

Казанский Приволжский федеральный
университет

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для проведения практических занятий
по курсу

"УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ"

Казань
2010

УДК 517.9 : 519.6

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
ФГАУВПО "Казанский (Приволжский)
федеральный университет" методической комиссии
механико-математического факультета
протокол номер 5 от 1 апреля 2010г.

Составители:
к.ф.-м. н., доцент И.Г.Салехова,
к.ф.-м.н., старший преподаватель С.Г.Аблаева

Методическое пособие для проведения практических занятий
по курсу "Уравнения математической физики". – Казань: КФУ, 2010.
– 149 с.

Учебное пособие для студентов механико-математического фа-
культета, физического факультета и факультета ВМК.

Учебное пособие предназначено для проведения практических
занятий по курсу "Уравнения математической физики". В начале каж-
дого занятия приводятся элементы теории, необходимые для решения
задач по соответствующей теме. Приводится решение одной задачи, а
затем даются задачи для аудиторного и домашнего задания.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. И.А. Бикчантаеву
за ценные указания и замечания.

© Казанский Приволжский
федеральный университет, 2010

З А Н Я Т И Е 1

Тема. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (КОЛЕБАНИЕ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ)

Исследование многих задач физики и механики проводится с помощью дифференциальных уравнений с частными производными. Уравнения 2-го порядка описывают основные физические процессы: колебание, теплопроводность, диффузию. В дальнейшем мы будем рассматривать такие уравнения. Изучение физического процесса методами математической физики происходит по следующим этапам.

I. Математическая формулировка задачи (постановка задачи математической физики).

II. Решение задачи.

III. Физическая интерпретация решения.

Математическая формулировка решения проводится по следующему плану.

1. Идеализация процесса, т.е. замена реального процесса моделью, учитывающей лишь наиболее существенные черты процесса и пренебрегающей рядом его второстепенных черт (построение физической модели).
2. Выбор функции, характеризующей процесс, и основных законов и принципов, по которым он происходит (принцип Даламбера, закон Гука, закон сохранения энергии, закон Фурье и т.д.).
3. Вывод уравнения относительно выбранной функции. Применяя выбранные законы к элементарной части изучаемого объекта, получают некоторое равенство относительно функции и ее производных. Разделив полученное равенство на приращения независимых переменных и осуществив предельный переход при стремлении приращений к нулю, получают искомое уравнение.
4. Вывод дополнительных (краевых) условий: граничных (по координатам), заданных на границе рассматриваемой среды, начальных (по времени), относящихся к моменту времени, с которого начинается изучение явления.

В задачах на колебание струн и стержней используются следующие законы.

1. Принцип Даламбера: все силы, действующие на колеблющуюся систему, включая и силы инерции, должны уравновешиваться.
2. Закон Гука: упругая сила пропорциональна относительной деформации (удлинению, укорочению).

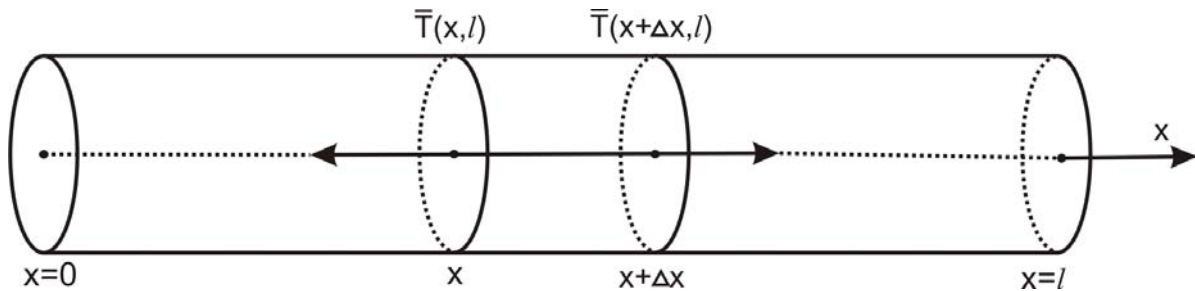
З а д а ч и

1.1. Упругий прямолинейный однородный стержень длиной l и постоянной площадью сечения S выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что во время движения поперечные сечения остаются параллельными плоскости, перпендикулярной к оси стержня, поставить задачу для определения малых продольных колебаний стержня при $t > 0$. Рассмотреть случаи, когда концы стержня: а) закреплены жестко, б) двигаются в продольном направлении по заданным законам, с) свободны, д) закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению. Влияние силы тяжести на колебание частиц считать пренебрежимо малым по сравнению с влиянием упругих сил, поэтому действием силы тяжести пренебречь.

Р е ш е н и е. Стержень - это тело цилиндрической формы, для изгибания, растяжения (сжатия) которого нужно приложить известное усилие. Если несколько растянуть стержень вдоль оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут упругие силы (силы натяжения), уравнивающие действие внешних сил. Возникают свободные продольные колебания.

1. Идеализация процесса состоит в том, что пренебрегают деформацией поперечных сечений стержня и действием силы тяжести.

2. Пусть ось x совпадает с направлением оси стержня (см. рис). За характеризующую функцию возьмем смещение $U(x, t)$ вдоль оси x в момент t поперечного сечения, абсцисса которого в состоянии равновесия равна x .



Так как рассматриваются малые колебания, то упругие силы подчинены закону Гука. Найдем прежде всего относительное удлинение стержня в сечении x в момент t . Подсчитаем относительное удлинение элемента $[x, x + \Delta x]$ в момент t . Координаты концов этого элемента в момент t равны соответственно

$$x + U(x, t), \quad x + \Delta x + U(x + \Delta x, t),$$

а его относительное удлинение

$$\frac{[U(x + \Delta x, t) + x + \Delta x - U(x, t) - x] - \Delta x}{\Delta x},$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим относительное удлинение в сечении x равным $U_x(x, t)$. Тогда по закону Гука величина силы натяжения, действующей в этом сечении перпендикулярно к сечению, равна $T(x, t) = ESU_x(x, t)$, где E – модуль Юнга.

3. Для вывода уравнения рассмотрим элемент $[x, x + \Delta x]$. На основании закона Гука проекция на ось x равнодействующей сил натяжения равна

$$T(x + \Delta x, t) - T(x, t) = ES[U_x(x + \Delta x, t) - U_x(x, t)].$$

Проверим правильность выбора знаков в последней формуле. Действительно, если, например, $U(x, t)$ монотонно возрастает по x , то стержень растянут, значит, $T_l \leq 0$, а $T_r \geq 0$. В то же время $\frac{\partial U}{\partial x} \geq 0$. Значит, знаки выбраны верно.

$$T_l = -T(x, t) = -ESU_x(x, t), \quad T_r = T(x + \Delta x, t) = ES\frac{\partial U}{\partial x}(x + \Delta x, t)$$

Если же $U(x, t)$ монотонно убывает, то стержень сжат, значит, $T_l \geq 0$, а $T_r \leq 0$. В то же время $\frac{\partial U}{\partial x} \leq 0$.

Сила инерции, которую можно считать направленной вдоль оси стержня, равна $-mU_{tt}(x, t)$, где $m = \rho S \Delta x$, ρ – объемная плотность стержня.

На основании принципа Даламбера приравниваем нулю сумму проекций всех сил, действующих на элемент $[x, x + \Delta x]$,

$$ES[U_x(x + \Delta x, t) - U_x(x, t)] - \rho S \Delta x U_{tt}(x, t) = 0.$$

Сокращая на $S \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение колебаний стержня:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad a^2 = E/\rho, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1_0)$$

4. Запишем начальные условия. Предположим, что в начальный момент стержень был растянут и точкам стержня были приданы некоторые начальные скорости. Следовательно, мы должны знать смещение поперечных сечений стержня в момент $t = 0$, а также начальные скорости точек стержня

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где φ, ψ – заданные функции.

Вывод граничных условий:

а) так как в случае жесткого закрепления отклонения концов не происходит, то

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = 0, t \geq 0, \varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad (3a)$$

$$b) U(0, t) = \mu_1(t), U(l, t) = \mu_2(t) (\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)); \quad (3b);$$

с) при выводе граничных условий в данном случае применяют к граничным элементам $[0, \Delta x]$, $[l - \Delta x, l]$ рассуждения, используемые при выводе уравнения (1₀). На конце $x = 0$ равнодействующая упругих сил равна $T(\Delta x, t) = ESU_x(\Delta x, t)$, сила инерции $-\rho S \Delta x U_{tt}(0, t)$. Приравнявая нулю сумму всех сил, действующих на участок $[0, \Delta x]$, в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $U_x(0, t) = 0$. Проводя аналогичные рассуждения для конца $x = l$, получим

$$U_x(0, t) = 0, U_x(l, t) = 0; \quad (3c)$$

д) в случае упругого закрепления конца $x = 0$ нужно учесть, что со стороны упругой заделки на конец $x = 0$ действует сила $-kU(0, t)$, где k - коэффициент упругости заделки. Рассуждая аналогично в), получим

$$U_x(0, t) - hU(0, t) = 0, U_x(l, t) + hU(l, t) = 0, h = \frac{k}{ES}. \quad (3d)$$

Итак, задача о малых продольных колебаниях стержня привела нас к следующей задаче математической физики: в области $Q_\infty = [0, l] \times [0, \infty)$ найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1₀), начальным условиям (2), граничному условию одного из видов (3a), (3b), (3c), (3d).

1.2. Составить уравнение продольных колебаний стержня с переменной площадью поперечного сечения $S(x)$, считая материал стержня однородным.

О т в е т:

$$S(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} [S(x) \frac{\partial U}{\partial x}], a^2 = \frac{E}{\rho}.$$

1.3. На упругий однородный прямолинейный стержень, один конец которого жестко закреплен, а другой свободен, действует внешняя сила, направленная вдоль оси стержня, причем объемная плотность ее равна $p(x, t)$. Поставить задачу о малых продольных колебаниях стержня, если при $t = 0$ поперечные сечения были неподвижны и находились в неотклоненном положении.

О т в е т:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + g(x, t), \quad g(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho},$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$$

1.4. Поставить задачу о продольных колебаниях однородного стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, если конец $x = 0$ закреплён жестко, а конец $x = l$ свободен. Начальные отклонения равны $\varphi(x)$, а начальные скорости отсутствуют.

У к а з а н и е. При выводе уравнения нужно учесть силу трения, причем сила, действующая на единицу поверхности, равна $-kU_t$, где k - коэффициент трения.

О т в е т:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} - 2\nu U_t, 2\nu = \frac{kp}{S\rho},$$

p - периметр поперечного сечения.

$$U|_{t=0} = \varphi(x), U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$$

1.5. Однородный стержень длиной l , закреплённый в точке $x = 0$ растянут силой $P \equiv const$, приложенной к другому его концу. В момент $t = 0$ действие силы мгновенно прекращается, после чего стержень предоставлен самому себе. Записать начальные и граничные условия задачи о продольных колебаниях этого стержня.

У к а з а н и е. Для определения $U(x, 0)$ надо учесть, что в момент $t = 0$ сила натяжения во всех сечениях постоянна и равна P .

О т в е т:

$$U|_{t=0} = \frac{Px}{ES}, U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

1.6. Тяжелый однородный стержень длиной l подвешен вертикально и зацеплен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент $t = 0$ стержень освобождается. Поставить задачу о вынужденных колебаниях стержня.

О т в е т: $U_{tt} = a^2 U_{xx} + g$, g -ускорение силы тяжести,

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0;$$

1.7. Начиная с момента $t = 0$, конец $x = 0$ однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому $x = l$ приложена сила $\Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент $t = 0$ сечения стержня были неподвижны и находились в неотклонённом положении. Поставить задачу о продольных колебаниях этого стержня.

О т в е т:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad U|_{x=0} = \mu(t), U_x|_{x=l} = \frac{\Phi(t)}{ES}.$$

1.8. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Сформулировать начальные и граничные условия задачи о малых поперечных колебаниях этой струны.

У к а з а н и е. Уравнение поперечных колебаний струны относительно отклонения $U(x, t)$ от положения равновесия струны с абсциссой x в момент t выводится на лекции и имеет вид (1₀), где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, T_0 – величина силы натяжения.

О т в е т:

$$U(x, 0) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(x-l)}{c-l}, & c \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0$$

1.9. Точкам однородной струны длины l в момент $t = 0$ сообщаются начальные отклонения и скорости. Сформулировать начальные и граничные условия задачи о малых поперечных колебаниях струны, если концы струны: а) свободны, т.е. могут свободно перемещаться по прямому, параллельному направлению отклонения; б) закреплены упруго.

О т в е т:

$$U|_{t=0} = \varphi(x), U_t|_{t=0} = \psi(x),$$

$$\text{а) } U_x|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0,$$

$$\text{б) } (U_x - hU)|_{x=0} = 0, (U_x + hU)|_{x=l} = 0, h = \frac{k}{T_0}.$$

З А Н Я Т И Е 2

Тема. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА)

Пусть твердое изотропное тело неравномерно нагрето, тогда, благодаря теплопроводности, в нем будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Примем следующую модель процесса: происходит механический перенос тепла (тепло распространяется подобно движению жидкости), все тепло идет на изменение температуры, свойства тела от температуры не зависят. Основной характеристикой этого процесса является температура $U(x, t)$ точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент t .

Процесс движения тепла описывается следующими законами.

1. Закон сохранения энергии: все тепло идет на нагревание.

2. Количество тепла, которое необходимо сообщить малому объему тела ΔV , чтобы повысить его температуру на ΔU , равно

$$\Delta Q = c(x)\rho(x)\Delta V\Delta U = c(x)\rho(x)\Delta V[U(x, t + \Delta t) - U(x, t)], \quad (1)$$

где $c(x)$ - удельная теплоемкость, $\rho(x)$ - плотность вещества.

3. Закон внутренней теплопроводности (Фурье): количество тепла, протекающее за малое время Δt через малую площадку ΔS в точке x внутри тела в сторону нормали \vec{n} к этой площадке, равно

$$\Delta Q = -k(x)\frac{\partial U(x, t)}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

где $k(x)$ - коэффициент теплопроводности (зависимостью k от U пренебрегаем).

4. Закон внешней теплопроводности (Ньютона): количество тепла, входящее в тело через малую площадку $\Delta\sigma$ на границе тела за время Δt , равно

$$\Delta Q = \alpha(U_0 - U(x, t))\Delta\sigma\Delta t, \quad (2)$$

где α - коэффициент теплообмена, U_0 - температура окружающей среды.

З а д а ч и

2.1. Поставить задачу об определении температуры стержня длины l с площадью сечения S и теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией x ; рассмотреть случаи, когда а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре, б) на концы подается извне заданный тепловой поток, в) на концах происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

Р е ш е н и е.

1. Если стержень неравномерно нагрет, то в нем происходит передача тепла. Идеализация процесса нами была указана выше. Кроме того, будем предполагать стержень настолько тонким, что температура всех точек поперечного сечения будет одной и той же (поперечные сечения являются изотермическими поверхностями).

2. Примем ось стержня за ось x (см 1.1). Тогда за характеризующую функцию возьмем температуру $U(x, t)$ сечения x в момент t .

3. Для вывода уравнения выделим внутри стержня элемент $[x, x + \Delta x]$ и составим для него на основании закона сохранения энергии баланс тепла за время Δt . Так как боковая поверхность теплоизолирована, то этот элемент может получить тепло только через сечения x и $x + \Delta x$. Обозначим через \vec{n}_1 и \vec{n}_2 нормали к сечениям x и $x + \Delta x$ соответственно, направленные внутрь элемента. Тогда приращение количества тепла в элементе за время Δt равно

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = -k(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial n_1} S \Delta t - k(x + \Delta x) \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial n_2} S \Delta t = \\ &= [k(x + \Delta x) \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - k(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}] S \Delta t,\end{aligned}$$

при этом мы учли, что направление нормалей \vec{n}_2 и \vec{n}_1 соответственно противоположно и совпадает с направлением оси x . По закону сохранения энергии то же количество тепла можно выразить через приращение температуры по формуле (1):

$$\Delta Q_3 = c(x) \rho(x) S \Delta x [U(x, t + \Delta t) - U(x, t)],$$

Приравнявая ΔQ и ΔQ_3 , сокращая на $S \Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение теплопроводности:

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}], \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3_0)$$

Если стержень однородный, то $k, c, \rho - const$, и уравнение принимает вид:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.$$

4. Начальное условие имеет вид:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $\varphi(x)$ -заданная функция.

Запишем граничные условия:

а) $U(0, t) = \mu_1(t), U(l, t) = \mu_2(t), t \geq 0$, где μ_1, μ_2 - температуры концов стержня ($\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l)$).

б) Для граничных элементов $[0, \Delta x], [l - \Delta x, l]$ проводим рассуждения, использованные при выводе уравнения (3₀).

Пусть $q_1(t), q_2(t)$ - заданные тепловые потоки на концах $x = 0$ и $x = l$ соответственно ($q_1(t)$ - количество тепла, поступающее в единицу времени через сечение $x = 0$). Тогда для граничного элемента $[0, \Delta x]$ закон сохранения энергии дает

$$q_1(t) \Delta t + k(\Delta x) U_x(\Delta x, t) S \Delta t = c(0) \rho(0) S \Delta x [U(0, t + \Delta t) - U(0, t)]. \quad (4)$$

Поделим (4) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, тогда получим $U_x(0, t) = \frac{-q_1(t)}{k(0)S}$.

Проведя аналогичные рассуждения для конца $x = l$, будем иметь $U_x(l, t) = \frac{-q_2(t)}{k(l)S}$.

в) В этом случае поступаем аналогично случаю б), с той лишь разницей, что при записи баланса тепла для элемента $[0, \Delta x]$ нужно

учесть, что через сечение $x = 0$ поступает поток тепла, определяемый законом Ньютона по формуле (2)

$$\Delta Q_3 = \alpha[U_1(t) - U(0, t)]S\Delta t,$$

где $U_1(t)$ - температура окружающей среды у конца $x = 0$.

В итоге получим следующие граничные условия:

$$U_x(0, t) = h_1[U(0, t) - U_1(t)],$$

$$U_x(l, t) = -h_2[U(l, t) - U_2(t)],$$

где $h_1 = \frac{\alpha}{k(0)}$, $h_2 = \frac{\alpha}{k(l)}$

2.2. На боковой поверхности однородного стержня длины l происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является заданной функцией времени. Поставить задачу об определении температуры в стержне, если его начальная температура известна, а на концы подаются заданные тепловые потоки.

У к а з а н и е. При выводе уравнения учесть поток тепла через боковую поверхность, определяемый законом Ньютона.

О т в е т:

$$U_t = a^2 U_{xx} + \frac{\alpha p[U_0(t) - U]}{c\rho S},$$

где p - периметр поперечного сечения стержня, $U_0(t)$ - температура окружающей среды, $U|_{t=0} = \varphi(x)$, $U_x|_{x=0} = -\frac{q_1(t)}{kS}$, $U_x|_{x=l} = \frac{q_2(t)}{kS}$.

2.3. Дана тонкая однородная прямоугольная пластинка со сторонами l и m , для которой известно начальное распределение температуры. Основания пластинки теплоизолированы, а на границе поддерживается заданная температура. Поставить задачу об определении температуры этой пластинки. Рассмотреть частный случай, когда температура не зависит от времени (стационарное тепловое поле).

У к а з а н и е. Ввиду малой толщины пластинки (высота h мала) можно предполагать, что температура $U(x_1, x_2, t)$ не зависит от x_3 . Для вывода уравнения выделяем внутри пластинки элементарный параллелепипед с измерениями Δx_1 , Δx_2 , h и проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям задачи 2.1.

О т в е т:

$$U_t = a^2(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2}), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, l) \times (0, m), \quad t \in (0, \infty),$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega} = [0, l] \times [0, m];$$

$$U|_{x_1=0} = \mu_1(x_2, t), \quad U|_{x_1=l} = \mu_2(x_2, t), \quad x_2 \in [0, m],$$

$$U|_{x_2=0} = \nu_1(x_1, t), U|_{x_2=m} = \nu_2(x_1, t), \quad x_1 \in [0, l].$$

Частный случай:

$$\Delta U \equiv U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2} = 0;$$

$$U|_{x_1=0} = \tilde{\mu}_1(x_2), U|_{x_1=l} = \tilde{\mu}_2(x_2), \quad x_2 \in [0, m];$$

$$U|_{x_2=0} = \tilde{\nu}_1(x_1), U|_{x_2=l} = \tilde{\nu}_2(x_1), \quad x_1 \in [0, l].$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

2.4. Поставить задачу об определении температуры в однородном стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых равна $f(x, t)$ ($f(x, t)$ - количество тепла, выделяемое источником в единице объема в единицу времени). Начальная температура стержня является произвольной функцией x , а температура концов поддерживается равной нулю.

О т в е т:

$$U_t = a^2 U_{xx} + \frac{f(x, t)}{c\rho}, U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0.$$

2.5. Поставить задачу об определении температуры стержня длины l , на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна нулю. Концы стержня теплоизолированы, а начальная температура является произвольной функцией x .

О т в е т:

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU, b = \frac{\alpha p}{c\rho S},$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), U_x|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$$

2.6. Дана тонкая однородная прямоугольная пластинка $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$ с теплоизолированными основаниями. Стороны $x_1 = a, x_2 = b$ покрыты тепловой изоляцией, а две другие поддерживаются при температуре, равной нулю. Поставить задачу о стационарном распределении температуры в пластинке при условии, что в пластинке выделяется тепло с плотностью $Q \equiv \text{const}$.

О т в е т:

$$\Delta U = \frac{-Q}{k}, U|_{x_1=0} = U|_{x_2=0} = 0,$$

$$U_{x_1}|_{x_1=a} = U_{x_2}|_{x_2=b} = 0.$$

2.7. Поставить задачу об определении температуры в однородном параллелепипеде с измерениями l, m, n , если его начальная температура является произвольной функцией $x = (x_1, x_2, x_3)$, а температура поверхности поддерживается равной нулю.

О т в е т:

$$U_t = a^2(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + U_{x_3x_3}), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$U|_{x_1=0} = U|_{x_1=l} = U|_{x_2=0} = U|_{x_2=m} = U|_{x_3=0} = U|_{x_3=n} = 0.$$

З А Н Я Т И Е 3

Тема. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ n ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим квазилинейное (линейное относительно старших производных) дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, U, \text{grad } U) = 0, \quad (1)$$

где $U(x)$ — неизвестная функция, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $a_{ij}(x) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $\text{grad } U = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n})$, Φ — заданная функция своих аргументов. Решение уравнения (1) будем считать принадлежащим классу $C^2(\Omega)$. Обозначим через $A(x)$ функциональную матрицу с элементами $a_{ij}(x)$, $A(x) = \|a_{ij}(x)\|_1^n$. Эту матрицу называют матрицей старших коэффициентов уравнения (1). Заметим, что $A(x)$ всегда можно считать симметрической матрицей, т.е. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Пусть $A(x^0) = \| a_{ij}(x^0) \|_1^n$ — постоянная матрица, которая является значением матрицы $A(x)$ в некоторой точке $x^0 \in \Omega$. Тогда собственные значения такой матрицы определяются как корни уравнения

$$\det(A(x^0) - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица.

Определение 1. Пусть n_+ — число положительных, n_- — число отрицательных, n_0 — число нулевых собственных значений матрицы $A(x^0)$ ($n = n_+ + n_- + n_0$). Тогда говорят, что уравнение (1) имеет тип (n_+, n_-, n_0) в точке x^0 .

Уравнение (1) принадлежит типу (n_+, n_-, n_0) на некотором множестве, если оно принадлежит этому типу в каждой точке данного множества.

Замечание 1. Если изменить знаки всех членов уравнения (1), то матрица $A(x^0)$ заменится на матрицу $-A(x^0)$, и собственные значения матрицы $-A(x^0)$ будут отличаться от собственных значений матрицы $A(x^0)$ только знаком, т.е. числа n_+ , n_- поменяются только местами. Типы (n_+, n_-, n_0) и (n_-, n_+, n_0) поэтому будем считать тождественными, то есть $(n_+, n_-, n_0) \equiv (n_-, n_+, n_0)$.

Замечание 2. Если уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты, то можно говорить о типе уравнения во всем пространстве R^n .

Среди всех уравнений в математической физике выделяется три основных типа уравнений в R^n . 1). Тип $(n, 0, 0) \equiv (0, n, 0)$ называется эллиптическим. 2). Тип $(n - 1, 1, 0) \equiv (1, n - 1, 0)$ называется гиперболическим. 3). Тип $(n - 1, 0, 1) \equiv (0, n - 1, 1)$ называется параболическим. Отметим также, что уравнения типа $(n - r, r, 0) \equiv (r, n - r, 0)$, $r > 1$, называются ультрагиперболическими уравнениями.

Переходим теперь к задаче приведения уравнения (1) к каноническому виду. Поставим такую задачу: упростить уравнение (1) с помощью замены независимых переменных. Пусть

$$y = y(x) \text{ или } y_l = y_l(x_1, x_2, \dots, x_n), l = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Кроме того, потребуем, чтобы $y_l \in C^2(\Omega)$ и чтобы $\det J(x) \neq 0$, где $J(x) = \| \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \|_1^n$ — матрица Якоби.

Так как $\det J(x) \neq 0$, то в некоторой окрестности можно выразить переменные x через переменные y : $x = x(y)$. Обозначим $U(x(y)) = \tilde{U}(y)$, тогда $\tilde{U}(y(x)) = U(x)$. Для удобства не меняем обозначения функции.

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (1), получим

$$\sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi^*(y, U, \text{grad}_y U) = 0. \quad (4)$$

Обозначим через \tilde{a}_{lk} новые коэффициенты при вторых производных:

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (5)$$

и запишем уравнение (4) в виде (1):

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y) \frac{\partial^2 U}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\Phi}(y, U, \text{grad}_y U) = 0.$$

Фиксируем точку x^0 и обозначим $y^0 = y(x^0)$, а

$$\alpha_{li} = \frac{\partial y_l(x^0)}{\partial x_i}. \quad (6).$$

Тогда формула (5) в точке x^0 запишется в виде

$$\tilde{a}_{lk}(y^0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \alpha_{li} \alpha_{kj}.$$

Полученная формула преобразования коэффициентов a_{ij} в точке x^0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$P = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) p_i p_j \quad (7)$$

при неособенном линейном преобразовании

$$p_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{li} q_l, \quad \det(\alpha_{li}) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Кратко преобразование (8) можно записать в виде:

$$p = Bq, \quad (9)$$

где

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad B = \|\alpha_{li}\|_1^n.$$

Преобразование (9) приводит форму (7) к виду

$$Q = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y^0) q_l q_k.$$

Таким образом, чтобы упростить уравнение (1) в точке x^0 с помощью замены переменных (2) достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (7) с помощью линейного преобразования (8). В курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует неособенное преобразование (8), при котором квадратичная форма (7) принимает канонический вид:

$$Q = \sum_{l=1}^r q_l^2 - \sum_{l=r+1}^m q_l^2, \quad m \leq n. \quad (10)$$

Заметим, что любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом выделения полных квадратов.

Итак, чтобы упростить уравнение (1) в точке x^0 , надо в силу (6) произвести линейную замену переменных

$$y_l = \sum_{i=1}^n \alpha_{li} x_i, \quad l = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad y = B^T x, \quad (11)$$

где B^T - матрица, транспонированная к матрице B . Эта замена приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{l=1}^r \frac{\partial^2 U}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, U, \text{grad}_y U) = 0. \quad (12)$$

Этот вид (12) называется каноническим видом уравнения (1).

На основании закона инерции квадратичных форм целые числа r и m не зависят от преобразования (8). Это дает возможность классифицировать уравнение (1) в зависимости от значений, принимаемых коэффициентами a_{ij} в точке x^0 .

Определение 2. Если в квадратичной форме (10) $m = n$ и все слагаемые одного знака (то есть или $r = m$, или $r = 0$), то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа; если $m = n$, а одно слагаемое противоположно остальным по знаку (то есть $r = 1$ или $r = n - 1$), то уравнение (1) - гиперболического типа; если $m < n$, а $m = n - 1$ и $r = 0$ или $r = n - 1$, то уравнение (1) - параболического типа.

Приведенная классификация зависит только от точки x^0 , так как числа r и m зависят от точки x^0 . Ясно, что тип уравнения (n^+, n^-, n^0) тесно связан с его каноническим видом. Поэтому тип уравнения можно определять по каноническому виду.

З а д а ч и.

Определить типы уравнений.

3.1. Рассмотрим уравнение колебаний струны:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \quad \text{или} \quad U_{tt} - a^2 U_{xx} - f(x, t) = 0 \quad (x_1 = t, x_2 = x).$$

Составим матрицу старших коэффициентов A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

Определим собственные значения матрицы A .

$$|A - \lambda E| = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -a^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -a^2.$$

Заметим, что можно было бы сразу найти эти собственные значения, так как матрица A диагональная (собственные значения совпадают с диагональными элементами).

Итак, рассматриваемое уравнение имеет тип $(1, 1, 0)$ в R^2 , так как $n_+ = 1$, $n_- = 1$, $n_0 = 0$, то есть уравнение гиперболического типа в R^2 .

3.2. Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + U_x + U_y = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $n_+ = 2$, $n_- = 0$, $n_0 = 0$. Уравнение имеет тип $(2, 0, 0)$ в R^2 , то есть эллиптический тип.

3.3. Привести к каноническому виду и определить типы уравнений.

$$4U_{xx} - 4U_{xy} - 2U_{yz} + U_y + U_z = 0 \quad (x = x_1, y = x_2, z = x_3). \quad (13)$$

Для приведения к каноническому виду составим соответствующую квадратичную форму

$$P = 4p_1^2 - 4p_1p_2 - 2p_2p_3.$$

Приведем форму P к каноническому виду путем выделения полных квадратов. Представим форму P в виде

$$P = (2p_1 - p_2)^2 - (p_2 + p_3)^2 + p_3^2.$$

Если теперь сделаем замену

$$\begin{cases} q_1 = 2p_1 - p_2 \\ q_2 = p_2 + p_3 \\ q_3 = p_3, \end{cases}$$

форма P приведет к следующему каноническому виду

$$Q = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2.$$

Выразим теперь p_1, p_2, p_3 через q_1, q_2, q_3 :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2 - q_3) \\ p_2 = q_2 - q_3 \\ p_3 = q_3. \end{cases}$$

Таким образом, в силу (9) матрица B будет иметь вид:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая замена (11) запишется так ($\xi = y_1, \eta = y_2, \zeta = y_3$):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \xi = x/2, \eta = x/2 + y, \zeta = -x/2 - y + z. \quad (14)$$

На основании (14) имеем:

$$\begin{aligned} U_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x + U_\zeta \zeta_x = U_\xi/2 + U_\eta/2 - U_\zeta/2 = (U_\xi + U_\eta - U_\zeta)/2, \\ U_{xx} &= (U_x)_x = (U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta})/4 + (U_{\xi\eta} - U_{\xi\zeta} - U_{\eta\zeta})/2, \\ U_{xy} &= (U_x)_y = (U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 2U_{\eta\zeta} - U_{\xi\zeta} + U_{\zeta\zeta})/2, \\ U_y &= U_\eta - U_\zeta, \\ U_{yz} &= U_{\eta\zeta} - U_{\zeta\zeta}, \\ U_z &= U_\zeta. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (13), получим:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} + U_\eta = 0. \quad (16)$$

Итак, в данном случае видно, что $m = n = 3$, $r = 2$, то есть уравнение (13) гиперболического типа в R^2 . Заметим, что если выписать матрицу старших коэффициентов уравнения (16), то она будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Откуда следует, что $n_+ = 2, n_- = 1$, то есть уравнение (13) гиперболического типа также в смысле определения 1.

Отметим также, что в силу вышесказанного по каноническому виду квадратичной формы можно выписать группу слагаемых, содержащих вторые производные.

3.4.

$$U_{xx} + U_{xy} + U_{zz} = 0, \quad (x = x_1, y = x_2, z = x_3).$$

Здесь $P = p_1^2 + p_1 p_2 + p_3^2 = (p_1 + p_2/2)^2 - p_2^2/4 + p_3^2$, $Q = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$, где

$$\begin{cases} q_1 = p_1 + p_2/2 \\ q_2 = p_2/2 \\ q_3 = p_3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} p_1 = q_1 - q_2 \\ p_2 = 2q_2 \\ p_3 = q_3. \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \xi = x \\ \eta = -x + 2y \\ \zeta = z \end{cases}$$

Учитывая отсутствие в исходном уравнении первых производных, по виду квадратичной формы записываем канонический вид исходного уравнения:

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} = 0.$$

Откуда следует, что исходное уравнение имеет гиперболический тип в R^3 .

3.5.

$$U_{xx} + 2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yy} + 6U_{zz} = 0.$$

О т в е т:

$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} = 0$, эллиптический тип; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = x - y/2 + z/2$.

3.6.

$$U_{xy} - U_{xz} + U_x + U_y - U_z = 0.$$

О т в е т:

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + 2U_{\zeta} = 0$, тип (1,1,1); $\xi = x + y$, $\eta = y - x$, $\zeta = y + z$.

Д о м а ш н е е з а д а н и е

Определить типы уравнений.

3.7.

$U_t = a^2 U_{xx}$. О т в е т: параболический тип в R^2 .

3.8.

$U_{tt} = a^2 \Delta U$, $\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$.

О т в е т: гиперболический тип в R^4 .

3.9.

$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 6U_y = 0$.

О т в е т: гиперболический тип в R^2 .

3.10.

$U_{xx} + 3U_{xy} + U_{yy} + U_x = 0$. О т в е т: гиперболический тип в R^2 .

Привести к каноническому виду и определить типы уравнений.

3.11.

$U_{xx} + 2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yy} + 2U_{zz} = 0$.

О т в е т: $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$, параболический тип; $\xi = x$, $\eta = y - x$,
 $\zeta = 2x - y + z$.

3.12.

$U_{xx} + 2U_{xy} - 4U_{xz} - 6U_{yz} - U_{zz} = 0$.

О т в е т:

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - U_{\zeta\zeta} = 0$, гиперболический тип; $\xi = x$, $\eta = y - x$,
 $\zeta = 3x/2 - y/2 + z/2$.

3.13.

$U_{xx} + 2U_{xy} + 2U_{yy} + 2U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{zz} + 3U_{tt} = 0$.

О т в е т:

$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} + U_{\tau\tau} = 0$, эллиптический тип; $\xi = x$, $\eta = y - x$,
 $\zeta = x - y + z$, $\tau = 2x - 2y + z + t$.

3.14.

$U_{xy} - U_{xt} + U_{zz} - 2U_{zt} + 2U_{tt} = 0$.

О т в е т:

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} + U_{\tau\tau} = 0$, гиперболический тип; $\xi = x + y$, $\eta = y - x$,
 $\zeta = z$, $\tau = y + z + t$.

3.15.

$U_{xy} + U_{xz} + U_{xt} + U_{zt} = 0$.

О т в е т:

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} - U_{\tau\tau} = 0$, ультрагиперболический тип; $\xi = x + y$,
 $\eta = x - y$, $\zeta = -2y + z + t$, $\tau = z - t$.

З А Н Я Т И Е 4

Тема. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ В СЛУЧАЕ 2 НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Общее квазилинейное (линейное относительно старших производных) уравнение 2-го порядка в случае 2 независимых переменных можно записать в виде

$$a(x, y)U_{xx} + 2b(x, y)U_{xy} + c(x, y)U_{yy} + f(x, y, U, U_x, U_y) = 0, \quad (1)$$

где $a, b, c \in C^2(\Omega)$ и не обращаются одновременно в нуль в Ω . При этом мы ввели обозначения $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = \xi, y_2 = \eta, a_{11} = a, a_{12} = a_{21} = b, a_{22} = c$. На лекции доказано, что классификацию уравнения (1) и приведение его к каноническому виду возможно в этом случае проводить не только в точке, но и в области. Для классификации уравнения (1) вводят дискриминант $\delta(x, y) = b^2 - ac$. Тогда имеет место

Определение. Если 1) $\delta > 0$ в Ω , то (1) называется уравнением гиперболического типа в Ω 2) $\delta \equiv 0$ в Ω , то (1) параболического типа в Ω , 3) $\delta < 0$ в Ω , то эллиптического типа в Ω .

