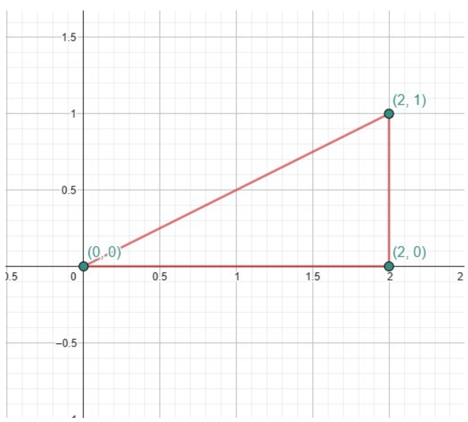
RPIS zadanie 2

Kornel Orawczak 346010

April 2025

1 Rozwiązanie

Dla mojego numeru indeksu $n = 2$ oraz $m = 1$, zatem punkty wyznaczające obszar zmiennych losowych X oraz Y to trójkąt o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$. Przyjmujemy, że gęstość zmiennej (X, Y) na tym obszarze wynosi $f(x, y) = C$, gdzie C to stała.



Zauważmy, że tak na prawdę ten trójkąt to obszar ograniczony przez proste $y = x/2$, $x = 2$, $y = 0$, zatem:

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}$$

Wiemy, że na tym trójkącie gęstość musi się całkować do 1, więc możemy to C wyznaczyć:

$$\int_0^2 \int_0^{x/2} C \, dy \, dx = 1$$

$$\int_0^2 C \left(\int_0^{x/2} dy \right) dx = \int_0^2 C \cdot \frac{x}{2} dx = C \cdot \int_0^2 \frac{x}{2} dx = C \cdot \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 = C \cdot 1$$

$$\Rightarrow C = 1$$

Zatem:

$$f(x,y) = 1 \quad \text{dla } (x,y) \text{ w trójkącie}$$

Teraz zajmijmy się celem zadania czyli wyznaczeniem gęstości $f_T(t)$ zmiennej losowej $T = X + 2Y$.

Zakres zmiennej T

Zastanówmy się jakie będą najmniejsze i największe możliwe wartości zmiennej T:

$$T_{\min} = 0 + 2 \cdot 0 = 0, \quad T_{\max} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\Rightarrow T \in [0,4]$$

Zmiana zmiennych

Chcąc przetransferować gęstość (x,y) na gęstość nowej zmiennej T wprowadzamy nowe zmienne:

$$T = X + 2Y, \quad U = X$$

Zatem:

$$X = U, \quad Y = \frac{T-U}{2}$$

Teraz możemy policzyć Jakobian takiej transformacji:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |\det J| = \frac{1}{2}$$

Zatem gęstość po transformacji:

$$f_{T,U}(t,u) = f(x,y) \cdot |detJ| = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zakres zmiennych (t,u)

Z warunków trójkąta:

$$0 \leqslant x = u \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y = \frac{t-u}{2} \leqslant \frac{u}{2}$$

$$0 \leqslant \frac{t-u}{2} \leqslant \frac{u}{2} \Rightarrow 0 \leqslant t-u \leqslant u \Rightarrow u \leqslant t \leqslant 2u$$

Zatem:

$$u \in [0,2], \quad t \in [u, 2u]$$

Gęstość marginalna $f_T(t)$

Jako że

$$f_T(t) = \int_{u=t/2}^{min(t,2)} f_{T,U}(t,u)du$$

(gdzie przedziały całkowania wynikają z nierówności $\frac{t}{2} <= u <= t$ oraz $0 <= u <= 2$), to rozpatrzmy przypadki:

i) Dla $t \in [0,2]$:

$$f_T(t) = \int_{u=t/2}^{t} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \cdot (t - t/2) = \frac{1}{4}t$$

ii) Dla $t \in [2,4]$:

$$f_T(t) = \int_{u=t/2}^{2} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \cdot (2 - t/2) = \frac{1}{4}(4 - t)$$

Zatem ostatecznie gęstość zmiennej $T = X + 2Y$ ma postać:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t & \text{dla } t \in [0,2] \\ \frac{1}{4}(4-t) & \text{dla } t \in [2,4] \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$