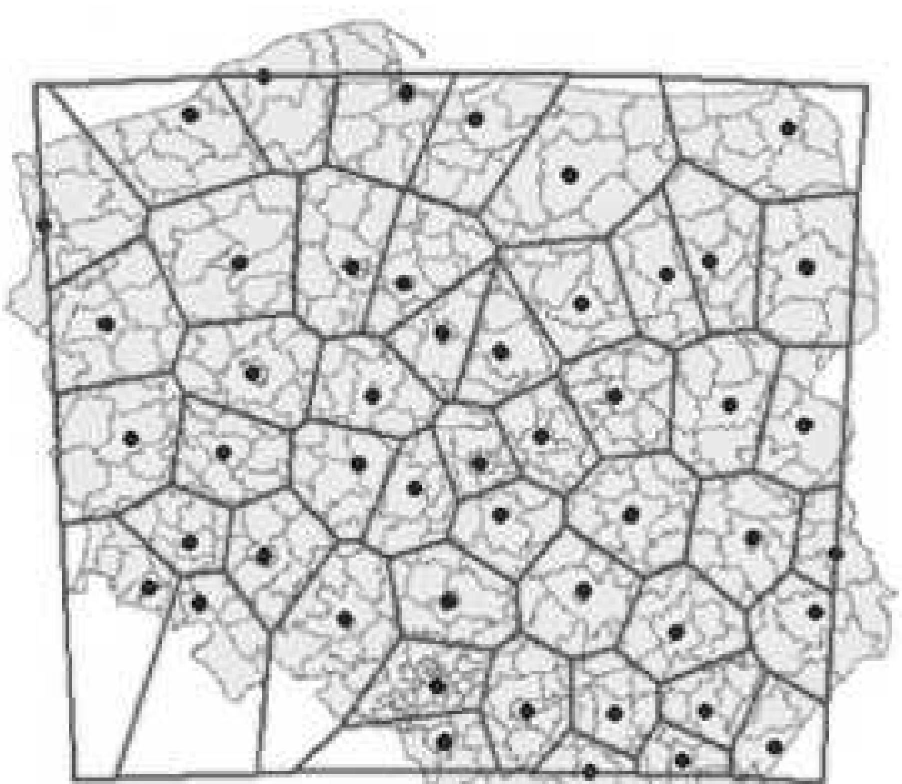
Diagramy Voronoi

Piotr Janczyk



Spis treści

1 Wstęp

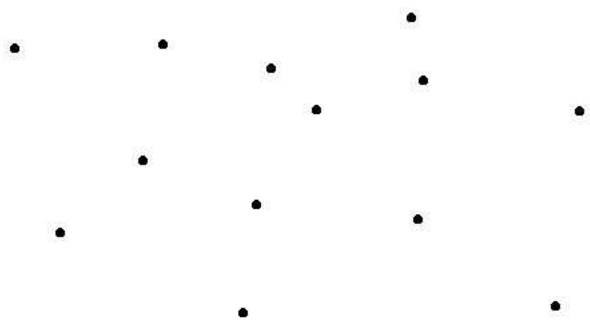
1.1 Pojęcia podstawowe

Dane wejściowe Zbiór punktów $S = \{P_1, ..., P_n\}$.

