KLASSZIUKS FIZIKA LABORATÓRIUM

Rugalmas állandók mérése

jegyzőkönyv

Mérést végezte:
Koroknai Botond

Neptun kód:
AT5M0G

Mérés időpontja:
2023.05.03

Jegyzőkönyv leadásának időpontja:
2023.05.24

Tartalomjegyzék:

1 **A mérés célja:** 2

2 **A mérőeszközök:** 2

3 **Fontos összefüggések** 2

4 **Mérési adatok kiértékelése - Young-modolusz:** 3

5 **Mérési adatok kiértékelése - Torziómodolusz:** 6

6 **Diszkusszió:** 7

1 A mérés célja:

A mérés során különböző anyagok rugalmas tulajdonságait vizsgáltam két módszer keretein belül. Először a minták lehajlását mértem a terhelő függvényében, majd egy torziós inga periódusidejének mérésével egy torziós szál torziósmodoluszát határoztam meg.

2 A mérőeszközök:

- A5 - négyzetes hasáb
- V3 - hengeres rúd
- Súlyok
- Kétkarú emelő
- 8-as és 5 - ös tárcsák
- Tolómérő
- Vonalzó
- Csavarmikrométer
- Torziós inga
- Analitikai mérleg

3 Fontos összefüggések

Lehajlás erőfüggése:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F \tag{1}$$

ahol s a lehajlás nagysága, l a felfüggesztések távolsága, I a keresztmetszet másodrendű nyomatéka F a testre ható, deformáló erő, E pedig a keresett Youngmodulusz.

Másodrendű nyomatékok:
Téglalap keresztmetszet esetén:

$$I_{ab} = \frac{ab^3}{12} \tag{2}$$

ahol a a téglalap szélessége, és b a téglalap magassága.

Kör keresztmetszet esetén:

$$I_0 = \frac{\pi}{4}R^4 \tag{3}$$

ahol R a rúd sugara.

Torziós modolusz és az inga periódusidejének kapcsolata:

$$G = K\frac{\Theta}{T^2} \tag{4}$$

ahol Θ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka és K a torziós szál jellemzésére használt mennyiség:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4}$$

ahol l a torziós szál hossza, és r a sugara.

Tárcsák tehetetlenségi nyomatéka: Ha a tárcsák távolsága a forgástengelytől a, a lengő rendszer eredő tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_e + \Theta_S + Ma^2 \tag{5}$$

ahol Θ_e az üres inga tehetetlenségi nyomatéke, Θ_S a két tárcsa tehetetlenségi nyomatékának összege, az Ma^2 -es tag pedig a Steiner-tétel értelmében kerül a kifejezésbe. Így a következő összefüggést kapjuk:

$$T^2 = \frac{K}{G}(\Theta_e + \Theta_S) + \frac{KM}{G}a^2 \tag{6}$$

Ez egy lineáris kapcsolatot teremt T^2 és a^2 között.

$$G = \frac{KM}{m} \tag{7}$$

A meredekségből meghatározhatjuk a torizós modoluszt, valamint a b tengelymetszet segítségével:

$$\Theta_e = \frac{Gb}{K} - \Theta_S \tag{8}$$

az inga tehetetlenségi nyomatékát is ki tudjuk számolni.

4 Mérési adatok kiértékelése - Young-modolusz:

Az **A5** - ös téglatest alakú minta geometriai adatai:

a [mm]	b [mm]
11.93	8.05
11.95	8.04
11.92	8.04
11.94	8.03

Az a oldal paramétere így:

$$a = 11.935 \pm 0.004\ mm$$

A b oldal paramétere:

$$b = 8.041 \pm 0.006\ mm$$

A hibát az átlag empirikus szórásával számoltam:

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \tag{9}$$

Másodrendű nyomatékok meghatározása:

$$I_a = \frac{ab^3}{12} = (5.1690 \pm 0.01331) \cdot 10^{-10}\ m^4 \tag{10}$$

$$I_b = \frac{ba^3}{12} = (11.3905 \pm 0.01995) \cdot 10^{-10}\ m^4 \tag{11}$$

A hiba:

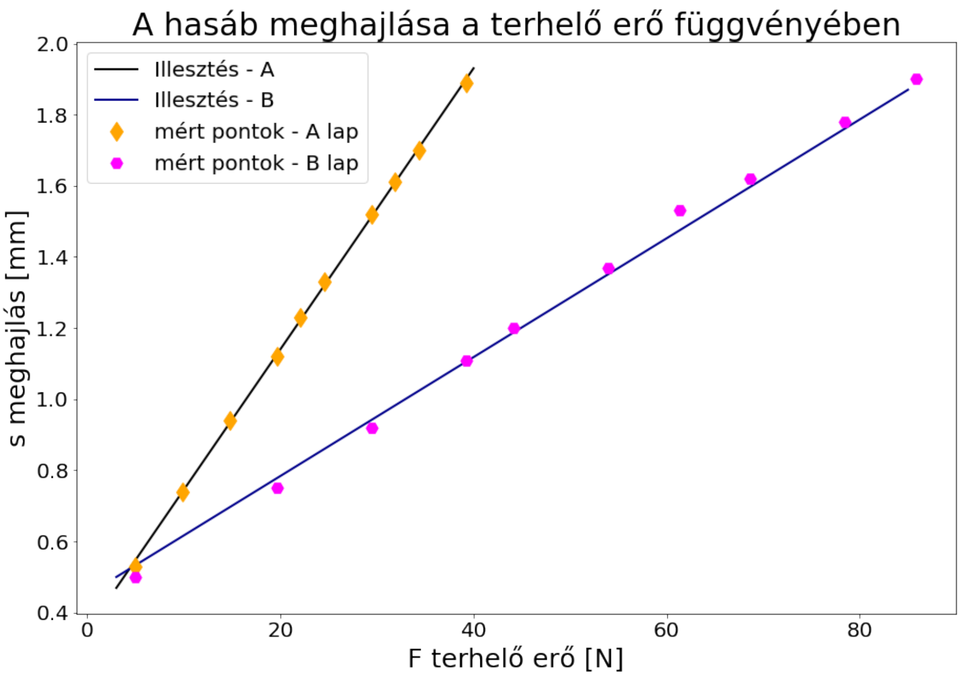
$$\Delta I_a = I \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} + 3 \cdot \frac{\Delta B}{B}\right) \tag{12}$$

A másik oldalon is hasonlóan tudunk hibát számolni, csak ott a $\frac{\Delta A}{A}$-kap egy hármas szorzót.
Mérési adatok "a" oldalhoz:

m [kg]	0.5	1	1.5	2	2.25	2.5	3	3.25	3.5	4
F = m · 9.81 [N]	4.905	9.81	14.715	19.62	22.073	24.525	29.43	31.883	34.335	39.24
s_a [mm]	0.53	0.74	0.94	1.12	1.23	1.33	1.52	1.61	1.70	1.89

Mérési adatok "b" oldalhoz

m [kg]	0.5	2	3	4	4.5	5.5	6.25	7	8	8.75
F = m · 9.81 [N]	4.905	19.62	29.43	39.24	44.145	53.955	61.312	68.67	78.48	85.838
s_b [mm]	0.5	0.75	0.92	1.11	1.20	1.37	1.53	1.62	1.78	1.90



Az illesztés paraméterei "a" oldal esetén:

	m_a $\left[\frac{mm}{N}\right]$	b_a $[mm]$
érték	0.0394	0.351
hiba	0.0003	0.007

Az illesztés paraméterei "b" oldal esetén:

	m_b $\left[\frac{mm}{N}\right]$	b_b $[mm]$
érték	0.0167	0.449
hiba	0.0004	0.0245

Young - modoluszok meghatározása: A számolás megkezdése előtt az előbbiekben meghatározott meredekségeket leosztottam 1000 - el, hogy összeegyeztessem a mértékegységeket. Továbbá l értékét mindkét esetben a l = 0.4 ± 0.001 m - nek vettem.

$$E_a = \frac{1}{48}\frac{l^3}{I_a \cdot m_a} = (65.32 \pm 1.15)\ GPa \tag{13}$$

$$E_b = \frac{1}{48}\frac{l^3}{I_b \cdot m_b} = (70.06 \pm 2.32)\ GPa \tag{14}$$

A hiba:

$$\Delta E_i = E_i \cdot \left(3 \cdot \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta I_i}{I_i} + \frac{\Delta m_i}{m_i}\right) \tag{15}$$

A meredekségek és másodrendű nyomatékok arányának vizsgálata:

Az elmélet alapján: $\frac{m_a}{m_b} = \frac{I_b}{I_a}$ arányok egyenlőek egymással, a mérésem során:

$$\frac{m_a}{m_b} = 2.3473$$

és

$$\frac{I_b}{I_a} = 2.2075$$

A két érték közti minimális eltérést a mérési pontatlanságok okozhatták.

