 и определенных свойствах собственных значений и собственных функций.

Что касается утверждений о единственности и устойчивости решения многомерной начально-краевой задачи, то по своим формулировкам они близки к формулировкам теорем 2.1 и 2.2 из § 2. В случае краевой задачи вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{в } (0, T]$$

соответствующие формулировки теорем и их доказательства можно найти в [11, § 33]. Изложенная выше схема будет применена ниже для нахождения решения волнового уравнения с постоянными коэффициентами в частных случаях, когда Ω является прямоугольником либо кругом на плоскости \mathbb{R}^2 .

3.2. Двумерное волновое уравнение в прямоугольной области. Свободные колебания прямоугольной мембраны. Пусть $\Omega = (0 < x < l, 0 < y < h)$ – прямоугольник в плоскости x, y со сторонами l и h . Рассмотрим задачу нахождения решения двумерного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{в } Q_T = \Omega \times (0, T], \quad (3.19)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=h} = 0 \quad \text{в } (0, T] \quad (3.20)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad \text{в } \Omega. \quad (3.21)$$

Задача (3.19)–(3.21) описывает, например, свободные колебания прямоугольной мембраны со сторонами l и h , закрепленной на краях, под действием ее начального отклонения, описываемого функцией φ_0 , и начального импульса, описываемого функцией φ_1 .

Следуя методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (3.19), удовлетворяющие граничным условиям (3.20), в виде произведения

$$u(x, y, t) = v(x, y)T(t). \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.19) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – константа разделения. Отсюда, учитывая условия (3.20), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (3.23)$$

для функции T и двумерной спектральной задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^2 v = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.24)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=h} = 0 \quad (3.25)$$

(со спектральным параметром λ^2) для функции v .

Нашей ближайшей целью является нахождение решения спектральной задачи (3.24), (3.25), т.е. нахождение всех ее собственных значений и собственных функций. Поскольку область Ω является прямоугольной, а краевые условия (3.25) – однородными, то для этого опять можно применить метод Фурье. Следуя ему, будем искать решения (т. е. собственные функции) спектральной задачи (3.24), (3.25) в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.24) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = -\frac{X''}{X} = \lambda_1^2,$$

где λ_1^2 – соответствующая константа разделения. Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda_2^2 Y(y) = 0 \quad (3.27)$$

для функций X и Y . В уравнениях (3.27) λ_1^2 и λ_2^2 – спектральные параметры, связанные со спектральным параметром λ^2 задачи (3.24), (3.25) соотношением

$$-\lambda_2^2 + \lambda^2 = \lambda_1^2 \quad \text{или} \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \quad (3.28)$$

Из граничных условий (3.25) получаем следующие граничные условия для X и Y :

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(h) = 0. \quad (3.29)$$

В результате приходим к следующим двум одномерным спектральным задачам

$$X'' + \lambda_1^2 X = 0 \quad \text{в } (0, l), \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (3.30)$$

$$Y'' + \lambda_2^2 Y = 0 \quad \text{в } (0, h), \quad Y(0) = Y(h) = 0. \quad (3.31)$$

Из результатов § 1 следует, что каждая из задач (3.30), (3.31) имеет счетное множество решений – собственных значений и отвечающих им собственных функций. Указанные решения определяются формулами

$$\lambda_{1,m}^2 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.32)$$

$$\lambda_{2,n}^2 = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{h} y, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

Из (3.28) вытекает, что каждой паре $(\lambda_{1,m}^2, \lambda_{2,n}^2)$ указанных собственных значений отвечает собственное значение

$$\lambda_{mn}^2 = \lambda_{1,m}^2 + \lambda_{2,n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{h^2} \right) \quad (3.34)$$

двумерной спектральной задачи (3.24), (3.25), а из (3.26) вытекает, что отвечающая собственному значению (3.34) собственная функция v_{mn} двумерной задачи (3.24), (3.25) определяется формулой

$$v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}. \quad (3.35)$$

Важно отметить, что совокупность (λ_{mn}^2, v_{mn}) , $m \in \mathbb{N}_+$, $n \in \mathbb{N}_+$ исчерпывает множество всех собственных значений и функций спектральной задачи (3.24), (3.25). Это вытекает из построения системы (3.35) и из свойств решений одномерных задач (3.30) и (3.31).

Используя собственные значения и функции спектральной задачи (3.24), (3.25), далее стандартным образом можно определить решение u начально-краевой задачи (3.19)–(3.21). Прежде всего подставим в (3.23) вместо λ^2 значение λ_{mn}^2 . Общее решение полученного уравнения, очевидно, имеет вид

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t, \quad (3.36)$$

где a_{mn} и b_{mn} – произвольные постоянные. В таком случае частные решения уравнения (3.19), удовлетворяющие граничным условиям (3.20), определяются формулой

$$u_{mn}(x, y, t) = (a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.21), составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}. \quad (3.37)$$

Если ряд (3.37) равномерно сходится в области \overline{Q}_T , а ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x, y и t , равномерно сходятся внутри Q_T , то его сумма по построению будет удовлетворять уравнению (3.19) и граничным условиям (3.20). Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a\lambda_{mn}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}. \quad (3.38)$$

Равенства (3.38) представляют собой разложения заданных функций φ_0 и φ_1 в двойные ряды Фурье по синусам (3.35). Хорошо известно (см., например, [19, с. 362]), что указанная система синусов (3.35) является полной, причем

$$\int_0^l \int_0^h v_{mn}^2(x, y) dx dy = \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx \int_0^h \sin^2 \frac{n\pi y}{h} dy = \frac{lh}{4}. \quad (3.39)$$

С учетом этого коэффициенты a_{mn} и b_{mn} этих разложений определяются однозначно по φ_0 и φ_1 с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy, \\ b_{mn} &= \frac{4}{a\lambda_{mn}lh} \int_0^l \int_0^h \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Подставив найденные значения коэффициентов a_{mn} и b_{mn} в ряд (3.37), получим функцию u , являющуюся по построению искомым решением исходной начально-краевой задачи (3.19)–(3.21) (при условии, конечно, равномерной сходимости ряда (3.37) и рядов, полученных из него двухкратным почленным дифференцированием).

3.3. Физический анализ решения волнового уравнения в прямоугольнике. Проведем физический анализ полученного выше решения задачи (3.19)–(3.21) в виде ряда (3.37). Введем аналогично одномерному случаю (см. п. 1.3) обозначения

$$a_{mn} = \alpha_{mn} \sin \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \alpha_{mn} \cos \varphi_{mn}, \quad (3.41)$$

с помощью которых перепишем (3.37) в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \sin(a\lambda_{mn}t + \varphi_{mn}). \quad (3.42)$$

Формула (3.42) означает, что решение задачи (3.19)–(3.21), описывающее процесс колебания прямоугольной мембраны, складывается из бесчисленного множества (двойного ряда) собственных гармонических колебаний вида

$$u_{mn}(x, y, t) = \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \sin(a\lambda_{mn}t + \varphi_{mn}). \quad (3.43)$$

По аналогии с одномерным случаем функция u_{mn} называется (m, n) -ой *стоячей волной*.

Из (3.43) следует, что для стоячей волны каждая точка (x, y) мембраны Ω совершает гармоническое колебание (вверх–вниз) с одной и той же круговой частотой ω_{mn} и периодом T_{mn} (общими для всех точек), определяемыми формулами

$$\omega_{mn} = a\lambda_{mn} = a\pi\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{h^2}}, \quad T_{mn} = \frac{2\pi}{\omega_{mn}} = \frac{2lh}{a\sqrt{m^2h^2 + n^2l^2}},$$

начальной фазой φ_{mn} и переменной амплитудой

$$A_{mn}(x, y) = \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}.$$

Напомним, что в случае струны каждому собственному значению λ_k^2 (либо собственной частоте $\omega_k = a\lambda_k$) отвечает единственная собственная функция $\varphi_k(x) = \sin k\pi x$ (либо собственная переменная амплитуда $A_k(x)$). Она описывает профиль струны, которая разделяется узлами на несколько равных частей, все точки каждой из которых колеблются в одной фазе. В то же время для мембраны возможна ситуация, когда одному и тому же собственному значению λ_{mn}^2 (либо собственной частоте $\omega_{mn} = a\lambda_{mn}$) отвечает несколько собственных функций, описывающих несколько профилей мембраны с различными положениями *узловых линий*, т. е. линий, вдоль которых амплитуда колебаний равна нулю. В этом состоит важное отличие в поведении колеблющейся мембраны по сравнению с колеблющейся струной.

Проще всего это исследовать на примере квадратной мембраны, для которой $l = h = \pi$. В этом случае собственные значения λ_{mn}^2 и частоты ω_{mn} определяются формулами

$$\lambda_{mn}^2 = m^2 + n^2, \quad \omega_{mn} = a\sqrt{m^2 + n^2}. \quad (3.44)$$

Из (3.44) видно, что основной тон мембраны, отвечающий основной (первой) гармонике (3.43) при $m = n = 1$ или основной частоте ω_{11} , определяется формулой

$$u_{11}(x, y, t) = \alpha_{11} \sin x \sin y \sin(\omega_{11}t + \varphi_{11}).$$

При этом узловые линии первой гармоники совпадают со сторонами квадрата, образуемого мембраной. Этим же свойством обладают и остальные гармоники.

В то же время для следующей по возрастанию второй частоты $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$ ($m = 1, n = 2$ или $m = 2, n = 1$) существуют уже две собственные функции

$$v_{12}(x, y) = \sin x \sin 2y \quad \text{и} \quad v_{21}(x, y) = \sin 2x \sin y,$$

которым отвечают две вторые гармоники либо два вторых обертона одной и той же частоты $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$, описываемые соответственно формулами

$$u_{12} = \alpha_{12}\sin x \sin 2y \sin(\omega_{12}t + \varphi_{12}), \quad u_{21} = \alpha_{21}\sin 2x \sin y \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21}). \quad (3.45)$$

Ясно, что для этой частоты узловые линии гармоник u_{12} и u_{21} определяются при $\varphi_{12} = \varphi_{21}$ соответственно из уравнений $\sin x \sin 2y = 0$, $\sin 2x \sin y = 0$. Видно, что наряду со сторонами квадрата узловыми линиями являются отрезки $y = \pi/2$ для функции u_{12} и отрезки $x = \pi/2$ для функции u_{21} . Более сложный вид имеют узловые линии для произвольной линейной комбинации функций u_{12} и u_{21}

$$\alpha u_{12} + \beta u_{21} = \alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const},$$

которая также описывает вторую гармонику мембраны. Простейшие из узловых линий изображены на рис. 3.1 пунктирными линиями. Более сложные узловые линии, отвечающие в том числе и другим кратным собственным значениям: $\lambda_{13}^2 = \lambda_{31}^2 = 10$, $\lambda_{23}^2 = \lambda_{32}^2 = 13$, $\lambda_{14}^2 = \lambda_{41}^2 = 17$, – приведены в [41, с.221].

Приведенный пример относится к двухкратному собственному значению. Другие примеры двухкратных собственных значений можно получить, рассмотрев другие разные пары чисел m и n . Существуют собственные значения спектральной задачи (3.24), (3.25), обладающие и большей кратностью. Для построения такого собственного значения достаточно найти несколько (больше двух) разных пар $(m, n) \in \mathbb{N}_+^2$, удовлетворяющих условию $\sqrt{m^2 + n^2} = \text{const}$.

Приведем два примера таких собственных значений, построенных весной 2001 г. студентами 3-го курса Института математики и компьютерных наук Дальневосточного государственного университета И.Ф. Храпченковым и Т.С. Чистяковым. С помощью простого алгоритма, реализованного на компьютере, они получили 32-кратное собственное значение $\lambda^2 = 801125$, с которым, в частности, выполняются разложения

$$801125 = 895^2 + 10^2 = 890^2 + 95^2 = 886^2 + 127^2 = \dots = 10^2 + 895^2 \text{ (32 разложения)}.$$

В процессе дальнейшего усовершенствования алгоритма этот результат удалось существенно усилить, получив собственное значение $\lambda^2 = 8900000001503676650$ кратности 1536, с которым, в частности, справедливы разложения

$$\begin{aligned} 89000000001503676650 &= \dots = 2793642145^2 + 1046691725^2 = \dots = \\ &= 1458737557^2 + 2602322951^2 = \dots = 1968253^2 + 2983286129^2 \text{ (1536 разложений)}. \end{aligned}$$

Другие примеры многократных собственных значений автор предлагает найти заинтересованному читателю.

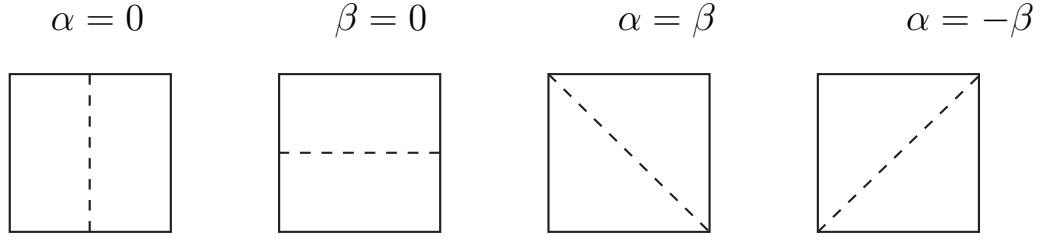


Рис. 3.1

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Вынужденные колебания прямоугольной мембраны исследуются по той же схеме, что и вынужденные колебания струны с той лишь разницей, что плотность объёмных источников разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье по системе собственных функций v_{mn} спектральной задачи (3.24)–(3.25). Более подробно об этом можно прочитать в [35].

3.4. Двумерное волновое уравнение в круге. Свободные колебания круглой мембраны. Пусть $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ – круг радиуса R в плоскости x, y . Рассмотрим в области $Q_T = \Omega \times (0, T]$ двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.46)$$

Введем в плоскости x, y полярные координаты r и θ с помощью формул $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ и, разделив на a^2 , перепишем уравнение (3.46) в полярных координатах:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (3.47)$$

Поставим задачу: найти решение волнового уравнения (3.47), удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{r=R} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (3.48)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r, \theta), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta), \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.49)$$

Задача (3.47)–(3.49) описывает, например, свободные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , закрепленной на границе $r = R$, под действием начальных возмущений φ_0 и φ_1 . При этом $u(x, y, t)$ имеет физический смысл смещения в момент t точки (x, y) мембраны от положения равновесия.

Для простоты рассмотрим ниже случай, когда круглая мембрана совершает *радиальные* колебания, т. е. такие колебания, при которых смещение u мембраны зависит лишь от радиальной координаты r и времени t . Такие колебания имеют место тогда и только тогда, когда начальные функции φ_0 и φ_1 не зависят от угла θ , так что начальные условия (3.49) имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(r), \quad 0 \leq r < R. \quad (3.50)$$

Здесь φ_0 и φ_1 – заданные в интервале $[0, R)$ функции. Так как в рассматриваемом случае u не зависит от угла θ , то уравнение (3.47) принимает более простой вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.51)$$

Следуя методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (3.51), удовлетворяющие граничному условию (3.48), в виде

$$u(r, t) = w(r)T(t). \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.51) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{w''(r) + \frac{1}{r} w'(r)}{w(r)} = -\lambda^2.$$

Здесь λ^2 – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций T и w :

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad (3.53)$$

$$w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) + \lambda^2 w(r) = 0. \quad (3.54)$$

Из (3.48) вытекает граничное условие для w . Оно имеет вид

$$w(R) = 0. \quad (3.55)$$

Равенства (3.54), (3.55) представляют собой спектральную задачу со спектральным параметром λ^2 , которую необходимо решить для нахождения методом Фурье решения u исходной задачи (3.48), (3.50), (3.51). Подчеркнем, что задача (3.54), (3.55) содержит лишь одно краевое условие при $r = R$. Это не случайно, а связано с тем, что (3.54) представляет собой частный случай (при $\nu = 0$) уравнения Бесселя ν -го порядка, имеющего вид

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) W(r) = 0. \quad (3.56)$$

Не ставя здесь своей целью подробное обсуждение свойств решений уравнения (3.56), либо (3.54) (см. об этом, например, [6, гл. 14], [11, §23], [56, с.632]), отметим, что в приложениях основную роль играют два линейно-независимых решения уравнения (3.56): функция Бесселя $J_\nu(\lambda r)$ и функция Неймана $N_\nu(\lambda r)$, а также их линейные комбинации: функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, определяемые формулами

$$H_\nu^{(1)}(\lambda r) = J_\nu(\lambda r) + iN_\nu(\lambda r), \quad H_\nu^{(2)}(\lambda r) = J_\nu(\lambda r) - iN_\nu(\lambda r). \quad (3.57)$$

Первая функция J_ν является гладкой и, более того, аналитической функцией аргумента λr , тогда как вторая функция N_ν имеет особенность (обращается в бесконечность) при $r = 0$. (То же самое, естественно, справедливо и для функций $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$). Последнее является следствием того, что уравнение (3.56) имеет особенность при $r = 0$. Поэтому, согласно теории таких уравнений (см., например, [6, с.284]), из двух линейно независимых решений указанных уравнений одно (и только одно) обязано иметь особенность в особой точке – в данном случае при $r = 0$.

В то же время решение u исходной начально-краевой задачи (3.48), (3.50), (3.51), описывая, согласно своему физическому смыслу, отклонение мембраны от положения равновесия, должно быть ограниченным всюду в круге Ω , а следовательно, и в точке $r = 0$. Это означает, что из двух решений – $J_0(\lambda r)$ и $N_0(\lambda r)$ – уравнения (3.54) последнее необходимо отбросить как не имеющее физического смысла. Этой цели может служить условие ограниченности решения при $r = 0$:

$$|w(0)| < \infty, \quad (3.58)$$

являющееся аналогом граничного условия при $r = 0$ для уравнения (3.54). Таким образом, хотя общее решение уравнения (3.54) имеет вид

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r), \quad (3.59)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, из условия (3.58) необходимо вытекает, что $C_2 = 0$. Полагая в (3.59) $C_2 = 0$ и подставляя полученное выражение в граничное условие (3.55), приходим после деления на постоянную $C_1 \neq 0$ к уравнению

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (3.60)$$

Обозначая $\lambda R = \mu$, перепишем (3.60) в виде

$$J_0(\mu) = 0. \quad (3.61)$$

Уравнение (3.61), аналогично уравнению $\sin \mu = 0$, имеет счетное множество вещественных положительных корней μ_n [11, с. 350]. Указанные корни

простые, положительные и могут быть занумерованы так, что выполняется условие

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty. \quad (3.62)$$

Указанным корням μ_k отвечает совокупность собственных значений λ_k^2 и собственных функций w_k спектральной задачи (3.54), (3.55), имеющая вид

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2, \quad w_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.63)$$

Следует отметить, что свойства собственных функций $J_0(\mu_k r/R)$ спектральной задачи (3.54), (3.55) во многом аналогичны свойствам собственных функций $\sin \mu_k x$ простейшей спектральной задачи (1.7), (1.8). В частности: 1) собственные функции w_k спектральной задачи (3.54), (3.55) образуют ортогональную систему в пространстве $L_r^2(0, R)$, где $L_r^2(0, R)$ обозначает гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций со скалярным произведением

$$(w, v) \equiv \int_0^R w(r) v^*(r) r dr \quad \forall w, v \in L_r^2(0, R).$$

(Здесь “*” обозначает комплексное сопряжение). При этом

$$(w_k, w_l) \equiv \int_0^R J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_l r}{R}\right) r dr = \begin{cases} \frac{1}{2} R^2 J_1^2(\mu_k), & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (3.64)$$

Здесь J_1 – функция Бесселя первого порядка.

2) Система собственных функций $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ спектральной задачи (3.54), (3.55) полна в пространстве $L_r^2(0, R)$.

Доказательство этих свойств можно найти, например, в [11, § 23].

Используя указанные свойства собственных значений λ_k^2 и функций w_k , дальше действуем по стандартной схеме метода Фурье. При $\lambda = \lambda_k = \mu_k/R$ уравнение (3.53) имеет общее решение

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{a \mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a \mu_k t}{R}, \quad (3.65)$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные. В таком случае по построению функции

$$u_k(r, t) = \left(a_k \cos \frac{a \mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a \mu_k t}{R} \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \quad (3.66)$$

удовлетворяют при каждом k уравнению (3.51) и граничному условию (3.48). То же справедливо и для любой конечной линейной комбинации функций (3.66), а также ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \quad (3.67)$$

при условии равномерной сходимости его и ряда, полученного дифференцированием ряда (3.67) по t в замкнутой области \overline{Q}_T , и рядов, полученных двукратным дифференцированием (3.67) по r и t , внутри Q_T .

Осталось определить постоянные a_k и b_k в (3.67). Как обычно, используем для этого начальные условия (3.50). С этой целью подставим ряд (3.67) и ряд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{R} \left(b_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} - a_k \sin \frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (3.68)$$

полученный дифференцированием (3.67) по t , в (3.50). Получим

$$\varphi_0(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad \varphi_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{R} b_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right). \quad (3.69)$$

Равенства (3.69) представляют собой разложения начальных функций φ_0 и φ_1 в ряды Фурье по полной ортогональной в пространстве $L_r^2(0, R)$ системе собственных функций w_k задачи (3.54), (3.55). С учетом этого коэффициенты a_k и b_k этих разложений однозначно определяются по функциям φ_0 и φ_1 . Чтобы их найти, умножим каждое из равенств в (3.69) на функцию $rJ_0(\mu_k r/R)$, проинтегрируем почленно на $(0, R)$ и воспользуемся соотношениями (3.64). В результате получим

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^R r \varphi_0(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr, \quad b_k = \frac{2}{a\mu_k R J_1^2(\mu_k)} \int_0^R r \varphi_1(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (3.70)$$

Тем самым решение исходной задачи (3.48), (3.50), (3.51) построено. Оно имеет вид ряда (3.67), коэффициенты a_k и b_k которого определяется формулами (3.70), при условии, конечно, равномерной сходимости, ряда (3.67) и его производных в соответствующих областях.

Кратко остановимся на физическом смысле решения (3.67). Используя обозначения вида (1.24), перепишем ряд (3.67) в виде

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{a\mu_k t}{R} + \varphi_k \right). \quad (3.71)$$

Согласно формуле (3.71) решение (3.67) задачи (3.48), (3.50), (3.51), описывающее свободные колебания круглой закрепленной на концах мембраны, складывается из счетного множества собственных гармонических колебаний (стоячих волн) вида

$$u_k(r, t) = \alpha_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{a \mu_k t}{R} + \varphi_k \right). \quad (3.72)$$

Каждая точка (r, θ) мембраны Ω совершает гармоническое колебание (вверх-вниз) с одной и той же частотой ω_k и периодом T_k , определяемыми формулами

$$\omega_k = \frac{a \mu_k}{R} = \frac{\mu_k}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi R}{a \mu_k}, \quad (3.73)$$

начальной фазой φ_k и переменной амплитудой $A_k(r) = a_k J_0(\mu_k r/R)$. В точках окружности $r = r_0$, где

$$J_0 \left(\frac{\mu_k r_0}{R} \right) = 0, \quad (3.74)$$

амплитуда A_k обращается в нуль, так что эти точки не колеблются. Таким образом, (3.74) описывает уравнение узловых линий для k -ой стоячей волны.

На рис. 3.2 изображены некоторые простейшие случаи расположения узловых линий.

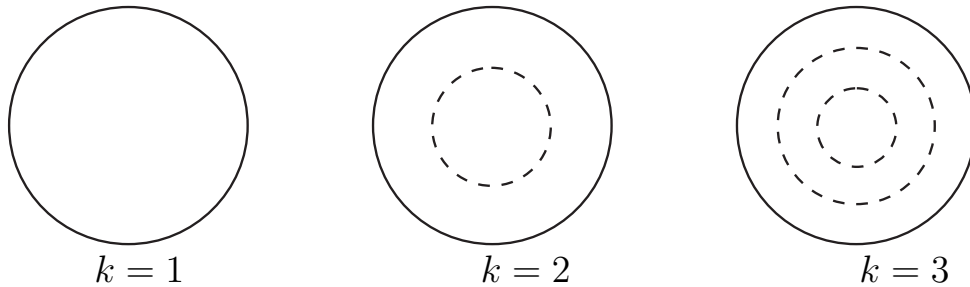


Рис. 3.2

Более подробно о физическом смысле решения (3.67) задачи (3.48), (3.50), (3.51) так же, как и решения общей двумерной задачи (3.47)–(3.49), можно прочитать в [21, с. 214] и [56, с. 430].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Утверждение о выборе в качестве нужного частного решения уравнения Бесселя (3.54) функции Бесселя J_0 относится к рассматриваемому случаю, когда Ω – круг. Если же исходная физическая задача рассматривается во внешности круга, то в качестве соответствующего частного решения следует выбирать функцию Ханкеля. К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе при исследовании внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

§4. Элементы теории сферических функций. Приложения к решению задачи об излучении звука колеблющейся сферой

Предыдущие параграфы были посвящены применению метода Фурье для решения начально-краевых задач, рассматриваемых в простейших “канонических” для метода Фурье областях: отрезке $(0, l)$ оси \mathbb{R} и прямоугольнике либо круге на плоскости \mathbb{R}^2 . В этом параграфе мы применим метод Фурье для решения важной акустической задачи, заключающейся в нахождении звукового поля, излучаемого сферой, колеблющейся с фиксированной частотой ω . Отметим два отличия математической формулировки рассматриваемой ниже задачи от задач, рассматриваемых в §§ 1-3. Первое состоит в том, что в качестве уравнения, описывающего распространение звука, излучаемой сферой, мы выберем не волновое уравнение, а уравнение Гельмгольца, поскольку именно оно описывает распространение звука фиксированной круговой частоты (см. § 6 гл. 1 и [3]). Второе отличие состоит в том, что, исходя из постановки задачи, уравнение Гельмгольца следует рассматривать в неограниченной области – внешности колеблющейся сферы. Последнее приводит к необходимости задания дополнительных условий, а именно условий на бесконечности, необходимых для выделения единственного решения.

4.1. Постановка задачи об излучении звука колеблющейся сферой. Как известно (см., например, [3], [11]), задача излучения звука колеблющейся сферой S радиуса a сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (4.1)$$

во внешности D сферы S , удовлетворяющего граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = g \quad (4.2)$$

на сфере S и условиям излучения Зоммерфельда

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - iku(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число, где ω – круговая частота, $c = \text{const}$ – скорость звука, α, β и g – заданные на сфере S функции, причем g имеет смысл плотности поверхностных источников звука на сфере S , а функции α и β описывают ее акустические свойства. В частности, случай $\alpha = 1, \beta = 0$ отвечает акустически мягкой сфере S , а случай $\alpha = 0, \beta = 1$ – акустически твердой сфере S . Поставим цель: найти решение задачи (4.1)–(4.3), используя метод Фурье.

Прежде всего, введем сферические координаты r, θ, φ , с использованием которых запишем уравнение (4.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \varphi} u + k^2 r^2 u = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (4.5)$$

Следуя схеме метода Фурье, будем искать частные решения уравнения (4.4) в виде произведения

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)v(\theta, \varphi). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.4) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{(r^2 R')' + k^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta, \varphi} v}{v} = \lambda,$$

где λ – константа разделения. Отсюда приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(r^2 R')' + (k^2 r^2 - \lambda) R = 0 \quad (4.7)$$

для функции R и уравнению в частных производных

$$\Delta_{\theta, \varphi} v + \lambda v \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0 \quad (4.8)$$

для функции v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Гладкие (класса $C^\infty(S_1)$) на единичной сфере

$$S_1 = \{(r, \theta, \varphi), \quad r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

решения уравнения (4.8), удовлетворяющие условию периодичности

$$v(\theta, \varphi + 2\pi) = v(\theta, \varphi), \quad (4.9)$$

называются *сферическими функциями*.

4.2. Простейшие сферические функции. Полиномы Лежандра. Будем отыскивать сначала такие сферические функции (т. е. гладкие решения уравнения (4.8)), которые не зависят от угла φ . С этой целью рассмотрим вместо уравнения (4.8) уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \lambda v = 0, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (4.10)$$

Делая в нем замену

$$x = \cos\theta : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad v(\theta) = P(x), \quad (4.11)$$

так что

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}, \quad (4.11a)$$

перепишем (4.10) в виде

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0, \quad x \in (-1, 1). \quad (4.12)$$

Это – уравнение Лежандра [11, с.377]. Хорошо известно, что его гладкие на $[-1, 1]$ решения (класса $C^\infty[-1, 1]$) существуют только при значениях

$$\lambda = \lambda_n \equiv n(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.13)$$

Соответствующее уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + n(n + 1)P = 0, \quad x \in (-1, 1) \quad (4.14)$$

имеет единственное (линейно независимое) ограниченное на $[-1, 1]$ решение $P_n(x)$, называемое *полиномом Лежандра*. Детальное описание свойств полиномов Лежандра можно найти, например, в [6, с. 335–344], [7, с. 75–81], [11, § 25]. Приведем здесь те из них, которые ниже будут использоваться при построении сферических функций.

1. Полином Лежандра $P_n(x)$ определяется по формуле Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots.$$

2. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

3. Полиномы Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и только они представляют собой ортогональную в пространстве $L^2(-1, 1)$ систему (алгебраических) полиномов. Более того, справедлива формула

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (4.15)$$

Первые шесть полиномов Лежандра имеют вид (см. рис. 4.1а)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

4. Полином Лежандра P_n имеет ровно n нулей внутри интервала $(-1, 1)$, а его производная k -го порядка ($k \leq n$) имеет $n - k$ нулей внутри интервала $(-1, 1)$ и не обращается в нуль на его концах.

5. Полиномы Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и только они образуют совокупность всех собственных функций спектральной задачи

$$[(1 - x^2)P']' + \lambda P = 0, \quad P \in C^2(-1, 1) \cap C[-1, 1], \quad (4.16)$$

отвечающих (простым) собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

6. Система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $C[-1, 1]$ непрерывных функций на интервале $[-1, 1]$ и, более того, она полна в пространстве $L^2(-1, 1)$.

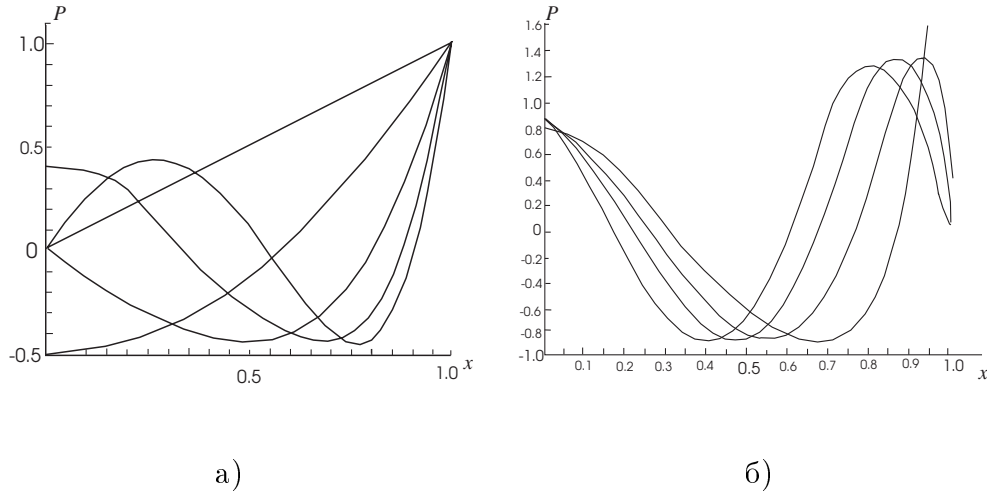


Рис. 4.1

Таким образом, любую функцию $f \in L^2(-1, 1)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}, \quad (f, P_n) = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2 dx, \quad (4.17)$$

сходящийся к f в среднем квадратичном. Последнее означает, что

$$\|f(x) - \sum_{n=0}^N a_n P_n(x)\|_{L^2(-1,1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Важно отметить, что с ростом гладкости функции f растет и порядок скорости сходимости ее ряда Фурье (4.17) к f (см. [6, 7, 11]).

4.3. Присоединение функции Лежандра. Вернемся к общему уравнению (4.8) и будем искать его частные решения в виде

$$v(\theta, \varphi) = Q(\theta)\Phi(\varphi). \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.8) и разделяя переменные, будем иметь

$$\sin^2\theta \left[\frac{1}{Q\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + \lambda \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu,$$

где μ – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям: уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta} \right) Q = 0 \quad (4.19)$$

для Q и уравнению

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad (4.20)$$

для Φ . Из условия периодичности (4.9) следует, что

$$\mu = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Общее решение уравнения (4.20) при $\mu = m^2$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = a\cos m\varphi + b\sin m\varphi, \quad (4.22)$$

где a и b – произвольные постоянные.

Подставим (4.21) в (4.19) и сделаем в нем замену (4.11). Полагая

$$Q(\theta) = P(\cos\theta) = P(x),$$

приходим с учетом (4.11а) к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad \text{в} \quad (-1, 1). \quad (4.23)$$

В результате задача нахождения сферических функций свелась к нахождению гладких на $[-1, 1]$ решений уравнения (4.23), которое в частном случае $m = 0$ переходит в уравнение Лежандра (4.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Гладкие на $[-1, 1]$ решения уравнения (4.23) называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Если P_λ^m – произвольная присоединенная функция Лежандра, то функция

$$v(\theta, \varphi) = (a\cos m\varphi + b\sin m\varphi) P_\lambda^m(\cos\theta) \quad (4.24)$$

является искомой сферической функцией. Поэтому, для построения всех сферических функций нужно найти все присоединенные функции Лежандра.

Чтобы найти указанные функции, введем вместо функции P новую неизвестную функцию Z по формуле

$$P(x) = (1 - x^2)^{m/2} Z(x). \quad (4.25)$$

Дифференцируя по x , имеем

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{m}{2} (1 - x^2)^{m/2-1} (-2x) Z + (1 - x^2)^{m/2} Z', \\ P''(x) &= \left[\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) (1 - x^2)^{m/2-2} (-2x)^2 - m (1 - x^2)^{m/2-1} \right] Z + \\ &\quad + 2 \left[\frac{m}{2} (1 - x^2)^{m/2-1} (-2x) \right] Z' + (1 - x^2)^{m/2} Z''. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Записав уравнение (4.23) в виде

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P = 0 \quad (4.27)$$

и подставляя в (4.27) вместо P, P' и P'' их выражения из (4.25), (4.26), приходим к следующему уравнению для Z :

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)^{m/2+1} Z'' + \left[-2mx(1 - x^2)^{m/2} - 2x(1 - x^2)^{m/2} \right] Z' + \\ &+ \left\{ (1 - x^2)^{m/2-1} \left[m(m - 2)x^2 - m(1 - x^2) + 2mx^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) (1 - x^2) \right] \right\} Z = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Сократив на $(1 - x^2)^{m/2}$, перепишем (4.28) в виде

$$(1 - x^2)Z'' - 2x(m + 1)Z' + [\lambda - m(m + 1)]Z = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2)^{m+1} Z' \right] + [\lambda - m(m + 1)](1 - x^2)^m Z = 0. \quad (4.29)$$

Уравнение (4.29) совпадает с уравнением

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2)^{m+1} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m P_n}{dx^m} \right) \right] + [\lambda - m(m + 1)](1 - x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} = 0, \quad (4.30)$$

которому, как легко проверить путем m – кратного дифференцирования уравнения Лежандра (4.12), удовлетворяет производная $d^m P_n / dx^m$ полинома Лежандра P_n . Поскольку уравнение Лежандра имеет нетривиальные гладкие на $[-1, 1]$ решения только при значениях $\lambda = \lambda_n \equiv n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то отсюда следует, что уравнение (4.30), а следовательно, и

(4.29), имеет нетривиальные гладкие на $[-1, 1]$ решения только при $\lambda = \lambda_n$, причем этими решениями являются производные $d^m P_n/dx^m$ от полиномов Лежандра P_n . Вернувшись к исходному уравнению (4.23), приходим к выводу о том, что присоединенные функции Лежандра $P(x) \equiv P_n^m(x)$ существуют только при $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ и определяются формулами

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (4.31)$$

Вычислим нормы в $L^2(-1, 1)$ присоединенных функций Лежандра и одновременно докажем их ортогональность. С этой целью заменим в уравнении (4.30) m на $m-1$. Получим уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right] + [\lambda - m(m-1)] (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} = 0. \quad (4.32)$$

Положим

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^m P_k}{dx^m} dx.$$

Интегрируя один раз по частям, имеем с учетом (4.32), что

$$\begin{aligned} L_{n,k}^m &= \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \right] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] dx = \\ &= [n(n+1) - m(m-1)] \int_{-1}^1 (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}} dx = \\ &= [n(n+1) - m(m-1)] L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n-m+1) L_{n,k}^{m-1}. \end{aligned}$$

Последовательно применяя последнюю рекуррентную формулу, имеем

$$\begin{aligned} L_{n,k}^m &= (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2) L_{n,k}^{m-2} = \dots = \\ &= (n+m)(n+m-1) \dots (n+1)n(n-1) \dots (n-m+1) L_{n,k}^0 = \\ &= \frac{(n+m)!(n-m)!}{n!(n-m+1)!} L_{n,k}^0 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,k}^0. \end{aligned}$$

Но в силу свойств полиномов Лежандра

$$L_{n,k}^0 \equiv \int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & k = n. \end{cases}$$

В результате приходим к равенству

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n. \end{cases} \quad (4.33)$$

Из (4.33), в частности, следует, что норма $\|P_n^m\|$ присоединенной функции Лежандра P_n^m определяется формулой

$$\|P_n^m\|^2 \equiv \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Графики нормированных присоединенных функций Лежандра \bar{P}_n^m с нормой $\|\bar{P}_n^m\| = 1$ приведены для некоторых конкретных значений m и n на рис.4.16.

Можно также показать (см., например, [11, с. 383], [56, с. 719]), что при каждом целом $m \geq 0$ система присоединенных функций Лежандра

$$\{P_n^m(x)\}_{n=m}^{\infty} \quad (4.34)$$

является полной в пространстве $L^2(-1, 1)$.

4.4. Фундаментальные сферические функции. Вернувшись к исходному уравнению (4.8) для сферических функций, приходим к выводу, что его гладкие на S_1 решения существуют только при $\lambda = \lambda_n, n = 0, 1, \dots$, причем указанные решения, т. е. сферические функции, определяются формулами:

$$P_n^m(\cos\theta), \quad P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \quad \text{и} \quad P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \\ m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим введенные функции через \mathcal{Y}_n^m , причем условимся в соответствии с [56, с. 723] приписывать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержат $\cos m\varphi$, а положительный – тем функциям, которые содержат $\sin m\varphi$. Согласно определению имеем

$$\begin{aligned} m = 0 & \quad \mathcal{Y}_n^0(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta), \\ m = 1 & \quad \mathcal{Y}_n^{-1}(\theta, \varphi) = P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi, \mathcal{Y}_n^1(\theta, \varphi) = P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi, \\ & \dots \\ m = n & \quad \mathcal{Y}_n^{-n}(\theta, \varphi) = P_n^n(\cos\theta)\cos n\varphi, \mathcal{Y}_n^n(\theta, \varphi) = P_n^n(\cos\theta)\sin n\varphi. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Функции \mathcal{Y}_n^m при каждом фиксированном n называются *фундаментальными сферическими функциями порядка n* . Число их равно $2n + 1$, т. е. кратности собственного значения λ_n . Они, очевидно, линейно независимы,

хотя бы потому, что линейно независимы функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. При этом функции $\mathcal{Y}_n^0 \equiv P_n(\cos\theta)$, не зависящие от угла φ , называются *зональными* сферическими функциями.

Такое название обусловлено тем, что в силу свойства полинома Лежандра P_n иметь ровно n нулей внутри интервала $(-1, 1)$ сферу S_1 можно разбить на $n+1$ широтных зон, внутри которых зональная функция \mathcal{Y}_n^0 сохраняет знак. Остальные сферические функции носят название *тессерельных*. Последнее название объясняется тем, что сферу S_1 можно разбить на клетки (tessera) с помощью $n-m$ параллелей и m равноотстоящих меридианов таким образом, что функция \mathcal{Y}_n^m сохраняет знак в каждой из них и меняет его при пересечении границы клетки (имеющей, таким образом, смысл узловой линии). Наконец, заметим, что в силу линейности и однородности уравнения (4.8) любая линейная комбинация фундаментальных сферических функций порядка n

$$\mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta), \quad (4.36)$$

где a_{mn} и b_{mn} – произвольные постоянные, или

$$\mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n c_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad c_n^m = \begin{cases} a_{mn}, & \text{при } m \leq 0, \\ b_{mn}, & \text{при } m > 0 \end{cases}$$

также является решением уравнения (4.8) при $\lambda = \lambda_n$ и, следовательно, является сферической функцией. Указанную функцию (4.35) также называют сферической функцией или (по историческим причинам) *сферической гармоникой порядка n* .