Предположим теперь, что δ в области Ω обращается в нуль, не будучи там тождественно равным нулю. Тогда линия γ , вдоль которой $\delta = 0$, называется линией параболического вырождения уравнения (1).

1) Пусть δ сохраняет знак во всей области Ω за исключением линии γ , тогда уравнение называется вырождающимся гиперболическим (эллиптическим) уравнением, если $\delta > 0$ ($\delta < 0$) в $\Omega \setminus \gamma$.

2) Пусть Ω делится линией γ на две части Ω_1 и Ω_2 , причем $\delta > 0$ в Ω_1 , $\delta < 0$ в Ω_2 , тогда (1) – уравнение смешанного типа в Ω , причем Ω_1 – область гиперболичности, Ω_2 – область эллиптичности.

В области, в которой сохраняется знак δ , (1) можно привести к каноническому виду. Приведение к каноническому виду проводится путем замены независимых переменных. Для отыскания этой замены составляется дифференциальное уравнение характеристик

$$ady^2 - 2bxdy + cdx^2 = 0, \quad (2)$$

разрешая которое относительно $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

откуда следует, что дальнейшее исследование зависит от типа уравнения (1).

1. Пусть $\delta > 0$, тогда (2) имеет два вещественных различных общих интеграла

$$\varphi(x, y) = c_1, \psi(x, y) = c_2,$$

которые определяют два семейства характеристических кривых (характеристик) уравнения (1), причем

$$\det J(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Введем в (1) новые независимые переменные ξ, η

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y). \quad (4)$$

В силу (3) существует обратное преобразование $x = \tilde{\varphi}(\xi, \eta)$, $y = \tilde{\psi}(\xi, \eta)$, и искомая функция $U(x, y)$ перейдет в функцию $U(\xi, \eta)$ (для удобства не меняется обозначение функции), при этом первые производные выразятся через производные по новым переменным следующим образом

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y.$$

Аналогично записываются и вторые производные. Замена (4) приводит уравнение (1) к каноническому виду

$$U_{\xi\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0.$$

Замечание. Сделав замену $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, можно привести уравнение к виду

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta).$$

2. $\delta \equiv 0$. (2) имеет один общий интеграл $\varphi(x, y) = C$. Делаем замену

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y) \quad (5)$$

где ψ - любая функция, принадлежащая классу C^2 и удовлетворяющая условию (3). Замена (5) приводит (1) к виду:

$$U_{\eta\eta} + \Phi_2(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0.$$

Это канонический вид уравнения параболического типа.

3. $\delta < 0$, тогда (1) эллиптического типа. Предполагая, что a, b, c - аналитические функции от x, y , получим, что (2) имеет два комплексно сопряженных общих интеграла, один из которых имеет вид:

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) = C,$$

где φ_1 и ψ_1 - вещественные функции, удовлетворяющие (3). Положив $\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \psi_1(x, y)$, получим канонический вид уравнения:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \Phi_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0.$$

З а д а ч и

Определить типы данных уравнений.

4.1. $U_{xy} + x^2U_{yy} + yU_x = 0, (x, y) \in R^2$.

О т в е т: гиперболический тип.

4.2. $(1 + x^2)U_{xx} + (1 + y^2)U_{yy} + xU_x + yU_y = 0, (x, y) \in R^2$

О т в е т: эллиптический тип.

4.3. $x^2U_{xx} - y^2U_{yy} + \sin x U_y = 0, (x, y) \in R^2$.

О т в е т: вырождающееся гиперболическое уравнение с двумя линиями вырождения $x = 0, y = 0$.

4.4. $y^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + x^2U_{yy} = 0, (x, y) \in R^2$.

О т в е т: параболический тип.

4.5. $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ -уравнение Трикоми, $(x, y) \in \Omega$ - любая область, содержащая отрезок оси x .

О т в е т: смешанный тип, $y > 0$ - область эллиптичности, $y < 0$ - область гиперболичности.

Привести к каноническому виду.

4.6.

$$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 6U_y = 0. \quad (6)$$

Определим тип уравнения. $\delta = 1 + 3 = 4 > 0$, поэтому (6) гиперболического типа в R^2 . Составляем уравнение характеристик

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2. \quad (7)$$

Интегрируя (7), получим $y - 3x = C_1, y + x = C_2$. Вводим новые переменные

$$\xi = y - 3x, \eta = y + x. \quad (8)$$

На основании (4) и (8) имеем:

$$\begin{aligned} U_x &= U_\xi(-3) + U_\eta(+1) = -3U_\xi + U_\eta, \\ U_{xx} &= (U_x)_x = -3(U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x) + U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x = 9U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ U_y &= U_\xi(+1) + U_\eta(+1) = U_\xi + U_\eta, \\ U_{yy} &= (U_y)_y = U_{\xi\xi}\xi_y + U_{\xi\eta}\eta_y + U_{\eta\xi}\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ U_{xy} &= (U_y)_x = U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x + U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x = -3U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), получим $U_{\xi\xi}(9 - 3 - 6) + U_{\xi\eta}(-6 - 6 - 4) + U_{\eta\eta}(1 - 3 + 2) + U_\xi(6 - 6) + U_\eta(2 + 6) = 0$, откуда $U_{\xi\eta} - \frac{1}{2}U_\eta = 0$.

4.7. $U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + U_x + U_y = 0.$

У к а з а н и е. Уравнение эллиплично в R^2 , соответствующее уравнение характеристик имеет интегралы $y - 2x + ix = C_1$, $y - 2x - ix = C_2$, поэтому замена $\xi = y - 2x, \eta = x$.

О т в е т: $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_\eta - U_\xi = 0.$

4.8. $x^2U_{xx} - 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} + xU_x + yU_y = 0.$

У к а з а н и е. Уравнение параболического типа в R^2 , уравнение характеристик имеет интеграл $xy = C$. Можно сделать замену $\xi = xy, \eta = y$.

О т в е т: $\eta U_{\eta\eta} + U_\eta = 0.$

4.9. $yU_{xx} + U_{yy} = 0.$

У к а з а н и е. Уравнение смешанного типа (см. 4.5.), поэтому приведение к каноническому виду осуществляется отдельно при $y > 0$ и при $y < 0$.

О т в е т: 1) $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}U_\eta = 0, \xi = x, \eta = \frac{2}{3}y^{3/2} \quad (y > 0),$

2) $U_{\xi\eta} - \frac{U_\xi - U_\eta}{6(\eta - \xi)} = 0, \xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} \quad (y < 0).$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

Определить типы данных уравнений.

4.10. $(1 - x^2)U_{xx} - 2xyU_{xy} + (1 - y^2)U_{yy} - 2xU_x - 2yU_y = 0, (x, y) \in R^2$

О т в е т: смешанный тип, $x^2 + y^2 = 1$ - линия параболического вырождения, $x^2 + y^2 < 1$ - область эллиптичности, $x^2 + y^2 > 1$ - область гиперболичности.

4.11. $\rho(x)U_{tt} = (p(x)U_x)_x - q(x)U + f(x, t) = 0$ - уравнение колебаний при $n = 1, \rho, p > 0, (x, t) \in R_x^1 \times (0, \infty).$

О т в е т: гиперболический тип.

4.12. $\rho(x)U_t = (p(x)U_x)_x - q(x)U + f(x, t) = 0$ - уравнение диффузии при $n = 1, \rho, p > 0, (x, t) \in R_x^1 \times (0, \infty).$

О т в е т: параболический тип.

4.13. $(p(x, y)U_x)x + (p(x, y)U_y)y - q(x, y)U + f(x, y) = 0$ - стационарное уравнение при $n = 1, p > 0, (x, y) \in R^2.$

О т в е т: эллиптический тип.

Привести к каноническому виду.

$$4.14. U_{xx} - 2 \cos x U_{xy} - (3 + \sin^2 x) U_{yy} - y U_y = 0.$$

О т в е т:

$$U_{\xi\eta} + [(\xi + \eta)(U_\xi + U_\eta)]/32 = 0, \xi = y + \sin x + 2x, \eta = y + \sin x - 2x.$$

$$4.15. (1 + x^2)U_{xx} + (1 + y^2)U_{yy} + xU_x + yU_y = 0.$$

О т в е т:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0, \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

$$4.16. U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + \alpha U_x + \beta U_y + \gamma U = 0, \alpha, \beta, \gamma - \text{const.}$$

О т в е т:

$$U_{\eta\eta} + (\alpha + \beta)U_\xi + \beta U_\eta + \gamma U = 0, \xi = x + y, \eta = y.$$

$$4.17. U_{xx} + yU_{yy} + \alpha U_y = 0, \alpha - \text{const.}$$

О т в е т:

$$1) U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{(2\alpha-1)}{\eta} U_\eta = 0, \xi = x, \eta = 2\sqrt{y} \quad (y > 0);$$

$$2) U_{\xi\eta} - \frac{(\alpha-1/2)}{(\xi-\eta)} (U_\xi - U_\eta) = 0, \xi = x - 2\sqrt{-y}, \eta = x + 2\sqrt{-y} \quad (y < 0).$$

З А Н Я Т И Е 5

Тема. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК)

На занятии рассматривается метод характеристик нахождения общих решений линейных уравнений 2-го порядка

$$a(x, y)U_{xx} + 2b(x, y)U_{xy} + c(x, y)U_{yy} + a_1(x, y)U_x + b_1(x, y)U_y + c_1(x, y)U + f(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $a, b, c, a_1, b_1, c_1, f$ - функции от x, y , определенные в области $\Omega \in R^2$, причем $a, b, c \in C^2(\Omega)$.

Определение. Функция $U(x, y) \in C^2(\Omega)$ и обращающая (1) в тождество называется (классическим) решением уравнения (1).

Решение, из которого может быть получено любое решение уравнения (1), называется общим решением уравнения. Общее решение уравнения (1) зависит от двух произвольных функций. Выбирая соответствующим образом эти функции, можно получить все частные решения уравнения (1). В некоторых случаях (для уравнений гиперболического и параболического типа) после приведения уравнения (1) к каноническому виду удастся найти общее решение канонического уравнения. Подставив в это решение функции $\zeta = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$,

т.е. вернувшись к старым переменным, получаем общее решение уравнения (1).

З а д а ч и

5.1.

$$U_{xy} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) в каноническом виде. Перепишем его так:

$$(U_y)_x = 0. \quad (3)$$

Сделаем в (3) замену искомой функции

$$U_y(x, y) = V(x, y), \quad (4)$$

тогда получим

$$V_x(x, y) = 0. \quad (5)$$

Так как в (5) переменная y входит как параметр, то (5) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной x . Действительно, зафиксируем в (5) $y = y_0$, тогда $V_x(x, y_0) = \frac{dV(x, y_0)}{dx}$ и уравнение (5) запишем в виде: $\frac{dV}{dx} = 0$, откуда, интегрируя, получаем

$$V(x, y) = C, \quad (6)$$

где $C - const$. Но (6) не является общим решением (5), так как оно получено при фиксированном y . При изменении y будет меняться и постоянная C , поэтому самая общая функция, удовлетворяющая (5), будет иметь вид:

$$V(x, y) = C(y). \quad (7)$$

где $C(y)$ - произвольная функция. Подставив (7) в (4), получим уравнение $U_y(x, y) = C(y)$.

Рассуждая теперь, как и выше, считая x параметром, путем интегрирования по y , получим $U = \int C(y)dy + C_1(x)$, где $C_1(x)$ - произвольная функция. Обозначая $C_2(y) = \int C(y)dy$, имеем

$$U(x, y) = C_1(x) + C_2(y) \quad (8)$$

Подставляя (8) в (2), убеждаемся, что каковы бы ни были функции C_1 и C_2 (дважды дифференцируемые), функция (8) дает решение (2). Так как всякое решение уравнения (2) может быть представлено в виде (8) при соответствующем выборе функций C_1 и C_2 , то (8) - общее решение (1).

5.2. $U_{yy} = a^2 U_{xx} \quad (U_{tt} = a^2 U_{xx}).$

О т в е т:

$$U = C_1(x + ay) + C_2(x - ay).$$

5.3. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 6U_y = 0$ (см.4.6).

О т в е т: $U = e^{\frac{1}{2}(y-3x)}C_1(y+x) + C_2(y-3x)$.

5.4. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} = 2$.

О т в е т: $U = -\frac{1}{8}(y-3x)(y+x) + C_1(x+y) + C_2(y-3x)$.

5.5. $x^2U_{xx} - 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} + xU_x + yU_y = 0$ (см.4.8).

О т в е т: $U = C_1(xy) \ln y + C_2(xy)$.

5.6. $U_{xy} + aU_x + bU_y + abU = 0, a, b - const$.

О т в е т: $U = \exp\{-bx - ay\}[C_1(y) + C_2(x)]$.

Д о м а ш н е е з а д а н и е

5.7. $x^2U_{xx} - y^2U_{yy} = 0$.

О т в е т: $U = C_1(xy) + \sqrt{xy}C_2(\frac{y}{x})$.

5.8. $(x^2U_x)_x = x^2U_{yy}$.

О т в е т: $U = 1/x[C_1(x+y) + C_2(x-y)]$.

5.9. $(x-y)U_{xy} - U_x + U_y = 0$.

У к а з а н и е. Можно сделать замену $V = (x-y)U$.

О т в е т: $U = \frac{1}{x-y}[C_1(x) + C_2(y)]$.

5.10. $U_{xy} - 2U_x - 3U_y + 6U = 2 \exp(x+y)$.

О т в е т: $U = \exp\{x+y\} + \exp\{3x+2y\}[C_1(x) + C_2(y)]$.

5.11. $a^2U_{xx} - 2aU_{xy} + U_{yy} = \frac{4a^2}{b^2}U, a, b - const$.

О т в е т: $U = C_1(x+ay) \exp(\frac{2a}{b}y) + C_2(x+ay) \exp(\frac{-2a}{b}y)$.

5.12. $U_{xy} + xU_y + yU_x + xyU = 0$.

О т в е т: $U = \exp\{\frac{-(x^2+y^2)}{2}\}[C_1(x) + C_2(y)]$.

З А Н Я Т И Е 6

Тема. ЗАДАЧА КОШИ И ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Известно, что, зная общее решение обыкновенного дифференциального уравнения, можно решить некоторые задачи, например, задачу Коши, определяя соответствующим образом постоянные, входящие в общее решение. Для уравнений в частных производных знание общего решения позволяет также решать некоторые задачи математической физики, содержащие дополнительные условия. При решении задачи произвольные функции, входящие в общее решение, определяются таким образом, чтобы удовлетворялись дополнительные условия.

1. **З а д а ч а К о ш и .** Пусть в области Ω задано уравнение гиперболического типа:

$$a(x, y)U_{xx} + 2b(x, y)U_{xy} + c(x, y)U_{yy} + a_1(x, y)U_x + b_1(x, y)U_y + c_1(x, y)U = f(x, y) \quad (1)$$

и задана кривая Γ , которая принадлежит области Ω или является частью границы $\partial\Omega$ области Ω , причем касательное направление к Γ не является характеристическим.

Пусть на Γ заданы функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и направление $\vec{l}(x, y)$, не являющееся касательным к Γ . Требуется найти функцию $U(x, y)$, которая в Ω удовлетворяет (1) и на Γ удовлетворяет условиям

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial l}|_{\Gamma} = \psi(x, y) \quad (2)$$

Если коэффициенты уравнения (1) и данные условия (2) достаточно гладкие, то в области D , ограниченной характеристиками уравнения (1), проходящими через концы Γ , существует единственное решение задачи (1),(2).

З а д а ч а Г у р с а . Пусть дано уравнение (1) в каноническом виде:

$$U_{xy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y), \quad (3)$$

причем $a, b, c \in C(\bar{\Omega})$, где $\bar{\Omega} = [0, x_0] \times [0, y_0]$. Найти функцию $U \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $U_{xy} \in C(\Omega)$, удовлетворяющую (3) в Ω и принимающую на его сторонах (кусках характеристик уравнения(3)) заданные значения

$$U|_{x=0} = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq y_0, U|_{y=0} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq x_0. \quad (4)$$

Если $f, \varphi_1, \psi_1 \in C, \varphi_1(0) = \psi_1(0)$, то существует единственное решение задачи (3), (4).

З а д а ч и

6.1. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Найти функцию $U(x, y) \in C^2\{R_x^1 \times (0, \infty)\} \cap C^1\{R_x^1 \times [0, \infty)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$U_{yy} = a^2 U_{xx} \quad (5_0)$$

в $\Omega = R_x^1 \times (0, \infty)$ и начальным условиям

$$U|_{y=0} = \varphi(x), U_y|_{y=0} = \psi(x), x \in R_x^1 \quad (6)$$

причем $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$. В данном случае $\Gamma = \partial\Omega = R_x^1$, направление \vec{l} совпадает с направлением оси y , и касательное направление к $\partial\Omega$ не совпадает с характеристическим $y' = \pm 1/a$. Общее решение уравнения (5₀) (см.5.2.) имеет вид:

$$U = C_1(x + ay) + C_2(x - ay). \quad (7)$$

Определим C_1, C_2 так, чтобы удовлетворялись условия (6). Из (7) находим

$$U_y = aC_1'(x + ay) - aC_2'(x - ay), \quad (8)$$

где C_1', C_2' - производные по аргументам. Положим в (7) и (8) $y = 0$ и учтем (6), тогда получим

$$C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x), \quad (9)$$

$$C_1'(x) - C_2'(x) = \frac{1}{a}\psi(x) \quad (10)$$

Интегрируя (10) по x , имеем

$$C_1(x) - C_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C. \quad (11)$$

Складывая и вычитая (9) и (11), получим

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C/2, \quad (12)$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - C/2. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (7), получаем формулу Даламбера, дающую решение задачи

$$U(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ay) + \varphi(x - ay)] + \frac{1}{2a} \int_{x-ay}^{x+ay} \psi(\alpha) d\alpha.$$

6.2. $U_{yy} = a^2 U_{xx}, U|_{y=0} = 0, U_y|_{y=0} = A \sin x, A - \text{const}, |x| < \infty.$

О т в е т : $U = (A/a) \sin x \sin ay.$

6.3. $U_{yy} = U_{xx} + 6, -\infty < x, y < \infty, U|_{y=0} = x^2, U_y|_{y=0} = 4x, |x| < \infty$

О т в е т : $U = (x + 2y)^2.$

6.4. $U_{xy} = 0, x > 0, y > 0, U|_{y=0} = f(x), x \geq 0, U_{x=0} = g(y), y \geq 0,$
причем $f, g \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0), f(0) = g(0).$

О т в е т : $U = f(x) + g(y) - f(0).$

6.5. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} = 0, -\infty < x, y < \infty, U|_{y=0} = 3x^2, U_y|_{y=0} = 0, |x| < \infty.$

О т в е т : $U = 3x^2 + y^2.$

6.6. $U_{xy} = 0, a < x < b, c < y < d, U|_{y=\varphi(x)} = U_0(x), U_y|_{y=\varphi(x)} = U_1(x),$ где $c = \inf \varphi(x), d = \sup \varphi(x); \varphi, U_0, U_1$ — заданные на интервале (a, b) функции, удовлетворяющие условиям $\varphi \in C^2, \varphi' \neq 0, U_0 \in C^2, U_1 \in C^1.$

О т в е т : $U = U_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} U_1(\xi) \varphi'(\xi) d\xi.$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

6.7. $U_{xx} - U_{yy} - 2U_x - 2U_y = 4, -\infty < x, y < \infty, U|_{x=0} = -y, U_x|_{x=0} = y - 1, |y| < \infty.$

О т в е т : $U = \frac{1}{2}[1 - 3y - x + (x + y - 1)e^{2x}].$

6.8. $U_{xx} + 4U_{xy} - 5U_{yy} + U_x - U_y = 0, -\infty < x, y < \infty, U|_{y=0} = f(x), U_y|_{y=0} = F(x), |x| < \infty.$

О т в е т : $U = f(x + y) + \frac{5}{6}e^{-\frac{x+y}{6}} \int_{x+y}^{x-y/5} e^{\alpha/6} [f'(\alpha) - F(\alpha)] d\alpha.$

6.9. $U_{xy} + U_x = x, x > 0, y > 0, U|_{x=0} = y^2, U|_{y=0} = x^2.$

О т в е т : $U = y^2 + \frac{x^2}{2}(1 + e^{-y}).$

6.10. $2U_{xx} - 2U_{yy} + U_x + U_y = 0, \quad y > |x|, \quad U|_{y=x} = 1, \quad U|_{y=-x} = (x+1)e^x.$

О т в е т : $U = e^{\frac{x-y}{2}}[1 + (x-y)/2].$

6.11. $U_{yy} = U_{xx}, y > |x|, U|_{y=x} = \varphi(x), 0 \leq x \leq b, U|_{y=-x} = \psi(x), -a \leq x \leq 0, \varphi(0) = \psi(0), 0 < a, b < \infty.$

О т в е т : $U = \varphi(\frac{x+y}{2}) + \psi(\frac{x-y}{2}) - \varphi(0).$

З А Н Я Т И Е 7

Тема. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ. ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На занятии 6 мы рассмотрели задачу Коши для уравнения колебаний струны

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}. \quad (1_0)$$

Задача ставилась следующим образом: найти функцию

$$U(x, t) \in C^2[R_x^1 \times (0, \infty)] \cap C^1[R_x^1 \times [0, \infty)],$$

удовлетворяющую уравнению (1_0) при $(x, t) \in R_x^1 \times (0, \infty)$ и удовлетворяющую начальным условиям

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad x \in R_x^1. \quad (2)$$

Было показано, что если $\varphi \in C^2(R_x^1)$, $\psi \in C^1(R_x^1)$, то решение задачи существует и единственно, и определяется формулой Даламбера

$$U(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

Между тем, часто приходится рассматривать задачи, в которых функции φ и ψ не удовлетворяют указанным условиям. В этом случае вводят понятие обобщенного решения задачи (1) , (2) . Рассматривают вместо функций φ и ψ последовательности сглаженных функций φ_n, ψ_n ,

причем $\varphi_n \in C^2$, $\psi_n \in C^1$ и, кроме того, $\varphi_n \xrightarrow{\rightharpoonup} \varphi$ при $n \rightarrow \infty$, $\psi_n \xrightarrow{\rightharpoonup} \psi$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $U_n(x, t)$ - решение задачи (1),(2) с начальными данными φ_n и ψ_n , тогда если $U_n(x, t) \xrightarrow{\rightharpoonup} U(x, t)$ при $n \rightarrow \infty$, то $U(x, t)$ - обобщенное решение задачи (1), (2). Можно доказать, что обобщенное решение существует и определяется формулой (3), причем при некоторых значениях x и t $U(x, t)$ не имеет соответствующих производных.

Кроме того, доказываем, что малые изменения начальных условий влекут за собой малые изменения решений, т.е. имеет место устойчивость решений задачи Коши. Поэтому решения, полученные с помощью сглаживания начальных условий, будут сколь угодно мало отличаться от тех, которые мы получим по формуле (3), когда φ и ψ имеют точки разрыва или не везде дифференцируемы.

Теперь остановимся на физической интерпретации формулы (3). Представим ее в виде

$$U(x, t) = U_1(x - at) + U_2(x + at),$$

где

$$U_1(x - at) = \varphi(x - at)/2 - \Psi(x - at),$$

$$U_2(x + at) = \varphi(x + at)/2 + \Psi(x + at),$$

а $\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$ — первообразная функции $\frac{1}{2a}\psi(x)$.

Попытаемся выяснить, каков профиль отклонения, определяемого функцией $U = U_1(x - at)$. Зафиксируем $t = 0$ и рассмотрим функцию

$$U|_{t=0} = U_1|_{t=0} = U_1(x),$$

которая нам даст профиль этого отклонения в начальный момент времени $t = 0$. Выясним, как будут меняться профили отклонения, определяемого этой функцией, при изменении t . Для этого в точку $x = c$ оси x поместим наблюдателя, смещение над головой которого в момент $t = 0$ равно $U_1(c)$. Предположим, что наблюдатель движется вдоль струны со скоростью a , то есть его абсцисса изменяется по закону $x = c + at$ или $x - at = c$. В момент t профиль отклонения над головой наблюдателя будет равен $U = U_1(x - at) = U_1(c + at - at) = U_1(c)$, то есть для наблюдателя профиль отклонения будет казаться все время постоянным, то есть тем же самым, что и при $t = 0$.

Отсюда вывод: отклонение $U = U_1(x - at)$ представляет собой перемещение неизменного профиля $U = U_1(x)$ вправо со скоростью a .

В физике процесс движения отклонения по струне называется волной, при этом a - скорость распространения волны. Движение вправо называют прямой волной. Итак, $U = U_1(x - at)$ - прямая волна.

Рассуждая аналогично, получаем, что $U = U_2(x + at)$ - перемещение отклонения $U = U_2(x)$ влево со скоростью a и называется обратной волной.

Вывод: $U = U_1(x - at) + U_2(x + at)$ - сумма прямой и обратной волны.

Из вышеизложенного получается следующий графический метод построения профиля струны в любой момент времени t_0 . Строим кривые $U = U_1(x)$ и $U = U_2(x)$, изображающие профиль (график) прямой и обратной волны при $t = 0$, а затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно со скоростью a вправо и влево соответственно. Чтобы получить профиль струны при $t = t_0$, нужно построить новый график, у которого ордината при каждом значении x равна алгебраической сумме ординат при этом x двух передвинутых графиков при $t = t_0$, то есть сложить передвинутые графики.

Формула Даламбера помогает дать интерпретацию в плоскости переменных x и t , то есть пространственно-временную интерпретацию. Дадим интерпретацию формулы (3) для двух частных случаев.

Случай 1. (Начальное смещение отлично от нуля, начальная скорость равна нулю).

Пусть начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

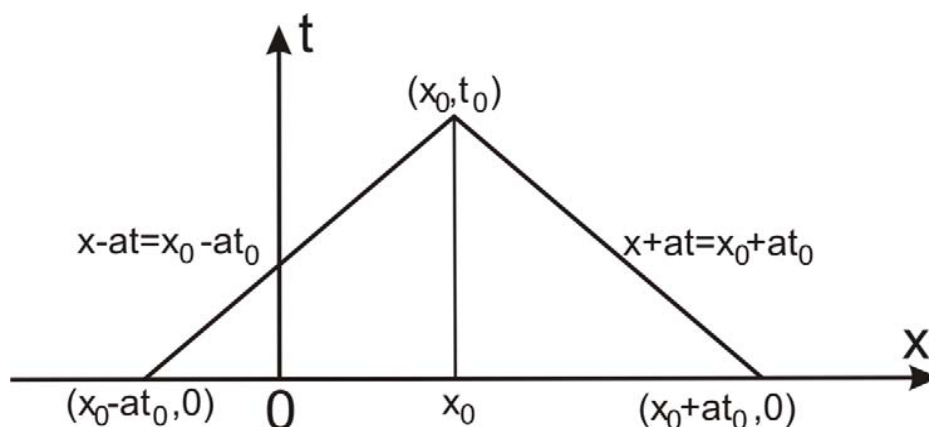
Тогда по формуле Даламбера получаем

$$U(x, t) = [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]/2,$$

а значит,

$$U(x_0, t_0) = [\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)]/2. \quad (4)$$

Возьмем плоскость переменных x и t (фазовую плоскость). Решение U на основании (4) в точке (x_0, t_0) можно интерпретировать как среднее значение смещений в точках $(x_0 - at_0)$ и $(x_0 + at_0)$. Эти точки являются точками пересечения прямых (характеристик уравнения (1)) $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$ с осью x .



Случай 2. (Начальное смещение равно нулю, начальная скорость произвольна). Рассмотрим начальные условия вида

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta,$$

откуда

$$U(x_0, t_0) = \frac{1}{2a} \int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} \psi(\zeta) d\zeta. \quad (5)$$

Таким образом, значение величины U в точке (x_0, t_0) можно интерпретировать как интеграл от начальной скорости в пределах от $x_0 - at_0$ до $x_0 + at_0$.

З а д а ч и

7.1. Проверить, что прямая и обратная волны являются решениями уравнения колебаний струны.

У к а з а н и е. Использовать правило дифференцирования сложной функции.

7.2. Найти первообразные функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ b, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Построить их графики.

Р е ш е н и е. В случае а) первообразную следует искать в виде

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\alpha) d\alpha + C,$$

где x_0 — точка непрерывности подынтегральной функции. На интервале $(-\infty, 1)$ первообразная равна

$$F(x) = \int_{x_0}^x 0 d\alpha + C_1 = \int_0^x 0 d\alpha + C_1 = C_1,$$

где $x_0 = 0$. На отрезке $[1, 3]$ имеем

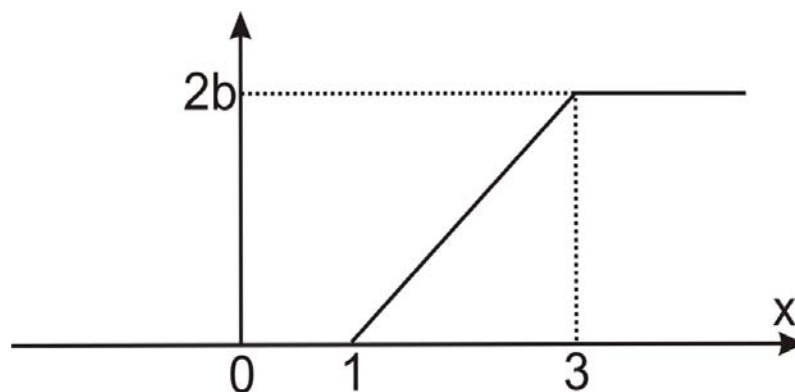
$$F(x) = \int_1^x b d\alpha + C_2 = b(x - 1) + C_2.$$

На интервале $(3, \infty)$ получаем

$$F(x) = \int_4^x 0 d\alpha + C_3 = C_3.$$

Выберем постоянные C_i ($i = \overline{1, 3}$) из условия непрерывности функции $F(x)$ в точках $x = 1$, $x = 3$. Выберем $C_1 = 0$, тогда из условия непрерывности в точке $x = 1$ имеем $b(1 - 1) + C_2 = 0$, то есть $C_2 = 0$. Из условия непрерывности в точке $x = 3$ получим $b(3 - 1) = C_3$, тогда $C_3 = 2b$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ b(x - 1), & 1 \leq x \leq 3, \\ 2b, & x \geq 3. \end{cases}$$



б) Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$

в) Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x - 1)^2, & 1 \leq x \leq 3, \\ 4, & x \geq 3. \end{cases}$

В задачах 7.3 — 7.5 найти решение с помощью формулы Даламбера.

7.3. Найти решение уравнения колебаний струны (1) при начальных условиях

$$\begin{cases} U(x, 0) = \sin x, \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

Р е ш е н и е.

$U(x, t) = [\sin(x - at) + \sin(x + at)]/2 = \sin x \cos at$.
Здесь $U_1(x - at) = \sin(x - at)/2$ - прямая волна, а

$$U_2(x + at) = \sin(x + at)/2$$

- обратная волна.

7.4. Найти решение уравнения (1) при начальных условиях

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Решение этой задачи на основании формулы (3) записывается в следующем виде

$$U(x, t) = [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]/2,$$

так как $\psi \equiv 0$.

Таким образом, для того чтобы записать решение задачи, нам необходимо найти функции $\varphi(x + at)$ и $\varphi(x - at)$. В силу (6) имеем:

$$\varphi(x+at) = \begin{cases} 0, & x + at < -1, \\ 1, & -1 \leq x + at \leq 1, \\ 0, & x + at > 1. \end{cases} \quad \varphi(x-at) = \begin{cases} 0, & x - at < -1, \\ 1, & -1 \leq x - at \leq 1, \\ 0, & x - at > 1. \end{cases}$$

Если фазовую плоскость (x, t) с помощью характеристик $(x \pm at = \pm 1)$, проведенных через концы отрезка $[-1, 1]$, разбить на области $I - VI$, то по формуле Даламбера можно записать решения в каждой из этих областей (см. рис. 1.)

$$\begin{aligned} U(x, t) &= (0 + 0)/2 = 0, (x, t) \in I, \\ U(x, t) &= (1 + 0)/2 = 1/2, (x, t) \in II, \\ U(x, t) &= 0, (x, t) \in III, \\ U(x, t) &= 1/2, (x, t) \in IV, \\ U(x, t) &= 0, (x, t) \in V, \\ U(x, t) &= 1, (x, t) \in VI, \end{aligned}$$

где области $I - VI$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I : \begin{cases} x - at > 1, \\ x + at > 1, \end{cases} & \quad II : \begin{cases} -1 \leq x - at \leq 1, \\ x + at > 1, \end{cases} \\ III : \begin{cases} x - at < -1, \\ x + at > 1, \end{cases} & \quad IV : \begin{cases} -1 \leq x + at \leq 1, \\ x - at < -1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$V : \begin{cases} x + at < -1, \\ x - at < -1, \end{cases} \quad VI : \begin{cases} -1 \leq x - at \leq 1, \\ -1 \leq x + at \leq 1. \end{cases}$$

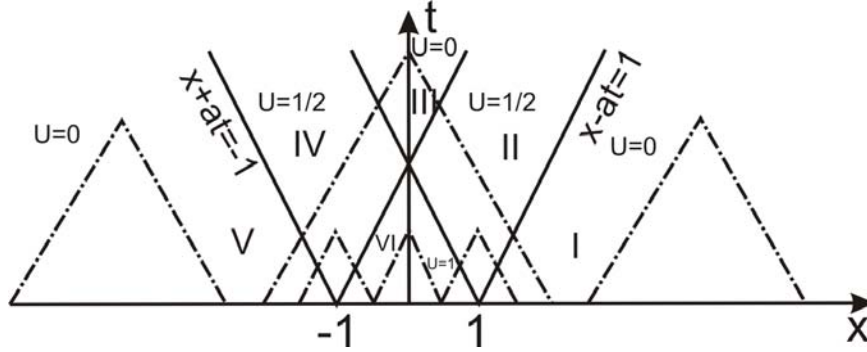


Рис. 1

Таким образом, как видно на рисунке 1, плоскость разбивается на области I, V , куда для данного момента отклонение еще не дошло; область III , где отклонения уже прошли; области II, IV, VI , где имеют место отклонения. Прямые $x - at = 1, x - at = -1; x + at = -1, x + at = 1$ представляют соответственно передний и задний фронт прямой волны $U_1(x - at)$ и обратной волны $U_2(x + at)$.

7.5. Решим задачу (7.4), используя пространственно-временную интерпретацию, то есть используя формулу (4). На основании этой формулы имеем (рис. 1)

$$\begin{aligned} U(x, t) &= (0 + 0)/2 = 0, & (x, t) &\in I, III, V, \\ U(x, t) &= (1 + 0)/2 = 1/2, & (x, t) &\in II, \\ U(x, t) &= (0 + 1)/2 = 1/2, & (x, t) &\in IV, \\ U(x, t) &= (1 + 1)/2 = 1, & (x, t) &\in VI. \end{aligned}$$

7.6. Бесконечная струна выводится из положения равновесия начальным отклонением, определяемым формулой (8). (стр 43) Предполагая, что начальные скорости отсутствуют, начертить форму струны (на отдельных графиках) для моментов времени $t_k = kc/(4a), k = 1, 5; a$ - постоянная из уравнения колебаний струны.

Р е ш е н и е. Так как начальные скорости отсутствуют, то мы имеем следующую задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x) \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

где функция $\varphi(x)$ определяется формулой (8). В данном случае $\psi(x) \equiv 0$, поэтому формула (3) принимает вид:

$$U(x, t) = [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]/2,$$

то есть

$$U_1 = \varphi(x - at)/2, U_2 = \varphi(x + at)/2.$$

Отметим, что $U_1(x, 0) = U_2(x, 0) = \varphi(x)/2$, т.е. прямая и обратная волны в начальный момент $t = 0$ совпадают. Профиль струны в момент $t = 0$ будет иметь вид, указанный на рис. 2, на котором график прямой и обратной волны показан пунктирной линией.

