МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Методы прогнозирования в страховании

Forecasting Methods in Insurance

Курсовая работа
Студента 5 курса 509 группы
Королькова Даниила Александровича

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Москва, 2024г.

Содержание

1 Введение

В процессе изучения моделей, используемых в страховании (Крамера-Лундберга, Спарре Андерсена и др.), были замечены идеи схожие с теми, что лежат в основе прогнозирования портфельных рисков. В обоих случаях моделируется движение некоторого процесса Y_t, на который накладываются определённые условия. Эти условия могут быть вызваны как модельными упрощениями, так и экономическими ограничениями. Особого же внимания заслуживает определение дефолта. В этих областях оно может определяться одинаковым образом, а именно как первый момент достижения процесса определённого уровня (границы). Исходя из модельных ограничений, этот уровень может быть положен нулём либо же другой отметкой (например, сумма, полученная от вкладчиков). Так или иначе, область прогнозирования рисков богата своими идеями и достижениями, а поэтому заслуживает особого внимания и рассмотрения как минимум потому, что эти самые идеи могут быть переиспользованы и в страховании.

В данной работе рассматриваются методы анализа кредитного риска. Приведён обзор модели Мертона [1]. Описаны 3 модели портфельного кредитного риска PCR_SD, PCR_SS, PCR_MS [2], являющиеся расширением модели Мертона. Приведены численные эксперименты по расчёту вероятности дефолта.

2 О кредитном риске и связе со страхованием

Моделирование кредитных рисков является одной из наиболее важных тем в области управления рисками и финансов. Без отдела управления рисками сегодня невозможно представить ни один банк, рейтинговое агентство или крупную аналитическую компанию. В общем случае под риском будет пониматься следующее.

Определение 1. *Риском называется величина финансового ущерба, возникшего в результате наступления дефолта одной из сторон, без учёта возмещения в будущем.*

Для оценки кредитного риска можно применять модели различных категорий, учитывающие, соответственно, различные экономические инструменты. Некоторые модели не учитывают основополагающие финансовые показатели компании, но опираются на инструменты, оценивающие стоимость компании (например, кредитные рейтинги - наиболее популярные Standard & Poors, Moody's и Fitch), либо же на стоимости финансовых инструментов, уже находящихся в обороте (например, займы, облигации, свопы). Таким образом оценка является производной от других инструментов.

Напротив, рассматривая же основополагающие финансовые показатели компании, мы приходим к структурным моделям, в основе которых могут лежать такие показатели, как безрисковая ставка, долговая нагрузка и иные макроэкономические показатели. Полученные подобным образом результаты являются более обоснованными с точки зрения финансового положения самой компании, так как напрямую используются показатели риска этой компании.

Оценивая кредитный риск, так же всегда берут во внимание два возможных подхода к моделированию: моделирования риска, связанного с контрагентом (Counterparty Credit Exposure) и моделирование портфельного риска (PCR, Portfolio Credit Risk).

Отделы по работе с производными финансовыми инструментами традиционно отслеживают и устанавливают лимиты на кредитные риски контрагента. Поскольку риски, связанные с производными финансовыми инструментами, такими как свопы, зависят от уровня рынка в момент наступления дефолта, модели должны отражать не только фактические риски для контрагента на момент анализа, но и их потенциальные изменения в будущем. Такой анализ, как правило, не пытается учесть эффекты портфеля, такие как корреляция между дефолтами контрагентов. Иным образом устроены модели портфельного кредитного риска (PCR) измеряют кредитный капитал и специально разработаны для учета этих самых эффектов портфеля. К ним относятся структурная модель Мертона, KMV, CreditMetrics (JP Morgan, 1997), CreditRisk+ (Credit Suisse Financial Products, 1997) и другие. Было показано, что кажущиеся на первый взгляд совершенно разными (различия в предположениях о распределении, ограничениям, калибровке и решению), модели оказываются эквивалентными, а именно эмпирическая работа показывает, что все модели дают сходные результаты, если исходные данные согласованы [3].

В страховых моделях, рассматривая промежутки между выплатами и заложив нелинейный рост капитала (или учитывая дисконтирование), можно свести анализ к структуре, схожей с следующими.

