ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

«Реализация программ построения и преобразования двумерных объектов»

Цель работы: изучить геометрические преобразования двумерных объектов (перенос, масштабирование, поворот).

Задание.

Для выбранного варианта необходимо:

1. Создать матрицу ключевых точек для каждой фигуры, образующей замкнутый контур. По координатам ключевых точек построить изображение заданной фигуры, используя 2D график.
2. Провести перенос фигуры на расстояние вдоль горизонтали и вертикали. Построить изображение преобразованной фигуры.
3. Провести неоднородное и однородное масштабирование заданной фигуры. Построить изображение преобразованной фигуры.
4. Провести поворот заданной фигуры. Построить изображение преобразованной фигуры.

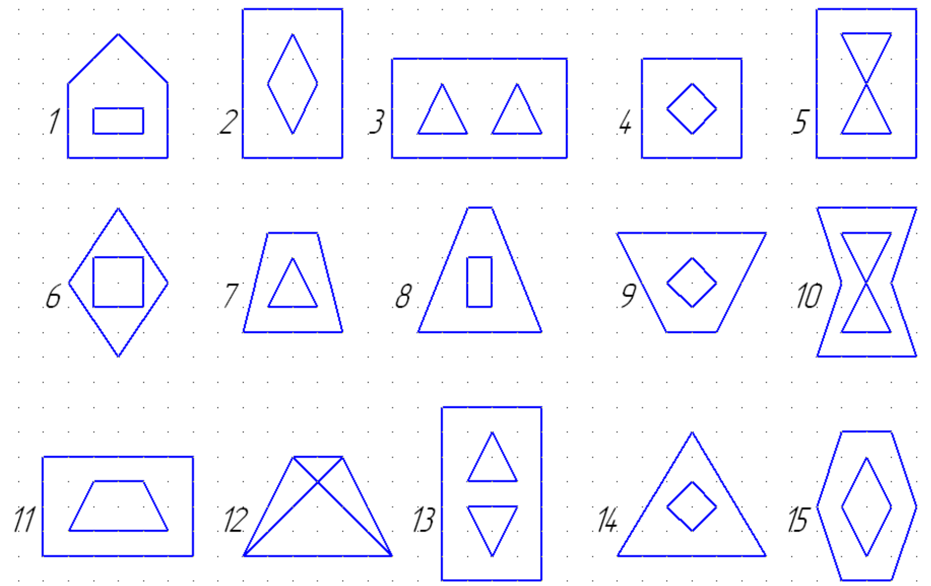

Рисунок 1.1 – Варианты заданий

Теоретические сведения.

Геометрические объекты на плоскости можно подвергать ряду различных преобразований. Наиболее употребительными в задачах компьютерной графики являются: перемещение (параллельный перенос); изменение размеров (масштабирование); повороты вокруг некоторой точки на плоскости (вращение). В далее будем отождествлять точки пространства с радиус-вектором, определяемым этой точкой.

Перенос

Параллельный перенос объекта сводится к перемещению всех его точек на одно и то же расстояние D в одном и том же направлении, заданном определённым вектором $\vec{v}$. Если вектор имеет длину D, то операция переноса может быть реализована путём сложения всех точек объекта с вектором $\vec{v}$. При такой операции сохраняются расстояния между точками и углы между отрезками, а также, отрезки прямых перейдут в отрезки прямых.

Математическая модель переноса: для каждой точки $P(x,y)$, которая перемещается в новую точку $P'(x',y')$, сдвигаясь на D_x единиц по оси X и на D_y по оси Y:

$$x' = x + D_x,\ y' = y + D_y.$$

Определим векторы-строки: $P = (x\ \ y)$, $P' = (x'\ \ y')$, $T = (D_x\ \ D_y)$, тогда уравнение переноса можно записать в виде: $(x'\ \ y') = (x\ \ y) + (D_x\ \ D_y)$, или в матричной форме: $P' = P + T$.

