SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK

Ingamozgás

jegyzőkönyv

Jegyzőkönyvet készítette:
Koroknai Botond (AT5M0G)

Jegyzőkönyv leadásának időpontja:
2024.03.09

1. A kód

A feladat során négy különböző módszerrel végzett szimulációt kellett összehasonlítani (Euler, Euler-Cromer, RK4, adaptív RK4). Az adaptív RK4, és RK4 szimulációk során az odeint.cpp példakódban definiált függvényéket használtam, míg az Euler, illetve Euler-Cromer függvényeket átmásoltam az első házifeladatból, és alkamassá tettem őket, hogy egy x állapotvektorral dolgozzanak.

1. kód. Euler módszer

```
void eulerStep(Vector &x, double dt)
{
    x += dt * f(x);
}
```

2. kód. Euler-Cromer módszer

```
void eulerCromerStep(Vector &x, double dt)
{
    x[2] += dt * f(x)[2];
    x[1] += dt * x[2];
    x[0] += dt;
}
```

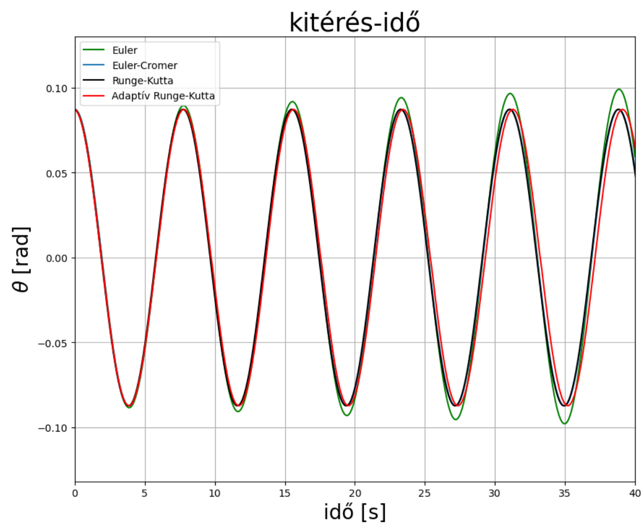
2. Az ingamozgás különböző közelítéseinek vizsgálata

2.1. Matematikai inga

A matematikai inga egy elhanyagolható tömegű l hosszúságú fonalra függesztett, m tömegű pontszerű testből áll, amelyre szabad erőként csak a nehézségi erő hat, és csillapítatlan periodikus mozgást végez. A közelítés, ami az ilyen mozgásokat írja le akkor helyes (kevesebb mint 1%-os relatív hiba), ha a kilengések 9,9 foknál kisebbek. Ezen kritériumok teljesítéséhez a következő paraméterket adtam meg a matematikai inga szimulációja során:

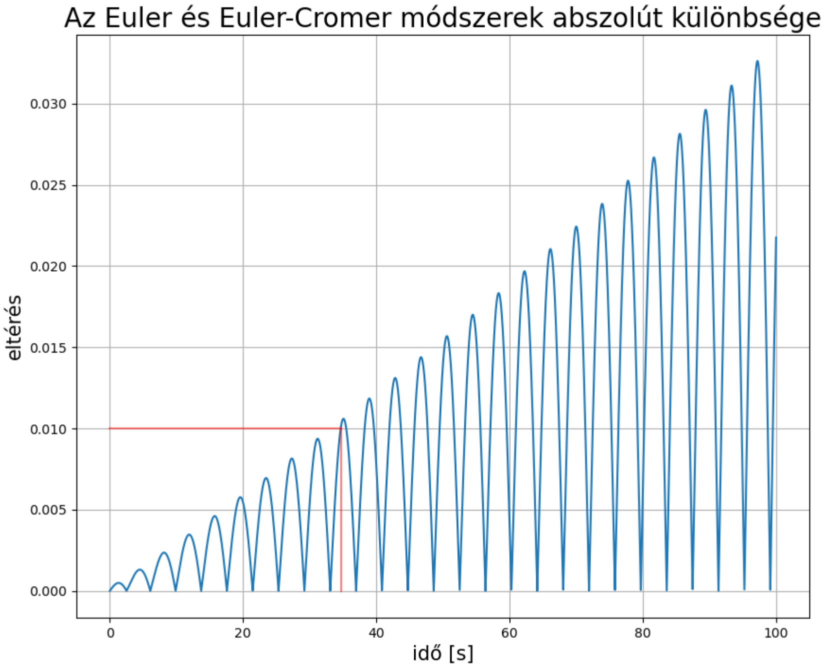
type	length [m]	damping coeff.	driving freq.	driving amplitude	$\theta(0)$	$\omega(0)$	t_{max} [s]
linear	15	0	0	0	0.08727 rad $\approx 5\,^\circ$	0	100

2.1.1. kitérés-idő diagram



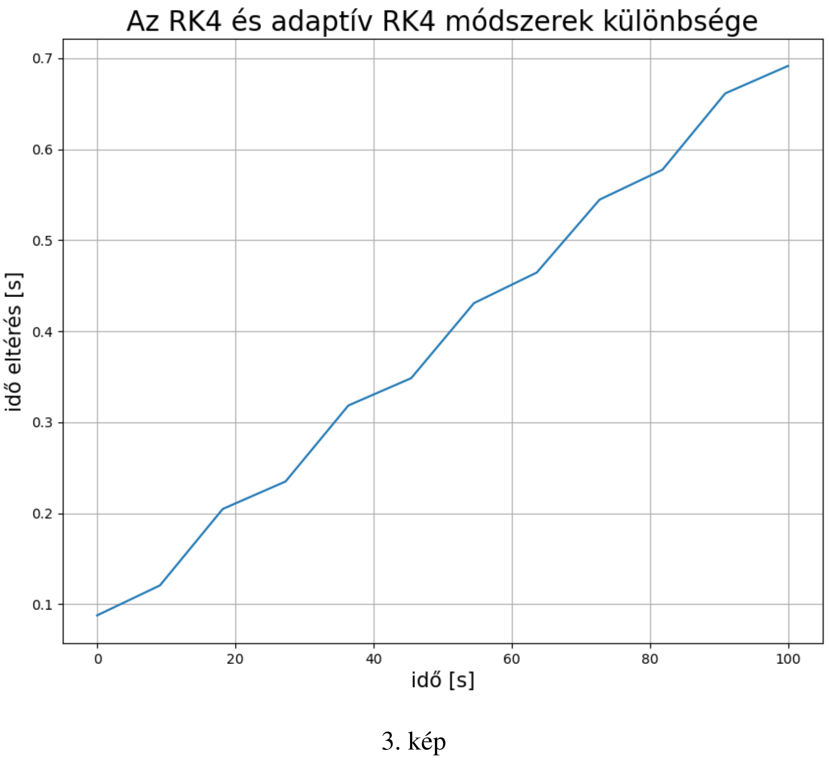
1. kép

Hasonlóan az első házifeladathoz a klasszikus Euler módszer most sem biztosít stabil megoldást.



2. kép

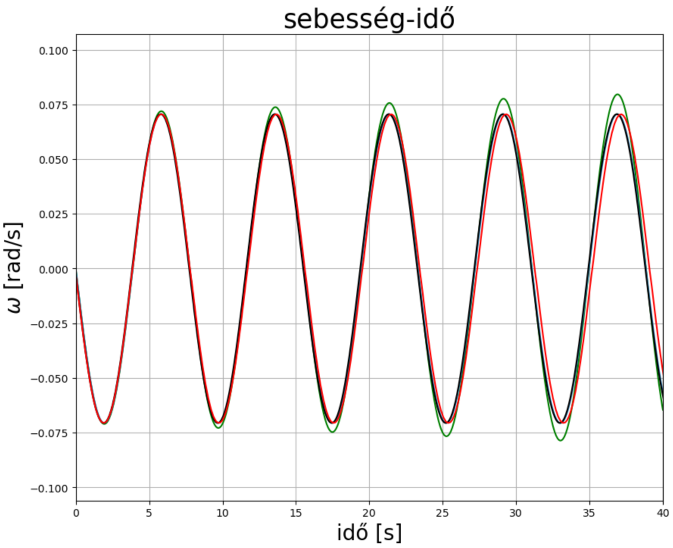
Az 1%-os eltérés eléréséhez mindössze 10 lengésre van szükségünk (ezt a pillanatot jelölik a piros vonalak). A Runge-Kutta és adaptív Runge-Kutta alakmazása közben is valami hasonlót tapasztalhatunk, csak most az amplitudó helyett a frekvenciában van elétrés(az adaptív RK4-et ábrázoló görbe megnyúlik). Ennek vizsgálatára kiszámoltam a két módszer csúcsai között található időeltéréseket:



3. kép

A két módszer közti időeltolódás, szinte lineárisan nő az idő előrehaladtával.