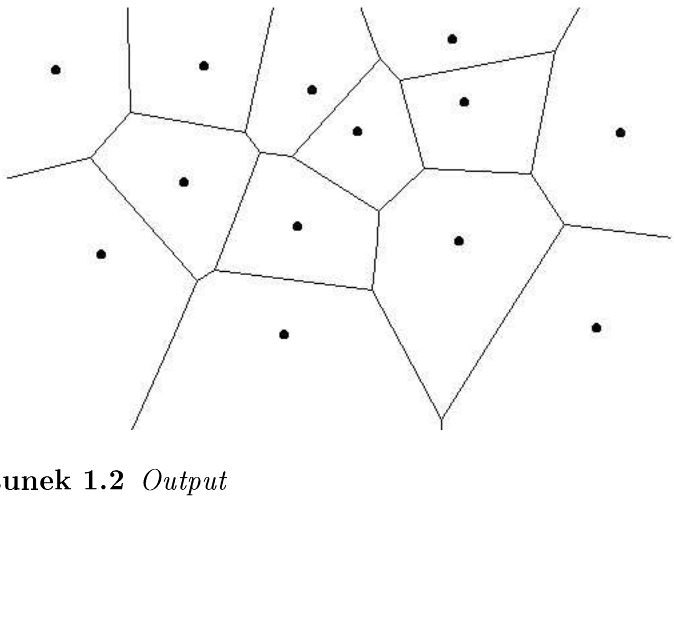
Opis problemu: Dekompozycja przestrzeni na obszary wokół każdego punktu w taki sposób, że wszystkie punkty z rejonu otaczającego P_i są bliżej niego niż jakiegokolwiek innego punktu ze zbioru S .

Dane wyjściowe Zbiór wierzchołków i krawędzi należących do diagramu Voronoi.

Innymi słowy:
Diagram Voronoi reprezentuje rejon wpływów wokół każdego z danych punktów. Jeżeli te położenia reprezentują sobą lokalizację np. stacji benzynowej, to diagram Voronoi dokonuję podziału przestrzeni na komórki wokół każdej ze stacji. Dla każdej z osób mieszkających w pojedynczej komórce pojęcie stacja benzynowa określa najbliższe miejsce, gdzie można zatankować.



Rysunek 1.1 *Input*



Rysunek 1.2 *Output*

1.2 Jakie są algorytmy

Możemy wyróżnić 2 rodzaje algortymów służacę do znajdowania diagramów Voronoi.

Pełny przegląd: brutalny algorytm, który wyznacza dla każdych dwóch punktów ich symetralną i następnie wykreśla te, które nie spełniaja warunków diagramu Voronoi. Złożoność tego algorytmu wynosi $O(n^2)$

Algorytmy geometryczne: przykładem jest algortym Fortuny, o złożoności czasowej równej $O(n \log n)$.

Podczas dalszych rozważań zajmę się jedynie algortymem Fortuny, którego poprawność została udowodniona. Złożoność tego algorytmu, wynika ze złożoności sortowania n punktów należących do P względem jednej z współrzędnych.

1.3 Definicje

Oznaczmy:

- Diagram Voronoi zbioru P przez $Vor(P)$.
- Komórkę z Vor(P), do której należy punkt p_i przez $V(p_i)$ i nazywamy komórką Voronoi punktu p_i.
- Największy okrąg o środku w punkcie q i nie zawierające w swoim *wnętrzu* punktów ze zbioru P przez $C_p(q)$
- Odległość Euklidesowa między dwoma punktami p i q poprzez $dist(p, q)$. Na płaszczyźnie mamy

$$dist(p, q) := \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}. \tag{1}$$

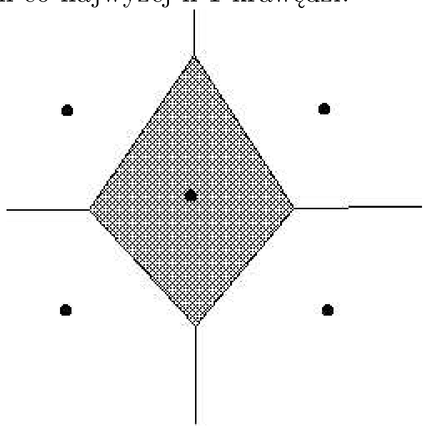
Niech $P := \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ będzie zbiorem n punktów na płaszczyznie. Definiujemy Diagram Voronoi zbioru P jako podzial płaszczyzny na n komórek, po jednym punkcie ze zbioru P w każdej z tą własnością, że punkt q leży w komórce $V(p_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $dist(q, p_i) < dist(q, p_j)$ dla każdego $p_j \in P$, gdzie $i \neq j$.