3 Модель Мертона

Модель описывает справедливую (рыночную) стоимость ценной бумаги и имеет следующую структуру:

1. Активы компании описываются случайным процессом $V = V(t)$.
2. Стоимость активов компании состоит из двух величин: деньги акционеров (или собственный капитал) f_t и деньги вкладчиков $F_t, F_0 = B$ п.н.. $V_t = F_t + f_t$.
3. Цена безрисковой облигации, которая обещает выплату в размере одного доллара в момент времени T в будущем, равна $P(T) = exp(-rT)$, где r - безрисковая процентная ставка, одна и то же на всё время.
4. Рассматривается конечный промежуток времени $t \in [0, T]$.
5. $F_t, f_t \geq 0, \forall t$.
6. Заёмные средства и инвестиции компания получает в начальный момент времени.
7. В момент наступления расчётного периода T компания выплачивает заёмные средства B.

Определение 2. *Дефолтом называется первый момент времени, когда капитал компании оказывается ниже заёмных средств, т.е* $\min\limits_{t \in T}(F_t < B)$.

Предположим, что существует ценная бумага, рыночная стоимость которой, Y, в любой момент времени может быть записана как функция активов фирмы и времени, т.е., $Y = F(V, t)$. Мы можем записать динамику стоимости этой ценной бумаги в виде стохастического дифференциального уравнения:

$$dY = (\alpha Y - C)dt + \sigma Y dz,$$

где α - мгновенная ожидаемая норма прибыли в единицу времени по данной ценной бумаге; C - выплата (в долларах) за единицу времени по данной ценной бумаге; σ^2 - дисперсия Y; dz - стандартный винеровский процесс.

По лемме Ито получаем следующее выражение для динамики:

$$dY = (\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{vv} + (\alpha V - C)F_v + F_t)dt + \sigma V F_v dz$$

Далее Мертон выводит следующее выражения.

Теорема 1. *(Явный вид оценки стоимости f)*

$$f(V, t) = V\mathit{\Phi}(x_1) - Be^{-r\tau}\mathit{\Phi}(x_2),$$

где $\mathit{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ *- функция распределения Гаусса*

$x_1 = \frac{ln(V/B) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{\tau}}$

$x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{\tau}$

Теорема 2. *(Явный вид оценки стоимости F)*

$$F(V,\tau) = Be^{-r\tau}(\mathit{\Phi}(h_2(d,\sigma^2\tau)) + \frac{1}{d}\mathit{\Phi}(h_1(d,\sigma^2\tau))),$$

где $\mathit{\Phi}$ *- функция распределения Гаусса,*
$\tau = T - t$
$d = Be^{-r\tau}/V$
$h_1(d,\sigma^2\tau) = -(\frac{1}{2}\sigma^2\tau - ln(d))/\sigma\sqrt{\tau}$
$h_2(d,\sigma^2\tau) = -(\frac{1}{2}\sigma^2\tau + ln(d))/\sigma\sqrt{\tau}$

Положив $e^{-R(\tau)\tau} = F(V,\tau)/B$, имеем:

$$R(\tau) - r = -\frac{1}{\tau}ln(\Phi(h_2(d,\sigma^2\tau)) + \frac{1}{d}\Phi(h_1(d,\sigma^2\tau))).$$

$R(T)$ - это доходность к погашению по рискованному долгу при условии, что фирма не объявит дефолт. Представляется разумным называть $R(\tau) - r$ премией за риск.

4 Модели PCR-типа

Авторы статьи [2] предлагают шаблоны моделей, объединяющих моделирование воздействия и методы оценки кредитного риска портфеля. Благодаря явному моделированию стохастических рисков модель преодолевает основное ограничение, которое присуще портфельным моделям при учете рисков - предположение о том, что факторы рыночного риска, такие как процентные ставки, являются детерминированными. Двигаясь поэтапно, авторы проходят путь от детерминированной одношаговой модели (PCR_SD) к стохастической многошаговой (PCR_MS).

Каждая из предложенных моделей состоит из 5 частей:

1. Факторы риска и возможные сценарии
2. Совместная модель дефолта
3. Воздействия должников и убытки в соответствии с определенным сценарием
4. Условное распределение убытков по портфелю в сценарии
5. Агрегирование потерь во всех сценариях

4.1 PCR_SD

Это одношаговая модель с детерминированными рисками для должников и коэффициентами возмещения. Представляет собой двусоставную модель CreditMetrics. Дефолт рассматривается в том же смысле, что и в моделе Мертона.