2.1.2. sebesség-idő digram



4. kép

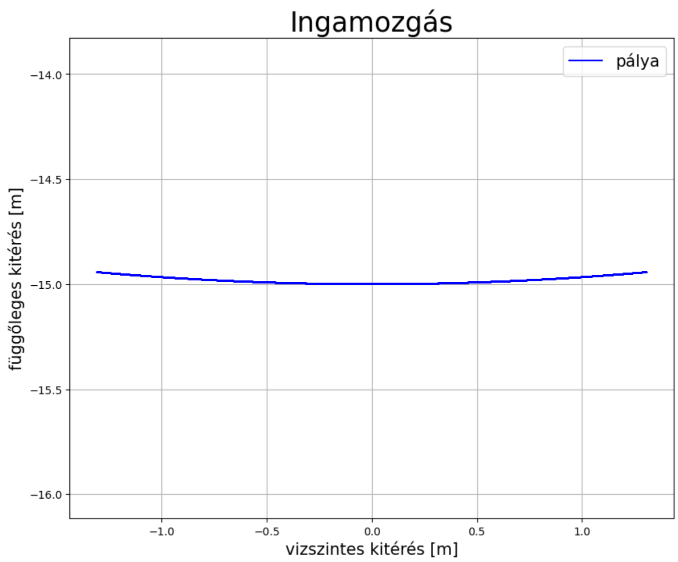
Az itteni eltérésekről hasonlókat állapíthatunk meg mint a kitérés-idő diagram esetén (3. kép, 4. kép)

2.1.3. Az inga pályája

Hogy pontosabban szemügyre vehessük mi is történik, készítettem egy külön ábrát, ami elölnézetből ábrázolja az inga pályáját.

```
def plot_pendulum_motion_circular(theta,lenpen):
    x = np.sin(theta)*lenpen
    y = -np.cos(theta)*lenpen
```

3. kód. Inga pályája - kódrészlet



5. kép

2.1.4. energia-idő diagram

Az energia kiszámításához egy python függvényt definiáltam, mely a következőt valósítja meg: Először kiszámolja a kerületi sebességet, mint ω szögsebesség és az inga hosszának szorzata. Ezt követően meghatároztam a kinetikus energiát

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Majd a potenicális energia kiszámításához egy h-ra is szükségem volt, ami a következő alakot ölti

$$h = L \cdot (1 - \cos\theta)$$

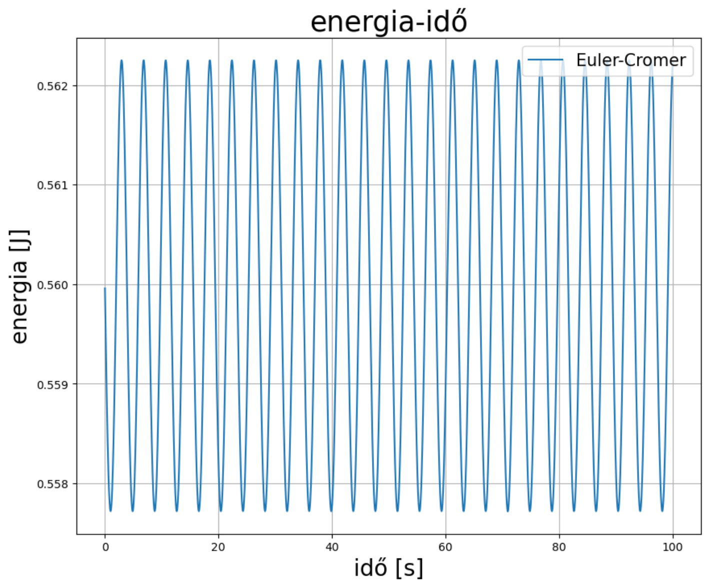
Ezt beillesztve

$$E_{pot} = mgh$$

Végül

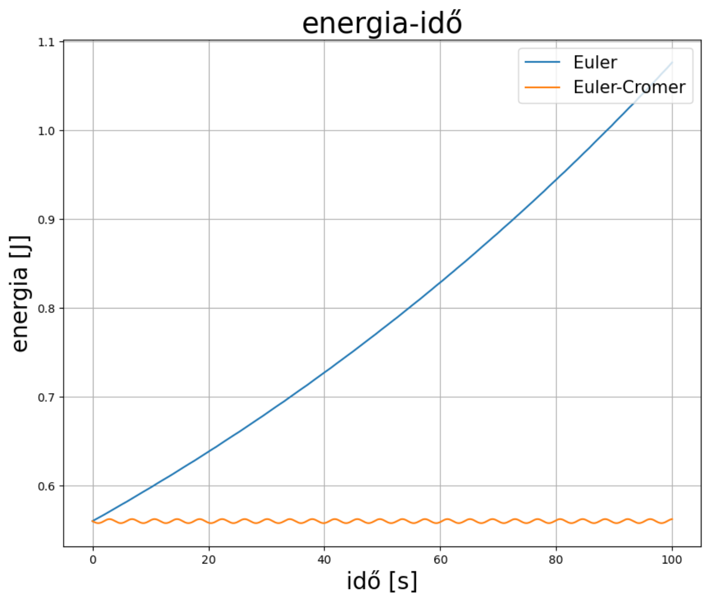
$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

A matematikai inga estén arra számítunk, hogy konstans lesz az energia. Az Euler-Cromer módszer esetén ez majdnem teljesül is, mindössze egy 4 ezeredes ingadozást figyelhetünk meg az energiában.



6. kép

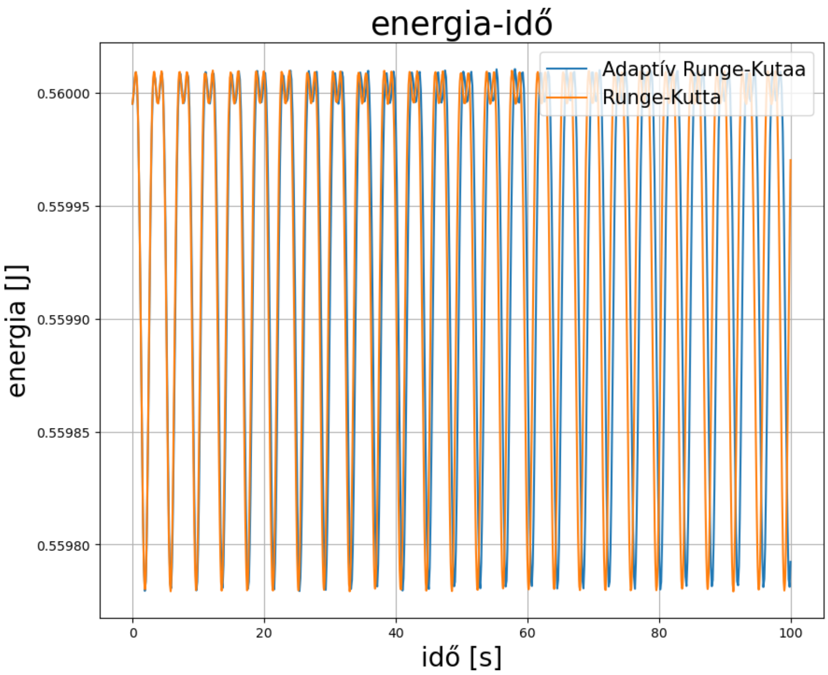
Kiváncsiságból készítettem egy ábrát ami a hagyományos Euler módszert is tartalmazza.



7. kép

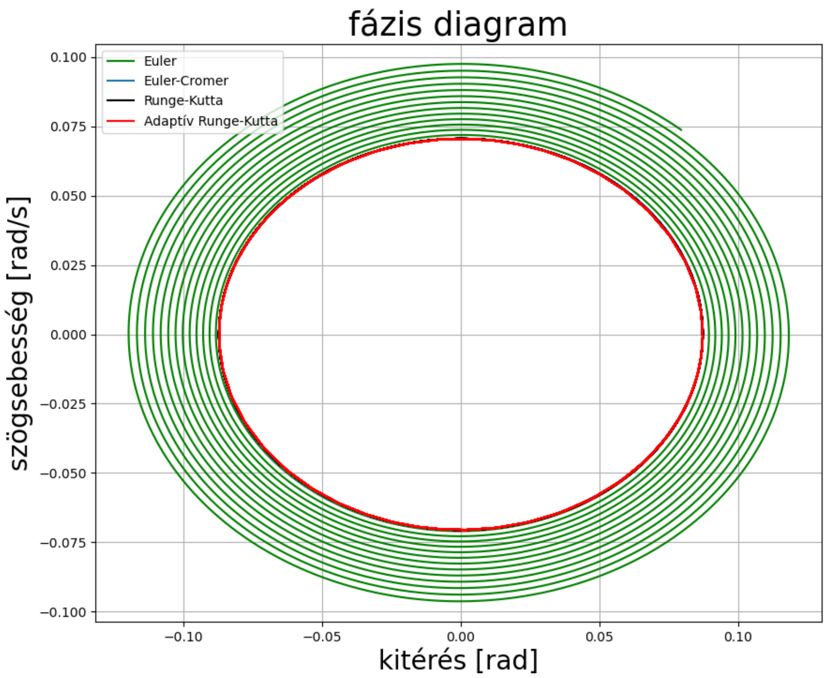
Pontosan az történt amit várni lehetett (1. házi) az Euler módszer esetén az energia rohamosan növekszik.