Масштабирование

Масштабирование объекта можно реализовать путём умножения координат всех его точек на некоторое число. Пусть имеются точки с координатами $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$, над которыми выполняется такое преобразование. Результатом будут новые точки с координатами $(S_x\, x_1,\ S_y\, y_1)$ и $(S_x\, x_2,\ S_y\, y_2)$. Если $S_x = S_y = S_0$, то обе точки переместятся вдоль прямых, проходящих через саму точку и начало координат. При этом расстояние между новыми точками будет в S_0 раз отличаться от прежнего, но углы между отрезками сохранятся. Если коэффициент масштабирования $S_0 > 1$, соответствующий отрезок растягивается, а если меньше, то сжимается. Кроме того, при таком преобразовании объект смещается. В случае, когда $S_x \neq S_y$, расстояния между точками изменятся неравномерно, поскольку растяжения в горизонтальном и вертикальном направлениях будут различными. Углы между отрезками также не сохранятся.

Математическая модель масштабирования при масштабировании в S_x раз по оси X и в S_y раз по оси Y, имеет вид:

$$x' = x\, S_x,\ y' = y\, S_y.$$

Определив матрицу масштабирования S в виде:

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix},$$

можно записать в матричной форме:

$$(x' y') = (x\ y) \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$$

или $P' = P\, S$.

Поворот

Вращения в плоскости перемещают точки по дуге окружности, центр которой находится в начале координат. Рассмотрим сначала движение одной точки при повороте на угол α (положительным является направление против часовой стрелки), т.е. поворот радиус-вектора на угол (рисунок 1.2). Пусть точка располагалась на расстоянии r от начала координат, а её радиус-вектор составлял угол β с осью абсцисс. Тогда координаты точки определяются формулами:

$$x = r\cos(\beta),\ y = r\sin(\beta)$$

После поворота вектор будет составлять угол $(\beta + \alpha)$, а новые координаты точки будут определяться соотношениями:

$$x' = r\cos(\beta + \alpha) = r\cos(\beta)\cos(\alpha) - r\sin(\beta)\sin(\alpha) = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha),$$
$$y' = r\sin(\beta + \alpha) = r\sin(\beta)\cos(\alpha) + r\cos(\beta)\sin(\alpha) = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha).$$

При таком преобразовании сохраняются расстояния между точками и углы между отрезками.

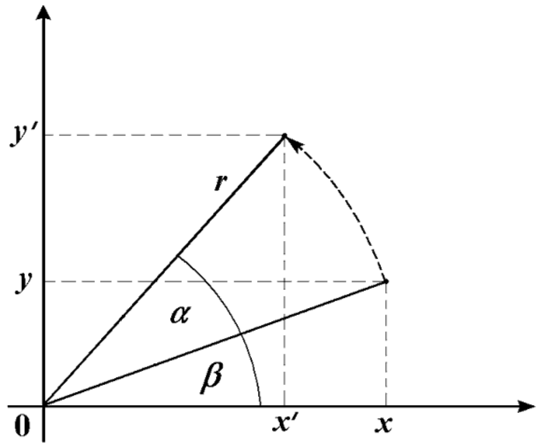

Рисунок 1.2 — Поворот на плоскости.

Преобразование поворота можно записать в матричной форме:

$$(x'y') = (x\ y)\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

или, определив матрицу поворота как:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

в краткой форме соответствует записи:

$$P' = P\,R.$$

Примеры результатов выполнения лабораторной работы.