1. Начертим график струны в момент $t_1 = c/(4a)$. За время t_1 график $\varphi(x)/2$ перемещается на величину $S_1 = at_1 = ac/(4a) = c/4$ вправо и влево. Таким образом, профиль струны в момент t_1 имеет следующий вид:

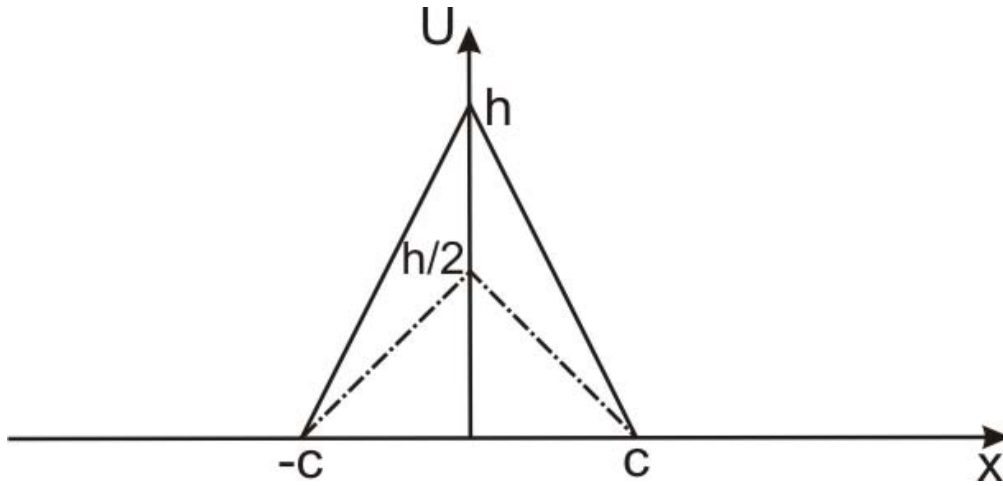
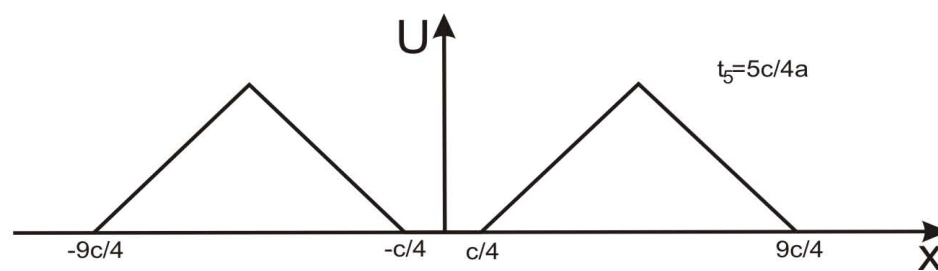
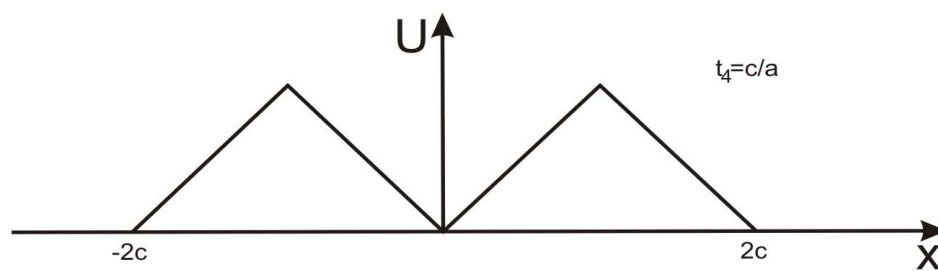
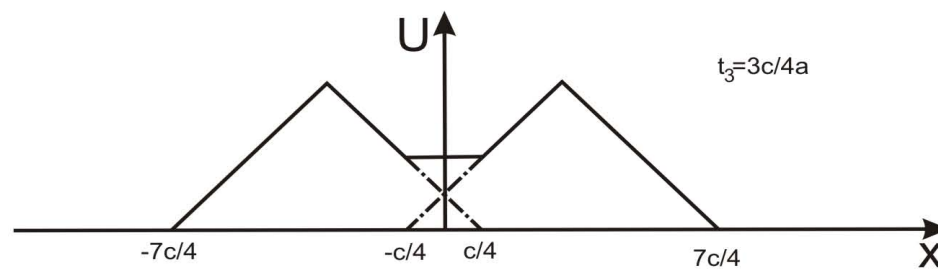
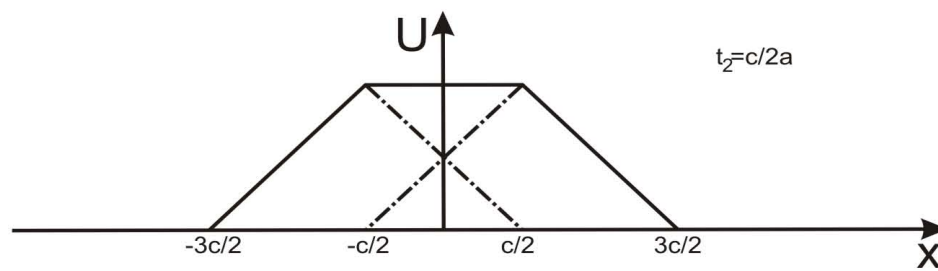
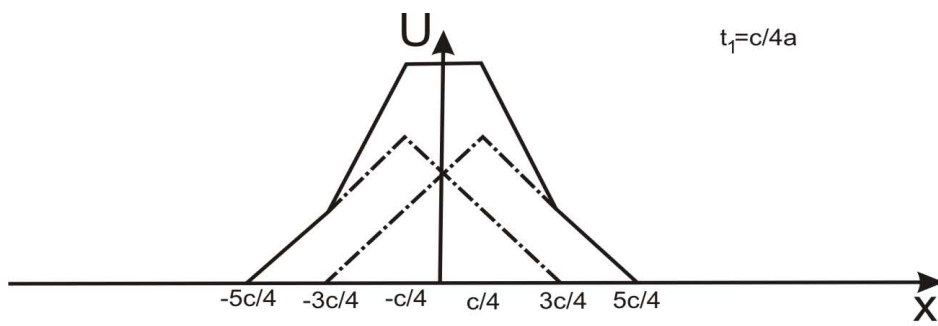


Рис. 2



Таким образом, в данном случае описанный процесс представляет распространение одиночной волны отклонения; после прохождения такой волны точки струны возвращаются в свое исходное положение на оси абсцисс. Такой процесс может наблюдаться в очень длинной струне до тех пор, пока волны, бегущие по струне, не дойдут до ее концов.

7.7. В момент $t = 0$ неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющим форму, изображенную на рис. 3.

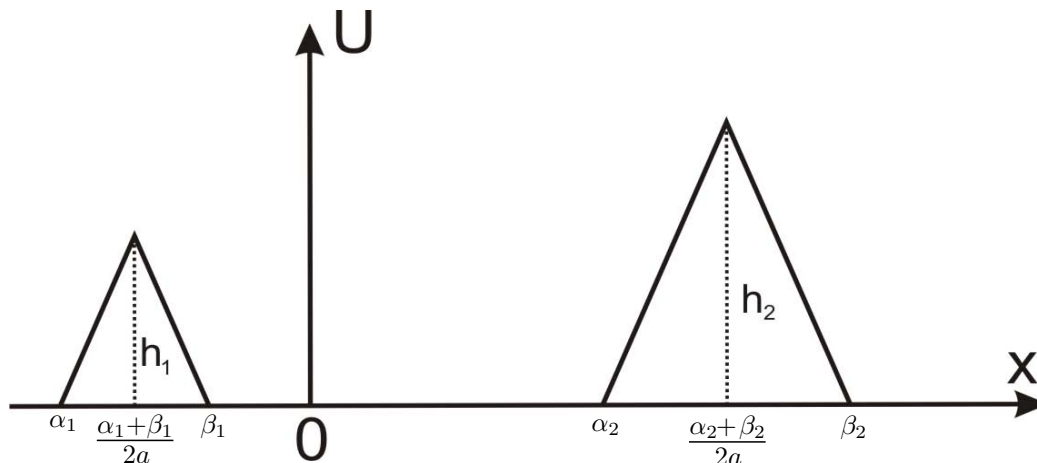


Рис. 3

В какой точке x и в какой момент t будет максимальное отклонение, и чему оно равно?

У к а з а н и е. Максимальное отклонение будет достигаться в точке x , в которой встречаются прямая и обратная волны.

О т в е т: $t = \frac{\alpha_2 + \beta_2 - (\alpha_1 + \beta_1)}{4a}$, $x = (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)/4$, $h_{max} = (h_1 + h_2)/2$.

7.8. Бесконечная струна ($a = 1$), находящаяся в равновесии, в начальный момент от удара молоточка получила на отрезке $[-1, 1]$ скорость $v_0 = 1$. Начертить положения струны для моментов времени $t = 0, 1, 2, 3$.

Р е ш е н и е. В данном случае имеем задачу

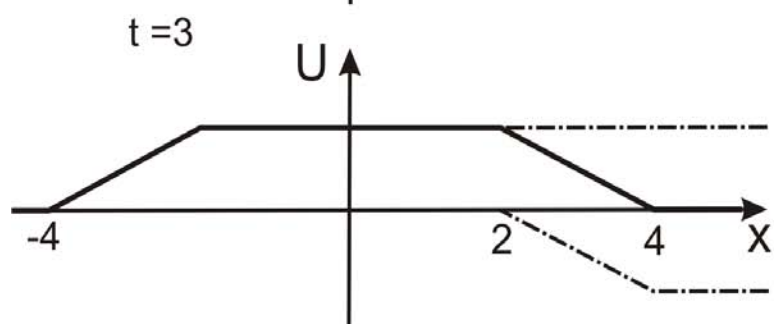
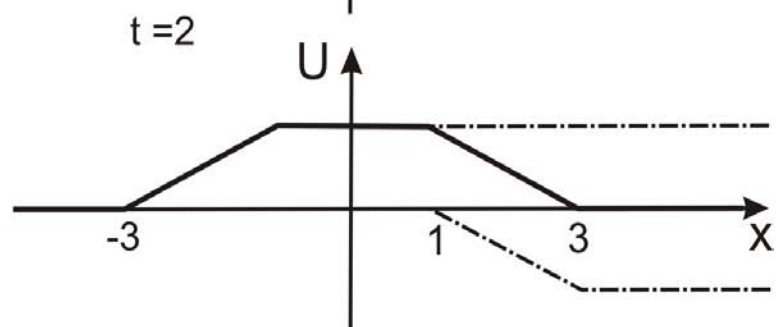
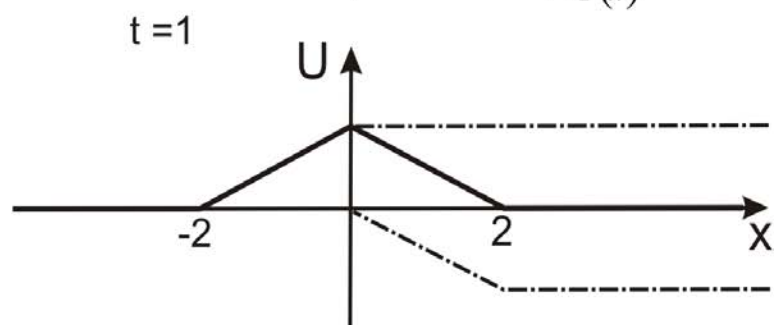
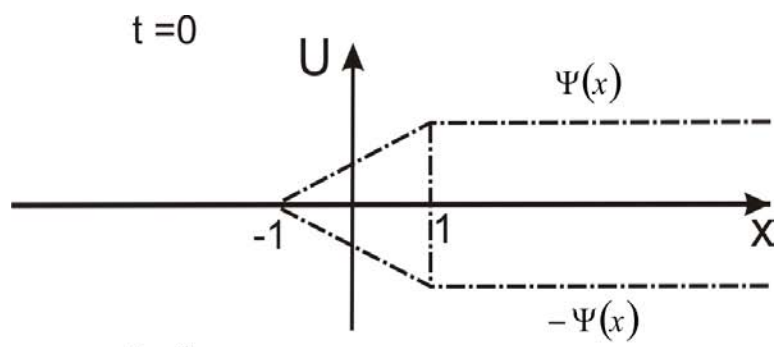
$$U_{tt} = U_{xx},$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

где функция $\psi(x)$ определяется следующим образом

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

то есть $\psi(x)$ имеет в точках $x = \pm 1$ разрывы.



Так как $\varphi \equiv 0$, то решение задачи представляется в виде

$$U(x, t) = \Psi(x + t) - \Psi(x - t),$$

где $\Psi(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$. В начальный момент времени график прямой волны есть $-\Psi(x)$, а график обратной волны есть $\Psi(x)$. Для нахождения $\Psi(x)$ проинтегрируем $\psi(x)$ на каждом из подынтервалов и определим постоянные интегрирования из условия непрерывности искомой функции в точках $x = \pm 1$ (см. задачу 7.2). Итак,

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+1)/2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

7.9. Найти решение уравнения (1) при начальных условиях

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \sin x, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

Ответ:

$$U(x, t) = \frac{1}{a} \sin x \sin at.$$

7.10. Пусть в задаче (1),(2) начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Записать решение задачи, используя формулу Даламбера.

У к а з а н и е. Так как $\varphi = 0$, то решение задачи запишется в виде:

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta = \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \quad (7)$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C.$$

Для нахождения $\Psi(x)$ проинтегрируем $\psi(x)$ на каждом из подынтервалов. Тогда получим:

$$\Psi(x) = \begin{cases} C_1, & x < -1, \\ \frac{x+1}{2a} + C_2, & -1 \leq x \leq 1, \\ C_3, & x > 1. \end{cases}$$

Определим постоянные C_i , $i = \overline{1, 3}$ из условия непрерывности в точках $x = \pm 1$ (см. задачу 7.2) Таким образом,

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x+1)/(2a), & -1 \leq x \leq 1, \\ 1/a, & x \geq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\Psi(x+at) = \begin{cases} 0, & x+at \leq -1, \\ (x+at+1)/(2a), & -1 \leq x+at \leq 1, \\ 1/a, & x+at \geq 1. \end{cases}$$

$$\Psi(x-at) = \begin{cases} 0, & x-at \leq -1, \\ (x-at+1)/(2a), & -1 \leq x-at \leq 1, \\ 1/a, & x-at \geq 1. \end{cases}$$

Разбивая фазовую плоскость (x, t) на области $I - VI$ (рис.1), мы можем записать значения $U(x, t)$ по формуле (7)

$$U(x, t) = 1/a - 1/a = 0, \quad (x, t) \in I,$$

$$U(x, t) = 1/a - \frac{x-at+1}{2a} = \frac{1-x+at}{2a}, \quad (x, t) \in II.$$

Найти решения в областях $III - VI$.

О т в е т:

$$U(x, t) = 1/a, \quad (x, t) \in III, \quad U(x, t) = \frac{x+at+1}{2a}, \quad (x, t) \in IV.$$

$$U(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V, \quad U(x, t) = t, \quad (x, t) \in VI.$$

7.11. Решим задачу 7.10, используя пространственно-временную интерпретацию, то есть используя формулу (6). Рассмотрим фазовую плоскость (x, t) и области $I - VI$ на ней. Итак, на основании формулы (6) имеем (Рис. 1)

$$1) U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} 0 d\zeta = 0, \quad (x, t) \in I.$$

$$2) U(x, t) = \frac{1}{2a} \left(\int_{x-at}^1 1 d\zeta + \int_1^{x+at} 0 d\zeta \right) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^1 1 d\zeta = \frac{1-x+at}{2a}, \quad (x, t) \in II.$$

$$3) U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 1 d\zeta = 1/a, \quad (x, t) \in III.$$

Аналогично можно получить решения в областях $IV - VI$.

7.12. Используя формулу Даламбера, записать решение уравнения (1) с начальными условиями вида

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\varphi(x)$ задается на рис. 2.

У к а з а н и е. Для того чтобы записать решение задачи по формуле (3), необходимо найти функцию $\varphi(x)$, т.е. записать аналитическое выражение функции, заданной графиком на рис.2.

2. Имея $\varphi(x)$, записать $\varphi(x - at)$ и $\varphi(x + at)$, а затем подставить в формулу (3).

О т в е т:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -c, \\ h(1 + x/c), & -c \leq x \leq 0, \\ h(1 - x/c), & 0 \leq x \leq c, \\ 0, & x \geq c. \end{cases} \quad (8)$$

$$U(x, t) = \begin{cases} 0, & (x, t) \in I, \\ h(1 + \frac{at-x}{c})/2, & (x, t) \in II, \\ h(1 + \frac{x-at}{c})/2, & (x, t) \in III, \\ 0, & (x, t) \in IV, \\ h(1 - \frac{x+at}{c})/2, & (x, t) \in V, \\ h(1 + \frac{x+at}{c})/2, & (x, t) \in VI, \\ 0, & (x, t) \in VII, \\ h(1 + x/c), & (x, t) \in VIII, \\ h(1 - \frac{at}{c}), & (x, t) \in IX, \\ h(1 - \frac{x}{c}), & (x, t) \in X, \end{cases}$$

где области $I - X$ описываются следующим образом

$$I : \begin{cases} x - at \geq c \\ x + at \geq c \end{cases} \quad II : \begin{cases} 0 \leq x - at < c \\ x + at \geq c \end{cases} \quad III : \begin{cases} -c \leq x - at \leq 0 \\ x + at \geq c \end{cases}$$

$$IV : \begin{cases} x - at \leq -c \\ x + at \geq c \end{cases} \quad V : \begin{cases} x - at \leq -c \\ 0 \leq x + at \leq c \end{cases} \quad VI : \begin{cases} x - at \leq -c \\ -c \leq x + at \leq 0 \end{cases}$$

$$VII : \begin{cases} x - at \leq -c \\ x + at \leq -c \end{cases} \quad VIII : \begin{cases} -c \leq x - at \leq 0 \\ -c \leq x + at \leq 0 \end{cases}$$

$$IX : \begin{cases} -c \leq x - at \leq 0 \\ 0 \leq x + at \leq c \end{cases} \quad X : \begin{cases} 0 \leq x - at \leq c \\ 0 \leq x + at \leq c \end{cases}$$

и изображены на рис. 4.

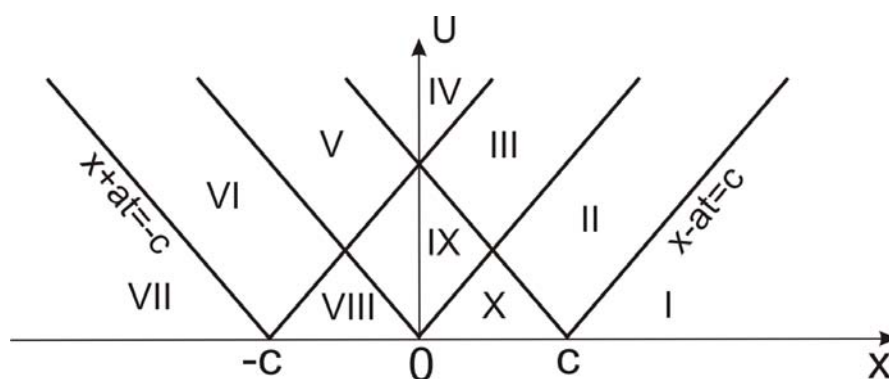


Рис. 4

7.13. Пусть начальные условия в задаче (1),(2) задаются следующим образом

$$U(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}, \quad U_t(x, 0) = 0.$$

Начертить форму струны для моментов времени $t_k = \frac{k}{2a}, k = \overline{1, 4}$.

З А Н Я Т И Е 8

Тема. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Формула Даламбера позволяет найти решения некоторых задач для полубесконечной струны. Рассмотрим сначала следующие вспомогательные задачи.

8.1. Показать, что в том случае, когда начальные данные в задаче Коши для бесконечной струны являются нечетными функциями относительно $x = 0$, то $U(0, t) = 0$ при $t > 0$. (см. задачу (1₀), (2) занятия 7).

Р е ш е н и е. Так как φ и ψ - нечетные функции, то

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \psi(x) = -\psi(-x). \quad (1)$$

Решение задачи Коши для бесконечной струны определяется форму-

лой Даламбера

$$U(x, t) = [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (2)$$

Положим в (2) $x = 0$, тогда получим

$$U(0, t) = [\varphi(at) + \varphi(-at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

Первое слагаемое в (3) равно нулю в силу (1). Второе слагаемое также равно нулю, так как интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю. Итак, $U(0, t) = 0$.

8.2. Показать, что в том случае, когда начальные данные в задаче Коши для бесконечной струны являются четными функциями относительно $x = 0$, то $U_x(0, t) = 0$ при $t > 0$.

8.3. Записать решение задачи о колебаниях полубесконечной струны $x \geq 0$ с закрепленным концом $x = 0$, т.е. следующей задачи

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \leq x < \infty, \quad (5)$$

$$U(0, t) = 0, t > 0. \quad (6)$$

Р е ш е н и е. Для решения поставленной задачи рассмотрим вспомогательную задачу для бесконечной струны:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (7)$$

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi_1(x), \\ U_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad (8)$$

где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

то есть $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ получаются из $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным продолжением относительно $x = 0$ на всю действительную ось. Так как (7),(8) - обычная задача Коши для бесконечной струны, то ее решение записывается по формуле Даламбера (2):

$$U(x, t) = [\varphi_1(x - at) + \varphi_1(x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\alpha) d\alpha. \quad (11)$$

Если рассматривать теперь функцию (11) только при $x \geq 0$, то на основании равенств (9), (10) функция (11) дает решения исходной задачи, так как

$$U(x, 0) = \varphi_1(x) = \varphi(x), x \geq 0,$$

$$U_t(x, 0) = \psi_1(x) = \psi(x), x \geq 0,$$

$$U(0, t) = 0, t > 0.$$

Решение задачи (4₀), (5), (6) можно записать, возвращаясь к прежним начальным данным φ и ψ :

$$U(x, t) = [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha,$$

если $x - at \geq 0$, $t \leq x/a$. Если $x - at < 0$, $t > x/a$, то в силу (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} U(x, t) &= [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)]/2 + \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^0 \psi_1(\alpha) d\alpha + \int_0^{x+at} \psi_1(\alpha) d\alpha \right] = \\ &= [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)]/2 + \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^0 (-\psi(-\alpha)) d\alpha + \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \right] = \\ &= [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)]/2 + \frac{1}{2a} \left[\int_{at-x}^0 \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \right] = \\ &= [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Итак,

$$U(x, t) = \begin{cases} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at))/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t \leq x/a, \\ (\varphi(x + at) - \varphi(at - x))/2 + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t > x/a. \end{cases} \quad (12)$$

Как видно из формулы (12), в точку (x, t) , при $t > x/a$, приходят две волны: обратная волна из точки $(x + at, 0)$ и один раз отраженная волна (отражение происходит с изменением знака) из точки $(at - x, 0)$ (совпадающая с прямой волной из фиктивной точки $(x - at, 0)$), (см. рис. 5)

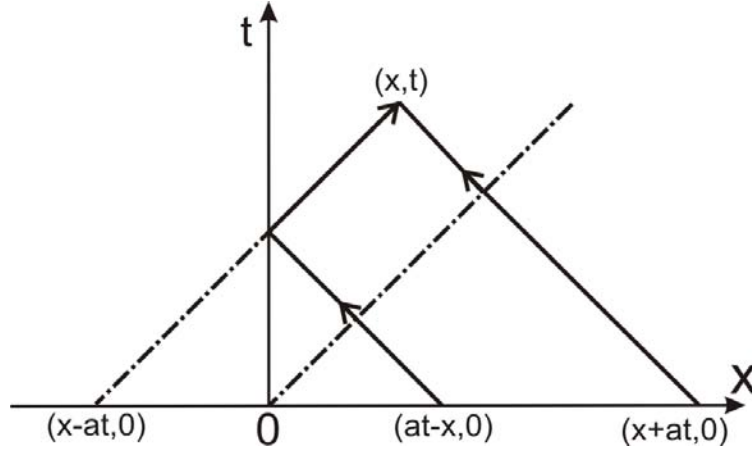


Рис.5

8.4. Записать решение задачи о колебаниях полубесконечной струны $x \geq 0$ со свободным концом $x = 0$, т.е. задачи

$$\begin{aligned} U_{tt} &= a^2 U_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0, \\ \begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} & 0 \leq x < \infty, \\ U_x(0, t) &= 0, t > 0. \end{aligned}$$

О т в е т:

$$U(x, t) = \begin{cases} (\varphi(x+at) + \varphi(x-at))/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t \leq x/a, \\ (\varphi(x+at) + \varphi(at-x))/2 + \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right], & t > x/a. \end{cases}$$

Здесь также имеет место отражение волн от конца струны $x = 0$, но без изменения знака.

8.5. Записать решение задачи о колебаниях полубесконечной струны $x \geq 0$ с закрепленным концом $x = 0$ и со следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} U(x, 0) = \sin x, \\ U_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

О т в е т: $U(x, t) = \sin x \cos at + xt, x \geq 0, t > 0$.

Замечание. Решение задачи можно было записать сразу по формуле (12).

8.6. Решим задачу 8.3 при условии, что $\psi(x) \equiv 0$, а $\varphi(x)$ задается на рис. 6.

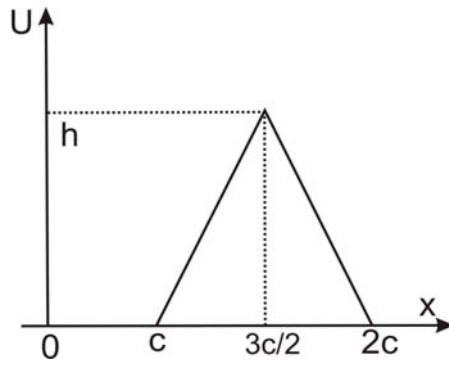


Рис.6

У к а з а н и е 1. Для того чтобы записать решение задачи по формулам (12), необходимо найти функцию $\varphi(x)$, то есть записать уравнение линии, заданной графиком на рис. 6.

У к а з а н и е 2. Имея $\varphi(x)$, записать $\varphi(x - at)$, $\varphi(x + at)$ и $\varphi(at - x)$, а затем подставить в формулы (12).

О т в е т:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c \\ 4hx/c - 4h, & c \leq x \leq 3c/2 \\ -4hx/c + 8h, & 3c/2 \leq x \leq 2c \\ 0, & x \geq 2c. \end{cases} \quad (13)$$

$$U(x, t) = \begin{cases} 0, & (x, t) \in I, \\ -2h(x - at)/c + 4h, & (x, t) \in II, \\ \dots & \dots \\ -4hx/c + 8h, & (x, t) \in X, \\ 0, & (x, t) \in XI, \\ 2h(x + at)/c - 2h, & (x, t) \in XII, \\ \dots & \dots \\ 0, & (x, t) \in XX, \end{cases}$$

где области $I - XX$ изображены на рис. 7.

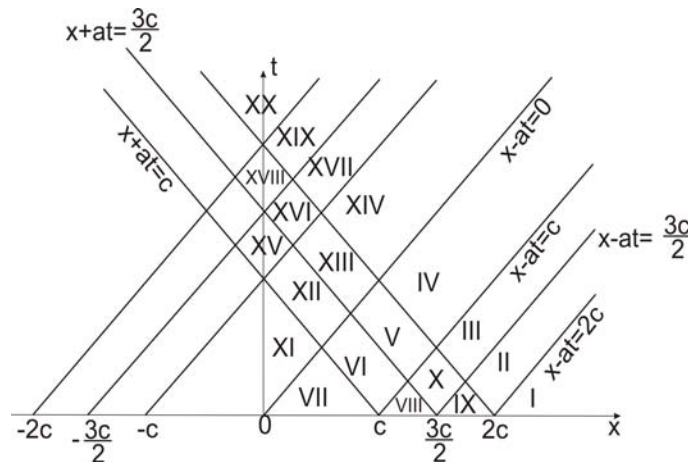


Рис.7

Отметим, что для областей $I - X$ используется первая формула (12), а для областей $XI - XX$ — вторая формула (12).

8.7. (О распространении краевого режима). Найти решение уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0, \quad (14)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad (15)$$

и граничному условию

$$U(0, t) = \mu(t), t > 0. \quad (16)$$

Р е ш е н и е. На основании известных результатов (см. занятие 5) общее решение уравнения (14) запишется в виде:

$$U(x, t) = C_1(x + at) + C_2(x - at), \quad (17)$$

где C_1 и C_2 — произвольные функции. Используя условия (15), имеем

$$\begin{cases} U(x, 0) = C_1(x) + C_2(x) = 0, \\ U_t(x, 0) = aC_1'(x) - aC_2'(x) = 0, \end{cases} \quad x \geq 0,$$

или

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = 0, \\ C_1(x) - C_2(x) = C, \end{cases} \quad x \geq 0.$$

Отсюда получаем, $C_1(x) = C/2$, $C_2(x) = -C/2$, если $x \geq 0$. Так как $x + at \geq 0$, то $C_1(x + at) = C/2$, а $C_2(x - at) = -C/2$ только в том случае, если $x - at \geq 0$. Поэтому в силу (17)

$$U(x, t) = 0, \text{ если } x - at \geq 0. \quad (18)$$

Если $x - at < 0$, то мы не можем использовать условия (15), так как они заданы только для неотрицательных значений аргумента. Поэтому, учитывая, что в этом случае $U(x, t) = C/2 + C_2(x - at) \equiv C(x - at)$, определим функцию $C(x - at)$ из краевого условия (16):

$$U(0, t) = C(-at) = \mu(t).$$

Пусть $-at = x_1$, тогда $t = -x_1/a$ и $C(x_1) = \mu(-x_1/a)$. Отсюда

$$U(x, t) = C(x - at) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu(t - x/a), \text{ если } t - x/a > 0. \quad (19)$$

Итак, объединяя (18) и (19), получаем

$$U(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq x/a, \\ \mu(t - x/a), & x/a < t < \infty. \end{cases}$$

Замечание. Исходя из физического смысла решение $U(x, t)$ можно было сразу искать в виде прямой волны.

8.8. Полубесконечная струна, закрепленная на конце $x = 0$, возбуждена начальным отклонением, изображенным на рис. 6. Предполагая, что начальные скорости отсутствуют, начертить профиль струны для моментов времени

$$t_k = kc/(4a), \quad k = 2, 4, 5, 6, 8.$$

Решение. Мы имеем задачу

$$\begin{aligned} U_{tt} &= a^2 U_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ \begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} & \quad x \geq 0, \\ U(0, t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ определяется формулой (13).

На основании задачи 8.3 для получения профиля струны в моменты t_k продолжим функцию $\varphi(x)$ нечетным образом относительно $x = 0$, т.е. получим функцию $\varphi_1(x)$, определенную на всей оси (рис. 8). Таким образом, мы приходим к случаю бесконечной струны.

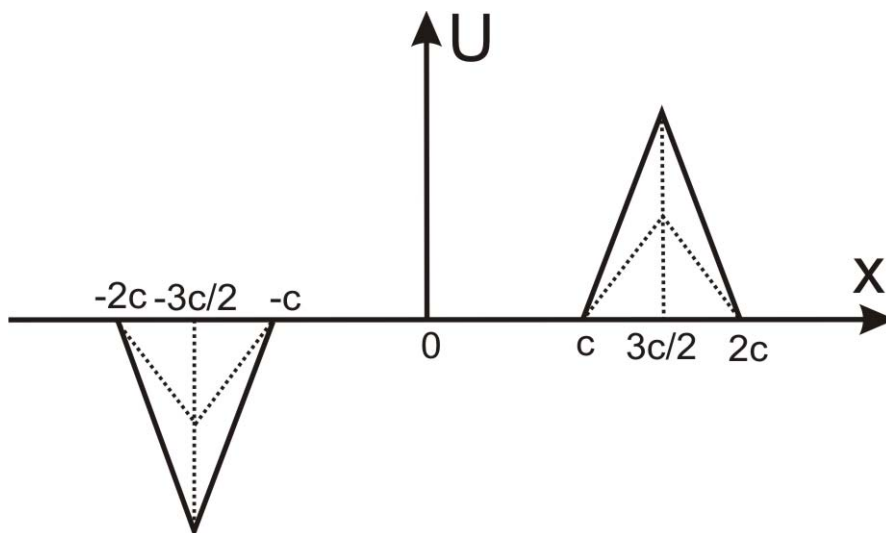
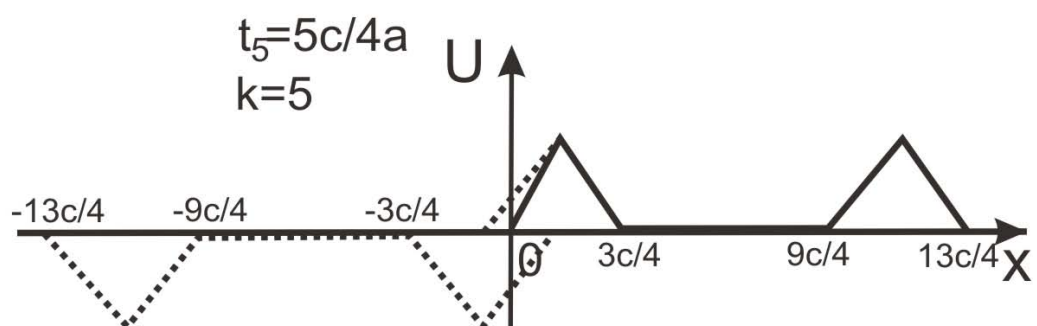
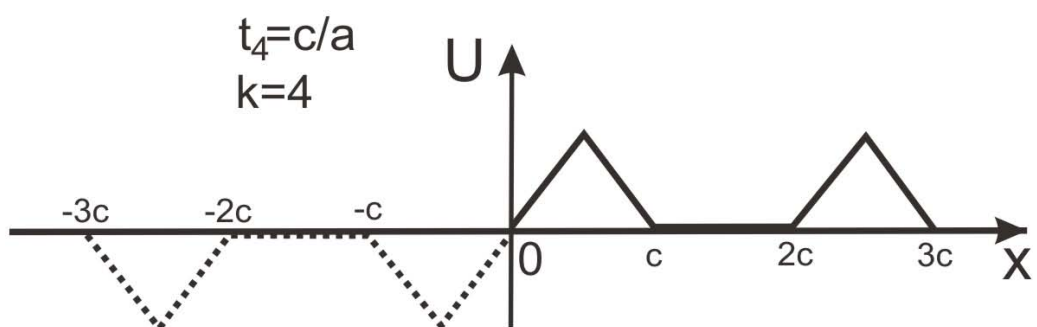
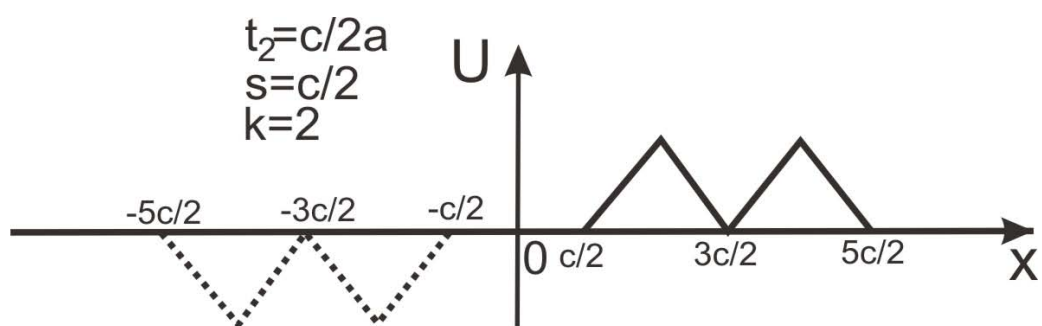
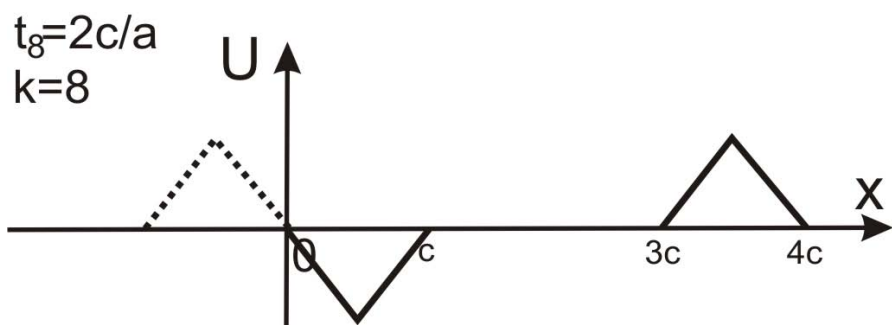
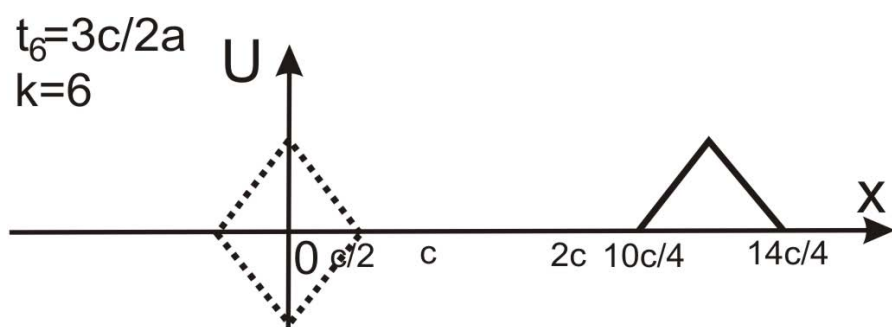


Рис. 8

Проводя построения, как в задаче 7.6, берем только ту часть графика, для которой $x \geq 0$.