2 Zaczynamy

Przyjrzyjmy się bliżej diagramowi Voronoi. Na początku rozpatrzmy pojedyńczą komórkę i jej strukturę. Dla dwóch punktów p i q definujemy symetralną z p i q jako prostą prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka $\overline{pq}$. Symetralna ta dzieli płaszczyznę na 2 półpłaszczyzny. Przez zapis h(p,q) rozumiemy półpłaszczyznę zawierającą punkt p, a h(q,p) oznacza półpłaszczyznę zawierającą punkt q.
Zauważmy, że $r \in h(p,q) \iff dist(r,p) < dist(r,q)$. Bezpośrednio z tego wynika następujący fakt.

Fakt 2.1 $V(p_i) = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} h(p_i, p_j)$.

Stąd $V(p_i)$ jest polem (nie koniecznie) ograniczonym przez n-1 półpłaszczyzn mającym co najwyżej n-1 krawędzi.



Rysunek 2.1

Jak wygląda kompletny Diagram Voronoi? Jest to płaszczyzna podzielona na komórki. Komórki są utworzone przez ograniczające je odcinki lub półproste zawarte w symetralnych odpowiednich punktów.

Twierdzenie 2.1 *Niech P będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Jeżeli wszystkie są współliniowe, to Vor(P) składa się z n-1 prostych równoległych. W przeciwnym wypadku, Vor(P) jest połączone i jego krawędzie są odcinkami lub półprostymi.*

Twierdzenie 2.2 *Dla $n \geqslant 3$, wierzchołków w Diagramie Voronoi zbiowru n punktów na płaszczyznie jest co najwyżej $2n - 5$ i krawędzi jest nie więcej niż $3n - 6$.*

W dowodzie tego twierdzenia korzystamy ze znanego twierdzenia Eulera dla grafów płaskich.

Twierdzenie 2.3 *Dla Diagramu Voronoi Vor(P) dla zbioru punktów P zachodzi:*

- *Punkt q jest wierzchołkiem w Vor(P) wtedy i tylko wtedy gdy $C_p(q)$ zawiera trzy lub więcej punktów ze zbioru P na obwodzie.*
- *Symetralna odcinka $\overline{p_i p_j}$ zawiera krawędź należącą do Diagramu wtedy i tylko wtedy gdy do tej symetralanej należy taki punkt q, że na brzegu okręgu $C_p(q)$ leżą punkty p_i oraz p_j i są to jedyne punkty ze zbioru P należące do brzegu tego okręgu.*

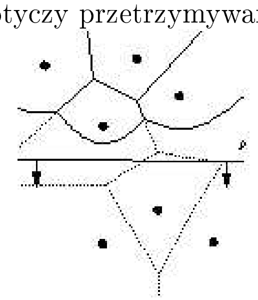
3 Wyznaczanie Diagramu Voronoi

3.1 Wprowadzenie do algorytmu

Algorytm – powszechnie znany jako algorytm Fortuny - od nazwiska autora – wyznacza Diagram Voronoi w czasie $O(n \log n)$. Złożoność tego algorytmu wynika ze złożoności algorytmu sortującego n liczb. Bowiem problem wyznaczenia Vor(P) można sprowadzić do problemu sortowania n liczb rzeczywistych. Zatem jakikolwiek algorytm, oparty na sortowaniu według jakiejkowiek współrzędnej punków bazowych, rozwiązujący nasz problem działa w czasie $\Omega(n \log n)$.

Strategią algorytmu jest przesuwanie poziomej prostej (miotły) z góry do dołu płaszczyzny. Miotła jest pewną informacją o strukturze, którą należy w odpowiedni sposób wykorzystać. Mówiąc dokładniej, informacja o podziale naszej płaszczyzny jest przechowywana w miotle. Gdy miotła przesuwa się na dół informacja w niej zawarta nie zmienia się, z wyjątkiem specjalnych punktów - **punktów zdarzeniowych**.