Подсчитаем $L^2(S_1)$ – норму $\|\mathcal{Y}_n^m\| \equiv \int_{S_1} [\mathcal{Y}_n^m]^2 d\sigma$ сферической функции \mathcal{Y}_n^m . Учитывая очевидное равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \pi \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0, \end{cases}$$

и делая замену переменных (4.11), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}_n^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \int_{-1}^1 [P_n^{|m|}(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{array} \right\} d\varphi \Rightarrow \\ &\|\mathcal{Y}_n^m\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m}{(2n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Из ортогональности и полноты тригонометрической системы

$$\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \dots, \cos m\varphi, \sin m\varphi, \dots\}$$

в $L^2(0, 2\pi)$ и ортогональности и полноты в $L^2(-1, 1)$ системы присоединенных функций Лежандра $\{P_n^m(x)\}_{n=m}^\infty$ при каждом фиксированном $m \geq 0$ (см. выше) следует ортогональность и полнота в $L^2(S_1)$ системы сферических функций

$$\{\mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), n = 0, 1, \dots; m = 0, \pm 1, \dots, \pm n\}. \quad (4.38)$$

(Ортогональность системы (4.38) в $L^2(S_1)$ проверяется непосредственно, а строгое доказательство полноты можно найти в [11, с. 384] и [56, с. 727]). С учетом указанных свойств системы (4.38) любую функцию $g \in L^2(S_1)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям \mathcal{Y}_n^m :

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.39)$$

сходящийся к g в $L^2(S_1)$. Чтобы определить коэффициенты c_n^m этого разложения, достаточно умножить ряд (4.39) на функцию $\mathcal{Y}_k^l(\theta, \varphi)$, проинтегрировать по S_1 и воспользоваться ортогональностью системы $\{\mathcal{Y}_k^l\}$ и формулой (4.37). В результате получим

$$c_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi\epsilon_m} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\theta, \varphi) \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4.40)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В некоторых учебниках по математической физике, как, например, в [11, с. 387], под сферической функцией понимается сужение шаровой функции u_n порядка n на сферу $S_1 \subset \mathbb{R}^3$. При этом под *шаровой функцией* порядка n понимают однородный гармонический полином степени n , т. е. однородный полином u_n степени n , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u_n = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3.$$

Можно показать (см., например, [11]), что такое определение сферической функции эквивалентно введенному выше, и что существует ровно $2n+1$ линейно независимых шаровых функций u_n^m порядка n , где $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$. При этом справедлива формула

$$u_n^m(r, \theta, \varphi) = r^n \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, \quad |m| \leq n, \quad (4.41)$$

устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между классом всех шаровых и сферических функций.

4.5. Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля. Обратимся теперь к уравнению (4.7) и заменим в нем λ на $\lambda_n = n(n+1)$. Получим

$$r^2 R'' + 2rR' + [k^2 r^2 - n(n+1)]R = 0. \quad (4.42)$$

С помощью подстановки

$$z = kr, \quad w(z) = R(r)\sqrt{z} \quad (4.43)$$

перепишем (4.42) в виде

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0, \quad \nu = n + 1/2. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) представляет собой уравнение Бесселя порядка ν , а его решениями являются цилиндрические функции Бесселя $J_\nu(z)$, Неймана $N_\nu(z)$ и Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ (либо $H_\nu^{(2)}(z)$) первого (либо второго) рода. Делая обратную замену переменных, заключаем, что решениями уравнения (4.42) являются функции

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr), \quad y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{n+1/2}(kr), \quad (4.45)$$

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(1)}(kr), \quad h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr),$$

называемые, соответственно, *сферическими функциями Бесселя, Неймана и Ханкеля первого и второго рода*. (Несущественный множитель $\sqrt{\pi/2}$ перед функциями в (4.45) служит для их нормировки).

Из формул (3.57) при $\nu = n + 1/2$ и (4.45) (см. также [11, с. 358]) вытекает, что функции $h_n^{(1)}$ и $h_n^{(2)}$ связаны с функциями j_n и y_n соотношениями

$$h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + iy_n(kr),$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - iy_n(kr),$$

аналогичными соответствующим соотношениям для цилиндрических функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Указанная аналогия подсказывает, что функцию j_n следует использовать при решении задачи излучения волн внутри ограниченной области, содержащей начало координат. Любую пару функций, входящих в (4.45), можно использовать при решении задачи излучения в двухсвязной ограниченной области типа сферической полости, не содержащей начало координат.

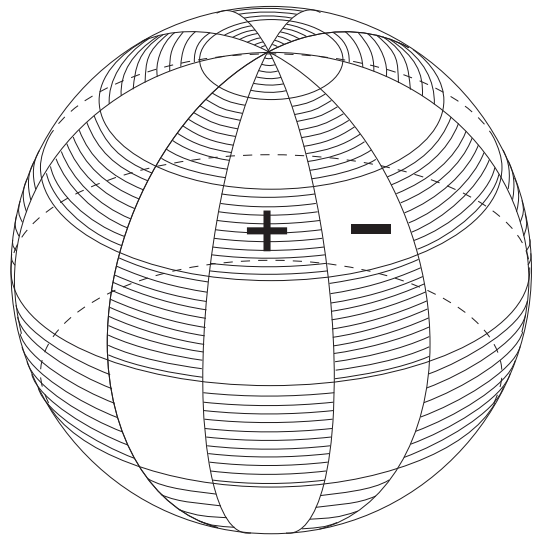


Рис. 4.2

Наконец, при решении задачи излучения в неограниченной области типа внешности сферы следует использовать только функцию $h_n^{(1)}(kr)$, тогда как при решении задачи о падении приходящей из бесконечности волны на эту сферу можно использовать только функцию $h_n^{(2)}(kr)$. Последние выводы являются следствием того, что, как легко проверить, используя асимптотические представления цилиндрических функций в дальней зоне, приведенные, например в [37, 56], именно функция $h_n^{(1)}(kr)$ удовлетворяет условиям излучения (4.3), тогда как функция $h_n^{(2)}(kr)$ удовлетворяет условиям излучения, получающимся из (4.3) заменой знака минус во втором соотношении на плюс.

4.6. Решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Сферические волны. Из изложенных выше результатов следует, что любое частное решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах, удовлетворяющее условиям излучения (4.3), можно представить в виде

$$u_n(r, \theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.46)$$

где a_n^m – произвольные постоянные. По своему физическому смыслу функция (4.46) описывает расходящуюся волну со сферическим фронтом, которую принято называть *сферической волной n -го порядка*. Каждой такой волне отвечает свой источник, называемый *сферическим источником n -го порядка*. В частном случае, когда $n = 0$, указанный источник носит название *пульсирующей* сферы; при $n = 1$ получаем осциллирующую сферу, т. е. сферу, гармонически колеблющуюся вдоль фиксированного направления; случай $n = 2$ отвечает так называемому *квадрупольному* сферическому источнику и т. д. Более подробную информацию о различных сферических источниках и их физическом смысле можно найти, например, в книге [21].

В силу линейности и однородности уравнения (4.1) бесконечная сумма частных решений (4.46), т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(1)}(kr) \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(1)}(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.47)$$

при произвольных постоянных a_n^m также является решением уравнения (4.1). Этот вывод, конечно, справедлив при условии, что ряд (4.47) можно дважды почленно дифференцировать по r, θ и φ , причем ряд (4.47) и ряды, полученные его почленным дифференцированием, равномерно сходятся вне S .

Выберем далее постоянные a_n^m таким образом, чтобы функция (4.47) удовлетворяла граничному условию (4.2), где для простоты будем считать,

что

$$\alpha = \text{const} \geq 0, \quad \beta = \text{const} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta \neq 0. \quad (4.48)$$

С этой целью, предполагая правую часть g в (4.2) достаточно гладкой, разложим ее в ряд (4.39) по сферическим функциям \mathcal{Y}_n^m , коэффициенты c_n^m которого определяются формулой (4.40). Учитывая, что $\partial u / \partial n = \partial u / \partial r$ при $r = a$ и что

$$\frac{\partial u}{\partial r} = k \sum_{n=0}^{\infty} (h_n^{(1)})'(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.49)$$

имеем

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha h_n^{(1)}(ka) + k\beta h_n^{(1)'}(ka) \right] \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi). \quad (4.50)$$

Сравнивая (4.50) и (4.39), приходим к выводу, что граничное условие (4.2) удовлетворяется, если коэффициенты a_n^m ряда (4.47) связаны с коэффициентами Фурье c_n^m разложения (4.39) граничной функции g соотношениями

$$a_n^m = \frac{c_n^m}{\alpha h_n^{(1)}(ka) + k\beta h_n^{(1)'}(ka)}. \quad (4.51)$$

Тем самым решение краевой задачи (4.1)–(4.3) (формально) построено. Оно имеет вид ряда (4.47), коэффициенты a_n^m которого определяются формулами (4.51). Можно показать, что для достаточно гладкой функции g (например, для $g \in C^3(S)$) ряд (4.47) с коэффициентами (4.51) равномерно сходится во внешности D сферы S , и его можно почленно дважды дифференцировать по всем переменным внутри D . Следовательно, для $g \in C^3(S)$ ряд (4.47) с коэффициентами (4.51) действительно является искомым решением задачи (4.1)–(4.3). О физическом смысле решения (4.47) и его составляющих гармоник более подробно можно прочитать в [21, с. 426].

ГЛАВА 5. Параболические уравнения и тепловые процессы

В гл.1 было показано, что математическое моделирование процессов теплопроводности, диффузии, распространения электромагнитных полей в сильно проводящих средах и ряда других процессов приводит к необходимости решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа. Простейшим представителем параболических уравнений является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (1)$$

где $a^2 = \text{const} > 0$, f – заданная функция, имеющая смысл объемной плотности источников тепла. Ниже мы сформулируем основные начально-краевые задачи и задачу Коши для уравнения вида (1) в пространстве одного и нескольких измерений, исследуем единственность и устойчивость решений указанных задач, докажем их разрешимость в частных случаях, используя методы Фурье и интегральных преобразований, и изучим свойства их решений, характеризующие именно параболические уравнения. К указанным свойствам относятся *принцип максимума*, *бесконечная дифференцируемость решения* внутри рассматриваемой области даже при негладких граничных и начальных данных и *бесконечная скорость* распространения возмущений. Мы также приведем пример некорректной постановки задачи для уравнения теплопроводности.

§1. Принцип максимума

1.1. Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^3 с границей Γ . Положим $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T]$, $\Omega_0 = \Omega \times \{t = 0\}$, где $0 < T < \infty$. Ясно, что с геометрической точки зрения область Q_T представляет собой конечный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t^1$, а Σ_T и Ω_0 являются соответственно его боковой поверхностью и нижним основанием. Рассмотрим в цилиндре Q_T следующую *начально-краевую задачу*: найти в Q_T решение трехмерного однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \equiv a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = g(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T] \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$, u – искомая функция, под которой ниже будем понимать температуру в области Ω , константа $a^2 > 0$ имеет смысл коэффициента теплопроводности, g и φ – заданные функции своих аргументов, первая из которых описывает распределение температуры на границе Γ , а вторая описывает начальное распределение температуры в области Ω . Задача (1.1)–(1.3) называется *первой начально-краевой задачей* (или просто *первой краевой задачей*, либо *задачей Дирихле*) для уравнения теплопроводности. В физическом плане она представляет собой задачу определения эволюции теплового состояния тела, занимающего область Ω , по заданному его тепловому состоянию в начальный момент времени и на границе.

Фундаментальным свойством решений уравнения теплопроводности (1.1), качественно отличающим его от волнового уравнения, является *принцип максимума*. Обозначим через $C^{2,1}(Q_T)$ подпространство пространства $C(Q_T)$, состоящее из функций, непрерывных в Q_T вместе с производными первого и второго порядков по пространственным переменным и производной первого порядка по t , через $C(\bar{Q}_T)$ обозначим подпространство пространства $C(Q_T)$, состоящее из функций, непрерывных в замыкании $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ множества Q_T . Сформулируем его в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1 (принцип максимума). *Функция $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности (1.1) в цилиндре Q_T , принимает наибольшее и наименьшее значения либо на боковой поверхности $\Gamma \times (0, T]$ цилиндра Q_T , либо на его нижнем основании $\bar{\Omega} \times \{t = 0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для случая максимума. Действительно, если функция u , указанная в условии теоремы, достигает минимума в некоторой точке $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T$, то в той же точке (\mathbf{x}, t) достигает максимума функция $-u$, также удовлетворяющая условиям теоремы. Применим для доказательства принципа максимума *метод барьеров*, суть которого излагается ниже.

Положим

$$M = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T} u(\mathbf{x}, t), \quad m = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{\Sigma}_T \cup \bar{\Omega}_0} u(\mathbf{x}, t).$$

Ясно, что $M \geq m$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $M = m$ для любого решения $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ уравнения (1.1). Предположим противное, т. е. что существует такое решение u уравнения (1.1), для которого $M > m$. В силу непрерывности на \bar{Q}_T функции u существует по крайней мере одна точка $(\mathbf{x}_0, t_0) = (x_0, y_0, z_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$ такая, что

$u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$. Введем функцию

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \frac{M - m}{6d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2], \quad (1.4)$$

называемую *барьером* для функции u , где d – диаметр области Ω . На боковой поверхности $\bar{\Sigma}_T$ цилиндра Q_T и на его нижнем основании $\bar{\Omega}_0$ имеем

$$v(\mathbf{x}, t) \leq m + \frac{M - m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M.$$

Кроме того, $v(\mathbf{x}_0, t_0) = u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$. Последнее означает, что функция v так же, как и u , не принимает максимума ни на боковой поверхности Σ_T цилиндра Q_T , ни на его нижнем основании, т. е. при $t = 0$.

В таком случае максимум функции v достигается в некоторой точке $(\mathbf{x}_1, t_1) = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in Q_T = \Omega \times (0, T]$, где \mathbf{x}_1 является строго внутренней точкой области Ω и $0 < t_1 \leq T$. Поскольку точка (\mathbf{x}_1, t_1) является точкой максимума функции v , то в этой точке необходимо выполняются неравенства [18]:

$$\text{grad} v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (1.5)$$

(Более того, если $t_1 < T$, то $\partial v / \partial t = 0$ согласно необходимому условию экстремума дифференцируемой функции). Из (1.5) вытекает, что в точке (\mathbf{x}_1, t_1) выполняется неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v \geq 0. \quad (1.6)$$

С другой стороны, в любой точке $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]$ в силу (1.4) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u - a^2 \frac{M - m}{d^2} = -a^2 \frac{M - m}{d^2} < 0. \quad (1.7)$$

Поскольку (1.7) противоречит (1.6), то теорема доказана. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Классическим решением первой краевой задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в каждой точке $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$, граничному условию (1.2) в каждой точке $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T]$ и начальному условию (1.3) в каждой точке $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.*

Из теоремы 1.1 вытекают три важных следствия для классического решения u первой краевой задачи (1.1)–(1.3).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Классическое решение u задачи (1.1)–(1.3), отвечающее нулевым исходным данным $g = 0$ и $\varphi = 0$, тождественно равно нулю в \bar{Q}_T .*

Действительно, поскольку наибольшее и наименьшее значения u на $\overline{\Sigma}_T$ и $\overline{\Omega}_0$ равны нулю, то $u \equiv 0$ в силу принципа максимума. ■

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Классическое решение задачи (1.1)–(1.3) единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим противное, что существуют два классических решения u_1 и u_2 задачи (1.1)–(1.3). Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению (1.1) и обращается в нуль как при $t = 0$, так и на $\Gamma \times (0, T]$. Но тогда из следствия 1.1 вытекает, что $u \equiv 0$ в Q_T , т.е. что $u_1 = u_2$. ■

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Классическое решение задачи (1.1)–(1.3) непрерывно в норме $C(\overline{Q}_T)$ зависит от граничной функции g в (1.2) и начальной функции φ в (1.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть разность $g_1 - g_2$ граничных функций g_1 и g_2 в (1.2) и $\varphi_1 - \varphi_2$ начальных функций φ_1 и φ_2 в (1.3) не превосходит по модулю числа $\varepsilon > 0$: $|g_1 - g_2| \leq \varepsilon$ на $\Gamma \times [0, T]$, $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$ в $\overline{\Omega}$ (при $t = 0$). Обозначим через u_1 (либо u_2) решение задачи (1.1)–(1.3), отвечающее паре (g_1, φ_1) (либо (g_2, φ_2)). Тогда разность $u = u_1 - u_2$ обоих решений как решение однородного уравнения (1.1) с граничной функцией $g_1 - g_2$ и начальной функцией $\varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет согласно теореме 1.1 условию $|u| \leq \varepsilon$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведенные результаты с небольшими изменениями распространяются на случай когда $T = \infty$, т.е. когда задача (1.1)–(1.3) рассматривается на бесконечном временном интервале (см. п. 1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Принцип максимума в форме теоремы 1.1 справедлив для уравнения теплопроводности (1.1), рассматриваемого в пространстве \mathbb{R}^n любого числа измерений. Подчеркнем, что в указанной форме он справедлив именно для однородного уравнения теплопроводности. В следующем пункте мы распространим принцип максимума на общее неоднородное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами, рассматриваемое в ограниченной области пространства \mathbb{R}^n .

Естественно, возникает вопрос о существовании классического решения u задачи (1.1)–(1.3). В этой связи отметим, что разрешимость задачи (1.1)–(1.3) можно доказать лишь при выполнении определенных условий гладкости и согласования исходных данных. Действительно, условие непрерывности $u \in C(\overline{Q}_T)$ классического решения u необходимо требует, чтобы выполнялись следующие условия гладкости и согласования исходных данных:

(i) $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\Gamma \times [0, T])$, $\varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, 0) \forall \mathbf{x} \in \Gamma$.

Но даже при выполнении условий (i) доказать существование классического решения u задачи (1.1)–(1.3) довольно непросто. Ниже мы ограничимся доказательством разрешимости задачи (1.1)–(1.3) лишь в частном случае $n = 1$ с использованием метода Фурье. Что касается общих краевых задач для уравнений параболического типа в произвольных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

то исследование их разрешимости можно найти в [11, § 34], [28, гл. 3], [34, гл. 6].

1.2. Принцип максимума для неоднородного параболического уравнения с переменными коэффициентами в \mathbb{R}^n . Пусть Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n с границей Γ . Положим $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$, $\overline{Q}_\infty = \overline{\Omega} \times [0, \infty)$, $\Sigma_\infty = \Gamma \times (0, \infty)$, $\overline{\Sigma}_\infty = \Gamma \times [0, \infty)$, $Q_T = \Omega \times (0, T]$ при любом $T < \infty$. Рассмотрим в бесконечном цилиндре Q_∞ неоднородное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами вида

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Здесь ρ , p , q и f – заданные функции, удовлетворяющие условиям

(ii) $\rho \in C(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $\rho > 0$, $p > 0$, $q \geq 0$ в $\overline{\Omega}$, $f \in C(Q_\infty)$.

Из результатов § 4 гл. 1 следует, что уравнение (1.8) описывает распространение тепла (при $q = 0$) в неоднородной среде с переменным коэффициентом температуропроводности p либо распространение вещества (при $\rho = 1$) в неоднородной среде с переменным коэффициентом диффузии p при наличии эффекта поглощения вещества в среде, описываемого коэффициентом $q \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1.2 (ПРИНЦИП МАКСИМУМА). Пусть при выполнении условий (ii) функция $u \in C^{2,1}(Q_\infty) \cap C(\overline{Q}_\infty)$ удовлетворяет уравнению (1.8) в Q_∞ и $T > 0$ – любое число. Тогда: 1) если $f(\mathbf{x}, t) \leq 0$ в цилиндре Q_T , то либо $u \leq 0$ в \overline{Q}_T , либо функция u принимает свой (положительный) максимум в цилиндре \overline{Q}_T на нижнем основании $\overline{\Omega}_0$ цилиндра Q_T или на его боковой поверхности $\Gamma \times (0, T]$, т. е. справедливо неравенство, называемое принципом максимума:

$$u(\mathbf{x}, t) \leq M \equiv \max[0, \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}, 0), \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t)] \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T; \quad (1.9)$$

2) если $f(\mathbf{x}, t) \geq 0$ в Q_T , то справедливо неравенство

$$u(\mathbf{x}, t) \geq m \equiv \min[0, \min_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}, 0), \min_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t)], \quad (1.10)$$

называемое принципом минимума для решения u уравнения (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в п. 1.2, применим для доказательства принципа максимума метод барьеров. Докажем справедливость неравенства (1.9). Предположим противное, т. е. что функция u принимает в некоторых точках цилиндра \overline{Q}_T положительные значения, но не достигает своего (положительного) максимума ни на его нижнем основании Ω_0 ни на его боковой границе Σ_T . В таком случае найдётся такая точка (\mathbf{x}_0, t_0) , $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, $0 < t_0 \leq T$, что

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) > M > 0. \quad (1.11)$$

Положив

$$\varepsilon = u(\mathbf{x}_0, t_0) - M > 0, \quad (1.12)$$

введем функцию v (барьер для решения u) по формуле

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \frac{\varepsilon(2T - t)}{2}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T.$$

Ясно, что $v(\mathbf{x}, t) \leq u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$. С учетом этого и (1.12) при всех $(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Sigma}_T$ либо при $t = 0$ имеем

$$v(\mathbf{x}_0, t_0) \geq u(\mathbf{x}_0, t_0) = \varepsilon + M \geq \varepsilon + u(\mathbf{x}, t) \geq \varepsilon + v(\mathbf{x}, t) - \varepsilon = v(\mathbf{x}, t).$$

Отсюда следует, что функция v также принимает свой положительный в \overline{Q}_T максимум в некоторой внутренней точке $(\mathbf{x}_1, t_1) \in \Omega \times (0, T]$, причём

$$v(\mathbf{x}_1, t_1) \geq v(\mathbf{x}_0, t_0) \geq \varepsilon + M > \varepsilon. \quad (1.13)$$

В силу необходимых условий максимума функции v в точке (\mathbf{x}_1, t_1) имеем:

$$\operatorname{grad} v = 0, \quad \Delta v \leq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (1.14)$$

Из (1.14), неравенства (1.13) и условия $f \leq 0$ в Q_T вытекает, что в точке (\mathbf{x}_1, t_1)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu - f(\mathbf{x}, t) &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} - p \Delta v - (\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} v) + qv - f + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{T} - q \frac{2T - t_1}{T} \right) \geq qv + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{T} - q \frac{2T - t_1}{T} \right) \geq q\varepsilon \left(1 - \frac{2T - t_1}{2T} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{2T} > 0. \end{aligned}$$

Последнее противоречит уравнению (1.8). Таким образом, неравенство (1.11) неверно, а следовательно, справедливо противоположное неравенство (1.9). По аналогичной схеме доказывается справедливость принципа минимума (1.10). ■

Основываясь на принципе максимума, докажем теперь единственность и непрерывную зависимость от исходных данных решения первой начально-краевой задачи для (1.8). Она заключается в нахождении классического решения u уравнения (1.8) в области Q_∞ , удовлетворяющего условию Дирихле (1.2) и начальному условию (1.3). Для краткости на указанную задачу будем ссылаться как на задачу 1. Предполагая, что выполняются условия (i) и (ii) гладкости и согласования исходных данных, положим для фиксированного $T > 0$

$$M_0 = \|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad M_1 = \|g\|_{C(\Gamma \times [0, T])}, \quad M = \|f\|_{C(\overline{Q}_T)}. \quad (1.15)$$

Пусть функция $u : Q_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ является классическим решением задачи 1. Введем функцию $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \frac{M}{\rho_0}t, \quad \rho_0 = \min_{x \in \bar{\Omega}} \rho(x) > 0. \quad (1.16)$$

Легко видеть, что функция v является классическим решением задачи (1.8), (1.2), (1.3), в которой функции f и g следует заменить на функции

$$\tilde{f} = f - \frac{\rho}{\rho_0}M - \frac{q}{\rho_0}Mt \quad \text{и} \quad \tilde{g} = g - \frac{M}{\rho_0}t \quad (1.17)$$

соответственно. Ясно, что

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T, \quad \tilde{g}(\mathbf{x}, t) \leq M_1 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]. \quad (1.18)$$

В силу первого условия в (1.18) для функции v справедлив принцип максимума (1.9), согласно которому выполняется оценка

$$v(x, t) \leq \max(M_0, M_1) \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_T. \quad (1.19)$$

Из (1.16) и (1.19) приходим к следующей оценке сверху для решения u :

$$u(\mathbf{x}, t) \leq \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T. \quad (1.20)$$

Точно так же, рассматривая функцию $w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + (M/\rho_0)t$ и применяя к ней принцип минимума (1.10), приходим к оценке снизу для u :

$$u(\mathbf{x}, t) \geq -\max(M_0, M_1) - \frac{M}{\rho_0}T \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_T. \quad (1.21)$$

Из (1.20) и (1.21) приходим к следующей оценке для u :

$$\|u\|_{C(\bar{Q}_T)} \leq \max \left\{ \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}, \|g\|_{C(\Gamma \times [0, T])} \right\} + \frac{T}{\rho_0} \|f\|_{C(\bar{Q}_T)}. \quad (1.22)$$

Из оценки (1.22) вытекает, в частности, что однородная задача 1 (при $\varphi = 0$, $g = 0$, $f = 0$) имеет лишь тривиальное решение. В таком случае сама оценка (1.22) означает устойчивость нулевого решения задачи 1 в норме $C(\bar{Q})$. Отсюда с учетом линейности задачи 1 и результатов § 1 гл. 2 вытекает устойчивость в норме $C(\bar{Q}_T)$ любого классического решения задачи 1 по исходным данным φ , g и f . Последнее означает, что если u – решение задачи 1, отвечающее исходным данным (φ, g, f) , а \tilde{u} – решение задачи 1, отвечающее исходным данным $(\tilde{\varphi}, \tilde{g}, \tilde{f})$, то в силу (1.22) для разности $\tilde{u} - u$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u} - u\|_{C(\bar{Q}_T)} \leq \max \left(\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})}, \|\tilde{g} - g\|_{C(\Gamma \times [0, T])} \right) + \frac{T}{\rho_0} \|\tilde{f} - f\|_{C(\bar{Q}_T)}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для классического решения и задачи Дирихле (1.8), (1.2), (1.3) справедлива оценка (1.22), означающая единственность и непрерывную зависимость решения и в норме $C(\overline{Q}_T)$ от исходных данных: начальной функции φ в норме $C(\overline{\Omega})$, граничной функции g в норме $C(\Gamma \times [0, T])$ и правой части f в норме $C(\overline{Q}_T)$.

К сожалению, с помощью принципа максимума не удастся доказать единственность и устойчивость решения общей краевой задачи уравнения (1.8), рассматриваемого при смешанных краевых условиях вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g \quad \text{в } (0, T]. \quad (1.23)$$

Здесь α и β – некоторые непрерывные на Γ функции. Это связано с тем, что из условия вида (1.23) нельзя в общем случае получить оценку на само решение u в точках границы Γ . Однако в случае общих краевых условий вида (1.23) единственность и непрерывную зависимость решения от исходных данных можно доказать, используя метод энергетических неравенств, причем по той же схеме, что и для гиперболического уравнения (см. §2 гл. 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Оценка (1.22) похожа по своей структуре на оценку (2.39), полученную для уравнения переноса (2.66) из гл. 2 и переходит в нее при $\rho_0 = 1$. Это наталкивает на мысль о справедливости оценки (1.22) и для более общего уравнения диффузии-конвекции, имеющего вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + qu = f. \quad (1.24)$$

Здесь $\mathbf{a} \in C^1(\overline{\Omega})$ – произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. Действительно, нетрудно убедиться в том, что теоремы 1.2 и 1.3 остаются справедливыми и для уравнения (1.24). Для этого достаточно дословно повторить рассуждения, используемые при доказательстве этих теорем, что предоставляется читателю.

§2. Решение первой краевой задачи в \mathbb{R} методом Фурье

Рассмотрим в этом параграфе первую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности. Она заключается в нахождении функции $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, где $Q_T = (0, l) \times (0, T]$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.1)$$

в области Q_T , граничным условиям

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (2.2)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (2.3)$$

Здесь f, g_1, g_2 и φ – заданные непрерывные функции своих аргументов, причем, в частности, f имеет смысл плотности внешних (объемных) источников тепла. Физический смысл функций g_1, g_2 и φ при “температурной” интерпретации уравнения (2.1) пояснен в §1.

Из теоремы 1.3 при $n = 1$ вытекает, что классическое решение u задачи (2.1)–(2.3) единственно и непрерывно в норме $C(\overline{Q}_T)$ зависит от C – норм исходных данных: начальной функции φ , граничных функций g_1, g_2 и правой части f . Поэтому нам остается доказать лишь существование решения u задачи (2.3)–(2.5). Применим для этой цели метод Фурье, который одновременно позволит найти явное представление решения u .

Рассмотрим сначала более простую задачу, заключающуюся в нахождении решения однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

в области Q_T , удовлетворяющего однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (2.5)$$

и начальному условию (2.3). Задача (2.3)–(2.5) моделирует распределение температуры в однородной струне (либо однородном стержне) длины l при условии, что начальное распределение температуры описывается функцией φ , а температура на концах струны (либо стержня) равна нулю. Ниже на задачи (2.1)–(2.3) и (2.3)–(2.5) будем ссылаться как на задачи 1 и 2 соответственно.

Отметим, что задача (2.3)–(2.5) отличается от задачи (4.1.1)–(4.1.3) (см. гл. 4) для одномерного волнового уравнения, описывающего колебания однородной струны, тем, что (2.3)–(2.5) содержит одно начальное условие (для функции u), тогда как (4.1.1)–(4.1.3) включает два начальных условия – как для функции u , так и для производной $\partial u / \partial t$. Последнее можно объяснить тем, что уравнение теплопроводности, будучи уравнением 1-го порядка по времени, требует для выделения единственного решения одного начального условия, тогда как волновое уравнение, являясь уравнением 2-го порядка по времени, требует двух начальных условий. Такое, казалось бы, небольшое отличие между уравнениями (2.4) и (4.1.1) приводит, как мы увидим ниже, к очень большой разнице в поведении решений этих

уравнений. В этом, собственно, можно было убедиться и выше при доказательстве принципа максимума, который справедлив именно для *параболических* уравнений, но не справедлив для *волновых* уравнений.

Так же, как и в гл. 4, применим для нахождения решения задачи 2 метод Фурье. Следуя ему, будем искать частные решения уравнения (2.4) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.4), (2.5) и разделяя переменные, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для T , имеющему вид

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (2.7)$$

и спектральной задаче

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{в} \quad (0, l), \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (2.8)$$

для нахождения неизвестной функции X . В гл. 4 было показано, что решение спектральной задачи (2.8), т. е. собственные значения λ_k и собственные функции X_k , определяются формулами

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Подставим в (2.7) λ_k вместо λ и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k a^2 t} \equiv a_k \exp \left(- \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 t \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Здесь a_k , $k = 1, 2, \dots$ – пока произвольные постоянные.

В соответствии с (2.6) введем функции

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = a_k e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Из построения вытекает, что функции u_k при любом k и любых постоянных a_k удовлетворяют уравнению (2.4) и граничным условиям (2.5). То же самое справедливо и для любой линейной комбинации функций (2.11), а также ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k a^2 t} X_k(x) \quad (2.12)$$

при условии, что он равномерно сходится в замкнутой области $\overline{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$ (при выполнении этого условия ряд (2.12) удовлетворяет граничным условиям (2.5)), и его можно дважды почленно дифференцировать по x

и один раз по t внутри Q_T (при выполнении этих условий ряд (2.12) удовлетворяет уравнению (2.4) в каждой точке $(x, t) \in Q_T$). Предполагая эти условия выполненными, выберем постоянные a_k в (2.12) так, чтобы в дополнение к ним выполнялось начальное условие (2.3). С этой целью подставим (2.12) в (2.3). Получим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) представляет собой разложение заданной функции φ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Из теории рядов Фурье (см., например, [19, гл. 10]) вытекает, что система синусов в (2.9) является полной в пространстве непрерывных функций $C[0, l]$, причем коэффициенты a_k разложения (2.13) однозначно определяются по (непрерывной) функции φ с помощью формул

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Тем самым решение u задачи 2 построено. Оно имеет вид ряда (2.12), где a_k определяются формулами (2.14), при условии, конечно, что ряд (2.12) равномерно сходится в замкнутой области Q_T , и его можно дважды почленно дифференцировать по x и один раз по t в Q_T . Чтобы показать последнее, предположим, что начальная функция φ удовлетворяет условиям

(i) $\varphi \in C[0, l]$, φ' кусочно-непрерывна в $[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Из [19, гл. 10] следует, что при выполнении условий (i) ряд в правой части (2.13) с коэффициентами a_k , определяемыми формулами (2.14), равномерно и абсолютно сходится к функции φ на $[0, l]$. Так как при $t \geq 0$ $0 < e^{-\lambda_k a^2 t} \leq 1$, то ряд (2.12) с этими же коэффициентами a_k также сходится абсолютно и равномерно при $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$. В таком случае функция u , определяемая рядом (2.12), непрерывна в $\overline{Q_T}$ и удовлетворяет начальному и граничным условиям (2.3) и (2.5). Остается показать, что функция u в (2.12) удовлетворяет уравнению (2.4) в каждой точке Q_T . Для этого достаточно показать, что ряды

$$-a^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{и} \quad - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.15)$$

полученные почленным дифференцированием ряда (2.12) один раз по t либо дважды по x , также абсолютно и равномерно сходятся в области Q_T . Последнее же утверждение вытекает из того факта, что при любом $t > 0$

выполняются неравенства

$$0 < \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} e^{-\lambda_k a^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{k^2 \pi^2}{l^2} e^{-\lambda_k a^2 t} < 1, \quad (2.16)$$

если k достаточно велико. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2.1. *При выполнении условий (i) сумма ряда (2.12) с коэффициентами (2.14) принадлежит пространству $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ и является классическим решением задачи (2.3)-(2.5).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как уже указывалось выше, решение u задачи (2.3)-(2.5) единственно и непрерывно зависит от начальной функции φ . Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает, что при выполнении условий (i) задача (2.3)-(2.5) поставлена корректно для $t \geq 0$ (если начальные условия заданы при $t = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Обратившись к задаче 2, рассмотрим ее для отрицательных значений времени t . Другими словами, рассмотрим задачу определения решения u на интервале $[-T, 0]$ при условии, что задано распределение температур в “конечный” момент времени $t = 0$, а на концах $x = 0$ и $x = 1$ температура равна нулю. Указанную задачу называют первой краевой задачей для уравнения теплопроводности “с обратным временем”. В физическом плане данная задача заключается в определении *эволюции нагревания тела* по заданному его тепловому состоянию в конечный момент времени.

Допустим, что задача (2.3)-(2.5) имеет решение u^- при отрицательных t . Простой анализ показывает, что решение u^- можно как угодно сильно изменить при сколь угодно малых отрицательных t , изменяя как угодно мало функцию φ и ее производные до произвольного фиксированного порядка. Для этого достаточно к решению u^- прибавить частное решение уравнения (2.4) вида

$$u_k^-(x, t) = \alpha_k e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю. Ясно, что последовательность $u_k^-(x, 0) \equiv \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ равномерно стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. В то же время для любого сколь угодно близкого к нулю значения $t < 0$ последовательность $u_k^-(x, t)$ неограниченно возрастает при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что решение u^- ведет себя неустойчиво по отношению к *малым возмущениям начальных данных*. Отсюда вытекает, что задача 2 поставлена некорректно для отрицательных t , если “начальные” условия задаются при $t = 0$. Таким образом, начально-краевая задача для уравнения теплопроводности “с обратным временем” дает в дополнение к задаче Коши для уравнения Лапласа еще один пример некорректно поставленных задач математической физики.

Рассмотрим теперь задачу 3, заключающуюся в нахождении в области Q_T решения u неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (2.17)$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (2.18)$$

и однородному начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (2.19)$$

Будем предполагать, что выполняются условия

(ii) $f \in C^1(\overline{Q}_T)$ и $f(0, t) = f(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

Следуя схеме метода Фурье, будем искать решение u задачи 3 в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2.20)$$

по собственным функциям спектральной задачи (2.8) с неизвестными пока коэффициентами $T_k(t)$. Правую часть f в (2.17) также разложим в ряд Фурье по синусам:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.21)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.20) и (2.21) в (2.17), легко получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T'_k(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0.$$

Отсюда приходим к следующим дифференциальным уравнениям для T_k :

$$T'_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

где $\omega_k = k\pi a/l$. Поскольку в силу начального условия (2.19) для u имеем

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0,$$

то отсюда получаем начальные условия для T_k :

$$T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Решение T_k линейной одномерной задачи Коши (2.23), (2.24) при каждом k существует, единственно и, как легко проверить, имеет вид

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Подставляя выражение (2.25) для $T_k(t)$ в ряд (2.20), получим искомое решение задачи 3 в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.26)$$

Рассуждая, как и в §1 гл. 4, легко показываем, что при выполнении условий (ii) ряд (2.26), а также ряды, полученные дифференцированием ряда (2.26) один раз по t либо два раза по x , равномерно сходятся в замкнутой области \overline{Q}_T . Отсюда следует, что ряд (2.26) является искомым решением задачи 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если однородное начальное условие (2.19) заменить неоднородным начальным условием (2.3), то в силу принципа суперпозиции решение соответствующей задачи (2.17), (2.18), (2.3) будет равно сумме решений (2.12) и (2.26) задач 2 и 3 соответственно.

Вернемся теперь к общей неоднородной краевой задаче 1. Предполагая, что $g_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2$, введем функцию

$$w(x, t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (2.27)$$

Будем искать решение u исходной задачи 1 в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (2.28)$$

где v – новая искомая функция. Подставляя (2.28) в (2.1)–(2.3), получим, что функция v удовлетворяет в Q_T неоднородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \overline{f}(x, t), \quad (2.29)$$

где

$$\overline{f}(x, t) \equiv f(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = u(0, t) - w(0, t) = 0, \quad v|_{x=l} = u(l, t) - w(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (2.30)$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = \overline{\varphi}(x) \equiv \varphi(x) - w(x, 0), \quad x \in (0, l). \quad (2.31)$$

Таким образом, для решения задачи 1 достаточно найти решение v вспомогательной задачи (2.29)–(2.31), которая нами уже решена (см. замечание 2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. По аналогичной схеме метод Фурье применяется для решения других краевых задач для уравнения теплопроводности. Так, например, в случае краевых условий Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (2.32)$$

решение u соответствующей задачи (2.4), (2.3), (2.32) также имеет вид ряда (2.12), но где λ_k и X_k – собственные значения и функции спектральной задачи

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ в } (0, l), \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Явные выражения λ_k и X_k приведены в § 2 гл. 4.

§3. Задача Коши для уравнения теплопроводности в \mathbb{R}

3.1. Постановка и единственность решения задачи Коши в \mathbb{R} . Пусть $Q_T = (-\infty, \infty) \times (0, T]$ при $T < \infty$ и $Q_T = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ при $T = \infty$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности в \mathbb{R} . Она заключается в нахождении решения u уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

в области Q_T , где $0 < T \leq \infty$, удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.2)$$

Здесь φ – заданная непрерывная и ограниченная в \mathbb{R} функция. Задача (3.1), (3.2) возникает при математическом моделировании ряда физических процессов, в частности, процесса распространения тепла в *неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована. Тот факт, что $T \leq \infty$, означает, что задача (3.1), (3.2) может рассматриваться как на конечном ($T < \infty$), так и на бесконечном ($T = \infty$) временном интервале. Положим $\overline{Q}_T = (-\infty, \infty) \times [0, T]$ при $T < \infty$ и $\overline{Q}_T = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ при $T = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 *Классическим решением задачи (3.1), (3.2) называется функция $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, ограниченная в \overline{Q}_T , удовлетворяющая уравнению (3.1) в каждой точке $(x, t) \in Q_T$ и условию (3.2) в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$.*

Докажем единственность классического решения задачи (3.1), (3.2).

ТЕОРЕМА 3.1. *Классическое решение задачи (3.1), (3.2) единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют два решения u_1 и u_2 задачи (3.1), (3.2) такие, что

$$|u_1| \leq M, \quad |u_2| \leq M \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T, \quad M = \text{const} < \infty. \quad (3.3)$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (3.1), однородному начальному условию $u|_{t=0} = 0$, причем $|u| \leq 2M$ в \overline{Q}_T . Предполагая, что $T < \infty$, введем прямоугольник $Q_{LT} = \{(x, t) : |x| < L, 0 < t \leq T\}$ и рассмотрим в нем функцию

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (3.4)$$

Обозначим через Σ_{LT} сумму нижней и боковой границ прямоугольника Q_{LT} . Легко видеть, что v является классическим решением уравнения (3.1) и удовлетворяет в точках Σ_{LT} условиям

$$v(x, 0) \geq |u(x, 0)| = 0, \quad x \in [-L, L], \quad v(\pm L, t) \geq 2M \geq |u(\pm L, t)|, \quad t \in [0, T],$$

или $-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t)$ на Σ_{LT} . Применим принцип максимума к разности между функциями v и $\pm u$ в области Q_{LT} . Будем иметь $v(x, t) - u(x, t) \geq 0$, $v(x, t) + u(x, t) \geq 0$ на \overline{Q}_{LT} , или $-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_{LT}$. Отсюда выводим, что

$$|u(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_{LT}. \quad (3.5)$$

Фиксируя значения (x, t) и устремляя L к бесконечности, получим $u(x, t) \equiv 0 \quad \forall (x, t) \in Q_{LT}$. Если же $T = \infty$, то вместо Q_{LT} следует выбрать прямоугольник Q_{LT_0} конечной высоты $T_0 < \infty$ и повторить предыдущие рассуждения. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что принцип максимума для уравнения теплопроводности (3.1) в неограниченной по x либо t области Q_T не справедлив хотя бы потому, что решение u уравнения (3.1) может не достигать в такой области наибольшего или наименьшего значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. По аналогичной схеме доказывается теорема единственности классического решения задачи Коши (3.1), (3.2) для неоднородного уравнения теплопроводности. Она будет рассмотрена в п. 3.4.