Ezen kívűl megvizsgáltam a két Runge-Kutta szimulációhoz tartozó energiát. Itt már csak 2 tízezred ingadozás van az energiában.



8. kép

2.1.5. fázis diagram



9. kép

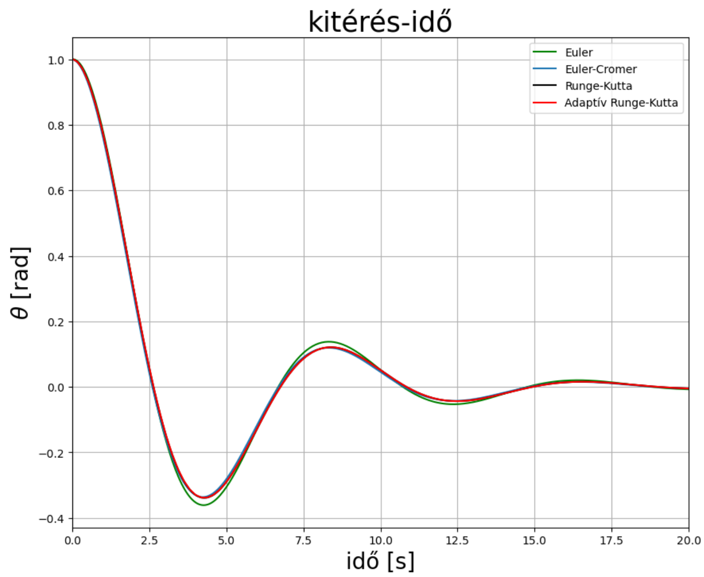
A matematikai inga estén megkaptam a várt ellipszis alakú fázis diagramot.

2.2. Csillapított inga

A második vizsgálandó eset a csillapított inga volt, ennek megfelelően a szimuláció futtatásakor a paramétereket a következőképpen módosítottam.

type	length [m]	damping coeff.	driving freq.	driving amplitude	$\theta(0)$	$\omega(0)$	t_{max} [s]
nonlinear	15	0.5	0	0	1	0	50

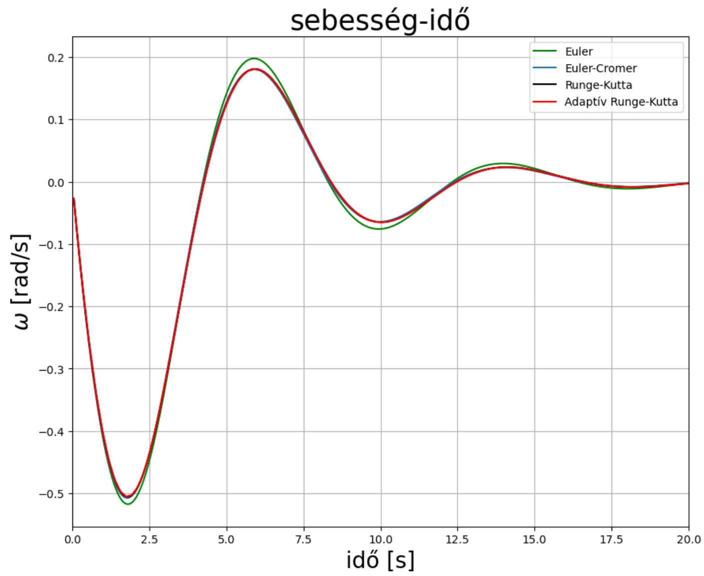
2.2.1. kitérés-idő diagram



10. kép

A sima Euler módszer esetén itt is tapasztalható némi ingadozás, de közel sem akkora mint az előzőekben.

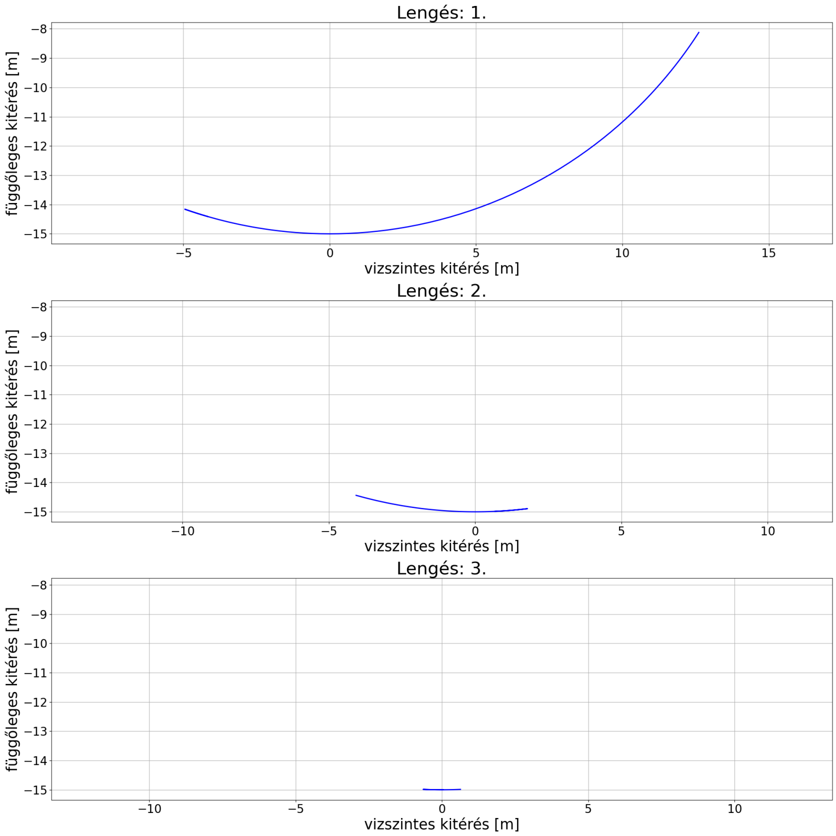
2.2.2. sebesség-idő diagram



11. kép

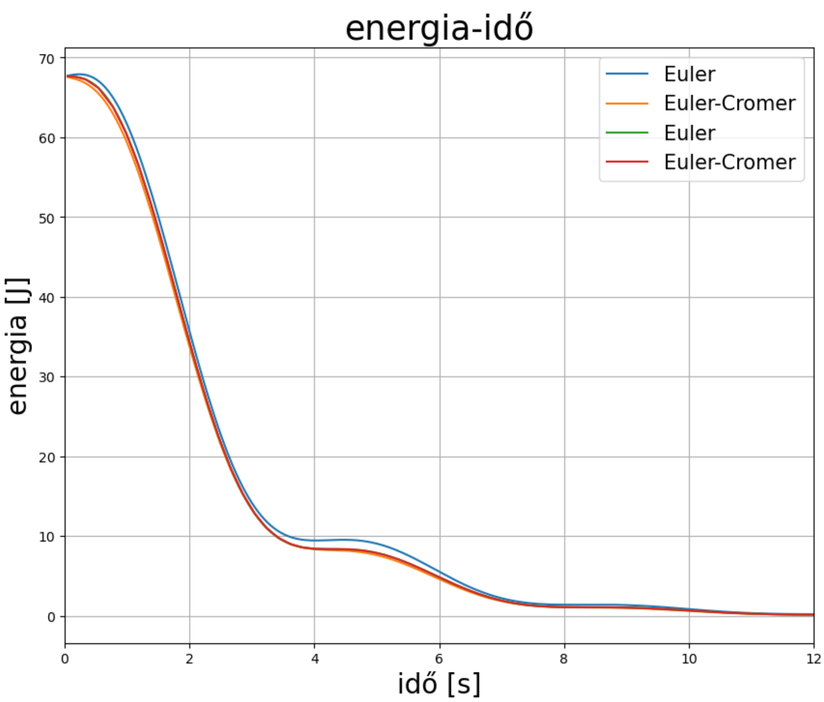
2.2.3. Az inga pályája

Az ábrázoláshoz próbáltam kisebb szakaszokra bontani a lengést.