Из чертежей видно, что в данном случае начало процесса будет полностью соответствовать случаю бесконечной струны, т.е. две полуволны двигаются в разные стороны с постоянной скоростью. Как только полуволна, бегущая влево, дойдет до точки $x = 0$ (пункт 2), туда же пойдет полуволна, бегущая вправо по отрицательной полуоси. В последующие моменты (пункты 3-5) эти полуволны начинают накладываться друг на друга, что соответствует процессу отражения волн от закрепленного конца. Сначала отражающаяся волна укорачивается, затем исчезает и, наконец, переворачивается. (Если начальная форма волны не симметрична, то полного исчезновения отклонений может и не быть). После того как волна полностью отразилась, отклонения точек меняют свой знак. После этого по струне побегут вправо с одинаковой скоростью две волны, находящиеся в противоположных фазах.

8.9. Пусть в задаче (4),(5),(6) функция $\psi(x) \equiv 0$, а $\varphi(x)$ дается формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Начертить положение струны для моментов времени $t_k = \frac{k}{2a}$, $k = \overline{1, 4}$.

8.10. Пусть на полуограниченной струне $x \geq 0$ ($a = 1$), закрепленной на конце $x = 0$, начальное отклонение всюду равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля и равна 1 только в интервале $[1, 2]$. Начертить положения струны для моментов времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$.

Решение. В данном случае мы имеем задачу 8.3, где $\varphi(x) \equiv 0$, а

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Так как полуограниченная струна закреплена на конце $x = 0$, то для решения задачи продолжим $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом относительно точки $x = 0$. В данном случае $\varphi_1 = 0$, а ψ_1 будет иметь следующий вид:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ -1, & -2 \leq x \leq -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

На основании формулы Даламбера

$$U(x, t) = -\Psi_1(x - at) + \Psi_1(x + at),$$

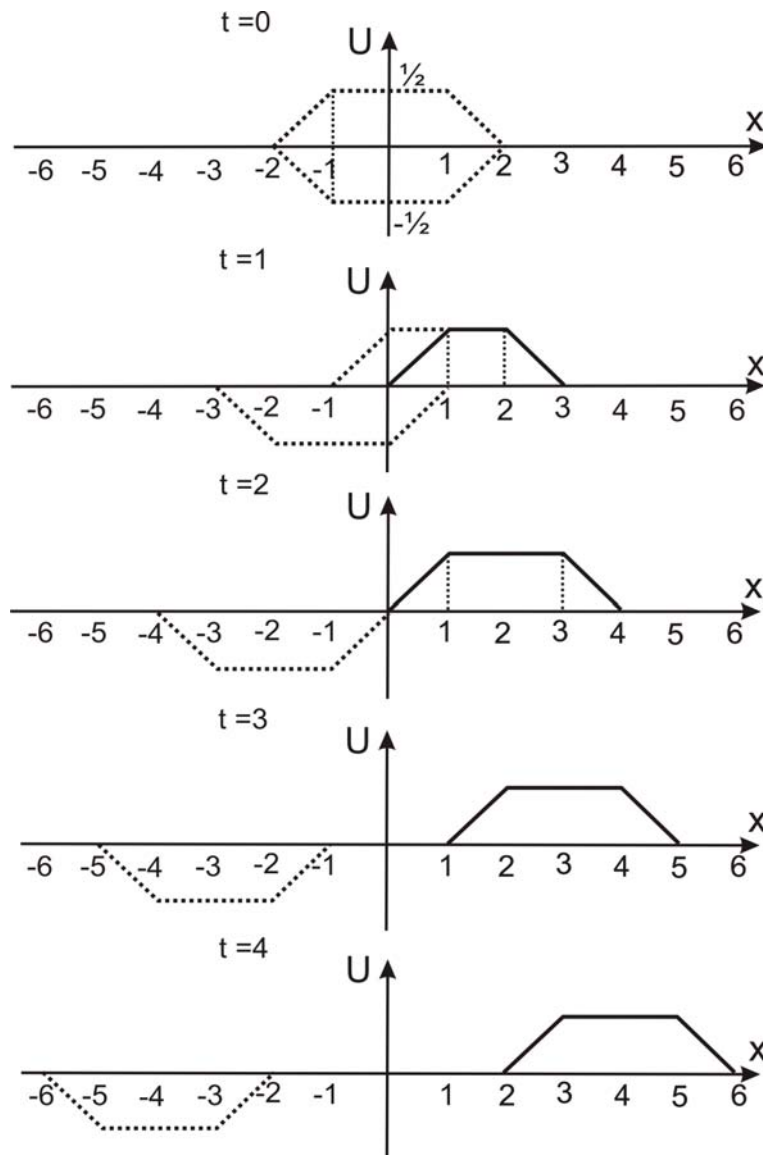
где

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \psi_1(\alpha) d\alpha + C.$$

Учитывая результат, полученный в задаче 7.2, будем иметь:

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ -(x+2)/2, & -2 \leq x \leq -1, \\ -1/2, & -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)/2 - 1/2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

Начертив графики прямой $-\Psi_1(x)$ и обратной $\Psi_1(x)$ волны, найдем положения полуограниченной струны для моментов времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$, оставляя только ту часть графика, для которой $x \geq 0$.



Д о м а ш н е е з а д а н и е

8.11. Записать решение задачи о колебаниях полубесконечной струны $x \geq 0$ со свободным концом $x = 0$ и со следующими начальными данными:

$$\begin{cases} U(x, 0) = x^2, \\ U_t(x, 0) = \cos x \end{cases}.$$

О т в е т:

$$U(x, t) = x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{a} \sin(at) \cos x.$$

8.12. Записать решение задачи 8.6 в случае, когда конец $x = 0$ свободен.

8.13. Найти решение задачи:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, x > 0, t > 0, \quad \begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad x \geq 0,$$

$$U(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

У к а з а н и е. Решение этой задачи следует искать в виде суммы $U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, где $U_1(x, t)$ является решением задачи 8.3, а $U_2(x, t)$ решением задачи 8.7.

О т в е т:

$$U(x, t) = \begin{cases} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t \leq x/a, \\ \mu(t - \frac{x}{a}) + [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t > x/a. \end{cases}$$

8.14. Найти решение задачи:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, x > 0, t > 0, \quad \begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad x \geq 0.$$

$$U_x(0, t) = \nu(t), t > 0.$$

У к а з а н и е. При решении поступаем, как в задаче 8.7. Для определения функции $C(x - at)$ получаем следующее дифференциальное уравнение

$$C'(x_1) = \nu(-x_1/a),$$

$x_1 < 0$, решая которое имеем

$$C(x_1) = \int_0^{x_1} \nu(-\alpha/a) d\alpha = -a \int_0^{-x_1/a} \nu(\zeta) d\zeta, \quad x_1 < 0.$$

О т в е т:

$$U(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - at \geq 0, \\ -a \int_0^{t-x/a} \nu(\zeta) d\zeta, & \text{если } x - at < 0, \end{cases}$$

8.15. Найти решение задачи:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad x > 0, t > 0, \begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad x \geq 0, U_x(0, t) = \nu(t), t > 0.$$

О т в е т:

$$U(x, t) = \begin{cases} (\varphi(x + at) + \varphi(x - at))/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t \leq x/a, \\ (\varphi(x + at) + \varphi(at - x))/2 + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \right. & t > x/a. \\ \left. + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right) - a \int_0^{t-x/a} \nu(\zeta) d\zeta, & \end{cases}$$

8.16. Начальная форма полубесконечной струны $x \geq 0$ со свободным концом изображена на рис. 6. Начертить положение струны для моментов времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 2, 4, 5, 6, 8$.

У к а з а н и е. На основании задачи 8.2 для получения профиля струны надо продолжить функцию $\varphi(x)$ четным образом относительно $x = 0$ и провести построения, аналогичные построениям задачи 8.8. Отметим, что в данном случае отражение волн от свободного конца происходит без изменения знака отклонения.

8.17. Полуограниченная однородная струна $x \geq 0$ с закрепленным концом $x = 0$ возбуждена начальным отклонением

$$U(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq l, \\ -\sin \frac{\pi x}{l}, & l < x \leq 2l, \\ 0, & 2l < x < \infty. \end{cases}$$

Определить графически форму струны в моменты времени $t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{a}, \frac{5l}{4a}, \frac{3l}{2a}, \frac{7l}{4a}, \frac{9l}{4a}$, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

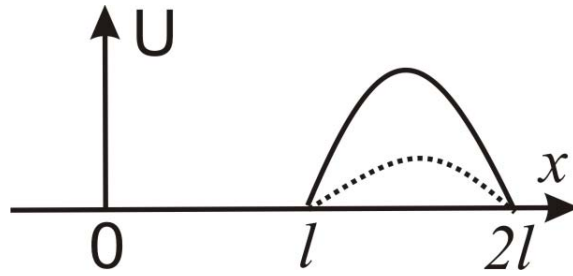


Рис. 9

У к а з а н и е. График $U(x, t)$ при $t = 0$ имеет вид (см. рис. 9).

8.18. Рассмотреть задачу 8.9 в случае, когда конец $x = 0$ свободен. Начертить положение струны для моментов времени $t_k = \frac{k}{2a}$, $k = \overline{1, 4}$.

8.19. Решить задачу 8.10 при условии, что конец $x = 0$ свободен, то есть $U_x(0, t) = 0$. Начертить положения струны для моментов времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$.

З А Н Я Т И Е 9

Тема. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

9.1. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача сводится к решению следующей задачи: найти решение уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (1_0)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} U(0, t) = 0, \\ U(l, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0. \quad (3_0)$$

Заметим также, что к этой задаче сводятся и другие задачи, в частности задача о продольных колебаниях стержня.

В данном случае для применения формулы Даламбера необходимо продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю действительную ось, причем продолжить таким образом, чтобы выполнялись граничные условия (3₀).

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ - функции, которые необходимо определить на всей действительной оси, то есть при $-\infty < x < \infty$, тогда для них имеет место формула Даламбера

$$U(x, t) = [\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\alpha) d\alpha. \quad (4)$$

В силу начальных условий (2) имеем

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi_1(x) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = \psi_1(x) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l.$$

На основании занятия 8 для выполнения граничных условий (3) наложим на функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ требование нечетности относительно точек $x = 0, x = l$, то есть

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\varphi_1(-x), \quad \psi_1(x) = -\psi_1(-x), \quad \varphi_1(x) = -\varphi_1(2l - x), \\ \psi_1(x) &= -\psi_1(2l - x), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\varphi_1(-x) = \varphi_1(2l - x),$$

или, делая замену $x' = -x$, получим

$$\varphi_1(x') = \varphi_1(x' + 2l).$$

Аналогично получаем $\psi_1(x') = \psi_1(x' + 2l)$. Из этих соотношений ясно, что функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ являются периодическими с периодом $2l$. Таким образом, условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжения $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$.

Итак, для решения задачи 9.1 продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ относительно $x = 0$ нечетным образом, а затем продолжим полученные функции периодически с периодом $2l$ на всю действительную ось. Получим задачу Коши для бесконечной струны с данными $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$. Подставляя их в формулу (4), получаем решение вспомогательной задачи. Рассматривая здесь $0 \leq x \leq l$, получаем решение нашей задачи.

Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого рассмотрим плоскость (x, t) . Так как

струна ограничена, то надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t > 0$, заключенную между прямыми $x = 0$ и $x = l$. Проведем через точки 0 и l характеристики до встречи с противоположными границами полосы. Полоса разобьется на области I, II, III, \dots (рис. 10).

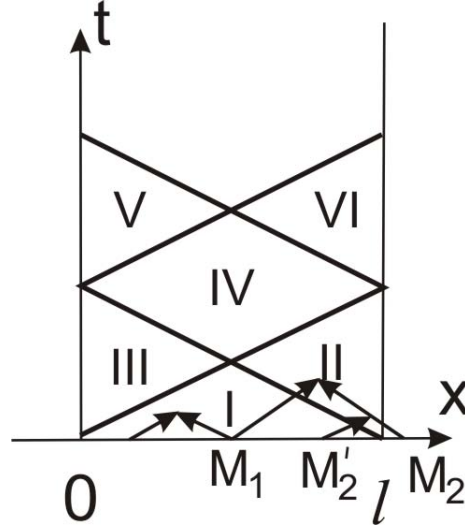


Рис. 10

Точки области I соответствуют тем моментам времени t , когда к точкам x струны доходят прямая и обратная волны, вышедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на процесс колебания не влияют, поэтому решение запишется по формуле (4). Точки вне области I соответствуют тем моментам времени t , когда к точкам x струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны.

Возьмем точку $M(x, t)$ (Рис. 10) в области II и представим $U(x, t)$ в виде

$$U(x, t) = U_1(x - at) + U_2(x + at),$$

где U_1 – прямая, а U_2 – обратная волна, определяемые следующим образом

$$\begin{cases} U_1(x - at) = \varphi(x - at)/2 - \Psi(x - at), \\ U_2(x + at) = \varphi(x + at)/2 + \Psi(x + at), \end{cases} \quad (5)$$

где $\Psi(z) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^z \psi(\alpha) d\alpha + C$ – любая первообразная функции $\psi(x)$, C – произвольная постоянная. Тогда в точке $M(x, t)$ имеются две волны: прямая волна U_1 , дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x - at$ и обратная волна U_2 из точки M_2 с абсциссой $x + at$, где M_1 – реальная точка струны, а M_2 – фиктивная. Заменим M_2 реальной точкой. В силу условий (3₀) имеем

$$\begin{cases} U_1(-x) = -U_2(x), \\ U_2(l + x) = -U_1(l - x). \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) имеем $-U_2(l+x) = U_1(l-x) = -U_2(-l+x)$, откуда следует, что $U_2(x+2l) = U_2(x)$, то есть $U_2(x) - 2l$ -периодическая функция. Аналогично имеем $-U_1(l-x) = U_2(l+x) = -U_1(-l-x)$, то есть $U_1(x+2l) = U_1(x)$. На основании второй формулы (6) получаем

$$U_2(x+at) = U_2(l+x+at-l) = -U_1(2l-x-at).$$

Таким образом, обратная волна $U_2(x+at)$ есть прямая волна $-U_1(2l-x-at)$, вышедшая в начальный момент времени из точки $M'_2(2l-x-at)$ (симметричной с M_2 относительно точки l), которая, дойдя до конца струны l в момент $t = \frac{l-(2l-x-at)}{a} = \frac{x+at-l}{a}$, изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t дошла до точки M . Таким образом, действие закрепленного конца $x=l$ свелось к отражению волны смещения с переменной знака и с сохранением абсолютной величины смещения. Если учесть теперь формулы (5), то будем иметь

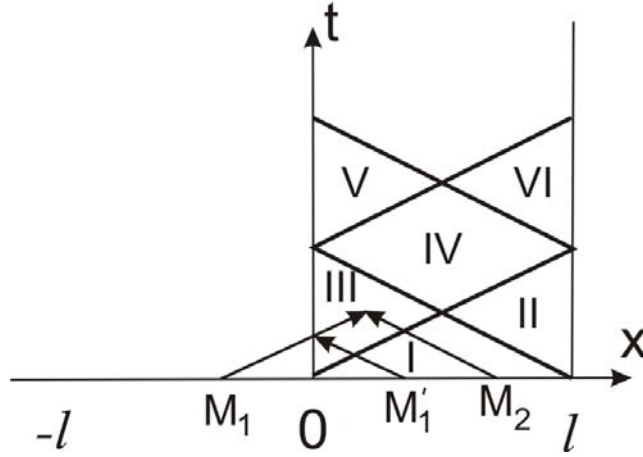


Рис. 11

$$\begin{aligned}
 U(x,t) &= U_1(x-at) + U_2(x+at) = U_1(x-at) - U_1(2l-x-at) = \\
 &= \varphi(x-at)/2 - \Psi(x-at) - \varphi(2l-x-at)/2 + \Psi(2l-x-at) = \\
 &= \frac{\varphi(x-at) - \varphi(2l-x-at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{\varphi(x-at) - \varphi(2l-x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x_0} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{\varphi(x-at) - \varphi(2l-x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (7)
 \end{aligned}$$

То же самое происходит с волнами, дошедшими до конца $x = 0$; в точках области III будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x = 0$. Определим $U(x, t)$ в области III . В данном случае точка $M_2(x + at, 0)$ -реальная, а точка $M_1(x - at, 0)$ -фиктивная.

Заменим M_1 на реальную точку M'_1 . В силу (6) имеем $U_1(x) = -U_2(-x)$, поэтому $U_1(x - at) = -U_2(-(x - at))$. На основании формул (5) имеем

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_1(x - at) + U_2(x + at) = -U_2(-x + at) + U_2(x + at) = \\ &= -\varphi(-x + at)/2 - \Psi(-x + at) + \varphi(x + at)/2 + \Psi(x + at) = \\ &= [\varphi(x + at) - \varphi(-x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть точка (x, t) лежит в области IV .

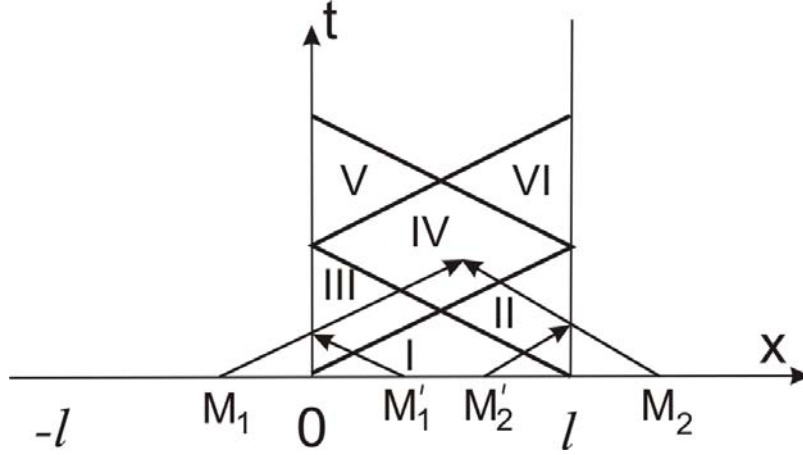


Рис. 12

Тогда

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_1(x - at) + U_2(x + at) = -U_2(-(x - at)) - U_1(2l - x - at) = \\ &= -\varphi(-x + at)/2 - \Psi(-x + at) - \varphi(2l - x - at)/2 + \Psi(2l - x - at) = \\ &= -[\varphi(-x + at) + \varphi(2l - x - at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - C + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha + C = \\ &= -[\varphi(-x + at) + \varphi(2l - x - at)]/2 + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

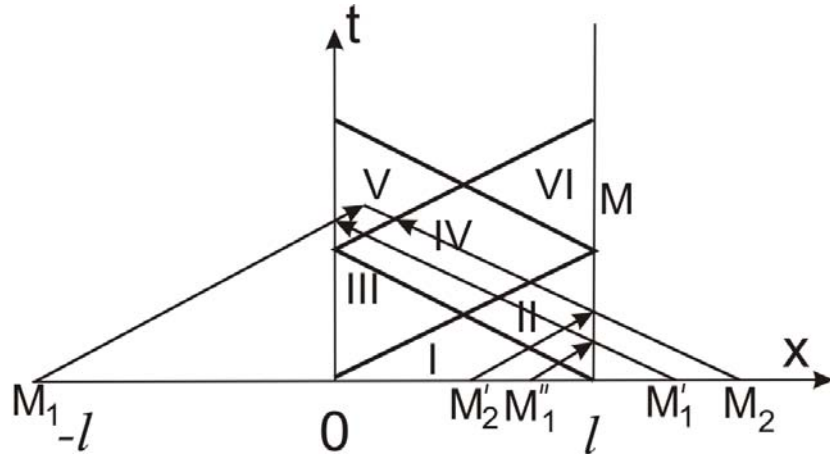


Рис. 13

Пусть точка (x, t) лежит в области V .

В данном случае в точку M приходит волна из точки M'_2 , один раз отраженная от конца $x = l$, и другая волна из точки M''_1 (по одному разу отраженная от концов $x = l$ и $x = 0$). Поэтому (в силу того, что $U_1 \rightarrow -U_2 \rightarrow U_1$, $U_2 \rightarrow -U_1$)

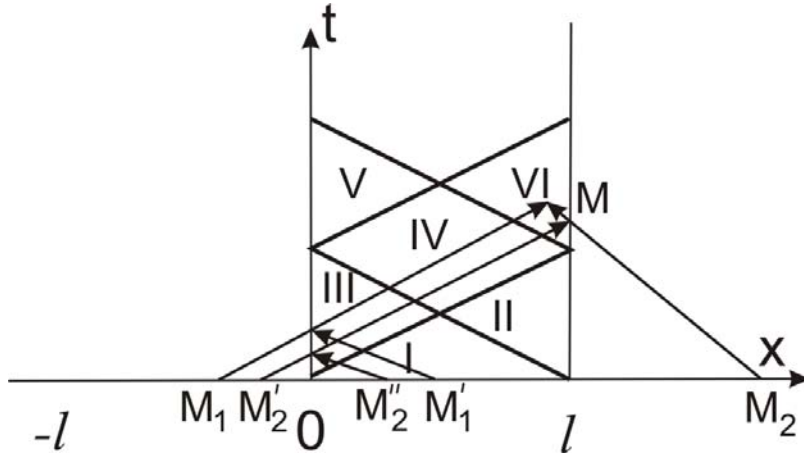


Рис. 14

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= U_1(x - at) + U_2(x + at) = U_1(2l + x - at) - U_1(2l - x - at) = \\
 &= \varphi(2l + x - at)/2 - \Psi(2l + x - at) - \varphi(2l - x - at)/2 + \Psi(2l - x - at) = \\
 &= [\varphi(2l + x - at) - \varphi(2l - x - at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l+x-at} \psi(\alpha) d\alpha - C + \\
 &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha + C = \\
 &= [\varphi(2l + x - at) - \varphi(2l - x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{2l+x-at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Пусть точка (x, t) лежит в области VI .

В данном случае в точку M приходит волна из точки M'_1 , один раз отраженная от конца $x = 0$, и другая волна из точки M''_2 (по одному разу отраженная от концов $x = 0$ и $x = l$). Поэтому (в силу того, что $U_1 \rightarrow -U_2, U_2 \rightarrow -U_1 \rightarrow U_2$)

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= U_1(x - at) + U_2(x + at) = -U_2(-x + at) + U_2(-2l + x + at) = \\
 &= -\varphi(-x + at)/2 - \Psi(-x + at) + \varphi(-2l + x + at) + \Psi(-2l + x + at) = \\
 &= [\varphi(-2l + x + at) - \varphi(-x + at)]/2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha - C + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-2l+x+at} \psi(\alpha) d\alpha + C = \\
 &= [\varphi(-2l + x + at) - \varphi(-x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{-2l+x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (11)
 \end{aligned}$$

9.2. Рассмотрим задачу о колебаниях конечной струны со свободными концами, то есть решим уравнение (1_0) с начальными условиями (2) и граничными условиями

$$\begin{cases} U_x(0, t) = 0, \\ U_x(l, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0. \quad (12_0)$$

Рассуждая как и выше, получим, что на основании занятия 8 для удовлетворения граничным условиям (12_0) необходимо наложить на функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ условия четности относительно $x = 0$ и $x = l$, которые имеют вид

$$\varphi_1(-x) = \varphi_1(x), \varphi_1(x) = \varphi_1(2l - x),$$

$$\psi_1(-x) = \psi_1(x), \psi_1(x) = \psi_1(2l - x),$$

откуда имеем $\varphi_1(-x) = \varphi_1(2l - x)$, или делая замену $x' = -x$, получим $\varphi_1(x') = \varphi_1(x' + 2l)$. Аналогично получаем $\psi_1(x') = \psi_1(x' + 2l)$. Из этих соотношений ясно, что функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ являются периодическими с периодом $2l$. Таким образом, условия четности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Далее, как в задаче 9.1, подставляя $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ в формулу (3) , получаем решение вспомогательной задачи. Рассматривая здесь $0 \leq x \leq l$, получаем решение нашей задачи. Выясним также, какое действие оказывают свободные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к рис.10 и выпишем значения $U(x, t)$, выбирая точку (x, t) в областях $I - VI$. Если точка $(x, t) \in I$, то концы струны еще не оказывают никакого влияния на колебания струны. Пусть точка (x, t) лежит в области II . Используя условия (12_0) , имеем

$$\begin{aligned}U_1'(-x) &= -U_2'(x), \\U_2'(l+x) &= -U_1'(l-x).\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}U_1(-x) &= U_2(x), \\U_2(l+x) &= U_1(l-x).\end{aligned}$$

Поэтому $U_2(x+at) = U_2(l+x+at-l) = U_1(2l-x-at)$. Таким образом, обратная волна $U_2(x+at)$ есть прямая волна, вышедшая из точки $M_2'(2l-x-at)$ (рис. 10). Значит, действие свободного конца $x=l$ свелось к отражению волны смещения без перемены знака и с сохранением абсолютной величины смещения. Отсюда на основании формулы (5) имеем

$$\begin{aligned}U(x,t) &= U_1(x-at) + U_2(x+at) = U_1(x-at) + U_1(2l-x-at) = \\&= \varphi(x-at)/2 - \Psi(x-at) + \varphi(2l-x-at)/2 - \Psi(2l-x-at) = \\&= [\varphi(x-at) + \varphi(2l-x-at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha - C_1,\end{aligned} \quad (13)$$

где $C_1 = 2C$.

Пусть точка (x,t) лежит в области *III* (рис. 11). В данном случае имеем: действие свободного конца $x=0$ сводится к отражению волны смещения от этого конца

$$\begin{aligned}U(x,t) &= U_1(x-at) + U_2(x+at) = U_2(-(x-at)) + U_2(x+at) = \\&= \varphi(-x+at)/2 + \Psi(-x+at) + \varphi(x+at)/2 + \Psi(x+at) = \\&= [\varphi(x+at) + \varphi(-x+at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha \\&\quad + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + C_1,\end{aligned}$$

где $C_1 = 2C$.

Для точек, лежащих в областях *IV* (рис. 12), *V* (рис. 13), *VI* (рис. 14) соответственно, имеем

$$U(x,t) = [\varphi(-x+at) + \varphi(2l-x-at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha, (x,t) \in IV.$$

$$\begin{aligned}U(x,t) &= [\varphi(2l+x-at) + \varphi(2l-x-at)]/2 - \\&\quad - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l+x-at} \psi(\alpha) d\alpha - \\&\quad - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha - C_1, (x,t) \in V,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= [\varphi(-x + at) + \varphi(-2l + x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-2l+x+at} \psi(\alpha) d\alpha + C_1, (x, t) \in VI,
\end{aligned}$$

9.3. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны, один конец $x = 0$ которой закреплен жестко, а конец $x = l$ свободен. Задача сводится к решению уравнения (1₀) с условиями (2) и граничными условиями

$$\begin{cases} U(0, t) = 0, \\ U_x(l, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0. \quad (14_0)$$

На основании предыдущего имеем, что в этом случае мы должны продолжить начальные данные относительно $x = 0$ нечетным образом, а относительно $x = l$ - четным образом, то есть функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ должны удовлетворять условиям:

$$\varphi_1(-x) = -\varphi_1(x), \varphi_1(x) = \varphi_1(2l - x),$$

$$\psi_1(-x) = -\psi_1(x), \psi_1(x) = \psi_1(2l - x).$$

Отсюда для $\varphi_1(x)$ имеем

$$\varphi_1(x + 4l) = \varphi_1(2l - (x + 4l)) = \varphi_1(-x - 2l) = -\varphi_1(x + 2l).$$

Но $\varphi_1(x + 2l) = \varphi_1(2l - (x + 2l)) = \varphi_1(-x)$, то есть $\varphi_1(x + 4l) = -\varphi_1(x + 2l) = -\varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$.

Значит, функция $\varphi_1(x)$ будет периодической с периодом $4l$. Аналогично получается и для функции $\psi_1(x)$. Таким образом, чтобы решить задачу, необходимо продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом относительно начала координат, полученные функции продолжить четным образом относительно $x = l$. Затем эти функции продолжить периодически с периодом $4l$ на всю действительную ось. Из вышесказанного следует, что концы $x = 0$ и $x = l$ оказывают следующее влияние на колебание струны: от конца $x = 0$ волна отражается с изменением направления и знака на обратный, а от конца $x = l$ волна отражается без изменения знака, так как в силу граничных условий имеем $U_1(-x) = -U_2(x)$, $U_2(l+x) = U_1(l-x)$. Пусть точка (x, t) лежит в области II (рис. 10). Тогда

$$U(x, t) = U_1(x - at) + U_2(x + at) = U_1(x - at) + U_1(2l - x - at) =$$

$$\begin{aligned}
&= [\varphi(x - at) + \varphi(2l - x - at)]/2 - \\
&- \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha - C_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $C_1 = 2C$. Пусть точка (x, t) лежит в области III (рис.11). Тогда

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= U_1(x - at) + U_2(x + at) = -U_2(-(x - at)) + U_2(x + at) = \\
&= -\varphi(-x + at)/2 - \Psi(-x + at) + \varphi(x + at)/2 + \Psi(x + at) = \\
&= +[\varphi(x + at) - \varphi(-x + at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha - C + \\
&+ \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + C = [\varphi(x + at) - \varphi(-x + at)]/2 + \\
&+ \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

Для точек, лежащих в областях IV, V, VI соответственно имеем

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= [-\varphi(-x + at) + \varphi(2l - x - at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \\
&- \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha - C, (x, t) \in IV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= [-\varphi(2l + x - at) + \\
&+ \varphi(2l - x - at)]/2 - \frac{1}{2a} \int_{2l+x-at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha, (x, t) \in V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= -[\varphi(-x + at) + \varphi(x + at - 2l)]/2 - \\
&- \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at-2l} \psi(\alpha) d\alpha - C, (x, t) \in VI.
\end{aligned}$$

9.4. Записать решение задачи $(1_0), (2), (3_0)$ для областей $I - VI$ при условии, что начальные отклонения заданы, а начальные скорости отсутствуют:

$$\varphi(x) = \sin(\pi x/l), \quad \psi(x) = 0.$$

О т в е т:

$$U(x, t) = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}, (x, t) \in I - VI.$$

Замечание. В данном случае $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$. Эта функция является нечетной относительно $x = 0$ ($\varphi(-x) = \sin(-\pi x/l) = -\sin \frac{\pi x}{l} =$

$-\varphi(x)$), кроме того, она является периодической с периодом $2l$. Поэтому $\varphi_1(x) = \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ на всей действительной оси. Значит, решение запишется на основании формулы (4), то есть

$$U(x, t) = [\varphi_1(x - at) + \varphi_1(x + at)]/2 = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}, 0 \leq x \leq l, t > 0.$$

9.5. Записать решение уравнения (1_0) с граничными условиями (3_0) и начальными условиями вида

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ есть парабола, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(l, 0)$, имеющая вершину в точке $(l/2, h)$ (рис. 15)

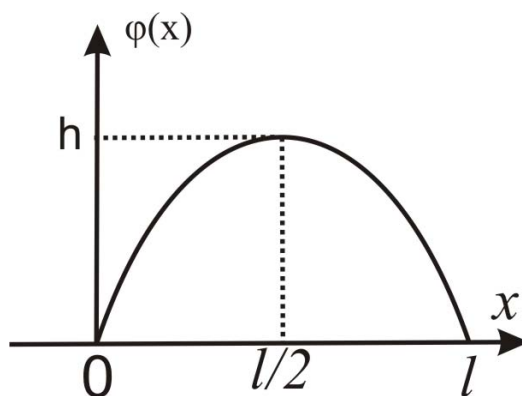


Рис. 15

У к а з а н и е 1. Для того чтобы записать решение задачи, необходимо записать уравнение параболы, то есть найти функцию $\varphi(x)$.

У к а з а н и е 2. Имея $\varphi(x)$, записать $\varphi(x - at)$, $\varphi(x + at)$, $\varphi(at - x)$, $\varphi(2l - x - at)$, $\varphi(-2l + x - at)$, а затем подставить в формулы (4),(7)-(11), соответствующие каждой из областей $I - VI$ (рис. 10).

О т в е т:

$$\varphi(x) = -\frac{4h}{l}(x^2/l - x)$$

$$U(x, t) = -\frac{4h[x^2 + (at)^2 - lx]}{l^2}, (x, t) \in I.$$

$$U(x, t) = \frac{-4h}{l^2}(l - x)(2at - l), (x, t) \in II.$$

$$U(x, t) = \frac{4h(-2xat + xl)}{l^2}, (x, t) \in III.$$

$$U(x, t) = \frac{4h[x^2 + (at)^2 + l^2 - lx - 2lat]}{l^2}, (x, t) \in IV.$$

$$U(x, t) = \frac{4h}{l^2} (2xat - 3lx), (x, t) \in V.$$

$$U(x, t) = \frac{4h}{l^2} [3lx - 3l^2 + 2at(l - x)], (x, t) \in VI.$$

9.6. Записать решение уравнения (1₀) с начальными условиями

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \end{cases}$$

и с граничными условиями (3₀) для областей $I - VI$ (Рис. 10)

О т в е т:

$$U(x, t) = \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi at}{l}.$$

в каждой из областей $I - VI$.

9.7. Записать решение уравнения (1) с начальными условиями

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \end{cases}$$

и с граничными условиями (3₀) для областей $I - VI$.

Р е ш е н и е. Пусть $(x, t) \in I$. Тогда на основании (4)

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin \frac{\pi \alpha}{2l} d\alpha = \\ &= \frac{2l}{2\pi a} \left(-\cos \frac{\pi \alpha}{2l} \right) \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{l}{\pi a} \left(-\cos \frac{\pi(x+at)}{2l} + \cos \frac{\pi(x-at)}{2l} \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi at}{2l}. \end{aligned}$$

О т в е т:

$$U(x, t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi at}{2l}, (x, t) \in II - VI.$$

Замечание. Отметим, что решение можно было получить сразу по формуле (4), так как функция $\sin \frac{\pi x}{2l}$ обладает всеми нужными свойствами (она нечетная относительно $x = 0$, периодическая с периодом $4l$, $\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2l}$ на всей действительной оси).

