

ABSTRACT

Il presente progetto riguarda la progettazione di un software in grado di risolvere istanze del problema del Commesso Viaggiatore applicando differenti algoritmi risolutori. L'obiettivo di questo testo è quello di descrivere le tecniche utilizzate e di confrontare i risultati ottenuti in termini di efficienza e bontà della soluzione prodotta. Verrà fornita una descrizione degli strumenti e l'ambiente di sviluppo utilizzati e sarà analizzato il codice di programmazione realizzato; non mancheranno paragrafi dedicati ad approfondire concetti teorici senza i quali la comprensione del codice potrebbe risultare meno chiara.

INTRODUZIONE

Questo capitolo introduttivo è dedicato alla storia, alle applicazioni e alle correnti sfide riguardanti uno dei più importanti problemi che la disciplina di Ricerca Operativa si trova ad affrontare, ossia il problema del commesso viaggiatore (Travelling Salesman Problem-TSP). Il nome deriva dalla sua più tipica rappresentazione: data una rete di città, connesse tramite delle strade, si vuole trovare il percorso di minore distanza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una ed una sola volta e ritornare alla città di partenza. Per quanto detto, risulta naturale modellare il TSP come un grafo pesato i cui nodi modellizzano le città relative al problema in questione mentre i possibili collegamenti tra le località sono modellati con gli archi del grafo i cui pesi possono rappresentare, per esempio, la distanza esistente fra la coppia di nodi collegati dall'arco. Chiaramente è possibile assegnare i pesi in modo arbitrario secondo le nostre esigenze, ad esempio si potrebbe anche tenere conto dei tempi di percorrenza o di eventuali pedaggi presenti nei singoli percorsi. Come è facile immaginare, il TSP può essere quindi utilizzato per una infinità di problemi pratici ma anche teorici.

Il problema del commesso viaggiatore riveste un ruolo notevole nell'ambito di problemi di logistica distributiva, detti anche problemi di routing. Questi riguardano l'organizzazione di sistemi di distribuzione di beni e servizi. Esempi di problemi di questo genere sono la movimentazione di pezzi o semilavorati tra reparti di produzione, la raccolta e distribuzione di materiali, la distribuzione di merci da centri di produzione a centri di distribuzione. Sebbene le applicazioni nel contesto dei trasporti siano le più naturali per il TSP, la semplicità del modello ha portato a molte applicazioni interessanti in altre aree. Un esempio può essere la programmazione di una macchina per eseguire fori in un circuito. In questo caso i fori da forare sono le città e il costo del viaggio è il tempo necessario per spostare la testa del trapano da un foro all'altro. Il problema del commesso viaggiatore risulta essere NP-hard: questo significa che, al momento, non è noto in letteratura un algoritmo che lo risolva in tempo polinomiale. Poiché esiste sempre una istanza per cui il tempo di risoluzione cresce esponenzialmente non è sempre possibile utilizzare algoritmi esatti per risolvere il TPS. Risulta quindi necessario fornire algoritmi euristici, in grado di risolvere in modo efficace istanze con un numero elevato di nodi in tempi ragionevoli.

Problemi matematici riconducibili al TSP furono trattati nell'Ottocento dal matematico irlandese Sir William Rowan Hamilton e dal matematico Britannico Thomas Penyngton. Nel 1857, a Dublino, Rowan Hamilton descrisse un gioco, detto Icosian game, a una riunione della British Association for

the Advancement of Science. Il gioco consisteva nel trovare un percorso che toccasse tutti i vertici di un icosaedro, passando lungo gli spigoli, ma senza mai percorrere due volte lo stesso spigolo. L'icosaedro ha 12 vertici, 30 spigoli e 20 facce identiche a forma di triangolo equilatero. Il gioco, venduto alla ditta J. Jacques and Sons per 25 sterline, fu brevettato a Londra nel 1859, ma vendette pochissimo. Questo problema è un TSP nel quale gli archi che collegano vertici adiacenti, e quindi corrispondono a spigoli dell'icosaedro, sono consentiti e gli altri no (si può pensare che richiedano moltissimo tempo e quindi vadano sicuramente scartati), per tale ragione si tratta di un caso molto particolare di TSP. La forma generale del TSP fu invece studiata solo negli anni Venti e Trenta del ventesimo secolo dal matematico ed economista Karl Menger. Tuttavia, per molto tempo non si ebbe altra idea che quella di generare e valutare tutte le soluzioni, il che mantenne il problema praticamente insolubile. Il numero totale dei differenti percorsi possibili attraverso le n città è facile da calcolare: data una città di partenza, ci sono a disposizione $(n - 1)$ scelte per la seconda città, $(n - 2)$ per la terza e cos'via. Il totale delle possibili scelte tra le quali cercare il percorso migliore in termini di costo è dunque $(n - 1)!$, ma dato che il problema ha simmetria, questo numero va diviso a metà. Insomma, date n città, ci sono $\frac{(n-1)!}{2}$ percorsi che le collegano.

Solo nel 1954, George Dantzig, Ray Fulkerson e Selmer Johnson proposero un metodo più raffinato per risolvere il TSP su un campione di $n = 49$ città: queste rappresentavano le capitali degli Stati Uniti e il costo del percorso era calcolato in base alle distanze stradali.

Nel 1962, Procter and Gamble bandì un concorso per 33 città, nel 1977 fu bandito un concorso che collegasse le 120 principali città della Germania Federale e la vittoria andò a Martin Grötschel oggi Presidente del Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin(ZIB) e docente presso la Technische Universität Berlin(TUB).

Nel 1987 Padberg e Rinaldi riuscirono a completare il giro degli Stati Uniti attraverso 532 città. Nello stesso periodo Groetschel e Holland trovarono il TSP ottimale per il giro del mondo che passava per 666 mete importanti. Nel 2001, Applegate, Bixby, Chvátal, and Cook trovarono la soluzione esatta a un problema di 15.112 città tedesche, usando il metodo cutting plane, originariamente proposto nel 1954 da George Dantzig, Delbert Ray Fulkerson e Selmer Johnson. Il calcolo fu eseguito da una rete di 110 processori della Rice University e della Princeton University. Il tempo di elaborazione totale fu equivalente a 22,6 anni su un singolo processore Alpha a 500 MHz. Sempre Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, e Helsgaun trovarono nel Maggio del 2004 il percorso ottimale di 24,978 città della Svezia. Nel marzo 2005, il TSP riguardante la visita di tutti i 33.810 punti in una scheda di circuito fu risolto usando CONCORDE: fu trovato un percorso di 66.048.945 unità, e provato che non poteva esserne uno migliore. L'esecuzione richiese approssimativamente 15,7 anni CPU. Ai giorni nostri il risolutore Concorde per il problema del commesso viaggiatore è utilizzato per ottenere soluzioni ottime su tutte le 110 istanze della libreria TSPLIB; l'istanza con più nodi in assoluto ha 85,900 città.

MODELLO MATEMATICO

Nella sua formalizzazione più generale, il problema del Commesso Viaggiatore consiste nell'individuare un circuito hamiltoniano di costo minimo per un dato grafo orientato $G = (V, A)$, dove $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di n nodi e $A = \{(i, j) : i, j \in V\}$ è un insieme di m archi¹.

¹Chiaramente sia n che m sono interi positivi

Senza perdita di generalità, si suppone che il grafo G sia completo e che il costo associato all'arco $[i, j]$, che indicheremo con c_{ij} , sia non negativo. Si osserva che aver imposto $c_{ij} \geq 0$ non è limitativo poichè è sempre possibile sommare a tutti i costi una costante sufficientemente elevata che li renda positivi senza alterarne l'ordinamento delle soluzioni. A differenza di quanto detto in precedenza, per tutto il proseguimento della tesi supporremo il grafo G non orientato: tale scelta deriva dal fatto che c_{ij} nel nostro lavoro rappresenta sempre la distanza (tipicamente euclidea) fra i vertici i e j si ha che:

$$c_{ij} = c_{ji}$$

ossia il costo associato ad un arco non dipende dalla direzione dell'arco stesso. Quando il grafo è non orientato la famiglia di coppie non ordinate di elementi di V , ossia l'insieme degli archi, viene indicato con E .

Definito il problema forniamo ora una sua possibile formulazione in termini di PLI. Introducendo le seguenti variabili decisionali:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{se il lato } e \in E \text{ viene scelto nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene il problema:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \text{ _costo circuito} \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{e \in \delta(v) \\ \text{due lati incidenti in } v}} x_e = 2 \quad , \forall v \in V \quad (2)$$

$$0 \leq x_e \leq 1 \text{ intera} \quad , \forall e \in E \quad (3)$$

L'insieme di vincoli definiti dalla (2) vengono chiamati vincoli di grado e impongono che in ogni vertice incidano esattamente due lati. In questa forma il modello è compatto dato che il numero di vincoli è polinomiale rispetto alla dimensione dell'istanza ma non è completo poichè è sprovvisto dei vincoli di subtour che impediscono soluzioni il cui grafo risulta non connesso.

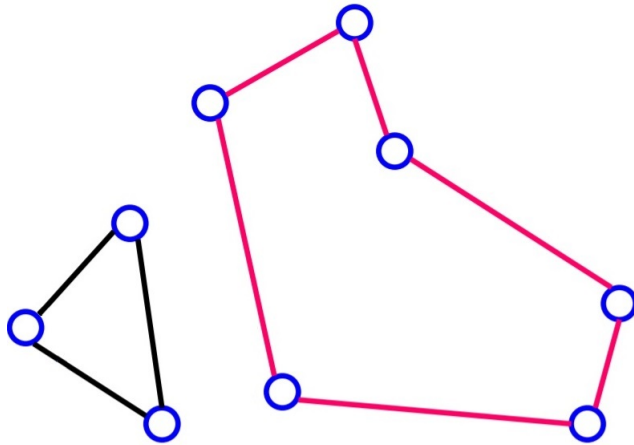


Figura 1: Soluzione con due subtour

Una possibile formulazione per l'eliminazione dei subtour, detta appunto **subtour elimination**, risulta essere:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \geq 1, \forall S \subsetneq V : 1 \in S, |S| \geq 2 \quad (4)$$

Il vincolo (4) indica che se si considera un sottoinsieme $S \subsetneq V$, che includa il vertice numerato con il simbolo 1, allora il taglio di G indotto da S :

$$\delta(S) = \{[i, j] \in E : i \in S, j \notin S\}$$

deve contenere almeno un lato appartenente ad E : poichè tutti i subtour violano tale vincolo la soluzione ottima non potrà contenerne al suo interno. Essendo il numero di questi vincoli pari ai sottoinsiemi S distinti, il numero di tali vincoli risulta esponenziale rispetto alla dimensione dell'istanza. In particolare il valore di S , dato un numero n di nodi, è 2^n : questo perchè associando un bit ad ogni vertice (il cui valore definisce se appartiene o meno al sottoinsieme) un qualsiasi sottoinsieme risulta identificato da una sequenza di n bit è quindi possibile definirne 2^n distinti. In realtà avendo noi imposto che il vertice 1 appartenga sempre ad ogni S e che $S \subsetneq V$, si ha che il numero di vincoli di subtour risulti pari a $2^{n-1} - 1$.