3.2. Применение метода Фурье. Для доказательства существования решения задачи (3.1), (3.2) и одновременно нахождения его в явном виде применим метод Фурье. Следуя этому методу, будем сначала искать частные решения уравнения (3.1) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для T и X :

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (3.7)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (3.8)$$

Общее решение уравнения (3.8) имеет вид

$$X(x) = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x, \quad (3.9)$$

где постоянные α и β могут зависеть от λ . Решение уравнения (3.7) равно произведению константы на функцию

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (3.10)$$

Поскольку краевые условия для функции X отсутствуют, то параметр λ в (3.9) и (3.10) может принимать любые вещественные значения. Этим задача Коши для уравнения (3.1) существенно отличается от соответствующей краевой задачи, для которой спектральный параметр λ может принимать лишь счетное (дискретное) множество значений.

По построению функция $u_\lambda(x, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x]$ является частным решением уравнения (3.1) в области Q_T при любых $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$. То же самое справедливо и для интеграла

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x, t) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (3.11)$$

при условии, конечно, что он равномерно сходится в Q_T и его можно дифференцировать один раз по t и дважды по x под знаком интеграла. Выберем теперь $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ так, чтобы выполнялись указанные условия и начальное условие (3.2). Полагая в (3.11) $t = 0$, получим с учетом (3.2), что

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (3.12)$$

На равенство (3.12) можно смотреть как на разложение начальной функции φ в интеграл Фурье по функциям $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$. Хорошо известно, (см. [19, с. 355]), что коэффициенты $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ однозначно определяются по функции φ , обладающей определенными свойствами регулярности, с помощью формул

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (3.13)$$

Если подставить (3.13) в (3.12), то получим формулу

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi, \quad (3.14)$$

называемую разложением функции φ в интеграл Фурье. Известно, (см., например, [47, гл. 6]), что формула (3.14) справедлива, если функция φ непрерывна в $(-\infty, \infty)$, удовлетворяет условию Дирихле, т.е. имеет конечное число максимумов и минимумов, и абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$, так что существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$. О других достаточных условиях справедливости формулы (3.14) можно прочитать в [19, гл. 10].

Подставим теперь (3.13) в (3.11). Учитывая четность подинтегральной функции по λ в полученном интеграле, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \end{aligned}$$

После изменения порядка интегрирования этот интеграл можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (3.15)$$

Внутренний интеграл в (3.15) можно явно вычислить. Для этого при фиксированных x и t введем вместо λ и ξ переменные z и μ по формулам

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(\xi - x) = \mu z \Rightarrow \mu = \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (3.16)$$

С учетом замены (3.16) внутренний интеграл в (3.15) принимает вид

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz \equiv \frac{1}{a\sqrt{t}} J(\mu). \quad (3.17)$$

Здесь функция J представляет собой равномерно сходящийся по параметру $\mu \in (-\infty, \infty)$ несобственный интеграл. Дифференцируя J по параметру μ , выводим, что $J'(\mu) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz$, причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного после дифференцирования несобственного интеграла.

Применяя далее формулу интегрирования по частям

$$\int_0^{\infty} u'v dz = - \int_0^{\infty} uv' dz + uv|_0^{\infty}$$

и полагая $u(z) = (1/2)e^{-z^2}$, $v(z) = \sin \mu z$, $u' = -ze^{-z^2}$, $v' = \mu \cos \mu z$, выводим

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \mu z dz = -\frac{\mu}{2} J(\mu).$$

Это означает, что функция J удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $J'(\mu) = -(\mu/2)J(\mu)$. Общее решение последнего имеет вид $J(\mu) = C \exp -(\mu^2/4)$, где C – произвольная постоянная. Чтобы определить ее, положим здесь $\mu = 0$. Получим с учетом (3.17)

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой (см. [19, с. 109])

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \quad (3.18)$$

В результате получаем, что

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu^2}{4}}. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.17), имеем

$$\int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0. \quad (3.20)$$

Учитывая (3.20), перепишем окончательно (3.15) в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Легко показать (подстановкой в (3.1)), что функция

$$F(\xi, x, t) \equiv \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad (3.22)$$

рассматриваемая как функция от x и t , является решением уравнения (3.1) в каждой точке (x, t) при $t > 0$. Функция (3.22) называется *фундаментальным решением* оператора теплопроводности в (3.1). Более подробно о нем см. ниже.

3.3. Обоснование метода Фурье. Предположим, что начальная функция φ в (3.2) удовлетворяет условиям

(i) $\varphi \in C(-\infty, \infty)$, $|\varphi(x)| \leq M < \infty \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$.

Докажем, что при выполнении (i) функция (3.21) является искомым (классическим) решением задачи Коши (3.1), (3.2). Покажем сначала, что функция (3.21) удовлетворяет уравнению (3.1) в каждой точке $(x, t) \in Q_T$. Для

этого достаточно показать с учетом замечания 3.3, что интеграл в (3.21), а также интегралы, полученные его формальным дифференцированием под знаком интеграла дважды по x и один раз по t , равномерно сходятся в любом прямоугольнике вида $\Pi = \Pi(L, t_0, T_0) = \{(x, t) : -L \leq x \leq L, t_0 \leq t \leq T_0\}$, где $t_0 > 0$, $T_0 \leq T$.

Дифференцируя (3.21) произвольное число раз по x и t , получим линейную комбинацию интегралов вида

$$I(x, t) = \frac{1}{t^k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)(\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi, \quad (3.23)$$

где k и m – некоторые натуральные числа. Покажем, что каждый из этих интегралов равномерно сходится. С этой целью с помощью замены переменных

$$z = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} \quad (t > 0), \quad \xi = x + 2a\sqrt{t}z, \quad d\xi = 2a\sqrt{t}dz \quad (3.24)$$

преобразуем интеграл (3.23) к виду

$$I(x, t) = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2}-k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2az\sqrt{t}) z^m e^{-z^2} dz. \quad (3.25)$$

Подинтегральная функция в (3.25), очевидно, мажорируется функцией $M|z|^m e^{-z^2}$, которая интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$. Отсюда следует (см., например, [19, с. 274]) равномерная сходимость интеграла в (3.25) при $t \geq t_0 > 0$. (Необходимость последнего условия $t \geq t_0$ вызывается тем, что формула замены переменных в (3.24) не определена при $t = 0$). С учетом этого приходим на основании [19, с. 276] к выводу о том, что функция u , определяемая несобственным интегралом (3.21), зависящим от x и t как от параметров, непрерывна и имеет производные любого порядка по x и t при $t > 0$, причем эти производные могут быть найдены с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Так как подинтегральная функция в (3.21) удовлетворяет (в силу замечания 3.3) уравнению (3.1) в каждой точке (x, t) при $t > 0$, то отсюда следует, что и функция u удовлетворяет этому уравнению при $t > 0$.

Осталось доказать, что функция (3.21) удовлетворяет начальному условию (3.2), т. е. что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty). \quad (3.26)$$

Для доказательства этого факта опять воспользуемся заменой переменных по формуле (3.24). С учетом этой замены интеграл (3.21) примет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2az\sqrt{t}) e^{-z^2} dz. \quad (3.27)$$

Отсюда следует ограниченность решения u при $|x| < \infty$ и $t > 0$, если $|\varphi(x)| \leq M \forall x \in (-\infty, \infty)$. Действительно из (3.27) имеем

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t})| e^{-z^2} dz \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = M,$$

так как в силу (3.18)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1. \quad (3.28)$$

Умножим (3.28) на $\varphi(x)$ и вычтем из (3.27). Получим

$$u(x, t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-z^2} dz.$$

Отсюда имеем

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz. \quad (3.29)$$

В силу условий (i), очевидно, имеем

$$|\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M \quad \forall x, z \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, T]. \quad (3.30)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Из сходимости несобственного интеграла в (3.28) вытекает, что найдется такое число N , что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} dz \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.31)$$

Разбивая интервал интегрирования $(-\infty, \infty)$ на три части: $(-\infty, -N)$, $[-N, N]$, (N, ∞) , и учитывая (3.30), (3.31), выводим из (3.29), что

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz. \quad (3.32)$$

Поскольку функция φ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то при всех достаточно малых $t > 0$ и $|x| \leq L$, $|z| \leq N$ имеем $|\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq \varepsilon/3$. С учетом этого из неравенства (3.32) получаем

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-z^2} dz \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что $|u(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in (-\infty, \infty)$ при достаточно малых t . Отсюда в силу произвольности ε следует (3.26).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Аналогичным образом показывается, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \quad (3.33)$$

для однородного уравнения теплопроводности определяется формулой [21, с. 459]

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.34)$$

3.4. Задача Коши для неоднородного уравнения. Понятие о методе интегральных преобразований. Рассмотрим в этом пункте задачу нахождения классического решения неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.35)$$

в области Q_T , удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.36)$$

и следующим условиям на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (3.37)$$

Эти условия в практических задачах обычно выполняются.

При решении многих задач математической физики очень эффективным является использование так называемого *метода интегральных преобразований*. Познакомимся с идеей этого метода на примере решения задачи (3.35)–(3.37). Сначала введем следующее определение. Пусть φ – заданная на вещественной оси \mathbb{R} функция, удовлетворяющая тем же самым условиям, при которых имеет место формула Фурье (3.14). Поставим в соответствие φ другую функцию

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, \quad (3.38)$$

где $-\infty < \lambda < \infty$. Функция $\hat{\varphi}$ называется *интегральным преобразованием Фурье* функции φ . С помощью формулы Фурье (3.14) нетрудно показать, что функция φ может быть выражена через свое преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\lambda)$ по следующей формуле (см. [19, гл. 10])

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (3.39)$$

Правая часть формулы (3.39) называется *обратным преобразованием Фурье*.

Следуя методу интегральных преобразований вместо функции u будем искать ее интегральное преобразование Фурье относительно переменной x , считая переменную t параметром, т. е. будем искать функцию

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.40)$$

Считая, что задача (3.35)–(3.37) разрешима и u – ее решение, найдем уравнение и дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция \hat{u} . Для этого заменим в тождестве (3.35) для решения u переменную x на ξ , умножим обе его части на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda\xi}$ и проинтегрируем на $(-\infty, \infty)$. В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} e^{i\lambda\xi} d\xi + \hat{f}(\lambda, t), \quad (3.41)$$

где \hat{f} – преобразование Фурье функции f по x , определяемое формулой

$$\hat{f}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.42)$$

Преобразуем интегралы, входящие в (3.41). Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi \right\} = \frac{d\hat{u}(\lambda, t)}{dt}. \quad (3.43)$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$I \equiv \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.44)$$

В силу условий (3.37) внеинтегральный член в (3.44) исчезает. Проводя повторное интегрирование по частям, будем иметь

$$I = -\frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2 (i\lambda)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t). \quad (3.45)$$

Внеинтегральный член опять исчез в силу (3.37). Подставляя (3.43) и (3.45) в (3.41), приходим к уравнению

$$\frac{d\hat{u}(\lambda, t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda, t). \quad (3.46)$$

Полагая далее в (3.40) $t = 0$, получим с учетом (3.36) начальное условие

$$\hat{u}(\lambda, 0) = 0. \quad (3.47)$$

Решение задачи (3.46), (3.47), аналогичной задаче (2.23), (2.24), имеет вид

$$\hat{u}(\lambda, t) = \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (3.48)$$

Тем самым преобразование Фурье \hat{u} решения u найдено. Осталось лишь восстановить функцию u по \hat{u} . В силу (3.39) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda, t) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Подставляя сюда вместо $\hat{u}(\lambda, t)$ выражение (3.48), будем иметь

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Произведем здесь замену порядка интегрирования и воспользуемся формулой (3.42) для \hat{f} . В результате получим, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\lambda. \quad (3.49)$$

Внутренний интеграл по переменной λ вычисляется в явном виде. Действительно, используя свойства интегралов в симметричных пределах от четной и нечетной функций и соотношение (3.20), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} [\cos\lambda(\xi-x) + i\sin\lambda(\xi-x)] d\lambda = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda(\xi-x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в (3.49), приходим к следующей окончательной формуле решения u :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.51)$$

Простой анализ показывает, что формула (3.51) действительно определяет решение задачи (3.35)-(3.37) в случае, когда f удовлетворяет условиям

$$f \in C^1(\overline{Q_T}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Метод интегральных преобразований является одним из основных классических методов математической физики. Кроме рассмотренного выше интегрального преобразования Фурье, используются и другие преобразования. Из них наиболее часто применяются косинус и синус – преобразования Фурье

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (3.52)$$

и преобразование Лапласа, определяемое формулой

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(\xi) e^{-\lambda \xi} d\xi, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma. \quad (3.53)$$

Указанные преобразования обычно используются при решении задач, рассматриваемых на полубесконечном по одной из переменных интервале. Более подробно с методом интегральных преобразований читатель может познакомиться в [21, гл. 33–35].

3.5. Физический анализ решения. Обратимся к формуле (3.21), решающей задачу Коши (3.1), (3.2), и укажем ее физический смысл в предположении, что u описывает распределение температуры в бесконечном стержне, расположенном в направлении оси x .

Начнем наш анализ с утверждения о том, что согласно формуле (3.21) тепло распространяется вдоль стержня мгновенно, а не с какой-либо конечной скоростью. Действительно, пусть начальная температура φ положительна для $\alpha < x < \beta$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда последующее распределение температур в стержне описывается формулой.

$$u(x, t) = \int_\alpha^\beta \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.54)$$

Из (3.54) видно, что при сколь угодно малых $t > 0$ и сколь угодно больших x $u(x, t)$ больше нуля.

Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что тепло распространяется в стержне с бесконечной скоростью. Физически это, конечно, не соответствует действительности, а данный вывод мы сделали лишь на основании предположения о том, что распространение тепла в стержне описывается уравнением (3.1). На основании приведенного противоречия можно сделать вывод о том, что уравнение теплопроводности является не совсем точной математической моделью процесса распространения тепла (либо процесса диффузии вещества). Тем не менее применение уравнения теплопроводности можно считать оправданным на практике, поскольку за исключением приведенного парадокса и некоторых исключительных случаев

оно относительно точно моделирует реальные физические процессы распространения тепла либо диффузии вещества.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Решение задачи Коши (3.1), (3.2) есть функция, непрерывно дифференцируемая при $t > 0$ сколько угодно раз по x и t , независимо от того, будет ли иметь производные функция φ или нет. Указанное свойство *внутренней гладкости* решений существенно отличает однородное уравнение теплопроводности от уравнения колебания струны.

Выясним теперь *физический* смысл фундаментального решения (3.22) оператора теплопроводности в (3.1). Рассуждая, как в [21, с. 457], выделим малый элемент стержня $(x_0 - h, x_0 + h)$ около точки x_0 и будем считать, что функция φ , описывающая начальное распределение температуры, равна нулю вне промежутка $(x_0 - h, x_0 + h)$ и имеет постоянное значение φ_0 внутри него. С физической точки зрения (см. § 4 гл. 1) это означает, что в начальный момент времени этому элементу сообщено количество тепла $Q = 2h\rho c\varphi_0$, которое вызвало повышение температуры на величину φ_0 в этом стержне. Здесь ρ и c обозначают соответственно линейную плотность и удельную теплоемкость стержня. В последующие моменты времени распределение температуры в стержне дается формулой (3.21), которая в нашем случае принимает вид:

$$u(x, t) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t} 2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать h до нуля, т. е. будем считать, что то же количество тепла Q распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке $x = x_0$. В результате придем к понятию *мгновенного точечного источника тепла интенсивности Q , помещенного в момент времени $t = 0$ в точке $x = x_0$* . От действия такого мгновенного источника тепла в стержне возникает распределение температур, определяемое формулой

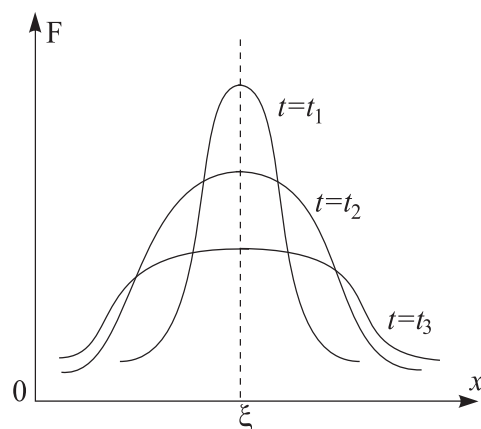


Рис. 3.1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t} 2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (3.55)$$

Применив теорему о среднем, будем иметь

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}}, \quad \xi_0 \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Так как $\xi_0 \rightarrow x_0$ при $h \rightarrow 0$, то в пределе выражение (3.55) принимает вид

$$\frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}. \quad (3.56)$$

При $Q = \rho c$ (3.56) переходит в фундаментальное решение $F(x_0, x, t)$, определяемое формулой (3.22). Это позволяет сделать вывод о том, что по своему физическому смыслу *фундаментальное решение (3.22) описывает распределение температуры в бесконечном однородном стержне, которое вызывается мгновенным точечным источником тепла интенсивности $Q = \rho c$, помещенным в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = \xi$ стержня.*

Графики фундаментального решения $F(\xi, x, t)$ при фиксированном ξ как функции от x в фиксированные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$ представлены на рис. 3.1. Площадь под каждой из этих кривых равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Это означает, что количество тепла $Q = \rho c$ в стержне остается неизменным с течением времени. Из рис. 3.1 видно, что почти вся площадь, ограниченная кривой (3.22) и осью абсцисс, находится над промежутком $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, где ε — достаточно малое число, если только значение $t > 0$ достаточно мало. Величина этой площади, умноженная на ρc , равна количеству тепла, подводимому в начальный момент времени $t = 0$ к стержню. Таким образом, для малых значений $t > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки $x = \xi$, тогда как в начальный момент времени $t = 0$ все количество тепла сосредоточено в точке $x = \xi$, где находится мгновенный точечный источник тепла.

ГЛАВА 6. Элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций

Математическое моделирование *стационарных* процессов различной физической природы приводит к необходимости решения уравнений эллиптического типа. Наиболее простейшим и в то же время важнейшим представителем уравнений этого типа является уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Здесь Δ – оператор Лапласа (его определение см. в § 3 гл. 1). В этой главе будут изучены основные свойства его решений, называемых *гармоническими функциями*.

§1. Уравнение Лапласа. Сингулярные решения и гармонические потенциалы

1.1. Определение гармонической функции. В этом и следующих параграфах будем рассматривать (неоднородное) уравнение Лапласа

$$\Delta u = -f, \quad (1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа. Хорошо известно (см. гл. 1), что уравнение (1.1) моделирует стационарное распределение температуры в области Ω , заполненной однородной средой, при условии, что f описывает объемную плотность внешних источников тепла. Потенциал гравитационного поля (либо кулонов потенциал) также удовлетворяет уравнению (1.1), где f описывает объемную плотность масс (либо электрических зарядов). Особенно важную роль играет однородное уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1.2)$$

описывающее соответствующие стационарные физические процессы в отсутствие внешних источников. В дальнейшем, следуя устоявшейся терминологии, под уравнением Лапласа будем понимать именно уравнение (1.2), тогда как на (1.1) будем ссылаться как на *уравнение Пуассона*.

Пусть Ω – произвольное ограниченное открытое множество в пространстве \mathbb{R}^n произвольного числа $n \geq 2$ измерений. Физический интерес, конечно, представляют случаи $n = 3$ (трехмерное пространство) и $n = 2$ (плоскость). Положим $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической* в Ω , если она дважды непрерывно дифференцируема в Ω и удовлетворяет в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ уравнению Лапласа (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической* во внешности Ω_e ограниченного открытого множества Ω , если она дважды непрерывно дифференцируема в Ω_e , удовлетворяет всюду в Ω_e уравнению

Лапласа (1.2) и для достаточно больших по модулю $\mathbf{x} \in \Omega_e$ удовлетворяет условию

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{n-2}}. \quad (1.3)$$

Здесь C – некоторая постоянная, зависящая от u , но не зависящая от \mathbf{x} .

В случае двумерной области Ω условие (1.3) означает, что гармоническая в неограниченной области функция u является ограниченной на бесконечности.

Подчеркнем, что определение гармонической функции относится к случаю открытого множества; если говорят о функции, гармонической в замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, то под этим понимают, что данная функция гармонична в более широком открытом множестве $Q \supset \overline{\Omega}$. Заметим также, что определение гармонической функции не накладывает никаких ограничений на поведение функции на границе Γ области Ω .

Наконец, отметим, что на практике часто возникает необходимость нахождения решений эллиптических уравнений и, в частности, уравнения Лапласа в неограниченной области с неограниченной границей или, как говорят, с границей, *простирающейся в бесконечность*. Для таких областей условие (1.3) на бесконечности, входящее в определение гармонической функции, может изменяться. Однако, в этой главе мы не будем рассматривать такие области.

1.2. Сингулярные решения оператора Лапласа. Ниже будем заниматься, в основном, изучением свойств решений уравнения Лапласа в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 и на плоскости \mathbb{R}^2 . Известно, что в пространстве \mathbb{R}^3 можно ввести бесконечно много ортогональных систем координат. Наиболее важными из них являются декартова, сферическая и цилиндрическая системы координат. Пусть x, y, z ; r, θ, φ и ρ, φ, z обозначают соответственно декартовы, сферические и цилиндрические координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Напомним, что трехмерный оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

в декартовой системе координат, формулой

$$\Delta u = \Delta_{r,\theta,\varphi} u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (1.5)$$

в сферической системе координат и

$$\Delta u = \Delta_{\rho,\varphi,z} u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

в цилиндрической системе координат.

В приложениях важную роль играют решения уравнения Лапласа, обладающие *сферической* или *цилиндрической симметрией*, т. е. зависящие только от одной переменной: r или ρ . Найдем сначала решения уравнения Лапласа, зависящие только от r . Для этого запишем уравнение Лапласа в сферических координатах и воспользуемся тем фактом, что решение u не зависит от θ и φ . Учитывая (1.5), получим уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad r = |\mathbf{x}| > 0. \quad (1.7)$$

Умножая на r^2 и интегрируя дважды полученное уравнение, выводим, что $u(\mathbf{x}) = U(r) \equiv C_1/r + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая здесь $C_1 = 1/4\pi$, $C_2 = 0$, получим функцию

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \equiv \frac{1}{4\pi r}. \quad (1.8)$$

Функция (1.8) является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической всюду в \mathbb{R}^3 , кроме точки $\mathbf{x} = 0$, где она имеет особенность 1-го порядка. Кроме того, по построению она удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2) в каждой точке $\mathbf{x} \neq 0$ и убывает на бесконечности с первым порядком по $|\mathbf{x}|^{-1}$. Следовательно, она является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Функцию (1.8) называют *сингулярным решением оператора Лапласа* в пространстве \mathbb{R}^3 . В свою очередь, сумму сингулярного решения и любой гармонической функции называют *фундаментальным решением* оператора Лапласа. Вместо термина “сингулярное” используют также термины “элементарное”, либо “главное фундаментальное” решение. Подчеркнем, что название “сингулярное решение” относится именно к функции (1.8), отличающейся от функции $1/|\mathbf{x}|$ множителем $1/4\pi$. Причина появления этого множителя выяснится позже.

Приведенный здесь результат остается справедливым, если в качестве r в (1.8) взять расстояние от переменной точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ до произвольной точки $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Другими словами, справедлива следующая лемма

ЛЕММА 1.1. *Функция $E_3(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой*

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (1.9)$$

является гармонической в любой области Ω пространства \mathbb{R}^3 , не содержащей точки \mathbf{y} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mathbf{y} = 0$ лемма уже доказана. При $\mathbf{y} \neq 0$ следует ввести сферическую систему координат с центром в точке \mathbf{y} и повторить предыдущие рассуждения. ■

Функцию (1.9) ниже будем называть *сингулярным решением оператора Лапласа в \mathbb{R}^3 с центром в точке \mathbf{y}* .

Аналогичные рассуждения показывают, что общее решение уравнения Лапласа в пространстве \mathbb{R}^3 , зависящее только от координаты ρ , имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = U(\rho) = C_1 \ln \frac{1}{\rho} + C_2. \quad (1.10)$$

Напомним, что ρ связана с декартовыми координатами x и y формулой

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.11)$$

Поскольку в силу (1.11) функция (1.10) не зависит от декартовой координаты z , то ее достаточно рассматривать при $z = 0$, т. е. на плоскости \mathbb{R}^2 . При $C_1 = 1/2\pi$, $C_2 = 0$ получим функцию

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

называемую *сингулярным решением оператора Лапласа в \mathbb{R}^2* . Соответствующая функция $E_2(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} = (y_1, y_2), \quad (1.12)$$

называется *сингулярным решением оператора Лапласа в \mathbb{R}^2 с центром в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ или просто сингулярным решением в \mathbb{R}^2 , если $\mathbf{y} = 0$* . По построению функция (1.12) удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.13)$$

в каждой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Однако в отличие от функции (1.9), убывающей на бесконечности, функция (1.12) является неограниченной при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Поэтому она не является гармонической в неограниченной области. Однако она, конечно, является гармонической в любой *ограниченной* области плоскости \mathbb{R}^2 , не содержащей точки \mathbf{y} . Сформулируем полученный результат в виде леммы.

ЛЕММА 1.2. *Функция (1.12) удовлетворяет уравнению Лапласа (1.13) всюду на плоскости \mathbb{R}^2 , кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, и является гармонической в любом открытом ограниченном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, не содержащем точки \mathbf{y} .*

Рассмотрим теперь пространство \mathbb{R}^n произвольного числа $n \geq 3$ измерений. Обозначим через ω_n площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n . Известно [9,

с. 43], что $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, где Γ – гамма-функция Эйлера. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1.3. Функция $E_n(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad n \geq 3, \quad (1.14)$$

где величина $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ имеет смысл расстояния от переменной точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ до фиксированной точки $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, является гармонической в любом открытом множестве Ω пространства \mathbb{R}^n , не содержащей точки \mathbf{y} .

Функцию (1.14) будем называть *сингулярным решением оператора Лапласа в \mathbb{R}^n с центром в точке \mathbf{y}* или просто сингулярным решением в \mathbb{R}^n , если $\mathbf{y} = 0$.

1.3. Физический смысл сингулярного решения. Потенциалы монополей, диполей и мультиполей. Изучим физический смысл сингулярного решения $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ оператора Лапласа при $n = 3$ или 2. С этой целью введем в рассмотрение электрический заряд величины q , сосредоточенный в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. На соответствующую пару (\mathbf{y}, q) будем ссылаться как на *точечный заряд* (или *монополь* либо *мультиполь нулевого порядка*) с центром в точке \mathbf{y} интенсивности q . Из результатов гл. 1 (см. также [38, с. 64]) следует, что потенциал u электростатического поля, создаваемого монополем (\mathbf{y}, q) в произвольной точке \mathbf{x} пространства \mathbb{R}^3 , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \equiv qE_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.15)$$

На основании (1.15) выводим, что по своему физическому смыслу $E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет собой значение в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ потенциала электрического поля, создаваемого единичным точечным источником, сосредоточенным в точке \mathbf{y} . Впрочем, непосредственный физический смысл имеет не сам потенциал u в (1.15), а его градиент, точнее векторное поле *напряженности электрического поля* $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -kq\nabla_x E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Здесь индекс “ x ” у оператора ∇ означает, что он применяется к E_3 как функции от \mathbf{x} , k – некоторая константа, величина и размерность которой зависят от выбранной системы единиц. В частности, $k = 1$ в системе СИ. Именно вектор $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ равен силе, с которой точечный заряд (\mathbf{y}, q) действует на единичный точечный заряд, помещенный в точку \mathbf{x} [38, с. 15]. Полагая $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i - y_i}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i - y_i}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) &= \frac{x_i - y_i}{r^3}, \quad \nabla_x \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = -\nabla_y \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -kq \nabla_x \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \frac{qk}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}.$$

Если же в точке \mathbf{y} сосредоточена масса величины q , то функция (1.15) описывает с точностью до мультипликативной размерной константы гравитационный потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ точечным источником масс (\mathbf{y}, q) .

Обратимся теперь к функции $E_2(\cdot, \mathbf{y})$, которую, как уже указывалось выше, можно рассматривать как на плоскости \mathbb{R}^2 , так и в пространстве \mathbb{R}^3 . Аналогичные вышеприведенным рассуждения показывают, что $E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при первой (“плоской”) интерпретации представляет собой значение в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ потенциала точечного (на плоскости) источника, сосредоточенного в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. При трехмерной интерпретации $E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет собой значение в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ потенциала, создаваемого зарядами (или массами), распределенными с постоянной плотностью вдоль прямой $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, проходящей параллельно оси x_3 через точку $\mathbf{y}' = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Для того, чтобы выявить физический смысл сингулярного решения, мы ввели специальный точечный объект, называемый монополем, и показали, что его потенциал совпадает (с точностью до мультипликативной константы) с сингулярным решением $E_3(\cdot, \mathbf{y})$. Наряду с монополем, важную роль в физических приложениях играет еще один точечный объект, называемый диполем или мультиполем первого порядка. Чтобы сконструировать диполь, выберем произвольную точку \mathbf{y} и проведем через нее в направлении некоторого единичного вектора \mathbf{e}_1 ось l_1 . Пусть точки \mathbf{y}' и \mathbf{y}'' расположены на оси l_1 симметрично относительно \mathbf{y} на расстоянии h друг от друга, и пусть в них сосредоточены точечные заряды $-q$ и q (см. рис. 1.1а), причем $q > 0$.

Из физики известно, что для электромагнитного поля так же, как и гравитационного поля, справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно этому принципу, кулонов потенциал поля, создаваемого монополями $(\mathbf{y}', -q)$ и (\mathbf{y}'', q) в точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}', \mathbf{y}''$, определяется формулой

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{y}', \mathbf{y}'') = \frac{q}{4\pi |\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{q}{4\pi |\mathbf{y}' - \mathbf{x}|}. \quad (1.17)$$

Из (1.17) видно, что при $h = |\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| \rightarrow 0$ потенциал $u(\mathbf{x}; \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$ стремится к нулю как разность двух равных в пределе при $h \rightarrow 0$ функций. Пусть теперь в процессе стремления h к нулю заряд q меняется так, что выполняется условие $qh = q|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| = q_1$, где q_1 - фиксированное число. Предельное положение зарядов $(\mathbf{y}', -q)$ и (\mathbf{y}'', q) при $h \rightarrow 0$ носит название *диполя* с

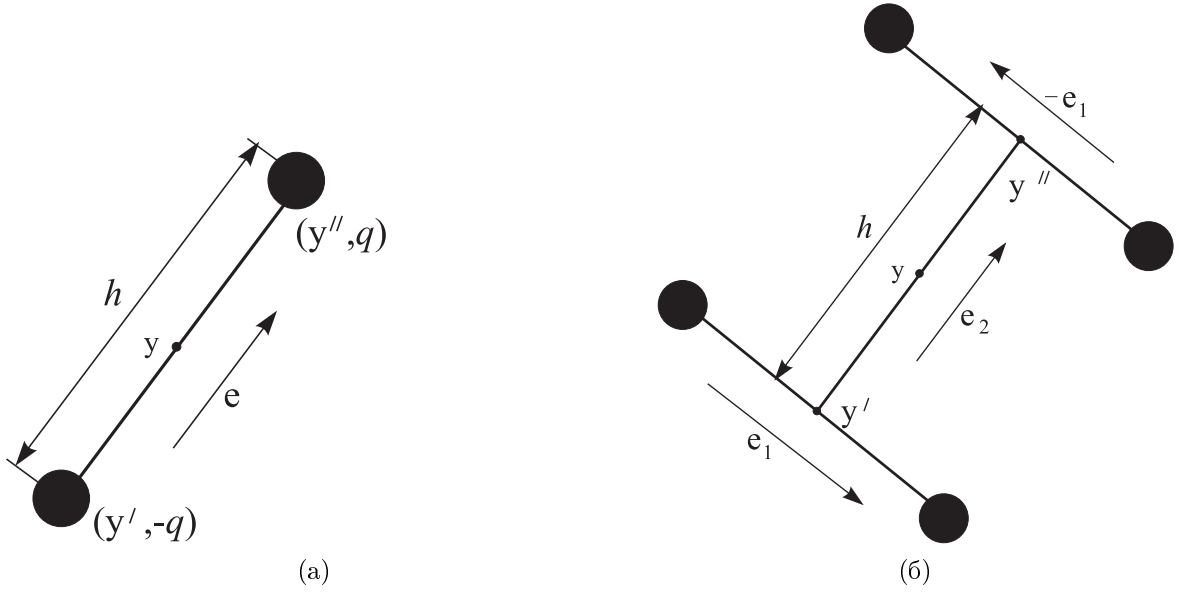


Рис. 1.1.

центром в точке \mathbf{y} , а число q_1 и ось l_1 называются *моментом* и *осью* диполя соответственно. Сам диполь представляет собой тройку (\mathbf{y}, q_1, l_1) . По определению производной в данном направлении, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \lim_{|\mathbf{y}'' - \mathbf{y}'| \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}|} \right) = \\ &= \frac{q_1}{4\pi} \lim_{|\mathbf{y}'' - \mathbf{y}'| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''|} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}|} \right) = q_1 \frac{\partial}{\partial l_1} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

По построению (1.18) описывает потенциал электростатического поля, создаваемого в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ диполем (\mathbf{y}, q_1, l_1) . Так как

$$\frac{\partial}{\partial l_1} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{e}_1, \quad (1.19)$$

то потенциал $u^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ диполя (\mathbf{y}, q_1, l_1) убывает как $O(|\mathbf{x}|^{-2})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Итак, мы ввели два точечных объекта – монополь и диполь, и вычислили потенциалы полей, создаваемых этими объектами. При этом диполь был получен сближением двух монополей разноименных зарядов с одновременным увеличением их зарядов по модулю. Используя в свою очередь два диполя, мы можем сконструировать еще один точечный объект, называемый квадруполем или мультиполем второго порядка. Для этого нужно рассмотреть на прямой l_2 с направлением \mathbf{e}_2 , проходящей через точку \mathbf{y} , два диполя с одним и тем же моментом q_1 , один из которых ориентирован в направлении \mathbf{e}_1 (см. рис. 1.1б), а другой – в направлении $-\mathbf{e}_1$. Сближая оба диполя в точку \mathbf{y} с одновременным увеличением величины момента q_1

так, чтобы выполнялось условие $2!q_1h \equiv q_2 = \text{const}$, и рассуждая, как и выше, получим в пределе еще один точечный объект, потенциал которого определяется формулой

$$u^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial l_1 \partial l_2} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.20)$$

Указанный точечный объект называется *квадруполем* с моментом q_2 , а направления l_1 и l_2 называются его осями. Простой анализ показывает, что потенциал квадруполь убывает как $O(|\mathbf{x}|^{-3})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Сближая в точку \mathbf{y} по введенной схеме два квадруполь, можно построить еще один точечный источник, называемый *октаполем*, потенциал которого, определяемый формулой

$$u^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_3} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

убывает как $O(|\mathbf{x}|^{-4})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Продолжая этот процесс и далее, можно сконструировать точечный источник, называемый *мультиполем произвольного порядка k* , с потенциалом $u^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определяемым формулой

$$u^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_k} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.21)$$

Направления l_i называются осями мультиполя, а величина q_k — его моментом. Подчеркнем, что потенциал мультиполя k -ого порядка совпадает с точностью до мультипликативной константы с частной производной k -ого порядка сингулярного решения $E_3(\cdot, \mathbf{y})$ вдоль его осей и убывает как $O(|\mathbf{x}|^{-k-1})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Более подробно о процедуре построения мультиполей разных порядков и о свойствах их потенциалов можно прочитать в [21, гл. 20].

В заключение этого пункта приведем сводку основных свойств сингулярного решения $E_n(\cdot, \mathbf{y})$, считая во всех приводимых ниже свойствах, кроме последнего, что \mathbf{y} является фиксированной, хотя и произвольной точкой из \mathbb{R}^n :

1. Всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$ функция $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической функцией декартовых координат точки \mathbf{x} , удовлетворяющей уравнению Лапласа (1.2); при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеет характеристическую для каждого n особенность.

2. При $n \geq 3$ функция $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ удовлетворяет условию на бесконечности (1.3) и является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$.

3. При $n = 3$ или 2 функция $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ описывает по своему физическому смыслу (с точностью до мультипликативной постоянной) потенциал поля, создаваемого в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ единичным точечным источником, сосредоточенным в точке $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

4. Функция E_n зависит лишь от одной скалярной переменной $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, причем любое другое решение уравнения (1.2), зависящее от $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, может отличаться от E_n лишь мультипликативной и аддитивной постоянными.

5. Функция $E_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является симметричной функцией точек \mathbf{x} и \mathbf{y} ; поэтому $E_n(\mathbf{x}, \cdot)$, рассматриваемая как функция точки \mathbf{y} (при фиксированном \mathbf{x}), обладает всеми перечисленными выше свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Еще одно свойство сингулярного решения $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ заключается в том, что $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ является решением в смысле обобщенных функций неоднородного уравнения Лапласа

$$\Delta_x E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.22)$$

Здесь индекс “ x ” у оператора Δ означает, что он применяется к E_n как функции от \mathbf{x} , $\delta(\cdot, \mathbf{y})$ – n -мерная δ -функция Дирака с центром в точке $\mathbf{y} \in \Omega$. Касаясь δ -функции, отметим, что впервые она была введена в 1923 г. П. Дираком, который в одномерном случае определил $\delta(x, y)$ как функцию, равную нулю всюду, кроме одной точки y , где она равна бесконечности и имеет интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx$, равный единице. Простой анализ показывает, что введенные условия для $\delta(x, y)$ не совместны с точки зрения определения функции и интеграла. Поэтому $\delta(x, y)$ не является функцией в классическом смысле этого слова. Более того, исследования С.Л. Соболева, Л. Шварца и других математиков показали, что δ -функция является обобщенной функцией, т. е. функционалом, определенным на множестве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных в \mathbb{R}^n функций, который действует по формуле $\langle \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\langle \cdot, \varphi \rangle$ – значение соответствующего функционала на элементе $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тот факт, что $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ является решением уравнения (1.22) в смысле обобщенных функций, означает, что $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (1.23)$$

Не имея здесь возможности более подробно останавливаться на описании свойств сингулярного решения с точки зрения обобщенных функций, отметим, что детальное освещение указанных вопросов можно найти в книге [11].

1.4. Объемные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя. Выше при изучении физического смысла сингулярного решения была рассмотрена идеальная в определенном смысле ситуация, когда электрическое или гравитационное поле создается точечным источником. В реальности заряды либо массы распределены по объемам, поверхностям

или линиям. Представляет интерес вычислить потенциалы полей, создаваемых указанными более сложными распределениями зарядов. Применим для решения этой задачи принцип суперпозиции и стандартную схему метода математического моделирования. Рассмотрим сначала случай, когда в пространстве имеется N точечных зарядов – монополей $(\mathbf{y}_1, q_1), (\mathbf{y}_2, q_2), \dots, (\mathbf{y}_N, q_N)$, сосредоточенных в точках $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N$. Чтобы найти потенциал создаваемого ими поля, воспользуемся принципом суперпозиции, в соответствии с которым потенциал суммы зарядов равняется сумме потенциалов данных зарядов. С учетом этого имеем

$$u(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}; \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N) = \sum_{j=1}^N q_j E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j|}. \quad (1.24)$$

Пусть далее заряды распределены по некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с объемной плотностью $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. На соответствующую пару (Ω, ρ) будем ссылаться как на *объемный заряд*. Для нахождения потенциала электрического поля, создаваемого парой (Ω, ρ) , разобьем, следуя схеме метода математического моделирования, область Ω на N элементарных подобластей Ω_j , вычислим приближенно потенциалы полей, создаваемых зарядами, распределенными в Ω_j , и перейдем к пределу при $\text{diam} \Omega_j \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$. Используя формулу (1.24) и рассуждая, как в § 3 гл. 1, можно показать, что потенциал поля, создаваемого указанными источниками, т. е. парой (Ω, ρ) , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = U[\Omega, \rho](\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.25)$$

Здесь $d\mathbf{y}$ – элемент объема в области Ω . Правая часть в (1.25) представляет собой объемный интеграл, зависящий от \mathbf{x} как от параметра: собственный при $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$ и несобственный при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ (поскольку подынтегральная функция неограниченно возрастает при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$). Указанный объемный интеграл принято называть *объемным потенциалом*. В рассматриваемом нами случае, когда ρ описывает плотность зарядов, распределенных в области Ω , так что пара (Ω, ρ) имеет смысл *объемного заряда*, интеграл в (1.25) имеет смысл объемного потенциала электростатического поля. Ниже на него будем ссылаться как на *кулонов (объемный) потенциал* пары (Ω, ρ) . В случае же, если ρ описывает плотность масс, распределенных в области Ω , так что пара (Ω, ρ) имеет смысл *объемной системы масс*, правая часть в (1.25) имеет смысл объемного потенциала гравитационного поля, создаваемого парой (Ω, ρ) . Для краткости на него будем ссылаться как на *ньютонов (объемный) потенциал* пары (Ω, ρ) .