Д о м а ш н е е з а д а н и е

9.8. Решить задачу о малых поперечных колебаниях струны, один конец которой $x = 0$ свободен, а конец $x = l$ закреплен жестко, то есть решить уравнение (1_0) для областей $I-VI$ (см. Рис. 10) с условиями (2) и граничными условиями

$$\begin{cases} U_x(0, t) = 0, \\ U(l, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0.$$

О т в е т:

$$U(x, t) = [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \quad \begin{matrix} 0 < x < l, t > 0, \\ (x, t) \in I. \end{matrix}$$

$$U(x, t) = [\varphi(x - at) - \varphi(2l - x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha, \quad (x, t) \in II.$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= [\varphi(x + at) + \varphi(-x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + C_1, \quad (x, t) \in III. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= [\varphi(-x + at) - \varphi(2l - x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha + C_1, \quad (x, t) \in IV. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= -[\varphi(2l + x - at) + \varphi(2l - x - at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l+x-at} \psi(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{2l-x-at} \psi(\alpha) d\alpha + C_1, \quad (x, t) \in V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= [\varphi(-x + at) - \varphi(-2l + x + at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \\ &- \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-2l+x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \quad (x, t) \in VI. \end{aligned}$$

9.9. Записать решение уравнения для областей $I-VIII$ (Рис. 16)

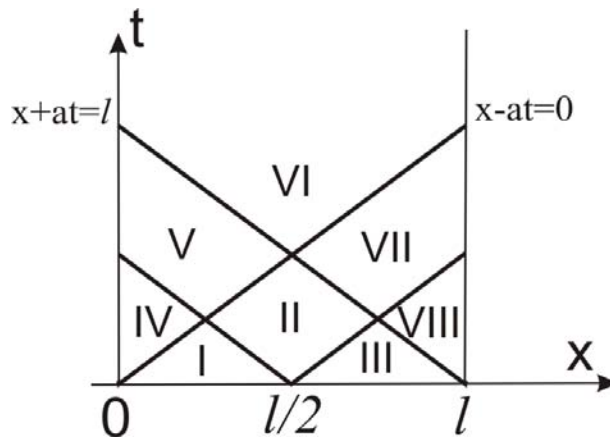


Рис. 16

при начальных условиях

$$\begin{cases} U(x, 0) = \varphi(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 < x < l$$

и граничных условиях (3_0) , где $\varphi(x)$ задается графически на рис. 17.

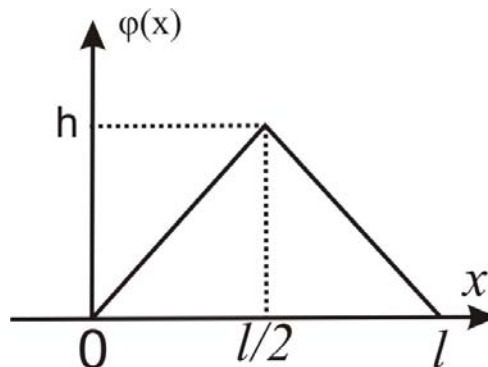


Рис. 17

У к а з а н и е 1. Для того чтобы записать решение задачи, необходимо найти функцию $\varphi(x)$, то есть записать уравнение функции, заданной графиком на рис. 17.

У к а з а н и е 2. Имея $\varphi(x)$, записать $\varphi(x-at)$ и $\varphi(x+at)$, а затем подставить в формулы для нахождения $U(x, t)$, соответствующих каждой из областей I – VIII (рис. 16).

О т в е т:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2hx/l, & 0 \leq x \leq l/2, \\ 2h(l-x)/l, & l/2 \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$U(x, t) = [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] = 2hx/l, (x, t) \in I, \quad I : \begin{cases} 0 \leq x-at \leq l/2, \\ 0 \leq x+at \leq l/2. \end{cases}$$

$$U(x, t) = h(1 - 2at/l), (x, t) \in II, \quad II : \begin{cases} l/2 \leq x+at \leq l, \\ 0 \leq x-at \leq l/2. \end{cases}$$

$$U(x, t) = 2h(1 - x/l), (x, t) \in III, \quad III: \begin{cases} l/2 \leq x + at \leq l, \\ l/2 \leq x - at \leq l. \end{cases}$$

9.10. Записать решение уравнения (1₀) с начальными условиями

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{l}, \end{cases} \quad 0 < x < l.$$

и с граничными условиями (12₀) для областей I – VI (рис. 10).

О т в е т:

$$U(x, t) = \frac{l}{\pi a} \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi at}{l}$$

для каждой из областей I – VI.

З А Н Я Т И Е 10

Тема. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть область $\Omega \in R^n$, $\partial\Omega$ ее граница. Требуется найти такие значения λ (собственные значения), при которых уравнение

$$LX \equiv - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (p(x) \frac{\partial X}{\partial x_i}) + q(x)X = \lambda \rho(x)X, \quad (1_0)$$

имеет ненулевые решения $X(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ (собственные функции), удовлетворяющие граничному условию

$$[\alpha(x)X + \beta(x) \frac{\partial X}{\partial n}]|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2_0)$$

и найти эти решения. Здесь \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $p, q, \rho, \alpha, \beta$ – заданные функции, $\rho, p > 0, q \geq 0$.

Для этой задачи имеют место следующие теоремы.

1. Собственные значения задачи вещественны и неотрицательны.
2. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$ по области Ω , т.е.

$$(X_k, X_j)_\rho = \int_{\Omega} \rho X_k X_j dx = 0, k \neq j.$$

3. Множество собственных значений задачи счетно и не имеет конечных предельных точек. Каждое собственное значение имеет конечную кратность.

4. Максимальную систему собственных функций $\{X_k\}_1^\infty$ всегда можно выбрать ортогональной с весом $\rho(x)$ по области Ω .

5. Теорема Стеклова. Всякая функция $F(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая (2), разлагается в регулярно сходящийся ряд по максимальной системе собственных функций задачи (1_0) , (2_0)

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, X_k)_\rho}{\|X_k\|_\rho^2} X_k(x), x \in \bar{\Omega}.$$

Пусть $n = 1$ (задача Штурма-Лиувилля). Тогда $\Omega = (0, l)$, $\partial\Omega = \{x = 0, x = l\}$. Уравнение (1_0) и условие (2_0) принимают вид:

$$-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dX}{dx}) + q(x)X = \lambda\rho(x)X \quad (3_0)$$

$$\alpha_0 X(0) - \beta_0 X'(0) = 0, \alpha_l X(l) + \beta_l X'(l) = 0, \quad (4_0)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_l, \beta_l - const$.

Пусть $X_1(x, \lambda)$ и $X_2(x, \lambda)$ -линейно независимые решения (3_0) , тогда функция

$$X(x, \lambda) = C_1 X_1(x, \lambda) + C_2 X_2(x, \lambda) \quad (5)$$

дает общее решение (3_0) . Определим $C_i (i = 1, 2)$ и λ так, чтобы (5) удовлетворяла (4_0) . Подставляя (5) в (4_0) , имеем

$$\begin{aligned} C_1[\alpha_0 X_1(0, \lambda) - \beta_0 X_1'(0, \lambda)] + C_2[\alpha_0 X_2(0, \lambda) - \beta_0 X_2'(0, \lambda)] &= 0 \\ C_1[\alpha_l X_1(l, \lambda) + \beta_l X_1'(l, \lambda)] + C_2[\alpha_l X_2(l, \lambda) + \beta_l X_2'(l, \lambda)] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматриваем (6) как систему относительно C_i . (6) имеет решение лишь тогда, когда ее определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_0 X_1(0, \lambda) - \beta_0 X_1'(0, \lambda) & \alpha_0 X_2(0, \lambda) - \beta_0 X_2'(0, \lambda) \\ \alpha_l X_1(l, \lambda) + \beta_l X_1'(l, \lambda) & \alpha_l X_2(l, \lambda) + \beta_l X_2'(l, \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

(7) дает уравнение для определения тех λ , при которых (6) имеет ненулевое решение, т.е. собственные значения. Подставляя найденные значения $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ в (6), получаем решение C_i , причем одно из C_i остается произвольным, так как ранг системы равен 1, то есть фундаментальная система состоит из одного решения, и любое ненулевое решение образует фундаментальную систему. В этом случае любые два решения различаются между собой лишь числовым множителем. Выбирая одно из C_i равным 1, получаем другое C_i . Подставляя C_i в (5), будем иметь собственные функции.

В случае $n > 1$ решение задачи можно получить методом разделения переменных, если оператор L допускает разделение переменных.

З а д а ч и

10.1.

$$X'' = -\lambda X \quad (8)$$

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \quad (9)$$

Здесь $n = 1, p, \rho \equiv 1, q \equiv 0, \alpha_0 = \alpha_l = 1, \beta_0 = \beta_l = 0$. Найдём общее решение (8) при $\lambda \geq 0$ (см. т.1).

1) $\lambda = 0$ Общее решение (8) имеет вид:

$$X(x) = C_1 + C_2 x. \quad (10)$$

Записывая (9) для (10), имеем $C_1 = C_2 = 0$, т.е. в данном случае задача не имеет решений.

2) $\lambda > 0$ Общее решение (8) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (11)$$

Записывая (9) для (11), получаем:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} l & \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

откуда $\sqrt{\lambda_k} l = \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$ ($\lambda_0 = 0$ решений не даёт). Подставляя λ_k в (12), получаем $C_1 = 0, C_2$ - произвольное. Полагая $C_2 = 1$, получаем решение задачи

$$\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2, X_k = \sin \frac{\pi k}{l} x, k = 1, 2, \dots,$$

причем ограничиваемся только натуральными значениями k , так как отрицательные значения k дают решения, линейно зависящие с первыми.

10.2. $X'' = -\lambda X, X'(0) = X(l) = 0$.

О т в е т : $\lambda_k = [\frac{\pi(1+2k)}{2l}]^2, X_k = \cos \frac{\pi(1+2k)}{2l} x, k = 0, 1, \dots$

10.3. $\frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_2^2} = -\lambda X, \Omega = (0, a_1) \times (0, a_2), X|_{\partial\Omega} = 0$.

Найти собственные функции и собственные значения, показать ортогональность собственных функций.

У к а з а н и е Применить метод разделения переменных, отыскивая $X(x)$ в виде $X(x_1, x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2)$.

О т в е т : $\lambda_{k_1 k_2} = \pi^2 \sum_{i=1}^2 (\frac{k_i}{a_i})^2,$

$X_{k_1 k_2} = \prod_{i=1}^2 \sin(\frac{\pi k_i}{a_i} x_i), k_1, k_2 = 1, 2, \dots$

10.4. $X'' = -\lambda X, X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0, h > 0 - const$.

Найти собственные значения и собственные функции, показать ортогональность собственных функций.

У к а з а н и е . Для определения λ получается уравнение $ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$, которое приближенно можно решить графически. Для более точного решения можно применять метод итерации.

О т в е т : $\lambda_k > 0$ - корни уравнения $ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$, $X_k = \cos\sqrt{\lambda_k}x, k = 1, 2, \dots$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

10.5. $X'' = -\lambda X, \quad X'(0) = X'(l) = 0.$

О т в е т : $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2, X_k = \cos \frac{\pi k}{l}x, k = 0, 1, 2, \dots$

10.6. $X'' = -\lambda X, X(0) = X'(l) = 0.$

О т в е т : $\lambda_k = (\frac{\pi(2k+1)}{2l})^2, X_k = \sin \frac{\pi(2k+1)}{2l}x, k = 0, 1, 2, \dots$

10.7. $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} = -\lambda X, \frac{\partial X}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \Omega$ - параллелепипед с измерениями $p_i (i = 1, 2, 3).$

У к а з а н и е . Учесть, что направление нормалей к границам параллелепипеда связано с направлением осей координат.

О т в е т : $\lambda_{k_1 k_2 k_3} = \pi^2 \sum_{i=1}^3 (\frac{k_i}{p_i})^2,$

$X_{k_1 k_2 k_3} = \prod_{i=1}^3 \cos(\frac{\pi k_i}{p_i} x_i), k_1, k_2, k_3 = 1, 2, \dots$

10.8. $X'' = -\lambda X, X'(0) - hX(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0, h > 0 - \text{const.}$

О т в е т : $\lambda_k > 0$ - корни уравнения $ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}),$
 $X_k = \sin(\varphi_k + \sqrt{\lambda_k}x), \varphi_k = \arctg \frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}, k = 1, 2, \dots$

10.9.

$\frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_2^2} = -\lambda X, \Omega = (0, l) \times (0, h), X|_{x_1=0} = X|_{x_1=l} = 0,$

$X - \alpha \frac{\partial X}{\partial x_2}|_{x_2=0} = X|_{x_2=h} = 0, \alpha - \text{const.}$

О т в е т : $\lambda_{k_1 k_2} = (\frac{\pi k_1}{l})^2 + (\frac{\omega_{k_2}}{h})^2,$

$X_{k_1 k_2} = \sin \frac{\pi k_1}{l} x_1 (\cos \frac{\omega_{k_2}}{h} x_2 + \frac{h}{\omega_{k_2} \alpha} \sin \frac{\omega_{k_2}}{h} x_2), k_1, k_2 = 1, 2, \dots$ где
 ω_{k_2} - корни уравнения $tgw = -\frac{\alpha w}{h}$

З А Н Я Т И Е 11

Тема. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА (СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ)

Дано однородное уравнение колебаний

$$\rho(x)U_{tt} = -LU, \quad (x, t) \in Q_\infty = \Omega \times (0, \infty), \quad \Omega \subset R_x^n \quad (1_0)$$

где оператор L определен на стр.71

Найти функцию $U(x, t) \in C^2(Q_\infty) \cap C^1(\bar{Q}_\infty)$, $\bar{Q}_\infty = Q_\infty \cup \{\partial\Omega \times [0, \infty]\} \cup \{\bar{\Omega} \times (t = 0)\}$, удовлетворяющую уравнению (1_0) в Q_∞ , начальным условиям

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x), x \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

и граничному условию

$$[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}]|_{\partial\Omega \times [0, \infty)} = 0, \quad (3_0)$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $[\alpha\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}]|_{\partial\Omega} = 0$.

Решение задачи $(1_0), (2), (3_0)$ проводится в два этапа.

1. Строим частные решения уравнения (1_0) , имеющие вид

$$U(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

и удовлетворяющие (3_0) . Подставим (4) в (1_0) и умножим полученное соотношение на $1/\rho XT$, тогда получим

$$\frac{T''}{T} = -\frac{1}{\rho X} LX. \quad (5)$$

(5) должно быть тождественным для $x \in \Omega, t \in (0, \infty)$. Это возможно лишь тогда, когда правая и левая части есть константа, которую обозначим $-\lambda$. Приравнивая правую и левую части $-\lambda$, получим два независимых уравнения относительно T и X

$$T'' + \lambda T = 0, \quad (6)$$

$$LX = \lambda\rho(x)X. \quad (7)$$

Подставляя (4) в (3_0) и учитывая, что $T(t) \neq 0$, будем иметь

$$[\alpha(x)X + \beta(x)\frac{\partial X}{\partial n}]|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, для определения $X(x)$ мы пришли к задаче на собственные значения (7), (8). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty, \{X_k\}_1^\infty$ - ее решения.

Подставляя каждое λ_k в (6), получаем уравнения для определения $T_k, k = 1, 2, \dots$

$$T_k'' + \lambda_k T_k = 0. \quad (6_k)$$

Предположим, что все $\lambda_k > 0$. Тогда общее решение уравнения (6_k) имеет вид: $T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t$, где a_k, b_k - произвольные постоянные. Итак, мы получили частные решения уравнения (1₀), удовлетворяющие (3₀) $U_k = T_k X_k = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x), k = 1, 2, \dots$

2. С помощью полученных частных решений построим решение задачи, удовлетворяющее (2). Возьмем общее решение задачи в виде ряда

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, t). \quad (9)$$

Предположим, что (9) и все ряды, полученные из (9) двукратным дифференцированием по t и $x_i (i = 1, n)$, сходятся равномерно, тогда (9) удовлетворяет (1₀), (3₀) и будет законной подстановкой (9) в (2)

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = \varphi(x), \quad (10)$$

$$U_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} b_k X_k(x) = \psi(x).$$

Из (10) видно, что мы пришли к задаче разложения φ и ψ в ряды Фурье по системе $\{X_k\}_1^{\infty}$. Предполагая, что φ и ψ удовлетворяют условиям теоремы Стеклова, получаем, что (10), а значит (2) будет удовлетворено тогда, когда

$$a_k = \frac{(\varphi, X_k)_{\rho}}{\|X_k\|_{\rho}^2} = \varphi_k, \quad b_k = \frac{(\psi, X_k)_{\rho}}{\sqrt{\lambda_k} \|X_k\|_{\rho}^2} = \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad \psi_k = \frac{(\psi, X_k)_{\rho}}{\|X_k\|_{\rho}^2}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), получаем формальное решение задачи

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x),$$

для обоснования которого необходимо доказать сходимость вышеуказанных рядов.

Замечание 1. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$, тогда q уравнений (6_k) примет вид: $T_k'' = 0, k = 1, q$, решения которых $T_k = a_k + b_k t$.

Решение задачи в этом случае ищется в виде $U = \sum_{k=1}^q (a_k + b_k t) X_k(x) +$

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x).$$

Замечание 2. Если в (1_0) вместо члена $\rho(x)U_{tt}$ слева стоит комбинация $\rho(x)[a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U]$, $a(t) > 0$, то схема исследования задачи остается прежней, при этом лишь несколько усложняется уравнение для $T(t)$.

З а д а ч и.

11.1. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В момент $t = 0$ точкам струны сообщены некоторые смещения $\varphi(x)$ и скорости $\psi(x)$. Определить отклонение $U(x, t)$ струны для любого момента времени. Рассмотреть частный случай, когда $\varphi(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}$, $\psi(x) \equiv 0$.

Р е ш е н и е. Задача о плоских поперечных колебаниях струны ставится на лекции и приводится к следующей смешанной задаче:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, (x, t) \in Q_\infty = (0, l) \times (0, \infty), \quad (12)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l, \quad (13)$$

$$U(0, t) = U(l, t) = 0, t \geq 0 (\varphi(0) = 0, \varphi(l) = 0). \quad (14)$$

1. Подставив (4) в (12) и разделив обе части на $a^2 X T$, получим

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

откуда

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad (15)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (16)$$

Подставляя (4) в (14), имеем

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (17)$$

Решения задачи (16), (17) имеют вид (см. 10.1):

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), k = 1, 2, \dots$$

Подставляя λ_k в (15), получаем

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\frac{a\pi k}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{a\pi k}{l}t\right).$$

2. Берем общее решение задачи в виде ряда (9). Запишем для (9) (13)

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x),$$

$$U_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\pi k a}{l} \sin \frac{\pi k}{l} x = \psi(x). \quad (18)$$

Таким образом, мы пришли к задаче разложения заданных функций φ и ψ в тригонометрические ряды по системе $\sin \frac{\pi k}{l} x$ в интервале $[0, l]$. Предполагая, что $\varphi, \psi \in C^2[0, l]$ удовлетворяет (17), получим, что (18), а значит (13), будет выполнено, если

$$a_k = \varphi_k, b_k = \frac{\psi_k l}{\pi k a}, \quad (19)$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Подставляя (19) в (9), получаем формальное решение задачи

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + \frac{\psi_k l}{\pi k a} \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (20)$$

Для обоснования решения (20) нужно доказать равномерную сходимость (20) и рядов U_t, U_{tt}, U_x, U_{xx} . На основании известных результатов из теории тригонометрических рядов можно получить, что все вышеуказанные ряды сходятся, если $\varphi \in C^2[0, l], \psi \in C^1[0, l]$, существуют кусочно непрерывные φ''', ψ'' , кроме того, выполняются условия

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

В частном случае получаем $U = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{at}{l}$.

11.2. Проинтегрировать уравнение малых продольных колебаний цилиндрического стержня при условии, что один конец $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен, при начальных условиях $U(x, 0) = \alpha x, U_t(x, 0) = 0, \alpha - const.$ (см. 1.1).

О т в е т:

$$U = \frac{8\alpha l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

11.3. Решить задачу о свободных колебаниях однородной квадратной мембраны $\Omega = (0, p) \times (0, p)$, закрепленной вдоль контура, если

$$U|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x_1}{p} \sin \frac{\pi x_2}{p}, U_t|_{t=0} = 0.$$

У к а з а н и е. Постановка задачи приводит к следующей смешанной задаче относительно отклонения $U(x_1, x_2, t)$ точки $x = (x_1, x_2)$ мембраны от положения равновесия в момент t

$$U_{tt} = a^2(U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2}), a^2 = \frac{T_0}{\rho},$$

$$U|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x_1}{p} \sin \frac{\pi x_2}{p}, U_t|_{t=0} = 0, U|_{\partial\Omega \times [0, \infty)} = 0.$$

О т в е т:

$$U = A \cos \frac{a\pi\sqrt{2}t}{p} \sin \frac{\pi x_1}{p} \sin \frac{\pi x_2}{p}.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

11.4. Решить смешанную задачу, полученную в задаче 1.8.

О т в е т:

$$U = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(c-l)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{\pi kx}{l} \cos \frac{\pi kat}{l} \sin \frac{\pi kc}{l}$$

11.5. Изучить свободные колебания стержня длиной l , у которого оба конца свободны.

У к а з а н и е. Учесть, что $\lambda_0 = 0$ есть собственное значение соответствующей задачи о собственных значениях.

О т в е т:

$$U = \varphi_0 + \psi_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\pi kat}{l} + \frac{\psi_k l}{\pi ka} \sin \frac{\pi kat}{l} \right) \cos \frac{\pi k}{l} x, \text{ где}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \psi_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi kx}{l} dx, \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{\pi kx}{l} dx.$$

11.6. Решить смешанную задачу:

$$U_{tt} = \Delta U, 0 < x_i < \pi (i = 1, 2), t > 0, U|_{t=0} = 3 \sin x_1 \sin 2x_2,$$

$$U_t|_{t=0} = 5 \sin 3x_1 \sin 4x_2, \quad U|_{x_1=0} = U|_{x_2=0} = U|_{x_1=\pi} = U|_{x_2=\pi} = 0.$$

О т в е т:

$$U = 3 \cos \sqrt{5}t \sin x_1 \sin 2x_2 + \sin 5t \sin 3x_1 \sin 4x_2.$$

11.7. $U_{tt} = a^2 \Delta U, 0 < x_1 < s, 0 < x_2 < p, t > 0$

$$U_{t=0} = Ax_1 x_2, U_t|_{t=0} = 0,$$

$$U|_{x_1=0} = U_{x_1}|_{x_1=s} = U|_{x_2=0} = U_{x_2}|_{x_2=p} = 0.$$

О т в е т:

$$U = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \varphi_{k_1, k_2} \cos \left(a\pi \sqrt{\left(\frac{2k_1+1}{2s}\right)^2 + \left(\frac{2k_2+1}{2p}\right)^2} t \right) \sin \frac{(2k_1+1)\pi x_1}{2s} \sin \frac{(2k_2+1)\pi x_2}{2p},$$

где

$$\varphi_{k_1, k_2} = \frac{(-1)^{k_1+k_2} 64 A p s}{\pi^4 (2k_1+1)^2 (2k_2+1)^2}.$$

З А Н Я Т И Е 12

Тема. КОЛЕБАНИЯ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ. УПРУГОЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ КОНЦОВ

З а д а ч и

12.1. Исследовать свободные колебания струны, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

У к а з а н и е. Задача сводится к решению уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} - 2\nu U_t, a^2 = \frac{T_0}{\rho}, 2\nu = \frac{k}{\rho}$$

при условиях $U|_{t=0} = \varphi(x), U_t|_{t=0} = \psi(x), U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0$. При решении задачи использовать замечание 2 занятия 11, причем уравнение для $T(t)$ будет иметь вид:

$$T'' + 2\nu T' + a^2 \lambda T = 0.$$

О т в е т:

$$U = e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}, \text{ где}$$

$$\Theta_k(t) = \begin{cases} a_k \cosh \omega_k t + b_k \sinh \omega_k t, \omega_k = \sqrt{\nu^2 - \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2}, \frac{\pi k a}{l} < \nu, \\ a_k + b_k t, \frac{\pi k a}{l} = \nu, \\ a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \omega_k = \sqrt{\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 - \nu^2}, \frac{\pi k a}{l} > \nu, \end{cases}$$

$$a_k = \varphi_k, b_k = \frac{\psi_k}{\omega_k} + \frac{\nu \varphi_k}{\omega_k}, \text{ причем}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx,$$

а $\omega_k = 1$, если $\nu = \frac{\pi k a}{l}$.

12.2. $U_{tt} = U_{xx} - 4U, 0 < x < 1, U|_{t=0} = x^2 - x, U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=1} = 0$.

О т в е т:

$$U = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3} \cos \sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 + 4} t.$$

12.3. Один конец стержня $x = 0$ свободен, а другой $x = l$ закреплен упруго. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных данных (см. 1.1 и 10.4).

О т в е т:

$U = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t) \cos \sqrt{\lambda_k}x$, где λ_k - корень уравнения

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}, a_k = \frac{2(h^2 + \lambda_k)}{l(h^2 + \lambda_k) + h} \int_0^l \varphi(x) \cos \sqrt{\lambda_k}x dx,$$

$$b_k = \frac{2(h^2 + \lambda_k)}{a\sqrt{\lambda_k}[l(h^2 + \lambda_k) + h]} \int_0^l \psi(x) \cos \sqrt{\lambda_k}x dx.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

12.4. $U_{tt} + 2U_t = U_{xx} - U, 0 < x < \pi, U|_{t=0} = \pi x - x^2, U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=\pi} = 0$.

О т в е т:

$$U = -\frac{8e^{-t}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} [\cos(2k+1)t + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)t] \sin(2k+1)x.$$

12.5. Найти продольные колебания стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, один конец которого $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен при начальных условиях $U(x, 0) = kx, U_t|_{t=0} = 0$ (см. 1.4).

О т в е т:

$U = \frac{8kl}{\pi^2} e^{-\nu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \Theta_k(t)$, где $\Theta_k(t)$ имеет такие же значения, как в ответе к задаче 12.1.

12.6. Найти продольные колебания стержня с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости заделки, если начальные условия произвольны (см. 10.8).

О т в е т:

$U = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t) \sin(\sqrt{\lambda_k}x + \varphi_k)$, где λ_k - корни уравнения $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}l = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}})$, $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}$,

$$a_k = \frac{2(\lambda_k + h^2)}{(\lambda_k + h^2)l + 2h} \int_0^l \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}x + \varphi_k) dx,$$

$$b_k = \frac{2(\lambda_k + h^2)}{a\sqrt{\lambda_k}[(\lambda_k + h^2)l + 2h]} \int_0^l \psi(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}x + \varphi_k) dx.$$

12.7. $U_{tt} + 2U_t = U_{xx} - U, 0 < x < \pi, U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = 0, U_x|_{x=0} = U_x|_{x=\pi} = 0.$

О т в е т:

$$U(x, t) = 8e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[(-1)^k - \frac{2}{\pi(2k+1)} \right] \sin \frac{(2k+1)t}{2} \cos \frac{(2k+1)x}{2}.$$

З А Н Я Т И Е 13

Тема. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ)

Задача о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы с линейной плотностью $F(x, t)$ ставится на лекции и приводится к следующей смешанной задаче

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), a^2 = \frac{T_0}{\rho}, f = \frac{F}{\rho}, (x, t) \in Q_{\infty}, \quad (1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = 0, t \geq 0 (\varphi(0) = 0, \varphi(l) = 0). \quad (3_0)$$

Решение этой задачи представляется в виде суммы $U = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, где U_1 - решение уравнения (1), удовлетворяющее (3₀) и нулевым начальным условиям (2₀) ($\varphi, \psi \equiv 0$), т.е. U_1 описывает вынужденные колебания струны, которые совершаются только под действием внешней силы. U_2 есть решение соответствующего однородного уравнения (1₀) ($f = 0$), удовлетворяющее (2), (3₀), т.е. описывает свободные колебания, происходящие только вследствие начального возмущения.

Решение задачи (1₀), (2), (3₀) известно (см. занятие 11), поэтому остановимся на задаче (1), (2₀), (3₀). Применим метод собственных функций, т.е. ищем U_1 в виде ряда

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad (4)$$

где $X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$ - собственные функции задачи о собственных значениях:

$X'' = -\lambda X, X(0) = X(l) = 0$ (см. 10.1), к которой приводится решение соответствующего однородного уравнения (1₀) при условиях (3₀).

Предположим, что (4) сходится равномерно и допускает двукратное дифференцирование по x и t , тогда (4) удовлетворяет (3₀) за счет выбора $X_k(x)$. Определим $\bar{T}_k(t)$ так, чтобы (4) удовлетворяло (1), (2₀). Подставляя (4) в (1), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\bar{T}_k''(t) + (\frac{\pi ka}{l})^2 \bar{T}_k(t)] \sin \frac{\pi kx}{l} = f(x, t). \quad (5)$$

Зафиксируем в (5) $t \in (0, \infty)$, тогда слева в (5) ряд Фурье по системе $\sin \frac{\pi kx}{l}$, а справа заданная функция f . Таким образом мы пришли к задаче представления заданной функции в ряд Фурье по системе $\sin \frac{\pi kx}{l}$. Предполагая, что при каждом фиксированном t f по переменной x удовлетворяет условиям теоремы Стеклова, получим, что (5) будет выполнено, если

$$\bar{T}_k''(t) + (\frac{\pi ka}{l})^2 \bar{T}_k(t) = f_k(t), \quad (6)$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{\pi kx}{l} dx, k = 1, 2, \dots$$

Подставляя (4) в (2₀), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k(0) \sin \frac{\pi kx}{l} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k'(0) \sin \frac{\pi kx}{l} = 0,$$

откуда

$$\bar{T}_k(0) = 0, \bar{T}_k'(0) = 0. \quad (7)$$

Итак, для определения \bar{T}_k получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (6) с условиями (7). Найдем общее решение (6) методом вариации произвольных постоянных. Общее решение соответствующего однородного уравнения (6₀)($f_k \equiv 0$) имеет вид:

$$\bar{T}_{k0}(t) = a_k \cos \frac{a\pi kt}{l} + b_k \sin \frac{a\pi kt}{l}.$$

Будем искать решение (6) в виде

$$\bar{T}_k(t) = a_k(t) \cos \frac{a\pi kt}{l} + b_k(t) \sin \frac{a\pi kt}{l}. \quad (8)$$

Система относительно $a_k'(t), b_k'(t)$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_k'(t) \cos \frac{a\pi kt}{l} + b_k'(t) \sin \frac{a\pi kt}{l} = 0 \\ -a_k'(t) \frac{a\pi k}{l} \sin \frac{a\pi kt}{l} + b_k'(t) \frac{a\pi k}{l} \cos \frac{a\pi kt}{l} = f_k(t), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_k(t) = -\frac{l}{\pi k a} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{a\pi k \tau}{l} d\tau + \alpha_k, \\ b_k(t) = \frac{l}{\pi k a} \int_0^t f_k(\tau) \cos \frac{a\pi k \tau}{l} d\tau + \beta_k, \end{cases} \quad (9)$$

где α_k, β_k - постоянные интегрирования. Учитывая (7), из (9) имеем $\alpha_k, \beta_k = 0$. Подставляя (9) в (8), получаем

$$\bar{T}_k(t) = \frac{l}{\pi k a} \int_0^t \sin[a(t-\tau)\frac{k\pi}{l}] f_k(\tau) d\tau.$$

Замечание. Рассмотрим задачу

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), 0 < x < l, t > 0, \quad (1^*)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = 0, \quad (3^0)$$

в которой неоднородность в уравнении не зависит от t . Ее можно решить другим методом, а именно: ищем решение в виде $U = U_1(x) + U_2(x, t)$, где $U_1(x)$ удовлетворяет (1*), (3₀), т.е. задаче: $U_1'' + \frac{1}{a^2} f(x) = 0, U_1(0) = U_1(l) = 0$ для обыкновенного дифференциального уравнения. Найдя $U_1(x)$, получаем для U_2 задачу:

$$U_{2tt} = a^2 U_{2xx}, U_2(x, 0) = \varphi(x) - U_1(x),$$

$U_{2t}(x, 0) = \psi(x), U_2(0, t) = U_2(l, t) = 0$, метод решения которой рассмотрен на занятии 10.

З а д а ч и

13.1.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + A e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l}, 0 < x < l,$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0.$$

О т в е т:

$$U = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{l})^2} (e^{-t} - \cos \frac{a\pi}{l} t + \frac{l}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{l} t) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

13.2. Решить задачу о вынужденных колебаниях стержня длины l под действием внешней силы с объемной плотностью $p(x, t) = A\rho \sin t$ ($A, \rho - const$) при условии, что конец $x = 0$ закреплен, а конец $x = l$ свободен. Начальные условия считать нулевыми (см. 1.3).

О т в е т:

$$U = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) \left[\frac{a\pi(2k+1)^2}{2} - 1 \right]} \left[\sin t - \frac{2l}{a\pi(2k+1)} \sin \frac{a\pi(2k+1)}{2l} t \right] \sin \frac{\pi x(2k+1)}{2l}$$

13.3. $U_{tt} = U_{xx} + 2b, b = \text{const}, 0 < x < l, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0.$

У к а з а н и е. Для решения задачи использовать замечание.

О т в е т:

$$U = bx(l-x) - \frac{8l^2b}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin \frac{\pi(2k+1)}{l} x \cos \frac{\pi(2k+1)}{l} t.$$

13.4. $U_{tt} + U_t = U_{xx} + 1, 0 < x < 1, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=1} = 0.$

О т в е т:

$$U = \frac{x(1-x)}{2} - \frac{4e^{-t/2}}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} (\cos \mu_k t + \frac{1}{2\mu_k} \sin \mu_k t) \sin(2k+1)\pi x, \\ \mu_k = \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1/4}.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

13.5.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + Ae^{-t} \cos \frac{\pi x}{2l}, 0 < x < l,$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U_x|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$$

О т в е т:

$$U = \frac{A}{1+(\frac{a\pi}{2l})^2} (e^{-t} - \cos \frac{a\pi t}{2l} + \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi t}{2l}) \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

13.6. $U_{tt} = U_{xx} + \cos t, 0 < x < \pi$
 $U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = U|_{x=\pi} = 0.$

О т в е т:

$U = \frac{2}{\pi} t \sin t \sin x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{\pi k(1-k^2)} (\cos t - \cos kt) \sin kx,$ где
 "" означает суммирование по нечетным k .

13.7. Тяжелый однородный стержень длиной l подвешен вертикально и зашпелен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент $t = 0$ стержень освобождается. Изучить вынужденные колебания стержня (см.1.6).

О т в е т:

$$U = \frac{gx(l-x)}{2a^2} - \frac{4gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

13.8. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U_x|_{x=0} = U_x|_{x=l} = 0.$

У к а з а н и е. Учесть собственное значение $\lambda_0 = 0$.

О т в е т:

$$U = \int_0^t (t - \xi) f_0(\xi) d\xi + \frac{l}{a\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \int_0^t f_k(\xi) \sin \frac{ka\pi}{l} (t - \xi) d\xi \right] \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$f_0(\xi) = \frac{1}{l} \int_0^l f(x, \xi) dx, f_k(\xi) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \xi) \cos \frac{\pi k}{l} x dx, k = 1, 2, \dots$$

З А Н Я Т И Е 14

Тема. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (НЕОДНОРОДНОСТЬ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ)

Рассмотрим смешанную задачу

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), (x, t) \in Q_{\infty}, Q_{\infty} = (0, l) \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

$$[\alpha U + \beta U_x]|_{x=0} = \sigma_1(t), [\gamma U + \delta U_x]|_{x=l} = \sigma_2(t), \quad (3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta - const$. Ищем решение задачи в виде суммы $U = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, где $U_1 \in C^2(\bar{Q}_{\infty})$ и удовлетворяет (3). Тогда для U_2 получаем задачу, рассмотренную на занятии 13: $U_{2tt} = a^2 U_{2xx} + f^*(x, t)$, $U_2(x, 0) = \varphi^*(x)$, $U_{2t}(x, 0) = \psi^*(x)$, $\alpha U_2(0, t) + \beta U_{2x}(0, t) = 0$, $\gamma U_2(l, t) + \delta U_{2x}(l, t) = 0$, где $f^* = a^2 U_{1xx} - U_{1tt} + f$, $\varphi^* = \varphi - U_1(x, 0)$, $\psi^* = \psi - U_{1t}(x, 0)$.

Замечание 1. Функцию $U_1(x, t)$ ищут обычно в виде $U_1 = A(t)x + B(t)$, где $A(t), B(t)$ определяют таким образом, чтобы U_1 удовлетворяла (3). В частном случае, когда $\alpha, \gamma = 0$, U_1 отыскивают в виде $U_1 = A(t)x^2 + B(t)x$.