Una seconda formulazione equivalente per esprimere i vincoli di subtour è la seguente:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \forall S \subsetneq V, |S| \geq 2 \quad (5)$$

La gestione di un numero esponenziale di vincoli implica in genere tempi di risoluzione troppo elevati. Nella pratica però non è necessario utilizzare tutti i vincoli di subtour elimination, è sufficiente considerarne un numero molto più ridotto. Non potendo conoscere in anticipo quali siano quelli essenziali sarà nostro compito progettare un opportuno separatore: ossia una funzione che fornita in ingresso una soluzione x^* ottima per il modello corrente generi tutti i vincoli violati.

FILE DI INPUT

Le istanze del problema del Commesso Viaggiatore fornite in input al programma sono state selezionate da un libreria presente al seguente indirizzo web:

<http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/index.html>

Ogni istanza è memorizzata in un file di testo in un formato ben preciso, è stato quindi possibile progettare un opportuno parser che automaticamente riesca a estrapolare le informazioni contenute e popolare le strutture dati da noi create².

²Nessun altro tipo di input è supportato

STRUTTURA DEL PROGETTO

I file che compongono il programma realizzato sono stati organizzati nel modo seguente; all' interno della cartella radice, da noi chiamata TSPCsharp, si sono create le seguenti sottocartelle:

- **Src** contenente il progetto di Visual Studio;
- **Data** include le istanze del problema del commesso viaggiatore appartenenti alla TSPLib;
- **Concorde** contenente i file sorgenti in linguaggio C del programma Concorde³ la cui trattazione è rimandata al Capitolo X.

Il software sviluppato è composto da dieci classi, riportiamo di seguito il nominativo di ognuna di esse:

- Instances
- ItemList
- PathGenetic
- PathStandard
- Point
- Program
- Tabu
- TSP
- TSPLazyConsCallback
- Utility

Per le classi Point, Instances, Program, TSP e Utility verrà fornita una descrizione in questo capitolo, le rimanenti classi verranno presentate nei capitoli successivi poiché una loro trattazione risulterebbe in questo momento prematura.

CLASSE POINT

La classe Point è stata realizzata al fine di memorizzare le coordinate in due dimensioni di un singolo nodo n , a tal fine sono presenti due variabili private, accessibili attraverso i propri metodi get e set, di tipo **double** chiamate rispettivamente **x** e **y**. Il costruttore della classe non fa altro che ricevere in input i valori da assegnare a queste ultime. La classe presenta inoltre un ulteriore metodo pubblico e statico chiamato **Distance** che permette il calcolo della distanza tra due nodi:

³Concorde è un software freeware sviluppato da **William Cook** per la risoluzione di problemi TSP

```
public static double Distance(Point p1, Point p2, string pointType)
```

- **p1**: Rappresenta il primo nodo;
- **p2**: Rappresenta il secondo nodo;
- **pointType**: Rappresenta il modo con cui il costo relativo al lato che congiunge p1 con p2 viene calcolato; i valori che questo parametro può assumere sono i seguenti:
 - EUC_2D
 - ATT
 - MAN_2D
 - GEO
 - MAX_2D
 - CEIL_2D

A titolo di esempio riportiamo il codice eseguito nel caso in cui pointType risulti uguale a EUC_2D dove il costo del lato deve risultare pari alla distanza euclidea dei due nodi.

```
double xD = p1.X - p2.X;
double yD = p1.Y - p2.Y;

if (pointType == "EUC\_2D")
{
    return (int)(Math.Sqrt(xD * xD + yD * yD) + 0.5);
}
else if ...
```

Per quanto riguarda gli altri metodi di calcolo della distanza rimandiamo il lettore alla visione del codice.

CLASSE INSTANCE

La classe Instance è stata creata per memorizzare tutti i dati caratterizzanti l'istanza del problema del Commesso Viaggiatore. La tabella sottostante fornisce un elenco di variabili ed array definite all'interno della classe assieme ad una loro breve descrizione.

Tipo di dato	Nome	Descrizione
--------------	------	-------------

int	nNodes	Rappresenta il numero di nodi dell'istanza del problema del Commesso Viaggiatore.
Point[]	coord	Vettore di Point contenente le coordinate di tutti i vertici del grafo.
string	edgeType	Definisce la modalità con cui calcolare la distanza fra due nodi.
double	timeLimit	Definisce la quantità massima di tempo che il programma dispone per il calcolo della soluzione.
double	inputFile	Rappresenta il nome del file di input contenente l'istanza del problema del Commesso Viaggiatore.
double	tStart	Rappresenta i secondi trascorsi dall'attivazione del cronometro al reale inizio delle operazioni di calcolo per la risoluzione del problema
double	xBest	Rappresenta il costo della soluzione ottima restituita da cplex.
double	tBest	Contiene la quantità di tempo impiegata per il calcolo della soluzione ottima.
double	bestSol	Rappresenta la soluzione ottima ritornata da Cplex.
double	bestLb	Rappresenta il miglior lower bound attualmente calcolato.

double	bestLb	Rappresenta il miglior lower bound attualmente calcolato.
double	bestLb	Rappresenta il miglior lower bound attualmente calcolato.

xMin e yMin ... mi servivano per gnuplot ma dato che ho messo l'autoscale credo non servano più. per xBest ok

L'unico metodo appartenente a questa classe, esclusi i vari getter e setter, è **Print**, la cui firma risulta essere:

```
static public void Print(Instance inst)
```

dove:

- **inst**: oggetto della classe **Instance** contenente tutti dati che descrivono l'istanza del problema del Commesso Viaggiatore fornita in ingresso dall'utente;

Tale metodo stampa a video le coordinate di tutti i nodi memorizzati dentro **inst**. Viene di seguito riportato il codice:

```
for (int i = 0; i < inst.NNodes; i++)
    Console.WriteLine("Point #" + (i + 1) + " = (" + inst.Coord[i].X + ", "
        + inst.Coord[i].Y + ")");
```

CLASSE PROGRAM

La classe **Program** contiene il metodo **Main** che, come noto, rappresenta il punto di inizio del programma: attraverso le funzionalità di Visual Studio esso riceve in input l'array **argv** di stringhe contenente i parametri di input forniti dall'utente come il nome del file contenente l'input ed il time limit per la sua risoluzione. Appartengono a questa classe anche i metodi **ParseInst** e **Populate**: rispettivamente forniscono il parser per **argv** ed il parser del file di ingresso indicato con conseguente inizializzazione delle coordinate dei nodi. Firma e implementazione di tali metodi è rimandata al successivo capitolo.

All'interno del metodo **Main** vengono eseguite in ordine le seguenti attività:

- Crea una istanza della classe **Instance** ed invoca i due metodi precedentemente nominati.
- Crea un oggetto della classe **Stopwatch**. Questa classe è fornita direttamente da Visual Studio appartenente al Namespace **System.Diagnostics** e fornisce le funzionalità di un cronometro compatibile al multithreading.

- Invocato il metodo **TSPOpt** della classe **TSP** passandogli come parametri i due oggetti di tipo Instance e Stopwatch.
- In caso di risultato positivo (una soluzione del problema è stata trovata) viene mostrato a video il risultato ottenuto ed il tempo di calcolo trascorso.
- Viene effettuata una pulizia dei file creatisi durante l'esecuzione del problema.

In tutto il nostro progetto si è cercato di utilizzare il minor numero possibile di variabili globali, in particolare solo all'interno di questa classe ne sono state definite due di seguito descritte:

Tipo di dato	Nome	Valore	Descrizione
int	VERBOSE	5	Regola quanto output il programma mostra a video: si è scelto di condizionare l' esecuzione di molte righe di codice che producevano una stampa a video in base al valore assunto da questa variabile. Si è deciso di restringere il suo valore da 1 a 9, quando assume il valore 9 viene riportato a video il maggior numero possibile di stampe.
int	TICKS_PER_SECOND	1000	Cplex utilizza i così detti ticks come unità di misura per il tempo di calcolo, questa costante indica quanti ne trascorrono in un secondo.

CLASSE TSP

La classe **TSP** è stata pensata come il cuore del programma in quanto lo scheletro di tutti i metodi di risoluzione implementatisi trova al suo interno. Contiene un unico metodo pubblico che rappresenta quindi l'unico entry point per utilizzare questa classe: **TSPOpt**.

```
static public bool TSPOpt(Instance instance, Stopwatch clock)
```

Come già specificato nella descrizione della classe Program, TSPOpt è invocato dal metodo Main e pertanto maggiori dettagli riguardanti i suoi parametri di ingresso possono essere trovati nella sezione precedente.

TSPOpt si preoccupa di istanziare i vari elementi utilizzati da tutti i metodi di risoluzione⁴, fornire all'utente un'interfaccia grafica che gli permetta di scegliere quale di questi ultimi voglia utilizzare e di conseguenza invoca il metodo privato della classe associato alla scelta effettuata.

⁴Fatta eccezione per l>UserCutCallBack che è gestita esternamente da una DLL

Entrando nello specifico per quanto riguarda gli elementi inizializzati troviamo un oggetto della classe **Cplex** che come già accennato in precedenza ci permetterà di stabilire una connessione con il programma Cplex ed utilizzarlo per la risoluzione del modello matematico, ed un oggetto **Process** che sostanzialmente viene da noi utilizzato per inizializzare e comunicare con il programma GNUPlot⁵.

CLASSE UTILITY

La classe Utility può essere considerata come una libreria: contiene al suo interno solamente metodi **statici** che si è deciso di raggruppare al suo interno per rendere il codice il più compatto e leggibile possibile.

INTERPRETAZIONE FILE DI INPUT

Lo sviluppo del programma è iniziato realizzando una opportuna funzione per interpretare correttamente i parametri di ingresso forniti dall'utente. Oltre al nome del file di testo contenente i dati relativi all'istanza del problema che si vuole risolvere, all'utente è richiesto di fornire un time limit (espresso in secondi) e di scegliere con quale algoritmo risolvere l'istanza da esso fornita. Si è deciso di ricevere da riga di comando il nome del file e il time limit; per quanto riguarda la scelta dell'algoritmo risolutore ed eventuali parametri da esso richiesti si è preferito realizzare una semplice interfaccia grafica per favorire l'utente. Visual Studio, all'interno delle proprietà del progetto, permette di definire una stringa come parametro di ingresso per il programma. Questa viene automaticamente separata in sottostringhe utilizzando come separatore il carattere di spazio e fornito in ingresso al metodo Main. Allo stato attuale è gestita solamente la possibilità di fornire in ingresso il nome del file contenente i dati ed il timelimit per la ricerca della soluzione. Per ottenere una migliore organizzazione e chiarezza per il nostro lavoro è stato deciso di utilizzare questa regola per la costruzione della stringa di ingresso: ogni parametro inserito deve essere preceduto da una parola chiave che lo identifica il cui primo carattere deve essere '. '. Questa tecnica si rileverà utile anche in futuro nel caso si decidesse di ampliare la lista di parametri di ingresso.

La funzione che interpreta correttamente gli argomenti forniti in input dalla riga di comando è stata chiamata ParseInst ed ha la seguente intestazione:

```
static void ParseInst(Instance inst, string[] input)
```

- **inst**: rappresenta il riferimento all'istanza della classe Instance dichiarata nel metodo Main, i valori letti vengono memorizzati al suo interno.
- **input**: rappresenta un vettore contenente i parametri di input forniti da riga di comando dall'utente.