Рассмотрим далее случай, когда заряды либо массы распределены на некоторой поверхности Γ с поверхностной плотностью $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Аналогичные вышеприведенным соображения показывают, что потенциал поля, создаваемого *поверхностным зарядом* (Γ, ρ) , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = U[\Gamma, \rho](\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\sigma_y}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.26)$$

где $d\sigma_y$ – элемент площади поверхности Γ , относящийся к точке $\mathbf{y} \in \Gamma$. Поверхностный интеграл в правой части (1.26) – собственный при $\mathbf{x} \notin \Gamma$ и несобственный (в указанном выше смысле) при $\mathbf{x} \in \Gamma$, называется *потенциалом простого слоя зарядов, распределенных с поверхностной плотностью ρ по поверхности Γ* . Для краткости на него будем ссылаться как на *кулонов потенциал простого слоя пары* (Γ, ρ) . В случае, если функция ρ описывает плотность масс, распределенных по Γ , интеграл в правой части (1.26) принято называть *ньютоновым потенциалом простого слоя масс, распределенных с плотностью ρ по поверхности Γ* . Для краткости на него будем ссылаться как на *ньютонов потенциал простого слоя пары* (Γ, ρ) .

Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности Γ распределены диполи с непрерывно изменяющимся моментом $q = \rho(\mathbf{y})$, причем в каждой точке $\mathbf{y} \in \Gamma$ направление оси l диполя совпадает с направлением внешней нормали \mathbf{n}_y к Γ в точке \mathbf{y} . Будем ссылаться в этом случае на тройку $(\Gamma, \rho, \mathbf{n})$ как на *поверхностную зарядную систему диполей*. Рассуждая, как при выводе формулы (1.25), нетрудно показать, что потенциал u электростатического поля, создаваемого тройкой $(\Gamma, \rho, \mathbf{n})$, определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = U[\Gamma, \rho, \mathbf{n}](\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_y. \quad (1.27)$$

Интеграл в правой части (1.27) называется *потенциалом двойного слоя зарядов, распределенных по поверхности Γ с плотностью ρ* . Такое название связано с тем, что рассматриваемое на Γ распределение диполей может быть приближенно получено в виде двух “внутренней” и “внешней” к Γ поверхностных зарядных систем монополей, расположенных на малом расстоянии h друг от друга, плотности которых отличаются лишь знаком и растут с уменьшением h .

Наряду с введенными выше объемным потенциалом (1.25) и потенциалами простого и двойного слоя (1.26) и (1.27) мы будем рассматривать

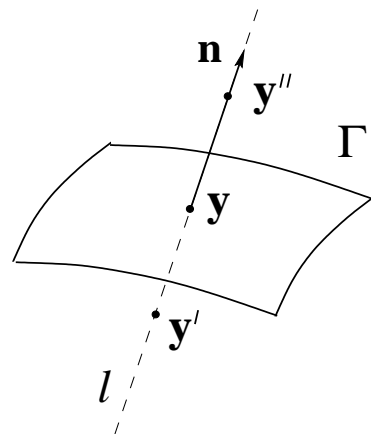


Рис. 1.2.

также их n -мерные аналоги, определяемые соотношениями

$$\int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.28)$$

Ниже мы покажем, что каждый из потенциалов в (1.28) является бесконечно дифференцируемой вне замыкания своей области интегрирования функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа и при $n \geq 3$ условию (1.3) на бесконечности. Таким образом, потенциалы (1.28) представляют собой важные примеры гармонических функций. С учетом этого будем ссылаться на них как на *гармонические потенциалы*. В частности, при $n = 2$, потенциалы (1.28), принимающие вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \end{aligned} \quad (1.29)$$

называются соответственно *логарифмическим (плоским) потенциалом*, *логарифмическим потенциалом простого слоя* и *логарифмическим потенциалом двойного слоя*.

1.5. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров.

Приведенные в п. 1.4 потенциалы определяются с помощью тройного или поверхностного интегралов, зависящих от параметра, роль которого играет переменная точка \mathbf{x} . Особенностью этих интегралов является то, что их подынтегральные функции обращаются в бесконечность в случае, когда значения потенциала рассматриваются в точках, принадлежащих области интегрирования. Хорошо известно, что соответствующие интегралы, называемые *несобственными*, нельзя определить как пределы интегральных сумм, а требуется еще дополнительный предельный переход по последовательности областей интегрирования. Чтобы глубже понять свойства потенциалов (1.25)–(1.29), приведем в этом пункте некоторые важные факты из теории несобственных кратных интегралов, зависящих от параметров. Ниже они будут широко использоваться при исследовании свойств интегралов типа потенциалов.

Пусть в ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана функция f , неограниченная в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$, и пусть для любой области ω_δ , содержащей внутри себя точку \mathbf{x}_0 , функция f ограничена и интегрируема в обычном смысле в области $\Omega \setminus \omega_\delta$. Указанная область ω_δ заштрихована на рис. 1.3а, где $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, и на рис. 1.3б, где $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Индексом

δ обозначен диаметр области ω_δ , которая стягивается в точку \mathbf{x}_0 при $\delta \rightarrow 0$. Рассматриваемые ниже области Ω , ω_δ и другие мы всегда предполагаем *кубируемыми*, т. е. имеющими объем, либо *квадрируемыми* в случае двух измерений, т. е. имеющими площадь, но не обязательно связными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Несобственным интегралом от функции f по области Ω называется предел*

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \omega_\delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.30)$$

Если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора областей ω_δ , стягивающихся в точку \mathbf{x}_0 , то несобственный интеграл $\int_{\Omega} f d\mathbf{x}$ называется сходящимся. В противном случае он называется расходящимся. Если существует хотя бы одна последовательность областей ω_{δ_n} такая, что существует предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

а для других последовательностей областей этот предел имеет другие значения или вообще не существует, то предел I называется условно сходящимся несобственным интегралом.

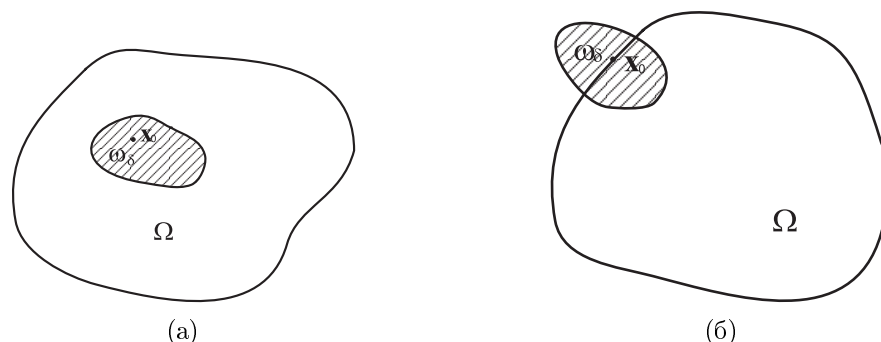


Рис. 1.3.

Ясно, что при рассмотрении условно сходящегося несобственного интеграла I нужно указывать ту последовательность областей ω_{δ_n} , по которой определяется этот интеграл. Примером условно сходящегося интеграла является сингулярный интеграл. В применении к тройному несобственному интегралу от функции f , имеющей особенность в точке $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$, он определяется как предел

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus B_{\delta_n}(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.31)$$

Здесь $B_{\delta_n}(\mathbf{x}_0)$ – стягивающая последовательность шаров радиуса $\delta_n \rightarrow 0$ с центром в точке \mathbf{x}_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$. Если интеграл $\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ расходится, но предел (1.31) существует для любой стягивающей последовательности шаров B_{δ_n} с центром в точке \mathbf{x}_0 и не зависит от выбора последовательности $\delta_n \rightarrow 0$, то этот предел называется *сингулярным интегралом от функции f по Ω либо главным значением расходящегося интеграла*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. По аналогичной схеме определяются несобственные либо сингулярные кратные интегралы в пространстве любого числа измерений n , а также несобственные и сингулярные поверхностные интегралы.

Пусть Ω и Q – некоторые области пространства \mathbb{R}^3 , и пусть функция F определена на произведении $Q \times \Omega$. Рассмотрим интеграл

$$J(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (1.32)$$

Если для любой точки $\mathbf{x} \in Q$ интеграл (1.32) существует в собственном или несобственном смысле, то он называется *собственным или несобственным интегралом, зависящим от параметра \mathbf{x}* .

Хорошо известен следующий результат (см., например, [10, с. 443]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть Q и Ω – ограниченные области в \mathbb{R}^3 .

1) Если F непрерывна в $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$ как функция двух аргументов \mathbf{x} и \mathbf{y} , то J является непрерывной функцией точки \mathbf{x} в \overline{Q} .

2) Если, кроме того, производные $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ непрерывны в $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$, то J имеет производную по x_i , непрерывную в \overline{Q} , причем

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.33)$$

3) В условиях утверждения 1 справедливо интегрирование функции J по параметру \mathbf{x} , причем

$$\int_Q J(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_Q d\mathbf{x} \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_Q F(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Приведенные в теореме 1.1 утверждения легко распространяются на интегралы вида

$$J(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (1.34)$$

Здесь функция F удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 1.1, а функция ρ абсолютно интегрируема в собственном или несобственном смысле. Последнее означает, что $\int_{\Omega} |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = I = \text{const} < \infty$, причем интеграл $\int_{\Omega} |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$ может быть как собственным, так и несобственным. Более того, если функция F имеет непрерывные в $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$ производные по x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ до порядка $m \leq \infty$, то $J \in C^m(\overline{Q})$, причем соответствующие производные функции J получаются путем дифференцирования под знаком интеграла.

Рассмотрим в качестве примера потенциал (1.25) гравитационного поля, создаваемого парой (Ω, ρ) . Предположим, что ρ абсолютно интегрируема в Ω и что точка \mathbf{x} изменяется в некоторой ограниченной области Q , отстоящей от Ω на положительном расстоянии. Тогда функция F аргументов $\mathbf{x} \in Q$ и $\mathbf{y} \in \Omega$, определяемая формулой

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.35)$$

является бесконечно дифференцируемой функцией аргументов $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \overline{Q} \times \overline{\Omega}$. В таком случае из замечания 1.3 следует, что потенциал u является бесконечно дифференцируемой функцией декартовых координат x_i точки $\mathbf{x} \in \overline{Q}$, причем производные от u по x_i получаются путем дифференцирования интеграла в (1.34) по x_i . Учитывая (1.16), легко выводим, что

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.36)$$

Если же параметр \mathbf{x} изменяется в $\overline{\Omega}$, то функция (1.35) обращается в бесконечность в случае, когда $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Это означает, что каждая точка $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ является особой точкой подинтегральных функций интегралов (1.25) и (1.36), а сами интегралы являются несобственными, даже если функция ρ является сколь угодно гладкой. Естественно, возникает вопрос о свойствах непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по x_i указанных несобственных интегралов, рассматриваемых в точках $\mathbf{x} \in \Omega$.

Ограничимся ниже исследованием несобственных кратных интегралов вида (1.34), зависящих от параметра $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, при следующих предположениях:

- (i) Ω – ограниченное (кубируемое) открытое множество в \mathbb{R}^3 ;
- (ii) ρ – ограниченная интегрируемая в Ω функция: $|\rho(\mathbf{y})| \leq M \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$;
- (iii) функция F двух аргументов $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ и $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ непрерывна при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и неограничена при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

Ясно, что интегралы (1.25) и (1.36) являются частными случаями несобственного интеграла (1.34). Основную роль при исследовании свойств несоб-

ственных интегралов вида (1.34) играет понятие равномерной сходимости интеграла в точке. Обозначим через $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ шар радиуса δ_0 с центром в \mathbf{x}_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Интеграл (1.34) называется равномерно сходящимся в точке $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, что: 1) J сходится в каждой точке $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0) \cap \bar{\Omega}$ и 2) неравенство*

$$\left| \int_{\omega_\delta \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < \varepsilon \quad (1.37)$$

выполняется для любой области ω_δ диаметра $\delta \leq \delta_0$, содержащей в себе точку \mathbf{x}_0 , и для любой точки \mathbf{x} , расстояние от которой до \mathbf{x}_0 меньше δ .

ЛЕММА 1.4. *(Достаточный признак равномерной сходимости). Пусть при выполнении условий (i)–(iii) существует такая окрестность $U(\mathbf{x}_0)$ точки \mathbf{x}_0 и такие константы $C > 0$ и $\lambda < 3$, что выполняется соотношение*

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \bar{\Omega}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (1.38)$$

Тогда интеграл (1.34) сходится равномерно в точке \mathbf{x}_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим шар $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, лежащий в упомянутой окрестности точки \mathbf{x}_0 . Тогда для любой области ω_δ диаметра $\delta \leq \delta_0$, содержащей в себе \mathbf{x}_0 , и любой точки $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ будет выполняться с учетом (ii) условие

$$\left| \int_{\omega_\delta \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \left| \int_{\omega_\delta \cap \Omega} |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right| \leq CM \int_{B_{2\delta_0}(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}. \quad (1.39)$$

Здесь $B_{2\delta_0}(\mathbf{x})$ – шар радиуса $2\delta_0$ с центром в точке \mathbf{x} .

Для вычисления интеграла в правой части (1.39) перейдем к сферическим координатам r, θ, φ с центром в \mathbf{x} . Учитывая, что $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, будем иметь

$$\int_{B_{2\delta_0}(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\delta_0} \frac{r^2}{r^\lambda} dr = 4\pi \int_0^{2\delta_0} r^{2-\lambda} dr = \frac{4\pi}{3-\lambda} (2\delta_0)^{3-\lambda}. \quad (1.40)$$

Из (1.39) и (1.40) следует, что при $\delta \leq \delta_0$

$$\left| \int_{\omega_\delta \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \frac{4\pi}{3-\lambda} (2\delta_0)^{3-\lambda}. \quad (1.41)$$

Так как $\lambda < 3$, то правая часть в (1.41) может быть сделана меньше любого ε путем выбора достаточно малого $\delta_0 > 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Отметим, что в случае двух измерений условие равномерной сходимости двойного несобственного интеграла вида (1.34) при $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ имеет также вид (1.38), но при $\lambda < 2$. Это же условие является условием равномерной сходимости несобственного поверхностного интеграла в \mathbb{R}^3 вида

$$\int_{\Gamma} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.42)$$

если Γ обладает определенной регулярностью, например, является поверхностью Ляпунова (см. § 2 гл. 7).

Ясно, что для интеграла (1.25) условие (1.38) выполняется при $\lambda = 1$. Далее, поскольку в силу (1.16) имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \right| \equiv \frac{|x_i - y_i|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \leq \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.43)$$

то для интегралов в (1.36) условие (1.38) выполняется при $\lambda = 2$. Поэтому все интегралы в (1.25) и (1.36) являются равномерно сходящимися в любой точке $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Аналогичный факт о равномерной сходимости справедлив с учетом замечания 1.4 и для потенциала простого слоя (1.26), имеющего вид (1.42), где функция F определяется формулой (1.35), поскольку для него достаточное условие равномерной сходимости (1.38) выполняется при $\lambda = 1$. Что касается потенциала двойного слоя (1.27), то с учетом соотношений (1.16) и (1.19) при $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_y$ имеем

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{n}_y \implies |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}. \quad (1.44)$$

Поэтому для него условие (1.38) выполняется лишь при $\lambda = 2$, чего не достаточно для равномерной сходимости несобственного поверхностного интеграла. Это не случайно, а связано с тем, что несобственный интеграл, определяющий потенциал двойного слоя (1.27) при $\mathbf{x} \in \Gamma$, не является сходящимся в соответствии с определением 1.3, хотя сходится как сингулярный интеграл в смысле определения 1.4 (см. § 2 гл. 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Аналогичным образом вводятся понятия несобственного и сингулярного интегралов в пространстве любого числа n измерений, а также понятие равномерной сходимости в точке n -мерного несобственного интеграла, зависящего от параметра \mathbf{x} . При этом достаточное условие равномерной сходимости имеет вид (1.38) при $\lambda < n$ для n -мерного аналога объемного интеграла вида (1.34) и вид (1.38) при $\lambda < n - 1$ для n -мерного

аналога поверхностного интеграла (1.42). Отсюда, в частности, вытекает с учетом свойств сингулярного решения E_n равномерная сходимость n -мерных объемного потенциала и потенциала простого слоя в (1.28). Последнее имеет место при указанном выше условии определенной регулярности поверхности Γ . Наконец, отметим, что при $n = 2$ достаточное условие равномерной сходимости имеет вид (1.38) при $\lambda < 2$ для двойного интеграла вида (1.34) и вид (1.38) при $\lambda < 1$ для криволинейного несобственного интеграла вида (1.44). Отсюда, с учетом очевидного неравенства

$$|\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\lambda} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

где Q – произвольное ограниченное множество в \mathbb{R}^2 , справедливого для любого числа $\lambda \in (0, 1)$ с некоторой константой $C = C(Q)$, вытекает равномерная сходимость логарифмического потенциала и логарифмического потенциала простого слоя в (1.29).

Использование понятия равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, позволяет установить ряд их свойств. В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть в условиях леммы 1.4 интеграл (1.34) сходится равномерно в точке $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$. Тогда интеграл (1.34) является непрерывной функцией в точке \mathbf{x}_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > \delta(\varepsilon)$, что для каждой точки $\mathbf{x} \in \Omega$, удовлетворяющей условию $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon. \quad (1.45)$$

Для доказательства этого факта возьмем шар $B_\delta \equiv B_\delta(\mathbf{x}_0)$ и разобьем каждый из интегралов $J(\mathbf{x})$ и $J(\mathbf{x}_0)$ на два слагаемых: по области $\Omega \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$ и по области $\Omega \setminus B_\delta(\mathbf{x}_0)$. С учетом этого будем иметь

$$\begin{aligned} |J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{\Omega} [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})] \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega \setminus B_\delta} [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})] \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{\Omega \cap B_\delta} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| + \\ &\quad \left| \int_{\Omega \cap B_\delta} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|. \end{aligned} \quad (1.46)$$

При достаточно малом $\delta > 0$ второе и третье слагаемые в правой части (1.46) будут меньше $\varepsilon/3$ в силу равномерной сходимости интеграла в точке

\mathbf{x}_0 , если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$. Выберем далее число $\delta' < (\delta/2)$ и предположим, что $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta'$. При выполнении этого условия первый интеграл в (1.46) является собственным. Поскольку F непрерывна при $\mathbf{y} \in \overline{\Omega \setminus B_\delta}$, то по свойству непрерывности собственного интеграла по параметру (см. теорему 1.1) первое слагаемое правой части (1.46) будет меньше $\varepsilon/3$, если \mathbf{x} выбрать достаточно близким к \mathbf{x}_0 . ■

Исследование дифференцируемости по параметру несобственного интеграла вида (1.34) требует проведения несколько более тонких рассуждений, на чем мы не будем здесь останавливаться. Интересующийся читатель может найти детальное исследование дифференцируемости и других свойств кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, в [50, лекция 7, §2], [16, гл.17].

§2. Формулы Грина

2.1. Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса и Грина. Важную роль при исследовании свойств решений эллиптических уравнений играют интегральные формулы Гаусса-Остроградского, Грина и Стокса. Поскольку доказательство указанных формул приводится в курсе математического анализа, то ограничимся здесь приведением соответствующих формулировок, следуя [19].

Напомним некоторые определения, связанные с областями и их границами. Говорят, что поверхность Γ (кривая при $n = 2$) принадлежит классу C^l , $l \in \mathbb{N}$, если в некоторой окрестности $B_r(\mathbf{x}_0)$ каждой точки $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ она описывается уравнением $F_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = 0$, где $F_{\mathbf{x}_0} \in C^l(B_r(\mathbf{x}_0))$, и при $l \geq 1$ $\text{grad} F'_{\mathbf{x}_0} \neq 0$. При $l \geq 1$ поверхность называется *гладкой*. Граница трехмерной области Ω называется *кусочно-гладкой*, если она составлена из конечного числа гладких поверхностей, примыкающих друг к другу по гладким кривым-ребрам поверхности. Если граница Γ состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей Γ_i , то Γ_i называют *связными компонентами* Γ . Ниже будем иметь дело с кратными, криволинейными, поверхностными интегралами, как собственными, так и несобственными либо сингулярными. Свойства указанных интегралов достаточно освещены в таких книгах как [16], [18], [19], [47], а также в § 1.

Пусть Ω – некоторое множество в пространстве \mathbb{R}^3 и $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – заданные в Ω функции. Предположим, что выполняются условия

(2a) Ω – ограниченное открытое множество с кусочно-гладкой границей Γ ;

(2б) $P, Q, R \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

В [19, с. 188] доказана теорема

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполняются условия (2a), (2б) и пусть существуют несобственные интегралы по Ω от каждой из частных произ-

водных функций P , Q и R . Тогда справедлива формула

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad (2.1)$$

называемая формулой Гаусса-Остроградского.

Здесь $d\mathbf{x} = dx dy dz$ – элемент объема, $d\sigma$ – элемент площади поверхности, α , β и γ – углы единичной внешней нормали \mathbf{n} к поверхности Γ с единичными ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} декартовой системы координат, соответственно. В векторной записи формула (2.1) имеет вид

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v_n d\sigma \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{v} (либо $\operatorname{div} \mathbf{v}$) – векторное (либо скалярное) поле, определяемые в декартовой системе координат формулами

$$\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Полагая в (2.1) $P = uv$, $Q = 0$, $R = 0$, будем иметь

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (uv) d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} uv \cos \alpha d\sigma.$$

Заменив здесь переменную x на произвольную декартову координату x_i , приходим к формуле

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} uv \cos(\mathbf{n}, x_i) d\sigma, \quad (2.4)$$

называемой формулой интегрирования по частям в \mathbb{R}^3 .

Полагая в (2.1) $P = u \partial v / \partial x$, $Q = u \partial v / \partial y$, $R = u \partial v / \partial z$, приходим к первой формуле Грина

$$\int_{\Omega} u \Delta v d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Здесь

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

а $\partial v / \partial n$ – производная по нормали, определяемая формулой

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{на } \Gamma.$$

Меняя в (2.5) местами u и v , будем иметь

$$\int_{\Omega} v \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Вычитая (2.6) из (2.5), приходим ко второй формуле Грина

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (2.7)$$

Из вывода формулы (2.4) и теоремы 2.1 следует, что формула интегрирования по частям (2.4) справедлива при выполнении условия (2а) на Ω и выполнении следующих условий на u и v :

$$(2в) \quad u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Точно так же формула Грина (2.5) (либо (2.6)) справедлива при выполнении условия (2а) на Ω и следующих условий на u и v :

$$(2г) \quad u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),$$

либо

$$(2д) \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Наконец, формула (2.7) справедлива при выполнении условия (2а) и условия

$$(2е) \quad u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Разумеется, еще одним дополнительным условием справедливости всех формул (2.4)–(2.7) является сходимость всех несобственных интегралов по области Ω , стоящих в этих формулах. Однако, если вместо условий (2в)–(2е) выполняются более жесткие условия:

$$(2в') \quad u \in C^1(\overline{\Omega}), \text{ либо } (2г') \quad u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad v \in C^2(\overline{\Omega}),$$

или

$$(2д') \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad v \in C^1(\overline{\Omega}), \text{ либо } (2е') \quad u, v \in C^2(\overline{\Omega}),$$

то тогда все несобственные интегралы, стоящие в формулах (2.4)–(2.7), переходят в собственные, так что указанное условие сходимости несобственных интегралов, естественно, снимается.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что согласно условию (2а) формулы Грина, а также формула (2.4) справедливы как для односвязных либо многосвязных областей, так и для несвязных множеств, состоящих из нескольких областей, т. е. связных открытых множеств. Точно так же граница Γ множества Ω может быть как связной, так и несвязной, т. е. состоящей из нескольких связных компонент. В последнем случае поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим Ω . Аналогичные формулы Грина имеют место как на плоскости \mathbb{R}^2 , так в пространстве \mathbb{R}^n любого числа измерений.

Пусть далее S – поверхность в \mathbb{R}^3 . Назовем ее *окрестностью* любое открытое множество, содержащее S . Предположим, что выполняются условия

(2ж) S – ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей Γ ;

(2з) функции P, Q, R непрерывны и непрерывно-дифференцируемы в некоторой окрестности поверхности S .

Тогда справедлива следующая теорема (см. [19, с. 182]):

ТЕОРЕМА 2.2 При выполнении условий (2ж), (2з) справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz, \end{aligned} \quad (2.8)$$

называемая *формулой Стокса*. При этом стоящий в правой части (2.8) интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы Γ , на которых указано положительное направление обхода (при котором с учетом выбора стороны поверхности поверхность S остается слева).

В векторной записи формула (2.8) имеет с учетом обозначений (2.3) вид

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (2.9)$$

Здесь \mathbf{t} – единичный вектор касательной в точках границы Γ поверхности S , ds – элемент длины дуги границы Γ , скаляр $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ называется *касательной* (или *тангенциальной*) компонентой векторного поля \mathbf{v} относительно граничной кривой Γ , тогда как $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ представляет собой ротор (или вихрь) векторного поля \mathbf{v} , определяемый в декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.10)$$

В соответствии с физическим смыслом поверхностного интеграла [19, с. 143] левая часть формулы (2.9) представляет собой *поток векторного поля* $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ через поверхность S . Правая часть в (2.9) носит название *циркуляции векторного поля* \mathbf{v} по кривой Γ . С учетом этого формула (2.9) по своему физическому смыслу означает, что *поток векторного поля* $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ *через поверхность* S *равен циркуляции векторного поля* \mathbf{v} *по кривой* Γ , *являющейся границей поверхности* S . Отметим при этом, что для заданной поверхности S граница Γ определяется однозначно. Однако для заданной границы

Γ можно подобрать бесконечное множество поверхностей S , имеющих своей границей кривую Γ , или, как говорят, натянутых на кривую Γ . Если считать первичной границу Γ , то тогда физический смысл формулы (2.9) заключается в том, что *циркуляция векторного поля по замкнутой кривой Γ равна потоку векторного поля $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ через любую кусочно-гладкую поверхность S , натянутую на границу Γ .*

Рассмотрим частный случай, когда S представляет собой плоское множество Ω , лежащее в плоскости x, y , причем $R = 0$, а функции P и Q не зависят от координаты z . В таком случае формула (2.8) переходит в формулу

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy, \quad (2.11)$$

называемую (плоской) *формулой Грина*. Более точно, справедлива следующая теорема (см. [19, с. 170]).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть плоское множество Ω удовлетворяет условию (2а), а функции P и Q непрерывны в $\bar{\Omega}$ и непрерывно дифференцируемы в Ω . Если существуют несобственные интегралы по Ω от каждой из частных производных функций P и Q , то справедлива формула (2.11), называемая *формулой Грина*. При этом стоящий в правой части (2.11) интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы Γ , на которых указано такое направление обхода, при котором Ω остается слева.

Напомним, что под ротором двумерного векторного поля $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ понимают либо вектор $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, определяемый в декартовой системе координат формулой $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) \mathbf{k}$ (указанный вектор направлен перпендикулярно плоскости x, y), либо просто скаляр $\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y$ (который также называют *завихренностью*), где P и Q – компоненты разложения вектора \mathbf{v} по декартовому базису. С использованием последней интерпретации формулу (2.11) можно переписать в следующем “векторном” виде $\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} dx dy = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим две особенности приведенных выше формул Грина (2.5)–(2.7), Гаусса-Остроградского (2.2) и Стокса (2.9). Прежде всего они записаны в *инвариантном* виде, поскольку в их формулировках участвуют инвариантные, т. е. не зависящие от выбора системы координат в области Ω операторы: лапласиан Δ , градиент ∇ , производная по нормали $\partial / \partial n$, дивергенция div и ротор rot . Во-вторых, указанные формулы, кроме формулы (2.9), справедливы не только в \mathbb{R}^3 , но и на плоскости \mathbb{R}^2 , а также в пространстве \mathbb{R}^n . То же относится к формуле (2.4). Мы напомним лишь, что в \mathbb{R}^n указанные операторы определяются в декартовой системе

координат x_1, x_2, \dots, x_n формулами

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} n_n.$$

Здесь v_1, v_2, \dots, v_n либо (n_1, n_2, \dots, n_n) – компоненты вектора \mathbf{v} (либо \mathbf{n}) в декартовом базисе. Что касается формулы Стокса (2.9), то ее можно считать справедливой лишь для пространства \mathbb{R}^3 либо плоскости \mathbb{R}^2 , поскольку именно в этих случаях определен оператор rot . В принципе, можно определить некий аналог оператора rot и в \mathbb{R}^n при $n \geq 4$ и выписать некий n -мерный аналог формулы Стокса (2.9). Однако ниже указанная формула нам не потребуется.

2.2. Интегральное представление функции из класса C^2 .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть Ω – ограниченная область пространства \mathbb{R}^3 с кусочно-гладкой границей Γ , $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, и пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ такова, что для любой точки $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ существует несобственный интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Тогда справедлива формула

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

называемая интегральным представлением Грина функции из класса C^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Вырежем из области Ω шар $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ достаточно малого радиуса ε с центром в точке \mathbf{x}_0 и обозначим через Ω_ε оставшуюся часть области, а через S_ε – поверхность шара $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ (см. рис. 2.1а).

Применяя вторую формулу Грина (2.7) к функциям u и $v = 1/r$, где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, в области Ω_ε , будем иметь с учетом гармоничности функции v в Ω_ε , вытекающей из леммы 1.1:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x + \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x. \quad (2.13)$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к области Ω_ε , $\partial u / \partial n$ – производная по внешней нормали \mathbf{n} . Индекс “ x ” в дифференциале $d\sigma_x$ в поверхностном интеграле означает, что в поверхностном интеграле интегрирование проводится по переменной \mathbf{x} , а не по \mathbf{x}_0 . Перейдем теперь в (2.13) к

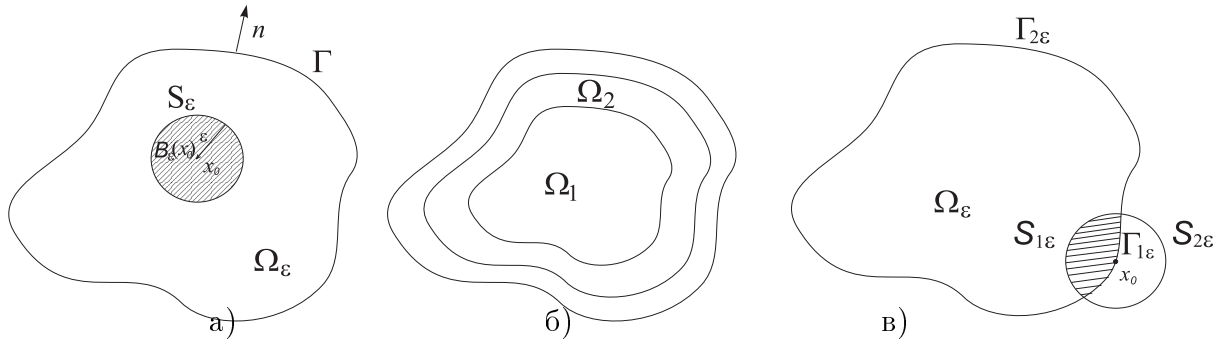


Рис. 2.1

пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Интеграл в левой части (2.13) переходит в соответствующий (несобственный) интеграл по всей области Ω , который существует по условию теоремы. Первое слагаемое в правой части (2.13) от ε не зависит. Покажем, что второе слагаемое в правой части (2.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $-4\pi u(\mathbf{x}_0)$.

Действительно, на сфере S_ε направление внешней нормали \mathbf{n} в точке \mathbf{x} противоположно направлению вектора $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, причем $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \implies \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \Big|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad (2.14)$$

так что

$$I_1(\mathbf{x}_0) \equiv \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u d\sigma. \quad (2.15)$$

Напомним, что в силу предположений теоремы 2.4 $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Применим с учетом этого к правой части (2.15) теорему о среднем значении. Учитывая, что площадь сферы S_ε равна $4\pi\varepsilon^2$, получим в итоге, что $I_1(\mathbf{x}_0) = 4\pi u(\mathbf{x}_\varepsilon)$, где \mathbf{x}_ε — некоторая точка на сфере S_ε . Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим в силу непрерывности функции u , что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\mathbf{x}_0) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} d\sigma = 4\pi u(\mathbf{x}_0). \quad (2.16)$$

Поскольку $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то найдется такая постоянная $C > 0$, что $|\partial u / \partial n| \leq C$ на $\overline{\Omega}$. Но тогда имеем

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} d\sigma \right| \leq C \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} d\sigma = 4\pi C \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

В результате, переходя в (2.13) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим с учетом (2.16), (2.17) к формуле (2.12).

Напомним, что формула (2.12) доказана при дополнительном предположении, что $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Чтобы избавиться от него, построим, как в [11, с. 367], последовательность *гладких* областей $\Omega^{(n)} \subset \Omega$, стремящихся к Ω при $n \rightarrow \infty$ (см. рис. 2.1б). Применяя формулу (2.12) в области $\Omega^{(n)}$ и переходя к пределу при $\Omega^{(n)} \rightarrow \Omega$, получим требуемый результат. ■

Напомним, что в формуле (2.12) предполагается, что точка \mathbf{x}_0 находится внутри Ω . Если \mathbf{x}_0 находится вне $\bar{\Omega}$, то тогда $v \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\Delta v = 0$ в Ω . Поэтому применяя формулу (2.7) к функциям u и $v = 1/r$, приходим к формуле

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) d\sigma_x - \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x} = 0. \quad (2.18)$$

Рассмотрим, далее, случай, когда $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$. Предположим, что в окрестности точки \mathbf{x}_0 поверхность Γ является гладкой, например, $\Gamma \in C^1$, т. е. Γ имеет касательную плоскость с непрерывно меняющимися угловыми коэффициентами. Построим сферу $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке \mathbf{x}_0 . Ясно, что поверхность Γ делит ее на две части: $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$, где $S_{1\varepsilon}$ лежит внутри Ω , а $S_{2\varepsilon}$ — вне Ω . Точно так же сама сфера S_ε делит поверхность Γ на две части: внешнюю $\Gamma_{2\varepsilon}$ к S_ε и внутреннюю $\Gamma_{1\varepsilon}$ (см. рис. 2.1в). Обозначим через Ω_ε подобласть области Ω , ограниченную куском $\Gamma_{2\varepsilon}$ и частью $S_{1\varepsilon}$ сферы, лежащей внутри Ω . Применяя формулу (2.7) к функциям u и $v = 1/r$ в области Ω_ε , получим

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x + \int_{S_{1\varepsilon}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x. \quad (2.19)$$

Перейдем в (2.19) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Интеграл по Ω_ε в левой части (2.19) стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к соответствующему несобственному интегралу по области Ω . Интеграл в правой части по $\Gamma_{2\varepsilon}$ переходит при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соответствующий (*сингулярный*) поверхностный интеграл по границе Γ . Второй интеграл в правой части (2.19), как легко проверить с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям теоремы 2.4, стремится к $-2\pi u(\mathbf{x}_0)$. Поэтому в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к формуле, получающейся из (2.12) заменой в ней 4π на 2π .

Объединяя все три случая, приходим к следующей общей формуле

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Здесь

$$C = C(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_0 \in \Omega, \\ c(\mathbf{x}_0), & \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega, \\ 0, & \mathbf{x}_0 \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (2.21)$$

где $c(\mathbf{x}_0) \in [0, 1]$ – некоторая постоянная, значение которой в точке \mathbf{x}_0 зависит от свойств границы в окрестности точки \mathbf{x}_0 . В частности, $c(\mathbf{x}_0) = 1/2$, если \mathbf{x}_0 лежит внутри гладкого куска границы Γ . Если же \mathbf{x}_0 является конической точкой поверхности Γ , т. е. в окрестности точки \mathbf{x}_0 поверхность Γ имеет вид конуса с вершиной в точке \mathbf{x}_0 , то тогда $c(\mathbf{x}_0) = \alpha/4\pi$, где α – величина телесного угла, образованного касательными к Γ в точке x_0 [35, с. 287].

Отметим также, что для гармонической в Ω функции u формула (2.20) принимает вид

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.22)$$

В частном случае, когда $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, формула (2.22) переходит в формулу

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.23)$$

Аналогичные формулы справедливы на плоскости \mathbb{R}^2 и в пространстве \mathbb{R}^n любого числа измерений. Чтобы вывести соответствующие формулы, достаточно положить во второй формуле Грина $v(\mathbf{x}) = \ln(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$, где $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – расстояние от \mathbf{x} до точки \mathbf{x}_0 на плоскости, либо $v(\mathbf{x}) = 1/(\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{n-2})$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$ в случае $n \geq 3$ измерений, где ω_n – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n (см. § 1), и повторить проведенные выше рассуждения. В результате приходим к следующей интегральной формуле

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x} \quad (2.24)$$

на плоскости \mathbb{R}^2 и интегральной формуле

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{n-2}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{n-2}} \right] d\sigma_x -$$

$$-\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{n-2}} d\mathbf{x} \quad (2.25)$$

в пространстве \mathbb{R}^n . В обеих формулах константа C определяется одним и тем же соотношением (2.21), где постоянная $c(\mathbf{x}_0)$ имеет указанный выше смысл. В частности, $c(\mathbf{x}_0) = 1/2$, если \mathbf{x}_0 принадлежит гладкому куску границы Γ . Если u – гармоническая в Ω функция, то, например, формула (2.24) принимает вид

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.26)$$

Если, кроме того, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, то формула (2.26) принимает вид

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим, что некоторые интегралы, входящие в полученные выше формулы, являются *несобственными* или *сингулярными*. Поэтому все приведенные формулы следует понимать так, что при выполнении условий теоремы 2.4 существуют все несобственные либо сингулярные интегралы, входящие в эти формулы, а с другой стороны, справедливы все эти формулы.

§3. Простейшие свойства гармонических функций

3.1. Случай функций одной переменной. В случае одного измерения ($n = 1$) уравнение Лапласа (1.2) принимает вид $u'' = 0$. Общим решением этого уравнения является линейная функция $u(x) = C_1x + C_2$. Поэтому, если назвать гармонической функцией одной переменной x , изменяющейся в интервале (a, b) , функцию $u \in C^2(a, b)$, являющуюся решением уравнения $u'' = 0$, то такое определение “гармонической” функции эквивалентно определению линейной функции. Отсюда проистекают основные свойства “гармонических” функций одной переменной x . Перечислим их.

1) Если принять за направление внешней нормали \mathbf{n} к границе отрезка $[a, b]$ на оси x в точке b направление этого отрезка, а в точке a – противоположное направление, то для любой линейной функции сумма значений первых производных этой функции по направлению \mathbf{n} в концах отрезка равна нулю, т. е.

$$\frac{du(a)}{dn} + \frac{du(b)}{dn} = \frac{du(a)}{d(-x)} + \frac{du(b)}{dx} = 0. \quad (3.1)$$

2) Функция u , линейная (гармоническая) в (a, b) , бесконечно дифференцируема и аналитична внутри (a, b) .

3) Для линейной на (a, b) функции u ее значение в центре $(\alpha + \beta)/2$ любого интервала $[\alpha, \beta]$, лежащего внутри (a, b) , равно среднему значению функции u на $[\alpha, \beta]$, а также среднему арифметическому значений функции u на концах интервала $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$u\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx = \frac{u(\alpha) + u(\beta)}{2}.$$

Важно отметить, что всякая непрерывная в интервале (a, b) функция u , обладающая одним из указанных свойств в 3), линейна на (a, b) .

4) Линейная на (a, b) функция не может принимать свое наибольшее или наименьшее значения внутри интервала (a, b) , за исключением того случая, когда $u(x) \equiv \text{const}$.

5) Линейная на (a, b) функция, непрерывная на $[a, b]$, однозначно определяется своими значениями в концах $x = a$ и $x = b$ этого интервала.

Эти свойства распространяются и на гармонические функции в \mathbb{R}^n .

3.2. Основные свойства гармонических функций в пространстве \mathbb{R}^n . Основываясь на интегральных формулах § 2, выведем здесь ряд основных свойств гармонических функций, рассматриваемых в пространстве \mathbb{R}^n n измерений. Обозначим через $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ произвольное открытое множество с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обычно мы будем предполагать, что Ω *связно*, т. е. что Ω – область. В случае, когда Ω – ограниченная область,

наряду с Ω будем также рассматривать неограниченное (внешнее по отношению к Ω) множество $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. В зависимости от свойств Ω множество Ω_e может являться областью, т. е. связным открытым множеством, как на рис. 3.1а, так и не связным множеством.