Рассматриваемый портфель состоит из N счетов, при этом они будут разбиты на $N_s < N$ групп, внутри которой счета будут иметь схожие параметры. Таким образом каждый должник принадлежит к одной из N_s групп. Должники в одном секторе статистически идентичны (группировка должников по секторам облегчает оценку и решение проблемы).

4.1.1 Факторы риска и возможные сценарии

Рассматривается промежуток времени $[t_0, t]$, где, как правило, $t = 1$ год. В конце горизонта t сценарий определяется q^c кредитными факторами, которые влияют на кредитоспособность заемщиков в портфеле. Пусть $x(t)$ вектор коэффициентной доходности в момент времени t; т.е. $x(t)$ имеет компоненты $x_k(t) = ln(r_k(t)/r_k(t_0)), k = 1, ..., q^c$, где $r_k(t)$ - значение k-го коэффициента в момент времени t. Предположим, что на горизонте доходность распределена нормально: $x(t) \sim N(\mu, Q)$, где μ - вектор средней доходности, а Q - ковариационная матрица. Обозначим через $Z(t)$ вектор нормированных коэффициентных возвращений, т.е. $Z(t) = (x_k(t) - \mu_k)/\sigma_k$. Рассматриваемые компоненты считаются независимыми между различными группами.

4.1.2 Совместная модель дефолта

Определение 3. *(Безусловная вероятность дефолта)*

Обозначив через τ_j время дефолта должника j, будем называть безусловной вероятностью дефолта должника в секторе j к моменту времени t следующую величину:

$$p_j(t) = P(\tau_j \leq t)$$

Определение 4. *(Индекс кредитоспособности)*

Индекс кредитоспособности Y_j должника j определяет кредитоспособность или финансовое состояние этого должника на момент времени t. На основании значения этого индекса можно определить, находится ли должник в состоянии дефолта. Предполагается, что Y_j является следующей линейной комбинацией:

$$Y_j(t) = \sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} Z_k(t) + \sigma_j \varepsilon_j,$$

где волатильность j-сектора $\sigma_j = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk}^2}$, β_{jk} - показатель чувствительность k компоненты j должника, ε_j - н.о.р. стандартные нормальные случайные величины.

Замечание 1. *Y_j будет распределён по стандартному нормальному закону.*

Определение 5. *(Условная вероятность дефолта)*

Условная вероятность дефолта должника $p_j(t, Z)$ в секторе j - это вероятность того, что должник в секторе j объявит дефолт в момент времени t, обусловленный сценарием Z:

$$p(t, Z) = P(\tau_j \leq t | Z(t))$$

Рассматривая модель дефолта Мертона, будем исследовать критическую отметку α_j. $p_j = P(Y_j < \alpha_j) = \Phi(\alpha_j)$. Следовательно, $\alpha_j = \Phi^{-1}(p_j)$.

Условная вероятность дефолта примет следующий вид:

$$p_j(Z) = P(Y_j < \alpha_j | Z) = P(\sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} Z_k + \sigma_j \varepsilon_j < \alpha_j | Z) = P(\varepsilon_j < \frac{\alpha_j - \sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} Z_k}{\sigma_j}) = \Phi(\hat{\alpha}_j(Z)),$$

где $\hat{\alpha}_j(Z)$ - условная отметка ниже которой должна опуститься компонента ε_j j должника для наступления дефолта в сценарии Z.

4.1.3 Воздействия должников и убытки в соответствии с определенным сценарием

Определим величину задолжности для должника j в момент времени t, V_j, как сумму, которая будет потеряна из-за незавершенных операций с этим должником в случае дефолта, без учета будущих возмещений. Важным свойством PCR_SD является предположение, что подверженность должника риску является детерминированной, а не зависящей от сценария: $V_j \neq f(Z)$.

В таком случае величину экономических потерь определим следующим образом: $L_j(Z) = V_j(1 - \gamma_j)$, где γ_j - доля возвращаемой задолжности среди клиентов, ушедших в дефолт (recovery rate). При этом если же клиент не уходит в дефолт, а это происходит с вероятностью $1 - p_j(Z)$, то величина потерь равно 0.