Il metodo è composto da un semplice ciclo for che scandisce il vettore **input** cercando una parola chiave, se trovata la stringa successiva viene memorizzata correttamente dentro **inst**:

⁵Per maggiori dettagli si veda la sezione dedicata a GNUPlot

```
for (int i = 0; i < input.Length; i++)
{
    if (input[i] == "-file")
    {
        //Expecting that the next value is the file name
        inst.InputFile = input[++i];
        continue;
    }
    if (input[i] == "-timelimit")
    {
        //Expecting that the next value is the time limit in seconds
        inst.TimeLimit = Convert.ToDouble(input[++i]);
        continue;
    }
}
```

Nel caso in cui l'utente non fornisca il nome del file di input oppure il time limit viene lanciata una eccezione:

```
if (inst.InputFile == null || inst.TimeLimit == 0)
    throw new Exception("File input name and/or timelimit are missing");
```

METODO POPULATE

Il metodo Populate è utilizzato per la lettura dei dati contenuti all'interno del file di input e soprattutto alla loro memorizzazione all'interno di un oggetto di tipo **Instance** in modo tale che una volta conclusosi il metodo questo contenga tutte le informazioni necessarie per la creazione del modello matematico.

I file di input presenta una struttura pressoché identica tra loro e cioè una divisione in sezioni identificate da parole chiave. Fatta eccezione per la sezione che descrive le coordinate dei nodi, tutte le altre si sviluppano in una sola riga la cui struttura è del tipo:

<parolaChiave> : <valore>

Di seguito sono riportati i valori che possono essere assunti dalle parole chiavi e il significato del contenuto della relativa sezione:

- NAME:<string>
 - nome con cui l'istanza è nota in letteratura.
- TYPE:<string>
 - indica il tipo dell'istanza. Nel nostro ambito sarà sempre TSP.

- **COMMENT:**<string>
 - include informazioni aggiuntive, solitamente contiene il nome dei gli autori che hanno proposto l'istanza.
- **DIMENSION:**<integer>
 - indica il numero di nodi.
- **EDGE WEIGHT TYPE:**<string>
 - Definisce il modo con cui il costo del lato deve essere calcolato, i possibili valori che può assumere il contenuto di questa sezione sono stati già presentati a pagina 7 durante la descrizione del metodo Distance.
- **NODE COORD SECTION:**
 - Il contenuto di questa sezione si sviluppa in più righe; in ogni riga troviamo nell'ordine:
 - * Un numero progressivo intero positivo che comincia da 1 e che identifica il nodo. Osserviamo che anche se in input il primo nodo è numerato a partire da 1, nel vettore Point di inst le coordinate saranno memorizzate a partire dall'indice 0⁶.
 - * Un numero reale positivo che definisce la coordinata x del nodo.
 - * Un numero reale positivo che identifica la coordinata y del nodo.

Il file di testo termina sempre con la stringa **EOF** che indica la fine del file di testo.

Per poter leggere il contenuto di un file è necessario inizializzare una nuova istanza della classe StreamReader passando come parametro al costruttore il percorso ove tale file è collocato.

```
StreamReader sr = new StreamReader("..\\..\\..\\..\\Data\\" +
    inst.InputFile)
```

Il metodo ReadLine() della classe StreamReader ritorna, come stringa, il contenuto di una intera riga del file la quale viene memorizzata all'interno di una variabile di tipo string chiamata **line**. Poichè si vuole leggere tutto il contenuto del file, è necessario invocare ReadLine() ciclicamente sull'oggetto **sr** finchè line risulta diversa da null oppure viene incontrata la parola chiave **EOF**.

```
while ((line = sr.ReadLine()) != null)
{
    ...

    //This line signals the end of the file
    if (line.StartsWith("EOF"))
    {
        Instance.Print(inst);
        Console.WriteLine(line);
    }
}
```

⁶Tale scelta è per mantenere una conformità con la metrica adottata dal linguaggio C# per l'enumerazione degli elementi dei vettori, nel caso in cui le coordinate vengano visualizzate a video il loro indice viene comunque incrementato di uno

```

    //Correct end of the file
    break;
}

...
}

```

Poichè ogni riga inizia con una nota parola chiave, per prelevare il contenuto di una sezione e memorizzarlo in un opportuno campo di `inst`, è sufficiente confrontare la prima stringa di ogni riga con una delle noti parole chiavi. Per far ciò si è usato il metodo `StartWith` della classe `String`, la cui firma è:

```
public bool StartWith(string value)
```

Questo metodo, applicato alla variabile `line`, determina se la prima stringa di `line` corrisponde alla stringa `value` specificata all'atto dell' invocazione del metodo. Nel caso in cui il confronto dia esito positivo, per prelevare il contenuto della sezione è necessario applicare i metodi `IndexOf` e `Remove` sempre alla variabile `line`; l'intestazione di tali metodi è riportata di seguito:

```
public int IndexOf(string value, int startIndex)
```

dove:

- **value**: stringa da cercare.
- **startIndex**: posizione iniziale della ricerca.

```
public string Remove(int startIndex, int count)
```

dove:

- **startIndex**: posizione da cui iniziare l'eliminazione dei caratteri.
- **count**: numero di caratteri da eliminare.

Per quanto detto, risulta immediata la comprensione del codice necessario per prelevare il contenuto della sezione e memorizzarlo dentro un oggetto di tipo **Instance** chiamando il metodo setter adeguato:

```
inst.SetterName = (line.Remove(0, line.IndexOf(:) + 2));
```

Il codice riportato deve chiaramente effettuare un cast per i tipi diversi da `string`, i metodi necessari sono già disponibili all'interno della classe **Convert** di `C#`.

Una volta che ci troviamo all'interno della sezione **NODE COORD SECTION** la lettura delle coordinate viene eseguita eseguendo ciclicamente il seguente codice:

```
string[] elements = line.Split(new[]{ ' ' },
    StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries);

int i = Convert.ToInt32(elements[0]);

inst.Coord[i - 1] = new Point(Convert.ToDouble(elements[1].Replace(".",
    ",")), Convert.ToDouble(elements[2].Replace(".", ",")));
```

Il metodo Split della classe String ritorna un array contenente in ogni elemento una sottostringa della stringa a cui tale metodo è applicato. Le sottostringhe vengono estratte dalla stringa in base ai caratteri delimitatori specificati all'atto dell'invocazione del metodo, quest'ultimo ha diversi overload: quello di nostro interesse è riportato di seguito.

```
public string[] Split(char[] separator, StringSplitOptions options)
```

dove:

- **separator**: array i cui elementi definiscono i separatori della stringa. Nel nostro caso è un array con un solo elemento contenente il carattere ' '.
- **options**: A questo parametro possono essere passate solo i seguenti due valori dell'enumerazione StringSplitOptions:
 - **StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries**: indica che gli elementi dell'array ritornato non possono essere stringhe vuote. Questo è l'opzione da noi selezionata.
 - **StringSplitOptions.None**: indica che gli elementi dell'array ritornato possono essere stringhe vuote.

Ogni coordinata letta viene tradotta in un oggetto di tipo **Point** il quale è a sua volta memorizzato all'interno del vettore **Coord** dell'oggetto di tipo **Instance** nella posizione indice letta.

Come nota conclusiva specifichiamo che C# utilizza come separatore tra parte intera e parte decimale di un numero il carattere ',' e non il carattere '.' utilizzato per nei file di input. E' quindi necessaria una modifica delle stringhe lette attraverso il metodo non statico della classe string:

```
public string Replace(string oldValue, string newValue)
)
```

dove:

- **oldValue**: stringa da sostituire;
- **newValue**: stringa con cui sostituire tutte le occorrenze di oldValue.

COSTRUZIONE DEL MODELLO

In questo paragrafo vedremo come è possibile creare da programma un modello matematico attraverso l'uso di alcune routine appartenenti alla libreria di Cplex. Esula dallo scopo di questa tesi fornire al lettore una descrizione del funzionamento di Cplex da iterativo.

COSTRUZIONE MODELLO IN C

Per istanziare un nuovo modello di programmazione lineare è necessario inizializzare un **environment** di Cplex utilizzando la funzione **CPXopenCPLEX** la quale ritorna un puntatore all'environment creato, la firma di tale funzione è:

```
CPXENVptr CPXopenCPLEX(int* status\_p)
```

dove:

- **status_p**: puntatore ad una variabile di tipo intero usato per ritornare un eventuale codice di errore.

Ad un environment è possibile associare uno o più modelli attraverso il comando **CPXcreateprob**, la cui intestazione è:

```
CPXLPptr CPXcreateprob(CPXENVptr env, int * status\_p, const char *  
    probname\_str)
```

dove:

- **env**: puntatore all'environment sul quale si è deciso di creare il modello;
- **status_p**: puntatore ad una variabile di tipo intero usato per ritornare un eventuale codice di errore;
- **probname_str**: rappresenta un array di caratteri che definisce il nome del modello creato.

Tale funzione ritorna un puntatore al modello creato: questo risulta vuoto poichè privo di funzione obbiettivo, variabili e vincoli.

Procediamo quindi al loro inserimento partendo definendo contemporaneamente le variabili e il loro coefficiente nella funzione obbiettivo; è possibile procedere in più modi, quello da noi scelto è di utilizzare la funzione **CPXnewcols** la cui firma è:

```
int CPXnewcols (CPXENVptr env,CPXLPptr lp,int ccnt,double *obj, double  
    *lb, double *ub, char *ctype, char **colname);
```

dove:

- **env** : puntatore all'environment di Cplex nel quale vuole essere inserito il modello.

- **lp** : puntatore al problema di programmazione lineare.
- **ccnt** : intero che indica il numero delle nuove variabili che vengono aggiunte al problema.
- **obj** : array contenente per ogni variabile il relativo coefficiente
- **lb** : array di lunghezza ccnt contenente il lower bound di ogni variabile aggiunta.
- **ub** : array contenente l'upper bound di ogni variabile aggiunta.
- **ctype** : array di lunghezza ccnt contenente il tipo di ogni variabile. I valori che un elemento di questo array può assumere sono:
 - 'C': variabile continua
 - 'B': variabile binaria
 - 'I': variabile intera
- **colname** : array di lunghezza ccnt contenente puntatori ad array di char, a sua volta ognuno di essi deve contenere il nome della variabile aggiunta al modello.

Per motivi di semplicità non andremo ad inserire tutte le variabili contemporaneamente ma una ad una.

E' giunto quindi il momento di parlare di quali variabili vogliamo aggiungere al nostro modello tenendo presente che il medesimo discorso sarà applicato anche per la parte in C#. Sappiamo che per ogni coppia di nodi (i,j) ⁷ esiste un unico lato che li collega e che quest'ultimo è privo di direzione. Si presenta quindi la necessità di definire una convenzione per l'assegnazione del nome ai vari lati. La scelta adottata è la seguente: considerando due generici nodi **i** e **j** allora il loro lato sarà chiamato **x(i,j)** se $i < j$ oppure **x(j,i)** se $j < i$ ⁸.

Questa convenzione offre anche un importante spunto per decidere con quale ordine memorizzare i vari parametri delle variabili (nome, coefficiente, lower bound ecc.): date due coppie distinti di nodi (i,j) e (v,w) ⁹ la posizione di memoria in cui viene memorizzata l'informazione riguardante la prima coppia è **inferiore** rispetto alla seconda se e solo se $(i < v) || (i == v \& j < w)$. In altre parole saranno memorizzate in ordine le informazioni per i nodi (1,2), (1,3), ..., (2,3), (2,4), ..., (n-1,n).