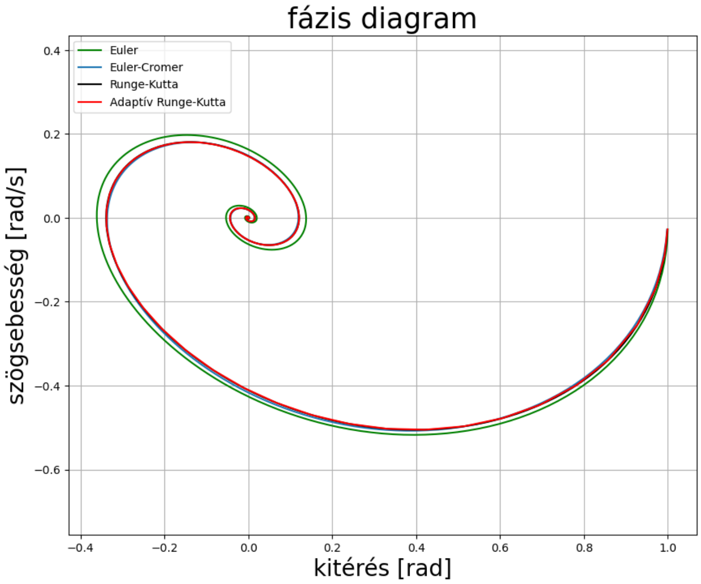
12. kép

2.2.4. energia-idő diagram



13. kép

2.2.5. fázis diagram



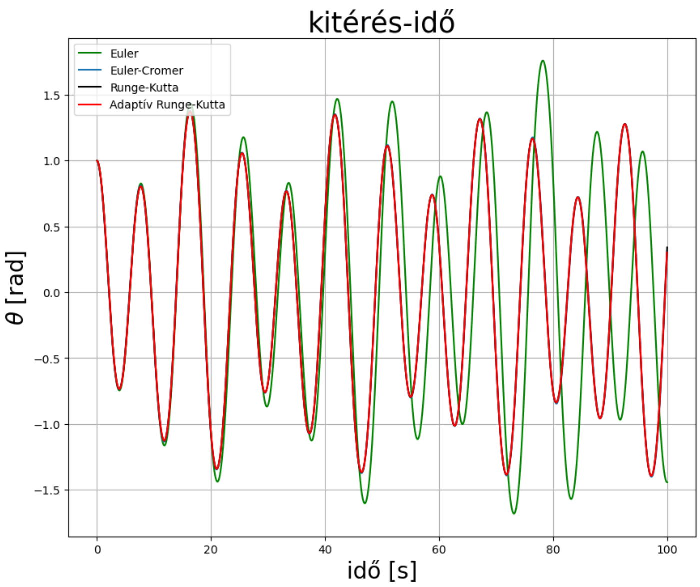
14. kép

2.3. Gerjesztett inga

A gerjesztett ingához a következő paramétereket használtam:

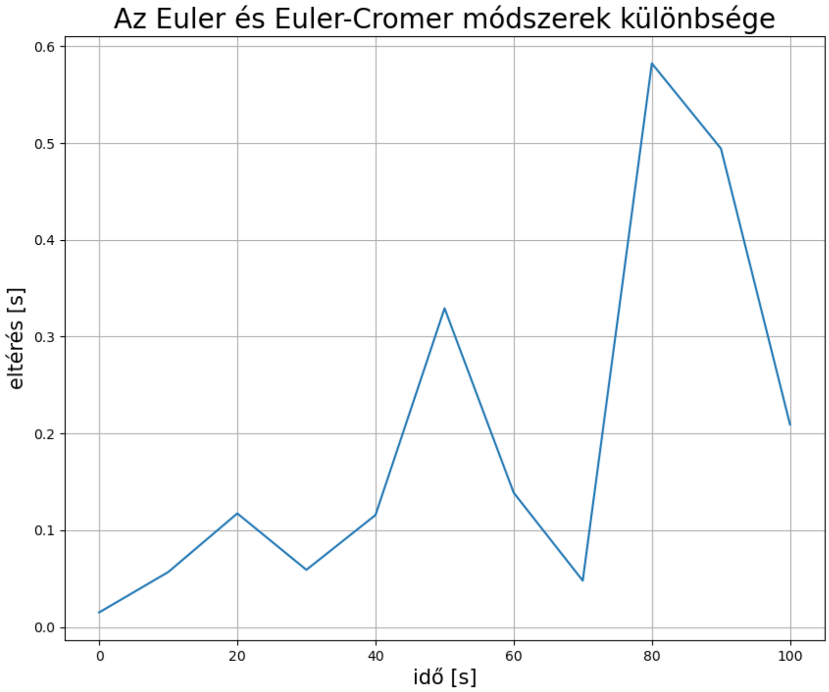
type	length [m]	damping coeff.	driving freq.	driving amplitude	$\theta(0)$	$\omega(0)$	t_{max} [s]
nonlinear	15	0	0.5	0.1	1	0	100

2.3.1. kitérés-idő diagram



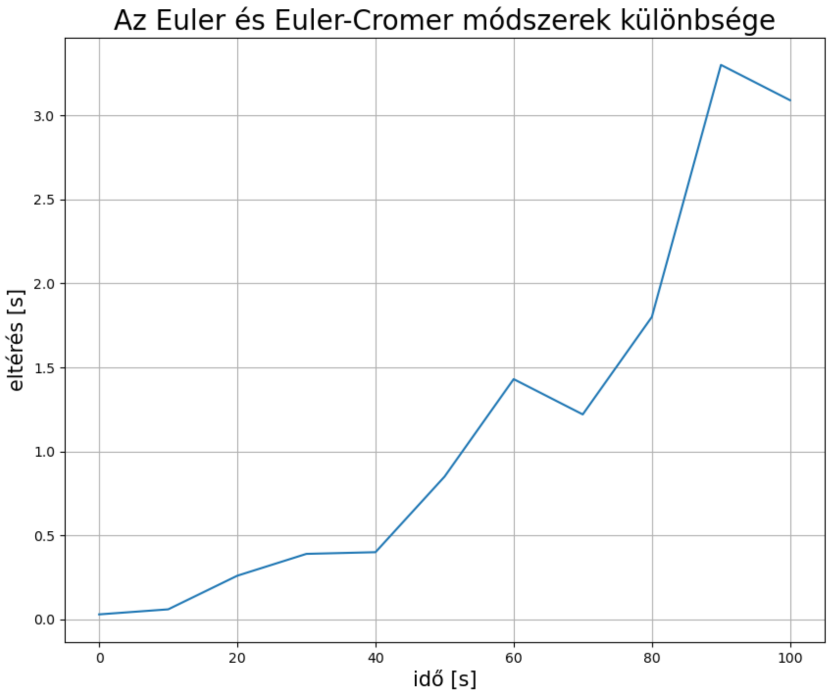
15. kép

Az Euler alogritmus futtatásakor csökkentenem kellett a dt paraméter értékét ötödére (dt = 0.01), hogy egyáltalán ”értékelhető” eredményt kapjak. Ismét megvizsgáltam a csúcsok közti eltérést, mind kitérés, mind időeltolódás szempontjából.



16. kép. A kitérések különbsége

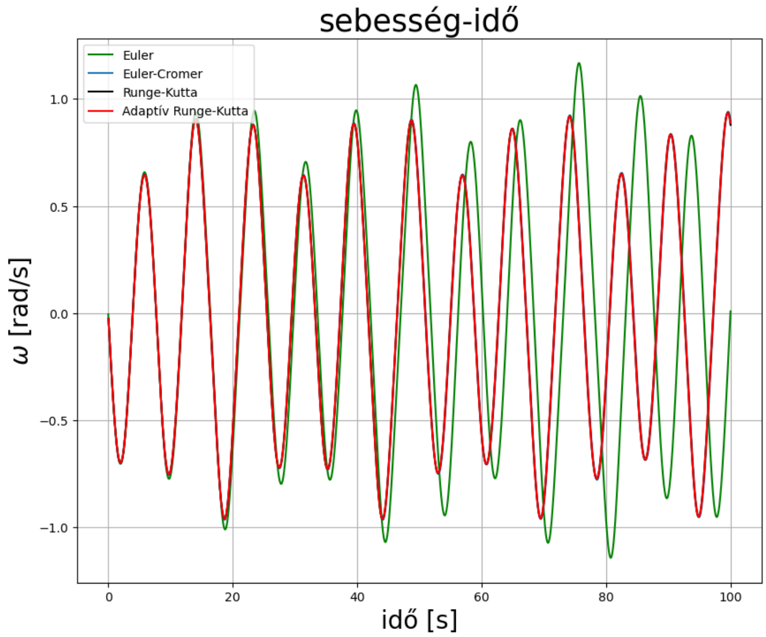
A különbség a két módszer között érdekesen viselkedik, ahelyett hogy folyamatosan nőne, ingadozik.



17. kép. Időkülönbség az amplitúdók között

Az előzőekkel szemben az időeltolódás folyamatosan nő.