Spróbujmy w praktyce skorzystać z powyższej strategii wyznaczania diagramu Voronoi dla zbioru punktów $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Zgodnie z zamysłem prostej zamiatającej (miotły), przesuwamy nasza poziomą prostą l z góry na dół przez płaszczyznę. Zamysł dotyczy przetrzymywania przecięć diagramu z prostą zamiatającą.



Rysunek 3.1

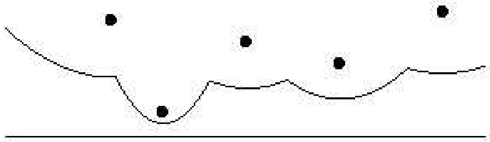
Jak widać na rysunku, niestety nie jest to łatwe, ponieważ część $Vor(P)$ powyżej prostej l zależy nie tylko od punktów p_i, które leżą powyżej prostej l, ale również od tych poniżej prostej zamiatającej. Kiedy miotła dojdzie do punktu najwyższego z komórki $V(p_i)$, to taki przypadek nie zostanie rozpatrzony, diagram dotychczasowy nie bedzie widział zmian, dopóki nie natrafi na punkt p_i. Stąd, nie mamy pełnej informacji potrzebnej, aby wyznaczyć współrzędnych wierzchołków i krawędzi diagramu leżącego powyżej miotły. Zatem zamiast przechowywać przecięcia miotły z diagramem Voronoi, będziemy pamiętać wierzchołki i krawędzie tej części diagramu Voronoi, której punkty znajdują się powyżej miotły, i których diagram nie może być zmieniony przez punkty znajdujące sie poniżej miotły (ta część diagramu podczas prezentacji wizualnej algortmu zaznaczona zostaje na niebiesko).

Oznaczmy półpłaszczyznę powyżej l przez l^+. Jaka część diagramu będąca powyżej l nie może ulec zmianie? Innymi słowy, dla których punktów $q \in l^+$ wiemy na pewno, który z punktów p_i jest najbliżej niego? Odległość punktu $q \in l^+$ do jakiegokolwiek punktu p_i poniżej prostej l jest większa niż odległość między q i l. Stąd, najbliższy punkt ze zbioru P dla punktu q nie może leżeć poniżej prostej l, jeżeli punkt q jest bliżej pewnego punktu $p_i \in l^+$ niż od prostej l. Zbiór punktów, które są mniej oddalone od punktu $p_i \in l^+$, niż od prostej l wyznaczają parabolę.

Jeżeli popatrzymy na poniższy rysunek to zobaczymy, że punkty, które są bliżej oddalone od jakichkolwiek punktów $p_i \in l^+$ niż od prostej l tworzą paraboliczne łuki (Rysunek 3.2). Sekwencje takich parabolicznych łuków nazywany **linią brzegową**. Możemy ją zdefiniować też bardziej formalnie. Każdy punkt $p_i \in l^+$ definiuje w sposób jednoznaczny całą parabole $_i$. Określona jest ona równaniem:
Jeżeli $p_j = (p_{j,x}, p_{j,y})$, to

$$(2) \qquad _j = y = \frac{1}{2(p_{j,y} - l_y)}(x^2 - 2p_{j,x}x + {p_{j,x}}^2 + {p_{j,y}}^2 - {l_y}^2)$$

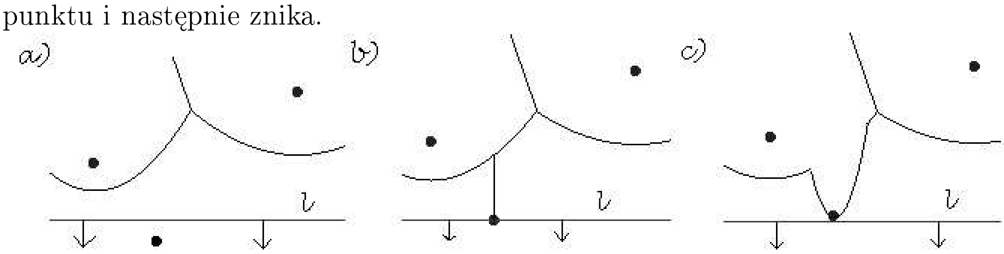
Linia brzegowa to funkcja, która dla każdej współrzędnej x zwraca najmniejszą wartość jaką przyjmują wszystkie wyznaczone wcześniej parabole $min(\ _i(x))$.