Una ulteriore considerazione necessaria è la seguente: come mostrato poco fa il metodo **CPXnewcols** si aspetta il passaggio di diversi array mentre noi vorremmo utilizzare semplici variabili. La soluzione è molto semplice e consiste nell'anteporre il carattere & prima di ogni variabile in questo modo stiamo in realtà passando un puntatore alla sua locazione di memoria.

Le operazioni descritte sono state realizzate tramite il seguente codice:

```
double zero = 0.0; // one = 1.0;
char binary = 'B';
```

⁷Ricordiamo che i deve essere diverso da j in quanto per i problemi da noi considerati i cappi non sono ammessi

⁸Notiamo che per quanto espresso nella nota precedente non ha senso considerare il caso $i = j$

⁹dove assumiamo $i < j \& v < W$


```

char **cname = (char **)calloc(1, sizeof(char *));           // (char **)
    required by cplex...
cname[0] = (char *)calloc(100, sizeof(char));

// add binary var.s y(i,j)

for (int i = 0; i < inst->nNodes; i++)
{
    for (int j = i + 1; j < inst->nNodes; j++) //Mi interessano solo le
        coppie con i<j
        {
            sprintf(cname[0], "x(%d,%d)", i + 1, j + 1);
            double obj = dist(inst->coord[i], inst->coord[j], inst->edgeType);
            double ub = 1.0;
            if (CPXnewcols(env, lp, 1, &obj, &zero, &ub, &binary, cname))
                printError(" ... errato CPXnewcols su x");//Aggiungo una
                    variabile al modello
            if (CPXgetnumcols(env, lp) - 1 != xPos(i, j, inst)) printError("
                ... errata posizione per x");//Serve solo per controllare se
                    la funzione xPos è corretta
        }
}

```

La funzione chiamata `xPos` riceve in ingresso un lato (i,j) del grafo e restituisce l'indice della variabile Cplex associata a quest'ultimo. Dato che risulta possibile effettuare errori nella realizzazione di questa funzione, in questo punto del codice è utile effettuare un controllo se il valore ritornato da `xPos` coincide con quello aspettato, in caso contrario viene sollevata una eccezione. Firma e dettagli implementativi di `xPos` saranno forniti nel paragrafo successivo in quanto è definita anche in C#.

Una volta definite le variabili è necessario creare i vincoli: per far ciò si è utilizzata la funzione `CPXnewrows`, la cui firma è:

```

int CPXnewrows(CPXENVptr env, CPXLPptr lp, int rcnt, const double * rhs,
    const char * sense, const double * rngval, char ** rowname)

```

dove:

- **env**: puntatore all'environment di Cplex nel quale vuole essere inserito il modello.
- **lp**: puntatore al problema di programmazione lineare.
- **rcnt**: intero che definisce il numero di nuovi vincoli aggiunti al modello.
- **rhs**: array di lunghezza rcnt contenente il termine noto di ogni vincolo.
- **sense**: array di lunghezza rcnt i cui elementi possono assumere i seguenti valori:
 - 'L': indica che il vincolo è una disuguaglianza il cui segno è \leq
 - 'E': indica che il vincolo è una uguaglianza
 - 'G': indica che il vincolo è una disuguaglianza il cui segno è \geq

– '**R**' : indica che il vincolo è limitato

- **rngval**: variabile di tipo double contenente il valore 1.0;
- **rowname**: variabile di tipo char che assume il valore costante 'B';

Anche in questo caso anzichè aggiungere tutti i vincoli in una singola iterazione, risulta più semplice aggiungere un vincolo per volta invocando il metodo tante volte quante sono i vincoli da aggiungere.

COSTRUZIONE E RISOLUZIONE DEL MODELLO MATEMATICO IN C#

Per poter creare un modello matematico in Cplex, utilizzando come linguaggio di programmazione C# è necessario creare inizialmente una istanza della classe **Cplex**:

```
Cplex cplex = new Cplex();
```

Per creare il modello si associano, tramite opportune funzioni che descriveremo in questo paragrafo, all'istanza creata la funzione obbiettivo, le variabili e i vincoli del modello.

In C# le variabili del modello sono oggetti il cui tipo deve implementare l'interfaccia **INumVar**. Non è necessario creare da noi una nuova classe infatti ci viene fornito il metodo **NumVar** della classe **Cplex**:

```
public virtual INumVar NumVar(double lb, double ub, NumVarType type,
    string name)
```

dove:

- **lb**: Rappresenta il lower bound della variabile creata;
- **ub**: Rappresenta l'upper bound della variabile creata;
- **type**: Questo campo determina il tipo della variabile, può assumere i seguenti valori:
 - **NumVarType.Int**: Nel caso di variabile intera;
 - **NumVarType.Int**: Nel caso di variabile binaria;
 - **NumVarType.Float**: Nel caso di variabile continua;
- **name**: Nome identificativo della variabile.

Che come si può notare nella firma ha come tipo di ritorno un tipo di oggetto che implementa l'interfaccia da noi desiderata. Vedremo nel seguito della trattazione quanto utili risultano essere le funzionalità offerte da quest'ultima.

Introduciamo ora una seconda interfaccia **ILinearNumExpr** che come si può intuire viene implementata da oggetti che vogliono definire una espressione lineare. Anche in questo caso ci viene incontro la classe **Cplex** attraverso il metodo **LinearNumExpr**:

```
ILinearNumExpr expr = cplex.LinearNumExpr();
```

La variabile **expr** rappresenta quindi una espressione lineare che deve essere definita come:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i$$

dove x_i sono variabili di tipo **INumVar** mentre a_i è un coefficiente di tipo **double**. Per aggiungere all'oggetto **expr** una variabile del modello è necessario utilizzare il metodo **AddTerm** la cui intestazione è:

```
void AddTerm(INumVar var, double coef)
```

dove:

- **var**: variabile da aggiungere all'espressione;
- **coeff**: coefficiente della variabile aggiunta all'espressione.

L'implementazione da noi fornita per quanto riguarda la funzione obiettivo è la seguente:

```
//Populating objective function

for (int i = 0; i < instance.NNodes; i++)
{
    //Only links (i,j) with i < j are correct

    for (int j = i + 1; j < instance.NNodes; j++)
    {
        //zPos returns the correct position where to store the variable
        //corresponding to the actual link (i,j)

        int position = zPos(i, j, instance.NNodes);

        z[position] = cplex.NumVar(0, 1, NumVarType.Int, "x(" + (i + 1) +
            "," + (j + 1) + ")");

        expr.AddTerm(z[position], Point.Distance(instance.Coord[i],
            instance.Coord[j], instance.EdgeType));
    }
}
```

Espressioni lineari definite in questo modo possono essere utilizzate sia per definire la funzione obiettivo del modello ma anche per i suoi vincoli.

Nel primo caso risulta sufficiente invocare i metodi non statici **AddMinimize** oppure **AddMaximize** della classe **Cplex** che rispettivamente definiscono una funzione obiettivo da minimizzare o da massimizzare, nel nostro caso:

```
cplex.AddMinimize(expr);
```

Per quanto riguarda i vincoli è necessario utilizzare i metodi **AddEq**, **AddLe**, **AddGe** che rispettivamente aggiungono al modello una equazione, una disequazione avente segno \leq , una disequazione avente segno \geq .

Nel nostro caso poichè ogni vincolo è una equazione riportiamo di seguito la firma della relativa funzione:

```
public virtual IRange AddEq(INumExpr e, double v, string name)
```

dove:

- **e**: Espressione contenente le variabili del vincolo;
- **v**: Termine noto del vincolo;
- **name**: Nome identificativo del vincolo.

Il codice completo diventa quindi:

```
for (int i = 0; i < instance.NNodes; i++)
{
    //Resetting expr
    expr = cplex.LinearNumExpr();

    for (int j = 0; j < instance.NNodes; j++)
    {
        //For each row i only the link (i,j) or (j,i) has coefficient 1
        //xPos return the correct position where link is stored inside the
        vector x

        if (i != j) //No loops with only one node
            expr.AddTerm(x[xPos(i, j, instance.NNodes)], 1);
    }

    //Adding to the model the current equation with known term 2 and name
    degree(<current i node>)
    cplex.AddEq(expr, 2, "degree(" + (i + 1) + ")");
}
```

Spiegato come è possibile creare un modello C# risulta comprensibile la scelta di realizzare un'opportuna funzione, chiamata **BuilModel** appartenente alla classe **Utility**, che produce il modello matematico del Commesso Viaggiatore risolubile da Cplex:

```
public static INumVar[] BuildModel(Cplex cplex, Instance instance, int n)
```

dove:

- **cplex**: oggetto sul quale si definirà il modello matematico(funzione obbiettivo,variabili e vincoli)
- **instance**: oggetto contenente tutti i dati inerenti all'istanza del Commesso Viaggiatore fornita in ingresso dall' utente.
- **n**: Parametro la cui spiegazione è rimandata al capitolo...

Passiamo infine a descrivere i metodi necessari per risolvere il modello, ottenere il costo e la soluzione ottima calcolata da Cplex.

Per risolvere il modello è sufficiente invocare, sull'oggetto di classe Cplex dove è stato definito, il metodo **Solve**:

```
cplex.Solve();
```

Una volta avviata la risoluzione, Cplex fornisce in automatico informazioni sul processo stampate nello standard output da noi definito¹⁰: inizialmente troviamo le impostazioni di risoluzione selezionate come ad esempio il numero di Thread .., successivamente .. .

Terminata l'operazione il costo della soluzione è memorizzato all'interno della variabile **ObjValue** di tipo **double** del solito oggetto **cplex**:

```
cplex.ObjValue;
```

Naturalmente è anche possibile conoscere il valore assunto da ogni variabile nella soluzione fornita da Cplex tramite il metodo **GetValues** della classe **Cplex**:

```
public virtual double GetValues(IIntVar[] var)
```

dove:

- : rappresenta il vettore contenente tutte le variabili appartenenti al modello.

È presente anche l'analogo metodo per accedere al valore di una sola variabile **GetValue**. Il suo utilizzo è da noi altamente sconsigliato in quanto sperimentalmente è stato verificato che ciclare quest'ultimo metodo impiega un tempo molto maggiore rispetto al semplice **getValues**.

————— Qui bisogna aprire un capitolo nuovo con una breve introduzione, dire che si passa ora ad esporre i metodi utilizzati per gestire i vincoli di subtour elimination —————

METODO LOOP

Il primo metodo sperimentato prende il nome di **LOOP**. —————

————— Va messa un pò di storia!!!! ————— L'idea alla sua base è molto semplice ed è la seguente: inizialmente il modello fornito non deve contenere alcun vincolo di subtour elimination ed una volta risolto si procede ad analizzare la soluzione ottima trovata. Se questa presenta dei subtour il modello viene ampliato inserendovi gli appositi vincoli per eliminarli e si procede ad una sua nuova risoluzione. Viene da sé che quest'ultimo passo va ripetuto fino a quando la soluzione proposta non risulta accettabile e quindi priva di subtour¹¹. È importante far notare che ogni iterazione del loop i vincoli aggiunti nella precedente sono ovviamente mantenuti.

In questo modo siamo sicuri di aver aggiunto al nostro modello solo i vincoli strettamente necessari il che non assicura che essi non siano un numero esponenziale.