Замечание 2. Если есть такая возможность, то от функции U_1 требуют, чтобы она удовлетворяла (3) и (1).

Замечание 3. Рассмотрим задачу со стационарными неоднородностями

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), 0 < x < l, t > 0, \quad (1^*)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), U_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$[\alpha U + \beta U_x] |_{x=0} = \sigma_1, [\gamma U + \delta U_x] |_{x=l} = \sigma_2, \quad (3^*)$$

где σ_1, σ_2 - const. Ее решение можно отыскивать в виде

$$U = U_1(x) + U_2(x, t), \quad (4)$$

где $U_1(x)$ удовлетворяет $(1^*), (3^*)$, т.е. задаче

$a^2 U_1'' + f = 0, \alpha U_1(0) + \beta U_1'(0) = \sigma_1, \gamma U_1(l) + \delta U_1'(l) = \sigma_2$. Найдя U_1 и подставляя ее в (4), получаем для U_2 известную задачу:

$$U_{2tt} = a^2 U_{2xx}, U_2(x, 0) = \varphi(x) - U_1(x, 0), U_{2t}(x, 0) = \psi(x), \\ \alpha U_2(0, t) + \beta U_{2x}(0, t) = 0, \gamma U_2(l, t) + \delta U_{2x}(l, t) = 0.$$

Замечание 4. Если в $(3^*) \alpha, \gamma = 0$, то U ищут в виде $U = U_1(x) + U_2(x, t)$, где $U_1 = Ax^2 + Bx$, причем постоянные A, B подбирают таким образом, чтобы U_1 удовлетворяла (3^*) . Тогда U_2 удовлетворяет задаче

$$U_{2tt} = a^2 U_{2xx} + f(x) + 2Aa^2, U_2(x, 0) = \varphi(x) - U_1(x), U_{2t}(x, 0) = \psi(x), \\ U_{2x}(0, t) = 0, U_{2x}(l, t) = 0.$$

З а д а ч и

$$14.1. U_{xx} = U_{tt}, 0 < x < l, U |_{t=0} = U_t |_{t=0} = 0, U |_{x=0} = 0, U |_{x=l} = t.$$

О т в е т:

$$U = \frac{xt}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2l}{(\pi k)^2} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi k t}{l}.$$

14.2. Изучить вынужденные колебания струны, закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$ ($A, \omega - \text{const}$). Здесь имеем следующую смешанную задачу

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \quad (1_0)$$

$$U(x, 0) = 0, U_t(x, 0) = 0, \quad (2_0)$$

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = A \sin \omega t. \quad (3)$$

Ищем решение задачи в виде $U = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, причем в данном случае потребуем от U_1 , чтобы она удовлетворяла $(1^0), (3)$ (см. замечание 2). Будем искать U_1 в виде

$$U_1(x, t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1⁰) и (3), как и раньше, получаем

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (5)$$

$$X(0) = 0, X(l)T(t) = A \sin \omega t, \quad (6)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (7)$$

Общие решения уравнений (5) и (7) при $\lambda > 0$ имеют соответственно вид:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

$$T(t) = C_3 \cos a\sqrt{\lambda}t + C_4 \sin a\sqrt{\lambda}t.$$

Из первого условия (6) имеем

$$X(0) = C_1 = 0. \quad (8)$$

Запишем второе условие (6), учитывая при этом (8),

$$X(l)T(t) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l(C_3 \cos a\sqrt{\lambda}t + C_4 \sin a\sqrt{\lambda}t) = A \sin \omega t. \quad (9)$$

Или перепишем левую часть (9) в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{C^2 + D^2} \sin \sqrt{\lambda}l \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \cos a\sqrt{\lambda}t + \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \sin a\sqrt{\lambda}t \right) = \\ = \sqrt{C^2 + D^2} \sin \sqrt{\lambda}l (\sin \varphi \cos a\sqrt{\lambda}t + \\ + \cos \varphi \sin a\sqrt{\lambda}t) = \sqrt{C^2 + D^2} \sin \sqrt{\lambda}l \sin(\varphi + a\sqrt{\lambda}t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $C = C_2C_3$, $D = C_2C_4$, $\sin \varphi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}$, $\cos \varphi = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$. Учитывая (10), из (9) получим

$$\sqrt{C^2 + D^2} \sin \sqrt{\lambda}l \sin(\varphi + a\sqrt{\lambda}t) = A \sin \omega t,$$

откуда имеем

$$\sqrt{C^2 + D^2} \sin \sqrt{\lambda}l = A, a\sqrt{\lambda} = \omega,$$

$$\varphi = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \dots \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\omega}{a}, C = 0, D = \frac{A}{\sin \frac{\omega}{a} l}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (4), окончательно получаем

$$U_1 = X(x)T(t) = \sin \sqrt{\lambda} x (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t) =$$

$$\frac{A}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t.$$

Функцию U_1 можно найти и другим способом, а именно отыскиваем ее в виде

$$U_1(x, t) = X(x) \sin \omega t. \quad (13)$$

Подставляя U_1 в (1⁰), получим $-\omega^2 X \sin \omega t = a^2 X'' \sin \omega t$, откуда имеем

$$X'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X = 0. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (3), получим

$$X(0) = 0, X(l) = A. \quad (15)$$

Решая (14), (15), получим $X = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l}$ и, следовательно, получим U_1 .

О т в е т:

$$U = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A\omega a^2 l k^2 (-1)^k}{a^2 k^2 \pi^2 - l^2 \omega^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

14.3. Стержень длиной l , конец которого $x = 0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к свободному концу приложена сила Q - const (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $U(x, t)$ в любой момент времени t (см. 1.7).

О т в е т:

$$U = \frac{Qx}{E} - \frac{8Ql}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

14.4. Изучить продольные колебания однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $F = A \sin \omega t$, направление которой совпадает с осью стержня (см. 1.7).

О т в е т:

$$U = \frac{Aa}{ES\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\cos \frac{\omega}{a} l} + \frac{16aA\omega l^3}{ES\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} t}{(2k+1)}, \quad \mu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$$

$\omega \neq \mu_k a$.

14.5. $U_{tt} + U_t = U_{xx}, 0 < x < 1, U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = 1-x, U|_{x=0} = t, U|_{x=1} = 0$.

О т в е т:

$$U = t(1-x) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{(k\pi)^3} [2 \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - 2] \sin \pi k x, \lambda_k = \sqrt{(k\pi)^2 - \frac{1}{4}}.$$

14.6. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), 0 < x < l, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, U|_{x=0} = \alpha, U|_{x=l} = \beta,$
 $\alpha, \beta - \text{const.}$

О т в е т:

$U = U_1 + U_2$, где

$$U_1 = -\frac{1}{a^2} \int_0^x [\int_0^y f(\xi) d\xi] dy + \frac{x}{la^2} \int_0^l [\int_0^y f(\xi) d\xi] dy + \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha,$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k a}{l} t, \quad a_k = -\frac{2}{l} \int_0^l U_1(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx$$

З А Н Я Т И Е 15

Тема. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
 ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Дано уравнение диффузии

$$\rho(x) U_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (p(x) \frac{\partial U}{\partial x_i}) - q(x) U + f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_{\infty} = \Omega \times (0, \infty), \Omega \subset R_x^n$$

Найти функцию $U(x, t) \in C^{2,1}(Q_\infty) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_\infty)$ (первый индекс означает принадлежность классу по x , второй по t), удовлетворяющую уравнению (1) в Q_∞ , начальному условию

$$U(x, 0) = \varphi(x), x \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

и граничному условию

$$[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}]|_{\partial\Omega \times [0, \infty)} = \gamma(x, t), \quad (3)$$

причем $[\alpha(x)\varphi(x) + \beta\frac{\partial \varphi(n)}{\partial n}]|_{\partial\Omega} = \gamma(x, 0)$.

Из (1) при $n = 3, q(x) \equiv 0$ имеем уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла в теле, $U(x, t)$ - температура точки x в момент t . Схема решения задачи (1), (2), (3) повторяет схему решения смешанной задачи для уравнений гиперболического типа, рассмотренную на занятиях 11-14. Отличие состоит только в том, что уравнение для определения $T(t)$ (см. (6) занятия 11) является уравнением первого порядка и имеет вид:

$$T' + \lambda T = 0.$$

З а д а ч и

15.1. Найти распределение температуры в однородном стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $\varphi(x)$.

Р е ш е н и е. Задача была поставлена на занятии 2 (см. 2.1) и имеет вид

$$U_t = a^2 U_{xx}, a^2 = \frac{k}{c\rho}, (x, t) \in Q_\infty = (0, l) \times (0, \infty), \quad (4_0)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$U(0, t) = U(l, t) = 0, t \geq 0 (\varphi(0) = \varphi(l) = 0). \quad (6_0)$$

Так как уравнение (4₀) и граничные условия (6₀) однородны, то применяется схема решения задачи, рассмотренная на занятии 11.

1. Ищем частные решения уравнения (4₀) вида

$$U(x, t) = X(x)T(t), \quad (7)$$

удовлетворяющие (6₀). Подставляя (7) в (4₀), (6₀), приходим, как и раньше, к задачам

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(l) = 0, \quad (8)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (9)$$

Задача (8) была рассмотрена на занятии 10 (см. 10.1) и имеет решение

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x, k = 1, 2, \dots$$

Подставляя λ_k в (9), получаем уравнение для определения $T_k(t)$

$$T'_k + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k = 0, k = 1, 2, \dots,$$

общее решение которого имеет вид

$$T_k(t) = a_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t},$$

где a_k - произвольная постоянная.

2. Ищем общее решение задачи в виде ряда

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (10)$$

Запишем для (10) (5)

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x), 0 \leq x \leq l,$$

откуда

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получаем решение задачи.

15.2. Найти температуру однородного изотропного прямоугольного параллелепипеда Ω с измерениями $l_i, i = 1, 2, 3$, если его начальная температура является произвольной функцией $x(x_1, x_2, x_3)$, а температура поверхности поддерживается равной нулю.

У к а з а н и е. Постановка задачи была дана в 2.7. Для решения задачи отыскиваем частные решения уравнения, удовлетворяющие граничному условию, в виде $U = U_1(x_1, x_2, x_3)T(t)$, тогда для U_1 приходим к задаче на собственные значения: $\Delta U_1 = -\lambda U_1, U_1|_{\partial\Omega} = 0$, которую решаем методом разделения переменных (см. 10. 3.).

О т в е т :

$$U = \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^{\infty} c_{k_1 k_2 k_3} e^{-a^2 \lambda_{k_1 k_2 k_3} t} \times \sin \frac{\pi k_1}{l_1} x_1 \sin \frac{\pi k_2}{l_2} x_2 \sin \frac{\pi k_3}{l_3} x_3,$$

$$\text{где } \lambda_{k_1 k_2 k_3} = \pi^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{k_i}{l_i}\right)^2, \\ c_{k_1 k_2 k_3} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \varphi(x_1, x_2 x_3) \prod_{i=1}^3 \sin \frac{\pi k_i}{l_i} dx_1 dx_2 dx_3.$$

15.3. Найти температуру стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых равна $\Phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, начальная температура стержня является произвольной функцией x , температура концов поддерживается равной нулю.

У к а з а н и е. Постановку задачи см. в 2.4. Для решения задачи см. занятие 13.

О т в е т :

$$U = \left[\frac{1}{c\rho} \int_0^t \Phi(\tau) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}(t-\tau)} d\tau \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi k}{l} x, \\ a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

15.4. Найти температуру стержня, на боковой поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура является произвольной функцией x .

У к а з а н и е. Постановка задачи дана в 2.5. Учесть, что $\lambda = 0$ есть собственное значение соответствующей задачи на собственные значения.

О т в е т :

$$U = \frac{a_0}{2} e^{-bt} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-[(\frac{\pi k a}{l})^2 + b]t} \cos \frac{\pi k}{l} x, \\ a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi k}{l} x dx, b = \frac{\alpha p}{c\rho s}.$$

15.5. Начальная температура стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью равна $U_0 - const$, а на концах его поддерживается постоянная температура $U(0, t) = U_1, U(l, t) = U_2$. Найти температуру $U(x, t)$ стержня при $t > 0$.

У к а з а н и е: Решение задачи можно искать в виде $U = U_1(x) + U_2(x, t)$, где $U_1(x)$ - решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (см. замечание 3 занятия 14).

О т в е т :

$$U = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{l} +$$

$$+\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (U_0 - U_1) [1 - (-1)^k] + (-1)^{k+1} (U_1 - U_2) e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2}} \sin \frac{\pi k}{l} x.$$

15.6. Дана тонкая однородная прямоугольная пластинка со сторонами l и m (совпадающими с осями координат), для которой известно начальное распределение температуры. Основания пластинки теплоизолированы, стороны $x_1 = 0, x_2 = l$ во все время наблюдения удерживаются при температуре, равной нулю, а стороны $x_2 = 0, x_2 = m$ имеют заданное распределение температуры

$$U|_{x_2=0} = \varphi_0(x_1), U|_{x_2=m} = \varphi_1(x_1), 0 \leq x_1 \leq l.$$

Найти температуру $U(x_1, x_2, t)$ пластинки в момент времени $t > 0$.

У к а з а н и е. Постановка задачи дана в 2.3. Решение следует искать в виде $U = U_1(x_1, x_2) + U_2(x_1, x_2, t)$, где U_1 - решение уравнения Лапласа $\Delta U_1 = 0$ при условиях

$U_1|_{x_1=0} = 0, U_1|_{x_1=l} = 0, U_1|_{x_2=0} = \varphi_0(x_1), U_1|_{x_2=m} = \varphi_1(x_1)$, а U_2 есть решение уравнения $U_{2t} = a^2(U_{2x_1x_1} + U_{2x_2x_2})$ при условиях $U_2(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) - U_1(x_1, x_2), U_2|_{x_1=0} = U_2|_{x_1=l} = U_2|_{x_2=0} = U_2|_{x_2=m} = 0$.

О т в е т :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2, U_1 = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi(m-x_2)}{l} \int_0^l \varphi_0(x_1) \sin \frac{\pi k x_1}{l} dx_1 \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \frac{\pi k x_2}{l} \int_0^l \varphi_1(x_1) \sin \frac{\pi k x_1}{l} dx_1 \right] \frac{\sin \frac{k\pi x_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi m}{l}}, \\ U_2 &= \frac{4}{lm} \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} e^{-a^2 \pi^2 (\frac{k_1^2}{l^2} + \frac{k_2^2}{m^2}) t} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{m} \int_0^l \int_0^m [\varphi(x_1, x_2) - \\ &\quad - U_1(x_1, x_2)] \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{m} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

15.7. Дан тонкий однородный стержень длиной l , начальная температура которого равна нулю. На конце $x = l$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = 0$ она растет линейно со временем так, что $U(0, t) = At$, где $A - \text{const}$. Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$.

У к а з а н и е. Применить метод, рассмотренный на занятии 14, т.е. отыскивать решение задачи в виде суммы $U = U_1(x, t) + U_2(x, t)$, где $U_1 \in C^{2,1}(Q_{\infty}) \cap C(\bar{Q}_{\infty})$ и удовлетворяет граничным условиям, причем следует отыскивать U_1 в виде $U_1 = A(t)x + B(t)$ (см. занятие 14).

$$\text{О т в е т : } U = At(1 - \frac{x}{l}) - \frac{Al^2}{6a^2}[(\frac{x}{l})^3 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})] + \frac{2Al^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Замечание. Если отыскивать функцию $U_2(x, t)$ в виде

$$U_2 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{тогда}$$

$$U = At(1 - \frac{x}{l}) + \sum_{k=1}^{\infty} [(e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} - 1)] \frac{2Al^2}{\pi^3 a^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

З А Н Я Т И Е 16

Тема. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В СЛУЧАЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Уравнения Пуассона и Лапласа являются уравнениями эллиптического типа, которые описывают стационарные (не меняющиеся со временем) процессы различной физической природы. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\Delta U = -F(x), \quad (1)$$

где $F(x)$ - заданная функция, а $\Delta U \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$ - оператор Лапласа. В частности, при $F(x) \equiv 0$ имеем уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0. \quad (1_0)$$

Пусть $\Omega \in R^n$ - конечная область. Функция $U(x) \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяющая (1_0) в Ω называется гармонической в области Ω . Функция $U(x)$ называется гармонической в бесконечной области Ω , если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии $U \in C^2$ и удовлетворяет уравнению (1_0) , а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяет условию

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right). \quad (2)$$

Так как уравнение (1) описывает стационарные процессы, то краевые задачи для него характеризуются только граничными условиями и носят название граничных.

I. Задача Дирихле. Найти $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую (1) в Ω и удовлетворяющую на границе $\partial\Omega$ условию

$$U|_{\partial\Omega} = f_1(y), y \in \partial\Omega.$$

II. Задача Неймана. Найти $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую (1) в Ω и условию $\frac{\partial U}{\partial n}|_{\partial\Omega} = f_2(y)$, где \vec{n} — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

III. Третья граничная задача. Найти $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую (1) в Ω и условию

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha(y)U \right] |_{\partial\Omega} = f_3(y).$$

Наряду с задачами I-III в приложениях важное значение имеют смешанные граничные задачи, в которых на одной части границы задаются значения искомой функции, на другой - значения ее нормальной производной. В случае, когда Ω - конечная область, задачи I-III называются внутренними. Если же Ω - бесконечная область, то имеем внешние задачи, при этом кроме граничного условия для однозначного определения решения задается условие (2). Граничные задачи для уравнения (1) могут быть решены методом Фурье для некоторых областей частного вида, в частности для прямоугольника, параллелепипеда, ввиду возможности разделения переменных в граничном условии. Введение сферических, полярных координат позволяет решить задачи также в случае шара, круга, сектора и т.д. Имеется еще ряд областей, где разделение переменных в граничном условии может быть осуществлено за счет введения тех или иных криволинейных координат. Схема решения задач в случае уравнения (1) остается прежней.

З а д а ч и

16.1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения (1_0) в случае прямоугольника $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$ по граничному условию

$$U |_{x_1=0} = Ax_2(b - x_2), U |_{x_1=a} = 0, 0 \leq x_2 \leq b, \quad (3)$$

$$U |_{x_2=0} = B \sin \frac{\pi x_1}{a}, U |_{x_2=b} = 0, 0 \leq x_1 \leq a \quad (4)$$

где $A, B - const$.

Р е ш е н и е. В данном случае $n = 2$. В силу неоднородности условий (3), (4) решение задачи $U(x) = U(x_1, x_2)$ следует искать в виде

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x), \quad (5)$$

где U_1, U_2 - решения уравнения (1_0) , удовлетворяющие соответственно условиям

$$U_1 |_{x_1=0} = Ax_2(b - x_2), U_1 |_{x_1=a} = 0, 0 \leq x_2 \leq b \quad (3)$$

$$U_1 |_{x_2=0} = 0, U_1 |_{x_2=b} = 0, 0 \leq x_1 \leq a \quad (4_0)$$

$$U_2 |_{x_1=0} = 0, U_2 |_{x_1=a} = 0, 0 \leq x_2 \leq b \quad (3_0)$$

$$U_2|_{x_2=0} = B \sin \frac{\pi x_1}{a}, U_2|_{x_2=b} = 0, 0 \leq x_1 \leq a \quad (4)$$

Остановимся на отыскании U_1 . Строим частные решения уравнения (1₀), имеющие вид

$$U_1(x) = X_1(x_1)X_2(x_2) \quad (6)$$

и удовлетворяющие (4₀). Подставляя (6) в (1₀) и (4₀), получим

$$X_1'' - \lambda X_1 = 0, \quad (7)$$

$$X_2'' + \lambda X_2 = 0, \quad (8)$$

$$X_2(0) = 0, X_2(b) = 0. \quad (9)$$

Для определения $X_2(x_2)$ пришли к задаче на собственные значения (8),(9) (см. 10.1). Ее решения имеют вид

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2, X_{2k} = \sin \frac{\pi k}{b} x_2, k = 1, 2, \dots$$

При $\lambda = \lambda_k$ получаем уравнение для определения $X_1(x_1)$

$$X_{1k}'' - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X_{1k} = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$X_{1k}(x_1) = a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} x_1 + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} x_1, k = 1, 2, \dots$$

В силу (6) функция $U_{1k} = X_{1k}X_{2k}$ является решением уравнения (1₀) с граничным условием (4₀). Берем общее решение задачи для U_1 в виде ряда

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} U_{1k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} x_1 + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} x_1) \sin \frac{\pi k}{b} x_2. \quad (10)$$

Подберем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялись условия (3). Полагая в (10) $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, получим

$$U_1(0, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{b} x_2 = A x_2(b - x_2), 0 \leq x_2 \leq b,$$

$$U_1(a, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} a + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} a) \sin \frac{\pi k}{b} x_2 = 0, 0 \leq x_2 \leq b,$$

откуда получаем

$$a_k = \frac{2}{b} \int_0^b A x_2 (b - x_2) \sin \frac{\pi k}{b} x_2 dx_2 = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \frac{8Ab^2}{\pi^3(2n+1)^3}, & k = 2n + 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} = 0. \quad (12)$$

Учитывая (11), из (12) имеем

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -\frac{8Ab^2}{\pi^3(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}}, & k = 2n + 1, \end{cases} \quad (13)$$

Подставив (11) и (13) в (10), получим $U_1(x)$ в виде

$$U_1(x) = \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi(a-x_1)}{b} \sin \frac{\pi(2n+1)x_2}{b}}{(2n+1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}. \quad (14)$$

Аналогично, меняя местами x_1 и x_2 , найдем

$$U_2(x) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-x_2)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x_1}{a}. \quad (15)$$

На основании (5) сумма функций (14) и (15) будет решением нашей задачи.

16.2. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U = -2 \quad (16)$$

в прямоугольнике $\bar{\Omega} = (0, a) \times (-b/2, b/2)$, если выполняются условия:

$$U|_{x_1=0} = 0, U|_{x_1=a} = 0, -b/2 \leq x_2 \leq b/2, \quad (17^0)$$

$$U|_{x_2=-b/2} = 0, U|_{x_2=b/2} = 0, 0 \leq x_1 \leq a. \quad (18^0)$$

У к а з а н и е. Так как уравнение (16) неоднородно, а условия (17⁰) и (18⁰) однородны, то для решения задачи можно применить метод собственных функций (см. занятие 13). Но так как $F(x) \equiv 2 - \text{const}$, удобнее искать решение задачи в виде $U(x_1, x_2) = U_1(x_1) + U_2(x_1, x_2)$, где $U_1(x_1)$ - решение уравнения (16), удовлетворяющее условию (17⁰), а U_2 - решение уравнения $\Delta U_2 = 0$, удовлетворяющее условиям

$$U_2|_{x_1=0} = 0, U_2|_{x_1=a} = 0, -b/2 \leq x_2 \leq b/2,$$

$$U_2|_{x_2=-b/2} = -U_1(x_1), U_2|_{x_2=b/2} = -U_1(x_1), 0 \leq x_1 \leq a.$$

О т в е т:

$$U = x_1(a - x_1) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x_1}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi(2k+1)x_2}{b}}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

16.3. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе: $[0, a] \times [0, \infty)$, удовлетворяющее условиям $U|_{x_1=0} = U|_{x_1=a} = 0, 0 \leq x_2 < \infty$, $U|_{x_2=0} = A(1 - x_1/a), \lim_{x_2 \rightarrow \infty} U(x_1, x_2) = 0, 0 \leq x_1 \leq a$.

У к а з а н и е. Задача Дирихле в данном случае с разрывными граничными условиями. Рассматривать решения, непрерывные в замкнутой области, не имеет смысла, поэтому здесь постановка задачи другая: требуется найти $U(x)$ - гармоническую внутри Ω , непрерывно примыкающую к граничным значениям в точках непрерывности последних, ограниченную в $\bar{\Omega}$, причем условие ограниченности фактически относится к окрестности точек разрыва.

О т в е т:

$$U = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{\pi k x_2}{a}} \sin \frac{\pi k x_1}{a}.$$

16.4. Найти распределение потенциала электростатического поля $U(x) = U(x_1, x_2, x_3)$ внутри прямоугольного параллелепипеда с проводящими стенками, если его боковые грани и верхнее основание заземлены, а нижнее основание заряжено до потенциала $V = \text{const}$.

У к а з а н и е. Потенциал электростатического поля в области, свободной от зарядов, удовлетворяет уравнению (1_0) , поэтому задача сводится к решению уравнения (1_0) внутри параллелепипеда с измерениями a, b, c при граничных условиях:

$$U|_{x_1=0} = U|_{x_1=a} = 0, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq c,$$

$$U|_{x_2=0} = U|_{x_2=b} = 0, 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_3 \leq c, \quad (19)$$

$$U|_{x_3=0} = U|_{x_3=c} = V, 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b.$$

В данном случае строим частные решения (1_0) , удовлетворяющие (19) в виде

$$U(x) = U_1(x_1, x_2)X_3(x_3),$$

тогда для U_1 получаем задачу на собственные значения, рассмотренную раньше (см. 10.3).

О т в е т:

$$U = \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} (a_{k_1, k_2} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k_1, k_2}} x_3 + b_{k_1, k_2} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{k_1, k_2}} x_3) \sin \frac{\pi k_1 x_1}{a} \sin \frac{\pi k_2 x_2}{b},$$

где

$$a_{k_1 k_2} = \begin{cases} 0, & k_1 k_2 - \text{четное} \\ \frac{16V}{\pi^2 k_1 k_2}, & k_1, k_2 - \text{нечетные} \end{cases}$$

$$b_{k_1 k_2} = -\frac{a_{k_1 k_2} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k_1 k_2} c}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{k_1 k_2} c}}, \quad \lambda_{k_1 k_2} = \pi^2 [(k_1/a)^2 + (k_2/b)^2].$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

16.5. Найти решение $U(x)$ уравнения Лапласа в прямоугольнике $\Omega = (0, p) \times (0, s)$, удовлетворяющее граничным условиям $U|_{x_1=0} = U_{x_1}|_{x_1=p} = 0, U|_{x_2=0} = 0, U|_{x_2=s} = f(x_1)$.

О т в е т :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi}{2p} x_1 \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2p} x_2,$$

$$a_k = \frac{2}{p} \operatorname{sh}^{-1} \frac{(2k+1)\pi s}{2p} \int_0^p f(x_1) \sin \frac{(2k+1)\pi x_1}{2p} dx_1.$$

16.6. Найти решение $U(x)$ уравнения Лапласа в прямоугольнике $\Omega = (0, p) \times (0, s)$, удовлетворяющее граничным условиям $U_{x_1}|_{x_1=0} = U_{x_1}|_{x_1=p} = 0, U|_{x_2=0} = A, U|_{x_2=s} = Bx_1, A, B - \text{const.}$

О т в е т :

$$U = \frac{(p^2 B - 2a)x_2}{2s} + A + \frac{4pB^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi x_1}{p} \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)x_2}{p}}{(2k+1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi s}{p}}.$$

16.7. Решить задачу, поставленную в задаче 2.6.

У к а з а н и е. Для решения задачи можно применить метод собственных функций, то есть искать решение задачи в виде ряда

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_{n2}(x_2) \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2a},$$

где $X_{n1}(x_1) = \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{2a}$ - собственные функции краевой задачи $X_1'' + \lambda X_1 = 0, X_1(0) = X_1(a) = 0$.

О т в е т :

$$U = \frac{16Qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-x_2)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x_1}{a}.$$

16.8. Записать оператор Лапласа при $n = 2$ в полярных координатах.

О т в е т :

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

З А Н Я Т И Е 17

Тема. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В СЛУЧАЕ КРУГОВЫХ ГРАНИЦ

При решении граничных задач в случае круга, сектора, кольца осуществляется переход к полярным координатам r, φ : $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Уравнение Лапласа при этом принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1_0)$$

17.1. (Задача Дирихле для круга).

Найти функцию $U(x) \in C^2(|x| < a) \cap C(|x| \leq a)$, где $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U = 0 \quad (2_0)$$

при $|x| < a$ и граничному условию

$$U|_{|x|=a} = f(y), f \in C(|x| = a). \quad (3)$$

Р е ш е н и е. Введем полярные координаты r, φ с полюсом в начале координат. Искомая функция $U(x_1, x_2)$ перейдет в функцию $U(r, \varphi)$ (для удобства не меняем обозначение функции).

Уравнение (2₀) перейдет в уравнение (1₀) относительно $U(r, \varphi)$. Для того чтобы функция $U(r, \varphi)$ была однозначной, необходимо, чтобы она была периодической по φ :

$$U(r, \varphi + 2\pi) = U(r, \varphi). \quad (4)$$

Граничное условие (3) запишется в виде

$$U|_{r=a} = f(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (5)$$

причем $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$.

Итак, исходную задачу (2₀), (3) мы привели к задаче (1₀), (4), (5). Решим ее методом Фурье. Ищем решение уравнения (1₀) в виде

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (6)$$

Подставив (6) в (1₀) и разделив переменные, получим

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\lambda,$$

откуда получаем два уравнения

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad (7)$$

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0. \quad (8)$$

Записывая для (6) условие (4), имеем

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (9)$$

Решим сначала задачу на собственные значения (7), (9). Общим решением (7) является функция

$$\Phi(\varphi) = a \cos \sqrt{\lambda} \varphi + b \sin \sqrt{\lambda} \varphi. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим $\lambda_k = k^2$,

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi, k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Найдем теперь $R(r)$. При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (8) является уравнением Эйлера и принимает вид

$$r^2 R_k'' + r R_k' - k^2 R_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (8_k)$$

Рассмотрим случай $k = 0$. Уравнение (8_k) примет вид

$$r R_0'' + R_0' = 0.$$

Его общим решением будет функция $R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r$.

При $\lambda_k = k^2 \neq 0$ (8_k) имеет общее решение

$$R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}.$$

Так как при $r < a$ ограниченными решениями уравнений (8_k) являются только функции $R_{1k} = r^k, k = 0, 1, 2, \dots$, то по формуле (6) получаем частные решения уравнения (1₀), удовлетворяющие (4):

$$U_k(r, \varphi) = r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), k = 0, 1, 2, \dots$$

Ищем теперь общее решение в виде ряда

$$U = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5), будем иметь

$$U(a, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) a^k = f(\varphi) . \quad (13)$$

Предположим, что функция $f(\varphi)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг на интервале $[0, 2\pi]$. Тогда получаем, что (13) будет удовлетворено, если

$$\begin{aligned} a_0 = \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \\ a^k a_k = \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\ a^k b_k = \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Определив из (14) a_0, a_k, b_k , подставим их в (12), тогда получим решение задачи

$$U = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

17.2. (Задача Дирихле для внешности круга). Найти функцию $U(x) \in C^2(|x| > a) \cap C(|x| \geq a)$, удовлетворяющую уравнению (2₀) в конечных точках, граничному условию (3) и условию

$$U(x) = O(1), |x| \rightarrow \infty.$$

О т в е т :

$U = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$, где $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ определяются формулами (14).

17.3. Написать решение задачи Неймана для уравнения Лапласа внутри круга радиуса a . Найти необходимое условие разрешимости задачи. Рассмотреть частный случай, когда $f = \frac{Ax_1}{a}$.

У к а з а н и е. Для решения задачи переходим к полярным координатам. Так как для окружности направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса, то граничное условие можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

О т в е т: $U = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{ka^{k-1}} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$, где a_0 - произвольная постоянная, α_k и β_k определяются формулами (14). Необходимое условие разрешимости задачи: $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$. В частном случае получаем $U = a_0 + Ar \cos \varphi$.

17.4. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U = x_1^2 + x_2^2 \quad (15)$$

в круге радиуса a по граничному условию

$$U|_{|x|=a} = 0. \quad (16^0)$$

У к а з а н и е. Введем полярные координаты, тогда (15) и (16⁰) примут вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \varphi} = r^2, U(a, \varphi) = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

откуда следует, что решение U не зависит от φ , то есть

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = r^2.$$

Решая последнее уравнение при условиях $U(a) = 0, U(r) = O(1), r \rightarrow 0$ получим решение задачи.

О т в е т :

$$U = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{16} - \frac{a^4}{16}.$$

17.5. (Задача Дирихле для сектора). Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta U = 0, 0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} U(r, 0) &= U(r, \alpha) = 0, \\ U(R, \varphi) &= A\varphi, A - const. \end{aligned} \quad (17)$$

У к а з а н и е. Решение задачи проводится аналогично задаче 17.1, но вместо условия (4) используется условие (17).

О т в е т :

$$U = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

17.6. Написать решение третьей внутренней граничной задачи для уравнения Лапласа в круге радиуса a , если граничное условие записывается в виде

$$\left[\frac{\partial U}{\partial r} - hU\right] \big|_{r=a} = -f(\varphi), h - \text{const.}$$

О т в е т :

$$U = \frac{\alpha_0}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{a^{k-1}(ah-k)} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi),$$

где $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ определяются формулами (14).

17.7. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta U = -4$ в круге радиуса a при граничном условии $U|_{|x|=a} = 0$.

У к а з а н и е. При решении задачи можно воспользоваться указанием к задаче 17.4. Можно также отыскивать решение в виде суммы двух функций $U = V(x) + W(x)$, где $V(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta V = -4$, а $W(x)$ является решением задачи $\Delta W = 0, W|_{|x|=a} = -V$. Нетрудно проверить, что $V = -(x_1^2 + x_2^2)$, $U = a^2 - (x_1^2 + x_2^2)$.

17.8. (Задача Дирихле для кольца). Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, 1 < r < 2,$$

удовлетворяющее условиям

$$U_{r=1} = 0, U|_{r=2} = 2A \sin \varphi.$$

О т в е т :

$$U = \frac{8A}{3} \operatorname{sh}(\ln r) \sin \varphi.$$

17.9. Найти стационарное распределение температуры в тонкой пластинке, имеющей форму кругового сектора, радиусы которого поддерживаются при температуре U_1 , а дуга окружности - при температуре U_2 , ($U_1, U_2 - \text{const}$).

У к а з а н и е. Так как граничные условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ (радиусы сектора) ненулевые, но не зависят от r , то решение можно искать в виде $U(r, \varphi) = V(\varphi) + W(r, \varphi)$, где функция $V(\varphi)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям $V(0) = V(\alpha) = U_1$.

О т в е т :

$$U = U_1 + \frac{4(U_2 - U_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}}{2k+1}.$$

17.10. Найти гармоническую функцию в круговом секторе $0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha$, удовлетворяющую граничному условию

$$U_\varphi(r, 0) = U(r, \alpha) = 0, U(R, \varphi) = f(\varphi).$$

О т в е т :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha},$$

$$a_k = \frac{2}{\alpha} R^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} d\varphi.$$

З А Н Я Т И Е 18

Тема: ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ИХ СВОЙСТВА

При решении краевых задач методом Фурье (см. занятия 10-15) для множителя $X(x)$ приходят к задаче на собственные значения для однородного уравнения

$$LX + \lambda\rho(x)X = 0, a < x < b,$$

где $LX \equiv \frac{d}{dx}[p(x)\frac{dX}{dx}] - q(x)X$.