Rysunek 3.2 *Linia brzegowa*

Łatwo zauważyć, że jedna parabola może przyczyniać sie do wyglądu lini brzegowej wiecej niż tylko raz (Rysunek 3.3c). Póżniej zastanowimy się o ilości tych zmian. Zauważmy bardzo ważna własność: przecięcia między rożnymi parabolicznymi łukami formujących linię brzegową leżą na krawędziach należących do diagramu Voronoi. To nie jest przypadek: punkty przecięc paraboli dokładnie wyznaczają diagram Voronoi, gdy prosta zamiatająca przesuwana jest z góry na dół.

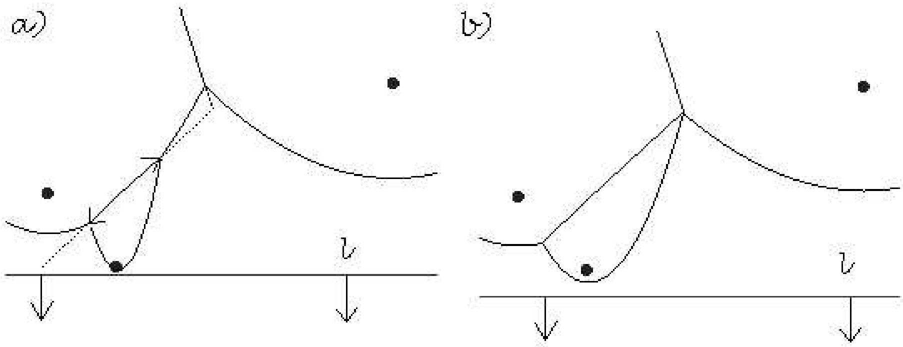
Tak więc, zamiast pamiętać przecięcia $Vor(P)$ z prostą l, będziemy przechowywali informację o linii brzegowej podczas przesuwania prostej l. Narazie nie zastanawiajmy się jak przechowywać informacje o strukturze linii brzegowej, ale postarajmy się zrozumieć, gdzie i jak ta struktura się zmienia.
To zdarza się gdy pojawia się nowy łuk paraboliczny oraz gdy stara parabola kurczy sie do punktu i następnie znika.



Rysunek 3.3

Najpierw zajmijmy się pierwszą sytuacją. Nowa parabola pojawia sie wtedy i tylko wtedy, kiedy podczas przesuwania prostej zamiatającej l pojawi sie na niej punkt ze zbioru P. Parabola zdefiniowana na początku jest zdegenerowana i ma szerokość równą 0 : tworzy pionową linie łączącą punkt na prostej l z linią brzegową (Rysunek 3.3). Podczas dalszego przesuwania miotły w dół nowa parabola staje się coraz szersza. Część nowopowstałej paraboli , która znajduje się poniżej obecnej lini brzegowej staje się linią brzegową. Taką zmianę w postaci linii brzegowej nazwijmy **zdarzeniem punktowym (ang. site event)**, gdyż to punkt powoduje powstanie nowej paraboli.