Per poter implementare il metodo Loop risulta quindi evidente la necessità di sviluppare un'opportuna funzione in grado di individuare la presenza di subtour all'interno di una generica soluzione proposta

¹⁰Se non viene modificato di default risulta essere la classica console del progetto C#

¹¹Da qui deriva il nome del metodo in quanto la soluzione consiste in un loop delle stesse operazioni

e di generarne gli opportuni vincoli per eliminarli.

In letteratura esistono molteplici modi per eseguire tali operazioni, quella da noi adottata si rifà all'algoritmo di Kruskal per trovare un albero a costo minimo in un grafo connesso con lati non orientati¹².

La tecnica da noi adottata è stata quella di creare due metodi chiamati **InitCC** e **UpdateCC**: il primo serve solamente come inizializzazione per le strutture dati utilizzate dal secondo il quale, se invocato una volta per ogni lato appartenente alla soluzione attuale ne trova tutte le componenti connesse indicando anche quali lati sono a loro appartenenti. I dettagli riguardo le loro implementazioni sono visibili nella appendice di questo testo, per ora specifichiamo solamente che al termine dell'utilizzo del metodo **UpdateCC** i seguenti oggetti:

```
List<ILinearNumExpr> rcExpr = new List<ILinearNumExpr>();  
List<int> bufferCoeffRC bufferCoeffRC = new List<int>();
```

risultano essere costruiti, in particolare **rcExpr** contiene le espressioni dei subtour elimination mentre invece **bufferCoeffRC** contiene il numero di lati appartenenti ad ogni subtour e quindi il termine noto delle precedenti espressioni¹³.

Se all'interno di **rcExpr** è presente una espressione sola significa che la soluzione attuale è valida e quindi ottima per il problema, al contrario si deve procedere all'inserimento dei vincoli con un semplice ciclo for:

```
for (int i = 0; i < rcExpr.Count; i++)  
    cplex.AddLe(rcExpr[i], bufferCoeffRC[i] - 1);
```

METODI UpdateCC e InitCC

Come già specificato nella sezione riguardo il metodo **LOOP** questi due metodi di supporto appartenenti alla classe **Utility** hanno il compito di individuare tutte le componenti connesse (che da ora in avanti abbrevieremo con **cc**) di una generica soluzione proposta.

Prima di passare alla implementazione vera e propria introduciamoli ad alto livello: inizialmente si vuole assumere l'esistenza di n **cc** distinte, ognuna di esse contenente un nodo della soluzione. Questo è il compito della dalla funzione **InitCC**.

Successivamente per ogni lato della soluzione si vuole analizzare a quali **cc** sono assegnati i due nodi che lo caratterizzano. Se queste sono differenti vanno unificate in modo tale che tutti i nodi appartenenti, ad esempio, alla seconda ora appartengano tutti alla prima. Nel caso in cui invece le due **cc** coincidano significa che abbiamo trovato un subtour e il relativo vincolo di eliminazione deve essere definito. Tutte questo è invece compito del metodo **UpdateCC**.

Iniziamo quindi l'analisi del codice necessario. Per prima cosa si necessita di un vettore di interi che contenga all'indice i –esimo l'identificativo della **cc** alla quale appartiene il nodo i ¹⁴.

¹²Nello specifico la parte di nostro interesse è quella che impedisce la formazione di più componenti connesse

¹³Il codice assume che l'espressione di indice i presente all'interno di **rcExpr** abbia il proprio termine noto nella posizione di indice i dentro **bufferCoeffRC**

¹⁴Per semplicità si è deciso di identificare ogni **cc** con un valore intero univoco

L'inizializzazione di questo vettore viene fornita da **InitCC**:

```
public static void InitCC(int[] cc)
{
    for (int i = 0; i < cc.Length; i++)
    {
        cc[i] = i;
    }
}
```

Passiamo ora al metodo **UpdateCC** che presenta la seguente firma:

```
public static void UpdateCC(Cplex cplex, INumVar[] z,
    List<ILinearNumExpr> rcExpr, List<int> bufferCoeffRC, int[]
    relatedComponents, int i, int j)
```

dove:

- **cplex**: oggetto contenente il modello matematico corrente, eventualmente necessario per la creazione del vincolo di subtour elimination;
- **z**: vettore contenente le variabili del modello, eventualmente necessario per la creazione del vincolo di subtour elimination;
- **rcExpr**: Lista all'interno della quale vengono memorizzate le espressioni contenenti le variabili del vincolo di subtour;
- **bufferCoeffRC**: Lista contenente i termini noti dei vincoli di subtour;
- **relatedComponents**: vettore che definisce per ogni nodo del grafo la relativa componente connessa;
- **i**: Nodo che con il parametro **j** forma il lato (i,j);
- **j**: Nodo che con il parametro **i** forma il lato (i,j).

La funzione **UpdateCC** viene invocata dal metodo **Loop** n volte, alla k -esima invocazione riceve in ingresso il k -esimo lato appartenente alla soluzione ottima del modello corrente. Per verificare se il lato ricevuto genera un subtour nel grafo $G=(V,T^*)$, dove T^* contiene i precedenti $k - 1$ lati controllati, si verifica se i vertici del lato appartengono alla medesima componente connessa. Nel caso in cui i due vertici non appartengono alla medesima componente connessa, è necessario aggiornare le componenti connesse dei vertici per l'invocazione successiva del metodo, viceversa si è individuato un subtour caratterizzato dai nodi aventi come componente connessa la medesima dei nodi i e j .

A livello implementativo si è utilizzato un array di interi chiamato **relatedComponents**, di dimensione pari al numero di vertici del grafo, come struttura dati necessaria per fotografare le componenti connesse del grafo $G=(V,T^*)$; **relatedComponents** contiene all'indice j la componente connessa del nodo j . La funzione **InitCC**, invocata ad ogni iterazione del metodo **Loop**, ha il compito di inizializzare **relatedComponents** associando ad ogni nodo una componente connessa diversa: in

particolare si è scelto di associare al nodo j la componente connessa j . Passiamo ora ad analizzare come è stato nella pratica implementato il metodo `UpdateCC`, la sua intestazione è la seguente:

```
public static void UpdateCC(Cplex cplex, INumVar[] z,
    List<ILinearNumExpr> rcExpr, List<int> bufferCoeffRC,
    int[] relatedComponents, int i, int j)
```

dove:

- `cplex`: oggetto contenente il modello matematico corrente;
- `z`: vettore contenente le variabili del modello;
- `rcExpr`: Lista all'interno della quale vengono memorizzate le espressioni contenenti le variabili del vincolo di subtour;
- `bufferCoeffRC`: Lista contenente i termini noti dei vincoli di subtour;
- `relatedComponents`: vettore che definisce per ogni nodo del grafo la relativa componente connessa;
- `i`: Nodo che con il parametro `j` forma il lato $[i,j]$;
- `j`: Nodo che con il parametro `i` forma il lato $[i,j]$.

Il caso in cui non si crei un subtour è gestito molto semplicemente in questo modo:

```
if (relatedComponents[i] != relatedComponents[j])
{
    for (int k = 0; k < relatedComponents.Length; k++)
    {
        if ((k != j) && (relatedComponents[k] == relatedComponents[j]))
        {
            //Same as Kruskal
            relatedComponents[k] = relatedComponents[i];
        }
    }
    //Finally also the value relative to the Point i are updated
    relatedComponents[j] = relatedComponents[i];
}
```

Dove per convenzione si è deciso di inglobare la `cc` del nodo j in quella del nodo i . Il secondo caso è invece gestito nel seguente modo:

```
else
{
    ILinearNumExpr expr = cplex.LinearNumExpr();

    //cnt stores the # of nodes of the current related components
    int cnt = 0;
```



```

for (int h = 0; h < relatedComponents.Length; h++)
{
    //Only nodes of the current related components are considered
    if (relatedComponents[h] == relatedComponents[i])
    {
        //Each link involving the node with index h is analyzed
        for (int k = h + 1; k < relatedComponents.Length; k++)
        {
            //Testing if the link is valid
            if (relatedComponents[k] == relatedComponents[i])
            {
                //Adding the link to the expression with coefficient 1
                expr.AddTerm(z[zPos(h, k, relatedComponents.Length)],
                    1);
            }
        }
        cnt++;
    }
}
//Adding the objects to the buffers
rcExpr.Add(expr);
bufferCoeffRC.Add(cnt);
}

```

Ripetere il metodo **UpdateCC** una ed una sola volta per ogni lato appartenente alla soluzione corrente ci assicura che le due liste **rcExpr** e **bufferCoeffRC** contengano tutti i dati per implementare i subtour elimination desiderati.

CALLBACK

In questa sezione esponiamo una tecnica alternativa per l'inserimento delle espressioni di subtour elimination all'interno di un sistema. Ciò che varia rispetto al metodo **Loop** presentato in precedenza è il **momento** in cui tali espressioni vengono definite.

L'idea è di sfruttare il fatto che Cplex come metodo di risoluzione per i problemi di **PLI** utilizza la tecnica del **Branch&Cut**¹⁵. Viene inoltre offerta la possibilità di conoscere la soluzione trovata, sia essa frazionaria o intera, per ogni nodo dell'albero decisione ma soprattutto la possibilità di ampliare il modello matematico come meglio crediamo.

Quello che vogliamo fare risulta a questo punto molto chiaro: se alla analisi della soluzione di un nodo sono presenti subtour il modello matematico deve essere modificato per eliminarli.

A livello pratico Cplex permette l'implementazione distinta di callback che vengono eseguite nel momento in cui viene trovata una soluzione intera oppure frazionaria¹⁶: nel primo caso è necessario implementare una **"lazy constraint callback"** mentre nel secondo caso una **"user cut callback"**. Da notare che in realtà solo soluzioni valide per i criteri di fathoming possono far scattare una call-

¹⁵Da ora in avanti sarà abbreviato con la sigla **B&C**

¹⁶In informatica una callback è una funzione definita dall'utente che viene eseguita in automatico dal sistema ogniquale volta scatta un particolare evento.

back, ciò non avviene ad esempio se il valore della soluzione di un nodo risulta maggiore rispetto a quello dell'incumbent¹⁷.

In generale i tagli possono essere definiti **locali** o **globali**: mentre i primi hanno validità esclusiva all'interno del sottoalbero avente come radice il nodo per la quale sono stati generati, i secondi hanno validità per tutti i nodi dell'albero decisionale e vengono memorizzati in una struttura globale detta **pool di tagli**. Cplex inoltre fornisce la possibilità di definire un taglio **purgeable** o meno: nel primo caso significa che può essere rimosso in un secondo momento poiché ritenuto inefficace. Durante il proseguo della tesi i tagli saranno da considerarsi sempre globali e non purgeable.