В частности, рассматривая задачу о продольных колебаниях стержня, закрепленного на концах, мы приходим к задаче

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

соответствующей случаю $a = 0, b = l, q \equiv 0, p(x) = \rho(x) \equiv \text{const.}$ Решениями последнего уравнения при $\lambda > 0$ являются тригонометрические функции. При решении других задач (например, задачи о собственных колебаниях круглой мембраны) приходят к уравнению Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (1)$$

где $\nu \geq 0 - \text{const.}$ Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$y' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0,$$

откуда следует, что уравнение (1) имеет особую точку $x = 0$. Поэтому, как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, частное решение уравнения (1) отыскивается в виде обобщенного степенного ряда:

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho}, \quad (2)$$

где ρ - некоторое постоянное число, подлежащее определению. Подставим (2) в (1), тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\rho)x^{k+\rho} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - \nu^2] a_k x^{k+\rho} + \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'} x^{k'+\rho+2} = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования k' на $k-2$ тогда (3) переписывается в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)^2 - \nu^2] a_k x^{k+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+\rho} = 0. \quad (4)$$

Или, отделяя в первой сумме два первых слагаемых, перепишем (4) в виде:

$$(\rho^2 - \nu^2) a_0 x^\rho + [(1+\rho)^2 - \nu^2] a_1 x^{1+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(k+\rho)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2}\} x^{k+\rho} = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях x будем иметь

$$\begin{cases} (\rho^2 - \nu^2) a_0 = 0, \\ [(1+\rho)^2 - \nu^2] a_1 = 0, \\ [(k+\rho)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения системы (5) имеем $\rho^2 - \nu^2 = 0$, откуда $\rho = \pm \nu$. Пусть $\rho = \nu$, тогда из второго уравнения системы (5) имеем $(1+2\nu) a_1 = 0$, откуда следует, что

$$a_1 = 0, \quad (6)$$

так как $\nu \geq 0$ и $2\nu + 1 \neq 0$. Из последнего уравнения (5) получаем

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \quad k \geq 2,$$

и в силу (6) будем иметь

$$a_k = 0, \quad k = 2n+1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то есть

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}, a_4 = -\frac{a_2}{2^2(\nu+2)2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+2)(\nu+1)1 \cdot 2},$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)n!}. \quad (8)$$

Коэффициент a_0 у нас остается произвольным, поэтому выберем его таким образом:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad (9)$$

где $\Gamma(\mu)$ - гамма-функция, определяемая для $\mu > 0$ следующим образом:

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx \quad (10)$$

Заметим, что из (10) следует, что $\Gamma(1) = 1$. Итак, выбрав a_0 согласно (9), мы получим из (8):

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n} \Gamma(1+\nu)(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)n!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} \Gamma(n-\nu+1)n!}, \quad (11)$$

при этом мы учли свойство гамма-функции

$$\Gamma(\mu+1) = \Gamma(\mu)\mu = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n)\Gamma(\mu-n). \quad (12)$$

Подставив (7) и (11) в (2), получим частное решение уравнения (1):

$$y(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k-\nu+1)}, \quad (13)$$

которое называется функцией Бесселя I-го рода ν -го порядка. Ряд (13) сходится при любом значении x , в чем нетрудно убедиться, применяя признак Даламбера. Функция

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \quad (14)$$

также является решением уравнения (1). Оно получается из (13) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (1) содержит ν^2 и не меняется заменой ν на $-\nu$. Функциональное соотношение (12) позволяет определить гамма-функцию для неположительных значений μ . Заметим, что

$$\Gamma(0) = \infty, \Gamma(-n) = \infty, n \in N. \quad (15)$$

Если $\nu \neq n$, то частные решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения (1) будут линейно независимыми, так как разложения, стоящие в правых частях формул (13) и (14), начинаются с разных степеней x . В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = C_1(x)J_\nu(x) + C_2(x)J_{-\nu}(x),$$

где $C_i (i = 1, 2)$ - произвольные постоянные. Если $\nu = n \in N$, то решения линейно зависимы, причем

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (16)$$

Для того чтобы найти общее решение уравнения (1) в этом случае, необходимо найти второе линейно независимое от $J_\nu(x)$ частное решение. Для этого введем новую функцию $Y_\nu(x)$, положив

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (17)$$

Функция (17) также является решением уравнения (1), так как она представляет линейную комбинацию частных решений этого уравнения. При $\nu \in Z$ правая часть (17) имеет неопределенность. Если раскрыть эту неопределенность по правилу Лопиталя, можно получить следующее представление:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)} \left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right].$$

В частном случае, при $\nu = 0$, функция $Y_0(x)$ представляется следующим образом:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Функция $Y_\nu(x)$ называется функцией Бесселя 2-го рода ν -го порядка или функцией Вебера, причем при $\nu \in Z$

$$|Y_\nu(x)| \longrightarrow \infty, x \longrightarrow 0.$$

Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ линейно независимы, следовательно, эти функции при всяком ν - дробном или целом образуют фундаментальную систему решений. Отсюда вытекает, что общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

Для функций Бесселя имеют место рекуррентные формулы, связывающие функции различных порядков. Для функций Бесселя I-го рода эти формулы имеют вид:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x), \quad (18)$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x), \quad (19)$$

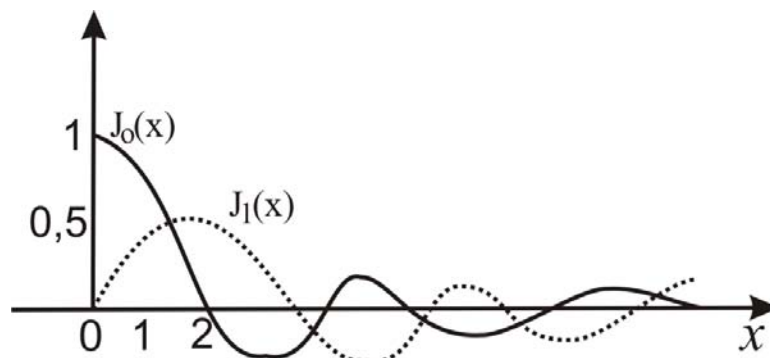
$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \quad (20)$$

Эти формулы позволяют выразить функции Бесселя порядка $\nu > 1$ через функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$. Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ представляются следующими рядами:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

Для них имеются подробные таблицы. Графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ имеют следующий вид:



Формулы (18) и (19) проверяются непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций.

Функции Бесселя I-го рода при $\nu \in \mathbb{Z}$ просто связаны с коэффициентами разложения функции $w(x, z) = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}$ в ряд Лорана по положительным и отрицательным степеням z , а именно при $0 < |z| < \infty$ имеет место разложение

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)[z^n + (-1)^n z^{-n}] \quad (21)$$

Коэффициенты разложения могут быть вычислены путем перемножения степенных рядов, дающих разложение функций $e^{\frac{xz}{2}}$ и $e^{-\frac{xz}{2}}$. Функция $w(x, z)$ называется производящей функцией для функции Бесселя с целым значком. С помощью разложения (21) можно суммировать

ряды, содержащие функции Бесселя. Если $\nu > -1$, то функция $J_\nu(x)$ имеет бесчисленное множество корней, причем они вещественны. Из разложения $J_\nu(x)$ следует, что корни $J_\nu(x)$ будут попарно одинаковыми по абсолютной величине и обратными по знаку, так что всегда достаточно рассматривать только положительные корни.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (22)$$

где k - некоторая постоянная, отличная от нуля. Введем вместо x новую неизвестную переменную $t = kx$, тогда уравнение (22) преобразуется в такое:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0,$$

а это есть уравнение Бесселя. Следовательно, функция $y = J_\nu(kx)$ будет решением уравнения

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(kx)}{dx^2} + x \frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + (k^2 x^2 - \nu^2)J_\nu(kx) = 0,$$

которое, разделив на x , можно написать в виде:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(kx)}{dx} \right] + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(kx) = 0.$$

Возьмем два различных значения k и напомним соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx} \right] + \left(k_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(k_1 x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx} \right] + \left(k_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(k_2 x) = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на $J_\nu(k_2 x)$, а второе на $J_\nu(k_1 x)$ и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{d}{dx} \left[x J_\nu(k_2 x) \frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx} - x J_\nu(k_1 x) \frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx} \right] = (k_1^2 - k_2^2) x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x). \quad (23)$$

Если теперь воспользоваться формулой (13), то можно убедиться, что выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, может быть разложено по степеням x , причем наименьшая степень x будет $x^{2(\nu+1)}$. Отсюда ясно, что это выражение будет обращаться в нуль при $x = 0$, если $\nu > -1$. Приняв это во внимание, проинтегрируем (23) от 0 до l . Тогда получим

$$\int_0^l x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x) dx = \frac{l[k_1 J'_\nu(k_1 l) J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l) J_\nu(k_1 l)]}{k_2^2 - k_1^2}, \quad (24)$$

где "′" обозначает дифференцирование по аргументу. При $l = 1$ эта формула принимает вид:

$$(k_2^2 - k_1^2) \int_0^1 x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x) dx = k_1 J'_\nu(k_1) J_\nu(k_2) - k_2 J'_\nu(k_2) J_\nu(k_1).$$

Пусть $k_1 = \frac{\mu_i}{l}$, $k_2 = \frac{\mu_j}{l}$, где μ_i и μ_j - два различных положительных корня уравнения

$$J_\nu(x) = 0, \quad (25)$$

тогда (24) дает

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = 0 \quad (i \neq j). \quad (26)$$

Пусть теперь $k = \frac{\mu}{l}$, где μ - положительный корень уравнения (25). Возьмем формулу (24), в которой положим $k_1 = k$, а k_2 будем считать переменным и стремящимся к k , тогда получим

$$\int_0^l x J_\nu(kx) J_\nu(k_2 x) dx = \frac{lk J'_\nu(kl) J_\nu(k_2 l)}{k_2^2 - k^2}.$$

При $k_2 \rightarrow k$ правая часть этого равенства становится неопределенной, так как числитель и знаменатель стремятся к нулю. Раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} J_\nu'^2(\mu).$$

Положив в формуле (19) $x = \mu$ и приняв во внимание, что μ есть корень уравнения (25), получим $J_\nu(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu)$. Таким образом, мы имеем следующее свойство ортогональности функций Бесселя на интервале $[0, l]$ с весом $\rho(x) \equiv x$:

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{l^2}{2} J_\nu'^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & i = j. \end{cases} \quad (27)$$

Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0 \quad (\nu > -1), \quad (28)$$

где α и β - заданные вещественные числа, причем $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \geq 0$. Пусть $k_1 = \frac{\mu_i}{l}$, $k_2 = \frac{\mu_j}{l}$, где μ_i, μ_j - различные корни уравнения (28), то есть

$$\begin{aligned}\alpha J_\nu(k_1 l) + \beta k_1 l J'_\nu(k_1 l) &= 0, \\ \alpha J_\nu(k_2 l) + \beta k_2 l J'_\nu(k_2 l) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно имеем

$$k_1 J'_\nu(k_1 l) J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l) J_\nu(k_1 l) = 0.$$

Следовательно, и в этом случае первая часть формулы (24) также равна нулю и мы имеем по-прежнему условие ортогональности (26).

Можно показать, что если $\nu > -1$ и $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \geq 0$, то все корни уравнения (28) вещественны.

Пусть $k = \frac{\mu}{l}$, где μ - положительный корень уравнения (28). Возьмем формулу (24), в которой положим $k_1 = k$ и k_2 будем считать переменным и стремящимся к k , тогда получим

$$\int_0^l x J_\nu(kx) J_\nu(k_2 x) dx = \frac{l[k J'_\nu(\mu) J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l) J_\nu(\mu)]}{k_2^2 - k^2}.$$

При $k_2 = k$ правая часть этого равенства становится неопределенной. Раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\int_0^l x J_\nu^2(kx) dx = \frac{l[\mu J_\nu'^2(\mu) - J'_\nu(\mu) J_\nu(\mu) - \mu J_\nu''(\mu) J_\nu(\mu)]}{2k}$$

или, в силу уравнения

$$J_\nu''(\mu) + \frac{1}{\mu} J_\nu'(\mu) + (1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}) J_\nu(\mu) = 0$$

придем после простых преобразований к формуле

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} [J_\nu'^2(\mu) + (1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}) J_\nu^2(\mu)],$$

и, наконец, приняв во внимание, что

$$J'_\nu(\mu) = -\frac{\alpha}{\beta \mu} J_\nu(\mu),$$

окончательно получим

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} (1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu^2}) J_\nu^2(\mu) \quad (29),$$

где μ - положительный корень уравнения (28).

Пусть произвольная функция $F(x)$ представима в виде ряда

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) (\nu > -1), \quad (30)$$

где $\{\mu_i\}_1^\infty$ - положительные корни уравнения (25), расположенные в порядке возрастания.

Для определения коэффициентов a_i умножим обе части разложения (30) на $xJ_\nu(\mu_i \frac{x}{l})$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$, считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда, приняв во внимание формулу (27), получим, что

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) F(x) dx. \quad (31)$$

Разложение (30), в котором коэффициенты определяются по формуле (31), называется разложением функции $F(x)$ в ряд Фурье-Бесселя.

В задачах математической физики часто встречаются следующие ряды по функциям Бесселя:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}), \quad (32)$$

где $\{\mu_i\}_1^\infty$ - положительные корни уравнения (28), расположенные в порядке возрастания. Коэффициенты b_i в силу ортогональности функций Бесселя и формулы (29) определяются по формуле:

$$b_i = \frac{2}{l^2 (1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu_i^2}) J_\nu^2(\mu_i)} \int_0^l x F(x) J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) dx. \quad (33)$$

Разложение (32), в котором коэффициенты b_i определяются по формуле (33), называется разложением функции в ряд Дини-Бесселя.

Если $\frac{\alpha}{\beta} + \nu = 0$, то x^ν ортогональна к функциям $J_\nu(\mu_i \frac{x}{l})$ с весом x на отрезке $[0, l]$, а поэтому разложение (32) должно быть заменено следующим:

$$F(x) = b_0 x^\nu + \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}). \quad (34)$$

В этом случае уравнение (28) можно записать в следующем виде: $J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$ или, в силу формулы (19), будем иметь

$$J_{\nu+1}(x) = 0, \quad (35)$$

то есть μ_1, μ_2, \dots будут корнями уравнения (35).

Для определения коэффициента b_0 умножим обе части разложения (34) на $x^{\nu+1}$ и проинтегрируем по x от 0 до l , считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда получим

$$\int_0^l x^{\nu+1} F(x) dx = \frac{b_0 l^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^l x^{\nu+1} J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) dx. \quad (36)$$

Так как имеет место формула (см. ниже формулу (49))

$$x^{\nu+1} J_{\nu}(x) = \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)],$$

то из нее имеем

$$x^{\nu+1} J_{\nu}(xt) = \frac{1}{t} \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(xt)].$$

Интегрируя последнее тождество, получим

$$\int_0^l x^{\nu+1} J_{\nu}(xt) dx = \frac{l^{\nu+1}}{t} J_{\nu+1}(tl).$$

Полагая здесь $t = \frac{\mu_i}{l}$, где μ_i - корень уравнения (35), будем иметь

$$\int_0^l x^{\nu+1} J_{\nu}(\mu_i \frac{x}{l}) dx = 0; \quad (37)$$

тогда из (36), в силу (37), вытекает, что

$$b_0 = \frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}} \int_0^l x^{\nu+1} F(x) dx. \quad (38)$$

Коэффициенты $b_i (i = 1, 2, \dots)$ определяются по прежним формулам (33), что непосредственно следует из равенства (37).

В заключение отметим, что функции Бесселя $J_{n+1/2}$ при целом n выражаются через элементарные функции.

З а д а ч и

18.1. Используя интегральное представление (10) для гамма-функции, доказать для нее рекуррентное соотношение

$$\Gamma(\mu+1) = \mu \Gamma(\mu). \quad (39)$$

С помощью (39) доказать, что

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in N. \quad (40)$$

У к а з а н и е. Для доказательства (39) применить к (10) интегрирование по частям. При получении (40) учесть, что $\Gamma(1) = 1$.

18.2. Зная, что $\Gamma(\mu)$ определяется формулой (10), доказать тождество

$$\Gamma(\mu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2\mu-1} du$$

и использовать его для вычисления $\Gamma(1/2)$.

У к а з а н и е. В интеграле (10) сделать замену $x = U^2$. Для вычисления $\Gamma(1/2)$ учесть, что $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

О т в е т: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

18.3. Вывести рекуррентную формулу (18).

Р е ш е н и е.

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(\nu+k) x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (41)$$

На основании (39), следует, что $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k)$, поэтому из (41) получим

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (42)$$

Сравнив правую часть (42) с разложением (13), будем иметь

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

откуда получаем (18).

18.4. Вычислить $\Gamma(n+3/2)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned} \Gamma(n+3/2) &= \Gamma(n+1+1/2) = (1/2+1)(1/2+2)\dots(1/2+n)\Gamma(1/2+1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{(2n+1)}{2} \Gamma(1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (43)$$

18.5. Вычислить $\Gamma(n+1/2)$, $n \in \mathbb{N}$.

У к а з а н и е. Можно использовать (43) или учесть, что

$$\Gamma(n+1/2) = \Gamma(n+1-1/2) = (-1/2+1)(-1/2+2)\dots(-1/2+n)\Gamma(1/2).$$

О т в е т:

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}. \quad (44)$$

18.6. Доказать формулу

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (45)$$

Р е ш е н и е. Из (13) и (43) следует

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+k}}{k! \Gamma(3/2+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} 2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1) \sqrt{\pi}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} 2^{1/2}}{\sqrt{x} \sqrt{\pi} (2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \end{aligned}$$

так как последняя сумма представляет собой разложение $\sin x$ в степенной ряд.

18.7. Доказать тождества:

$$a) J_0'(x) = -J_1(x), \quad (46)$$

$$b) [xJ_1(x)]' = xJ_0(x), \quad (47)$$

$$c) \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = xJ_1(x), \quad (48)$$

$$d) \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), p \in R. \quad (49)$$

Р е ш е н и е. а)

$$\begin{aligned} J_0'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{2^{2k} k! \Gamma(k+1)} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'+1} 2(k'+1) x^{2k'+1}}{2^{2k'+2} (k'+1)! \Gamma(k'+1)} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! \Gamma(k+1)} = -J_1(x). \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Для доказательства (47) выразить функцию $J_0(x)$ через функцию $J_1(x)$, используя дифференциальное уравнение Бесселя (1) при $\nu = 0$ и тождество (46). Интегрируя (47) с учетом того, что $J_1(0) = 0$, получим (48). Тождество (49) доказано в задаче 18.3.

18.8. Вычислить $\int_0^1 x J_0(\mu_i x) dx$, где μ_i - i -й корень функции Бесселя $J_0(x)$.

У к а з а н и е. Выразить функцию $J_0(x)$ через ее производные первого и второго порядка, используя уравнение Бесселя (1), и применить интегрирование по частям. Учесть также, что $J_1(0) = 0$.

$$\text{О т в е т: } \int_0^1 x J_0(\mu_i x) dx = -\frac{1}{\mu_i} J_0'(\mu_i).$$

18.9. Доказать тождество (16).

Р е ш е н и е. На основании (13) имеем

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-n+1)}. \quad (50)$$

Величина $k-n+1$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$ принимает целые отрицательные значения или нуль. Но в силу (15) в этом случае $\Gamma(k-n+1) = \infty$. Таким образом, первые члены разложения в (50) обратятся в нуль, и мы получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{k'=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k'} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k'}}{(k'!) \Gamma(k'-n+1)}$$

или, положив $k' = n + k$, получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} (\frac{x}{2})^{2k+n}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)} = (-1)^n J_n(x).$$

18.10. Просуммировать ряды с функциями Бесселя:

$$a) f(x) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x),$$

$$b) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x), \quad (51)$$

$$c) f(x) = J_0(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x), \quad (52)$$

$$d) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 J_{2n}(x). \quad (53)$$

Р е ш е н и е. а) Запишем разложение (21) при $z = 1$

$$e^{\frac{x}{2}(1-1)} = 1 = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] J_n(x). \quad (54)$$

Из (54) следует, что коэффициент при $J_n(x)$ равен нулю, если n - нечетное число, поэтому (54) можно переписать в виде:

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x),$$

откуда следует, что $f(x) = 1$.

д) Продифференцируем разложение (21) по z , а затем умножим полученное равенство на z . Эту операцию сделаем дважды.

$$\begin{aligned} z[e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}]' &= ze^{\frac{x}{2}(z-1/z)} \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2z^2} \right) = \\ &= e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} \left(\frac{zx}{2} + \frac{x}{2z} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(x) [z^n - (-1)^n z^{-n}], \\ z\{z[e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}]'\}' &= ze^{\frac{x}{2}(z-1/z)} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2z^2} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2z^2} \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n(x) [z^n + (-1)^n z^{-n}]. \end{aligned} \quad (55)$$

Полагая в (55) $z = 1$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 [1 + (-1)^n] J_n(x) = x^2,$$

откуда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 J_{2n}(x) = x^2,$$

так как коэффициент при $J_n(x)$ равен нулю, если n - нечетное число.

У к а з а н и е. Для суммирования рядов (51) и (52) необходимо записать разложение (21) при $z = i$ и приравнять вещественную и мнимую часть левой и правой части, при этом учесть, что $i^{2k} = i^{-2k} = (-1)^k$, $i^{2k+1} = i(-1)^k$, $i^{-\{2k+1\}} = -i(-1)^k$.

О т в е т: б) $f(x) = \frac{\sin x}{2}$,

с) $f(x) = \cos x$.

18.11. Разложить функцию $f(x) \equiv 1$ на отрезке $[0, 1]$ в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка.

Р е ш е н и е. $1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(\mu_i x)$, тогда в силу формулы (31) имеем:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{J_1^2(\mu_i)} \int_0^1 x J_0(\mu_i x) dx = -\frac{2}{J_1^2(\mu_i)} \frac{1}{\mu_i} J_0'(\mu_i) = \\ &= -\frac{2}{J_0^2(\mu_i)} \frac{1}{\mu_i} J_0'(\mu_i) = -\frac{2}{\mu_i J_0'(\mu_i)}, \end{aligned}$$

при этом мы использовали результат задачи 18.8 и формулу (46).

Д о м а ш н е е з а д а н и е

18.12. Вывести рекуррентные формулы (19) и (20).

У к а з а н и е. Вывод формулы (19) проводится аналогично выводу формулы (18), при этом рассматривается выражение $\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right]$. Вычитая из (18) (19), легко получить (20).

З а м е ч а н и е. Из хода доказательства (19) следует, что имеет место тождество

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x), p \in \mathbb{R}.$$

18.13. Доказать формулу

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

У к а з а н и е. Учесть формулу (44) и разложение

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k} (-1)^k}{(2k)!}.$$

18.14. Доказать тождество

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x). \quad (56)$$

У к а з а н и е. Для доказательства воспользоваться формулами (46)-(48) и проинтегрировать дважды по частям.

18.15. Разложить функцию $f(x) = x^\nu, \nu > -1$ в ряд по функциям $J_\nu(\mu_i x), i = 1, 2, \dots$ на промежутке $[0, 1]$, где μ_i - корни уравнения (25).

У к а з а н и е. При вычислении коэффициентов a_i разложения использовать формулу (31) и формулу (49).

О т в е т:

$$a_i = \frac{2}{\mu_i J_{\nu+1}(\mu - i)}.$$

З А Н Я Т И Е 19

Тема. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

19.1. Найти поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем, вызванные радиально-симметричным распределением отклонения и скоростей. Рассмотреть частный случай, когда колебания вызваны начальным отклонением

$$\varphi(r) = A\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad A - const,$$

а начальные скорости отсутствуют.

Р е ш е н и е. Мембрана - упругая, свободно изгибающаяся натянутая пленка. В состоянии покоя мембрана занимает круг радиуса r_0 на плоскости (x_1, x_2) , а затем, будучи выведена из этого состояния, начинает колебаться. Будем считать, что все точки мембраны движутся перпендикулярно плоскости (x_1, x_2) . Тогда в качестве функции, характеризующей процесс, возьмем функцию $U(x, t)$ переменных $x = (x_1, x_2)$ и t , которая определяет отклонение точки $x = (x_1, x_2)$ мембраны от положения равновесия в момент t . При фиксированном $x = x^0$ функция $U(x^0, t)$ дает закон колебания точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ мембраны, при этом $U_t(x_0, t), U_{tt}(x_0, t)$ определяют соответственно скорость и ускорение движущейся точки. Если зафиксировать $t = t_0$, то поверхность $U(x, t_0)$ дает форму колеблющейся мембраны в момент t_0 .

Вывод уравнения дается на лекции и проводится аналогично выводу уравнения поперечных колебаний струны. Уравнение имеет вид:

$$U_{tt} = a^2(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2}), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (1_0),$$

где T_0 – сила натяжения, ρ – поверхностная плотность мембраны. Если в состоянии покоя мембрана занимает в плоскости (x_1, x_2) круг $\bar{\Omega} = \{|x| \leq r_0\}$, ограниченный окружностью $\partial\Omega = |x| = r_0$, то, чтобы мембрана начала колебаться, нужно ее точкам придать либо начальные отклонения, либо начальные скорости, либо то и другое. Это значит, что заданы функции

$$U|_{t=0} = \varphi(x), U_t|_{t=0} = \psi(x), x \in \bar{\Omega}.$$

Так как край мембраны закреплен, то $U|_{\partial\Omega} = 0$. Трудность решения двумерного уравнения (1_0) существенно зависит от геометрической формы мембраны. В нашем случае мембрана в состоянии покоя занимает круг, поэтому введем полярные координаты $\varphi, r : x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$. Искомая функция перейдет в функцию $U(r, \varphi, t)$ (для удобства не меняем обозначения функции). На основании задачи 11.8 следует, что оператор Лапласа ΔU в полярных координатах будет иметь вид:

$$\Delta U \equiv U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi},$$

а значит уравнение (1_0) примет вид:

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}).$$

Начальные условия и граничное условие соответственно запишутся в виде:

$$U|_{t=0} = \varphi(r, \varphi), U_t|_{t=0} = \psi(r, \varphi), U|_{r=r_0} = 0.$$

Так как в нашем случае колебания мембраны вызваны радиально-симметричным распределением отклонения и скоростей, то величины начальных отклонений и скоростей зависят только от расстояния точки мембраны от ее центра. Иначе говоря, все точки окружности, концентрической с границей круга, в начальный момент времени имеют одни и те же скорости и отклонения. Тогда ясно, что в любой момент времени величина отклонения не будет зависеть от полярного угла φ и будет являться функцией $U(r, t)$. Это значит, что при любом фиксированном φ форма мембраны будет поверхностью вращения. При этом предположении колебание мембраны сводится к уравнению:

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r), 0 < r < r_0, t > 0, \quad (2_0)$$

начальным условиям

$$U|_{t=0} = \varphi(r), U_t|_{t=0} = \psi(r) \quad (3)$$

и граничному условию

$$U|_{r=r_0} = 0. \quad (4_0)$$

Как обычно в методе Фурье (см. занятие 11) строим частные решения уравнения (2₀), имеющие вид:

$$U(r, t) = R(r)T(t) \quad (5)$$

и удовлетворяющие (4₀). Подставляя (5) в (2₀) и разделяя переменные, получим

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (6)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r) = 0. \quad (7)$$

Подставляя (5) в граничное условие (4₀) и учитывая, что $T(t) \neq 0$, будем иметь

$$R(r_0) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, для определения $R(r)$ пришли к задаче на собственные значения (7), (8). Для решения уравнения (7) сделаем замену независимой переменной $p = \sqrt{\lambda}r$. Тогда (7) перейдет в уравнение Бесселя нулевого порядка ($\nu = 0$) относительно функции $R(\rho)$

$$\rho R''(\rho) + R'(\rho) + \rho R(\rho) = 0. \quad (9)$$

На основании вышеизложенного (см. занятие 18) общее решение уравнения (9) запишется в виде:

$$R(\rho) = c_1 J_0(\rho) + c_2 Y_0(\rho),$$

а значит, общее решение уравнения (7) в виде:

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где $J_0(\sqrt{\lambda}r)$ - функция Бесселя первого рода, а $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$ - функция второго рода. Из определения функции Бесселя второго рода следует, что $Y_0(\sqrt{\lambda}r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. В то же время ясно, что отклонение мембраны есть величина конечная, то есть в постановке задачи следует отметить, что $U(0, t) = O(1)$, а значит, из (5) следует, что $R(0) = O(1)$, поэтому положим $C_2 = 0$. Таким образом, $R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r)$. Из граничного условия (8) имеем

$$R(r_0) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r_0) = 0.$$

Тогда, учитывая, что $C_1 \neq 0$, получим уравнение, определяющее собственные значения задачи (7), (8):

$$J_0(\sqrt{\lambda}r_0) = 0. \quad (10)$$

Делая в (10) замену $\sqrt{\lambda}r_0 = \mu$, получим уравнение

$$J_0(\mu) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, собственными значениями задачи (7), (8) являются числа $\lambda_k = (\frac{\mu_k}{r_0})^2, k = 1, 2, \dots$, где μ_k - корни уравнения (11), то есть корни функции Бесселя. Следовательно, функции $R_k(r) = J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r)$ образуют систему собственных функций задачи (7), (8). При $\lambda = \lambda_k$ найдем решение уравнения (6), то есть уравнения

$$T_k''(t) + (\frac{a\mu_k}{r_0})^2 T_k(t) = 0. \quad (6_k)$$

Общее решение уравнения (6_k) имеет вид:

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{a\mu_k}{r_0}t + b_k \sin \frac{a\mu_k}{r_0}t,$$

где a_k, b_k - произвольные постоянные. Составим теперь ряд

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(r, t) \quad (12)$$

и подберем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялись начальные условия (3):

$$U(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r) = \varphi(r),$$

$$U_t(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{r_0} b_k J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r) = \psi(r).$$

Таким образом, мы пришли к задаче разложения функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ в ряд Фурье-Бесселя по функциям $J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r)$, поэтому на основании формулы (31) занятия 18 получим

$$a_k = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \varphi(r) J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r) dr,$$

$$b_k = \frac{2}{ar_0 \mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \psi(r) J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r) dr. \quad (13)$$

Подставляя коэффициенты a_k и b_k в ряд (12), получим решение задачи. Рассмотрим частный случай, когда $\varphi(r) = A(1 - \frac{r^2}{r_0^2}), \psi(r) \equiv 0$. Подставляя эти функции в формулу (13), получим

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2A}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr = \\
&= \frac{2A}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \left[\int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr - (1/r_0^2) \int_0^{r_0} r^3 J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr \right] = \\
&= \frac{2A}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \left\{ \frac{r_0^2 J_1^2(\mu_k)}{\mu_k} + \frac{r_0^2}{\mu_k^4} [(\mu_k^3 - 4\mu_k) J_1(\mu_k)] \right\} = \frac{8A}{J_1(\mu_k) \mu_k^3}, \\
b_k &= 0,
\end{aligned}$$

при этом мы воспользовались решениями задач 18.14 и 18.15.

19.2. Найти поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем, вызванные радиально-симметричным распределением отклонения и скоростей, причем окружающая среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости, то есть решить задачу:

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + (1/r)U_r) - 2\nu U_t, \quad 0 < r < r_0, t > 0, \quad U(r, 0) = \varphi(r), U_t(r, 0) = \psi(r),$$

$$U(r_0, t) = 0, U(0, t) = O(1).$$

Предположить, что коэффициент трения настолько мал, что $\nu < \frac{a\mu_k}{r_0}$, где μ_k - корень уравнения (11).

У к а з а н и е. См. занятие 12.

О т в е т:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr, \\
b_k &= \frac{1}{\omega_k} \left[\nu a_k + \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr \right], \\
U(r, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu t} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right),
\end{aligned}$$

где $\omega_k = \sqrt{\left(\frac{a\mu_k}{r_0}\right)^2 - \nu^2}$.

19.3. Дана неподвижная цилиндрическая трубка радиуса r_0 настолько длинная, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Исследовать малые радиальные колебания газа, заключенного в трубке.

Р е ш е н и е. Пусть трубка заполнена газом, который совершает малые колебания около своего положения равновесия. Тогда этот процесс будет характеризовать скорость движения газа $V(\vec{x}, t)$ в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент t . Пусть $U(x, t)$ - потенциал скоростей газа, то есть $\vec{V} = -gradU$, тогда, как известно, функция $U(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$U_{tt} = a^2(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + U_{x_3x_3}). \quad (14_0)$$

Рассмотрим так называемые радиальные колебания газа, которые образуются в том случае, когда начальные условия выражаются равенствами

$$U(r, 0) = \varphi(r), U_t(r, 0) = \psi(r), \quad (15)$$

где r - расстояние от колеблющейся частицы газа до оси цилиндра Ox_3 .

Так как рассматриваем радиальные колебания, то потенциал скоростей зависит только от r и t , поэтому, если ввести цилиндрические координаты r, φ, z ($x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, x_3 = z$), причем ось z направить по оси трубки, то уравнение (14₀) примет вид:

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r). \quad (16_0)$$

Цилиндрическая поверхность представляет собой твердую, неподвижную поверхность, поэтому нормальная составляющая скоростей равна нулю, что приводит к граничному условию

$$U_r|_{r=r_0} = 0. \quad (17_0)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (16₀) при начальных условиях (15) и граничном условии (17₀). Кроме того, так как по самому смыслу задачи искомое решение должно оставаться ограниченным во всех точках цилиндра, в том числе и на оси его, то есть при $r = 0$, то должно выполняться условие:

$$U(0, t) = O(1). \quad (18)$$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (16₀) ищем в виде:

$$U(r, t) = R(r)T(t), \quad (19)$$

и, следовательно,

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad (20)$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (17₀), будем иметь

$$\frac{dR}{dr}|_{r=r_0} = 0. \quad (22)$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид:

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y(\sqrt{\lambda}r).$$

Как и в задаче 19.1, в силу (18), имеем $C_2 = 0$, тогда граничное условие (22) дает

$$J'_0(\sqrt{\lambda}r) = 0, \quad (23)$$

или, пользуясь равенством $J'_0(x) = -J_1(x)$ (см. формулу (46) занятия 18), уравнение (23) можно заменить следующим

$$J_1(\sqrt{\lambda}r) = 0. \quad (24)$$

Как было отмечено (см. занятие 18), уравнение (24) имеет бесчисленное множество положительных корней. Таким образом, собственными значениями задачи (21), (22) являются числа $\lambda_k = (\frac{\mu_k}{r_0})^2, k = 1, 2, \dots$, где μ_k - корни уравнения $J_1(x) = 0$. Каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция $R_k(r) = J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r)$. Отметим, что $\lambda_0 = 0$ в данном случае является собственным значением, которому соответствует собственная функция $R_0(r) \equiv 1$.

При $\lambda = \lambda_k, k \neq 0$ общее решение уравнения (20) имеет вид:

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{\mu_k at}{r_0} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{r_0},$$

где a_k, b_k - произвольные постоянные.

При $\lambda_0 = 0$ $T_0(t) = a_0 + b_0 t$. В силу (19) получим, что функции

$$U_0(r, t) = a_0 + b_0 t, \\ U_k(r, t) = (a_k \cos \frac{\mu_k at}{r_0} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{r_0}) J_0(\frac{\mu_k r}{r_0}), k = 1, 2, \dots$$

удовлетворяют уравнению (16₀) и граничному условию (17₀) при любых $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots$. Далее, решение задачи ищем в виде ряда:

$$U(r, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{\mu_k at}{r_0} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{r_0}) J_0(\frac{\mu_k r}{r_0}).$$

Для выполнения начальных условий (15) необходимо, чтобы

$$\varphi(r) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\frac{\mu_k r}{r_0}), \quad (25)$$

$$\psi(r) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{r_0} b_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right). \quad (26)$$

Ряды (25), (26) представляют собой разложение заданных функций $\varphi(r), \psi(r)$ по функциям Бесселя $J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r)$ в интервале $[0, r_0]$. Но такого рода разложения нами отмечались ранее (см. формулу (32) занятия 18, причем здесь мы имеем тот случай, когда $\alpha = \nu = 0$.) Применив к рассматриваемому случаю формулы (33), (34) и (38) занятия 18, найдем значения коэффициентов a_k, b_k , а именно:

$$a_0 = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r \varphi(r) dr, a_k = \frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr,$$

$$b_0 = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r \psi(r) dr,$$

$$b_k = \frac{2}{a r_0 \mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr.$$

19.4. Круглая однородная мембрана радиуса r_0 , закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T_0 . В момент времени $t = 0$ к мембране приложено нормальное давление $P \equiv \text{const}$ на единицу площади. Показать, что колебание точек мембраны определяется выражением:

$$U(r, t) = \frac{p}{T_0} \left[\frac{1}{4} (r_0^2 - r^2) - 2r_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos \frac{a\mu_k}{r_0} t \right],$$

где μ_1, μ_2, \dots - положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r - \frac{1}{a^2} U_{tt} = -\frac{P}{T_0}, 0 < r < r_0, t > 0 \quad (27)$$

относительно функции $U(r, t)$ при условиях

$$U(r, 0) = 0, U_t(r, 0) = 0, \quad (28)$$

$$U(r_0, t) = 0, U(0, t) = O(1). \quad (29)$$

Так как уравнение (27) неоднородно, то для решения этой задачи применим метод собственных функций (см. занятие 13), то есть будем искать решение задачи в виде ряда

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{T}_k(t) R_k(r), \quad (30)$$

где $R_k(r) = J_0(\frac{\mu_k}{r_0}r)$ - собственные функции задачи о собственных значениях (7), (8), к которой приводится решение соответствующего однородного уравнения (20) при условиях (29). Собственные значения $\lambda_k = (\frac{\mu_k}{r_0})^2$, $k \in N$, μ_k - корни уравнения (11).