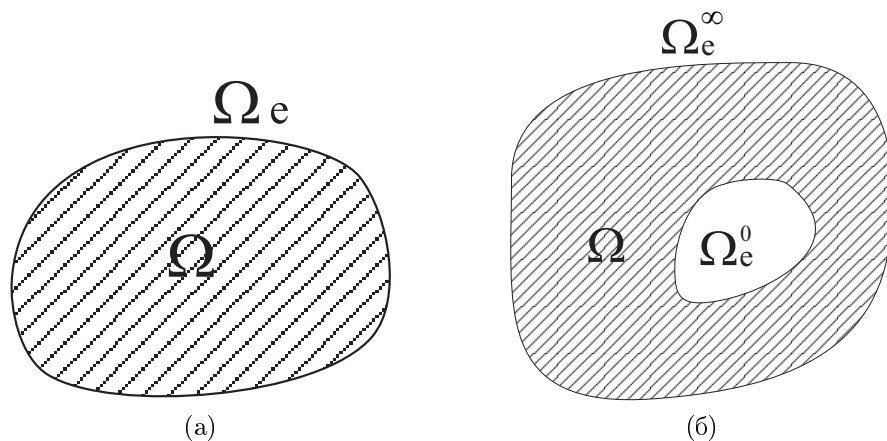


Рис. 3.1

Последнее имеет место, например, в случае, когда Ω имеет вид шарового слоя в \mathbb{R}^3 или кольца в \mathbb{R}^2 (см. рис. 3.1б). Видно, что в последнем случае Ω_e состоит из двух связных компонент: ограниченной области Ω_e^0 и неограниченной области Ω_e^∞ . В общем случае Ω_e может состоять из нескольких связных компонент, одна из которых Ω_e^∞ необходимо является неограниченной. Для краткости мы будем часто ссылаться на Ω_e как на область, понимая в случае необходимости под Ω_e именно указанную неограниченную связную компоненту. Будем также использовать обозначение $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$ и понимать под $C^k(\overline{\Omega}_e)$ пространство функций в Ω_e , непрерывных вместе со всеми производными до порядка k включительно в каждой точке $\Omega \cup \Gamma_e$. Отметим, что условие принадлежности $u \in C^k(\overline{\Omega}_e)$ не накладывает каких-либо ограничений на поведение функции $u(\mathbf{x})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим для конкретности случай трех измерений.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^3 с кусочно-гладкой границей Γ . Если $u \in C^1(\overline{\Omega})$ – гармоническая в области Ω функция, то

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (3.2) достаточно применить первую формулу Грина (2.6) к указанной функции u и функции $v \equiv 1$.

ТЕОРЕМА 3.2. Функция u , гармоническая в области Ω , имеет производные всех порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в Ω . Любая производная от гармонической в Ω функции является гармонической функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку \mathbf{x}_0 внутри Ω и окружим ее гладкой поверхностью $\Gamma' \subset \Omega$. Так как u гармонична в Ω , то u и подавно гармонична внутри Γ' . Кроме того, u дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы Γ' . Применяя формулу (2.23) для области, лежащей внутри Γ' , получим

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (3.3)$$

Так как $\mathbf{x}_0 \notin \Gamma'$, то функция $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ как функция декартовых координат x_0, y_0, z_0 точки \mathbf{x}_0 непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка. Следовательно, правую часть в (3.3) можно дифференцировать по координатам x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла сколько угодно раз. То же самое справедливо и для левой части. Это означает, что функция u бесконечно дифференцируема. Второе утверждение является следствием первого утверждения и линейности оператора Лапласа. ■

ТЕОРЕМА 3.3 (теорема о среднем значении). *Если функция u гармонична в некоторой области Ω , то в любой точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ справедлива формула*

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) d\sigma, \quad (3.4)$$

называемая формулой о среднем значении для гармонической функции. Здесь Γ_a – сфера радиуса a с центром в точке \mathbf{x}_0 , целиком лежащая в области Ω .

Это свойство утверждает, другими словами, что значение гармонической в области Ω функции в произвольной точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ равно среднему значению этой функции на любой сфере Γ_a радиуса a с центром в \mathbf{x}_0 , если сфера Γ_a целиком содержится в области гармоничности функции u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу (2.23) к шару $B_a \equiv B_a(\mathbf{x}_0)$ радиуса a с центром в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ с границей Γ_a . Будем иметь

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_a} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma. \quad (3.5)$$

Учитывая в силу теоремы 3.1, что $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = a$ на Γ_a ,

$$\int_{\Gamma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{на } \Gamma_a,$$

из (3.5) приходим к формуле (3.4). ■

Полагая $a = \rho$, запишем (3.4) в виде

$$4\pi\rho^2 u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Gamma_\rho} u(\mathbf{x}) d\sigma \quad (3.6)$$

и проинтегрируем полученное равенство по ρ от 0 до a . Получим

$$\frac{4}{3}\pi a^3 u(\mathbf{x}_0) = \int_0^a \left[\int_{\Gamma_\rho} u(\mathbf{x}) d\sigma \right] d\rho = \int_{B_a} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

или

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{V_a} \int_{B_a} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) имеет смысл *формулы о среднем значении по шару* для гармонической в шаре функции u .

ТЕОРЕМА 3.4 (принцип максимума). *Функция u , гармоническая внутри ограниченной области Ω , не может достигать своего наибольшего и наименьшего значений внутри области Ω , кроме случая, когда $u \equiv \text{const}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция u принимает свое максимальное значение u_0 в некоторой внутренней точке \mathbf{x}_0 области Ω , так что

$$u_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) \geq u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Окружим точку \mathbf{x}_0 сферой Γ_a малого радиуса a , целиком лежащей в Ω , и применим к функции u формулу среднего значения (3.4). Учитывая (3.9), получим

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) d\sigma \leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u_0 d\sigma = u_0. \quad (3.10)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке \mathbf{x} сферы Γ_a выполняется условие $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$, то в силу непрерывности функции u на Γ_a в формуле (3.10) вместо знака \leq мы имели бы знак строгого неравенства $<$. Последнее противоречит предположению $u_0 = u(\mathbf{x}_0)$. Следовательно,

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) = u_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_a. \quad (3.11)$$

Из произвольности радиуса a следует, что в предположении выполнения условия (3.9) функция u тождественно равна константе u_0 внутри и на границе всякого шара с центром в точке \mathbf{x}_0 , целиком лежащего внутри области Ω .

Покажем, более того, что $u(\mathbf{x}) = u_0$ всюду в Ω . Пусть $\mathbf{y} \in \Omega$ – произвольная точка. Соединим \mathbf{x}_0 с \mathbf{y} ломаной линией l , лежащей внутри Ω .

Это возможно, поскольку Ω – область. Пусть d – кратчайшее расстояние от ломаной l до границы Γ области Ω (см. рис.3.2). В силу доказанного выше $u(\mathbf{x})$ равна постоянной u_0 в шаре с центром в \mathbf{x}_0 и радиуса $d/2$. Пусть \mathbf{x}_1 – крайняя точка пересечения ломаной l с границей упомянутого шара. Ясно, что $u(\mathbf{x}_1) = u_0$ и по доказанному выше $u(\mathbf{x}) = u_0$ в шаре с центром \mathbf{x}_1 и радиуса $d/2$. Пусть \mathbf{x}_2 – крайняя точка пересечения l с границей этого шара. Как и выше, убеждаемся, что $u(\mathbf{x}) = u_0$ в шаре с центром в точке \mathbf{x}_2 радиуса $d/2$, и т. д. После конечного числа шагов вся линия l будет покрыта указанными шарами. Точка \mathbf{y} окажется внутри некоторого шара, откуда и будет следовать, что $u(\mathbf{y}) = u_0$. Тем самым доказано, что если u не равна тождественно постоянной, то ее наибольшее значение не может достигаться внутри Ω . Аналогично доказывается, что внутри Ω функция u не может принимать и наименьшего значения. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.

Фактически из доказательства принципа максимума вытекает более сильный факт о том, что гармоническая в Ω функция не может принимать внутри области Ω ни локальных максимумов, ни локальных минимумов.

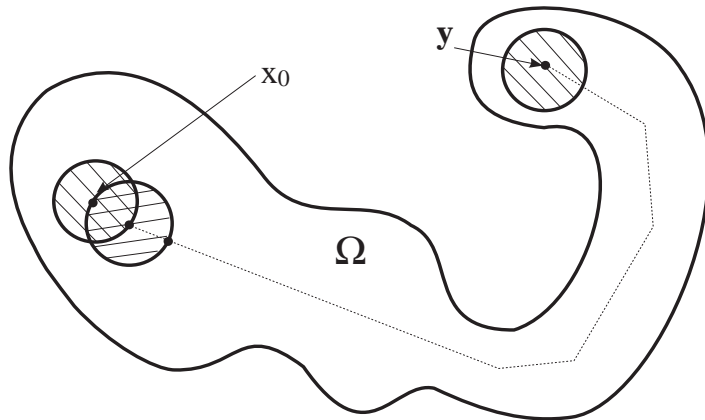


Рис. 3.2

Полезно обратить внимание на то, что при доказательстве всех приведенных выше свойств гармонических функций мы использовали разные дополнительные условия, касающиеся поведения рассматриваемых функций на границе. Так, при доказательстве теоремы 3.1 мы потребовали, чтобы функция u была непрерывно дифференцируема вплоть до границы Γ , которая, к тому же, является кусочно гладкой. Эти условия необходимы для того, чтобы можно было воспользоваться формулой Грина (2.6).

В то же время теоремы 3.2 и 3.3 справедливы и для несвязных неограниченных в общем случае открытых множеств, поскольку они носят локальный характер. Наконец, для справедливости теоремы 3.4 существенны как ограниченность, так и связность множества Ω . В частности, она не справедлива для множества $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 – два непересекающихся шара. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять функцию u , равную 1 в Ω_1 и 2 в Ω_2 . Указанная функция u гармонична в Ω , принимает свое наименьшее значение, равное 1, в любой внутренней точке шара Ω_1 , а

наибольшее значение, равное 2, в любой внутренней точке шара Ω_2 , но не равна тождественной константе всюду в Ω .

Обозначим через $H(\Omega)$ множество гармонических в ограниченной области Ω функций. Из теоремы 3.4 вытекает ряд полезных следствий для функций $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, т. е. функций $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, гармонических в области Ω и непрерывных в ее замыкании $\overline{\Omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Функция $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, отличная от константы, достигает своего наибольшего и наименьшего значений лишь на границе Γ :*

$$m \equiv \min_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x}) \equiv M \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.12)$$

Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса [18, с. 476] непрерывная в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$ функция u necessarily достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений. В то же время, поскольку u гармонична в Ω , то в силу принципа максимума функция u не может достигать значений M и m внутри Ω . Поэтому ей ничего не остается делать кроме того, как достигать значений M и m на границе Γ области Ω . ■

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Если функция $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ равна нулю на Γ , то $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ в Ω .*

Действительно, наибольшее и наименьшее значения u на Ω равны нулю, и, следовательно, $u = 0$ на $\overline{\Omega}$. ■

СЛЕДСТВИЕ 3.3 *Если функция $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ неотрицательна на Γ , то u неотрицательна и внутри Ω .*

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Если функции $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ удовлетворяют условию $u \leq v$ на Γ , то $u \leq v$ на $\overline{\Omega}$.*

Действительно, функция $v - u$ гармонична в Ω , непрерывна на $\overline{\Omega}$ и неотрицательна на Γ . Следовательно, в силу следствия 3.3 $v - u \geq 0$ на $\overline{\Omega}$. ■

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Пусть $v \geq 0$ и пусть функции $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, причем*

$$|u| \leq v \text{ на } \Gamma. \quad (3.13)$$

Тогда $|u| \leq v$ на $\overline{\Omega}$.

Действительно, неравенство (3.13) эквивалентно условию $-v \leq u \leq v$ на Γ . Применяя дважды следствие 3.4, получим, что $-v \leq u \leq v$ на $\overline{\Omega}$. Следовательно, $|u| \leq v$ на $\overline{\Omega}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Гармоническая функция v , фигурирующая в утверждении следствия 3.5, называется *гармонической мажорантой* гармонической в Ω функции u на границе Γ , а само доказательство следствия 3.5 является простейшим примером применения так называемого *метода гармонических мажорант*. Сущность этого метода изучения свойств гармонических функций состоит в построении вспомогательной гармонической функции, являющейся гармонической мажорантой исследуемой гармонической функции u на границе рассматриваемой области, и установлении

необходимых свойств функции u , исходя из свойств ее гармонической мажоранты и принципа максимума. Ниже мы будем неоднократно использовать этот метод.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Для любой функции $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \quad (3.14)$$

Для доказательства соотношения (3.14) достаточно заметить, что константа $M = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})|$ является гармонической мажорантой функции u на границе Γ , а следовательно, в силу следствия 3.5, и всюду в $\overline{\Omega}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Следствия 3.5 и 3.6 справедливы и для множества Ω , являющегося конечной суммой непересекающихся ограниченных областей.

Подчеркнем что приведенные в этом пункте свойства гармонических функций, доказанные нами для случая трех измерений, на самом деле справедливы в пространстве \mathbb{R}^n любого числа $n \geq 2$ измерений и доказываются совершенно по аналогичной схеме. Отметим, в частности, что формулы о среднем значении (3.4) и (3.8) в случае двух измерений принимают вид

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) ds, \quad u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\pi a^2} \int_{K_a} u(\mathbf{x}) dx dy. \quad (3.15)$$

Здесь Γ_a (либо K_a) – окружность (либо круг) радиуса a с центром в точке \mathbf{x}_0 , ds – элемент длины дуги границы Γ . Отметим также, что приведенные выше результаты, касающиеся принципа максимума для решений уравнения Лапласа можно перенести (с небольшими изменениями) на классические решения общего эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f \quad (3.16)$$

при некоторых условиях на коэффициенты a_{ij} , b_i и c (см., например, [58, гл. 1]).

3.3. Единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа. Докажем в качестве следствия приведенных выше свойств гармонических функций единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (3.17)$$

Под *внутренней задачей Дирихле* мы понимаем задачу нахождения в ограниченной области Ω функции u из пространства $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей уравнению (3.17) в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ и условию Дирихле

$$u = g \text{ на } \Gamma. \quad (3.18)$$

Здесь $g \in C(\Gamma)$ – заданная функция. Ясно, что указанная функция u имеет смысл классического решения задачи (3.17), (3.18). Под *внешней задачей Дирихле* мы понимаем задачу нахождения в неограниченной области Ω_e функции (классического решения) u из пространства $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$, удовлетворяющей уравнению Лапласа (3.17) в Ω_e , условию Дирихле (3.18) и условию *регулярности на бесконечности*. В том случае, когда Ω_e есть внешность ограниченного открытого множества Ω , т. е. $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, условие регулярности имеет вид

$$|u(\mathbf{x})| = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

в случае $n \geq 3$ измерений и вид

$$|u(\mathbf{x})| = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

в случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Условие (3.19) означает, что $u(\mathbf{x})$ равномерно стремится к нулю при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, тогда как условие (3.20) эквивалентно условию ограниченности решения u при больших \mathbf{x} , а следовательно, в силу непрерывности в $\overline{\Omega_e}$, и всюду в Ω_e . Таким образом, основное отличие в постановке внешних задач Дирихле для \mathbb{R}^n при $n \geq 3$ и \mathbb{R}^2 связано с поведением решения на бесконечности.

Прежде, чем приступить к доказательству единственности решений внутренней и внешней задач Дирихле, докажем следующую лемму, обобщающую принцип максимума для гармонических функций в форме (3.14) на случай неограниченной области $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$.

ЛЕММА 3.1. Пусть функция $u \in C^2(\Omega_e)$ удовлетворяет уравнению (3.17) в области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, условию (3.19) и непрерывна на $\overline{\Omega_e}$. Тогда для функции u в области Ω_e справедлив принцип максимума в следующей форме

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega_e}, \quad \Gamma = \partial\Omega. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})|$. Обозначим через B_R шар радиуса R с центром в начале координат. В силу ограниченности Ω и условия (3.19) радиус R можно выбрать так, что $\Omega \subset B_R$ и выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| < M \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R. \quad (3.22)$$

Введем ограниченную подобласть области Ω_e по формуле

$$\Omega_R = \Omega_e \cap B_R = B_R \setminus \overline{\Omega}. \quad (3.23)$$

Из свойств функции u вытекает, что на границе $\partial\Omega_R = \Gamma \cup \Gamma_R$, где $\Gamma_R = \partial B_R$, выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq M, \quad (3.24)$$

так что константа M является гармонической мажорантой функции u в Ω_R , причем $|u(\mathbf{x})| < M$ на Γ_R . Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (3.24) выполняется всюду в Ω_R . Отсюда и (3.22) вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Подчеркнем, что для внешней области принцип максимума справедлив именно в форме (3.21), являющейся аналогом на случай неограниченной области соотношения (3.14), справедливого для ограниченной области Ω . В то же время “чистый” принцип максимума вида (3.12) для неограниченной области уже не справедлив. В этом можно убедиться на примере функции $u(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$, гармонической вне шара B_1 радиуса 1, непрерывной в $\mathbb{R}^3 \setminus B_1$, равной 1 на границе этого шара, но принимающей значения, меньшие 1 при $|\mathbf{x}| > 1$. Еще один пример дает функция $-1/|\mathbf{x}|$.

ЛЕММА 3.2. *Решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ внутренней задачи Дирихле либо $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$ внешней задачи Дирихле в \mathbb{R}^3 единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Предположим, что она имеет два решения: u_1 и u_2 . Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ является гармонической функцией, непрерывной на $\overline{\Omega}$ и равной нулю на Γ . Отсюда в силу следствия 3.2 вытекает, что $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ на $\overline{\Omega} \Rightarrow u_1 = u_2$ на $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле. Как и выше, предположим, что существуют два решения: u_1 и u_2 . Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в Ω_e и условию регулярности (3.19) на бесконечности, т. е. является функцией, гармонической в Ω_e . Кроме того, она непрерывна на $\overline{\Omega}_e$ и равна нулю на Γ . Отсюда в силу леммы 3.1 вытекает, что $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ на $\overline{\Omega}_e \Rightarrow u_1 = u_2$ на Ω_e . ■

Отметим, что леммы 3.1 и 3.2 справедливы в пространстве \mathbb{R}^n любого числа $n \geq 3$ измерений. Рассмотрим теперь случай двух измерений.

ЛЕММА 3.3. *Решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ внутренней задачи Дирихле, либо $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$ внешней задачи Дирихле в \mathbb{R}^2 единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для внутренней задачи Дирихле доказательство единственности проводится по той же схеме, что и в трехмерном случае. Для внешней задачи Дирихле используемые выше рассуждения не применимы, поскольку они существенно используют условие (3.19) равномерного стремления к нулю решения на бесконечности. В то же время в постановку двумерной внешней задачи входит лишь условие (3.20) ограниченности на бесконечности. С учетом этого нам придется провести более тонкие рассуждения, основанные на построении гармонической мажоранты для разности двух возможных решений.

Предположим, что существуют два решения u_1 и u_2 задачи (3.17), (3.18), (3.20). Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ является гармонической функцией, непрерывной в $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$, равной нулю на Γ и ограниченной всюду в Ω_e , так что выполняется условие $|u(\mathbf{x})| \leq M \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_e$. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \Omega_e$

– произвольная точка. Вспомнив, что Ω_e является внешностью открытого ограниченного множества Ω , выберем в Ω произвольным образом точку \mathbf{x}_0 и построим две окружности с центром в точке \mathbf{x}_0 : окружность Γ_r малого радиуса r , целиком содержащуюся в Ω , и окружность Γ_R достаточно большого радиуса, целиком содержащую Ω и \mathbf{x}_0 внутри себя (см. рис. 3.3).

Как и выше, обозначим через Ω_R область, ограниченную границей Γ и окружностью Γ_R . Следуя [56, с. 324], рассмотрим в области Ω_R вспомогательную функцию v_R , определенную формулой

$$v_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = M \frac{\ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/r)}{\ln(R/r)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_R. \quad (3.25)$$

Из результатов §1 вытекает, что функция v_R гармонична в Ω_R . Кроме того, она непрерывна в $\overline{\Omega}_R$, равна M на Γ_R и положительна на Γ . Последнее

вытекает из того факта, что в каждой точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ выполняется условие $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > r$. Из принципа максимума вытекает тогда, что v_R положительна в Ω_R , а из свойств функции u вытекает, что на границе $\partial\Omega_R = \Gamma \cup \Gamma_R$ выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq v_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (3.26)$$

так что v_R является гармонической мажорантой функции u на $\partial\Omega_R$. Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (3.26) выполняется и в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega_R$.

Станем увеличивать радиус R . Из свойств функции v_R вытекает, что

$$v_R(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Учитывая (3.27) и (3.26), приходим к выводу, что $u(\mathbf{x}^0) = 0$. Из произвольности точки $\mathbf{x}^0 \in \Omega_e$ следует, что $u(\mathbf{x}) = 0$ в $\Omega_e \Rightarrow u_1 = u_2$ ■.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. При доказательстве лемм 3.1–3.3 неявно предполагалось, что Ω_e является (неограниченной) областью. Отметим, что в силу замечания 3.4 утверждения этих лемм остаются справедливыми и в случае, когда Ω_e состоит из нескольких связных компонент (как на рис. 3.1б).

Единственность решения u внешней задачи Дирихле в \mathbb{R}^2 можно установить и другим способом, используя известное *преобразование Кельвина* относительно окружности Γ_R . Оно переводит функцию, гармоническую вне круга K_R , в функцию, гармоническую в области $K_R \setminus \{0\}$. Основываясь на этом подходе, можно получить следующие более общие результаты (см. [11, с. 373]).

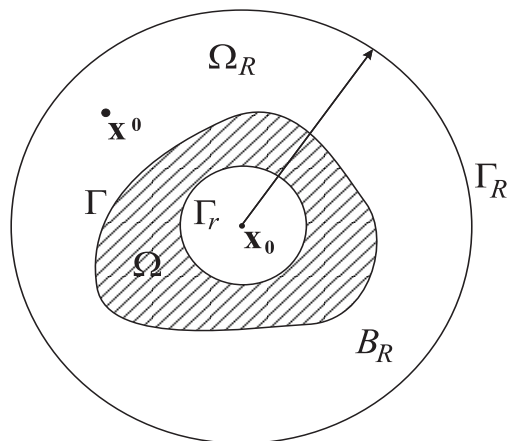


Рис. 3.3

ЛЕММА 3.4. Пусть функция u удовлетворяет уравнению (3.17) в области $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, условию (3.20) и непрерывна на $\overline{\Omega}_e$. Тогда для функции u в области Ω_e справедлив принцип максимума в следующей форме

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (3.28)$$

функция u непрерывна на бесконечности, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = u_\infty, \quad (3.29)$$

а ее производные удовлетворяют следующему условию на бесконечности

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right| = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Отметим, что если единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле в \mathbb{R}^3 доказывается сравнительно просто на основе принципа максимума, то доказательство существования классических решений каждой из этих задач представляется значительно более сложным делом, особенно для внешней задачи, и требует использования специального аппарата. Одним из широко используемых для этого методов является метод граничных интегральных уравнений. Сущность его будет изложена в гл. 7. Важно отметить, что использование этого метода позволяет доказать существование решения внешней задачи в том же классе функций, удовлетворяющих условию (3.19) на бесконечности, в котором доказана единственность решения. В этом смысле условие (3.19) можно считать естественным условием для корректной постановки внешней краевой задачи в \mathbb{R}^3 . Аналогичную роль в двумерном случае играет условие (3.20) ограниченности на бесконечности, поскольку именно в классе функций, удовлетворяющих условию (3.20), удается доказать как единственность (см. лемму 3.3), так и существование классического решения.

§4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и вне круга методом Фурье

4.1. Постановка краевых задач. Применение метода Фурье. Пусть $\Omega = \Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$ – круг радиуса a , $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Рассмотрим две задачи: задачу 1 (внутреннюю задачу Дирихле), заключающуюся в нахождении решения уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (4.1)$$

в Ω , удовлетворяющего граничному условию

$$u = g \quad \text{на} \quad \Gamma_a = \partial\Omega, \quad (4.2)$$

и задачу 2 (внешнюю задачу Дирихле). Последняя заключается в нахождении решения уравнения (4.1) в области Ω_e , удовлетворяющего граничному условию (4.2) и условию на бесконечности

$$u(x, y) = O(1) \quad \text{при} \quad (x^2 + y^2) \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

В силу леммы 3.3 решение каждой из этих задач единственно. Поэтому займемся здесь нахождением указанных решений с использованием метода Фурье. Прежде всего введем на плоскости полярные координаты ρ, φ и запишем уравнение (4.1) с использованием этих координат в виде

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.4)$$

Будем искать частные решения уравнения (4.4) в виде произведения

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{\rho(\rho R')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \quad (4.6)$$

где λ – константа. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций R и Φ , имеющим вид

$$\rho(\rho R')' - \lambda R = 0 \quad \text{в} \quad (0, a), \quad (4.7)$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \quad \text{в} \quad (0, 2\pi). \quad (4.8)$$

В силу однозначности решения u задачи 1 функция Φ должна удовлетворять условию (периодичности)

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \quad (4.9)$$

Равенства (4.8), (4.9) представляют собой *спектральную задачу*. Она заключается в нахождении чисел λ , для которых существует нетривиальное решение уравнения (4.8), удовлетворяющее условию (4.9). Простой анализ показывает, что ее решение, т. е. собственные значения λ_k и функции Φ_k , имеет вид

$$\lambda_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

(отрицательные значения k не дают новых решений).

Заменим в (4.7) λ на k^2 . Получим так называемое *уравнение Эйлера*

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0. \quad (4.11)$$

Его решение при $k > 0$ будем искать в виде

$$R(\rho) = \rho^\mu. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.11) и сокращая на ρ^μ , находим, что

$$\mu^2 = k^2 \implies \mu = \pm k. \quad (4.13)$$

Отсюда при $k > 0$ получаем два линейно независимых решения: ρ^k и ρ^{-k} . При $k = 0$ независимыми решениями являются функции: 1 и $\ln \rho$.

Так как искомое решение u должно быть ограниченным в круге Ω для внутренней задачи и во внешности Ω_e круга Ω для внешней задачи, то в качестве множителя R в (4.5) следует взять функции

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^k, \quad k \geq 1 \quad (4.14)$$

для задачи 1 и

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^{-k}, \quad k \geq 1 \quad (4.15)$$

для задачи 2. С учетом этого искомые частные решения уравнения (4.4), удовлетворяющие условию 2π – периодичности по φ , имеют вид

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.16)$$

для задачи 1 (внутренней задачи Дирихле) и

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.17)$$

для задачи 2 (внешней задачи Дирихле).

В силу линейности (4.4) бесконечная сумма решений (4.16), т. е. ряд

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (4.18)$$

для задачи 1 и ряд

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (4.19)$$

для задачи 2, также является решением уравнения (4.4), удовлетворяющим условию 2π – периодичности по φ . Этот вывод, конечно, справедлив при условии, что ряд (4.18) (либо (4.19)) можно дважды почленно дифференцировать по r и φ с сохранением его равномерной сходимости в Ω (либо в Ω_e).

Осталось определить коэффициенты a_k и b_k . Воспользуемся для этого граничным условием (4.2). Переходя в (4.18) формально к пределу при $\rho \rightarrow a$ с использованием (4.2), получим

$$u(a, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = g(\varphi). \quad (4.20)$$

Предположим, что граничная функция g удовлетворяет условиям

$$(i) \quad g \in C^0[0, 2\pi], \quad g(0) = g(2\pi).$$

С учетом условий (i) функцию g можно разложить в ряд Фурье:

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \quad (4.21)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) d\psi, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \cos k\psi d\psi, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \sin k\psi d\psi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Сравнивая ряды (4.20) и (4.21), приходим к соотношениям для определения a_k и b_k . Они имеют вид $a_0 = \alpha_0/2$, $a_k = \alpha_k/a^k$, $b_k = \beta_k/a^k$, $k = 1, 2, \dots$. Тем самым мы получили (формально) решение задачи 1 в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho, \varphi) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (4.23)$$

Аналогичным образом показывается, что решение u задачи 2 имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (4.24)$$

Докажем, что при выполнении условий (i) ряды (4.23) и (4.24) действительно являются решениями уравнения Лапласа (4.1) соответственно в областях Ω и Ω_e . Рассмотрим сначала ряд (4.23) и докажем, что в замкнутом круге $\overline{\Omega}_{\rho_0} = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq \rho_0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$, где $\rho_0 < a$ — произвольное число, равномерно сходятся как ряд (4.23), так и ряды

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \rho}, \quad \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \rho^2}, \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \varphi}, \quad \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2}, \quad (4.25)$$

полученные его почленным дифференцированием.

При выполнении условия (i) для коэффициентов Фурье α_k и β_k функции g справедлива следующая оценка ([19, с. 318]):

$$|\alpha_0|, |\alpha_k| \text{ и } |\beta_k| < M = \text{const} \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Учитывая (4.26) и неравенства $|\cos k\varphi| \leq 1$, $|\sin k\varphi| \leq 1$, выводим, что ряды (4.23) и (4.25) мажорируются в круге $\overline{\Omega}_{\rho_0}$ соответственно числовыми рядами

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} + 2M \sum_k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k, \quad \frac{2M}{a} \sum_k k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-1)}, \quad \frac{2M}{a^2} \sum_k k(k-1) \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-2)}, \\ 2M \sum_k k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k, \quad 2M \sum_k k^2 \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k. \end{aligned}$$

Сходимость их легко следует из признака Даламбера. Отсюда вытекает, что ряд (4.23) имеет непрерывные производные первого и второго порядков по ρ и φ и удовлетворяет уравнению (4.1) при $\rho < a$, т. е. является гармонической в Ω функцией. Осталось доказать равномерную сходимость ряда (4.23) в замкнутом круге $\overline{\Omega}$. Для этого достаточно доказать сходимость числового ряда

$$|\alpha_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|), \quad (4.27)$$

который является мажорирующим в замкнутом круге $\overline{\Omega}$ для ряда (4.23), поскольку $|u_k(\rho, \varphi)| \leq |\alpha_k| + |\beta_k|$ в $\overline{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots$. Предположим, что в дополнение к условиям (i) выполняется условие:

(ii) функция g имеет на $[0, 2\pi]$ кусочно-непрерывную производную g' .

Легко проверить, интегрируя по частям, что коэффициенты Фурье $\tilde{\alpha}_k$ и $\tilde{\beta}_k$ функции g' связаны с коэффициентами Фурье α_k и β_k функции g формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g'(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = k\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \tilde{\beta}_k &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g'(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = -k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = -k\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|\alpha_k| + |\beta_k| = (|\tilde{\alpha}_k| + |\tilde{\beta}_k|)/k$ и для доказательства сходимости ряда (4.27) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{|\tilde{\alpha}_k|}{k} + \frac{|\tilde{\beta}_k|}{k} \right\}. \quad (4.28)$$

Но сходимость ряда (4.28) следует из элементарных неравенств

$$\frac{|\tilde{\alpha}_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\tilde{\alpha}_k^2 + \frac{1}{k^2} \right), \quad \frac{|\tilde{\beta}_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\tilde{\beta}_k^2 + \frac{1}{k^2} \right)$$

и из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}_k^2 + \tilde{\beta}_k^2)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. Первый из них сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции g' , а второй – в силу признака Коши-Маклорена. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *При выполнении условий (i) ряд (4.23) является гармонической в круге Ω функцией. Если, более того, выполняется условие (ii), то ряд (4.23) является непрерывной в замкнутом круге $\bar{\Omega}$ функцией, удовлетворяющей граничному условию (4.2) и, следовательно, является классическим решением задачи 1.*

Аналогичный результат справедлив и для внешней задачи.

ТЕОРЕМА 4.2. *При выполнении условий (i) ряд (4.24) является гармонической во внешности Ω_e круга Ω функцией. Если, более того, выполняется условие (ii), то ряд (4.24) является непрерывной в замкнутой области $\bar{\Omega}_e$ функцией, удовлетворяющей граничному условию (4.2) и условию на бесконечности (4.3) и, следовательно, является классическим решением задачи 2.*

4.2. Интеграл Пуассона. Преобразуем в этом пункте формулы (4.23), (4.24) к эквивалентным интегральным формулам и покажем, что последние формулы дают решения задач 1 и 2 при выполнении лишь условия (i). Как и в п. 4.1, рассмотрим более подробно внутреннюю задачу, а для внешней задачи получим результат по аналогии.

Подставим выражения (4.22) для коэффициентов Фурье граничной функции g в формулу (4.23). Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^k (\cos k\psi \cos k\varphi + \sin k\psi \sin k\varphi) \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Предполагая, что $t \equiv \rho/a < 1$, и используя известную формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \text{ при } |\gamma| < 1,$$

преобразуем выражение в фигурных скобках (4.29):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \left[e^{ik(\varphi - \psi)} + e^{-ik(\varphi - \psi)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(te^{i(\varphi - \psi)})^k + (te^{-i(\varphi - \psi)})^k \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-te^{-i(\varphi-\psi)}-te^{i(\varphi-\psi)}+t^2+te^{i(\varphi-\psi)}-t^2+te^{-i(\varphi-\psi)}-t^2}{(1-te^{i(\varphi-\psi)})(1-te^{-i(\varphi-\psi)})} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2}, \quad |t| < 1.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Учитывая (4.30), перепишем формулу (4.29) в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2} g(\psi) d\psi. \tag{4.31}$$

Формула (4.31) (либо интеграл в правой части (4.31)) называется *формулой Пуассона* (либо *интегралом Пуассона*), а выражение

$$k(\rho, \varphi; a, \psi) \equiv \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2}$$

называется *ядром Пуассона*. Отметим, что ядро k определено лишь при $\rho < a$ либо $\rho > a$, причем $k(\rho, \varphi; a, \psi) > 0$ при $\rho < a$, так как $2a\rho < a^2 + \rho^2$, если $\rho \neq a$.

Положим $\mathbf{x} = (\rho, \varphi) \in \Omega$, $\mathbf{y} = (a, \psi) \in \Gamma_a$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ (см. рис.4.1а). Легко видеть, что расстояние $r = r_{xy}$ между \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется формулой

$$r_{xy}^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2. \tag{4.32}$$

Учитывая (4.32) и выбирая в качестве переменной интегрирования дуговую абсциссу $s = a\psi$, ($ds = ad\psi$), перепишем формулу (4.31) в эквивалентном виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - \rho^2)}{r^2} g(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - |\mathbf{x}|^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \tag{4.33}$$

При выполнении лишь условия (i) интеграл Пуассона (4.31) является гармонической в круге Ω функцией, так как этим свойством обладает исходный ряд (4.23). То же самое справедливо и для функции (4.33) при условии, что $g \in C(\Gamma_a)$. Сформулируем этот важный факт в виде леммы.

ЛЕММА 4.1. Пусть $g \in C(\Gamma_a)$. Тогда интеграл Пуассона (4.33) является гармонической в круге Ω функцией.

Если, более того, функция g удовлетворяет условиям (i) и (ii), то тогда можно утверждать, что

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_a, \quad \lim_{\substack{\rho \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = g(\varphi_0) \quad \forall \varphi_0 \in [0, 2\pi), \tag{4.34}$$

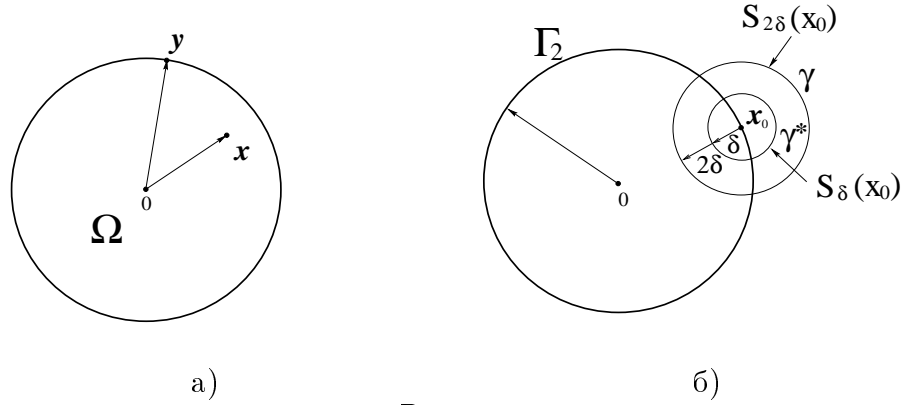


Рис. 4.1

так как ряд (4.23), из которого получена формула (4.31) (либо (4.33)), является при выполнении условий (i) и (ii) непрерывной функцией в замкнутом круге $\overline{\Omega}$, удовлетворяющей граничному условию (4.2).

Основываясь на формуле (4.33), докажем теперь, что функция u удовлетворяет условию (4.34), даже если функция g является лишь непрерывной функцией на Γ_a . Это будет означать, что интеграл Пуассона, точнее функция

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - \rho^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \quad (4.35)$$

дает решение задачи 1 из пространства $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ для любой $g \in C(\Gamma_a)$.

Отметим сначала, что для функции $g \equiv 1$ на Γ_a решением задачи 1 является функция $u \equiv 1$ в Ω . Это вытекает из принципа максимума. С учетом этого, полагая в (4.33) $g = 1$, $u = 1$, приходим к следующему соотношению

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) d\psi}{a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2} = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}| \leq a. \quad (4.36)$$

Умножим обе части (4.36) на $g(\mathbf{x}_0)$, где $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_a$ – фиксированная точка, и вычтем из (4.33). Получим

$$u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \quad (4.37)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное сколь угодно малое число. Окружим точку \mathbf{x}_0 окружностью $S_{2\delta} = S_{2\delta}(\mathbf{x}_0)$ радиуса 2δ (см. рис. 4.1б), где с учетом непрерывности функции g число δ выберем столь малым, чтобы во всех точках

у части Γ_1 границы Γ_a , лежащей внутри окружности $S_{2\delta}$, выполнялось неравенство

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.38)$$

Положим

$$\Gamma_2 = \Gamma_a \setminus \bar{\Gamma}_1, \quad I_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_k} [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad k = 1, 2. \quad (4.39)$$

Из (4.37) и (4.39), очевидно, имеем

$$|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq |I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| + |I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.40)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Учитывая (4.38), (4.36), имеем

$$|I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_1} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.41)$$

Оценим теперь $|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|$. Для этого построим еще одну окружность $S_\delta = S_\delta(\mathbf{x}_0)$ с центром в точке \mathbf{x}_0 , имеющую радиус δ . Поскольку нас интересует поведение решения $u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, то можно считать, что точка \mathbf{x} находится внутри окружности S_δ . Тогда для любой точки $\mathbf{y} \in \Gamma_2$ выполняется неравенство $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \delta$. Учитывая, кроме того, что непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция g ограничена, так что $|g(\mathbf{y})| \leq M' = \text{const}$ на Γ_a , имеем согласно (4.39), что

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{2M'(a^2 - \rho^2)}{2\pi a \delta^2} \int_{\Gamma_2} ds \leq \frac{2M'(a^2 - \rho^2)}{\delta^2}, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \quad (4.42)$$

Так как число δ уже зафиксировано, а при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, очевидно, $\rho = |\mathbf{x}| \rightarrow a$, и, следовательно, правая часть в (4.42) стремится к нулю, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что выполняется неравенство

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_1. \quad (4.43)$$

Из (4.41) и (4.43) вытекает в силу произвольности ε , что

$$|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

Из (4.44), в частности, следует, что $u \in C(\bar{\Omega})$. Кроме того, $u \in C^2(\Omega)$. Это означает, что формула (4.35) определяет классическое решение задачи Дирихле (4.1), (4.2). Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 4.3. При выполнении условия (i) классическое решение задачи Дирихле (4.1), (4.2) для круга $\Omega = \Omega_a$ существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой (4.35).

Исходя из ряда (4.24), аналогичным образом можно убедиться в том, что для произвольной непрерывной функции g формула

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(\rho^2 - a^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, & \mathbf{x} \in \Omega_e, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \quad (4.45)$$

определяет классическое решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^0(\overline{\Omega}_e)$ внешней задачи Дирихле (4.1)–(4.3). Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 4.4. При выполнении условий (i) классическое решение внешней задачи Дирихле (4.1)–(4.3) во внешности круга существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой (4.45).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. С помощью линейной замены переменных нетрудно убедиться в том, что решение задачи Дирихле внутри окружности Γ_a радиуса a с центром в произвольной точке \mathbf{x}_0 также определяется формулой (4.35), где следует положить $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. Точно так же формула (4.45) при $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ дает решение внешней задачи Дирихле в области Ω_e , лежащей вне Γ_a .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из теоремы 4.3 вытекает, что любую гармоническую в круге Ω функцию u , непрерывную в замыкании $\overline{\Omega}$, можно представить в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.46)$$

Действительно, обозначим через u_1 решение задачи Дирихле (4.1), (4.2), отвечающее граничной функции $g = u|_{\Gamma_a} \in C(\Gamma_a)$. В силу теоремы 4.3 оно представимо с помощью интеграла Пуассона, стоящего в правой части (4.46). С другой стороны, в силу единственности решения задачи Дирихле необходимо выполняется соотношение $u_1 = u$ в Ω . Отсюда вытекает (4.46). Формулу (4.46) также называют формулой Пуассона. По своему смыслу она дает интегральное представление гармонической внутри круга Ω функции u через ее значения на границе Γ_a . При $\mathbf{x} = 0$ формула Пуассона (4.46) переходит в формулу (3.15) среднего значения гармонической функции в \mathbb{R}^2 . В силу единственности решения внешней задачи Дирихле аналогичное представление справедливо для функции u , гармонической вне круга Ω и непрерывной в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

В общем случае под формулой (либо интегралом) Пуассона понимается интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в простейших областях в виде интеграла по границе, содержащего граничную функцию. К этим простейшим областям относятся, например:

круг, внешность круга и полуплоскость в \mathbb{R}^2 , шар, внешность шара и полупространство в \mathbb{R}^3 . В следующем пункте мы выведем формулу Пуассона для шара и внешности шара. Что касается других областей, то к этому вопросу мы вернемся в гл. 7 при изложении метода функций Грина.

Интеграл Пуассона дает очень удобный аппарат для исследования свойств гармонических функций. Некоторые из этих свойств будут приведены в §6. В этом пункте мы, основываясь на свойствах интеграла Пуассона (4.46), докажем приведенные в конце §4 оценки (3.30), описывающие поведение гармонической функции двух переменных на бесконечности.