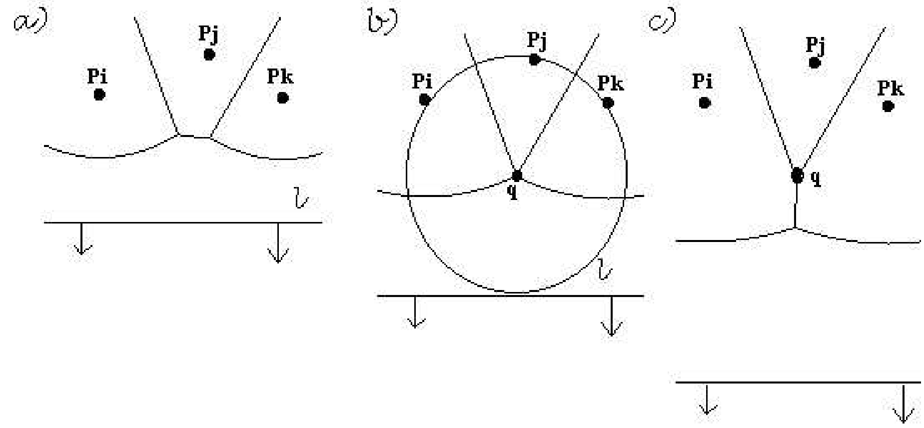
Co dzieje się z diagramem po zdarzeniu punktowym? Przypomnijmy sobie, że przecięcia parabol należacych do lini brzegowej wyznaczają w sposób jednoznaczny krawędzie diagramu Voronoi. Zatem pojawiający się łuk paraboliczny powoduje powstanie nowej krawędzi. Początkowo ta krawędź nie jest połączona z resztą diagramu powyżej prostej zamiatającej. Później krawędź się rozszerza, aż połączy się z reszta, wyznaczonego juz diagramu (Rysunek.3.4).



Rysunek 3.4 *Rozszerzanie się krawędzi diagramu.*

Obserwacja 1 *Jedynym sposobem pojawienia się nowego łuku parabolicznego jest przez* ***zdarzenie punktowe***

Konsekwencją powyższej obserwacji jest, że linia brzegowa zawiera co najwyżej $2n-1$ łuków parabolicznych.



Rysunek 3.5

Drugą sytuacją, którą się zajmiemy, to znikanie łuków z lini brzegowej. Łuk kurczy się, przekształca się w punkt a następnie znika (Rysunek 3.5) . W momencie, gdy łuk przekształca się w punkt q, to punkt q staje się punktem równoodległym od wszystkich trzech punktów i od prostej l. Zatem możemy wyznaczyć okrąg zawierający punkty p_i, p_j i p_k o środku w punkcie q, oraz o najniższym punkcie leżacym na prostej l. Nie może być punktu wewnątrz tego okręgu, ponieważ wówczas ten punkt byłby bliżej q niż odległość punktu q od l. Zatem punkt q staje się **wierzchołkiem** diagramu Voronoi. Nie jest to niczym nadzwyczajnym, ponieważ jak już wczesniej zaznaczałem punkty przecięć się łuków parabolicznych należących do lini brzegowej wyznaczają krawędzie, a więc gdy znika łuk to musi pojawić sie nowa krawędź oraz nowy wierzchołek. Sytuacje, gdy prosta zamiatająca osiągnie najniższy punkt okręgu, wyznaczonego przez 3 punkty wyznaczjące linie brzegową, nazwijmy **zdarzeniem okręgu (ang. circle site)**.

Obserwacja 2 *Jedynym sposobem na zniknięcie łuku parabolicznego z lini brzegowej jest poprzez **zdarzeniem okręgu**.*

Teraz już wiemy jak zmienia się struktura lini brzegowej:

zdarzenie punktowe - pojawia się nowy łuk

zdarzenie okręgu - znika istniejący łuk

.

Wiemy również w jaki sposób to wpływa na diagram Voronoi podczas konstrucji:

zdarzenie punktowe - nowa krawędź diagramu jest generowana

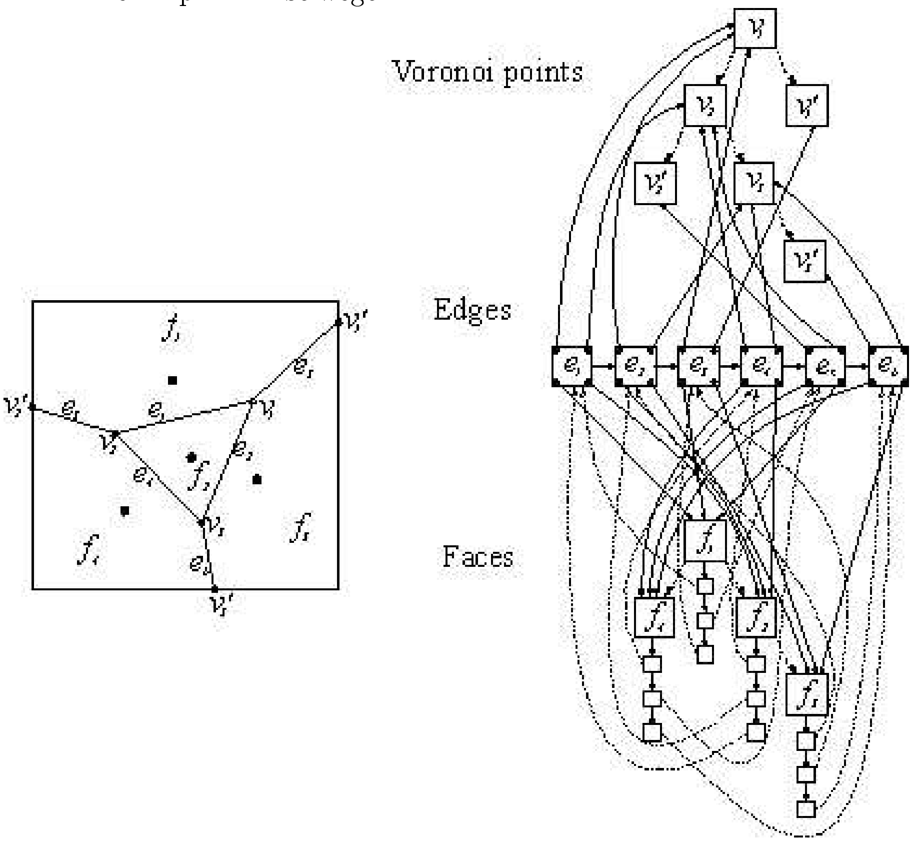
zdarzenie okręgu - dwie rozsrzerzające się krawędzie spotykają sie i tworzą wierzchołek diagramu.

.

3.2 Struktury danych

3.2.1 Diagram Voronoi

W czasie konstruowania diagramu przechowujemy go w specjalnej strukturze (Rysunek 3.6. Co prawda mamy problem, ponieważ diagram Voronoi nie jest zbudowany z samych odcinków, ale niektóre z krawędzi są półprostymi. Podczas konstruowania diagramu nie jest to problemem, ponieważ struktura użyta do przechowywania informacji o lini brzegowej będzie w odpowiedni sposób połączona z podwójnie skierowana listą krawędziową diagramu. Aby jednak po zakończeniu wyznaczania diagramu nasza struktura składała się z odcinków i (pół)prostych dodajemy duże otaczające pole - odpowiednio duże aby nie nachodzić na pole właściwego.



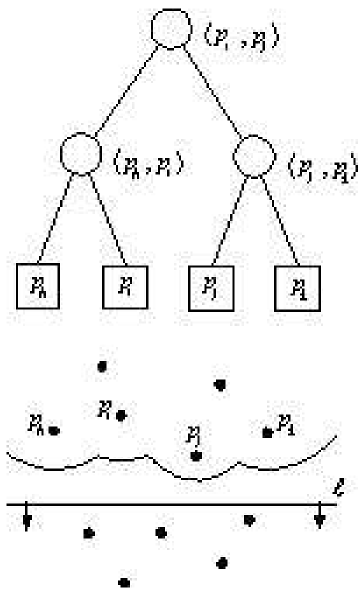
Rysunek 3.6 *Struktura przechowująca diagram Voronoi*