V3 - as hengeres minta geometriai adatai:

d [mm]
10.15
10.09
10.25
10.31

A henger vastagsága így:

$$d = (10.20 \pm 0.05)\ mm \tag{16}$$

A sugara így:

$$r = (5.10 \pm 0.025)\ mm \tag{17}$$

A hiba itt is a (9) -es képlet alapján lett kiszámolva.

Másodrendű nyomaték: Hengeres testek esetén a másodrendű nyomaték:

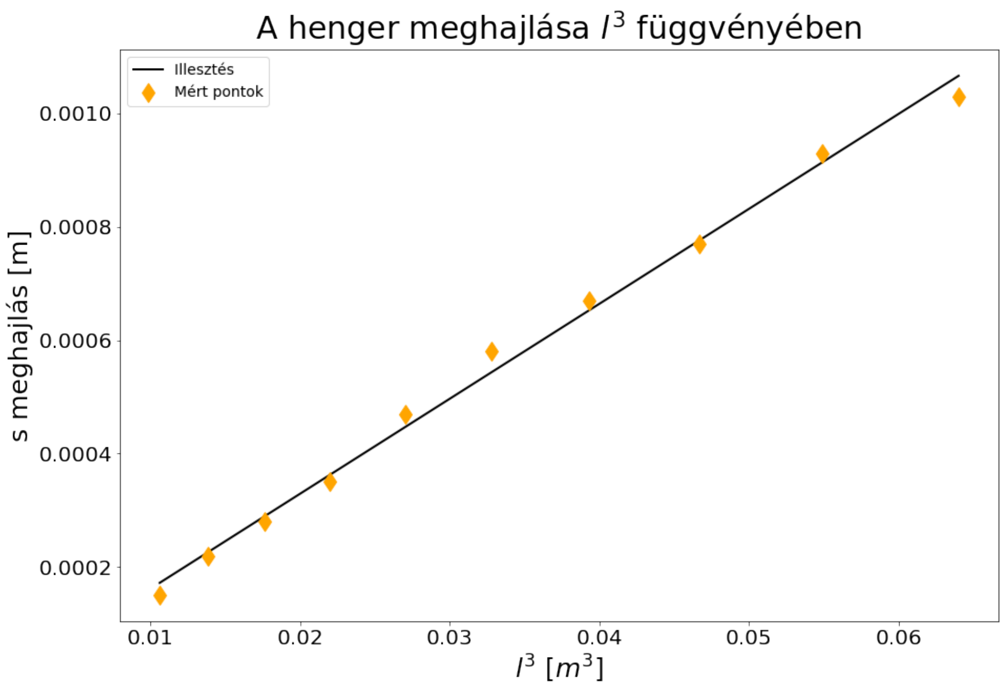
$$I = \frac{r^4 \pi}{4} = (5.31 \pm 0.14)\ 10^{-10}\ m^4 \tag{18}$$

Ahol a hiba:

$$\Delta I = I \cdot 4 \cdot \frac{\Delta r}{r} \tag{19}$$

A hosszfüggés vizsgálata:

l [m]	0.4	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.26	0.24	0.22
l^3 [m^3]	0.064	0.0549	0.0467	0.0393	0.0328	0.027	0.022	0.0176	0.0138	0.0106
s_0 [mm]	0.92	0.85	0.81	0.78	0.73	0.68	0.62	0.58	0.56	0.53
s [mm]	1.95	1.78	1.58	1.45	1.31	1.15	0.97	0.86	0.78	0.68
Δs [m]	0.00103	0.00093	0.00077	0.00067	0.00058	0.00047	0.00035	0.00028	0.00022	0.00015



A henger terhelése:

$$m = 5.5\ kg$$

$$F = 53.95\ N$$

volt, és az illesztett egyenes meredeksége:

$$m_h = 1.6741 \cdot 10^{-2} \pm 4.4015 \cdot 10^{-4} \ \frac{1}{m^2}$$

Ezen adatok segítségével ismét meghatározhatjuk a Young - modoluszt:

$$E = \frac{1}{48} \frac{F}{mI} = (126.43 \pm 6.79) \ GPa \tag{20}$$

5 Mérési adatok kiértékelése - Torziómodolusz:

A korongok geometriai adatai:

Korong száma	5	8
m [g]	194.6209	196.2069
R [mm]	22.495	22.5

A korongok tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_5 = \frac{1}{2} m_5 R_5^2 = (4.9241 \pm 0.110) \ kgm^2 \tag{21}$$

$$\Theta_8 = \frac{1}{2} m_8 R_8^2 = (4.9665 \pm 0.111) \ kgm^2 \tag{22}$$

Torziós szál geometriai adatai:
A szál hossza:

$$l_t = 593 \pm 1 \ mm$$

Átmérő:

d_t [mm]
0.69
0.68
0.71
0.70

A szál szélessége így:

$$d_t = 0.695 \pm 0.01 \ mm$$

Sugara:

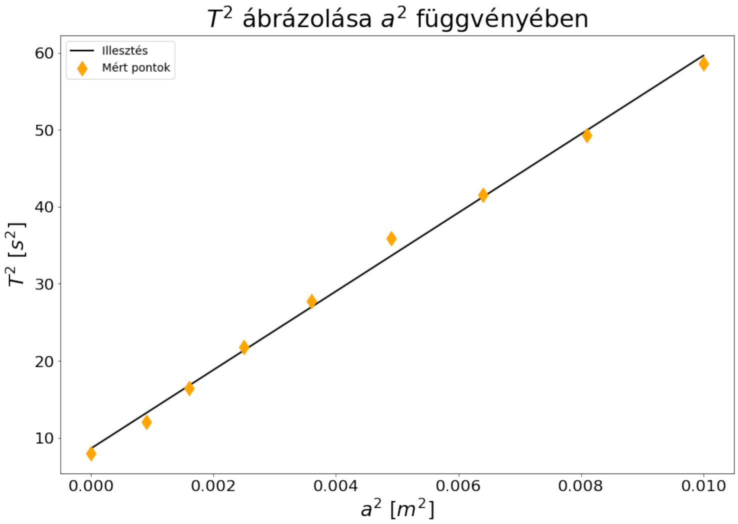
$$r_t = 0.347 \pm 0.005 \ mm$$

K állandó:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4} = (10.2796 \pm 0.6098) \cdot 10^{14} \ \frac{1}{m^3} \tag{23}$$

Lengésidők a tárcsa helyzetek függvéynében:

a [cm]	0	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2 [cm^2]	0	9	16	25	36	49	64	81	100
T [s]	2.819	3.479	4.052	4.665	5.265	5.989	6.449	7.022	7.656
T^2 [s^2]	7.946	12.105	16.421	21.758	27.721	35.862	41.597	49.304	58.612



Az illesztés paraméterei:

	m_{sz} $\left[\frac{s^2}{m^2}\right]$	b_{sz} $[s^2]$
érték	5103.92	8.59
hiba	118.308	0.627

Torziómodolusz meghatározása:

$$G = \frac{K \cdot (m_5 + m_8)}{m_{sz}} = (78.7 \pm 6.5)\ GPa \tag{24}$$

A hiba:

$$\Delta G = G \cdot \left(\frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta m_{sz}}{m_{sz}} + \frac{\Delta m_8 + \Delta m_5}{m_8 + m_5} \right) \tag{25}$$

Üres inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{inga} = \frac{Gb}{K} - \Theta_8 - \Theta_5 = (6.6019 \pm 0.1823) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2 \tag{26}$$

A hiba:

$$\Delta\Theta_{inga} = \Theta_{inga} \cdot \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta m_{sz}}{m_s z} \right) \tag{27}$$

Ismeretlen test tehetetlenségi nyomatékának meghatározása ingával:
Ha az ingára ismeretlen tehetetlenségi nyomatékú testet helyezünk, akkor:

$$\Theta = \frac{G}{K} T^2 - \Theta_{inga} \tag{28}$$

A mérés során egy hegert vizsgáltunk, olyan módón, hogy megnéztük a lengésidejét először álló, majd fekvőhelyzetben:

$$T_{allo} = 2.7254\ s \tag{29}$$

$$T_{fekvo} = 2.7355\ s \tag{30}$$

Behelyettesítve őket a képletbe:

$$\Theta_{allo} = 2.6207\, kg \cdot m^2 \tag{31}$$

$$\Theta_{fekvo} = 3.0586\, kg \cdot m^2 \tag{32}$$

6 Diszkusszió:

A méréseket összeségében sikeresnek mondhatom, a legtöbb értéket kis hibahatárral tudtam meghatározni.