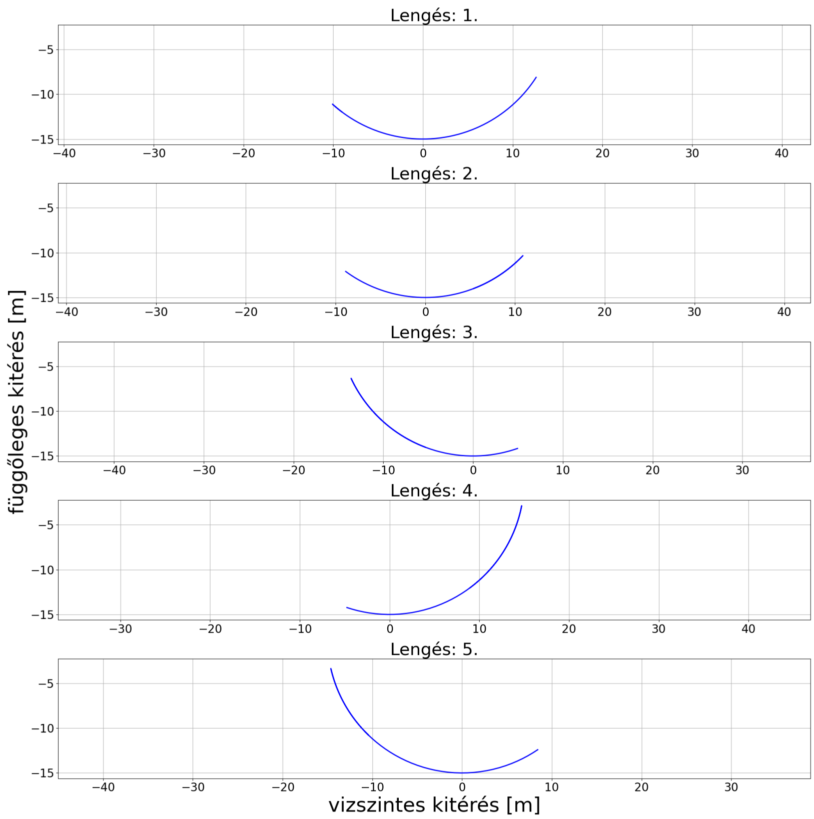
2.3.2. sebesség-idő diagram



18. kép

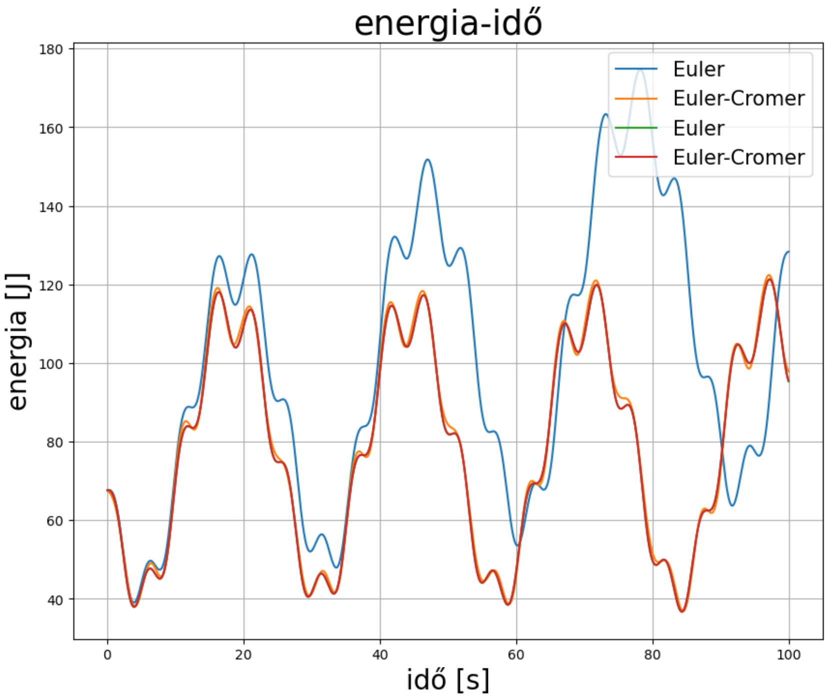
2.3.3. Az inga pályája

Az ábrázoláshoz a csillapított ingánál ismertetett módszert alkalmaztam.



19. kép

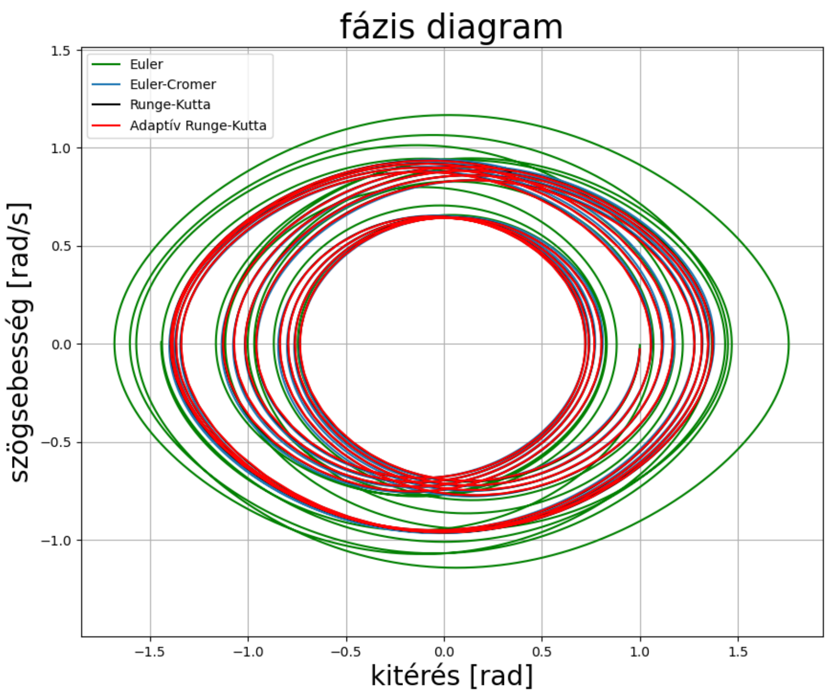
2.3.4. energia-idő diagram



20. kép

Az energia-idő diagramot vizsgálva már tisztábban látszik, hogy ebben az esetben sem nyújt megoldást hosszú távon az Euler módszer.

2.3.5. fázis diagram



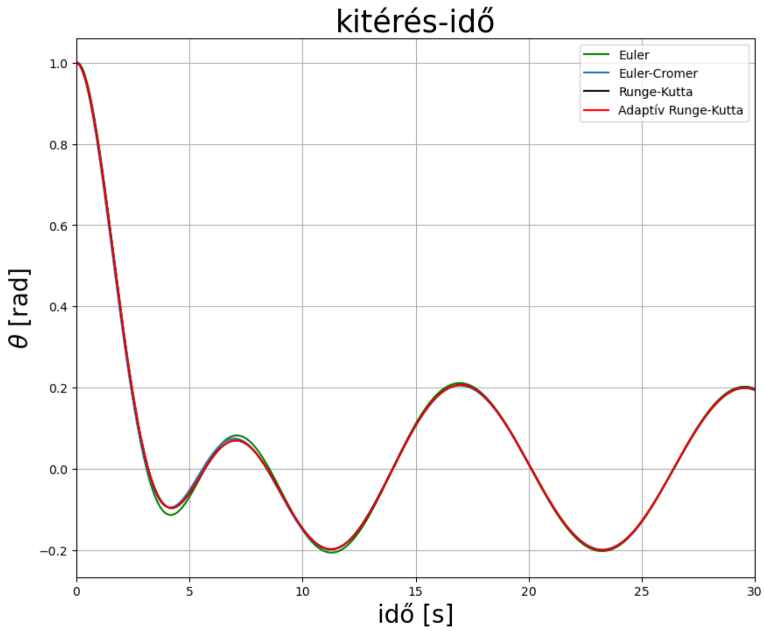
21. kép

2.4. fizikai inga

Ebben az esetben a parmétereket a következőnek válaszottam.