4.1.4 Условное распределение убытков по портфелю в сценарии

В этой части авторы, пользуясь законом больших чисел с условием, что число заёмщиков достаточно велико, описывают ожидаемые убытки, как сумму математических ожиданий по каждому заёмщику: $L(Z) = \sum_{j=1}^{N} E(L_j(Z)) = \sum_{j=1}^{N} V_j(1 - \gamma_j) p_j(Z)$

4.1.5 Агрегирование потерь во всех сценариях

Безусловные портфельные потери рассматриваются как усреднение по всем сценариям.

$$P(L_p < \lambda) = \int_Z P(L(Z) < \lambda)dF(Z),$$

где L_p - безусловные портфельные риски, λ - уровень рисков.

4.2 PCR_SS

Эту модель авторы обогащают зависимостью от времени уже описанных выше детерминированных показателей, а так же разделением факторов на 2 группы: рыночные и кредитные драйверы.

4.2.1 Факторы риска и возможные сценарии

Рассматривается тот же временной промежуток $[t_0, t]$, а количество риск-факторов q в сценарии складывается из q^c (кредитные драйверы) и q^m (рыночные). Соответственно и вектор $x(t)$ раскладывается на первые q^m компонент x^m и последние q^c компонент x^c. Вектор Z будет состоять лишь из q^c компонент, будучи зависимым от x^c. Сценарий в этой модели состоит из объединённых векторов возврата x^m и Z.

Последующие разделы Совместная модель дефолта, Воздействия должников и убытки в соответствии с определенным сценарием, Условное распределение убытков по портфелю в сценарии, Агрегирование потерь во всех сценариях отличаются об описанных выше добавлением переменным зависимости как от x^m, так и от Z.

4.3 PCR_MS

Эта модель отличается от PCR_SS увеличением количества шагов.

4.3.1 Факторы риска и возможные сценарии

Теперь же рассматривается промежуток времени $[t_0, T], t_0 < t_1 < ... < t_M = T$. Вводится зависимость от промежуточных времён: $r(t_i), x_k(t_i) = ln(r_k(t_i)/r_k(t_0))$.

Рассматривается динамика риск факторов:

$$dr_k(t) = \mu_k(\tau, t)dt + \sum_{l=1}^{q} \sigma_{kl}(\tau, t)dw_l, k = 1, ..., q,$$

где μ_k - дрифт k фактора, w_l - винеровский процесс. Отсюда:

$$dx_k^c(t) = \mu_k^c dt + \sum_{l=1}^{q^c} \sigma_{kl}^c dw_l^c, k = 1, ..., q^c.$$

4.3.2 Совместная модель дефолта

Так же необходимо переопределить и следующие выражения.

Безусловная вероятность дефолта $p_j(t_i) = P(\tau_j = t_i)$ - является входом для модели. Безусловная кумулятивная вероятность дефолта $P_j(t_n) = P(\tau_j \le t_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\tau_j = t_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_j(t_i)$.

Так же переобозначается индекс кредитоспособности $A_j(t_i)$. Положив $y_j(t_i) = ln(A_j(t_i)/A_j(t_0))$, получим:

$$Y_j(t_i) = \tfrac{y_j(t_i) - \mu_j(t_i)}{\sigma_j(t_i)}.$$

Для каждого заёмщика j моделируется следующее поведение:

$$dy_j(t) = \sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} dx_k^c(t) + \sigma_j dw_j.$$

Отсюда получим:

$$y_j(t_n) = \sum_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} x_k^c(t_n) + \sigma_j \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta t_i} \varepsilon_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Дефолт наступает в первые на i шаге, если фирма опускается ниже уровня $\alpha_{ji} = \alpha_j(t_i)$. Соответственно время наступления дефолта $\tau_j = \min\limits_{i=1,...,M} (Y_j(t_i) < \alpha_{ji})$. $p_j(t_n) = P(\tau_j = t_n) = P(Y_j(t_1) > \alpha_{j1}, ..., Y_j(t_{n-1}) > \alpha_{jn-1}, Y_j(t_n) < \alpha_{ji})$.

Достаточно просто выглядит вероятность разорения в первый момент времени (функция распределения Гаусса от выбранного порога-квантиля α_{j1}). Затем авторы выводят общий вид безусловной вероятности разорения:

$$p_j(t_n) = P(\tau = t_n) = \int\limits_{-\infty}^{\hat{\alpha}_{jn}} \int\limits_{\hat{\alpha}_{jn-1}}^{\infty} ... \int\limits_{\hat{\alpha}_{j1}}^{\infty} \phi(v_n - v_{n-1}) ... \phi(v_2 - v_1) \phi(v_1) dv_1 ... dv_n,$$

где $\phi(x)$ - гауссова функция плотности, $\hat{\alpha}_{ji} = \alpha_{ji}\sqrt{i}$.