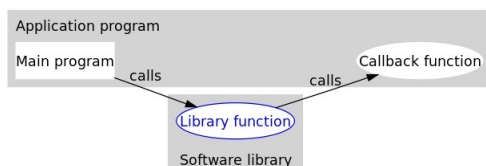


Figura 3: Soluzione frazionaria

Prima di procedere con l'esposizione dei dettagli riguardanti l'implementare di tali procedure, è possibile effettuare le seguenti considerazioni:

- La soluzione ottima fornita da Cplex risulta per costruzione priva di subtour: non è quindi più necessario, al contrario del metodo **Loop**, lanciare molteplici risoluzioni. A livello pratico è sufficiente invocare solo una volta il metodo **Cplex.Solve()**.
- Maggiore è il numero di vincoli che andiamo ad inserire, maggiore diventa il tempo di risoluzione per i vari nodi successivi dell'albero decisionale.
- Il numero di nodi che forniscono soluzioni frazionarie risulta di molto superiore rispetto a quelli con soluzione intera. Tenendo conto di quanto detto al punto precedente, non è quindi saggio andare ad analizzare tutte le soluzioni frazionarie ma solo una loro minima percentuale. Senza questo accorgimento si andrebbe inevitabilmente ad inserire innumerevoli vincoli superflui per l'ottenimento della soluzione ottima con conseguenti tempi di risoluzione eccessivamente elevati.
- I moderni processori hanno a disposizione molteplici core sia reali che virtuali e quindi sfruttare tecniche di multi-threading. In particolare Cplex permette di settare il numero di thread utilizzabili, in modo tale che ognuno di essi si occupi dalla risoluzione di un nodo dell'albero decisionale: in questo modo, in linea teorica, si dovrebbe ottenere un boost delle prestazioni con conseguente riduzione dei tempi di calcolo. D'altro canto, come per qualsiasi applicazione informatica, l'utilizzo del multi-threading risulta rischioso in quanto l'accesso contemporaneo ai medesimi dati può portare ad una loro inconsistenza. Nel nostro caso può capitare che più callback eseguite contemporaneamente vadano a modificare variabili condivise andando così incontro ad eccezioni o anomalie tali da non garantire più la correttezza della soluzione prodotta da Cplex.

Per evitare queste problematiche, i progettisti di Cplex hanno preferito settare il numero di

¹⁷Per incumbent si intende il valore migliore trovato fino a questo momento relativo ad una soluzione accettabile.

thread al valore **1** dopo l'installazione di una callback. È quindi nostro compito modificare tale parametro così da renderlo pari al numero di processori virtuali a nostra disposizione e di conseguenza assicurarci che le callback risultino **thread-safe**. Maggiori dettagli sono riportati nei successivi paragrafi.

LAZYCONSTRAINT CALLBACK C#

Per poter utilizzare una **lazy constraint callback** in C# Cplex fornisce all'interno delle proprie librerie la classe astratta **LazyConstraintCallback** che a sua volta estende **ControlCallback**. È quindi necessario creare una propria classe che estenda quest'ultima, nel nostro caso è stato deciso di chiamarla **TSPLazyConsCallback**, in questo modo è necessario definire al suo interno il metodo **Main** che verrà invocato automaticamente dal sistema ogniquale volta scatta la callback¹⁸.

Una volta terminato questo processo l'installazione della callback viene eseguita nel seguente modo:

```
cplex.Use(new TSPLazyConsCallback(...));
```

Dove, come al solito, cplex è l'istanza della classe **Cplex** sulla quale definiamo il modello matematico privo dei vincoli di subtour elimination.

Mostriamo ora la firma del costruttore della classe **TSPLazyConsCallback** riportando una breve descrizione dei parametri di ingresso:

```
public TSPLazyConsCallback(Cplex cplex, INumVar[] z, Instance instance,
    Process process, bool BlockPrint)
```

- **cplex**: necessario per l'individuazione dei vincoli di subtour elimination, contiene i dati del modello matematico utilizzato;
- **z**: identico al punto precedente, contiene i riferimenti alla variabili del modello matematico;
- **instance**: necessario nel caso in cui si desideri stampare attraverso GNUPlot le soluzioni intere che hanno fatto scattare la callback;
- **process**: identico al punto precedente;
- **BlockPrint**: è il parametro booleano che determina se procedere o meno con le stampe delle soluzioni intere (se **true** si procede con la stampa);

Come accennato nel paragrafo precedente, l'installazione di una callback setta automaticamente il numero di thread ad uno. Per modificare tale valore, ponendolo pari al numero logico di cores messi a disposizione dal processo in uso, è sufficiente eseguire la seguente riga di codice:

¹⁸Rocordiamo che tutti i metodi astratti presenti all'interno di una classe astratta devono essere obbligatoriamente definiti da tutte le classi che estendono quest'ultima

```
cplex.SetParam(Cplex.Param.Threads, cplex.GetNumCores());
```

Come sarà possibile vedere più avanti, la tecnica da noi utilizzata per l'individuazione di subtour risulta thread-safe in quanto non vengono utilizzate variabili condivise da più threads se non nella sola modalità di lettura. L'aggiunta di eventuali tagli, d'altro canto, viene gestita in modo automatico da Cplex assicurandoci, anche in questo caso, una procedura thread-safe. Un discorso appartato deve invece essere fatto nel caso in cui la variabile **BlockPrint** descritta in precedenza sia stata posta a **true**. Come era logico aspettarsi, abbiamo verificato che spesso la procedura di stampa attraverso GNUPlot di una qualsiasi soluzione richiede un tempo di esecuzione maggiore rispetto la frequenza con cui le callback sono effettuate. Ricordando inoltre che, il metodo da noi utilizzato per comunicare a GNUPlot le coordinate cartesiane dei punti del grafo cartesiano prevede la scrittura di queste ultime in un apposito file di testo, è stato necessario individuare un modo per evitare problemi riguardanti il multi-threading: utilizzare sempre lo stesso file di testo causa infatti errori nella stampa dei grafi, in particolare la lettura delle coordinate da parte di GNUPlot risulta troppo lenta e durante questo processo più thread rischiano di modificare il file con le proprie coordinate.

Per evitare questo problema è stato quindi necessario stampare le coordinate prodotte dai vari nodi dell'albero decisionale in differenti files. A tal proposito la tecnica da noi scelta è stata quella di inserire nel nome di questi ultimi anche l'id numerico del nodo a loro associato che viene fornito direttamente da Cplex:

```
string nodeId = GetNodeId().ToString();  
  
...  
  
string fileName = instance.InputFile + "_" + nodeId;
```

La funzione **GetNodeId** risulta disponibile in quanto ereditata dalla classe **ControlCallback**. Dopo i dovuti chiarimenti riguardanti il multi-threading possiamo ora a descrivere nei dettagli come è stata realizzato il metodo Main della classe TSPLazyConsCallback. Prima di tutto per verificare l'eventuale presenza di subtour bisogna naturalmente accedere alla soluzione fornita per il nodo dell'albero decisionale in questione: a tal fine si possono utilizzare i metodi **GetValues** e **GetValue**, ereditati entrambi dalla classe **ControlCallback**, che ricevono in input rispettivamente un vettore di riferimenti per variabili del modello matematico e un singolo riferimento ad una variabile di quest'ultimo. Dopo pochi test ci si accorge immediatamente che invocare più volte il metodo **GetValue**, ad esempio dentro un ciclo for, risulta molto più oneroso in termini temporali rispetto una singola evocazione del metodo **GetValues**: si può quindi dedurre che è molto più dispendioso effettuare molteplici accessi all'interfaccia fornita da Cplex rispetto alla quantità di dati che ad essa richiediamo.

Per quanto appena detto la nostra scelta è ricaduta nel metodo **GetValues** che restituisce un vettore di **double** contenente il valore delle variabili (il cui riferimento è ricevuto come ingresso) nella soluzione corrente del modello matematico. Da notare che anche in questo caso anche se ci aspettiamo tutti valori interi, in particolare pari a 0 oppure 1, è possibile che ci siano in realtà discostamenti infinitesimi pertanto quando controlliamo il valore di una variabile verifichiamo semplicemente se è maggiore o minore del valore 0,5.

I metodi utilizzati per l'individuazione di eventuali subtour e la eventuale stampa del grafo attraverso GNUPlot sono identici a quelli utilizzati per il metodo **Loop** pertanto non sono qui riportati. Una volta ottenute tutte le informazioni riguardanti i subtour, al contrario di quanto viene fatto nel metodo Loop non è richiesto di ampliare direttamente il modello con nuovi vincoli ma, come era già stato accennato in precedenza, deve essere popolato il pool di tagli associato al modello matematico:

```
IRange[] cuts = new IRange[ccExprLC.Count];

//if cuts.Length is 1 the graph has only one tour then cuts aren't needed
if (cuts.Length > 1)
{
    for (int i = 0; i < cuts.Length; i++)
    {
        cuts[i] = cplex.Le(ccExprLC[i], bufferCoeffCCLC[i] - 1);
        Add(cuts[i], 1);
    }
}
```

Dove:

- **cuts**: è un vettore di **IRange** che sono la struttura di dati base fornita da Cplex per memorizzare espressioni lineari;
- **ccExprLC[i]**: analogamente per quanto avviene nel metodo Loop, contiene i dati delle variabili dell'i-esimo taglio memorizzati come **ILinearNumExpr** (struttura dati fornita da Cplex);
- **bufferCoeffCCLC[i]**: analogamente per quanto avviene nel metodo Loop, contiene il numero di variabili che definiscono l'i-esimo taglio;
- **cplex.Le**: è la funzione definita da Cplex che restituisce una espressione lineare che impone le variabili, ricevute come primo parametro, minori oppure uguali del secondo parametro ricevuto;
- **Add**: è la funzione ereditata dalla classe **LazyConstraintCallback** che permette di aggiungere un taglio **globale**. Come parametri riceve quindi il taglio stesso ed un valore intero che indica a Cplex come debba gestire quest'ultimo:
 - **0**: il taglio è aggiunto al pool in maniera permanente;
 - **1**: il taglio è definito come **purgeable** quindi eliminabile nel caso in cui non risulti più efficiente;
 - **2**: il taglio viene trattato come se fosse stato generato da Cplex, quindi ad esempio prima di essere aggiunto al pool viene analizzata la sua efficacia e di conseguenza l'operazione va quindi a buon fine o meno;

CONCORDE

L'utilizzo di una **user cut callback** risulta molto più complicato rispetto a quanto appena visto per la **lazy constraint callback**: dato che tali callback scattano nel momento in cui viene trovata una soluzione frazionaria, l'individuazione di eventuali subtour non può essere eseguita con le tecniche esposte fino ad ora.

Per effettuare tale operazione si necessita di un separatore che, ricevendo in ingresso la soluzione x^* con almeno una componente frazionaria, fornisca in uscita un insieme $S \subsetneq V$, $|S| \geq 2$ tale per cui:

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{i,j}^* \not\leq |\hat{S}| - 1 \quad (6)$$

Tale sottoinsieme non è facilmente individuabile come nel caso di soluzione intere in cui era sufficiente individuare le componenti connesse. Per esempio in Figura 3 si è riportato il supporto di una soluzione x^* frazionaria ove i lati colorati di rosso, blu e grigio indicano che la corrispondente variabile assume rispettivamente i valori 1, 0.5, 1.5.