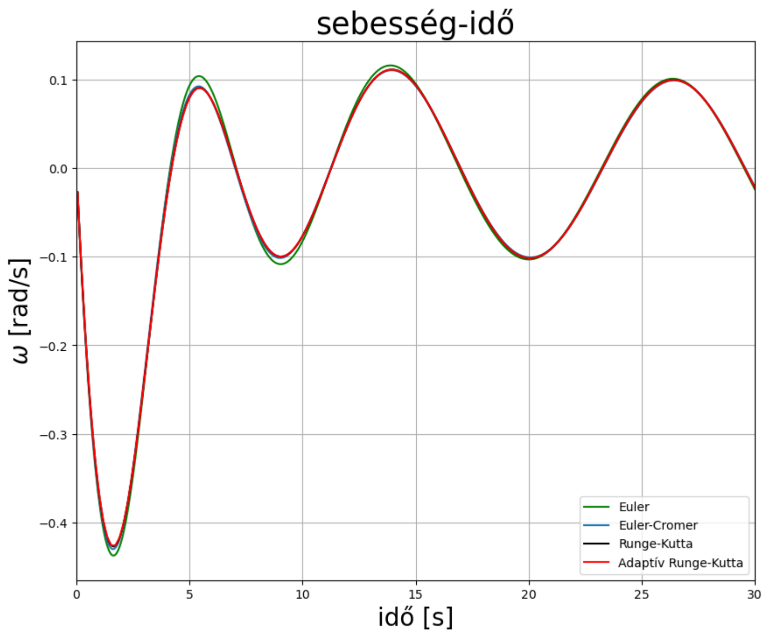
type	length [m]	damping coeff.	driving freq.	driving amplitude	$\theta(0)$	$\omega(0)$	t_{max} [s]
nonlinear	15	0.6	0.5	0.1	1	0	100

2.4.1. kitérés-idő diagram



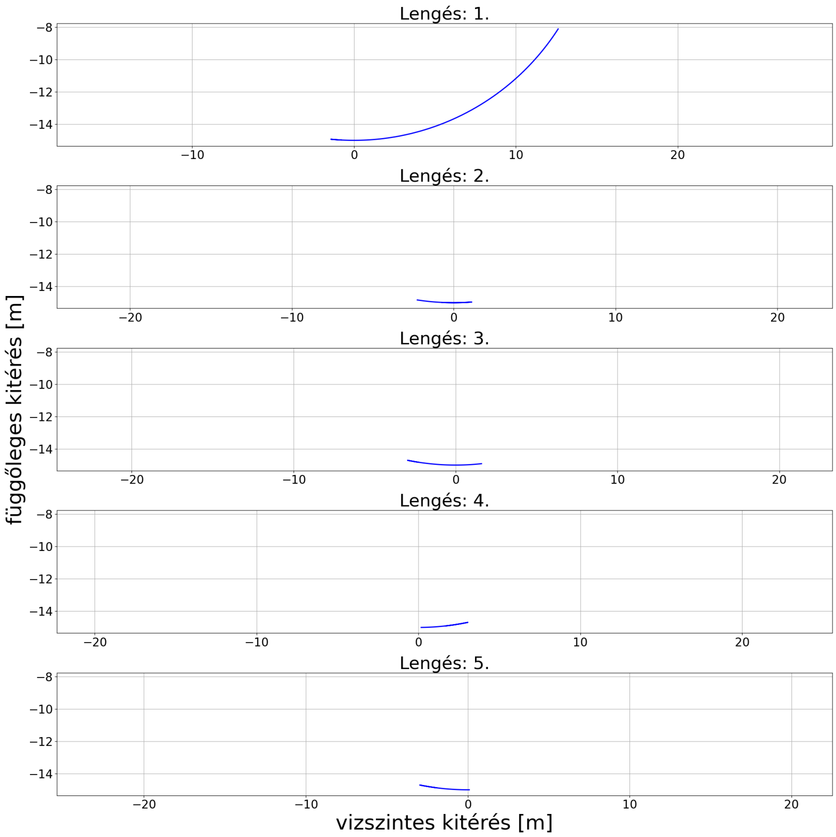
22. kép

2.4.2. sebesség-idő



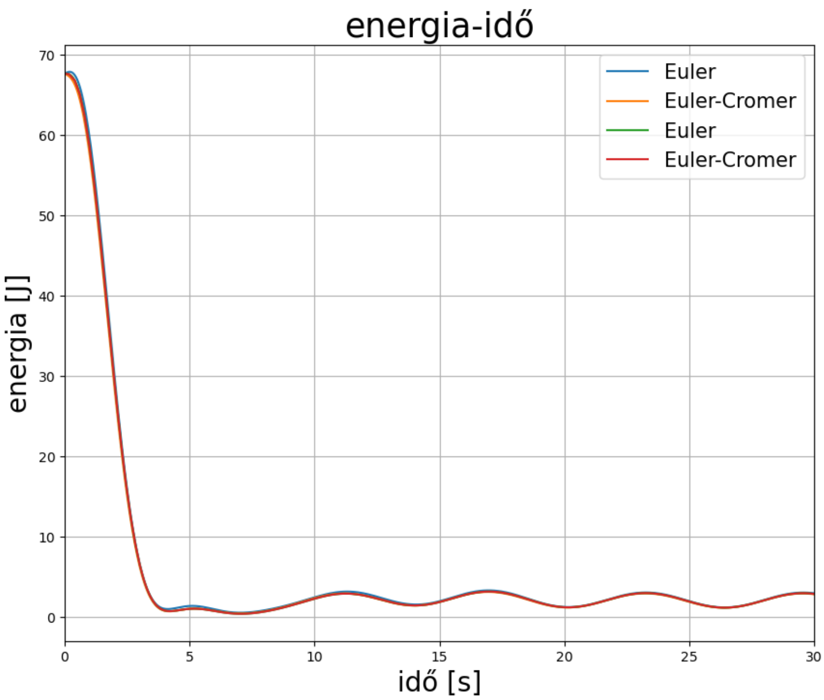
23. kép

2.4.3. Az inga pályája



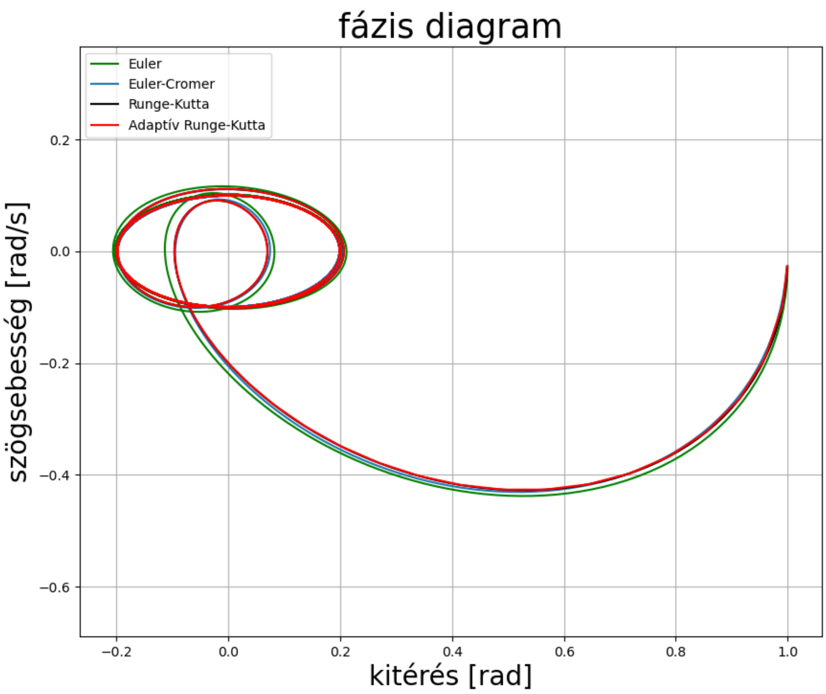
24. kép

2.4.4. energia-idő diagram



25. kép

2.4.5. fázis diagram



A fázis diagrammon, valamint a többi, ehhez a szimulációhoz tartozó képen is az látszik, hogy sikerült olyan paramétereket választanom, amik egy idő után stabilizálják a fizikai ingát, és úgy viselkedik, mintha matematikai inga lenne. Kíváncsiságból futtattam egy második szimulációt is, mely már jóval kaotikusabb eredményeket adott. (A második szimuláció eredményei megtalálhatók a "pendulum.ipynb" notebookban)

3. Kettős inga

Az utolsó feladat egy kettős inga megvalósítása volt.

3.1. A c++ kód

Létrehoztam egy új cpp file-t, majd átmentettem a régi kódot és a következőket alakítottam át rajta:

- Új változókat vezettem be: ingák hossza(L1,L2), tömegük (m1,m2), kezdő kitérésük (theta1, theta2), valamint kezdő szögsebességük(omega1, omega2)
- Ezt követően kicseréltem az eredeti f függvényben található differenciálegyenletet, a forrásokban található link alapján, ami a kettős inga szimulációját valósítja meg.

4. kód. kettős inga differenciálegyenletei

```
Vector f(const Vector &x)
{
    double theta1 = x[0];
    double omega1 = x[1];
    double theta2 = x[2];
    double omega2 = x[3];

    Vector result(4);
    result[0] = omega1;
    result[1] = (-g * (2 * m1 + m2) * sin(theta1) - m2 * g * sin(theta1 - 2 * theta2)
    -2 * sin(theta1 - theta2) * m2 * (pow(omega2, 2) * L2 + pow(omega1, 2) * L1*
    cos(theta1 - theta2))) / (L1 * (2 * m1 + m2 - m2 * cos(2 * theta1 - 2 * theta2)));

    result[2] = omega2;
```

```
    result[3] = (2 * sin(theta1 - theta2) * (pow(omega1, 2) * L1 * (m1 + m2) +
    g * (m1 + m2) * cos(theta1) + pow(omega2, 2) * L2 * m2 * cos(theta1 - theta2)))
    /(L2 * (2 * m1 + m2 - m2 * cos(2 * theta1 - 2 * theta2)));

    return result;
}
```

- Végül a main függvényben bekértem a változók értékekeit és sima Runge-Kutta segítségével elvégeztem a szimulációt.