Опуская некоторые выкладки, приведём окончательный вид условной вероятности разорения.

$$p_j(t_n, x^c) = P(\tau_j = t_n | x^c(t_i), i = 1, ..., n) = P(\bigcap_{i=1}^{n-1} (\sum_{l=1}^{i} \varepsilon_l > u_{ji}), \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l < u_{jn}),$$

где $u_{ji} = \frac{\hat{\alpha}_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{q^c} \beta_{jk} x_{ki}^c}{\sigma_j \sqrt{\Delta t}}$

4.3.3 Воздействия должников и убытки в соответствии с определенным сценарием

Авторы выводят распределение экономических потерь и в этом сценарии.

$$L_{ji}(x) = \begin{cases} V_{ji}(x^m)(1 - \gamma_{ji}(x^m, x^c)) & \text{с вероятностью } p_j(t_i, x^c) \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p_j(t_i, x^c) \end{cases}$$

4.3.4 Условное распределение убытков по портфелю в сценарии

Естественно положить, что ожидаемые убытки по портфелю складываются из ожидаемых убытков по каждому времени t_i, т.е.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{M} L(t_i, x),$$

где $L(t_i, x) = \sum_{j=1}^{N} V_{ji}(x^m)(1 - \gamma_{ji}(x^m, x^c))p_j(t_i, x^c)$.

Ясно, что Агрегирование потерь во всех сценариях имеет ту же структуру, что и в предыдущем алгоритме, но слагаемые внутри формулы будут иметь свойственные для этой модели зависимости.

5 Моделирование вероятности дефолта логистической регрессией

Рассматривая одношаговый сценарий с конечным горизонтом прогнозирования, можно предложить несколько вариантов моделирования вероятности дефолта для указанного горизонта. Группируя клиентов по определённому признаку в группы, можно прийти к частотному анализу.

Другой же популярной моделью является модель логистической регрессии [4, стр. 119]. Рассмотрим N наблюдений, каждое из которых обладает конечным набором m числовых признаков $\{x_i^j\}_{j=1}^m$. Полученная матрица признаков X будет иметь размерность $N \times m$. Вектор целевой переменной, $y = \{y_i\}_{i=1}^N$ будет содержать индикатор события, обозначающего дефолт. Т.е. задача сводится к бинарной классификации. Наша цель грамотно подобрать параметры модели β на обучающей выборке так, чтобы на отложенной выборке, которая не была подана моделе во время обучения, получить приемлемое качество.

Модель будет иметь следующую форму:

$$ln\tfrac{P(G=1|X=x)}{P(G=0|X=x)} = \beta_{10} + \beta_1^T x.$$

Положим $p_1(x, \beta) = P(G = 1|X = x)$, где $\beta = \{\beta_{10}, \beta_1^T\}$. В таком случае $p_0(x, \beta) = 1 - p_1(x, \beta)$. Будем моделировать поведение случайной величины $y \sim Bern(p)$, где p положим равным $p_1(x, \beta)$. Заметим, что если бы мы положили p равным p_0, то задача свелась бы уже к моделированию симметричной апостериорной вероятности $P(G = 0|X = x)$.

Моделирование сводится к максимизации логарифма правдоподобия, а именно к минимизации следующего функционала:

$$l(\beta) = -\sum_{i=1}^{N} y_i ln(p(x_i, \beta)) + (1 - y_i) ln(1 - p(x_i, \beta))$$

Минимум можно найти, используя метод Ньютона. С каждым шагом будем обновлять веса по следующей формуле:

$$\beta^{new} = \beta^{old} - (\tfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial(\beta)\partial^T(\beta)})^{-1} \tfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta}$$

Ниже приведены результаты исследования.

Входные данные: будем работать с данными, отражающими задачу страхования автомобилей. Размер входных данных: 8000×25. Случайным образом выделим 6000 наблюдений для обучения модели и 2000 наблюдений для тестирования. Каждое наблюдение содержит 24 признака (например, рейтинг кредитной истории застрахованного лица, информация о зарплате, водительский стаж и др.) и вектор целевой переменной - индикатор наступления страхового требования $I(y_i = 1)$.