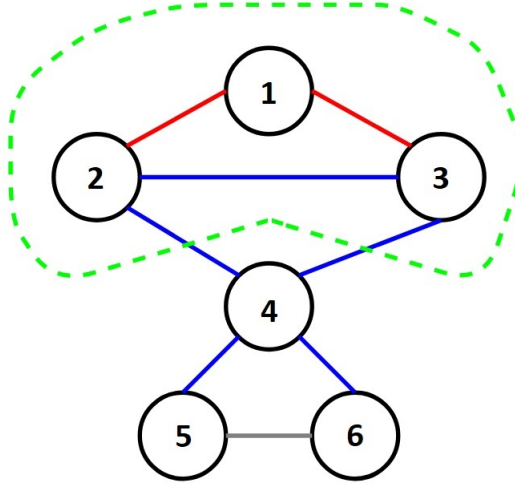


Figura 3: Soluzione frazionaria

Tale grafo risulta connesso; tuttavia è presente un sottoinsieme $S = \{1, 2, 3\}$ per cui vale (6). Una seconda formulazione equivalente alla (6) risulta essere la seguente:

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{i,j}^* \not\leq 2 \quad (7)$$

Si osserva che il primo membro di (7) può essere visto come la capacità di una sezione di una rete di flusso se si interpretano le x^* come le capacità della rete. E' possibile calcolare una sezione di capacità minima risolvendo un problema di max flow che sappiamo essere di programmazione lineare e quindi risolubile attraverso un algoritmo polinomiale.

Poichè però la sezione di capacità minima dipende dal nodo sorgente s e dal nodo di destinazione t , si devono in realtà risolvere $n-1$ problemi di max flow: per tale ragione è stato preferito utilizzare una porzione del software **Concorde** che offre, attraverso le proprie librerie, la possibilità di risolvere tale problema con tempi di esecuzione molto brevi ed allo stesso tempo di alleggerire il nostro carico di lavoro che in ogni caso non avrebbe prodotto risultati migliori.

Concorde è un software, sviluppano in linguaggio **C** da David Applegate, Robert E. Bixby, Vašek Chvátal, e William J. Cook, specializzato nella risoluzione ottimizzata di istanze del problema del commesso viaggiatore. Per fini accademici la distribuzione e l'utilizzo è fornita in modo gratuito e le librerie possono essere scaricate direttamente dal seguente indirizzo:

<http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/downloads/downloads.htm>

Come accennato poco fa il linguaggio utilizzato da Concorde non è **C#** bensì **C** pertanto una implementazione diretta del software non è possibile. La soluzione da noi adottata è la seguente: abbiamo creato un nuovo progetto Visual Studio in linguaggio **C/C++** ed al suo interno abbiamo creato un codice che soddisfacesse unicamente alla funzionalità ambedue i tipi di callback proposti interfacciandosi alle librerie di Concorde per trovare i vincoli di subtour elimination ed aggiungerli al modello matematico. Successivamente il tutto è stato impacchettato all'interno di una **DLL** compatibile con il linguaggio **C#**. Il processo di creazione della DLL è stato spiegato nel seguente paragrafo LINK!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!, d'ora in avanti quindi ci focalizzeremo unicamente nel contenuto della libreria dinamica da noi creata.

Per poter utilizzare Concorde in ambiente Windows è necessario importare ogni singolo file **.c** e **.h** che appartiene alla distribuzione: nel nostro caso però solo una minima parte delle sue funzionalità è di nostro interesse e pertanto solamente i seguenti file sono stati da noi utilizzati:

- **allocrus.c**
- **connect.c**
- **cut_st.c**
- **mincut.c**
- **shrink.c**
- **sortrus.c**
- **urandom.c**
- **cut.h**
- **machdefs.h**
- **macrorus.h**
- **util.h**
- **end**

Dove affinché il programma compili correttamente, è necessario effettuare le seguenti modifiche:

- All'interno dei file **allocrus.c** e **util.h** è necessario importare tramite il comando **import** l'header **malloc.h**.
- All'interno del file **machdefs.h** è necessario eliminare l'inclusione di **config.h**.

LAZYCONSTRAINTCALLBACK IN C

In questa mostreremo solamente i dettagli per l'installazione e l'utilizzo delle **lazyconstraint callback** in linguaggio **C** in quanto un discorso più ampio è stato precedentemente in LINK!!!!!!!. L'installazione di questo tipo di callback avviene attraverso l'invocazione della routine **CPXsetlazyconstraintcallbackfunc** la cui firma è:

```
CPXsetlazyconstraintcallbackfunc(CPXENVptr  
    env, int (*)(CALLBACK\_CUT\_ARGS) lazyconcallback, void * cbhandle)
```

Dove:

- **env**: Espressione contenente una combinazione lineare delle variabili del vincolo; SIAMO SICURI!!!!!!?
- **lazyconcallback**: Rappresenta il nome, attribuito dal programmatore esterno, della funzione che viene invocata da Cplex qualora la soluzione del rilassamento continuo di un nodo abbia valore intero ed inferiore all'incumbent. Nel nostro caso il nome assunto è **myLazyCallBack**;
- **cbhandle**: Puntatore ad una struttura dati passata dall'utente contenente le informazioni che devono essere visibili all'interno della callback *myLazyCallBack*. Come parametro si è passato il puntatore all'istanza;

In modo del tutto analogo a quanto fatto per **C#**, per impostare il numero di thread pari ai core virtuali offerti dalla macchina in utilizzo si sono utilizzati i metodi **CPXsetintparam** e **CPXgetnumcores**:

```
CPXgetnumcores(env, int * nCore);  
CPXsetintparam(env, CPXPARAM\_Threads, nCore);
```

Passiamo ora a descrivere la funzione *myLazyCallBack* che identifica i subtour ed aggiunge i relativi vincoli al modello, ricordando che la sua firma deve rispettare specifici parametri definiti da Cplex stesso¹⁹:

```
static int CPXPUBLIC myLazyCallBack(CPXENVptr env, void *cbdata, int  
    wherefrom, void *cbhandle, int *useraction\_p)
```

Dove:

- **env**: rappresenta l'istanza dell'environment con il quale stiamo lavorando. DIVERSO DA SOPRA!!!!!!!
- **cbdata**: come accennato poco fa questo parametro è quello specificato dall'utente durante l'installazione della callback, non essendo noto a priori il tipo di dato che l'utente desidera ricevere si utilizza **void**;

¹⁹Essendo tali funzioni invocate automaticamente da Cplex i tipi di parametri che esse ricevono sono stati definiti a priori e non risultano modificabili

- **wherefrom**: definisce da che punto del $B\&C$ è stata invocata la funzione, ai fini pratici tale parametro, per la lazy callback è risultato irrilevante;
- **cbhandle**: puntatore a dati privati utilizzato da Cplex;
- **useraction_p**: puntatore ad un intero utilizzato dall'utente per comunicare a Cplex diverse informazioni. Tale parametro può assumere i seguenti tre valori:
 - **0**: avente come costante simbolica `CPX_CALLBACK_DEFAULT` comunica a Cplex che fino a quel punto la callback non ha aggiunto tagli al modello;
 - **1**: avente come costante simbolica `CPX_CALLBACK_FAI` impone a Cplex di uscire dall'ottimizzazione;
 - **2**: avente come costante simbolica `CPX_CALLBACK_SET` comunica a Cplex che sono stati aggiunti tagli;

La prima operazione da compiere consiste nell'effettuare un cast al puntatore **cbhandle** il cui tipo è noto solo al programmatore che ha installato la callback: nel nostro caso il puntatore è di tipo **instance** per cui:

```
instance *inst = (instance*)cbhandle;
```

Successivamente è necessario assegnare al parametro ***useraction_p** il valore `CPX_CALLBACK_DEFAULT`. Per ottenere la soluzione del rilassamento continuo è necessario utilizzare il metodo `CPXgetcallbacknodex` avente come intestazione:

```
int CPXgetcallbacknodex(CPXENVptr env, void * cbdata, int wherefrom,
    double * x, int begin, int end)
```

Dove:

- Per quanto riguarda `env`, `cbdata`, `wherefrom` vale la descrizione vista per il metodo `myLazy-Callback`;
- **x**: array che al termine del metodo conterrà la soluzione intera del rilassamento continuo;
- **begin**: indica l'indice della prima variabile di cui si vuole conoscere il valore;
- **end**: indica l'indice dell'ultima variabile di cui si vuole conoscere il valore;

Nel nostro caso dato che vogliamo conoscere tutte le variabili, assegniamo i valori 0 e $\lceil n*(n-1)/2 \rceil + 1$ rispettivamente ai parametri **begin** ed **end**.

All'atto dell'invocazione del metodo `CPXgetcallbacknodex` non viene passato come parametro l'array **bestLb** contenuto in *inst* ma viene creato un opportuno array chiamato **xstar**:

```
double *xstar = (double*)malloc(inst->nCols * sizeof(double));
```

Questa operazione risulta necessaria al fine di realizzare un codice che risulti thread-safety: poiché *inst* è un puntatore accessibile da tutti i thread esiste il rischio di accessi multipli sia in modalità di lettura popolando così *bestLb* con valori appartenenti a soluzioni differenti. A questo punto entra in gioco Concorde per l'individuazione e l'introduzione dei vincoli di subtour elination, dato che il metodo da utilizzare è il medesimo che vedremo per le *usercut callback* rimandiamo al paragrafo seguente per maggiori dettagli. Una volta completato tale passaggio non rimane altro che impostare il parametro ***useraction_p** al valore **CPX_CALLBACK_SET** al fine di comunicare a Cplex che sono stati aggiunti tagli.

USERCUT CALLBACK IN C

Come già anticipato nei precedenti paragrafi questo tipo di callback sono utilizzate per gestire soluzioni frazionarie ottenute per i vari nodi dell'albero decisionale durante una risoluzione di tipo *B&C* per problemi di programmazione lineare da parte di Cplex. A livello concettuale sono del tutto simili a quanto visto nel paragrafo precedente per le *lazy callback* in linguaggio C, è raccomandata una lettura del paragrafo precedente a loro dedicato in quanto di seguito saranno esposti estensivamente solamente i dettagli riguardanti la gestione dei tagli.²⁰.

L'installazione delle callback avviene tramite la funzione **CPXsetusercutcallbackfunc**:

```
int CPXsetusercutcallbackfunc (CPXENVptr env, int(*) (CALLBACK\_CUT\_ARGS)
    lazyconcallback, void * cbhandle)
```

La funzione invocata da Cplex in corrispondenza di una soluzione frazionaria è stata da noi chiamata **myUserCutCallBack** la cui firma, che anche in questo caso viene imposta dai progettisti di Cplex, risulta essere:

```
int CPXPUBLIC myUserCutCallBack(CPXENVptr env, void *cbdata, int
    wherefrom, void *cbhandle, int *useraction\_p)
```

Cplex, una volta calcolata una soluzione frazionaria, genera in automatico dei propri tagli²¹. Quando il parametro *wherefrom* risulta pari a **CPX_CALLBACK_MIP_CUT_LAST** significa che l'iterazione successiva da parte di Cplex consisterebbe nell'operazione di branching sul nodo in questione: solo in questa condizione risulta conveniente generare i propri vincoli caratteristici del problema che si sta risolvendo. Qualora il parametro *wherefrom* assuma invece altri valori, si effettua una semplice **return 0** senza eseguire alcuna operazione, altrimenti come già discusso per le lazy, è necessario recuperare il puntatore all'istanza. Riprendendo quanto detto nel paragrafo LINK PARAGRAFO CALLBACK|||| è sconsigliato aggiungere *manualmente* ad ogni nodo dell'albero decisionale dei tagli in quanto il loro numero complessivo risulterebbe troppo elevato andando quindi a **peggiore** le prestazioni di Cplex. Per tale ragione, dopo alcuni test e secondo le linee guida discusse durante il corso, si è deciso che solamente con una probabilità del 10% la *usercut callback* da noi definita entra in gioco. Dato che l'id numerico assegnato ai nodi dell'albero decisionale,

²⁰Notiamo in realtà che l'implementazione delle *usercut callback* avviene sempre in concomitanza all'implementazione delle *lazy callback* per tanto il settaggio del numero di thread è necessario solamente una volta.