ЛЕММА 4.2 (о поведении гармонических функций на бесконечности в \mathbb{R}^2). Пусть $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$ – гармоническая во внешности Ω_e ограниченного открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функция. Тогда существуют такие константы $R > 0$ и $C = C_R(u)$, что выполняются следующие условия на бесконечности

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2}, \quad \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2} \text{ при } |\mathbf{x}| \geq R. \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поместим начало координат внутрь Ω и опишем окружность Γ_R с центром в начале координат достаточно большого радиуса R , такого, чтобы Ω целиком лежала внутри Γ_R (см. рис. 3.3). Положим $\Omega_{eR} = \{\mathbf{x} \in \Omega_e : |\mathbf{x}| > R\}$. Поскольку функция u гармонична в Ω_{eR} и непрерывна в замыкании $\overline{\Omega_{eR}}$, то с учетом замечания 4.2 в любой точке $\mathbf{x} = (x, y)$, лежащей вне окружности Γ_R , ее можно представить в виде интеграла Пуассона

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} u(\mathbf{y}) ds_y = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{|\mathbf{y}|=R} \frac{|\mathbf{x}|^2 - R^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{eR}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Здесь $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{y} = (\xi, \eta)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Дифференцируя (4.48) по x , получим

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) u(\mathbf{y}) ds_y. \quad (4.49)$$

Оценим производную $\partial u / \partial x$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) = \frac{2xr^2 - 2(\rho^2 - R^2)(x - \xi)}{r^4} =$$

$$= \frac{2}{r^4} [xr(r - \rho) + \rho x(r - \rho) + \xi \rho^2 + R^2(x - \xi)]. \quad (4.50)$$

Пусть точка \mathbf{x} настолько удалена от начала координат, что выполняется условие $\rho \geq 2R$, так что $R \leq \rho/2$. Тогда $r \geq \rho - R \geq \rho/2 \Rightarrow 1/r \leq 2/\rho$. Кроме того, имеем $|x| \leq \rho$, $|x - \xi|/r \leq r$, $|r - \rho| \leq R$, $|\xi| \leq R$. Принимая во внимание эти оценки, из (4.50) получаем, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) \right| \leq \frac{2|x||r - \rho|}{r^3} + \frac{2|x||r - \rho|\rho}{r^4} + \frac{2|\xi|\rho^2}{r^4} + \frac{2R^2|x - \xi|}{r^4} \leq \frac{88R}{\rho^2}. \quad (4.51)$$

Учитывая (4.51), из (4.49) выводим, что

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| \leq \frac{88R}{\rho^2} \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} |u(\mathbf{y})| ds_y \leq \frac{M_R}{\rho^2} \text{ при } |\mathbf{x}| \geq 2R.$$

Здесь $M_R = 88M'_R$, где $M'_R = \sup_{|\mathbf{y}|=2R} |u(\mathbf{y})|$. Аналогичная оценка справедлива и для $|\partial u/\partial y|$. Отсюда вытекает справедливость оценок (4.47) при $C_R = \sup_{|\mathbf{x}|=2R} |u(\mathbf{x})|$. ■

Оценки (4.47) конкретизируют смысл величины $O(1/|\mathbf{x}|^2)$, входящей в (3.30). **4.3. О решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и вне шара.** Рассмотрим в этом пункте кратко вопрос о нахождении классического решения внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\Gamma_a} = g \quad (4.52)$$

в шаре $\Omega = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a\}$, либо внешней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad u|_{\Gamma_a} = g, \quad u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.53)$$

во внешности $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ шара Ω . Здесь $\Gamma_a = \partial\Omega$.

Отметим сразу, что единственность решений обеих задач вытекает из леммы 3.2. Что касается существования решения, то для его доказательства и одновременно построения решения в явном виде можно применить аналогично плоскому случаю метод Фурье, но с использованием сферических функций, введенных в § 4 гл. 4. Второй способ заключается в обосновании справедливости для решений указанных задач трехмерных аналогов формулы Пуассона. Ограничимся здесь приведением краткой схемы вывода соответствующих формул для решений задач (4.52) и (4.53). Введем функцию

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_a, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_a, \quad (4.54)$$

называемую *ядром Пуассона* для шара Ω . Рассмотрим отвечающий функции k трехмерный *интеграл Пуассона*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.55)$$

Отметим следующие свойства ядра и интеграла Пуассона.

1. Ядро k неотрицательно. При $|\mathbf{x}| = a$ оно всюду равно нулю, кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, в окрестности которой оно неограничено.

2. Справедлива формула

$$\frac{1}{4\pi a} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\sigma_y \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } |\mathbf{x}| < a, \\ -\frac{a}{|\mathbf{x}|} & \text{при } |\mathbf{x}| > a. \end{cases}$$

Первое свойство очевидно, второе свойство доказывается как и соответствующее свойство ядра Пуассона для круга. С использованием этих свойств можно доказать следующие теоремы, обобщающие теоремы 4.3 и 4.4 для случая трех измерений. Доказательство их можно найти, например, в [21, с. 273-276].

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть функция g непрерывна на сфере Γ_a радиуса a . Тогда классическое решение u внутренней задачи Дирихле (4.52) существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.56)$$

ТЕОРЕМА 4.6. При выполнении условий теоремы 4.5 классическое решение u внешней задачи Дирихле (4.53) существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{|\mathbf{x}|^2 - a^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, & \mathbf{x} \in \Omega_e, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.57)$$

Опять отметим, что из теоремы 4.5 вытекает справедливость соотношения

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} u(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.58)$$

Формула (4.58), называемая формулой Пуассона для шара, имеет смысл интегрального представления гармонической в шаре Ω функции $u \in C(\overline{\Omega})$ через ее граничные значения на границе (сфере) Γ_a шара Ω . При $\mathbf{x} = 0$

формула Пуассона переходит в формулу (3.4) среднего значения гармонической функции в \mathbb{R}^3 . Аналогичное (4.58) представление справедливо и для функции u , гармонической вне шара Ω и непрерывной в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

С помощью формулы Пуассона можно вывести ряд важных свойств гармонических функций трех переменных. В частности, можно доказать следующий факт о поведении при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего условию регулярности на бесконечности, имеющему вид

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.59)$$

ЛЕММА 4.3. Пусть функция $u \in C^2(\Omega_e)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во внешней области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ограниченного открытого множества Ω и условию регулярности на бесконечности (4.59). Тогда существуют такие константы $R > 0$ и $C = C_R(u)$, что выполняются условия

$$u(\mathbf{x}) \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|}, \quad |\text{gradu}(\mathbf{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2} \text{ при } |\mathbf{x}| \geq R. \quad (4.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится в точности по схеме леммы 4.1 и предоставляется читателю.

Лемма 4.3 означает, что любое классическое решение уравнения Пуассона в неограниченной области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, удовлетворяющее условию регулярности (4.59), необходимо убывает с порядком $|\mathbf{x}|^{-1}$, а его первые производные стремятся к нулю с порядком $|\mathbf{x}|^{-2}$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Другими словами, условие регулярности на бесконечности для классического решения u уравнения Лапласа в Ω_e эквивалентно более сильным условиям убывания на бесконечности функции u и ее первых производных. Вспомнив, что именно первое условие в (4.60) фигурирует в определении 1.2 гармонической во внешней области Ω_e функции u , можно сделать вывод о том, что определение 1.2 при $n = 3$ эквивалентно следующему определению гармонической функции во внешней области Ω_e .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$ называется гармонической в неограниченной области $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, если она дважды непрерывно дифференцируема, является решением уравнения Лапласа в Ω_e и удовлетворяет условию регулярности на бесконечности (4.59).

§5. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач для уравнения Пуассона

5.1. Постановка основных краевых задач в случае пространства \mathbb{R}^3 . Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^1$, Ω_e – ее внешность (см. рис. 5.1а), f – заданная в Ω либо Ω_e непрерывная функция,

g – заданная на Γ непрерывная функция. Будем рассматривать следующие краевые задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f. \quad (5.1)$$

1.1. Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию $u \in C^2(\Omega)$, непрерывную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ и граничному условию

$$u = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.2)$$

1.2. Внешняя задача Дирихле. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e)$, непрерывную на $\overline{\Omega}_e \equiv \Omega_e \cup \Gamma$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega_e$, граничному условию (5.2) и условию регулярности на бесконечности

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

2.1. Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.4)$$

Здесь и ниже \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω .

2.2. Внешняя задача Неймана. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω_e , граничному условию (5.4) и условию (5.3).

3.1. Внутренняя третья краевая задача. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.5)$$

Здесь $a : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – заданная непрерывная на Γ функция.

3.2. Внешняя третья краевая задача. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω_e , граничному условию (5.5) и условию (5.3).

Пусть Γ_1 и Γ_2 – два открытых подмножества границы Γ (см. рис. 5.1б), такие что

$$\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \quad \int_{\Gamma} \varphi d\sigma = \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma + \int_{\Gamma_2} \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in C(\Gamma).$$

Предположим, что на Γ_1 и Γ_2 заданы непрерывные функции $g_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ и $g_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

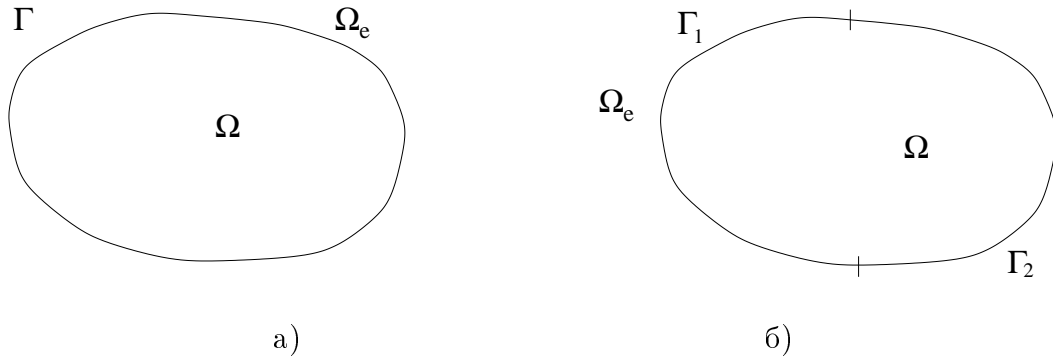


Рис. 5.1

4.1. Внутренняя смешанная краевая задача. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω и граничным условиям

$$u = g_1 \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + au = g_2 \text{ на } \Gamma_2. \quad (5.6)$$

4.2. Внешняя смешанная краевая задача. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$, удовлетворяющую уравнению (5.1) в Ω_e , граничным условиям (5.6) и условию (5.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Смешанная краевая задача является наиболее общей в том смысле, что любая другая краевая задача является ее частным случаем.

5.2. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач. Приведем ряд теорем, описывающих достаточные условия, при которых решения сформулированных задач обладают свойством единственности.

ТЕОРЕМА 5.1. *Решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ внутренней задачи Дирихле либо $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$ внешней задачи Дирихле единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 3.2 с учетом того, что разность $u = u_2 - u_1$ двух возможных решений удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω или Ω_e , непрерывна в $\overline{\Omega}$ либо $\overline{\Omega_e}$, равна нулю на Γ и удовлетворяет условию регулярности для внешней задачи. ■

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть u и \tilde{u} – решения внутренней задачи Дирихле из пространства $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ при граничных условиях*

$$u|_{\Gamma} = g \text{ и } \tilde{u}|_{\Gamma} = \tilde{g} \quad (5.7)$$

и пусть

$$|g(\mathbf{x}) - \tilde{g}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.8)$$

Тогда выполняется неравенство

$$|u(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \text{ на } \overline{\Omega}. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разность $v = u - \tilde{u}$ есть функция, гармоническая в Ω , непрерывная на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющая на Γ условию $|v| \leq \varepsilon$. Поэтому неравенство (5.9) очевидным образом вытекает из следствия 3.5. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теорема 5.2 означает *непрерывную зависимость* (или *устойчивость*) решения внутренней задачи Дирихле от граничных данных в равномерной метрике.

Аналогичная теорема справедлива и для внешней задачи Дирихле.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть u и \tilde{u} – решения внешней задачи Дирихле из пространства $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$, отвечающие граничным условиям (5.7) и пусть выполняется (5.8). Тогда выполняется неравенство

$$|u(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \text{ на } \overline{\Omega}_e.$$

Несколько другая ситуация, чем в теореме 5.1, имеет место для внутренней задачи Неймана.

ТЕОРЕМА 5.4. Решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ внутренней задачи Неймана (5.1), (5.4) определяется с точностью до произвольной постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (5.1), (5.4) имеет два решения: u_1 и u_2 . Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ является гармонической в Ω функцией класса $C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей условию $\partial u / \partial n = 0$ на Γ . Полагая в формуле Грина (2.5) $v = u$, получим

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta u u d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma. \quad (5.10)$$

Учитывая условия $\Delta u = 0$ в Ω , $\partial u / \partial n = 0$ на Γ , из (5.10) выводим, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla u = 0 \text{ в } \Omega \Rightarrow u = \text{const.} \blacksquare$$

В то же время решение внешней задачи Неймана единственно.

ТЕОРЕМА 5.5. Решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ внешней задачи Неймана (5.1), (5.3), (5.4) единственно, если Ω_e – связное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (5.1), (5.3), (5.4) имеет два решения: u_1 и u_2 . Обозначим через B_R шар достаточно большого радиуса R с границей Γ_R , содержащий область Ω внутри себя. Введем ограниченную область Ω_R по формуле

$$\Omega_R = \Omega_e \cap B_R = B_R \setminus \overline{\Omega} \quad (5.11)$$

и применим в области Ω_R формулу Грина (2.5), где, как и выше, положим $u = u_2 - u_1$, $v = u$. Учитывая, что $\partial \Omega_R = \Gamma_R \cup \Gamma$, $\Delta u = 0$ в Ω_R , будем

иметь

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma. \quad (5.12)$$

Здесь в обоих граничных интегралах \mathbf{n} обозначает нормаль к границе $\partial\Omega_R$, внешнюю относительно Ω_R .

В силу леммы 4.3 о поведении гармонической функции на бесконечности в \mathbb{R}^3 подинтегральная функция $|\nabla u|^2$ в левой части (5.12) убывает при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $|\mathbf{x}|^{-4}$, тогда как объем области Ω_R растет с ростом $R = |\mathbf{x}|$ лишь как R^3 . Отсюда следует, что при $R \rightarrow \infty$ собственный интеграл в левой части (5.12) стремится к несобственному (сходящемуся) интегралу $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$ по области Ω_e .

В то же время интеграл $\int_{\Gamma_R} (\partial u / \partial n) u d\sigma$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, в силу той же леммы 4.3 величина $(u \partial u / \partial n)|_{\Gamma_R}$ убывает при $R \rightarrow \infty$ как $O(R^{-3})$, тогда как площадь поверхности Γ_R , равная $4\pi R^2/3$, растет как R^2 . Поэтому, переходя в (5.12) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая, что $\partial u / \partial n = 0$ на Γ , получим $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = 0$. Отсюда вытекает с учетом связности Ω_e , что $u = u_0 = \text{const}$, а из условия регулярности на бесконечности следует, что $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

Обратимся теперь к третьей краевой задаче. Предположим, что коэффициент a в (5.5) удовлетворяет условиям

$$(i) \ a \in C(\Gamma), \ a \geq 0 \text{ на } \Gamma, \ \int_{\Gamma} a d\sigma > 0.$$

ТЕОРЕМА 5.6. *При выполнении условий (i) решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ внутренней третьей краевой задачи (5.1), (5.5) единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, как всегда, что задача (5.1), (5.5) имеет два решения: u_1 и u_2 . Применяя к их разности $u = u_2 - u_1$ формулу Грина (2.5), приходим к соотношению (5.10). Последнее с учетом условий $\Delta u = 0$ в Ω , $\partial u / \partial n = -au$ на Γ перепишем в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} a u^2 d\sigma = 0. \quad (5.13)$$

Поскольку $a \geq 0$, то из (5.13) получаем, что $|\nabla u| = 0$ в $\Omega \Rightarrow u = u_0 = \text{const}$. Подставляя $u = u_0$ в (5.13), будем иметь

$$u_0^2 \int_{\Gamma} a d\sigma = 0. \quad (5.14)$$

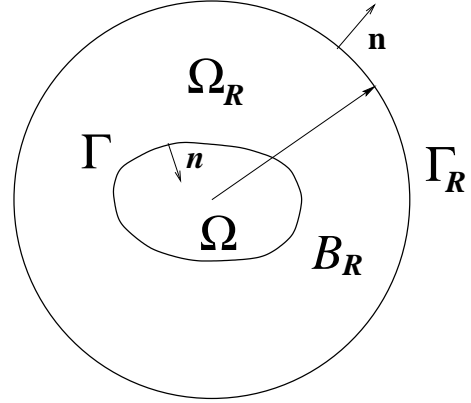


Рис. 5.2

В силу последнего условия в (i) из (5.14) вытекает, что $u_0 = 0 \implies u_1 = u_2$. ■

Аналогичная теорема (причем при использовании даже менее жестких условий на коэффициент a) справедлива для внешней третьей краевой задачи.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть $a \in C(\Gamma)$, $a \geq 0$ на Γ . Тогда решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ внешней третьей краевой задачи (5.1), (5.3), (5.5) единственно, если Ω_e – связное множество.

Доказательство теоремы 5.7 аналогично доказательству теоремы 5.9 (см. ниже). В заключение рассмотрим смешанную краевую задачу. Предположим, что выполняется одна из следующих двух групп условий:

(ii) $\text{meas } \Gamma_1 > 0$, $a \in C(\Gamma_2)$, $a \geq 0$ на Γ_2 ,

(iii) $\text{meas } \Gamma_1 \geq 0$, $a \in C(\Gamma_2)$, $a \geq 0$ на Γ_2 , $\int_{\Gamma_2} a d\sigma > 0$.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $\text{meas } \Gamma_2 > 0$ и выполняется одна из групп условий (ii) или (iii). Тогда решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ внутренней смешанной задачи (5.1), (5.6) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (5.1), (5.6) имеет два решения: u_1 и u_2 . Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ удовлетворяет соотношению (5.10), которое с учетом условий

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -au \text{ на } \Gamma_2 \quad (5.15)$$

перепишем в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} au^2 d\sigma = 0. \quad (5.16)$$

Поскольку $a \geq 0$ на Γ_2 , то из (5.16) получаем, что $|\nabla u| = 0$ в $\Omega \implies u = u_0 = \text{const}$ на $\overline{\Omega}$. С учетом этого соотношение (5.16) принимает вид

$$u_0^2 \int_{\Gamma_2} a d\sigma = 0. \quad (5.17)$$

Если выполняются условия (ii), то тогда в силу условия $u = 0$ на Γ_1 имеем $u_0 = 0$ и, следовательно, $u_1 = u_2$. Если же выполняются условия (iii), то тогда из (5.17) опять получаем, что $u_0 = 0 \implies u_1 = u_2$. ■

Аналогичная теорема (причем при использовании даже менее жестких условий на исходные данные) справедлива для внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.3), (5.6).

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть $\text{meas } \Gamma_2 > 0$, $a \in C(\Gamma_2)$, $a \geq 0$ на Γ_2 . Тогда решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.3), (5.6) единственно, если Ω_e – связное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (5.1), (5.3), (5.6) имеет два решения u_1 и u_2 . Введем, как в теореме 5.5, ограниченную область $\Omega_R = \Omega_e \cap B_R$ и заметим, что разность $u = u_2 - u_1$ удовлетворяет соотношению (5.12). Перейдем в (5.12) к пределу при $R \rightarrow \infty$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5.5, приходим к соотношению $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n) u d\sigma = 0$. Последнее с учетом условий $u = 0$ на Γ_1 , $\partial u / \partial n = -au$ на Γ_2 принимает вид

$$\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} au^2 d\sigma = 0. \quad (5.18)$$

Поскольку $a \geq 0$ на Γ_2 , то из (5.18) получаем, что $|\nabla u| = 0$ в $\Omega_e \Rightarrow u = u_0 = \text{const}$ на $\overline{\Omega_e}$. Из условия (5.3) следует, что $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Теорема 5.7 является частным случаем теоремы 5.9, отвечающим ситуации $\Gamma = \Gamma_2$. Если условие $\text{meas} \Gamma_2 > 0$ заменить условием $\text{meas} \Gamma_2 \geq 0$, то тогда утверждение теоремы 5.1 о единственности решения внешней задачи Дирихле также можно рассматривать как частный случай теоремы 5.9, отвечающий ситуации, когда $\text{meas} \Gamma_2 = 0$ и, следовательно, $\Gamma = \Gamma_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Некоторые из доказанных выше теорем естественным образом переносятся на краевые задачи для общих эллиптических уравнений вида (3.16) (см., например, [58, с. 11-13]). Более сложным образом исследуется единственность решения задачи сопряжения для эллиптического уравнения [58, с. 138-141].

5.3. Краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости. Аналогичным образом формулируются краевые задачи для уравнения Пуассона в случае двух измерений. Единственное отличие состоит в условии регулярности на бесконечности для внешних краевых задач, которое вместо (5.3) имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

С учетом этого все приведенные выше результаты, касающиеся внутренних задач в \mathbb{R}^3 , непосредственно распространяются на случай двух измерений. В то же время, не все результаты, касающиеся внешних краевых задач в \mathbb{R}^3 , переносятся на двумерный случай. Так, решение внешней задачи Неймана в \mathbb{R}^2 определяется, как и решение внутренней краевой задачи, с точностью до произвольной константы. В этом легко убедиться, проанализировав доказательство теоремы 5.5. Что касается внешней смешанной краевой задачи, то условия единственности ее решения совпадают с условиями единственности решения внутренней задачи, приведенными в теореме 5.8. Другими словами, справедлива следующая теорема, доказательство которой предоставляется читателю.

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть $\text{meas}\Gamma_2 \geq 0$ и выполняется одна из группы условий (ii) или (iii). Тогда решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.6), (5.19) в \mathbb{R}^2 единственно.

5.4. Некоторые необходимые условия существования решений краевых задач. Вопрос о существовании решений сформулированных в п. 5.1 краевых задач в произвольных областях исследуется гораздо сложнее, чем вопрос о единственности. Не имея ниже возможности подробно останавливаться на исследовании разрешимости указанных краевых задач, отметим книги [8, 11, 13, 23, 48], в которых интересующийся читатель может найти нужные ему сведения о их разрешимости. Здесь же мы коснемся, в основном, *необходимых* условий существования решения внутренней задачи Неймана.

Итак, рассмотрим внутреннюю задачу Неймана (5.1), (5.4). Предположим, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ – ее решение, и существует интеграл

$$\int_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f d\mathbf{x}. \quad (5.20)$$

Применяя к функциям u и $v \equiv 1$ вторую формулу Грина (2.7), имеем в силу (5.20) $\int_{\Omega} f d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n) d\sigma$. Поскольку $\partial u / \partial n = g$ на Γ в силу граничного условия (5.4), то отсюда получаем

$$\int_{\Omega} f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0. \quad (5.21)$$

(5.21) и является необходимым условием существования решения внутренней задачи Неймана. Сформулируем полученный результат в виде следствия.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ является решением внутренней задачи Неймана (5.1), (5.4), и существует интеграл (5.20). Тогда необходимо выполняется условие (5.21).

В частном случае, когда $f = 0$, уравнение (5.1) переходит в уравнение Лапласа, а (5.21) принимает вид

$$\int_{\Gamma} g d\sigma = 0. \quad (5.22)$$

Соотношение (5.22) является необходимым условием существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Соотношения (5.21) и (5.22) имеют наглядный физический смысл. Действительно, рассмотрим, например, ситуацию, когда уравнение (5.1) описывает стационарный процесс распространения тепла в области Ω , так что функция u описывает стационарное поле температур. Тогда в силу закона Фурье (см. гл. 1) интеграл $-\int_{\Gamma} \partial u / \partial n d\sigma$ пропорционален количеству

тепла, вносимому через границу Γ в область Ω в единицу времени, тогда как $\int_{\Omega} f dx$ имеет смысл количества тепла, вырабатываемого в Ω в единицу времени внешними источниками тепла. В силу закона сохранения тепла указанное суммарное тепло должно идти на нагревание вещества в области Ω . Поскольку в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ температура не изменяется с течением времени в силу стационарности процесса и, следовательно, не происходит нагревания (либо охлаждения) вещества, то это суммарное тепло должно обращаться в нуль, т. е. должно выполняться условие (5.21) либо (5.22), если $f = 0$.

Следует, однако, отметить, что результат о необходимости условия (5.21) либо (5.22) для существования решения не распространяется на внешнюю задачу Неймана (см. об этом более подробно в [21, с. 267]).

§6. Дополнительные свойства гармонических функций

В этом параграфе мы приведем ряд дополнительных свойств гармонических функций. Для простоты и конкретности будем рассматривать случай двух измерений. Доказательство почти всех этих свойств будет основываться на том факте (см. §4), что любую гармоническую в круге K функцию, непрерывную в замыкании \overline{K} , можно представить в виде интеграла Пуассона. При доказательстве приводимых ниже утверждений мы будем следовать книге И.Г. Петровского [41]. Пусть Ω - произвольная область в плоскости \mathbb{R}^2 .

ТЕОРЕМА 6.1. *Всякая гармоническая в области Ω функция и аналитична, т.е. разлагается в сходящийся степенной ряд по степеням $(x - x_0)(y - y_0)$ в окрестности произвольной точки $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - круг радиуса R с центром в \mathbf{x}_0 , целиком лежащий в Ω . С помощью переноса начала координат и преобразования подобия, сохраняющего гармоничность, можно считать, что $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, а $R = 1$.

Из результатов п. 4.1. следует, что гармоническая в круге K функция u представима в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (6.1)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются по значениям функции u на окружности радиуса 1. Из непрерывности u в K следует, что коэффициенты a_k и b_k по крайней мере ограничены: $|a_k| \leq M$, $|b_k| \leq M$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и вводя мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$, имеем

$$(x + iy)^k = [\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^k = (\rho \exp i\varphi)^k = \rho^k \exp ik\varphi = \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi).$$

Используя это соотношение, легко показываем, что $\operatorname{Re}[(a_k - ib_k)(x + iy)^k] = \rho^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$. Здесь и ниже $\operatorname{Re} a$ обозначает вещественную часть комплексного числа a . С учетом этого ряд (6.1) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(a_k - ib_k)(x + iy)^k]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{Re}[(a_{k+l} - ib_{k+l})C_{k+l}^l i^l x^k y^l]. \quad (6.3)$$

Здесь C_{k+l}^l — биномиальные коэффициенты при $k^2 + l^2 \neq 0$. Так как $C_{k+l}^l < 2^{k+l}$, а a_k и b_k ограничены по модулю константой M , то ряд (6.3) мажорируется сходящимся при $|x| < 1/2$, $|y| < 1/2$ рядом

$$2M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{k+l} |x|^k |y|^l. \quad (6.4)$$

Следовательно, ряд (6.3) сходится абсолютно и равномерно в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Легко проверить, что частные суммы ряда (6.2) образуют некоторую последовательность частных сумм абсолютно сходящегося ряда (6.3). Поскольку ряд (6.2) сходится к функции u , то степенной ряд (6.3) также будет сходиться к функции u в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Тем самым доказано, что функция u разлагается в степенной ряд по x и y , сходящийся к u в окрестности точки $(0, 0)$ ■.

Рассмотрим в Ω последовательность гармонических функций

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.2. (Теорема Гарнака). *Если последовательность функций (6.5), гармонических внутри ограниченной области Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}$, сходится равномерно на границе Γ области Ω , то она равномерно сходится и внутри Ω . Предельная функция u является гармонической внутри области Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность (6.5) сходится равномерно на границе Γ , то согласно критерию Коши для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое N , что при $m, n > N$ всюду на Γ $|u_n(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| < \varepsilon$. В силу следствия 3.6 к принципу максимума для этих m, n имеем $|u_n(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| < \varepsilon$ всюду в $\overline{\Omega}$. Но тогда на основании достаточности критерия Коши мы заключаем, что последовательность (6.5) сходится равномерно к некоторой функции $u \in C(\overline{\Omega})$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Остаётся лишь доказать, что предельная функция $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ гармонична внутри Ω .

Возьмём для этого любую точку $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ и построим круг K с центром в \mathbf{x}_0 и радиуса a , лежащий целиком внутри Ω . Так как u_n – гармонические функции в области Ω , то каждую из них можно представить внутри K с помощью интеграла Пуассона:

$$u_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} u_n(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \quad (6.6)$$

В силу доказанной равномерной сходимости последовательности (6.5) в $\bar{\Omega}$ в равенстве (6.6) можно перейти к пределу в обеих частях. В результате получим

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} u(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \quad (6.7)$$

Поскольку $u|_{\partial K} \in C(\Gamma)$, то отсюда следует в силу теоремы 4.3, что u есть функция, гармоническая внутри K ■.

ТЕОРЕМА 6.3 (о монотонной последовательности гармонических функций). *Если последовательность гармонических в области Ω функций (6.5) сходится в некоторой внутренней точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ и при любом n $u_{n+1}(\mathbf{x}) \geq u_n(\mathbf{x})$ во всех точках области Ω , то последовательность (6.5) всюду в Ω сходится к некоторой гармонической функции u . При этом во всякой замкнутой ограниченной части области Ω сходимость равномерна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что последовательность (6.5) сходится равномерно в любом круге K_0 радиуса R с центром в \mathbf{x}_0 , если его замыкание \bar{K}_0 лежит внутри Ω . Оценим разность $u_{n+p} - u_n = v_{n,p}$, где p – произвольное целое положительное число. В силу предположений теоремы $v_{n,p} \geq 0$. Возьмем концентрический с K_0 круг K^* , большего, чем у K_0 , радиуса $R + \varepsilon$, но все еще лежащий вместе со своей границей внутри Ω . Представим каждую из функций $v_{n,p}$ в круге K^* с помощью интеграла Пуассона (4.31) в виде

$$v_{n,p}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi. \quad (6.8)$$

Так как $-1 \leq \cos(\varphi - \psi) \leq 1$, то справедливо соотношение

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \leq \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\varphi - \psi)} \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho}. \quad (6.9)$$

Используя условие $v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) \geq 0$, выводим из (6.8) и (6.9), что

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi \leq v_{n,p}(\rho, \varphi) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi.$$

Но в силу формулы среднего значения гармонической функции в \mathbb{R}^2 в (3.16) $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi = v_{n,p}(\mathbf{x}_0)$. С учетом этого приходим к неравенству

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \leq v_{n,p}(\mathbf{x}) \equiv v_{n,p}(\rho, \varphi) \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{K}_0. \quad (6.10)$$

Из условий теоремы вытекает, что $v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ при $n, p \rightarrow \infty$. Из (6.10) тогда следует, что последовательность u_n сходится равномерно в \overline{K}_0 . Отсюда вытекает с учетом первой теоремы Гарнака, что предельная функция u является гармонической внутри K_0 .

Чтобы доказать сходимость последовательности (6.5) в любой точке \mathbf{y} области Ω , соединим эту точку с \mathbf{x}_0 ломаной l , состоящей из конечного числа звеньев и лежащей целиком внутри Ω ; это возможно по определению области. Ломаная l вместе с точками \mathbf{x}_0 и \mathbf{y} есть замкнутое множество. Так как она не имеет общих точек с границей области Ω , то она находится на положительном расстоянии δ от этой границы, которая также является замкнутым множеством. Возьмем теперь на пересечении окружности K_0 с линией l точку \mathbf{x}_1 . Вокруг этой точки, как центра, опишем круг K_1 радиуса $\delta/2$. Из доказанной выше равномерной сходимости последовательности u_n в круге K_0 вытекает ее сходимость в точке \mathbf{x}_1 . Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, показываем, что последовательность u_n сходится и в круге K_1 . Точно так же она сходится равномерно в круге K_2 радиуса $\delta/2$ и на его границе, если центр K_2 лежит на пересечении l с окружностью K_1 . Конечным числом таких кругов K_i ($i = 0, 1, \dots, N$) можно покрыть всю линию l и причем так, чтобы точка \mathbf{y} лежала внутри K_N . Отсюда будет вытекать, что на всей линии l и, в частности, в точке \mathbf{y} последовательность u_n сходится. Так как в каждом из кругов K_i и, в частности, в K_N эта последовательность сходится равномерно, то по первой теореме Гарнака предельная функция будет гармонической в окрестности \mathbf{y} .

Осталось доказать теперь, что последовательность u_n равномерно сходится на всяком замкнутом ограниченном множестве $\overline{\Omega}_0$, лежащем внутри Ω . По теореме Гейне-Бореля множество $\overline{\Omega}_0$ можно покрыть конечным числом кругов K_1, \dots, K_N , лежащих вместе со своими границами внутри Ω . Согласно доказанному выше последовательность u_n сходится в центре каждого из этих кругов. С учетом этого, повторяя приведенные выше рассуждения, показываем, что эта последовательность равномерно сходится в

каждом из кругов K_i , а следовательно, и на всем множестве $\overline{\Omega}_0$. ■

Эту теорему часто называют *второй теоремой Гарнака*.

ТЕОРЕМА 6.4 (об оценках производных гармонических функций). *Пусть в области Ω задано семейство равномерно ограниченных гармонических функций. Тогда в любой области Ω_0 , содержащейся вместе со своей границей внутри Ω , производные всех функций этого семейства равномерно ограничены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – верхняя грань модулей функций рассматриваемого семейства, а $\gamma > 0$ – наименьшее расстояние от границы области Ω_0 до границы Ω . Тогда круг радиуса $\delta = \gamma/2$ с центром в произвольной точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ области Ω_0 целиком лежит внутри Ω .

Так как производная гармонической функции также гармонична, то, используя формулу о среднем значении в (3.16) и формулу (2.4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_K \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \frac{4}{\pi\gamma^2} \int_{\partial K} u \cos(\mathbf{n}, x) ds. \quad (6.11)$$

Здесь u – произвольная функция рассматриваемого семейства, \mathbf{n} – внешняя нормаль к ∂K . Из (6.11) вытекает неравенство

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{4}{\pi\gamma^2} M \cdot \pi\gamma = \frac{4M}{\gamma}.$$

Ввиду произвольности точки \mathbf{x}_0 и функции u отсюда следует равномерная ограниченность в Ω_0 производных по x от всех функций семейства. Аналогично доказывается равномерная ограниченность в Ω_0 их производных по y . ■

ТЕОРЕМА 6.5 (о компактности семейства равномерно ограниченных гармонических функций). *Из любого бесконечного семейства гармонических функций, равномерно ограниченных в области Ω , можно выделить бесконечную подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой ограниченной области Ω_0 , содержащейся вместе с границей внутри Ω .*

Это утверждение вытекает из теоремы Арцела, так как, вследствие теоремы 6.4 все функции семейства в Ω_0 являются равностепенно непрерывными.

ТЕОРЕМА 6.6. (Теорема Лиувилля). *Функция $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа на всей плоскости \mathbb{R}^2 , не может быть ограниченной сверху или снизу, если она не постоянна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что u ограничена снизу, т. е. $u(\mathbf{x}) \geq m = \text{const}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Добавляя при необходимости к функции u постоянную, мы всегда можем достигнуть того, чтобы выполнялось условие $m \geq 0$. Учитывая это условие, покажем, что значение u в любой точке $\mathbf{x} = (x, y)$ в точности равно значению u в начале координат $(0, 0)$. Тем самым будет показано, что $u = \text{const}$. Возьмем для этого круг K с центром в

начале координат $(0, 0)$ такого большого радиуса R , чтобы точка \mathbf{x} лежала внутри него. Представляя в K функцию u в виде интеграла Пуассона (4.31), будем иметь

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi, \quad \rho = |\mathbf{x}|.$$

Отсюда, рассуждая, как при выводе (6.10), выводим, что

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} u(0, 0) \leq u(\mathbf{x}) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} u(0, 0).$$

При $R \rightarrow \infty$ получаем, что $u(0, 0) \leq u(\mathbf{x}) \leq u(0, 0) \Rightarrow u(\mathbf{x}) = u(0, 0)$ ■.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Функция u , являющаяся гармонической на всей плоскости \mathbb{R}^2 , necessarily является константой.*

ТЕОРЕМА 6.7 (об устранимой особенности). *Пусть u - ограниченная функция, гармоническая в окрестности точки \mathbf{x}_0 , за исключением самой точки \mathbf{x}_0 , где u не определена. Тогда функцию u можно определить в точке \mathbf{x}_0 так, чтобы u была гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки \mathbf{x}_0 , в том числе и в самой точке \mathbf{x}_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений примем точку \mathbf{x}_0 за начало координат. Пусть K - круг радиуса R с центром в \mathbf{x}_0 , целиком лежащий внутри рассматриваемой окрестности \mathbf{x}_0 . Пусть u_1 - гармоническая внутри K функция, которая совпадает с u на границе K . Положим $u - u_1 \equiv v$. Функция v ограничена и гармонична во всем круге K , кроме точки \mathbf{x}_0 , где она не определена. На окружности ∂K функция v обращается в нуль. Покажем, что в любой точке $\mathbf{x}^0 \in K$, кроме точки \mathbf{x}_0 , $v(\mathbf{x}^0) \equiv 0$ и, следовательно, $u(\mathbf{x}^0) = u_1(\mathbf{x}^0)$. Для доказательства этого факта, построим, следуя методу гармонических мажорант, функцию

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{M \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/R)}{\ln(\varepsilon/R)}. \quad (6.12)$$

Здесь $M = \sup_{\mathbf{x} \in K} |v(\mathbf{x})|$, ε - положительное число такое, что \mathbf{x}^0 принадлежит кольцу $K_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in K : \varepsilon < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$. Ясно, что функция v_ε гармонична в K_ε и непрерывна в замыкании \overline{K}_ε . Кроме того, она положительна в K_ε , равна нулю при $\rho = R$ и равна M при $\rho = \varepsilon$. Из свойств функции v вытекает, что на границе ∂K_ε кольца K_ε выполняется условие

$$|v(\mathbf{x})| \leq v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (6.13)$$

Это означает, что v_ε является гармонической мажорантой функции v на ∂K_ε . Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (6.13) выполняется в каждой точке кольца K_ε , в том числе и в точке \mathbf{x}^0 , так что

$$|v(\mathbf{x}^0)| \leq v_\varepsilon(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = M \frac{\ln(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0|/R)}{\ln(\varepsilon/R)}. \quad (6.14)$$

Устремим ε к нулю. Тогда правая часть в (6.14) также будет стремиться к нулю. В таком случае из (6.14) будет вытекать, что $v(\mathbf{x}_0) = 0$.

Для доказательства теоремы осталось принять $v(\mathbf{x}_0) = 0$, т. е. положить $u(\mathbf{x}_0) = u_1(\mathbf{x}_0)$. Доопределенная таким образом в \mathbf{x}_0 функция u будет совпадать всюду в K с гармонической функцией u_1 . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Теорема 6.7 верна в более общей формулировке, а именно: пусть u – гармоническая функция в окрестности точки \mathbf{x}_0 , за исключением самой точки \mathbf{x}_0 , где u не определена, и пусть для любой точки \mathbf{x} из этой окрестности выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq \mu(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (6.15)$$

Здесь $\mu(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, когда $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. При этих условиях функцию u можно определить в точке \mathbf{x}_0 так, чтобы u являлась гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки \mathbf{x}_0 , в том числе и в самой точке \mathbf{x}_0 . Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 6.7.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть u – ограниченная и гармоническая в области Ω функция, непрерывная во всех точках границы Ω , за исключением конечного числа точек. При этих условиях функция u не может внутри области Ω принимать значения, большие, чем верхняя грань значений u на границе области Ω , и меньшие, чем нижняя грань значений u на границе Ω .

Действительно, пусть $M = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})$. Для простоты предположим, что u непрерывна во всех точках границы Ω , за исключением одной точки \mathbf{x}_1 . Пусть диаметр области Ω равен R , так что все точки Ω отстоят от \mathbf{x}_1 не больше, чем на R . Построим функцию $v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = M + \varepsilon \ln(R/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|)$. Рассмотрим область Ω_δ , состоящую из точек области Ω , расстояние от которых до \mathbf{x}_1 больше δ . Легко видеть, что на границе этой области $u(\mathbf{x}) < v_\varepsilon(\mathbf{x})$, если δ достаточно мало. В силу принципа максимума тогда имеем $u(\mathbf{x}) < v_\varepsilon(\mathbf{x})$ в Ω_δ . Устремляя ε к нулю, получаем, что $u(\mathbf{x}) < M$ в любой точке \mathbf{x} области Ω_δ . Точно так же выводим, что $u(\mathbf{x}) > m$, где $m = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Все доказанные в настоящем параграфе свойства гармонических функций от двух переменных сохраняются для гармонических функций любого числа n переменных и могут быть доказаны аналогично. При этом условие (6.15) в случае $n > 2$ заменяется условием $|u(\mathbf{x})| \leq \mu(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{2-n}$, где $\mu(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, когда $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

ГЛАВА 7. Элементы теории потенциала

§1. Объемные потенциалы и их свойства

1.1. Определение объемного потенциала. Непрерывная дифференцируемость объемного потенциала в пространстве \mathbb{R}^n . Обозначим через $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ сингулярное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^n , определяемое формулой

$$E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} \quad \text{при } n \geq 3 \quad (1.1)$$

и

$$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{при } n = 2.$$

Здесь ω_n – мера единичной сферы в \mathbb{R}^n (см. § 1 гл. 6). В частности, $\omega_n = 4\pi$ при $n = 3$, так что

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.2)$$

Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \nabla_x E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_y E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.3)$$

Введем пару (Ω, ρ) , где Ω – некоторое множество в \mathbb{R}^n с границей Γ , а ρ – заданная в Ω функция. Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i) Ω – ограниченное открытое (кубируемое) множество в \mathbb{R}^n ;
- (ii) ρ – ограниченная интегрируемая в Ω функция: $|\rho(\mathbf{y})| \leq M \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Объемным (логарифмическим при $n = 2$) потенциалом пары (Ω, ρ) называется функция $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ формулой*

$$u(\mathbf{x}) = [A\rho](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.4)$$

Из результатов § 1 гл. 6 вытекает, что при выполнении условий (i), (ii) объемный потенциал (1.4) существует как собственный интеграл в любой точке $\mathbf{x} \in \Omega_e$, где $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ – внешность Ω , и как несобственный интеграл в любой точке $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Более того, так как функция $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ является всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$ решением уравнения Лапласа, то потенциал u является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической в Ω_e функцией, удовлетворяющей в Ω_e уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и свойств сингулярного решения E_n вытекает также, что при $n \geq 3$ потенциал $u(\mathbf{x})$ стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ с порядком $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$, т. е.