Предположим, что ряд (30) сходится равномерно и допускает двукратное дифференцирование по r и t , тогда (30) удовлетворяет (29) за счет выбора $R_k(r)$. Определим $\bar{T}_k(t)$ так, чтобы (30) удовлетворял (27) и (28). Подставляя (30) в (27), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\bar{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \bar{T}_k(t)] R_k(r) = -\frac{Pa^2}{T_0}, \quad (31)$$

при этом мы учли, что $R_k(r)$ является решением уравнения (7). Таким образом, мы пришли к задаче разложения заданной функции $F(r) = -\frac{Pa^2}{T_0}$ в ряд Фурье-Бесселя. (31) будет выполняться, если

$$\bar{T}_k'' + a^2 \lambda_k \bar{T}_k = A_k, \quad A_k = -\frac{2Pa^2}{T_0 J_1(\mu_k) \mu_k}, \quad (32)$$

причем для вычисления A_k мы использовали формулу (48) занятия 18. Подставляя (30) в (28), получим

$$\bar{T}_k(0) = 0, \quad \bar{T}_k'(0) = 0, \quad (33)$$

то есть для определения $\bar{T}_k(t)$ мы получили задачу Коши (32), (33) для обыкновенного дифференциального уравнения (32). Решив эту задачу, получим

$$\bar{T}_k(t) = \frac{2Pr_0^2}{T_0 \mu_k^3 J_1(\mu_k)} \left(\cos \frac{a\mu_k t}{r_0} - 1 \right). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (30), получим решение задачи. Задачу можно решить и другим способом, если воспользоваться замечанием к занятию 13. Будем искать решение задачи в виде

$$U(r, t) = V(r, t) + W(r),$$

где $W(r)$ удовлетворяет (27), (29), то есть задаче

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \frac{P}{T_0} = 0, \quad (35)$$

$$W(r_0) = 0, \quad W(0) = O(1) \quad (36)$$

для обыкновенного дифференциального уравнения (35). Перепишем уравнение (35) в виде $(W'r)' + \frac{P}{T_0}r = 0$, откуда, интегрируя, получим

$$W(r) = -\frac{P}{4T_0}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

В силу второго условия (36) имеем $C_1 = 0$. Используя первое условие (36), получим $C_2 = \frac{Pr_0^2}{4T_0}$. Таким образом, $W(r) = \frac{P}{4T_0}(r_0^2 - r^2)$. Тогда задача для $V(r, t)$ будет иметь вид:

$$V_{tt} = a^2(V_{rr} + \frac{1}{r}V_r),$$

$$V(r, 0) = -W(r), V_t(r, 0) = 0,$$

$$V(r_0, t) = 0, V(0, t) = O(1),$$

то есть мы получили задачу, рассмотренную в 18.1. Поэтому, повторяя те же самые выкладки, получим

$$V(r, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0^2}{J_1(\mu_k)\mu_k^3} \cos \frac{a\mu_k t}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right).$$

19.5. Решить уравнение

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r) + A \sin wt, 0 < r < r_0, t > 0, A - const \quad (37)$$

при условиях

$$U(r, 0) = 0, U_t(r, 0) = 0,$$

$$U(r_0, t) = 0, U(0, t) = O(1). \quad (38)$$

У к а з а н и е. Решение задачи следует искать в виде суммы $U(r, t) = V(r, t) + W(r, t)$, где $V(r, t)$ есть решение неоднородного уравнения (37), удовлетворяющее граничным условиям (38), причем $V(r, t)$ следует искать в виде $V(r, t) = R(r) \sin wt$, а $W(r, t)$ есть решение соответствующего однородного уравнения $W_{tt} = a^2(W_{rr} + 1/r W_r)$ при условиях $W(r, 0) = -V(r, 0), W_t(r, 0) = -V_t(r, 0), W(r_0, t) = 0, W(0, t) = O(1)$. Для определения $R(r)$ получим задачу:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \frac{\omega^2}{a^2}R(r) = -\frac{A}{a^2}, \quad (39)$$

$$R(r_0) = 0, R(0) = O(1), \quad (40)$$

то есть для определения решения соответствующего однородного уравнения имеем уравнение Бесселя при $\nu = 0$. Общее решение уравнения Бесселя имеет вид: $R_0(r) = C_1 J_0(\frac{\omega}{a}r) + C_2 Y_0(\frac{\omega}{a}r)$. Частное решение $R_1(r)$ уравнения (39) можно отыскивать в виде $R_1(r) = B$, где

$B - \text{const}$, тогда будем иметь $B = -\frac{A}{\omega^2}$. Таким образом,

$$R(r) = C_1 J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) + C_2 Y_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{A}{\omega^2}.$$

Так как $R(0) = O(1)$, полагаем $C_2 = 0$. Из второго условия (40) следует, что $C_1 = \frac{A}{\omega^2 J_0(\frac{\omega}{a}r_0)}$. Окончательно получим

$$R(r) = \frac{A}{\omega^2} \left[\frac{r J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}r_0\right)} - 1 \right].$$

При вычислении коэффициентов разложения $W(r, t)$ необходимо воспользоваться формулами (24) и (48) занятия 18.

О т в е т:

$$\begin{aligned} U(r, t) &= V(r, t) + W(r, t) = \\ &= \frac{A}{\omega^2} \left[\frac{r J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}r_0\right)} - 1 \right] \sin \omega t + \frac{2A\omega r_0^3}{a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) \sin \frac{\mu_k}{r_0}at}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)(\omega^2 r_0^2 - a^2 \mu_k^2)}. \end{aligned}$$

19.6. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса r_0 при заданном радиальном распределении температуры $\varphi(r)$ в начальный момент времени $t = 0$. Найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени, если на его боковой поверхности поддерживается температура, равная нулю. Рассмотреть частный случай, когда $\varphi(r) \equiv T - \text{const}$.

У к а з а н и е. См. занятие 15. Задача сводится к интегрированию уравнения

$$U_t = a^2(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r), 0 < r < r_0, t > 0$$

при начальном условии

$$U(r, 0) = \varphi(r)$$

и граничных условиях

$$U(0, t) = O(1), U(r_0, t) = 0.$$

О т в е т:

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 t}, \text{ где } a_k = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} \varphi(r) r J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr.$$

В частном случае: $a_k = \frac{2T_0}{\mu_k} \frac{1}{J_1(\mu_k)}$.

Д о м а ш н е е з а д а н и е

19.7. Найти решение уравнения

$$U_{tt} = \frac{a^2}{r}(rU_r)_r, 0 < r < l, t > 0,$$

удовлетворяющее начальным

$$U(r, 0) = A J_0\left(\frac{\mu_1}{l}r\right), U_t(r, 0) = 0, A - \text{const} \text{ и граничным}$$

$$U(0, t) = O(1), U(l, t) = 0$$

условиям. Здесь μ_1 - первый корень функции Бесселя $J_0(x)$.

О т в е т:

$$U(r, t) = A \cos \frac{a\mu_1 t}{l} J_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right).$$

19.8. Найти решение уравнения

$$U_{tt} = \frac{a^2}{r}(rU_r)_r, 0 < r < l, t > 0, \text{ удовлетворяющее начальным}$$

$$U(r, 0) = 0, U_t(r, 0) = r^2$$

и граничным условиям

$$U_r(l, t) = 0, U(0, t) = O(1)$$

У к а з а н и е. Учесть, что $\lambda_0 = 0$ является собственным значением. При вычислении коэффициентов разложения функции $U(r, t)$ воспользоваться формулой (38) занятия 18 и формулой (56), дающей решение задачи 18.14.

О т в е т:

$$U(r, t) = \frac{l^2}{2}t + \frac{4l^3}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) \sin \frac{a\mu_k t}{l}}{\mu_k^3 J_0(\mu_k)}$$

19.9. Найти решение уравнения

$$U_{tt} = \frac{a^2}{r}(rU_r)_r + A \cos \omega t, 0 < r < l, t > 0, \text{ удовлетворяющее начальным}$$

$$U(r, 0) = 0, U_t(r, 0) = 0$$

и граничным

$$U(l, t) = 0, U(0, t) = O(1) \text{ условиям.}$$

О т в е т:

$$U(r, t) = \frac{A}{\omega^2} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}r_0\right)} - 1 \right] \cos \omega t + 2Al^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) \cos \frac{\mu_k at}{l}}{\mu_k J_1(\mu_k)(\omega^2 l^2 - a^2 \mu_k^2)}.$$

19.10. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению

$$U_{tt} = \frac{a^2}{r}(rU_r)_r, 0 < r < l, t > 0, \text{ и условиям}$$

$$U(r, 0) = 0, U_t(r, 0) = 0, U(0, t) = O(1), U(l, t) = A \sin \omega t, A - \text{const.}$$

О т в е т:

$$U(r, t) = A \sin \omega t \frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}l\right)} + 2Aa\omega l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) \sin \frac{a\mu_k t}{l}}{J_1(\mu_k)(l^2 \omega^2 - \mu_k^2 a^2)}.$$

19.11. Исследовать радиальное распространение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса r_0 , боковая поверхность которого

поддерживается при постоянной температуре U_0 . Начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

О т в е т:

$$U(r, t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) e^{-\left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 t}, \text{ где } a_k = \frac{2U_0}{\mu_k J'_0(\mu_k)}.$$

З А Н Я Т И Е 20

Тема. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть функция $f(x)$ задана на прямой $(-\infty, \infty)$, причем непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка на любом конечном интервале. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$. Тогда функция

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (1)$$

называется интегральным преобразованием Фурье функции $f(x)$, а $\mathcal{K}(\lambda, \xi) = e^{i\lambda\xi}$ - его ядром. Функция $f(x)$ выражается через свое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (2)$$

Правая часть формулы (2) называется обратным преобразованием Фурье. Заметим при этом, что равенства (1), (2) можно поменять ролями, то есть они являются взаимно обратными.

Пусть теперь функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям, аналогичным вышеуказанным, тогда функции

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi, \quad \hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi \quad (3)$$

называются соответственно косинус-преобразованием и синус-преобразованием Фурье для функции $f(x)$, а функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \quad (4)$$

обратными к ним.

Для решения краевой задачи методом интегральных преобразований относительно функции $U(x, t)$ вводят по переменному x ее преобразование Фурье $\hat{U}(\lambda, t)$. Затем переходят к задаче для образа $\hat{U}(\lambda, t)$, причем эта задача является более простой, чем исходная. Найдя $\hat{U}(\lambda, t)$, с помощью обратного преобразования восстанавливают искомую функцию $U(x, t)$. При решении задачи на полупрямой в качестве ядра интегрального преобразования нужно брать такую функцию, которая удовлетворяет соответствующему однородному граничному условию задачи.

З а д а ч и

20.1. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (5)$$

$$U(x, 0) = 0, -\infty < x < \infty, \quad (6^0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_x = 0. \quad (7)$$

Р е ш е н и е. Условия (7) в практических задачах обычно выполняются. Считая t параметром, введем по переменному x преобразование Фурье функции $U(x, t)$ по формуле (1)

$$\hat{U}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (8)$$

Считая, что задача (5), (6⁰), (7) разрешима и $U(x, t)$ - ее решение, найдем уравнение и дополнительные условия, которым должна удовлетворять $\hat{U}(\lambda, t)$. Для этого заменим в тождестве (5) x на ξ , умножим обе части на

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda\xi}$$

и проинтегрируем по интервалу $(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_t(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\xi\xi}(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (9)$$

Преобразуем интегралы, входящие в (9).

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_t(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U e^{i\lambda\xi} d\xi \right] = \frac{\partial \hat{U}(\lambda, t)}{\partial t}. \quad (10)$$

К первому интегралу правой части (9) применим интегрирование по частям, при этом учтем (7)

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\xi\xi} e^{i\lambda\xi} d\xi &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} U_{\xi} e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\xi} e^{i\lambda\xi} d\xi = \\ &= -\frac{a^2 i\lambda}{\sqrt{2\pi}} U e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2 (i\lambda)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U e^{i\lambda\xi} d\xi = -a^2 \lambda^2 \hat{U}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (10), (11) в (9), получаем уравнение

$$\frac{\partial \hat{U}(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \lambda^2 \hat{U}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda, t), \quad (12)$$

где

$$\hat{f}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (13)$$

Полагая теперь в (8) $t = 0$ и учитывая (6⁰), получим

$$\hat{U}(\lambda, 0) = 0. \quad (14)$$

Итак, для $\hat{U}(\lambda, t)$ мы пришли к задаче (12), (14). Так как в (12) λ входит как параметр, то (12) можно переписать в виде

$$\frac{d\hat{U}(\lambda, t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \hat{U}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda, t), \quad (15)$$

то есть для определения $\hat{U}(\lambda, t)$ мы пришли к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (15) с условием (14). Итак, с помощью преобразования Фурье мы снизили число независимых переменных в дифференциальном уравнении и начальном условии на единицу, то есть упростили задачу.

Решая (15), (14) методом вариации постоянной, получим

$$\hat{U}(\lambda, t) = \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Применяя формулу (2) к $\hat{U}(\lambda, t)$ и учитывая (13), получим

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(\lambda, t) e^{-i\lambda x} d\lambda = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\lambda = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \cos \lambda(\xi-x) d\lambda, \quad (16)
\end{aligned}$$

при этом мы учли, что

$$e^{i\lambda(\xi-x)} = \cos \lambda(\xi-x) + i \sin \lambda(\xi-x).$$

Методом дифференцирования по параметру β можно вычислить интеграл

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2} \cos \beta \lambda d\lambda. \quad (17)$$

Действительно,

$$\frac{dJ}{d\beta} = - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\alpha \lambda^2} \sin \beta \lambda d\lambda = \frac{\sin \beta \lambda e^{-\lambda^2 \alpha}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha} J(\beta),$$

то есть получаем для $J(\beta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dJ}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} J,$$

интегрируя которое имеем

$$J(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (18)$$

Полагая в (17) $\beta = 0$, получим

$$C = J(0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (19)$$

Из (18) с учетом (19) будем иметь

$$J(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (20)$$

С помощью (20) получим из (16)

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau.$$

20.2. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_x = 0.$$

О т в е т :

$$U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

20.3. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), 0 < x < \infty,$$

$$U(0, t) = 0, 0 < t < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x = 0.$$

У к а з а н и е. Для решения задачи применить синус-преобразование Фурье

$$\hat{U}_s(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} U(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi,$$

тогда для $\hat{U}_s(\lambda, t)$ получим задачу

$$\frac{\partial \hat{U}_s(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \lambda^2 \hat{U}_s(\lambda, t) = 0, \hat{U}_s(\lambda, 0) = \hat{\varphi}_s(\lambda).$$

Найдя $\hat{U}_s(\lambda, t)$, с помощью формулы (4) получим $U(x, t)$.

О т в е т :

$$U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}] d\xi.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

20.4. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, 0 < x, t < \infty,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), 0 < x < \infty,$$

$$U_x(0, t) = 0, 0 < t < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x = 0.$$

У к а з а н и е. Применить косинус-преобразование Фурье (3).

О т в е т :

$$U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}] d\xi.$$

20.5. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, 0 < x, t < \infty,$$

$$U(x, 0) = 0, 0 < x < \infty,$$

$$U_x(0, t) = \varphi(t), 0 < t < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x = 0.$$

У к а з а н и е. Применить косинус-преобразование Фурье (3). Тогда для $\hat{U}_c(\lambda, t)$ получим задачу

$$\frac{\partial \hat{U}_c(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \lambda^2 \hat{U}_c(\lambda, t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t), \hat{U}_c(\lambda, 0) = 0.$$

О т в е т :

$$U = \frac{-a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

20.6. Найти решение задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, 0 < x, t < \infty,$$

$$U(x, 0) = 0, 0 < x < \infty,$$

$$U(0, t) = \varphi(t), 0 < t < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x = 0.$$

У к а з а н и е. Вычисление интеграла

$$J = \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \lambda \sin \lambda x d\lambda$$

свести к вычислению интеграла $J(\beta)$ (см. формулу (17)) путем интегрирования по частям.

О т в е т :

$$U = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

З А Н Я Т И Е 21

Тема. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА (СЛУЧАЙ 3-х ПЕРЕМЕННЫХ)

Пусть $\Omega \in R^3$, требуется найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению

$$\Delta U \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = -F(x) \quad (1)$$

и граничному условию

$$U|_{\partial\Omega} = f(y),$$

где $f \in C(\partial\Omega)$, $F \in C(\bar{\Omega})$. Если Ω - бесконечная область, то удовлетворяющую также условию $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0$. Если существует решение задачи $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, то искомая функция определяется формулой

$$U(\xi) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} f(y) ds_y + \int_{\Omega} G(x, \xi) F(x) dx, \quad (2)$$

где $G(x, \xi)$ - функция Грина задачи Дирихле для области Ω , $\frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y}$ - значение на $\partial\Omega$ производной по внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке y , то есть

$$\frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} = \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_y} \Big|_{\partial\Omega}.$$

Функцией Грина называется функция $G(x, \xi)$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \Omega$, обладающая свойствами:

$$1) G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|} + g(x, \xi),$$

где $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ по x , $\Delta_x g = 0$, в Ω при каждом $\xi \in \Omega$, причем для бесконечной области $g(x, \xi) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$;

$$2) G(y, \xi) = 0, y \in \partial\Omega \text{ при каждом } \xi \in \Omega; \quad (3)$$

3) $G(x, \xi)$ симметрична, то есть $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \Omega$.

Для ряда областей, границы которых являются плоскими или сферическими, функцию $G(x, \xi)$ можно построить методом электростатических изображений, основанным на физической интерпретации $G(x, \xi)$. Функцию $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|}$ можно рассматривать как потенциал электростатического поля, созданного единичным положительным зарядом $e = 1$, помещенным в точку $\xi \in \Omega$, тогда $g(x, \xi)$ рассматривают как потенциал поля, созданного точечными зарядами e_k ($k = 1, 2, \dots, n$) в точках ξ^k , расположенных вне Ω , то есть

$$g(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{|x - \xi^k|}, \xi^k \notin \bar{\Omega},$$

так как потенциал электростатического поля в области, свободной от зарядов, является гармонической функцией. Заряды e_k , расположенные вне Ω , надо выбирать таким образом, чтобы на поверхности $\partial\Omega$ потенциал суммарного поля, созданного зарядами $e = 1$ и e_k , был равен нулю, так как должно выполняться условие (3). Заряды e_k называются электростатическими изображениями заряда $e = 1$. Имеется и другая интерпретация. Считают, что $\partial\Omega$ - идеально проводящая заземленная поверхность, сделанная из металлического листа, а $g(x, \xi)$ - потенциал поля зарядов, индуцированных на $\partial\Omega$.

Таким образом, при построении $G(x, \xi)$ нужно уметь выбирать точки ξ^k и заряды e_k . В случае плоской границы точки ξ^k являются

зеркальными изображениями точки ξ относительно плоскостей, ограничивающих Ω , а в случае сферических границ применяется преобразование инверсии относительно сферы.

З а д а ч и

21.1. Найти решение задачи Дирихле для полупространства $\bar{\Omega} = \{x_3 \geq 0\}$ для уравнения Пуассона, то есть найти решение задачи

$$\Delta U = -F(x), \quad (1)$$

$$U|_{x_3=0} = f(y). \quad (4)$$

Р е ш е н и е. Построим функцию Грина $G(x, \xi)$ для полупространства $x_3 > 0$. Поместим в точку $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ заряд $e = 1$. В точку $\xi^1(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$, являющуюся зеркальным изображением ξ относительно плоскости $\partial\Omega = \{x_3 = 0\}$, поместим заряд $e_1 = -1$, тогда потенциал суммарного поля, созданного зарядами e и e_1 , будет равен

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{|x - \xi^1|} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{-1/2} - \\ &\quad - [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2]^{-1/2} \}, \end{aligned}$$

причем

$$G(y, \xi) = \frac{1}{4\pi} [|y - \xi|^{-1} - |y - \xi^1|^{-1}] = 0,$$

так как

$$|y - \xi| = |y - \xi^1|.$$

Запишем решение задачи по формуле (2). Для этого подсчитаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} &= - \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \\ &= - \frac{\xi_3}{2\pi [(y_1 - \xi_1)^2 + (y_2 - \xi_2)^2 + \xi_3^2]^{3/2}} = - \frac{\xi_3}{2\pi |y - \xi|^3}, \end{aligned} \quad (5)$$

при этом мы учли, что направление внешней нормали к $\partial\Omega$ противоположно положительному направлению оси x_3 .

Подставляя (5) в (2) и учитывая (4), получим решение задачи

$$U(\xi) = \frac{\xi_3}{2\pi} \int_{x_3=0} \frac{f(y) ds_y}{| \xi - y |^3} + \frac{1}{4\pi} \int_{x_3 \geq 0} F(x) \left[\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{|x - \xi^1|} \right] dx.$$

21.2. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона для шара $\bar{\Omega} = \{|x| \leq R\}$, то есть найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую (1) при $|x| < R$ и граничному условию

$$U|_{|x|=R} = f(y).$$

Построим функцию Грина для шара. В точку $\xi \in \Omega$ поместим заряд $e = 1$. Возьмем точку $\xi^1 = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi$, находящуюся в инверсии с точкой ξ относительно сферы $|x| = R$, то есть ξ и ξ^1 лежат на одном луче, исходящем из начала координат 0, причем

$$|\xi| |\xi^1| = R^2. \quad (6)$$

В точку ξ^1 поместим заряд e_1 , тогда суммарный потенциал поля, созданного зарядами $e = 1, e_1$, будет

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x - \xi|} + \frac{e_1}{|x - \xi^1|} \right].$$

Подберем величину заряда e_1 так, чтобы

$$G(y, \xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|y - \xi|} + \frac{e_1}{|y - \xi^1|} \right] = 0,$$

откуда получим

$$e_1 = -\frac{|y - \xi^1|}{|y - \xi|}. \quad (7)$$

Покажем, что правая часть (7) постоянна. Действительно, $\Delta y o \xi \sim \Delta y o \xi^1$, так как у них угол γ при вершине 0 - общий, а стороны на основании (6) пропорциональны. Из подобия треугольников вытекает пропорциональность других сторон.

$$\frac{|y - \xi^1|}{|y - \xi|} = \frac{R}{|\xi|}, \quad (8)$$

причем $\frac{R}{|\xi|} = \text{const}$, так как ξ - фиксировано. Учитывая (7) и (8), получаем искомую функцию Грина

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{R}{|\xi|} \frac{1}{|x - \xi^1|} \right],$$

так как она удовлетворяет (3) и имеет нужный вид. Имея $G(x, \xi)$ можно записать решение задачи. Для вычисления $\frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y}$ нужно учесть, что направление внешней нормали к сфере совпадает с направлением радиуса, поэтому если $x \in \vec{n}_y$, то $|x| = r$, $|x - \xi|^2 = r^2 + |\xi|^2 - 2r|\xi|\cos\gamma$,

$$|x - \xi^1|^2 = r^2 + |\xi^1|^2 - 2r|\xi^1|\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - |\xi|^2}{|\xi - y|^3}, \quad (9)$$

где $|\xi - y|^2 = R^2 + |\xi|^2 - 2R|\xi| \cos \gamma$.

Учитывая теперь (9), согласно (2) получаем решение задачи

$$U(\xi) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |\xi|^2}{|\xi - y|^3} f(y) ds_y + \frac{1}{4\pi} \int_{|x| \leq R} F(x) \left(\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{R}{|\xi|} \frac{1}{|x - \xi^1|} \right) dx.$$

21.3. Построить функцию Грина для полушара

$$\Omega = \{|x| < R, x_3 > 0\}.$$

О т в е т :

$$G(x, \xi) = G_0(x, \xi) - G_0(x, \xi^2),$$

где

$$G_0(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{R}{|\xi|} \frac{1}{|x - \xi^1|} \right] \quad (10)$$

(см. задачу 21.2), а ξ^2 - точка, симметричная точке ξ относительно плоскости $x_3 = 0$.

21.4. Построить функцию Грина для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.

О т в е т :

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + [x_3 - (2n + \xi_3)]^2\}^{-1/2} - \\ - \{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + [x_3 - (2n - \xi_3)]^2\}^{-1/2}].$$

Можно показать, что ряд сходится абсолютно и равномерно.

Д о м а ш н е е з а д а н и е

21.5. Записать решение задачи Дирихле для двугранного угла $\Omega = \{x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ для уравнения Лапласа.

О т в е т :

$$U = \frac{\xi_2}{2\pi} \int_{x_2=0, x_3 \geq 0} f(y) \left(\frac{1}{|\xi - y|^3} - \frac{1}{|\xi^2 - y|^3} \right) ds_y + \frac{\xi_3}{2\pi} \int_{x_3=0, x_2 \geq 0} f(y) \left(\frac{1}{|\xi - y|^3} - \frac{1}{|\xi^1 - y|^3} \right) ds_y,$$

где ξ^1, ξ^2 - точки, симметричные точке $\xi \in \Omega$ относительно плоскостей $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$ соответственно.

21.6. Записать решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для внешности шара $\Omega = \{|x| \geq R\}$.

О т в е т :

$$U = \frac{1}{4\pi R} \int_{|x|=R} \frac{|\xi|^2 - R^2}{|\xi - y|^3} f(y) ds_y.$$

21.7. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара

$$\bar{\Omega} = \{|x| \leq R, x_3 \geq 0\}.$$

У к а з а н и е. Учесть, что в данном случае

$$\partial\Omega = (|x| \leq R, x_3 = 0) \cup (|x| = R, x_3 > 0).$$

О т в е т :

$$U = \frac{\xi_3}{2\pi} \int_{|x| \leq R, x_3 = 0} f(y_1, y_2) \left[\frac{1}{|\xi - y|^3} - \frac{R^3}{|\xi|^3} \frac{1}{|\xi^1 - y|^3} \right] dy_1 dy_2 +$$

$$\frac{R^2 - |\xi|^2}{4\pi R} \int_{|x| = R, x_3 > 0} f(y) \left[\frac{1}{|\xi - y|^3} - \frac{1}{|\xi^2 - y|^3} \right] ds_y,$$

где ξ^1, ξ^2 - точки, симметричные точке ξ относительно сферы $|x| = R$ и плоскости $x_3 = 0$ соответственно.

21.8. Построить функцию Грина для четверти шара

$$\Omega = \{|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

О т в е т :

$G(x, \xi) = G_0(x, \xi) - G_0(x, \xi^2) + G_0(x, \xi^3) - G_0(x, \xi^4)$, где ξ^2 - точка, симметричная точке ξ относительно плоскости $x_3 = 0$, ξ^3, ξ^4 - точки, симметричные соответственно точкам ξ^1, ξ относительно плоскости $x_2 = 0$, а $G_0(x, \xi)$ определяется формулой (10).

З А Н Я Т И Е 22

Тема. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
(СЛУЧАЙ 2-х ПЕРЕМЕННЫХ)

Пусть область $\Omega \subset R^2$, требуется найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в Ω уравнению

$$\Delta U \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = -F(x) \quad (1)$$

и на кривой $\partial\Omega$ граничному условию

$$U|_{\partial\Omega} = f(y).$$

Если существует решение задачи $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, то оно определяется так же, как и при $n = 3$, формулой

$$U(\xi) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} f(y) ds_y + \int_{\Omega} G(x, \xi) F(x) dx, \quad (2)$$

где $G(x, \xi)$ - функция Грина задачи Дирихле для области Ω , имеющая вид

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} + g(x, \xi) \quad (3)$$

и обладающая всеми свойствами функции Грина в R^3 (см. занятие 21).

Для построения функции Грина при $n = 2$ можно также использовать метод электростатических изображений, но физический смысл отличен от случая $n = 3$. Если на прямой, проходящей через точку ξ ортогонально плоскости (x_1, x_2) , разместить положительные заряды с единичной плотностью (имеем бесконечно длинный линейный проводник), то эти заряды создадут плоскопараллельное (не зависящее от x_3), поле, потенциал которого в точке $x(x_1, x_2)$ равен $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi|}$. В дальнейшем для краткости будем говорить, что единичный положительный заряд помещен в точку ξ . Тогда $g(x, \xi)$ - потенциал поля единичных зарядов (положительных или отрицательных), расположенных вне Ω , причем потенциал поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в точку ξ^1 , равен $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi^1|}$.

В отличие от $n = 3$ заряды вне Ω берутся только единичные, поэтому с помощью этих зарядов можно добиться лишь того, чтобы потенциал суммарного поля на $\partial\Omega$ был постоянным. Вычитая эту постоянную, получим функцию Грина.

Если Ω - односвязная область с достаточно гладкой границей, то при $n = 2$ для построения функции Грина очень удобным является метод конформного отображения, основанный на связи гармонических функций и аналитических функций комплексного переменного.

Введем комплексную плоскость \mathbb{C} , на которой точке $x(x_1, x_2) \in R^2$ соответствует точка $z = x_1 + ix_2$. Тогда точке $\xi(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ будет соответствовать точка $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$. Пусть $w = \varphi(z, \zeta)$ - аналитическая функция комплексного переменного z , конформно отображающая область $\bar{\Omega}$ на единичный круг, причем так, что $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$. Тогда функция Грина имеет вид

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi(z, \zeta)|}.$$

Покажем, что функция $G(z, \zeta)$ имеет вид (3). Действительно, так как $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$, то $\varphi(z, \zeta)$ можно представить в виде

$$\varphi(z, \zeta) = (z - \zeta)\varphi_1(z, \zeta),$$

где $\varphi_1(z, \zeta) \neq 0, \infty$, поэтому имеем

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi_1(z, \zeta)|}.$$

Но $|z - \zeta| = |x - \xi|$, а $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi_1(z, \zeta)|} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varphi_1(z, \zeta)} \right]$ - гармоническая функция двух переменных x_1, x_2 как вещественная часть аналитической функции $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varphi_1(z, \zeta)}$.

Покажем теперь, что

$$G(z, \zeta) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

Так как при отображении $w = \varphi(z, \zeta)$ точкам $\partial\Omega$ соответствуют точки единичной окружности $|w| = 1$, то $|\varphi(z, \zeta)| |_{\partial\Omega} = 1$, поэтому выполняется (4).

Замечание. Пусть $\omega = \omega(z)$ - функция, конформно отображающая Ω на $|\omega| < 1$, тогда функция

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{1 - \overline{\omega(z)}\omega(\zeta)}.$$

З а д а ч и

22.1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для полуплоскости $\bar{\Omega} = \{x_2 \geq 0\}$, если

$$U |_{x_2=0} = \begin{cases} 1, & x_1 \geq a \\ 0, & x_1 < a \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Построим функцию Грина методом электростатических изображений. Поместим в точку $\xi(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ заряд $e = 1$. В точку $\xi^1(\xi_1, -\xi_2)$ поместим заряд $e = -1$, тогда

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{|x - \xi|} - \ln \frac{1}{|x - \xi^1|} \right],$$

$$\frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} = - \frac{\partial G}{\partial x_2} |_{x_2=0} =$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} [\ln |x - \xi|^2 - \ln |x - \xi^1|^2] |_{x_2=0} = - \frac{1}{\pi} \frac{\xi_2}{(y_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим решение задачи

$$U(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\xi_2 dy_1}{(y - \xi_1)^2 + \xi_2^2} = 1/2 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - a}{\xi_2}.$$

22.2. Найти решение уравнения Лапласа в первом квадранте $\bar{\Omega} = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ со следующим граничным условием

$$U|_{x_1=0} = a, U|_{x_2=0} = b, a, b - \text{const.}$$

Построим функцию Грина $G(z, \zeta)$ методом конформного отображения. Найдем функцию $w = \varphi(z, \zeta)$, дающую отображение Ω на круг $|w| < 1$, причем такую, что точка $\zeta \in \Omega$ переходит в центр круга $w = 0$, то есть $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$. Отобразим сначала Ω на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w_1 = z^2$, при этом точка $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ перейдет в точку $\zeta_1 = \zeta^2$. Построим теперь функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на единичный круг, причем так, чтобы $\zeta_1 \rightarrow 0$. Эта функция имеет вид:

$$w = \frac{w_1 - \zeta_1}{w_1 - \bar{\zeta}_1} = \frac{z^2 - \zeta^2}{z^2 - \bar{\zeta}^2},$$

тогда искомая функция Грина запишется в виде

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - \bar{\zeta}^2}{z^2 - \zeta^2} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \left| \frac{(z - \bar{\zeta})(z + \bar{\zeta})}{(z - \zeta)(z + \zeta)} \right|^2.$$

Учитывая теперь, что на полупрямых $\{x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ и $\{x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$ соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} &= -\frac{\partial G}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}, \\ \frac{\partial G(y, \xi)}{\partial n_y} &= -\frac{\partial G}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \end{aligned}$$

по формуле (2) получим решение задачи

$$U(\xi) = \frac{2}{\pi} \left(a \operatorname{arctg} \frac{\xi_2}{\xi_1} + b \operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{\xi_2} \right).$$

22.3. Найти решение уравнения (1) для области $\Omega = \{|x| > R\}$ при граничном условии $U|_{|x|=R} = f(y)$.

У к а з а н и е. Построить функцию Грина методом электростатических изображений.

О т в е т :

$$U(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|x|=R} \frac{|\xi|^2 - R^2}{|\xi - y|^2} f(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq R} F(x) \ln \frac{|\xi|}{R} \frac{|x - \xi^1|}{|x - \xi|} dx, \xi^1 = \frac{R^2}{|\xi|^2} \xi.$$

22.4. Построить функцию Грина для полукруга $\Omega = \{|x| < R, x_2 > 0\}$

О т в е т :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \bar{\zeta}| |R^2 - z\bar{\zeta}|}{|z - \zeta| |R^2 - z\zeta|}.$$

Д о м а ш н е е з а д а н и е

22.5. Построить функцию Грина для четверти круга

$$\Omega = \{|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

О т в е т :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^2 - \bar{\zeta}^2| |R^4 - (z\bar{\zeta})^2|}{|z^2 - \zeta^2| |R^4 - (z\zeta)^2|}.$$

22.6. Найти решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta U = 0, 0 < x_2 < \pi$ с граничным условием $U|_{\partial\Omega} = f(y)$.

У к а з а н и е. Построив функцию Грина методом конформного отображения, получим $G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|e^z - e^{\bar{\zeta}}|^2}{|e^z - e^{\zeta}|^2}$.

О т в е т :

$$U = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{\pi} e^{\xi_1} \sin \xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1, k\pi) e^{-y_1} dy_1}{e^{2(\xi_1 - y_1)} - 2e^{\xi_1 - y_1} \cos(\xi_2 - k\pi) + 1}.$$

22.7. Построить функцию Грина для полуполосы $\Omega = \{0 < x_2 < \pi, x_1 > 0\}$

О т в е т :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\zeta}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \zeta} \right|.$$

22.8. Найти решение уравнения (1) в круге $\Omega = \{|x| < R\}$ при граничном условии $U|_{|x|=R} = f(y)$.

О т в е т :

$$U = \frac{1}{2\pi R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |\xi|^2}{|\xi - y|^2} f(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq R} F(x) \ln \frac{|\xi|}{R} \frac{|x - \xi^1|}{|x - \xi|} dx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 2003. - 398 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 710 с.
5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. - М.: Наука, 1975. - 127 с.
6. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Наука, 2001. - 271 с.
7. Сироткина А.А. Методические разработки практических занятий по методам математической физики. - М.: МГПИ, 1978. - 72 с.
8. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ, 1982. - 48 с.
9. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ, 1983. - 38 с.
10. Салехова И.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ 1990. - 38 с.
11. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ, 1999. - 64 с.
12. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ, 2007. - 148 с.