

## A Bell–CHSH-egyenlőtlenségek tesztelése

jegyzőkönyv

---



Mérést végezte:  
Csák Szelina Fruzsina (UP5RJX)  
Koroknai Botond (AT5M0G)

Mérés időpontja:  
2023.09.26

Jegyzőkönyv leadásának időpontja:  
2023.10.1

## Tartalomjegyzék:

<b>1</b>	<b>A mérés célja és menete</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>A mérőeszközök</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Fontos összefüggések</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Mérési adatok és kiértékelésük</b>	<b>3</b>
4.1	Fotonszámok meghatározása . . . . .	3
4.2	Beütésszám-eloszlások mérése . . . . .	3
4.2.1	Sötétfotonok eloszlása . . . . .	3
4.2.2	Koincidencia-fotonok eloszlása . . . . .	3
4.2.3	Korrelációs-görbék mérése . . . . .	4
4.2.4	Bell-egyenlőtlenségek sértegetése . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Diszkusszió</b>	<b>7</b>

## 1 A mérés célja és menete

A kísérlet fő célja a kvantum-összefonódás vizsgálata volt, amelyet a Bell-CHSH-egyenlőtlenség használatával demonstráltunk. A vizsgálat során összefonódott fotonpárokat használtunk, és ezeket két polárszűrővel segítségével tanulmányoztuk.

## 2 A mérőeszközök

- SPDC-forrás
- $\frac{\lambda}{2}$ -es lemez
- Polárszűrők
- Tükrök
- Detektor
- Vezérlőegység
- Számítógép

## 3 Fontos összefüggések

Detektorok tökéletlenségének kiküszöbölésére az alábbi korrelációt használjuk:

$$\mathbf{E}(AB) = \frac{N_{++} - N_{+-} - N_{-+} + N_{--}}{N_{++} + N_{+-} + N_{-+} + N_{--}} \quad (1)$$

ahol  $N_{\pm\pm}$  azon beütésszámok, amikor Alice és Bob koincidenciában megszólalnak.

Bell-CHSH-egyenlőtlenség alakjai:

$$S = \mathbf{E}(AB) - \mathbf{E}(AB') + \mathbf{E}(A'B) + \mathbf{E}(A'B') \leq 2 \quad (2)$$

$$\bar{S} = \mathbf{E}(AB) - \mathbf{E}(AB') - \mathbf{E}(A'B) - \mathbf{E}(A'B') \leq 2 \quad (3)$$

Bell-egyenlőtlenség megsértésének erősségét az alábbi összefüggéssel jellemezhetjük:

$$n_{\Delta} = \frac{S - 2}{\Delta S} = \frac{\sqrt{S^2 + \bar{S}^2} - 2}{\Delta S} \quad (4)$$

ahol  $\Delta S$  a mért  $S$  érték szórása. Ha  $n_{\Delta}$  értéke negatív, akkor nincs sértés. A fotonok Poisson-eloszlás szerint érkeznek a forrásból, ezért egy adott  $N$  beütésszámmra a szórás  $\sqrt{N}$ .

Teljesen összefont négy Bell-állapot:

$$\Phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A tetszőleges irányú polárszűrő hatását leíró Jones-mátrix:

$$P_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

A két megfelelő irányú polárszűrő hatását leíró Jones-mátrixok tenzorszorzatát kell felírunk:

$$P_{\alpha,\beta} = P_{\alpha} \otimes P_{\beta}$$

## 4 Mérési adatok és kiértékelésük

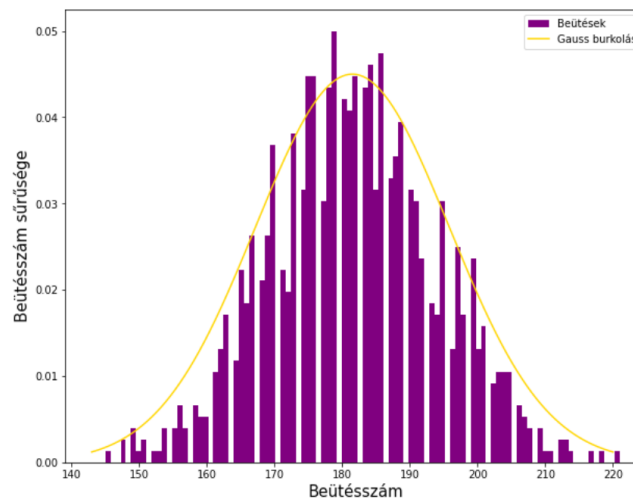
### 4.1 Fotonszámok meghatározása

### 4.2 Beütésszám-eloszlások mérése

#### 4.2.1 Sötétfotonok eloszlása

A mérés során kikapcsoltuk a lézert. Ez azt eredményezte, hogy a beütésszám nem lett nulla, mivel a mérőműszer körül továbbra is jelen voltak elektromágneses hullámok és egyéb fotonok, amelyek véletlenül ütköztek a detektorral. Fontos megjegyezni, hogy a sötétfotonok száma lényegesen alacsonyabb volt, mint amikor a lézer be volt kapcsolva (lásd az 1. és 2. ábrákon szereplő beütésszámok nagyságát).

Az integrálási időt rövidítettük le  $\tau = 100 \text{ ms}$ -re, és összesen 1000 adatot vettünk fel. Ahogyan az alábbi ábrán is látható, a sötétfotonok eloszlása nem követte a Poisson-eloszlást, hanem inkább Gauss-eloszlást mutatott.

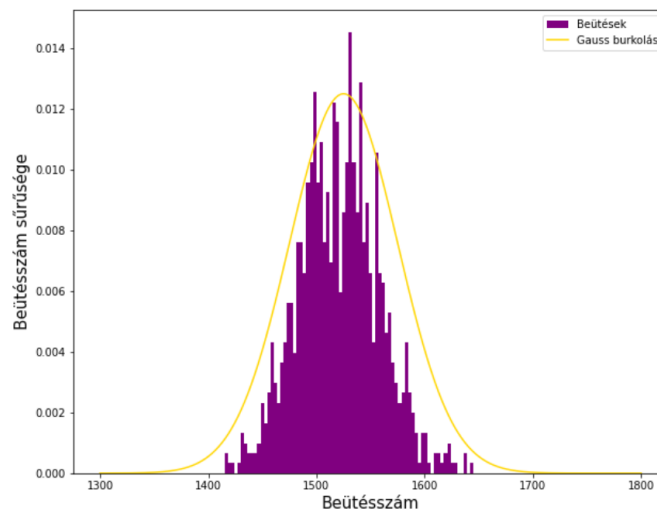


1. ábra: Sötétfotonok eloszlása

#### 4.2.2 Koincidencia-fotonok eloszlása

A mérést megismételtük a lézer visszakapcsolásával. Különböző paramétereket állítottunk be a pumpalézer-áram, az integrálási idő és a polárszűrők tekintetében annak érdekében, hogy a koincidencia csatornában 1-20 közötti beütésszámokat érjünk el. Ezt követően 1000 adatot rögzítettünk, ahol az integrálási idő  $\tau = 100 \text{ ms}$  volt.

Ebben az esetben sikerült elérnünk az elvárt Poisson-eloszlást. Bob pozíciója változatlanul  $90^\circ$ -os állásban maradt, míg Alice szögét változtattuk, és a maximális beütésszámot  $110^\circ$ -os állásnál észleltük.