3.2. A python kód

A pythonban két függvényt hoztam létre, hogy ábrázolni tudjam a kettős inga mozgását.

- plot_double_pendulum: A függvény az alsó inga vízszintes és függelges kitéréseinek koordinátáit számolja ki, így tudom ábrázolni az inga pályáját.

```python
def plot_double_pendulum(theta1,lenpen1,theta2,lenpen2):
    x = lenpen1 * np.sin(theta1) + lenpen2 * np.sin(theta1 +theta2)
    y = -(lenpen1 * np.cos(theta1) + lenpen2 * np.cos(theta1 + theta2))
```

5. kód. Kettős inga pályája - kódrészlet

- phase: A fázis diagram megvlósítását kettős inga esetén úgy értelmeztem, hogy a második inga szögsebességét ábrázoltam szintén a második inga kitérésének függvényében.

```python
def phase(theta1_double,omega1_double, theta2_double, omega2_double):
    theta = theta1_double + theta2_double
    omega = omega2_double
```

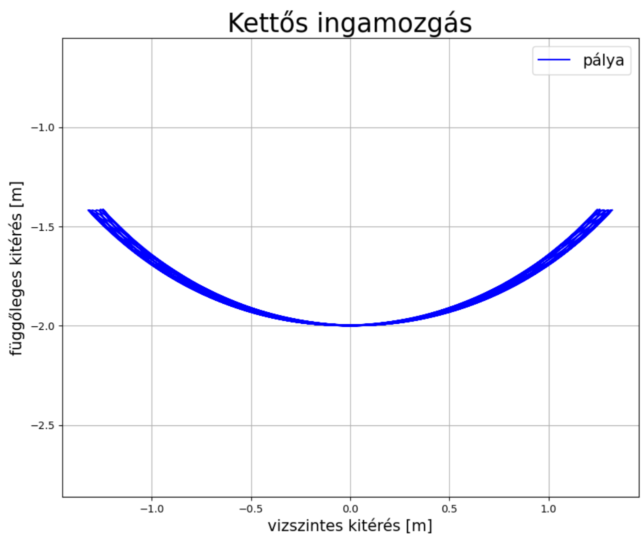
6. kód. Kettős inga fázis diagramja - kódrészlet

3.3. A szimulációk

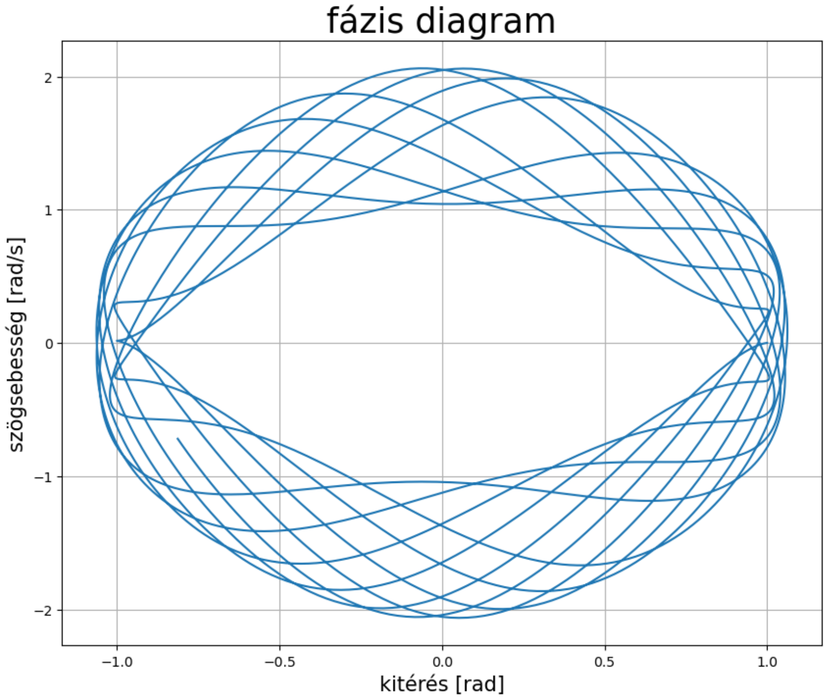
3.3.1. első szimláció

1. length [m]	2. length [m]	1. mass [kg]	2. mass [kg]	first $\theta(0)$	first $\omega(0)$	second $\theta(0)$	second $\omega(0)$	t_{max} [s]
1	1	1	1	0.5	0	0.5	0	20

Az első szimulációhoz nagyon óvatosan választottam meg a paramétetereket.



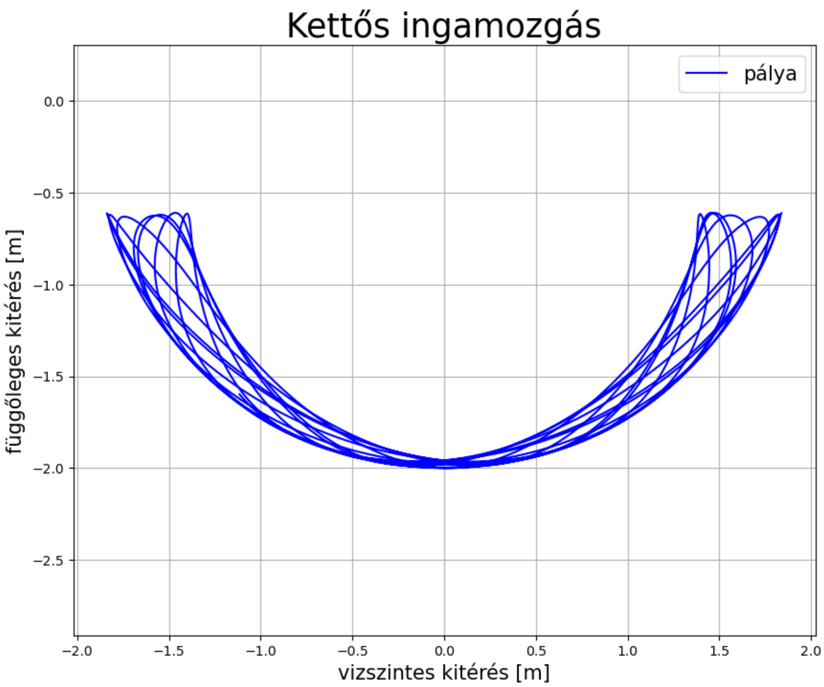
A fázis diagramon még mindig szépen kivehető az ellipszis szerű alak, amit a matematikai inga esetén láttunk.



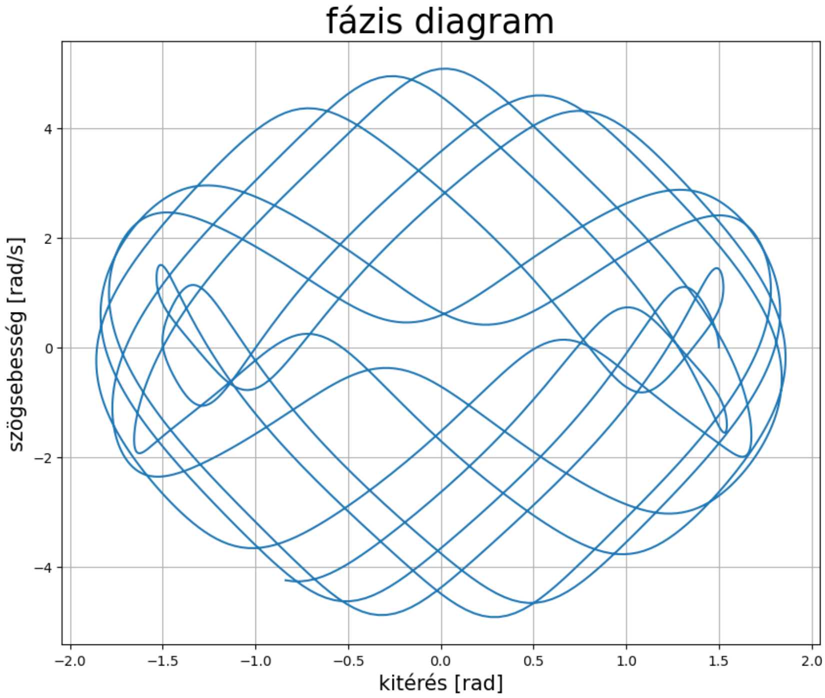
3.3.2. második szimuláció

Először csak egy apró módosítást végeztem, duplájára növeltem a második inga kitérését.