²¹Ad esempio taglio di *Gomory*

ottenuto attraverso la funzione **CPXgetcallbacknodeinfo**, non ha alcuna relazione diretta alla probabilità che venga generata una soluzione intera oppure frazionaria, è sufficiente effettuare una operazione di modulo dieci a tale valore: nel caso in cui il risultato sia pari a zero si procede con il calcolo dei tagli. Successivamente, invocando la nota funzione **CPXgetcallbacknodex** si ottiene la soluzione frazionaria. Prima di procedere con la parte principale di questo metodo, per ragioni di chiarezza riportiamo il codice che esegue quanto finora descritto:

```
*useraction\_p = CPX\_CALLBACK\_DEFAULT;

int nodecount = 0;
CPXgetcallbacknodeinfo(env, cbdata, wherefrom, 0,
    CPX\_CALLBACK\_INFO\_NODE\_DEPTH, &nodecount);

if (wherefrom == CPX\_CALLBACK\_MIP\_CUT\_LAST)
{
    instance *inst = (instance*)cbhandle;

    double *xstar = (double*)malloc(inst->nCols * sizeof(double));

    if ((nodecount % 10) != 0)
        return 0;

    if (CPXgetcallbacknodex(env, cbdata, wherefrom, xstar, 0, inst->nCols
        - 1))
    {
        free(comps);
        free(compscount);
        free(xstar);
        free(elist);
        return 1;
    }
}
```

Da questo momento inizieremo ad utilizzare le funzionalità offerta da *Concorde*, tutte le funzioni il cui nome inizia con la sigla "CC" sono importate da quest'ultimo. L'aggiunta di eventuali vincoli di *subtour elimination* avviene tramite l'invocazione in un primo momento della funzione **CCcut_connect_components** la quale identifica le componenti connesse della soluzione ricevuta come parametro indipendentemente dal fatto che sia intera o frazionaria.

Di seguito sono riportati nel dettaglio tutti i parametri che tale funzione vuole ricevere in ingresso, si osserva che mentre i primi 4 costituiscono l'effettivo input della funzione i rimanenti 3 sono in realtà settati al suo interno e quindi possono essere visti come parametri di output:

- **ncount**: rappresenta il numero di nodi del grafo;
- **econut**: rappresenta il numero di lati del grafo, ossia $\text{ncount} * (\text{ncount} - 1) / 2$;
- ***elist**: vettore di dimensione $2 * \text{econut}$, contiene al suo interno tutti i lati del grafo caratterizzati dai nodi sul quale esso incide memorizzati in locazioni consecutive dell'array, è stato da noi realizzato nel seguente modo:

```

int loader = 0;
for (int i = 0; i < inst->nNodes; i++)
{
    for (int j = i + 1; j < inst->nNodes; j++)
    {
        elist[loader++] = i;
        elist[loader++] = j;
    }
}

```

- ***x**: soluzione per la quale si desiderano individuare le componenti connesse;
- ***ncomp**: rappresenta il numero di componenti connesse;
- ****compscount**: vettore di vettori contenenti il numero di nodi per ciascuna componente connessa, è strutturato in modo che compscount[i] contenga il numero di nodi presente nell'i-esima componente connessa;
- ****comps**: vettore di vettori contenenti gli indici dei nodi presenti all'interno delle componenti;

Nonostante non risulti necessario, al fine di rendere il codice maggiormente leggibile, si è deciso di assegnare sia alle variabili che ai puntatori il medesimo nome che assumono all'interno di *CCcut_connect_components*.

```

int *compscount = (int*)malloc(inst->nMaxCuts * sizeof(int));
int *comps = (int*)malloc(inst->nNodes * sizeof(int));
int nLati = ((inst->nNodes - 1)*inst->nNodes / 2);
int *elist = (int*)malloc((nLati * 2) * sizeof(int));
int ncomp;

```

La chiamata alla funzione risulta quindi essere:

```

if (CCcut\_connect\_components(inst->nNodes, nLati, elist, xstar, &ncomp,
    &compscount, &comps))
    printError(" error in CCcut\_connect\_components() inside
        fractcutusercallback");

```

Al suo termine, in modo del tutto trasparente, otteniamo le tre variabili **ncomp**, **compscount** e **comps** che forniscono tutte le informazioni necessarie all'aggiunta dei tagli all'interno dell'apposito pool fornito da Cplex. Completiamo quest'ultima operazione tramite la routine fornita da Cplex **CPXcutcallbackadd** la cui firma è:

```

CPXcutcallbackadd(CPXENVptr env, void * cbdata, int wherefrom, int nzcnt,
    double rhs, int sense, int cutind, double const * cutval, int
    purgeable);

```

Dove:

- **env, cbdata, wherefrom**: parametri noti già discussi nella callback *myLazyCallback*;

- **nzcnt**: numero di coefficienti diversi da zero del vincolo;
- **rhs**: definisce il termine noto del vincolo;
- **sense**: può assumere i seguenti valori:
 - **cutind**: array di *nzcnt* elementi contenenti gli indici delle variabili presenti nel vincolo;
 - **cutval**: array di *nzcnt* elementi contenenti i corrispondenti valori dei coefficienti;
 - **purgeable**: valore intero che specifica come Cplex deve trattare il taglio:
 - * **CPX_USECUT_FORCE**: il taglio una volta aggiunto al rilassamento non può essere più rimosso;
 - * **CPX_USECUT_PURGE**: il taglio è aggiunto al rilassamento ma può essere eliminato in un secondo momento se giudicato inefficiente;
 - * **CPX_USECUT_FILTER**: il taglio deve essere trattato come se generato da Cplex il quale prima di aggiungerlo al rilassamento lo analizza e può quindi decidere di abortire l'operazione di aggiunta. nel rilassamento(per esempio è già presente un taglio più efficiente);

Per aggiungere un taglio per ogni componente connessa è necessario popolare i vettori **cutval**, **cutind** e la variabile **nzcnt** opportunamente sfruttando le informazioni fornite da *Concorde*. Per stabilire quali nodi appartengono alla *t*-esima componente connessa si sono dichiarate due variabili intere **k1** e **k2** che contengono sistematicamente l'indice del **primo** e dell'**ultimo** nodo tra quelli appartenenti alla *t*-esima componente connessa memorizzata in *comps*. Si osserva che *k2* è inizializzato al valore -1 in quanto gli indici di un qualsiasi vettore partono da 0.

```

if (ncomp > 1)
{
    int k1 = 0;
    int k2 = -1;

    for (int c = 0; c < ncomp; c++)
    {
        int dimIndexValue = compscount[c] * (compscount[c] - 1) /
            2;
        int *cutind = (int*)malloc(dimIndexValue * sizeof(int));
        double *cutval = (double*)malloc(dimIndexValue *
            sizeof(double));
        int nzcnt = 0;

        k2 += compscount[c];

        for (int i = k1; i < k2; i++)
        {
            for (int j = i + 1; j <= k2; j++)
            {
                cutval[nzcnt] = 1.0;
                cutind[nzcnt] = xPos(comps[i], comps[j], inst);
            }
        }
    }
}

```

```

        nzcnt++;
    }
}

k1 = k2 + 1;

CPXcutcallbackadd(env, cbdata, wherefrom, nzcnt,
    compscount[c] - 1, 'L', cutind, cutval,
    CPX\_USECUT\_FORCE);

*useraction\_p = CPX\_CALLBACK\_SET;
free(cutind);
free(cutval);
}

free(elist);
free(comps);
free(compscount);
free(xstar);

return 0;
}

```

Nel caso in cui la soluzione presenti una sola componente connessa, come in Fig. X, invocando la funzione **CCcut_violated_cuts** di *Concorde* è possibile individuare gli insiemi S che soddisfino la disuguaglianza (7): noto \bar{S} risulta poi banale inserire il relativo vincolo di subtour. In particolare *CCcut_violated_cuts* è una funzione in grado di individuare sezioni di capacità inferiori ad una certa soglia. Descriviamo quindi i 7 parametri che tale funzione riceve in input:

- **int ncount, int ecount, int *elist**: il loro significato è già stato descritto per la funzione *CCcut_connect_components*;
- **dlen**: vettore contenente la capacità di ogni lato;
- **cutoff**: [Questo è il termine noto della disequazione f2, non ho capito perchè devo togliere a 2 un EPSILON, così è scritto nel pdf condiviso dal prof che si chiama RO2_TSPutilities]
- ***(doit_fn)(double, int, int *, void *)** : è una funzione creata da noi che risulta essere una vera e propria callback: ogniqualvolta *Concorde* individua un insieme S cercato tale funzione viene invocata. Al suo interno, grazie ai parametri forniti²² è nostro compito procedere all'ampliamento del pool di tagli di *Cplex*.
- **pass_param**: puntatore ad una struttura dati contenente variabili e puntatori che devono essere accessibili all'interno della callback;

Nel nostro caso l'invocazione di tale metodo avviene nel seguente modo:

²²Maggiori dettagli riguardo i quattro parametri di ingresso saranno forniti a breve durante la descrizione di come l'implementazione di tale funzione è stata da noi realizzata.

```
CCcut_violated_cuts(inst->nNodes, inst->nCols, elist, xstar, 2.0 -  
    cutThreshold, doitFuncConcorde, (void*)&in)
```

Dove occorre solamente far notare che la funzione callback da noi definita prende il nome **doitFuncConcorde** mentre l'ultimo parametro è una **struct** da noi creata contenente al suo interno tutte le informazioni occorrenti per invocare il metodo **CPXcutcallbackadd**, descritto in precedenza, all'interno della callback.

```
typedef struct  
{  
    instance *inst;  
    CPXCENVptr env;  
    void *cbdata;  
    int wherefrom;  
    int *useraction\_p;  
} inputCC;
```

Per concludere questo paragrafo non rimane altro che parlare più in dettaglio riguardo la realizzazione della callback **doitFuncConcorde**, per prima cosa forniamo la sua firma:

```
int doitFuncConcorde(double cutValue, int cutcount, int *cut, void  
    *inParam)
```

Dove:

- **cutValue**: rappresenta il valore del taglio;
- **cutcount**: rappresenta il numero dei nodi;
- **cut**: array contenente l'indice associato ai nodi;
- **inParam**: struttura dati appena descritta;

Dopo aver effettuato la classica operazione di recupero del puntatore alla struttura dati fornita in ingresso alla callback

```
inputCC *in = (inputCC*)inParam;
```

possiamo procedere con l'aggiunta del taglio attraverso *CPXcutcallbackadd*: si sono così definiti due array di interi **cutind** e **cutval** contenenti rispettivamente gli indici delle variabili che costituiscono il taglio ed il relativo coefficiente. Si è inoltre dichiarata una variabile intera **nzcnt** che contiene il numero di variabili caratterizzanti il taglio:

```
int dimIndexValue = inst->nNodes * (inst->nNodes - 1) / 2;  
int *cutind = (int*)malloc(dimIndexValue * sizeof(int));  
double *cutval = (double*)malloc(dimIndexValue * sizeof(double));  
int nzcnt = 0;
```