3.2.2 Linia brzegowa

Linie brzegową przechowujemy w programie jako zrównoważone drzewo binarne T. Liście tego drzewa odpowiadają łukom parabolicznym na lini brzegowej - w odpowiedniej kolejności: liść będący najbardziej na lewo odpowiada łukowi będącemu najbardziej na lewo na lini brzegowej, drugi z lewej strony odpowiada kolejnemu łukowi. Pozostałe węzły reprezentują punkty przecięć się paraboli zapisywać to będziemy jako $< p_i, p_j >$, gdzie p_i rozumiemy lewą parabolęm a p_j prawą częśĆ paraboli. Dzieki takiej strukturze lini brzegowej możemy w czasie $O(\log n)$ znaleźć odpowiedni łuk lini brzegowej znajdujący się powyżej nowo rozpatrywanego punktu ze zbioru P.

W nie-liściach porównujemy współrzędną x rozpatrywanego punktu P, ze współrzędnymi x punktów przecieć paraboli.

W drzewie T przechowujemy również wskaźniki do dwóch innych struktur używanych podczas zamiatania. Każdy liść z T, reprezentujący kąt , zawiera jeden wskaźnik do węzła w kolejce zdarzeniowej, mówiąc dokładniej wskaźnik do węźla w kolejce reprezentującego zdarzenie okręgu podczas którego łuk zniknie.



3.2.3 Zdarzenia

Kolejka zdarzeniowa Q jest implementowana jako kolejka priorytetowa, gdzie priorytetem jest współrzędna y. Kolejka przechowuje informacje o najbliższych znanych już zdarzeniach. Dla zdarzenia punktowego zapamiętujemy punkt. Dla zdarzenia okręgu zapamiętujemy najniższy punkt okręgu z wskaźnikiem do liścia który reprezentuje łuk który zniknie podczas tego zdarzenia.

Wcześniej dokładnie zdarzenia punktowe, teraz kolej aby dokładnie przeanalizować jak wykrywać zdarzenia okręgu.

Podczas zamiatania linia brzegowa zmienia swoją topologiczną strukturę podczas każdego zdarzenia. To może spowodować, że pojawią się nowe łuki na lini brzegowej lub jego zniknięcie. Każde takie chociaż najmniej prawdopodobne zdarzenie b:edzie przechowywane w naszej kolejce Q.

4 Zastosowanie

Wyszukiwanie najbliższego sąsiedztwa: dla rozważanego punktu q znalezienie jego najbliższego sąsiedztwa,ze stałego zbioru punktów S jest po prostu kwestia określenia, która komórka diagramu Voronoi zbioru S zawiera q.

Funkcja położenia: załóżmy, że koncern chce otworzyć kolejna stacje . Aby zminimalizować ingerencję w obszar istniejacej stacji, powinna być ona umiejscowiona najdalej jak się da od najbliższej istniejacej stacji. Umiejscowienie to jest zawsze na wierzchołku diagramu Voronoi i może być znalezione przez wyszukiwanie liniowo-czasowe poprzez wszystkie wierzchołki Voronoi.

Największe puste koło: załóżmy, że potrzebujemy dużego, nie zagospodarowanego kawałka ziemi na którym zbudujemy fabrykę. Ten sam warunek użyty do lokalizacji stacji jest właściwy dla wszystkich niepożadanych lokalizacji nazwany tak, ponieważ jest możliwie jak najdalej od jakiegokolwiek istotnego położenia zainteresowań.Wierzchołek Voronoi określa środek największego pustego koła pomiędzy punktami.

Planowanie ścieżek: jeżeli położenia S są środkami przeszkód, których chcemy uniknać, to krawędzie diagramu Voronoi definiują możliwe kanały, które minimalizują odległości do tych przeszkód . W ten sposób w planowaniu ścieżek między położeniami będzie bezpiecznie przykleić ja do krawędzi diagramu Voronoi.

Lecimy samolotem i musimy przelecieć nad terytorium wroga, punktami są stacje radarowe, stanowiska baterii przeciwlotniczej, itp. Aby znaleźć trasę przelotu wystarczy zaplanować ją po krawędziach diagramu Voronoi.