Rozwiązywanie układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A(n \times n)$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną

Kornel Tłaczała

8 stycznia 2024

Projekt nr 2

1 Opis probelmu

Cel projektu

Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie dodatnio określoną macierzą symetryczną postaci:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad \wedge \quad n = 2p$$

Zadaniem jest rozwiązać układ równań liniowych $Ax = b$ korzystając z blokowego rozkładu UDU^T macierzy A ($A = UDU^T$).

Metoda rozwiązania

Jeżeli przyjmiemy, że U jest macierzą o postaci:

$$U = \begin{bmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

oraz D jest macierzą o postaci:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

To otrzymujemy:

$$A = UDU^T$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ U_{12}^T & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11} & U_{12} \cdot D_{22} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ U_{12}^T & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11} + U_{12} \cdot D_{22} \cdot U_{12}^T & U_{12} \cdot D_{22} \\ D_{22} \cdot U_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix}$$