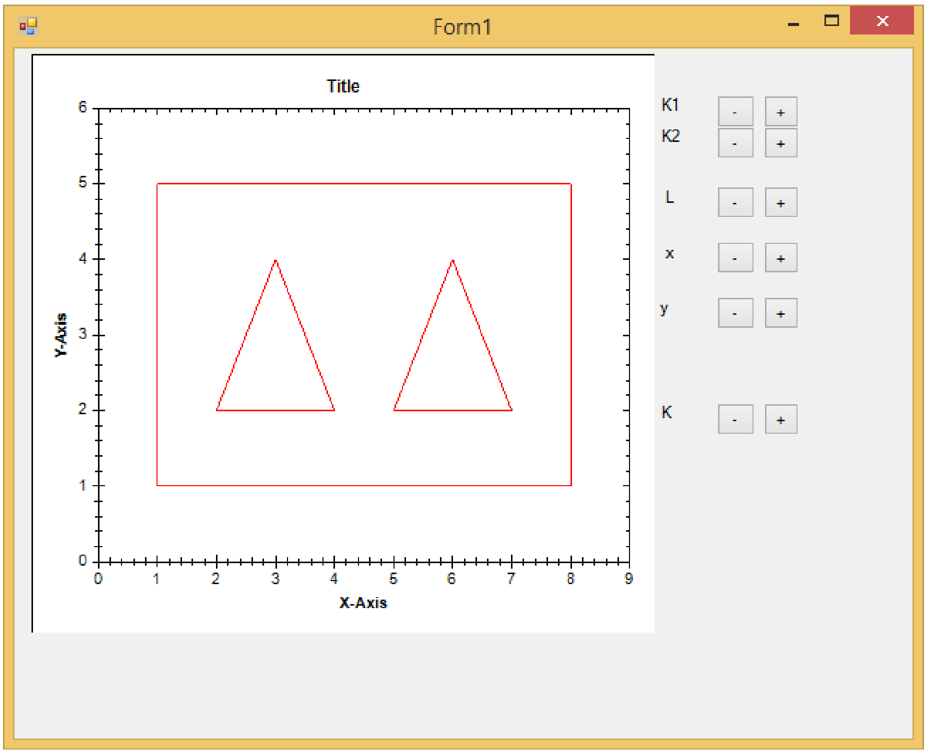

Рисунок 1.3 – Главное окно с исходным объектом

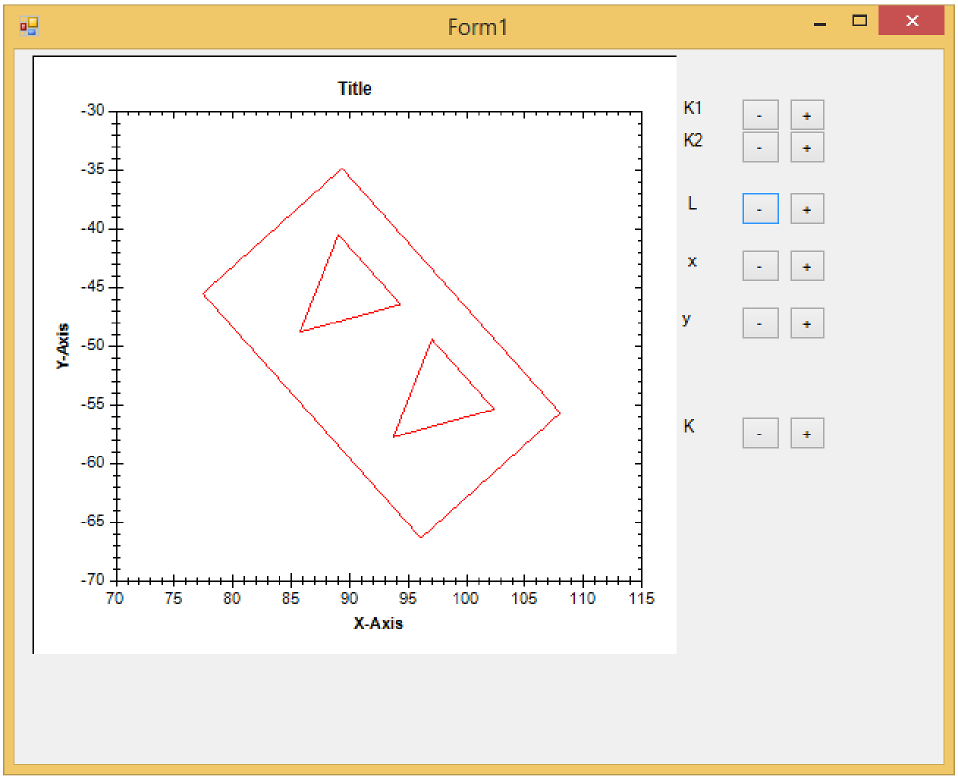

Рисунок 1.4 – Результат поворота, масштабирования и смещения по осям

Контрольные вопросы.

1. Какие способы задания координаты точки на плоскости вам известны?
2. Чем определяются декартовы координаты точки на плоскости?
3. Что такое геометрическое преобразование?
4. Как реализуется перенос фигуры на плоскости?
5. Какую операцию необходимо произвести с координатами точек фигуры для осуществления масштабирования фигуры?
6. Какие способы реализации поворота фигуры на плоскости вам известны?