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где C – константа, зависящая от u и Ω . В случае же $n = 2$ формула (1.4) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

или

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.7)$$

Поскольку

$$\ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rightarrow 0 \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

равномерно по $\mathbf{y} \in \Omega$, то второе слагаемое в (1.7) равномерно стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. В то же время первое слагаемое имеет логарифмическую особенность при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что логарифмический потенциал пары (Ω, ρ) в \mathbb{R}^2 имеет логарифмическую особенность при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, исключая случай, когда его плотность ρ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0. \quad (1.9)$$

При выполнении условия (1.9) логарифмический потенциал $u(\mathbf{x})$ равномерно стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Установим еще ряд дополнительных свойств объемного потенциала при выполнении условий (i), (ii). Прежде всего отметим, что потенциал u является непрерывной функцией всюду в \mathbb{R}^n . (На это свойство будем ссылаться как на свойство *глобальной непрерывности* потенциала в \mathbb{R}^n). Действительно, непрерывность u в точках Ω_e очевидна, а в точках $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ она вытекает из n -мерного аналога теоремы 1.2 гл. 6, примененной к функции (1.4).

Покажем, более того, что при выполнении условий (i), (ii) потенциал u является не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой функцией в пространстве \mathbb{R}^n , причем производные по x_i в любой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ получаются дифференцированием в (1.4) по параметру x_i под знаком интеграла, так что справедлива следующая формула

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

В случае трех измерений формула (1.10) переходит в формулу

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

доказанную в § 1 гл. 6 в случае, когда \mathbf{x} лежит вне $\overline{\Omega}$.

В силу аналитичности потенциала u в Ω_e достаточно доказать (1.10) в случае, когда $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Рассматривая для конкретности и наглядности случай трех измерений, возьмем произвольную точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega}$ и введем точку $\mathbf{x}' = (x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$. Предполагая, что $\mathbf{x}' \in \Omega$, составим отношение

$$\frac{\Delta x_1 u(\mathbf{x}')}{\Delta x_1} = \frac{u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x})}{\Delta x_1}$$

и рассмотрим разность

$$\alpha = \frac{\Delta x_1 u(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.12)$$

Докажем, что α стремится к нулю при $\Delta x_1 \rightarrow 0$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и обозначим через $B_\delta(\mathbf{x})$ шар достаточно малого радиуса $\delta = \delta(\varepsilon)$. Положим

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{B_\delta(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_\delta(\mathbf{x})}} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad (1.13)$$

$$u(\mathbf{x}') = u_1(\mathbf{x}') + u_2(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \int_{B_\delta(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_\delta(\mathbf{x})}} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

С учетом (1.13) разность (1.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{u_1(\mathbf{x}') - u_1(\mathbf{x})}{\Delta x_1} \right) - \left(\frac{1}{4\pi} \int_{B_\delta(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + \\ &+ \left(\frac{u_2(\mathbf{x}') - u_2(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_\delta(\mathbf{x})}} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Оценим каждое из трех слагаемых в (1.14). Ясно в силу равномерной сходимости интеграла в правой части (1.11), вытекающей из леммы 1.4

гл. 6, что второе слагаемое в (1.14) может быть сделано меньше $\varepsilon/3$ за счет выбора достаточно малого числа $\delta = \delta(\varepsilon)$. Для оценки первого слагаемого рассмотрим треугольник $\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{y}$ с вершинами в точках \mathbf{x} , \mathbf{x}' , \mathbf{y} . Поскольку стороны этого треугольника равны $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|$ и $|\Delta x_1|$, то, очевидно, имеем $|\mathbf{x}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < |\Delta x_1|$. Используя эту оценку и известное неравенство $|ab| \leq 1/2(a^2 + b^2)$, приходим к следующей оценке

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_1(\mathbf{x}') - u_1(\mathbf{x})}{\Delta x_1} \right| &= \frac{1}{4\pi|\Delta \mathbf{x}_1|} \left| \int_{B_\delta(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}||\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{8\pi} \int_{B_\delta(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В силу равномерной сходимости интеграла $\int_\Omega \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$, вытекающей из той же леммы 1.4, правая часть неравенства (1.15) может быть сделана меньше $\varepsilon/3$ за счет выбора достаточно малого числа $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Обратимся теперь к третьему слагаемому в (1.14). Поскольку $u_2(\mathbf{x})$ представляет собой собственный интеграл в малой окрестности точки \mathbf{x} , то его можно дифференцировать под знаком интеграла. Это означает, что при $|\Delta x_1| < \delta'$, где δ' достаточно мало, выполняется условие

$$\left| \frac{u_2(\mathbf{x}') - u_2(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\delta(\mathbf{x})} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.16)$$

С учетом предыдущего приходим к выводу, что при достаточно малых $|\Delta x_1|$ выполняется условие $|\alpha| \leq \varepsilon$. Это означает справедливость (1.11) при $i = 1$. Аналогично доказывается справедливость равенства (1.11) при $i = 2$ и 3 .

Поскольку правая часть в (1.11), будучи равномерно сходящимся интегралом в каждой точке $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ в силу леммы 1.4 гл. 6, является непрерывной на $\overline{\Omega}$, то из (1.11) вытекает, что $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Обобщая полученные результаты на случай n измерений, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1.1. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда объемный потенциал $u = A\rho$ является непрерывно дифференцируемой функцией в пространстве \mathbb{R}^n , и выполняются соотношения (1.10).

1.2. Существование производных второго порядка от объемного потенциала. Предположим в дополнение к (i), (ii), что ρ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные ограниченные в Ω производные, т. е. что

(iii) $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $|\nabla \rho| \leq M_1 < \infty$ в $\overline{\Omega}$.

ЛЕММА 1.2. При выполнении условий (i), (iii) объемный потенциал $u = A\rho$ принадлежит классу $C^2(\Omega)$, т. е. является дважды непрерывно дифференцируемой функцией внутри области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} \in \Omega$ – произвольная точка. Предположим сначала, что граница Γ области Ω обладает гладкостью, необходимой для применения формулы интегрирования по частям (2.4) из гл. 6, например:

(iv) граница Γ области Ω является кусочно-гладкой.

Обратимся к формуле (1.10) для $\partial u / \partial x_i$. Учитывая согласно (1.3), что $\partial E_n / \partial x_i = -\partial E_n / \partial y_i$, и применяя указанную формулу интегрирования, перепишем (1.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь \mathbf{n}_y – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ в точке \mathbf{y} , $d\sigma_y$ – элемент площади поверхности, относящийся к точке \mathbf{y} .

При $\mathbf{x} \in \Omega$ второе слагаемое в правой части (1.17) имеет (в силу бесконечной дифференцируемости функции $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Gamma$) непрерывные производные по x_i , которые могут быть вычислены дифференцированием под знаком интеграла. Ввиду непрерывности и ограниченности $\partial \rho / \partial y_i$ в области Ω и первое слагаемое в правой части этой формулы имеет в силу леммы 1.1 непрерывные производные 1-го порядка, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y}. \quad (1.18)$$

Это означает, что $u \in C^2(\Omega)$ при выполнении условий (i), (iii), (iv), причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} &= \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если же граница Γ не обладает нужной гладкостью, то выделим в Ω произвольную строго внутреннюю подобласть $\Omega' \subset \Omega$ с гладкой границей Γ' , содержащую точку \mathbf{x} , и перепишем первое равенство в (1.17) в виде

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = - \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega \setminus \Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Применяя к первому интегралу в правой части формулу (2.4) гл. 6, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \int_{\Omega'} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \\ &- \int_{\Gamma'} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}'_y, y_i) d\sigma'_y - \int_{\Omega \setminus \Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь $d\sigma'_y$ – элемент площади поверхности Γ' , \mathbf{n}'_y – единичный вектор внешней нормали к Γ' в точке $\mathbf{y} \in \Gamma'$. Непрерывная дифференцируемость первых двух слагаемых в (1.20) при $\mathbf{x} \in \Omega'$ доказывается точно так же, как непрерывная дифференцируемость обоих слагаемых в (1.17). Что касается третьего слагаемого, то оно является бесконечно дифференцируемой по \mathbf{x} функцией, поскольку $\mathbf{x} \in \Omega'$. Отсюда вытекает, что $u \in C^2(\Omega')$. Поскольку Ω' является произвольной подобластью области Ω , то последнее означает, что на самом деле $u \in C^2(\Omega)$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что функции $\partial^2 u / \partial x_i^2$ в общем случае не определены в точках границы Γ множества Ω . Поэтому, вообще говоря, $u \notin C^2(\bar{\Omega})$.

Докажем теперь, что объемный потенциал (1.4) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (1.21)$$

в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Опять для простоты и наглядности изложения будем рассматривать случай трех измерений. Предположим сначала, что граница Γ области Ω удовлетворяет условию (iv), так что выполняется (1.19).

Суммируя соотношения в (1.19) по индексу i от 1 до 3 и полагая $E \equiv E_3$, имеем с учетом определения сходящегося несобственного интеграла, что

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь $\Omega_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| > \varepsilon\} = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$. Так как в силу свойств сингулярного решения E имеем $\Delta_y E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\varepsilon(\mathbf{x})$, то

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial y_i} \right) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (1.23)$$

Учитывая (1.23) и применяя формулу Гаусса-Остроградского (2.2) из гл. 6 для области Ω_ε , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь Γ_ε – граница шара $B_\varepsilon(\mathbf{x})$, \mathbf{n}_y – внешняя к Ω_ε нормаль.

Поскольку $\mathbf{n}_y = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ на $\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x})$, то с учетом формулы (1.16) гл. 6

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \nabla_y \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \mathbf{n}_y = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (1.25)$$

Из (1.23), (1.24) и (1.25) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\sigma_y}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})}{4\pi \varepsilon^2} d\sigma_y - \rho(\mathbf{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{4\pi \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Но $\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} d\sigma_y = 4\pi \varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon > 0$. Кроме того, в силу условия (iii) имеем $|\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})| \leq \sup_{\mathbf{y} \in \bar{\Omega}} |\nabla \rho(\mathbf{y})| |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq M_1 |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. С учетом этого выводим, что

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})}{4\pi \varepsilon^2} d\sigma_y \right| \leq \frac{M_1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\varepsilon^2} d\sigma_y \leq M_1 \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому, переходя в (1.26) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (1.21).

Если же Ω – произвольное открытое ограниченное множество, как указано в условии (i), то для доказательства (1.21) в окрестности произвольной точки $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, достаточно представить $u(\mathbf{x})$ в виде

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_R} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0), \quad (1.27)$$

где шар $B_R(\mathbf{x}_0)$ лежит в области Ω , $\Omega_R \equiv \Omega_R(\mathbf{x}_0) = \Omega \setminus \overline{B_R(\mathbf{x}_0)}$. Первое слагаемое в (1.27) является гармонической функцией внутри шара $B_R(\mathbf{x}_0)$,

поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Omega_R$, а для второго слагаемого можно применить приведенные выше рассуждения. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда объемный потенциал $u = A\rho$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяет при $n \geq 3$ условию (1.6) на бесконечности, а его сужение на внешность Ω_e множества Ω является аналитической в Ω_e функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Если, более того, выполняются условия (iii), то тогда сужение потенциала u на область Ω принадлежит классу $C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ уравнению Пуассона (1.21).

1.3. Обзор дополнительных свойств объемного потенциала. Эллиптическая регулярность. Приведем здесь обзор некоторых дополнительных свойств объемного потенциала. Начнем с того, что условие (iii), будучи достаточным условием непрерывности вторых производных потенциала u внутри Ω , может быть ослаблено. Чтобы сформулировать более общее условие, введем в рассмотрение пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что функция $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет в $\bar{\Omega}$ условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$ и константой L , если для любой пары точек $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha$.

Обозначим через $C^\alpha(\bar{\Omega})$ множество всех функций, удовлетворяющих условию Гельдера в $\bar{\Omega}$ с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Ясно, что каждая функция $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ является непрерывной в Ω и, следовательно, $C^\alpha(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$. Для каждой функции $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ введем норму по формуле

$$\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \|f\|_{H^\alpha(\bar{\Omega})} \equiv \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha}. \quad (1.28)$$

Известно, что пространство $C^\alpha(\bar{\Omega})$ с так введенной нормой является полным нормированным, т. е. банаховым пространством [28].

Через $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ обозначим подпространство пространства $C^m(\bar{\Omega})$, состоящее из функций в $\bar{\Omega}$, все m -ые частные производные которых удовлетворяют условию Гельдера в $\bar{\Omega}$ с показателем α . Можно показать, что $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ - банахово пространство по норме $\|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})}$, определенной формулой

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{H^\alpha(\bar{\Omega})}. \quad (1.29)$$

Наряду с пространством $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ будем также рассматривать его надпространство $C^{m,\alpha}(\Omega)$. Оно состоит из всех функций пространства $C^m(\Omega)$,

которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем α локально в Ω , т. е. на любом компакте K , целиком лежащем в Ω . В случае неограниченной области Ω_e под $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$ будем понимать подпространство пространства $C^m(\overline{\Omega}_e)$, введенного в п. 3.2 гл. 6, состоящее из функций f , все m -е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α в области вида $\overline{\Omega}_e \cap B_R$, где $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$, а B_R – шар любого радиуса R . Точно так же под $C^{m,\alpha}(\Omega_e)$ будем понимать подпространство пространства $C^m(\Omega_e)$, состоящее из функций f , все m -ые производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α локально в Ω_e , т. е. на любом компакте $K \subset \Omega_e$.

Мы уже знаем, что свойства потенциала u в областях Ω и Ω_e сильно отличаются между собой. С учетом этого введем специальные обозначения для сужений u на Ω и Ω_e : $u^+ = u|_{\Omega}$, $u^- = u|_{\Omega_e}$. Будем говорить, что открытое множество Ω' является строго внутренним подмножеством множества Ω , и писать $\Omega' \subset\subset \Omega$, если $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Предположим, что вместо (iii) выполняется условие

$$(iii') \quad \rho \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Используя введенные пространства, сформулируем следующий результат.

ЛЕММА 1.3. *Пусть выполняются условия (i), (iii'). Тогда $u^+ \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $u^- \in C^{2,\alpha}(\Omega_e)$ и для любого открытого подмножества $\Omega' \subset\subset \Omega$ справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C \|\rho\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (1.30)$$

Здесь C – константа, зависящая от Ω' , n и α , но не зависящая от ρ .

Отметим две особенности оценки (1.30). Во-первых, она носит локальный характер в том смысле, что в левой части $C^{2,\alpha}$ – норма потенциала u берется не по всей области Ω , а лишь по ее строго внутренней подобласти Ω' . Это связано с тем, что в формулировке леммы 1.3 не вводится каких-либо предположений о гладкости границы Γ , которая в общем случае может быть весьма нерегулярной. Последнее определяет поведение решения u вблизи границы, которое также может быть достаточно нерегулярным. Однако в том случае, когда в дополнение к условию (iii') граница Γ обладает определенной регулярностью, потенциал u также будет регулярным в окрестности границы Γ в том смысле, что вторые производные потенциала, существующие как в Ω , так и в Ω_e , допускают непрерывные продолжения как на $\overline{\Omega}$, так и на $\overline{\Omega}_e$. При этом оценка (1.30) переходит в соответствующую глобальную оценку (см. ниже (1.31)).

Более конкретно: будем говорить, что поверхность (кривая при $n = 2$) Γ принадлежит классу $C^{l,\lambda}$, $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, если в некоторой окрестности $B_r(\mathbf{x}_0)$ каждой точки $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ она описывается уравнением $F_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = 0$, где $F_{\mathbf{x}_0} \in C^{l,\lambda}(B_r(\mathbf{x}_0))$ и при $l \geq 1$ $\text{grad} F_{\mathbf{x}_0} \neq 0$ (сравните это определение с определением в § 2 гл. 6). Справедлив следующий результат:

ЛЕММА 1.4. Пусть в дополнение к условиям (i), (iii') $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $u^+ \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $u^- \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_e)$, а оценка (1.30) справедлива при $\Omega' = \Omega$, т. е. принимает вид

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C\|\rho\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}. \quad (1.31)$$

Из леммы 1.4 вытекает, что в случае гладкой границы Γ потенциал u обладает в точках $\mathbf{x} \in \Gamma$ односторонними вторыми производными как изнутри, так и извне, но не вытекает, что эти производные совпадают в точках Γ , образуя тем самым непрерывные в \mathbb{R}^n функции. Естественно, возникает вопрос о непрерывности вторых производных потенциала u в точках границы Γ . Для исследования этого вопроса рассмотрим область $\tilde{\Omega}$, целиком содержащую внутри себя $\bar{\Omega}$, и, продолжив плотность ρ нулем вне $\bar{\Omega}$, запишем потенциал (1.4) в виде

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{\Omega}} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\rho}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.32)$$

Здесь функция $\tilde{\rho}$ определяется формулой

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \text{ и } \tilde{\rho}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.33)$$

Предположим, что пара $(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$ удовлетворяют условиям (i), (iii) или (i), (iii'). Тогда, применяя к потенциалу (1.32) теорему 1.1 либо лемму 1.4, приходим к выводу, что в этом случае $u|_{\tilde{\Omega}} \in C^2(\tilde{\Omega})$. Это условие вместе с условием $u \in C^\infty(\Omega_e)$ позволяет сделать вывод, что $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, т. е. что потенциал обладает в этом случае свойством глобальной двухкратной непрерывной дифференцируемости.

Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем в рассмотрение следующее подпространство пространства $C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$:

$$\dot{C}^{l,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{\rho \in C^{l,\alpha}(\bar{\Omega}) : \tilde{\rho} \in C^{l,\alpha}(\mathbb{R}^n)\}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \dot{C}^\alpha(\Omega) = \dot{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Тогда из предыдущих рассуждений вытекает следующий результат.

ЛЕММА 1.5. Пусть при выполнении условия (i) $\rho \in \dot{C}^\alpha(\bar{\Omega})$. Тогда объемный потенциал u принадлежит пространству $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и для любого ограниченного открытого множества $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}')} \leq C\|\rho\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}. \quad (1.34)$$

Здесь C – константа, зависящая только от диаметра множества Ω' , n и α .

Ясно, что выполнение условия (iii) либо (iii') для функции $\tilde{\rho}$ диктует определенные условия на поведение $\rho(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Gamma$. В частности, функция $\rho(\mathbf{x})$ необходимо должна стремиться к нулю при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Gamma$.

Последнее условие является достаточно жестким и в общем случае не выполняется. Отсюда вытекает, что в общем случае вторые производные от объемного потенциала в точках границы Γ не существуют, хотя могут существовать односторонние производные при выполнении условий леммы 1.4.

Вторая особенность оценки (1.30), как и (1.31), заключается в том, что порядок гладкости потенциала u на две единицы превосходит порядок гладкости правой части ρ . Это не случайно, а является следствием проявления фундаментальной закономерности для эллиптических уравнений, получившей название свойства *эллиптической регулярности*. Согласно этому свойству, порядок гладкости решения эллиптического уравнения порядка $2m$ внутри области на $2m$ единиц превосходит порядок гладкости правой части и коэффициентов рассматриваемого уравнения. Поскольку потенциал u является решением уравнения Пуассона (1.21), т. е. уравнения второго порядка, то в силу этого свойства гладкость потенциала u превосходит на две единицы гладкость правой части, а увеличение порядка гладкости правой части ρ уравнения (1.21) приводит к соответствующему увеличению гладкости потенциала u внутри Ω . В частности, при $\rho \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ потенциал u принадлежит $C^{3,\alpha}(\Omega)$, если же $\rho \in \dot{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, то $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Теперь мы в состоянии сформулировать следующую фундаментальную теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполняются условия (i), (iii'). Тогда $u^+ \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, тогда как u^- является аналитической функцией в Ω_e , удовлетворяющей при $n \geq 3$ условию (1.6) при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Если к тому же $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, то $u^+ \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u^- \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$ и справедлива оценка (1.31).

2. Если $\rho \in \dot{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, то $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка (1.34).

3. Если $\rho \in C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$, то $u^+ \in C^{l+2,\alpha}(\Omega)$ и справедлива локальная оценка

$$\|u^+\|_{C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C \|\rho\|_{C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})} \quad \forall \Omega' \subset \subset \Omega,$$

если, кроме того, $\Gamma \in C^{l+2,\alpha}$, то $u^+ \in C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u^- \in C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$ и справедлива оценка $\|u^+\|_{C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|\rho\|_{C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})}$.

Мы также отметим, что условие $\alpha \in (0, 1)$ является существенным в том смысле, что утверждения теорем в общем случае не верны при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

§2. Элементы теории потенциалов простого и двойного слоя

2.1. Определение потенциала двойного слоя. Пусть Ω – ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с границей Γ , $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, \mathbf{n}_y – единичная внешняя нормаль к поверхности Γ в точке \mathbf{y} , μ – заданная на Γ непрерывная вещественная функция, $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ – сингулярное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^n , определяемое формулами (1.1) и (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Потенциалом двойного слоя зарядов, распределенных по поверхности Γ с плотностью μ , называется функция $u : \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ (поверхностный интеграл, зависящий от параметра \mathbf{x}), определяемая формулой*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \quad (2.1)$$

Здесь $d\sigma_y$ – элемент площади поверхности (длины дуги при $n = 2$), относящийся к точке \mathbf{y} .

Так как $\mathbf{y} \in \Gamma$, а функция $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ является гармонической по \mathbf{x} функцией, причем производная по нормали, определяемая формулой

$$\frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \equiv \nabla_y E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y \equiv \frac{(n-2)(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \cdot \mathbf{n}_y \quad (2.2)$$

при $n \geq 3$, и формулой

$$\frac{\partial E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \equiv \nabla_y E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}_y = -\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}_y \quad (2.3)$$

при $n = 2$, стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ с порядком $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$, то потенциал двойного слоя всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ при $n \geq 2$ является гармонической функцией, стремящейся к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ с порядком $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$. Напомним также (см. § 1, гл. 6), что при $n = 3$ по своему физическому смыслу потенциал двойного слоя описывает кулонов потенциал, создаваемый в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ распределением диполей, сосредоточенных с плотностью μ и осью \mathbf{n}_y на Γ .

Выясним характер поведения функции $u(\mathbf{x})$ при переходе точки \mathbf{x} из Ω в $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Рассмотрим сначала случай двух независимых переменных, когда формула (2.1) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_y. \quad (2.4)$$

В силу (2.3) потенциал (2.4) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y. \quad (2.5)$$

Для упрощения выкладок будем предполагать, как в [9, с. 66], что

(i) Γ является простой замкнутой кривой в \mathbb{R}^2 без точек самопересечения (кривой Жордана) из класса C^2 ; (ii) $\mu \in C^2(\Gamma)$.

Покажем, прежде всего, что при выполнении условий (i), (ii) потенциал двойного слоя (2.4) имеет смысл и в точках Γ , т. е. что в любой точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ существует *прямое значение* потенциала u , определяемое как *сингулярный* интеграл

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|} d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma''_\varepsilon(\mathbf{x}^0)} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $\Gamma''_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ – часть границы Γ , отсекаемая от Γ окрестностью радиуса ε с центром в точке \mathbf{x}^0 (см. рис. 2.1а).

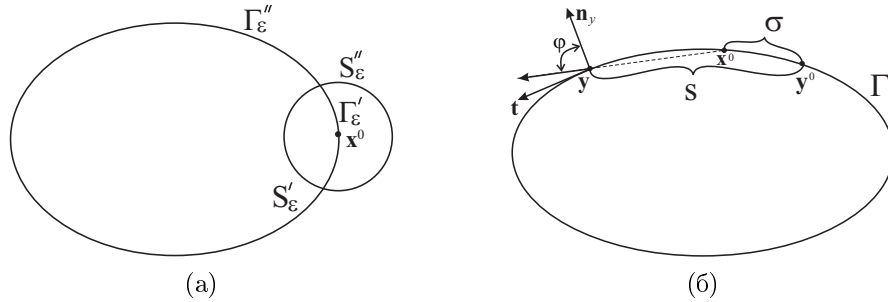


Рис. 2.1

Пусть $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ – фиксированная, а $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ – переменная точки на Γ . Их дуговые абсциссы (т. е. длины дуг на Γ , отсчитываемые от фиксированной точки \mathbf{y}^0 против часовой стрелки до точек \mathbf{x}^0 и \mathbf{y}), обозначим через σ и s соответственно. Наряду с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}_y = \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (n_1(\mathbf{y}), n_2(\mathbf{y}))$ к границе Γ в точке \mathbf{y} , где n_1 и n_2 – декартовы компоненты вектора \mathbf{n} , введем также единичный вектор касательной $\mathbf{t}_y = \mathbf{t}(\mathbf{y}) = (t_1(\mathbf{y}), t_2(\mathbf{y}))$, определяемый в произвольной точке $\mathbf{y} \in \Gamma$ формулой

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(s) = (y'_1(s), y'_2(s)), \quad |\mathbf{t}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y}'(s)| = 1. \quad (2.7)$$

С учетом выбранного направления возрастания s справедливы следующие соотношения между компонентами векторов \mathbf{n}_y и \mathbf{t}_y [19, с. 418] (см. рис. 2.1б)

$$n_1(\mathbf{y}) = t_2(\mathbf{y}) \equiv y'_2(s), \quad n_2(\mathbf{y}) = -t_1(\mathbf{y}) \equiv -y'_1(s). \quad (2.8)$$

Обозначим далее через $\varphi = \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \equiv \varphi(\sigma, s)$ угол между векторами $\mathbf{y} - \mathbf{x}^0$ и $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ в точке \mathbf{y} (см. рис. 2.1б). Поскольку $|\mathbf{n}_y| = 1$, то, очевидно, имеем

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|}. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8) и производя в интеграле (2.6) замену переменной $\Gamma \ni \mathbf{y} \rightarrow s \in [0, l]$, $d\sigma_y = |\mathbf{y}'(s)|ds = ds$, где l – длина границы Γ , перепишем (2.6) в виде

$$\begin{aligned} u[\mathbf{x}^0(\sigma)] &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|} d\sigma_y = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \mu[\mathbf{y}(s)] \frac{\cos \varphi(\sigma, s) |\mathbf{y}'(s)|}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|} ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) вытекает, что для доказательства сходимости интеграла (2.6) и непрерывности его на Γ достаточно доказать непрерывность функции $K : \Pi = [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ (ядра интегрального оператора в (2.10)), определяемой формулой

$$K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \varphi(\sigma, s)}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|}. \quad (2.11)$$

Точнее говоря, так как $K(\sigma, s)$ не определена на диагонали $\sigma = s$ прямоугольника Π , то нам следует доказать, что ядро K так можно доопределить при $\sigma = s$, что доопределенная функция $K : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ становится непрерывной всюду в Π .

Введем функцию

$$\psi(\sigma, s) = \arctg \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \quad (2.12)$$

и отметим, что поскольку с учетом (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \right] =$$

$$= \frac{y'_2(s)[y_1(s) - x_1^0(\sigma)] - y'_1(s)[y_2(s) - x_2^0(\sigma)]}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2} = \frac{[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\sigma, s)}{\partial s} &= \frac{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2 + [y_2(s) - x_2^0(\sigma)]^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{[y_2(s) - x_2^0(\sigma)]}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \right] = \\ &= \frac{[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|^2} = \frac{\cos \varphi(s, \sigma)}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|} = 2\pi K(\sigma, s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя (2.13), покажем теперь, что *функция K непрерывна по совокупности переменных σ, s на Γ* . Действительно, используя обозначения

$$\alpha(\sigma, s) = \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{s - \sigma}, \quad \beta(\sigma, s) = \frac{y_1(s) - x_1^0(\sigma)}{s - \sigma}, \quad (2.14)$$

перепишем выражение для K в виде

$$K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta(\sigma, s)\alpha'_s(\sigma, s) - \alpha(\sigma, s)\beta'_s(\sigma, s)}{\alpha^2(\sigma, s) + \beta^2(\sigma, s)}. \quad (2.15)$$

Предположим, что кривая Γ задана следующими параметрическими уравнениями $y_1 = \xi_1(s)$, $y_2 = \xi_2(s)$, $0 \leq s \leq l$, где l – длина ее дуги. В таком случае, очевидно, имеем

$$y_1(s) - x_1^0(\sigma) = (s - \sigma) \int_0^1 \xi'_1[s + \tau(\sigma - s)] d\tau, \quad (2.16)$$

$$y_2(s) - x_2^0(\sigma) = (s - \sigma) \int_0^1 \xi'_2[s + \tau(\sigma - s)] d\tau. \quad (2.17)$$

Из (2.15) тогда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \sigma} K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_2^{0'}(\sigma)x_1^{0''}(\sigma) - x_1^{0'}(\sigma)x_2^{0''}(\sigma)}{(x_1^{0'})^2 + (x_2^{0'})^2} = \frac{\mathfrak{a}(\sigma)}{2\pi}. \quad (2.18)$$

Здесь $\mathfrak{a}(\sigma)$ – значение кривизны кривой Γ в точке $\sigma \in \Gamma$, причем мы воспользовались известной формулой (см. [19])

$$\mathfrak{a}(\sigma) = \frac{x_2^{0'}(\sigma)x_1^{0''}(\sigma) - x_1^{0'}(\sigma)x_2^{0''}(\sigma)}{(x_1^{0'})^2 + (x_2^{0'})^2} \quad (2.19)$$

для кривизны кривой Γ , заданной параметрическими уравнениями вида (2.16), (2.17). Доопределим $K(\sigma, s)$ при $s = \sigma$ следующим образом: $K(\sigma, \sigma) =$

$\alpha(\sigma)/2\pi$. Поскольку в силу условия (i) функции $\alpha, \beta, \alpha'_s, \beta'_s$ непрерывны по совокупности переменных σ и s , причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \forall \sigma, s$, то убеждаемся в справедливости вывода о непрерывности функции K по совокупности переменных s, σ на Γ .

Из непрерывности функции K на Γ следует, что *прямое значение* (2.6) (либо (2.10)) *потенциала двойного слоя* представляет собой непрерывную функцию от \mathbf{x}^0 (либо от σ) на Γ . Сформулируем полученный результат в виде леммы.

ЛЕММА 2.1. *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение (2.6) потенциала двойного слоя (2.4) является непрерывной на Γ функцией.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При доказательстве леммы 2.1 условие $\mu \in C^2(\Gamma)$ не использовалось. Фактически для ее справедливости достаточно условия $\mu \in C(\Gamma)$, или условия, что μ является интегрируемой (по Лебегу) на Γ функцией.

2.2. Теорема о скачке для потенциала двойного слоя. Пусть $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ – круг достаточно малого радиуса ε с центром в точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, Γ'_ε – часть границы Γ области Ω , лежащая внутри B_ε , $B'_\varepsilon = B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \cap \Omega$, $B''_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus \overline{B'_\varepsilon}$. Обозначим через v функцию класса $C^2(\overline{B_\varepsilon})$, удовлетворяющую условиям

$$v(\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma'_\varepsilon. \quad (2.20)$$

Поскольку $\mu \in C^2(\Gamma)$, то существование такой функции доказывается без труда (см. [9, с. 67]). Пусть S'_ε – часть окружности $S_\varepsilon \equiv S_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \varepsilon\}$, лежащая в области Ω (см. рис. 2.1а).

Предположим, что $\mathbf{x} \notin \overline{B'_\varepsilon}$, и проинтегрируем тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial y_i} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) = \\ = \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \Delta_y \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned} \quad (2.21)$$

по области B'_ε . Учитывая, что $\Delta_y \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$ в $\overline{B'_\varepsilon}$ при $\mathbf{x} \notin \overline{B'_\varepsilon}$, и применяя к левой части (2.21) “двумерную” формулу интегрирования по частям (2.4) из гл. 6, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'_\varepsilon \cup S'_\varepsilon} \left[\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} \right] d\sigma_y = \\ = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in B''_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Используя далее соотношения (2.20) на Γ'_ε , перепишем (2.22) в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left[\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] d\sigma_y = \\ & = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in B''_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Пусть теперь $\mathbf{x} \in B'_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon$. В этом случае предварительно выделим из $B'_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon$ эту точку \mathbf{x} вместе с замкнутым кругом $B_\delta(\mathbf{x})$ достаточно малого радиуса δ с центром в точке \mathbf{x} и проинтегрируем тождество (2.21) по оставшейся области. Устремляя далее δ к нулю и рассуждая так же, как при выводе интегрального представления Грина функции класса C^2 в \mathbb{R}^2 (см. §2 гл. 6), придем к формуле

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left[\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] d\sigma_y + \\ & + q(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{B'_\varepsilon(\mathbf{x}^0)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь $q(\mathbf{x}) = 2\pi$, если $\mathbf{x} \in B'_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ и $q(\mathbf{x}) = \pi$ при $\mathbf{x} \in \Gamma'_\varepsilon$. Обе формулы (2.23) и (2.24) можно записать в виде одной формулы (2.24), считая, что в ней \mathbf{x} изменяется в круге B_ε , если предположить, что функция q в (2.24) удовлетворяет условиям

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2\pi, & \mathbf{x} \in B'_\varepsilon, \\ \pi, & \mathbf{x} \in \Gamma'_\varepsilon, \\ 0, & \mathbf{x} \in B''_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

Положим $\Gamma''_\varepsilon = \Gamma \setminus \Gamma'_\varepsilon$. Рассматривая значения потенциала двойного слоя (2.4) в окрестности точки \mathbf{x}^0 , например, в круге $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$, запишем (2.4) в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \quad (2.26)$$

Замечаем, что во всех точках $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, лежащих в том числе и на участке границы Γ , второе слагаемое в (2.26) совпадает с первым слагаемым левой части равенства (2.24), поделенным на 2π . Это позволяет переписать (2.26) в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y -$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{S'_\varepsilon} \left[v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \frac{1}{2\pi} q(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Анализ формулы (2.27) позволяет сделать несколько важных выводов относительно поведения потенциала двойного слоя (2.4) в окрестности точки \mathbf{x}^0 . Прежде всего отметим, что первые два слагаемых в правой части (2.27) являются бесконечно дифференцируемыми и, более того, гармоническими функциями в малой окрестности точки \mathbf{x}^0 , например, в круге $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$ радиуса $\varepsilon/2$. Третье слагаемое, будучи “плоским” потенциалом пары $(B'_\varepsilon, \Delta v)$, является в силу свойств функции v и теоремы 1.1 непрерывно-дифференцируемой функцией всюду в \mathbb{R}^2 . Поэтому поведение потенциала двойного слоя при переходе точки \mathbf{x} через точку \mathbf{x}^0 целиком и полностью определяется поведением последнего слагаемого, а фактически с учетом условия $v \in C^2(\overline{B}_\varepsilon)$ поведением функции q .

Поскольку функция q принимает постоянные значения на каждой из трех частей B'_ε , Γ'_ε и B''_ε круга B_ε , то функция qv является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на каждой из этих частей. Отсюда, в частности, следует, что сужение потенциала u на границу Γ , т. е. прямое значение потенциала двойного слоя, является непрерывно дифференцируемой функцией в указанной окрестности точки \mathbf{x}^0 . Поскольку \mathbf{x}^0 – произвольная точка границы Γ , то отсюда приходим к следующему результату.

ЛЕММА 2.2. *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение потенциала двойного слоя $u(\mathbf{x}^0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой функцией в каждой точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, т.е. принадлежит классу $C^1(\Gamma)$.*

В то же время последнее слагаемое qv даже не является непрерывной функцией при переходе через границу Γ . Поэтому, когда точка \mathbf{x} переходит из области Ω в область Ω_e через \mathbf{x}^0 , последнее слагаемое в (2.27) претерпевает согласно (2.25) разрыв 1-го рода, тогда как все интегральные члены в правой части (2.27) остаются непрерывно-дифференцируемыми. С учетом этого обстоятельства и формулы (2.25) легко получаем, что величины

$$u(\mathbf{x}^0), \quad u^+(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} u(\mathbf{x}), \quad u^-(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_e}} u(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

удовлетворяют следующим соотношениям

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad u^-(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad (2.29)$$

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u^-(\mathbf{x}^0) = -\mu(\mathbf{x}^0). \quad (2.30)$$

Более того, поскольку интегральные члены в правой части (2.27) непрерывно дифференцируемы при переходе точки \mathbf{x} из Ω в Ω_e через \mathbf{x}^0 , функция q постоянна в Ω и Ω_e , а функция v удовлетворяет условиям (2.20), то из (2.27) и (2.25) следует с учетом второго условия в (2.20), что существуют пределы

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}}, \quad \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_e}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}}, \quad (2.31)$$

причем

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}} = \frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}} \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.32)$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы

ТЕОРЕМА 2.1. *При выполнении условий (i), (ii) потенциал двойного слоя (2.4) при переходе точки \mathbf{x} через границу Γ претерпевает разрыв со скачками, определяемыми формулами (2.29) и (2.30). Более того, в каждой точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ существуют пределы (2.31) и выполняется условие (2.32).*

2.3. Потенциал простого слоя. Теорема о скачке производных от потенциала простого слоя. Пусть сначала $\mu \in C(\Gamma)$ – заданная на Γ непрерывная вещественная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Потенциалом простого слоя масс (либо зарядов), распределенных по поверхности Γ с плотностью μ , называется функция $u : \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (2.33)$$

Из (2.33) и свойств сингулярного решения E_n (см. § 1 гл. 6) вытекает, что потенциал простого слоя u всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ является гармонической функцией, причем при $n \geq 3$ потенциал u стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ с порядком $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$. В случае же $n = 2$ формула (2.33) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y \quad (2.34)$$

или

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln|\mathbf{x}|}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует в силу (1.8), что потенциал простого слоя в \mathbb{R}^2 имеет логарифмическую особенность при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, исключая случай, когда его

плотность μ удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = 0. \quad (2.36)$$

При выполнении условия (2.36) потенциал простого слоя в \mathbb{R}^2 равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Так же, как и в п. 2.1, 2.2, ограничимся рассмотрением случая $n = 2$ при выполнении тех же условий (i), (ii) на Γ и μ . Повторяя рассуждения, используемые выше при выводе формулы (2.27) для потенциала двойного слоя, с той лишь разницей, что в данном случае вместо формулы (2.4) берется формула (2.34), а в качестве v выбирается функция класса $C^2(\overline{B_\varepsilon})$, удовлетворяющая условиям

$$v(\mathbf{y}) = 0, \quad \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n} = \mu(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma'_\varepsilon, \quad (2.37)$$

приходим вместо (2.24) к формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left(\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) d\sigma_y + \\ + q(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.38)$$

По аналогии с прямым значением потенциала двойного слоя *прямым значением потенциала простого слоя* в точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ назовем несобственный интеграл

$$u(\mathbf{x}^0) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}| \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma''_\varepsilon(\mathbf{x}^0)} \ln|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}| \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (2.39)$$

Как и в п. 2.2, будем рассматривать значения потенциала простого слоя (2.34) в круге $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$, в том числе и в точках, лежащих на участке границы Γ . Рассуждая, как и в п. 2.2, перепишем (2.34) с учетом (2.38) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{S'_\varepsilon} \left(v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} \right) d\sigma_y - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2\pi} q(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}). \quad (2.40)$$

По своей структуре формула (2.40) аналогична формуле (2.27). В частности, первые два интеграла в (2.40) являются гармоническими функциями точки $\mathbf{x} \in B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$, тогда как третье слагаемое принадлежит в силу теоремы 1.1 пространству $C^1(\mathbb{R}^2)$. В то же время поведение последнего слагаемого в (2.40) отличается от поведения последнего слагаемого в (2.27). Действительно, в силу первого условия в (2.37), согласно которому v равна нулю на Γ'_ε , функция qv , равная v в $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, стремится к нулю при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$. Поэтому функция qv является непрерывной в $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$. Отсюда следует важный вывод о том, что потенциал простого слоя (в отличие от потенциала двойного слоя) является непрерывным при переходе через границу Γ . Тем не менее нормальная производная от потенциала простого слоя при переходе через границу Γ претерпевает разрыв, который, как легко проверить, определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} &= \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \\ \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} &= -\frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.42)$$

В формулах (2.41) и (2.42) $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n$ представляет собой *прямое значение* производной по нормали от потенциала простого слоя (2.34), определяемое формулой (сингулярным интегралом)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0)}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'_\varepsilon(\mathbf{x}^0)} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0)}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Сформулируем полученные результаты.