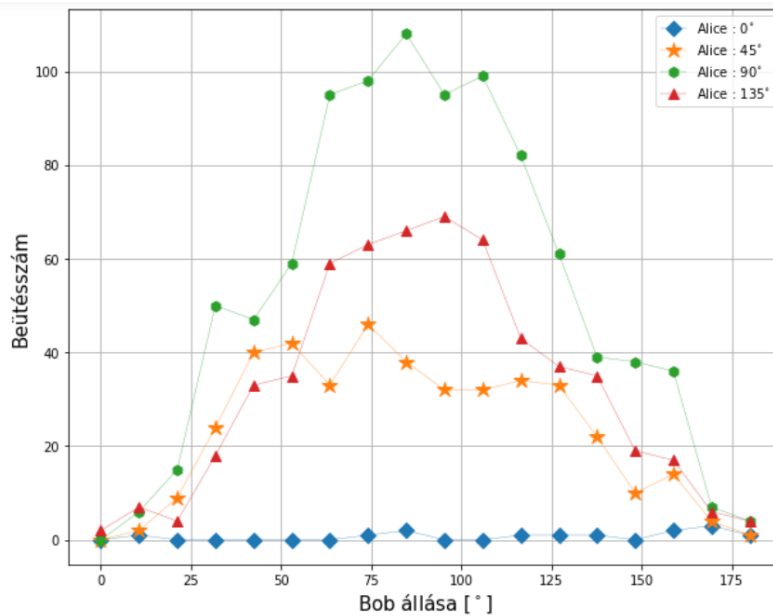
2. ábra: Koincidencia-fotonok eloszlása

### 4.2.3 Korrelációs-görbék mérése

A pumpalézer áramát  $I = 45 \text{ mA}$ -re állítottuk, és az integrálási időt  $\tau = 1 \text{ s}$ -re állítottuk. Alice polárszűrőjét 4 különböző szögállásban vizsgáltuk ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ ), míg Bob polárszűrőjét  $10^\circ$ -ként állítottuk  $0^\circ$ -tól  $180^\circ$ -ig. Minden egyes állásnál rögzítettük a koinkidencia csatornában mért beütésszámot. A mérést két állapotban végeztük el: klasszikus (1. táblázat) és Bell-állapotban (3. táblázat).

Bob [ $^\circ$ ]	Beütésszám			
	Alice [ $0^\circ$ ]	Alice [ $45^\circ$ ]	Alice [ $90^\circ$ ]	Alice [ $135^\circ$ ]
0	0	0	0	2
10	1	2	6	7
20	0	9	15	4
30	0	24	50	18
40	0	40	47	33
50	0	42	59	35
60	0	33	95	59
70	1	46	98	63
80	2	38	108	66
90	0	32	95	69
100	0	32	99	64
110	1	34	82	43
120	1	33	61	37
130	1	22	39	35
140	0	10	38	19
150	2	14	36	17
160	3	4	7	6
170	1	1	4	4
180	0	0	1	1

1. táblázat: Klasszikus esetben a leolvasott beütésszámok a koinkidencia csatornán



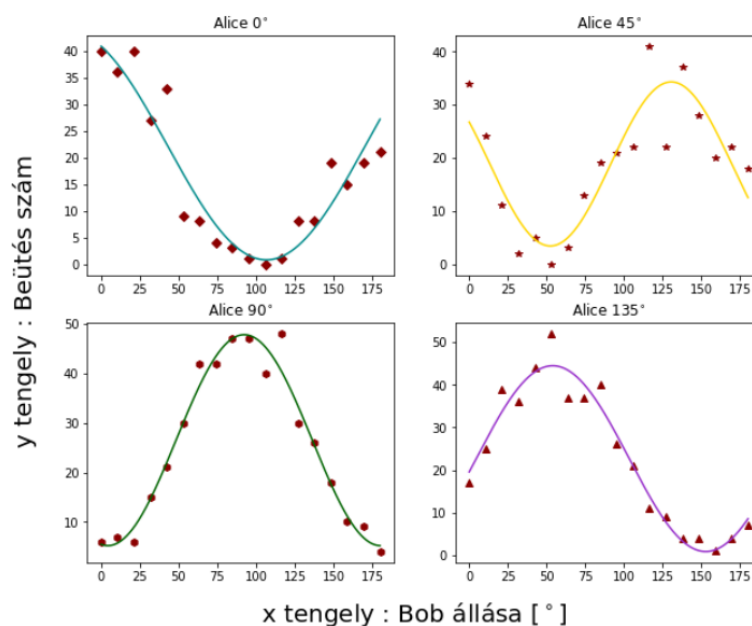
3. ábra: Klasszikus állapotban a beütésszám "Bob" polárszűrő változtatásával.