Распределение целевой переменной:

Видим, доли положительного класса на двух выборках практически совпадают.

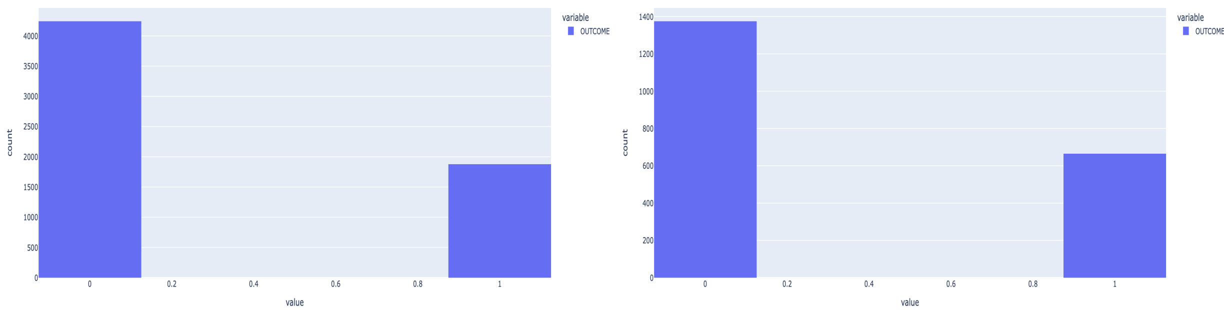

Рис. 1: Распределение целевой переменной на обучающей (слева) и тренировочной (справа) выборках.

Метрики качества:

На обучающей и тестовой выборках модель сумела верно предсказать 79% наблюдений.

На обучающей выборке точность и полнота модели оказались равными 0.69, 0.6. На тестовой - 0.71, 0.61.

Метрика roc_auc на тренировочной и тестовой выборках равна 0.83. ROC-кривая выглядит следующим образом.

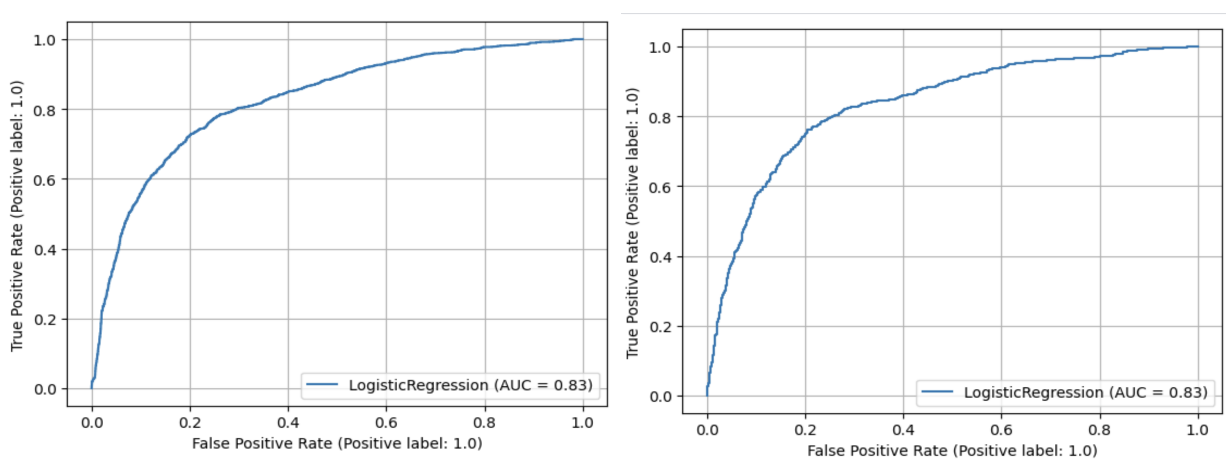

Рис. 2: ROC-кривая на обучающей (слева) и тестовой (справа) выборках.

6 Список литературы

[1] Robert C. Merton. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. 1973 (1974)
[2] Ian Iscoe, Alex Kreinin and Dan Rosen. An Integrated Market and Credit Risk Portfolio Model. 1999.
[3] Michel Crouhy, Dan Galai, Robert Mark. A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, 2000
[4] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. The Elements of Statistical Learning, 2008

7 Приложения

[1] Код с графиками распределений