

13.01

Алгебра логики (Булева алгебра)

Предложение, про которое можно точно сказать, правда это или нет (истина или ложь), называю(е)м высказыванием.

$5 > 6$ $x + 5 = 7$
 высказывание не высказывание
 ложное истинное
 $X = "2 + 2 = 4" = 1$
 $Y = "Сталина 199 - Петербург" = 0$
 Да Нет
 True False
 1 0

Операции с логич. переменными

Таблица истинности

~2

~3

~1

~4

~5

$$X * Y \Leftrightarrow X \wedge Y, X \text{ and } Y$$

$$X \wedge Y \quad \text{Конъюнкция}$$

$$X \vee Y \quad \text{Дизъюнкция}$$

$$X + Y \Leftrightarrow X \vee Y, X \text{ or } Y$$

$$X \vee Y \quad \text{Дизъюнкция}$$

$$X \parallel Y \quad \text{Логическое сложение}$$

$$\overline{X} \Leftrightarrow \text{не } X, \text{ not } X$$

$$\neg X \quad \text{Отрицание}$$

$$\bar{X} \quad \text{?} = ?$$

$$X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \text{из } X \text{ следует } Y$$

$$X \Rightarrow Y \quad \text{Импликация}$$

$$X \Rightarrow Y \quad \text{следствие}$$

$$X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow X \text{ равно } Y$$

$$X \equiv Y \quad X \text{ тождественно } Y$$

$$X = Y \quad \text{Эквивалентность}$$

X	Y	$X * Y$	$X + Y$	\overline{X}	\overline{Y}
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

X	Y	$X \Rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Приоритеты логических операций: инверсия (отрицание), конъюнкция (логическое умножение), дизъюнкция (логическое сложение), импликация (следствие), эквивалентность.

Законы логических операций (де Моргана)

$$1. \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \quad 2. \overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\overline{a} \vee \overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{a} \vee \overline{b}$	$a = b$	$\overline{a \wedge b} \wedge \overline{a \vee b}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1

Еще законы

$$3. \underline{a \rightarrow b = \overline{a} \vee b}$$

$$4. (a = b) \Leftrightarrow a \wedge b \vee \overline{a} \wedge \overline{b}$$

$$5. a \vee \overline{a} = 1$$

$$a \wedge \overline{a} = 0$$

$$6. (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c = a \vee (b \vee c)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$7. a \vee b = b \vee a$$

$$b \wedge a = b \wedge a$$

$$8. a \vee a \vee ? = a \vee ?$$

$$a \wedge a \wedge ? = a \wedge ?$$

Пример задачи 2

$$(w \vee \overline{x}) \wedge (w \equiv \overline{y}) \wedge (w \rightarrow z) = 1$$

w	y	z	x	F
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

$$\begin{cases} w \vee \overline{x} = 1 \\ w \equiv \overline{y} = 1 \\ w \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w \vee \overline{x} = 1 \\ w \equiv \overline{y} = 1 \\ \overline{w} \vee z = 1 \end{cases}$$

Пусть $w = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z \text{ любое} \end{cases}$$

Пусть $x = 0$:

$$\begin{cases} w = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Пусть $y = 0$:

$$\begin{cases} w = 1 \\ z = 1 \\ x \text{ любое} \end{cases}$$

Пусть $z = 0$:

$$\begin{cases} w = 0 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Пусть $w = 1$, тогда x любое, $y = 0$, $z = 1$

Пусть $x = 1$, тогда $w = 1$, $y = 0$, $z = 1$

w	x	y	z
1	1	0	1
1	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1

Пусть $y = 1$, тогда $w = 0$

Пусть $z = 1$, тогда w любое

$$w = 0$$

$$w = 1$$

(wyzx)

Задача 2 ~ 9788

$$(\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) = 1$$

$$\begin{cases} \overline{x} \wedge y \wedge z = 1 \\ \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} = 1 \\ \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

x	y	z
0	1	1
0	1	0
0	0	0

y	x	z	F
0	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1