Ćwiczenia 7
Funkcje Bessela

Analiza IV

8 kwietnia

Through all this ordeal his root horror had been isolation, and there are no words to express the abyss between isolation and having one ally. It may be conceded to the mathematicians that four is twice two. But two is not twice one; two is two thousand times one. That is why, in spite of a hundred disadvantages, the world will always return to monogamy.

1 Teoria

Rozważać będziemy dziś równanie Bessela[1]:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \tag{1}$$

w którym $\alpha \in \mathbb{C}$ jest parametrem.
Jest bardzo dużo terminologii związanej z tym równaniem, różne bazy (lub funkcje mocno powiązane z rozwiązaniami) noszą inne nazwy. Skupimy się w zadaniach na rozwiązaniach, które noszą dumne miano "funkcji Bessela" J_α i Y_α (pierwszego i drugiego rodzaju, odpowiednio), ale prócz nich można napotkać[2]:

- Zmodyfikowane funkcje Bessela:

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &= i^{-\alpha} J_\alpha(ix) \\ K_\alpha(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin \alpha\pi} \end{aligned} \tag{2}$$

- Funkcje Hankela[3]

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(1)}(x) &= J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \\ H_\alpha^{(2)}(x) &= J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) \end{aligned} \tag{3}$$

- Sferyczne funkcje Bessela

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

- Sferyczne funkcje Hankela

$$\begin{aligned} h_\alpha^{(1)}(x) &= j_\alpha(x) + iy_\alpha(x) \\ h_\alpha^{(2)}(x) &= j_\alpha(x) - iy_\alpha(x) \end{aligned} \tag{5}$$

Oczywiście nie trzeba znać tych wszystkich nazw (zresztą, można napotkać też na inne), ale warto kojarzyć, że to tak naprawdę prawie ten sam obiekt.

[1] z powodów niezrozumiałych dla mnie, czytamy jego nazwisko 'Bessla'
[2] wszystkie funkcje są pierwszego i drugiego rodzaju, odpowiednio
[3] czyt. Hankla, oczywiście

2 Praktyka

Zadanie 1 *(why should we care?)*
Proszę zapisać swobodne równanie Schrödingera we współrzędnych

(i) sferycznych

(ii) walcowych

i spróbować rozwiązać je przez separację zmiennych, a następnie przekształcić równanie na składową radialną do postaci równania Bessela. Jaką wartość parametru α otrzymujemy?
Zadanie 2 *(funkcje Bessela pierwszego rodzaju)*
Przyjmujemy teraz $\Re\alpha \geq 0$ (choć nie jest to w zasadzie konieczne).

(i) Proszę zbadać zachowanie rozwiązań równania Bessela, gdy $|x| \to \infty$.

(ii) Proszę zrobić to samo wokół $x = 0$. Wybierzmy rozwiązanie równania indeksowego z większym pierwiastkiem. Proszę znaleźć rozwiązanie J_α równania Bessela w postaci szeregu[4] z warunkiem

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha} J_\alpha(x) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}. \tag{6}$$

(iii) Zapomnijmy teraz o warunku $\Re\alpha \geq 0$. Dla jakich α otrzymane wyrażenie jest dalej rozwiązaniem równania Bessela? Proszę sprawdzić, ze wówczas J_α i $J_{-\alpha}$ są liniowo niezależne.

(iv) Co z przypadkiem $\alpha \in \mathbb{Z}$?

Zadanie 3 *(funkcje Bessela drugiego rodzaju)*
Niech $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Proszę uzasadnić, że wówczas

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \tag{7}$$

też jest rozwiązaniem równania Bessela. Jak się ono zachowuje w pobliżu zera i nieskończoności? Co z przypadkiem $\alpha \in \mathbb{Z}$?
Zadanie 4 *(reprezentacje całkowe)*
Proszę uzasadnić, że dla $\Re x > 0$

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\tau \cos\left(\alpha\tau - x\sin\tau\right) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty dt e^{-x\sinh t - \alpha t} \tag{8}$$

i znaleźć analogiczną formułę całkową dla Y_α. (Łatwiej będzie zapewne zacząć od $\alpha \in \mathbb{Z}$).
(Całki tego typu pojawiają się w fizyce statystycznej i bozonowych teoriach pola w dwóch wymiarach.)
Zadanie 5 *(kołowa membrana)*
Żeby opisać wibracje dwuwymiarowej membrany o zadanym kształcie trzeba znaleźć wartości i funkcje własne laplasjanu z warunkiem brzegowym 'wibracje znikają na brzegu'. Proszę wyjaśnić dlaczego.
Proszę rozwiązać ten problem dla kołowej membrany o promieniu a.
Dotykamy tu bardzo interesującego problemu. W 1966 nasz wielki rodak Mark Kac zadał pytanie: czy można usłyszeć kształt bębna? To znaczy czy znając wartości własne dwuwymiarowego laplasjanu potrafimy jednoznacznie (z dokładnością do ruchów euklidesowych) odtworzyć obszar, na którym żyją jego wartości własne? Odpowiedź na to pytanie pozostawiamy Czytelnikowi_czce jako niełatwe ćwiczenie.

Życzę Wam wszystkim radosnych Świąt – zarówno Paschy, Zmartwychwstania jak i też wspólnej celebracji nowego życia!

[4] tzn. proszę znaleźć jawną postać współczynników