ЛЕММА 2.3. *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение потенциала простого слоя $u(\mathbf{x}^0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой функцией в каждой точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, т. е. принадлежит классу $C^1(\Gamma)$.*

ТЕОРЕМА 2.2. *При выполнении условий (i), (ii) потенциал простого слоя (2.34) при переходе точки \mathbf{x} из области Ω в область Ω_ε через точку $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ остается непрерывным, а его нормальная производная $\partial u/\partial n$ претерпевает разрыв со скачками, определяемыми формулами (2.41), (2.42).*

2.4. Обзор дополнительных свойств потенциалов простого и двойного слоя. Установленные выше свойства потенциала двойного слоя (2.3), описываемые леммами 2.1, 2.2 и теоремой 2.1, и потенциала простого слоя (2.34), описываемые леммой 2.3 и теоремой 2.2, справедливы и в случае $n \geq 3$ измерений, причем при более слабых предположениях относительно гладкости границы Γ области Ω и плотности μ . Ограничимся здесь приведением формулировок соответствующих утверждений. Доказательства можно найти, например, в [35]. Предварительно введем понятие поверхности Ляпунова.

Говорят, что замкнутая ограниченная поверхность S является *поверхностью Ляпунова*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в каждой точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ существует касательная плоскость и, следовательно, нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$; 2) существует такое число $r_0 > 0$, что для любой точки $\mathbf{x} \in \Gamma$ множество $\Gamma \cup B_{r_0}(\mathbf{x})$ связно, так что $\Gamma \cup B_{r_0}(\mathbf{x})$ является окрестностью точки \mathbf{x} на поверхности Γ , и оно пересекается прямыми, параллельными нормали $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$, не более, чем в одной точке; 3) поле нормалей непрерывно по Гельдеру с некоторым показателем $\lambda \leq 1$ на Γ , т. е. существуют числа $\lambda \leq 1$ и $C > 0$ такие, что

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{n}(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (2.43)$$

Из приведенного определения вытекает, что поверхности Ляпунова принадлежат классу C^1 . С другой стороны, всякая ограниченная замкнутая поверхность класса C^2 является поверхностью Ляпунова при $\lambda \leq 1$. Таким образом, если обозначить для краткости класс поверхностей Ляпунова через $\tilde{C}^{1,\lambda}$, то справедлива следующая цепочка вложений: $C^2 \subset \tilde{C}^{1,\lambda} \subset C^1$ при $\lambda \leq 1$.

Теперь мы в состоянии сформулировать теоремы об основных свойствах потенциалов простого и двойного слоя. Пусть выполняются следующие условия:

(j) Ω – ограниченное открытое множество пространства \mathbb{R}^n , граница Γ которой является поверхностью Ляпунова из класса $\tilde{C}^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$; (jj) $\mu \in C(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда:

1) Потенциал двойного слоя u определен для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и, в частности, для $\mathbf{x} \in \Gamma$ и удовлетворяет условию на бесконечности, имеющему вид

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{1-n}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

2) Всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ потенциал двойного слоя u имеет производные всех порядков (т. е. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$) и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки \mathbf{x} можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

3) При переходе через границу Γ потенциал двойного слоя и испытывает разрыв. Предельные значения изнутри $u^+(\mathbf{x}^0)$ и извне $u^-(\mathbf{x}^0)$ для каждой точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ существуют и определяются соответственно формулами

$$u^+(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) d\sigma_y, \quad (2.45)$$

$$u^-(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) d\sigma_y, \quad (2.46)$$

так что справедлива формула скачка

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u^-(\mathbf{x}^0) = -\mu(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.47)$$

При этом сингулярный интеграл (прямое значение потенциала двойного слоя)

$$\int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) d\sigma_y \quad (2.48)$$

в формулах (2.45) и (2.46) как функция точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ принадлежит классу $C(\Gamma)$. Кроме того, $u^+ \in C(\bar{\Omega})$, $u^- \in C(\bar{\Omega}_e)$.

4) Если в дополнение к (jj) $\mu \in C^\alpha(\Gamma)$ и $\alpha \leq \lambda$, то $u^+ \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $u^- \in C^\alpha(\bar{\Omega}_e)$, а интеграл (2.48) как функция точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ принадлежит классу $C^\alpha(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда:

1) Потенциал простого слоя и определен и непрерывен для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и, в частности, для $\mathbf{x} \in \Gamma$, а при $n \geq 3$ он удовлетворяет условию на бесконечности, имеющему вид:

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{2-n}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

2) Всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ потенциал простого слоя и имеет производные всех порядков (т. е. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$) и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки \mathbf{x} можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла. Кроме того, $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha \in [0, \lambda)$.

3) При переходе через границу Γ производная по внешней нормали \mathbf{n} к поверхности Γ в произвольной точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ терпит разрыв. Предельные значения $\partial u^+(\mathbf{x}^0)/\partial n$ и $\partial u^-(\mathbf{x}^0)/\partial n$ производной по нормали изнутри и извне существуют, непрерывны всюду на Γ и определяются соответственно формулами

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \quad \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.50)$$

Здесь $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n$ – прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в точке $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, определяемое сингулярным интегралом

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_x} E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (2.51)$$

При этом справедлива формула скачка

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \mu(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \quad (2.52)$$

причем $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n \in C(\Gamma)$.

4) Если в дополнение к (jj) $\mu \in C^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha \leq \lambda$, то $\text{grad} u^+$ и $\text{grad} u^-$ непрерывно продолжаются в $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_e$ соответственно в виде функций $\text{grad} u^+ \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\text{grad} u^- \in C^\alpha(\bar{\Omega}_e)$ и, кроме того, $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n \in C^\alpha(\Gamma)$.

5) Если в дополнение к (j), (jj) $\Gamma \in C^{k+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\mu \in C^{l,\alpha}(\Gamma)$, где l и k такие целые числа, что $0 \leq l \leq k$, то $u^+ \in C^{l+1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $u^- \in C^{l+1,\alpha}(\bar{\Omega}_e)$.

§3. Метод граничных интегральных уравнений

В этом параграфе мы изложим идею одного из основных классических методов исследования краевых задач для эллиптических уравнений – так называемого метода граничных интегральных уравнений. Идея этого метода заключается в том, чтобы решение соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения искать в виде потенциала простого или двойного слоя или некоторой их комбинации. Это позволяет автоматически удовлетворить уравнению Лапласа и, вообще говоря, условию на бесконечности, а подстановка соответствующего представления решения в граничное условие приводит к граничному интегральному уравнению для нахождения неизвестной плотности. Решив это уравнение точно или приближенно, получим искомую плотность соответствующего потенциала простого или двойного слоя, который и является искомым решением рассматриваемой краевой задачи. Подчеркнем еще раз, что сущность описанного метода решения краевых задач для эллиптических уравнений, называемого *методом граничных интегральных уравнений* (МГИУ), заключается в сведении рассматриваемой краевой задачи к граничному интегральному уравнению, т. е. интегральному уравнению по границе Γ области Ω , и последующему решению полученного интегрального уравнения. Это, с одной стороны, позволяет использовать разработанный ранее аппарат теории интегральных уравнений, а с другой – дает мощный стимул к дальнейшему развитию аппарата теории интегральных уравнений.

Ниже мы разберем идею метода граничных интегральных уравнений на примере четырех краевых задач для уравнения Лапласа. Более конкретно, будем рассматривать следующие краевые задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (3.1)$$

в ограниченной области $\bar{\Omega}$ с границей Γ , или во внешности $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ области Ω . Будем предполагать, что Ω удовлетворяет условию (j) из § 2.

ЗАДАЧА 1.1 (внутренняя задача Дирихле). Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (3.1) в области Ω и граничному условию

$$u = g(\mathbf{x}) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.2)$$

ЗАДАЧА 1.2 (внешняя задача Дирихле). Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\bar{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (3.1) в Ω_e , граничному условию (3.2) и условию

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{2-n}) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

ЗАДАЧА 2.1 (внутренняя задача Неймана). Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (3.1) в области Ω и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.4)$$

ЗАДАЧА 2.2 (внешняя задача Неймана). Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\bar{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (3.1) в области Ω_e , граничному условию (3.4) и условию (3.3) на бесконечности.

Начнем с задачи 1.1. Следуя МГИУ, будем искать ее решение u в виде потенциала двойного слоя

$$u(\mathbf{x}) = [W\psi](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y \quad (3.5)$$

с непрерывной (неизвестной пока) плотностью $\psi \in C(\Gamma)$. Из теоремы 2.3 вытекает, что при выполнении условия (j) для любой $\psi \in C(\Gamma)$ потенциал u , определяемый формулой (3.5), удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в Ω , причем $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. С учетом этого остается выбрать ψ так, чтобы функция (3.5) удовлетворяла граничному условию Дирихле (3.2). Пусть $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ – произвольная точка. Переходя в (3.5) к пределу (изнутри) при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ имеем в силу теоремы 2.3, что

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{x} \in \Omega}} u(\mathbf{x}) \equiv u^+(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \quad (3.6)$$

С другой стороны, в силу граничного условия (3.2) имеем

$$u^+(\mathbf{x}^0) = g(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), приходим к соотношению

$$\psi(\mathbf{x}) - 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = -2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) представляет собой граничное интегральное уравнение 2-го рода относительно неизвестной плотности $\psi \in C(\Gamma)$. Из теории линейных интегральных уравнений (см. [36], [42]), вытекает, что для любой функции $g \in C(\Gamma)$ интегральное уравнение (3.8) имеет единственное решение $\psi \in C(\Gamma)$. Решив уравнение (3.8) и подставив найденную плотность ψ в (3.5), получим искомое решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (3.5). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *При выполнении условия (j) функция (3.5) (потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью ψ) является решением внутренней задачи Дирихле тогда и только тогда, когда плотность $\psi \in C(\Gamma)$ в (3.5) является решением интегрального уравнения (3.8).*

Обратимся теперь к внешней задаче Дирихле, которую рассмотрим в случае $n \geq 3$ измерений. Предполагая, что $0 \notin \overline{\Omega}_e$, будем искать ее решение в виде

$$u(\mathbf{x}) = [W\psi](\mathbf{x}) + A|\mathbf{x}|^{2-n}, \quad (3.9)$$

где A – некоторая постоянная. Поскольку функция $|\mathbf{x}|^{2-n}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в \mathbb{R}^n , кроме точки $\mathbf{x} = 0$, то в силу теоремы 2.3 функция (3.9) при выполнении условия (j) удовлетворяет уравнению Лапласа (3.1) всюду в Ω_e для любой функции $\psi \in C(\Gamma)$ и любой константы A . Кроме того, функция (3.9) удовлетворяет условию регулярности (3.3) на бесконечности. С учетом этого выберем ψ (при фиксированной пока константе A) так, чтобы функция (3.9) удовлетворяла граничному условию (3.2). Рассуждая, как и выше, легко показываем, что для этого функция ψ должна удовлетворять граничному интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}) - \frac{2A}{|\mathbf{x}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *При выполнении условия (j) функция (3.9), где A – произвольная константа, является решением внешней задачи Дирихле в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, тогда и только тогда, когда плотность $\psi \in C(\Gamma)$ в (3.9) является решением интегрального уравнения (3.10).*

Некоторую неудовлетворенность вызывает здесь тот факт, что в представлении (3.9) решения задачи 1.2 входит произвольная пока постоянная A , тогда как решение внешней задачи Дирихле единственно (см. гл. 6). Однако анализ уравнения (3.10) показывает, что соответствующее однородное уравнение

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.11)$$

так же, как сопряженное к нему однородное уравнение, имеющее вид

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_y} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.12)$$

имеет нетривиальное решение $\psi_0 = 1$. Хорошо известно, что для рассматриваемых здесь линейных интегральных уравнений справедлива альтернатива Фредгольма (см. [36, 42] и § 5). Согласно ей соответствующее неоднородное уравнение (3.10) имеет решение $\psi \in C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда правая часть в (3.10) ортогональна функции ψ_0 , т. е. когда

$$\int_{\Gamma} \left[g(\mathbf{x}) - \frac{A}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \right] d\sigma = 0.$$

Это условие выделяет единственную константу A , для которой существует решение ψ уравнения (3.10), которому, в свою очередь, отвечает решение внешней задачи Дирихле в виде (3.9). Не имея возможности в этом параграфе останавливаться на анализе существования и единственности решения интегрального уравнения (3.10), отсылаем читателя к книгам [41, 42], где детально изложены соответствующие вопросы.

Отметим также, что некоторая сложность решения внешней задачи Дирихле объясняется тем, что регулярная на бесконечности гармоническая функция u убывает при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ с порядком $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$, тогда как потенциал двойного слоя $[W\psi](\mathbf{x})$ ведет себя как $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Вот почему произвольную гармоническую в неограниченной области Ω_e функцию u нельзя, вообще говоря, представить в виде потенциала $W\psi$. Добавление к потенциалу $W\psi$ слагаемого $A/|\mathbf{x}|^{n-2}$ и позволяет преодолеть указанную трудность в решении внешней задачи. Аналогичная трудность возникает и в случае двух измерений. Действительно, в этом случае потенциал двойного слоя убывает с порядком $O(|\mathbf{x}|^{-1})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, тогда как условие регулярности (3.3) при $n = 2$ эквивалентно лишь ограниченности гармонической функции u на бесконечности. О методах преодоления этой трудности можно прочитать в [41, § 35].

Обратимся к задаче 2.1. Следуя МГИУ, будем искать ее решение u в виде

$$u(\mathbf{x}) = [V\varphi](\mathbf{x}) + A = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y + A \quad (3.13)$$

суммы потенциала простого слоя с непрерывной плотностью φ и произвольной константы A . Из теоремы 2.4 вытекает, что при выполнении условия (j) для любой $\varphi \in C(\Gamma)$ потенциал $V\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω . То же справедливо и для функции (3.13). С учетом этого остается выбрать $\varphi \in C(\Gamma)$ так, чтобы функция (3.13) удовлетворяла граничному условию (3.4).

Пусть $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ – произвольная точка. В силу теоремы 2.4 предельное значение производной по нормали от функции (3.13) в произвольной точке \mathbf{x}^0 существует и определяется формулой

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y. \quad (3.14)$$

С другой стороны, в силу граничного условия (3.4) имеем

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = g(\mathbf{x}^0). \quad (3.15)$$

Приравнявая (3.14) и (3.15), приходим к соотношению

$$\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.16)$$

Равенство (3.16) представляет собой искомое граничное интегральное уравнение 2-го рода относительно неизвестной плотности $\varphi \in C(\Gamma)$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы

ТЕОРЕМА 3.3. *При выполнении условия (j) функция (3.13) является решением внутренней задачи Неймана тогда и только тогда, когда плотность $\varphi \in C(\Gamma)$ в (3.13) является решением интегрального уравнения (3.16).*

Можно показать, что соответствующее (3.16) сопряженное однородное уравнение

$$\mu(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.17)$$

имеет единственное нетривиальное решение $\mu_0 = 1$. Поэтому в силу альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (3.16) разрешимо тогда и

только тогда, когда выполняется условие ортогональности

$$\int_{\Gamma} \mu_0(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\sigma \equiv \int_{\Gamma} g(\mathbf{x})d\sigma = 0. \quad (3.18)$$

При этом общее решение уравнения (3.16) представимо в виде $\varphi(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + C\varphi_0(\mathbf{x})$. Здесь $\hat{\varphi}$ – частное решение уравнения (3.16), а φ_0 – решение соответствующего однородного уравнения

$$\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

которое в силу альтернативы Фредгольма существует и определяется с точностью до мультипликативной постоянной. Подчеркнем, что условие (3.18) совпадает с необходимым условием разрешимости краевой задачи (3.1), (3.4).

В заключение рассмотрим задачу 2.2. Следуя МГИУ, будем искать ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(\mathbf{x}) = [V\varphi](\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y})E(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\sigma_y \quad (3.19)$$

с непрерывной (неизвестной пока) плотностью $\varphi \in C(\Gamma)$. Рассуждая, как и в случае внутренней задачи Неймана, но учитывая, что предельное значение $\partial u^-(\mathbf{x}^0)/\partial n$ производной по нормали от функции (3.13) в точке \mathbf{x}^0 определяется формулой

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = -\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y, \quad (3.20)$$

приходим к граничному интегральному уравнению 2-го рода относительно неизвестной функции φ , имеющему вид

$$-\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.21)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.4. *При выполнении условия (j) функция (3.19) является решением внешней задачи Неймана тогда и только тогда, когда плотность $\varphi \in C(\Gamma)$ в (3.19) является решением интегрального уравнения (3.21).*

Можно показать, что при $n \geq 3$ решение уравнения (3.21) для любой функции $g \in C(\Gamma)$ существует и единственно. При $n = 2$ соответствующее однородное сопряженное уравнение

$$-\mu(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0 \quad (3.22)$$

имеет единственное нетривиальное решение $\mu_0(\mathbf{x}) = 1$. Поэтому неоднородное уравнение (3.21) имеет решение $\varphi \in C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда правая часть уравнения (3.21) ортогональна функции μ_0 , т. е. когда $\int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma = 0$. При выполнении этого условия существует единственное решение $\hat{\varphi}$ уравнения (3.21), удовлетворяющее условию $\int_{\Gamma} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) d\sigma = 0$, а общее решение уравнения (3.21) имеет вид $\varphi(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + C\varphi_0(\mathbf{x})$. Здесь C – произвольная постоянная, а φ_0 – решение соответствующего однородного уравнения

$$-\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Существование решения φ_0 вытекает из альтернативы Фредгольма.

Подчеркнем, что применение МГИУ для всех рассмотренных выше краевых задач привело к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Это не случайно, а связано с тем обстоятельством, что задача нахождения решения интегрального уравнения 2-го рода является корректно поставленной задачей. В противоположность этому, задача решения интегрального уравнения 1-го рода является примером некорректных задач [53].

Напомним, что МГИУ создавался в начале века, когда математики избегали исследования некорректных задач. Вот почему они применяли такую схему МГИУ, которая сводила рассматриваемую краевую задачу к решению именно интегральных уравнений 2-го рода.

Как уже указывалось в гл. 2, в настоящее время теория некорректных задач завоевала право на свое существование и является важным разделом современной математики. Поэтому теперь допускаются и такие схемы МГИУ, которые приводят к интегральным уравнениям 1-го рода. Чтобы пояснить одну из этих схем, обратимся к задаче Дирихле (3.1), (3.2). Будем искать ее решение u в виде потенциала простого слоя $V\varphi$ в (3.13) при $\varphi \in C(\Gamma)$. Поскольку потенциал $V\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в Ω , то остается выбрать φ так, чтобы функция $u = V\varphi$ удовлетворяла условию Дирихле (3.2). Рассуждая, как и при выводе интегрального уравнения (3.8), приходим в силу свойства непрерывности потенциала простого слоя всюду в \mathbb{R}^n к следующему интегральному уравнению 1-го рода

для нахождения неизвестной функции φ :

$$\int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.23)$$

Решив его, получим решение задачи Дирихле (3.1), (3.2) в виде потенциала простого слоя $V\varphi$.

Отметим, что к настоящему времени построена достаточно полная теория исследования интегральных уравнений 1-го рода вида (3.23). Это делает изложенную схему отыскания решения задачи Дирихле в виде $V\varphi$ вполне конкурентноспособной как в теоретическом, так и в вычислительном плане, по отношению к изложенной выше схеме отыскания ее решения в виде (3.5).

Указанная схема применима и для внешней задачи Дирихле (3.1)–(3.3), а также для внутренней и внешней задач Неймана. В частности, решение внутренней задачи Неймана (3.1), (3.4) можно искать не в виде (3.13), а в виде суммы потенциала двойного слоя (3.5) и произвольной константы A . Подставляя это представление в (3.4), приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.24)$$

Опять получили уравнение 1-го рода относительно неизвестной функции ψ . Однако, в отличие от простого интегрального уравнения (3.23) с несобственным поверхностным интегралом в левой части, левая часть (3.24) определяет так называемый *гиперсингулярный* интегральный оператор. Это связано с тем, что ядро интегрального оператора в (3.24) ведет себя при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ как $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$ (в случае трех измерений). Несмотря на это, теория исследования интегральных уравнений вида (3.24) достаточно хорошо разработана в определенных функциональных пространствах. Это делает изложенную схему нахождения решения задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя вполне работоспособной.

§4. Метод функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона

Рассмотрим общую краевую задачу для уравнения Пуассона в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Она заключается в нахождении решения u уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f \quad \text{в } \Omega, \quad (4.1)$$

удовлетворяющего на границе $\Gamma = \partial\Omega$ общему краевому условию

$$[Bu](\mathbf{x}) \equiv \alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Здесь f – заданная в Ω функция, имеющая смысл плотности объемных источников поля u , α , β и g – заданные на Γ функции, причем, в частности, функция g имеет смысл плотности поверхностных источников поля u .

Как уже указывалось в §2, объемный потенциал $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой

$$u(\mathbf{x}) = [Af](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (4.3)$$

где $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, удовлетворяет при выполнении условий (i)–(iii) из §2 уравнению (4.1) в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Но, конечно, потенциал (4.3) не обязан удовлетворять условию (4.2) хотя бы потому, что формула (4.3) не содержит информации о функциях α , β и g .

В этом параграфе поставим своей целью так изменить формулу (4.3) путем прибавления к правой части некоторой гармонической функции, чтобы новая функция удовлетворяла не только уравнению (4.1), но и граничному условию (4.2). На этом пути приходим к фундаментальному понятию функции Грина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Функцией Грина краевой задачи (4.1), (4.2) для области Ω называется функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определенная при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{y} \in \Omega$ и удовлетворяющая при каждом фиксированном $\mathbf{y} \in \Omega$ условиям:*

1) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ как функция точки $\mathbf{x} \in \Omega$ является фундаментальным решением оператора Лапласа в области Ω и, следовательно, представима в виде

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.4)$$

где функция $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ как функция $\mathbf{x} \in \Omega$ является гармонической функцией в Ω , принадлежащей классу $C^1(\bar{\Omega})$.

2) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет граничному условию

$$\alpha(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.5)$$

Следует отметить, что функция Грина существует не для всякой краевой задачи вида (4.1), (4.2). Действительно, согласно определению 4.1 это имеет место тогда и только тогда, когда для любой точки $\mathbf{y} \in \Omega$ существует гармоническая в Ω функция v указанного в определении 4.1 класса, удовлетворяющая на границе Γ условию вида

$$\alpha(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}} = -\alpha(\mathbf{x})E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \beta(\mathbf{x})\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \quad (4.6)$$

Здесь правая часть зависит от $\mathbf{y} \in \Omega$ как от параметра. Существование такого решения в свою очередь имеет место лишь при определенных условиях на вид и гладкость границы Γ области Ω , а также функций α и β , описывающих *физические* свойства границы Γ . Единственность же функции Грина G имеет место тогда и только тогда, когда однородная краевая задача (4.1), (4.2) имеет своим решением лишь тождественный нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Согласно определению сингулярного решения оператора Лапласа и определению 4.1 функции G и v при каждом $\mathbf{y} \in \Omega$ удовлетворяют соответственно уравнениям $\Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta_x v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Здесь $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – трехмерная δ -функция Дирака с центром в точке $\mathbf{y} \in \Omega$. При этом первое уравнение выполняется в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\langle \Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle = - \langle \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

при каждом фиксированном $\mathbf{y} \in \Omega$, а второе – в классическом смысле в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Здесь индекс “ x ” у оператора Δ означает, что он применяется к G или к v как функции от \mathbf{x} , $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций (см. [11, § 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из (4.4) и (4.5) вытекает, что по своему физическому смыслу функция Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задачи (4.1), (4.2) представляет собой значение в точке $\mathbf{x} \in \Omega$ потенциала поля, создаваемого единичным точечным источником, сосредоточенным в точке \mathbf{y} области Ω , ограниченной поверхностью Γ . Физические свойства этой поверхности определяются типом рассматриваемого граничного условия в (4.2). В частном случае задачи Дирихле ($\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$) потенциал G обращается в нуль на Γ . Это означает, что поверхность Γ является эквипотенциальной (заземленной при электростатической интерпретации). При этом, если первое слагаемое $1/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ в (4.4) представляет собой потенциал самого точечного источника, расположенного в точке $\mathbf{y} \in \Omega$, то второе слагаемое в (4.4) имеет смысл потенциала поля, образуемого при “отражении” поля исходного источника от поверхности Γ .

Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет условию

(i) Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^3 , граница которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей.

Известно, что для такой области Ω справедлива вторая формула Грина

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\mathbf{y} = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma \quad (4.7)$$

и интегральное представление Грина

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} +$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] d\sigma. \quad (4.8)$$

Мы предполагаем, что u и v обладают нужной гладкостью (см. § 2 гл. 6).

ЛЕММА 4.1. Пусть область Ω удовлетворяет условию (i) и выполняется одно из двух условий

$$(ii) \quad \alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \beta(\mathbf{x}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma; \quad (iii) \quad \beta(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Тогда функция Грина G является симметричной функцией своих аргументов в области $\Omega \times \Omega$, т. е. в дополнение к условиям 1) и 2) в определении 4.1

$$3) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, выполняется условие (iii), т. е. (4.1), (4.2) представляет собой третью краевую задачу. Обозначим через \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 произвольные, но фиксированные точки области Ω и докажем, что

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (4.9)$$

Построим две сферы S_1 и S_2 малого радиуса ε с центрами в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 и введем в Ω_ε функции

$$u_1(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1),$$

$$u_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2),$$

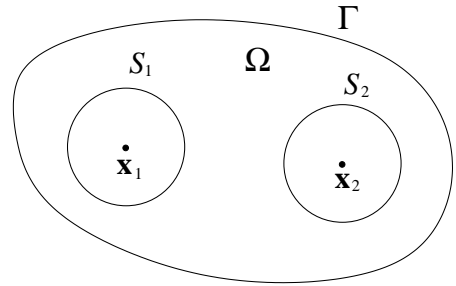
где $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)} \cup \overline{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)})$. Применим вторую формулу Грина (4.7) к функциям u_1 и u_2 в области Ω_ε . Это законно, так как в области Ω_ε функции u_1 и u_2 согласно определению 4.1 принадлежат классу $C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$.

Учитывая, что $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$ в Ω , а интеграл по поверхности

$$\int_{\Gamma} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma \equiv \int_{\Gamma} \left[u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} + \eta u_2 \right) - u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + \eta u_1 \right) \right] d\sigma, \quad \text{Рис. 4.1.}$$

где $\eta = \alpha/\beta$, обращается в нуль в силу условия (4.5), приходим к равенству

$$\int_{S_1} \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) d\sigma = - \int_{S_2} \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4.10)$$



Рассмотрим левую часть равенства (4.10). Применяя теорему о среднем и учитывая, что $\int_{S_1} d\sigma = 4\pi\varepsilon^2$, ее можно записать в виде:

$$\left[u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} - u_1(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} \right] 4\pi\varepsilon^2, \quad \mathbf{x}_\varepsilon \in S_1, \quad (4.11)$$

где \mathbf{x}_ε – некоторая точка. В силу определения 4.1 функции $u_2 \partial v(\cdot, \mathbf{x}_1) / \partial n$ и $v(\cdot, \mathbf{x}_1) \partial u_2 / \partial n$ являются непрерывными и ограниченными внутри сферы S_1 . Поэтому, переходя в (4.11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 &= \\ \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{x}_1|} + v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1) \right] \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 &\rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 &= \left[-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi r} \Big|_{r=\varepsilon} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1)}{\partial n} \right] 4\pi\varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) = \\ &= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1)}{\partial n} \right] u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow u_2(\mathbf{x}_1) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что левая часть (4.10) стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Точно так же показывается, что правая часть (4.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. В силу равенства обоих пределов получаем (4.9). Поскольку точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 произвольные, то из (4.9) вытекает симметричность функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при выполнении условия (iii), т. е. в случае третьей краевой задачи. Симметричность функции Грина при выполнении условия (ii), т. е. для первой краевой задачи доказывается аналогичным образом (см., например, [56, с. 341]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Свойство симметричности функции Грина при указанной в замечании 4.2 ее физической интерпретации можно трактовать как математическое выражение известного *принципа взаимности* в физике: источник, помещенный в точку \mathbf{y} , производит в точке \mathbf{x} такое же действие, какое производит в точке \mathbf{y} источник, помещенный в точку \mathbf{x} .

Из свойства симметричности функции Грина и представления (4.4) вытекает симметричность функции v , а также некоторые дополнительные свойства функции G и v , из которых отметим следующие:

4) при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in \Omega$ функции G и v как функции аргумента $\mathbf{y} \in \Omega$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.12)$$

$$\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (4.13)$$

при этом v как функция точки \mathbf{y} является гармонической в области Ω , принадлежащей классу $C^1(\overline{\Omega})$;

5) при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in \Omega$ функции G и v удовлетворяют соответственно граничным условиям

$$\alpha(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (4.14)$$

$$\alpha(\mathbf{y})v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} = -\alpha(\mathbf{y})\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \beta(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (4.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Нетрудно показать, что справедливо и обратное: если существует функция $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принадлежащая как функция точки \mathbf{y} классу $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ при каждом $\mathbf{x} \in \Omega$ и удовлетворяющая однородному уравнению (4.13) и краевому условию (4.15), то функция (4.4) симметрична по \mathbf{x} и \mathbf{y} и является функцией Грина задачи (4.1), (4.2). Для доказательства этого утверждения достаточно провести предыдущие рассуждения в обратном порядке. Отсюда, в частности, следует, что для доказательства существования функции Грина задачи (4.1), (4.2) достаточно доказать существование функции $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, обладающей указанными выше свойствами.

Чтобы выяснить математический смысл введения функции Грина, предположим, что существует как решение u задачи (4.1), (4.2) из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, так и функция $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, являющаяся при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in \Omega$ гармонической функцией точки \mathbf{y} в области Ω из того же класса. Применим к функциям u и $v(\mathbf{x}, \cdot)$ формулу Грина (4.7). Учитывая, что

$$\Delta u = -f, \quad \Delta_y v = 0 \quad \text{в } \Omega \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.16)$$

будем иметь

$$0 = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \left[v(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y.$$

Складывая эту формулу с формулой (4.8) для функции u при $\mathbf{x} \in \Omega$, где следует положить $\Delta u = -f$, приходим с учетом обозначения (4.4) к формуле

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y. \quad (4.17)$$

Рассмотрим отдельно три случая, отвечающие соответственно первой, второй и третьей краевым задачам для уравнения (4.1).

1. $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 1, \beta(\mathbf{x}) \equiv 0$. Пусть функция v такова, что

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда согласно замечанию 4.4 функция G будет иметь смысл функции Грина первой краевой задачи для уравнения (4.1), а формула (4.17) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} g(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.18)$$

2. $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\beta(\mathbf{x}) \equiv 1$. Пусть функция v выбрана так, что

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда функция G будет являться функцией Грина второй краевой задачи для уравнения (4.1), а формула (4.17) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.19)$$

3. $\beta(\mathbf{x}) = 1$, $\alpha(\mathbf{x})$ – гладкая функция. Пусть функция v выбрана так, что

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} + \alpha(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда в этом частном случае функция G будет иметь смысл функции Грина третьей краевой задачи для уравнения (4.1), а формула (4.17) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.20)$$

Таким образом, знание функции Грина в рассмотренных трех случаях позволяет выписать явное представление решения соответствующей краевой задачи для уравнения (4.1) через ее исходные данные по одной из формул (4.18), (4.19), (4.20). В этом и заключается математический смысл введения функции Грина.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Вместо термина “функция Грина” $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в литературе иногда используют термины “функция источника” (см., например, [56, с. 338]) или “функция влияния”.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Как уже указывалось, знание функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ позволяет найти решение краевой задачи (4.1), (4.2) по одной из формул (4.18), (4.19) или (4.20), причем последняя формально совпадает с формулой (4.19). В свою очередь, для определения функции G необходимо определить функцию v , являющуюся регулярным решением оператора Лапласа в области Ω , удовлетворяющим граничному условию (4.15) на поверхности $\Gamma = \partial\Omega$. Может создаться впечатление, что имеет место порочный круг: для решения краевой задачи (4.1), (4.2) необходимо решить аналогичную

краевую задачу для функции v . На самом деле порочного круга нет, так как знание функции Грина позволяет решить краевую задачу (4.1), (4.2) для неоднородного уравнения (4.1) с *произвольной* правой частью f при *произвольной* граничной функции g . В то же время для нахождения самой функции Грина G достаточно решить краевую задачу для однородного уравнения Лапласа лишь со *специальным* граничным условием вида (4.15) на границе Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Требование принадлежности функции $v(\cdot, \mathbf{y})$ классу $C^1(\overline{\Omega})$ в определении 4.1 является слишком жестким. В некоторых случаях, например, для задачи Дирихле, оно может быть заменено более слабым требованием: $v \in C(\overline{\Omega})$. Однако при таком условии на функцию v возникает необходимость в обосновании применимости формулы Грина для функций u и v , что значительно усложняет вывод формулы (4.17). Более подробно этот вопрос для уравнения Пуассона изучается в [11, § 23].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. При выводе формул (4.18)–(4.20) мы делали предположение о существовании достаточно гладкого решения соответствующей краевой задачи (4.1), (4.2). Искомое же решение задачи (4.1), (4.2), даже если оно существует, может обладать меньшей гладкостью. Это будет, например, в случае, когда функции $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})$ являются лишь непрерывными и тем более кусочно-непрерывными или интегрируемыми функциями. Таким образом, не давая доказательства существования решений рассматриваемых краевых задач, формулы (4.18)–(4.20) дают лишь интегральное представление достаточно гладких решений (класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$) указанных краевых задач при условии существования функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Поэтому при решении конкретных краевых задач необходимо возникает задача обоснования этих формул, т. е. проверки того, что каждая из них при определенных условиях на гладкость исходных данных действительно дает решение соответствующей краевой задачи. Для изучения этого вопроса необходимо исследовать свойства интегралов

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} g(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (4.21)$$

входящих в (4.17). В свою очередь, для изучения интегралов (4.21) необходимо предварительно изучить свойства интегралов – гармонических потенциалов

$$\int_{\Omega} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad \int_{\Gamma} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma. \quad (4.22)$$

Свойства гармонических потенциалов были изучены в § 1 и 2.

§5. Элементы теории интегральных уравнений

Интегральным уравнением принято называть такое уравнение, которое содержит искомую функцию под знаком интеграла. В частности, следующее уравнение является интегральным уравнением относительно функции φ :

$$\alpha(x)\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (5.1)$$

где α , f и $K(\cdot, \cdot)$ – известные функции, а φ – неизвестная функция. Функция

$$K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (либо } \mathbb{C}) \quad (5.2)$$

называется ядром интегрального уравнения (5.1), а функция f называется его *правой частью*. Подчеркнем, что уравнение (5.1) является линейным.

При $\alpha(x) \equiv 1$ уравнение (5.1) принимает вид

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy + f(x). \quad (5.3)$$

Уравнения вида (5.3) называются *линейными интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода* в честь шведского математика Е.И. Fredholm, который впервые их исследовал в начале 20-го века. Если $f = 0$, то уравнение (5.1) называется *однородным*. В случае, когда $\alpha = 0$, (5.1) обращается в уравнение

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = -f(x), \quad (5.4)$$

называемое линейным интегральным уравнением *1-го рода*.

С каждым интегральным уравнением можно связать интегральный оператор A , действующий по формуле

$$[A\varphi](x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy. \quad (5.5)$$

В таком случае уравнение (5.3) можно записать в виде

$$\varphi(x) - [A\varphi](x) = f. \quad (5.6)$$

Будем также рассматривать уравнение с параметром λ

$$\varphi(x) - \lambda[A\varphi](x) = f. \quad (5.7)$$

Смысл λ таков: если для некоторого λ найдется такая функция φ , что

$$\varphi(x) - \lambda[A\varphi](x) = 0, \quad (5.8)$$

то число λ называется *характеристическим числом оператора* A , а отвечающее ему число $1/\lambda$ называется *собственным значением* оператора A .

Будем считать, что оператор A действует в некотором пространстве X . Обычно рассматривают два случая:

1. $X = C[a, b]$. Предполагается, что $K \in C([a, b] \times [a, b])$.
2. $X = L^2[a, b]$. Предполагается, что $K \in L^2((a, b) \times (a, b))$.

В обоих случаях в X вводится скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Оператор $A^* : X \rightarrow X$ называется *сопряженным* оператором к оператору $A : X \rightarrow X$, если

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in X. \quad (5.9)$$

Нетрудно показать, что оператор A^* , сопряженный к оператору A в (5.5), определяется формулой

$$[A^*\psi](y) = \int_a^b K(x, y)\psi(x)d\mathbf{x}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим далее два неоднородных уравнения

$$\varphi - \lambda A\varphi = f, \quad (5.11)$$

$$\psi - \lambda A^*\psi = f^*, \quad (5.12)$$

и два однородных уравнения

$$\varphi - \lambda A\varphi = 0, \quad (5.13)$$

$$\psi - \lambda A^*\psi = 0, \quad (5.14)$$

где оператор A определяется формулой (5.5).

Справедливы следующие теоремы, называемые *теоремами Фредгольма*.

ТЕОРЕМА 5.1. *Однородное уравнение (5.13) и сопряженное с ним уравнение (5.14) при фиксированном значении параметра λ имеют либо тривиальное решение, либо одинаковое конечное число $m > 0$ линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$.*

ТЕОРЕМА 5.2. *Неоднородное уравнение (5.11) (либо (5.12)) разрешимо, т. е. имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть f (либо f^*) ортогональна полной системе линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения (5.14) (либо (5.13)); т. е. выполняются соотношения*

$$(f, \psi_i) = \int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = 0,$$

$$\text{либо } (f^*, \varphi_i) = \int_a^b f^*(x) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

ТЕОРЕМА 5.3. (*Альтернатива Фредгольма*). Либо неоднородное уравнение (5.11) разрешимо для любой правой части f , либо соответствующее сопряженное однородное уравнение (5.14) так же, как и (5.13), имеет нетривиальные решения.

ТЕОРЕМА 5.4. Множество собственных значений интегрального оператора A (так же, как и A^*) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теоремы 5.1–5.4 впервые доказал в 1903 г. Фредгольм.

Литература

- [1] *Адамар Ж.* Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [2] *Алексеев Г.В.* Численные методы решения задач математической физики. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1987. 88 с.
- [3] *Алексеев Г.В.* Математические основы акустики океана. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1988. 228 с.
- [4] *Алексеев Г.В.* Обратные задачи излучения волн и теории сигналов. Части I-II. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1991. 276 с.
- [5] *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. М.: Наука, 1994.
- [6] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
- [7] *Бабиш В.М., Григорьева Н.С.* Ортогональные разложения и метод Фурье. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 240 с.
- [8] *Берс Л., Джон Ф., Шефтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.
- [9] *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
- [10] *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
- [11] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [12] *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах (математическое моделирование). М.: Наука, Физматлит, 1995. 300 с.
- [13] *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
- [14] *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
- [15] *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 640 с.
- [16] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. М.: МЦНМО, 1998. 788 с.
- [17] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.
- [18] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1971. 600 с.

- [19] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. М.: Наука, 1980. 448 с.
- [20] *Коробейников В.П.* Принципы математического моделирования. Владивосток, ДальНаука, 1997. 240 с.
- [21] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов И.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматиздат, 1962. 712 с.
- [22] *Крикунов Ю.М.* Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1970. 210 с.
- [23] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М.: Мир, 1964.
- [24] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Пер. с нем. Т. 1. М-Л. Гостехиздат, 1967. 704 с.
- [25] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Пер. с нем. Т. 2. М-Л. Гостехиздат, 1970. 672 с.
- [26] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Пер. с нем. Т. 1, 2. М-Л. Гостехиздат, 1951.
- [27] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. Изд-во СОАН СССР, 1962. 92 с.
- [28] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
- [29] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. (Теоретическая физика. Т. 1). М.: Наука, 1988.
- [30] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. (Теоретическая физика. Т. 4). М.: Наука, 1988.
- [31] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. (Теоретическая физика. Т. 6). М.: Наука, 1989.
- [32] *Мизохата.* Теория уравнений с частными производными. М: Мир, 1977. 504 с.
- [33] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
- [34] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
- [35] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
- [36] *Михлин С.Н.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
- [37] *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
- [38] *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.

- [39] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1973. 392 с.
- [40] *Овсянников Л.В.* Введение в механику сплошных сред. Т. 1-2. Новосибирск. Изд-во НГУ, 1977. 140 с.
- [41] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматиздат, 1961. 400 с.
- [42] *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 128 с.
- [43] *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979. 336 с.
- [44] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [45] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М.: Наука, 1997. 320 с.
- [46] *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1997. 240 с.
- [47] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.
- [48] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Часть I. М.: Наука, 1981. 552 с.
- [49] *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1974.
- [50] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [51] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз, 1959. 468 с.
- [52] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР, 1943. Т. 39. N 5. С. 195–198.
- [53] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [54] *Тихонов А.Н., Васильева А.В., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
- [55] *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. 190 с.
- [56] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1999. 800 с.
- [57] *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
- [58] *Шушмарев И.А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1979. 184 с.
- [59] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.1. Physical Origins and Classical Methods. Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag. 1988. 720 p.
- [60] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.3. Spectral Theory and Applications. Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag. 1988. 542 p.