1. length [m]	2. length [m]	1. mass [kg]	2. mass [kg]	first $\theta(0)$	first $\omega(0)$	second $\theta(0)$	second $\omega(0)$	t_{max} [s]
1	1	1	1	0.5	0	1	0	20



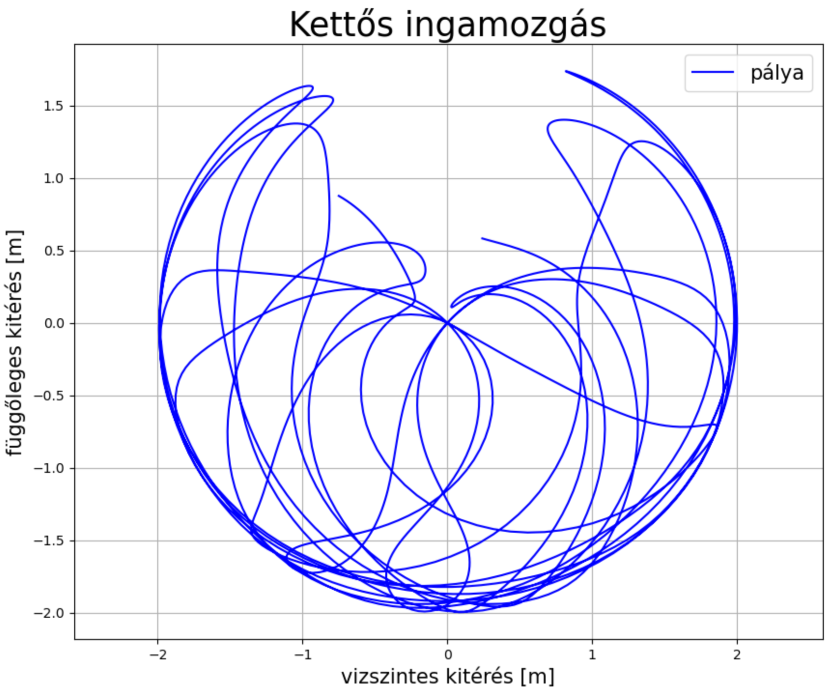
Ez már kicsit közelebb van a kaotikus mozgáshoz.



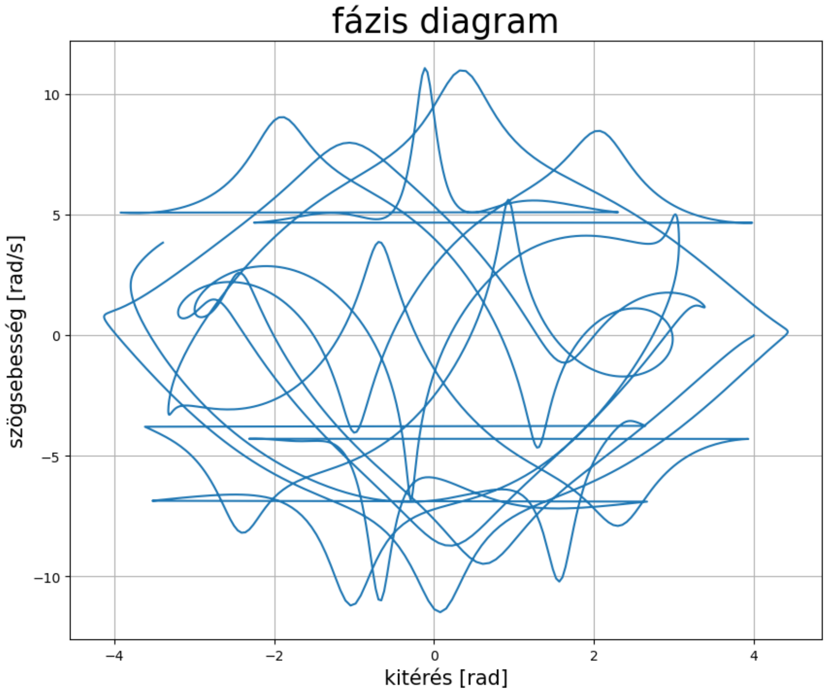
3.3.3. harmadik szimuláció

A harmadik szimuláció során már jóval nagyobb szögben térítettem ki mind a két ingát.

1. length [m]	2. length [m]	1. mass [kg]	2. mass [kg]	first $\theta(0)$	first $\omega(0)$	second $\theta(0)$	second $\omega(0)$	t_{max} [s]
1	1	1	1	1.5	0	2.5	0	20



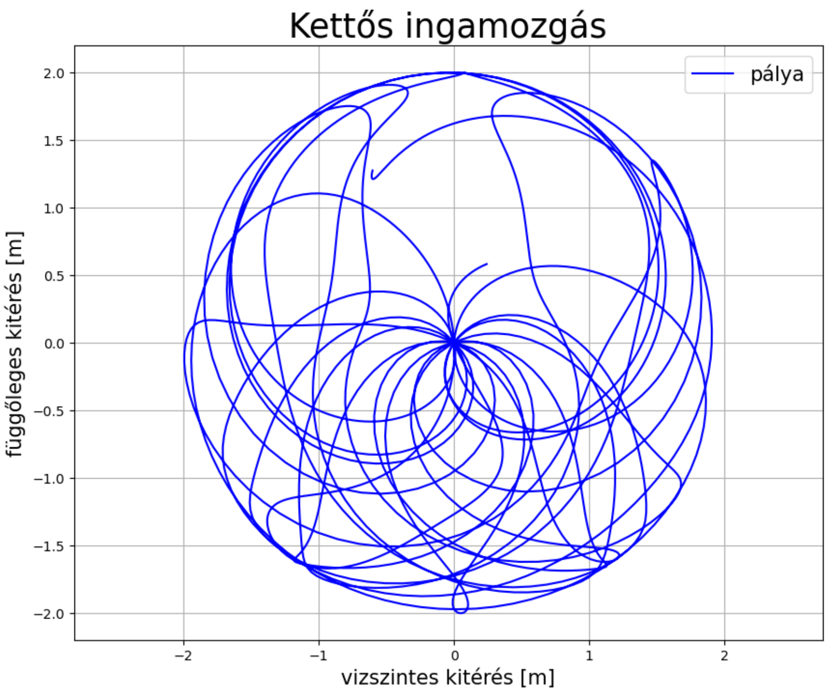
Ezen szimuláció során már kellően kaotikus mozgást sikerült elérni.

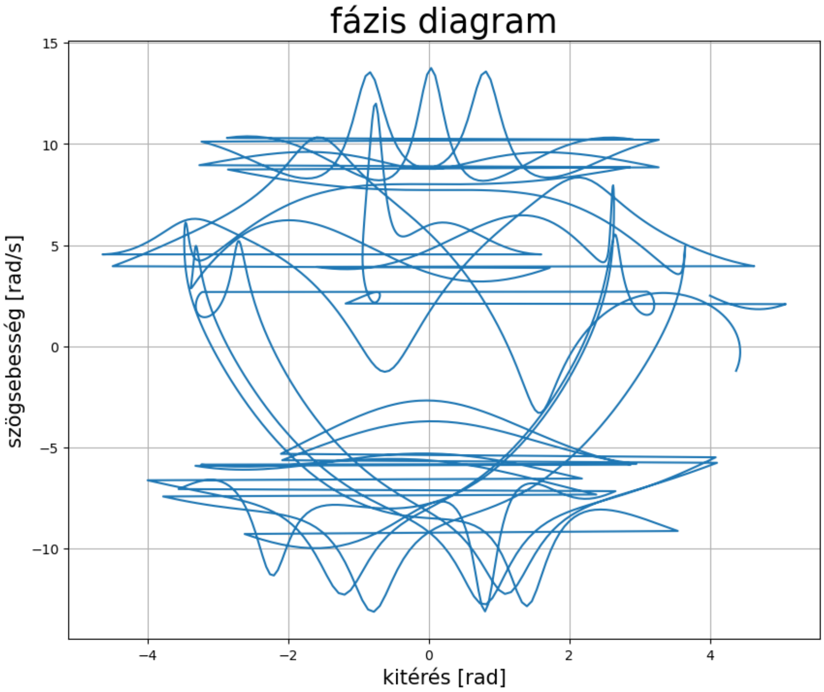


3.3.4. negyedik szimuláció

Az utolsó szimuláció során nagy kitéréseket alkalmaztam, és még kezdősebességet is adtam az ingáknak, ezzel elérve, hogy átforduljon.

1. length [m]	2. length [m]	1. mass [kg]	2. mass [kg]	first $\theta(0)$	first $\omega(0)$	second $\theta(0)$	second $\omega(0)$	t_{max} [s]
1	1	1	1	1.5	2.5	2.5	2.5	20





4. Források

- matematikai inga: https://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_inga https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mechanics)
- fizikai inga: https://hu.wikipedia.org/wiki/Fizikai_inga
- kettős inga - diffegyenet: https://web.mit.edu/jorloff/www/chaosTalk/double-pendulum/double-pendulum-en.html