$E(0^\circ, 20^\circ)$	$E(45^\circ, 20^\circ)$	$E(0^\circ, 70^\circ)$	$E(45^\circ, 70^\circ)$	$S$	$\bar{S}$
$0.673 \pm 0.108$	$0.156 \pm 0.179$	$-0.853 \pm 0.075$	$-0.126 \pm 0.152$	$1.556 \pm 0.514$	$1.497 \pm 0.514$

2. táblázat: A kiszámolt  $E$  értékek és ezekből meghatározott  $S$  és  $\bar{S}$  értékek. A 4. egyenlet alapján megadtuk a sértés erősségét:  $n_\Delta = -0.977$

	Beütésszám			
Bob [°]	Alice [0°]	Alice [45°]	Alice [90°]	Alice [135°]
0	40	34	6	17
10	36	24	7	25
20	40	11	6	39
30	27	2	15	36
40	33	5	21	44
50	9	0	30	52
60	8	3	42	37
70	4	13	42	37
80	3	19	47	40
90	1	21	47	26
100	0	22	40	21
110	1	41	48	11
120	8	22	30	9
130	8	37	26	4
140	19	28	18	4
150	15	20	10	1
160	19	22	9	4
170	21	18	4	7
180	4	6	1	1

3. táblázat: Bell állapotban a leolvasott beütésszámok a koincidencia csatornán



4. ábra: Bell-állapotban a beütésszám "Bob" polárszűrő változtatásával

$E(0^\circ, 20^\circ)$	$E(45^\circ, 20^\circ)$	$E(0^\circ, 70^\circ)$	$E(45^\circ, 70^\circ)$	$S$	$\bar{S}$
$0.853 \pm 0.085$	$-0.569 \pm 0.149$	$-0.649 \pm 0.155$	$-0.553 \pm 0.169$	$0.380 \pm 0.558$	$2.623 \pm 0.558$

4. táblázat: A kiszámolt  $E$  értékek és ezekből meghatározott  $S$  és  $\bar{S}$  értékek. A 4. egyenlet alapján megadtuk a sértés erősségét:  $n_\Delta = 1.165$

#### 4.2.4 Bell-egyenlőtlenségek sértegetése

Lemértük a Bell-állapotban szükséges 16 különböző polárszűrő beállítást a Bell-méréshez, majd leolvastuk a koincidencia csatornában mért beütésszámokat (5. táblázat). A pumpalézer árama továbbra is  $I = 45 \text{ mA}$  volt, és az integrálási időt  $\tau = 15 \text{ s}$ -ra állítottuk.

Alice [°]	Bob [°]	Beütésszám
0	22.5	1342
0	112.5	989
90	22.5	1331
90	112.5	238
45	22.5	896
45	112.5	238
135	22.5	349
135	112.5	1214
0	67.5	422
0	157.5	844
90	67.5	492
90	157.5	844
45	67.5	1679
45	157.5	601
135	67.5	1679
135	157.5	601

5. táblázat: A 16 polárszűrő beállítás mellett leolvasott beütésszámok a koincidencia csatornán

E (0°, 22.5°)	E (45°, 22.5°)	E (0°, 67.5°)	E (45°, 67.5°)	S	$\bar{S}$
-0.190 ± 0.030	0.565 ± 0.030	-0.027 ± 0.040	0.020 ± 0.30	0.404 ± 0.127	-0.730 ± 0.127

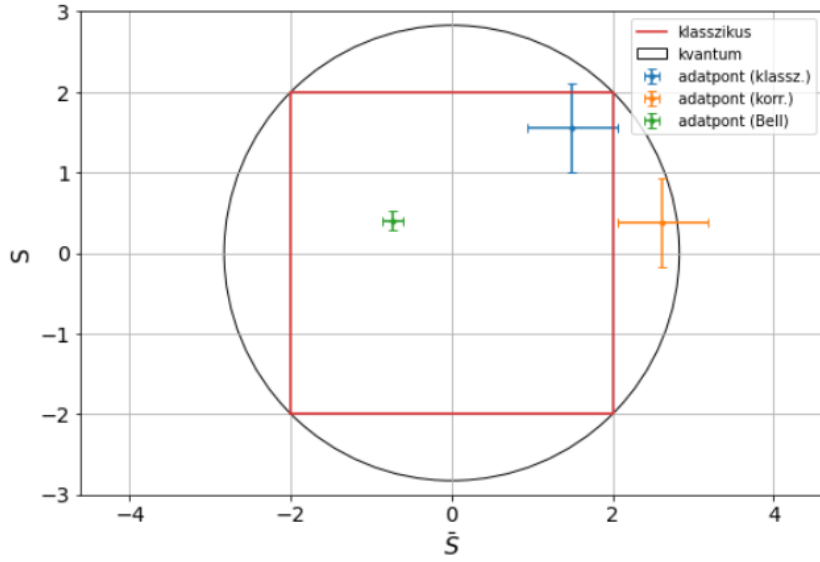
6. táblázat: A kiszámolt  $E$  értékek és ezekből meghatározott  $S$  és  $\bar{S}$  értékek. A 4. egyenlet alapján megadtuk a sértés erősségét:  $n_{\Delta} = -9.211$

Hibaszámításhoz használt képletek:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \left| \frac{\partial E}{\partial N_{++}} \right| \Delta N_{++} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial N_{++}^2} \right| \Delta N_{++}^2 + \left| \frac{\partial E}{\partial N_{+-}} \right| \Delta N_{+-} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial N_{+-}^2} \right| \Delta N_{+-}^2 + \\ & + \left| \frac{\partial E}{\partial N_{-+}} \right| \Delta N_{-+} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial N_{-+}^2} \right| \Delta N_{-+}^2 + \left| \frac{\partial E}{\partial N_{--}} \right| \Delta N_{--} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial N_{--}^2} \right| \Delta N_{--}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

egy adott  $N$  beütésszám hibája  $\sqrt{N}$ .

$$\Delta S = \Delta \bar{S} = S = \Delta E(AB) + \Delta E(AB') + \Delta E(A'B) + \Delta E(A'B') \quad (6)$$



5. ábra:  $S - \bar{S}$  grafikon

A mérés során a kétfotonos esetet vizsgáltuk úgy, hogy mindkét foton útjában volt egy-egy polárszűrő. Egy mérés eredményét így számolhatjuk ki:

$$\langle \Phi_+ | P_{\alpha, \beta} | \Phi_+ \rangle = \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\langle \Phi_- | P_{\alpha, \beta} | \Phi_- \rangle = \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\langle \Psi_+ | P_{\alpha, \beta} | \Psi_+ \rangle = \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\langle \Psi_- | P_{\alpha, \beta} | \Psi_- \rangle = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{2},$$

Ezek alapján az alábbi 4 állapot lehetséges:

$$\Phi_+ = S = 2\sqrt{2}, \bar{S} = 0$$

$$\Phi_- = S = 0, \bar{S} = 2\sqrt{2}$$

$$\Psi_+ = S = 0, \bar{S} = -2\sqrt{2}$$

$$\Psi_- = S = -2\sqrt{2}, \bar{S} = 0$$

Ebből, és a 4. és a 6. táblázatokban található értékek alapján, arra következtettünk, hogy a mérés során az SPDC forrás  $\Phi_-$  Bell-állapotban lőtte a fotonokat a rendszerbe.

## 5 Diszkusszió

Az első három feladat során sikeresen meghatároztuk az eloszlásokat és a korrelációs görbéket. Klaszikus esetben a Bell-egyenlőtlenségek megsértésének erősségére negatív eredményt kaptunk. Így nem történt sértés.

Az utolsó feladatban több újraszámolás után is negatív értéket kaptunk. Itt valami hiba történhetett mérés közben.