Na ostatnim wykładzie pojawiły się rozwiązania równania falowego dla struny nieskończonej i półnieskończonej. Analizując rozwiązania staramy się pamiętać, że chcemy zapytać o możliwość nadawania morsem, czyli o to jak sygnał wysłany ma się do sygnału odebranego. Dla struny półnieskończonej rozwiązanie wygląda tak

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{ct+x} f(s)ds + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{ct+x} g(\xi)d\xi & x-ct<0 \\ \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi & x-ct>0 \end{cases}.$$

A równanie było takie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad x>0.$$

Z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x) \\ u_{,t}(0,x) &= g(x) \\ u(0,t) &= 0. \end{aligned}$$

Chcemy teraz rozwiązać problem trójwymiarowy, tzn.

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2\Delta u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_{,t}(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Przykładami mogą być balon nakłuty szpilką, zderzenie dwóch samochodów, zapalenie żarówki itp. Chcemy rozwiązanie znaleźć używając metody dla struny półnieskończonej. Żeby skorzystać z rozwiązania dla struny półnieskończonej musimy przekształcić równanie tak, aby pojawił sie problem falowy w jednej zmiennej. W tym celu wybierzemy punkt $x\in\mathbb{R}^3$ i sferę o promieniu $r$ i środku w $x$. Wprowadzimy teraz nową funkcję

$$\overline{u}(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)ds'.$$

$\overline{u}(x,r,t)$ jest wartością średnią funkcji $u$, będącej rozwiązaniem (zakładamy, że takowe istnieje) równania $u_{,tt} = c^2\Delta u$. Zauważmy, że

$$\lim_{r\to 0}\overline{u}(x,r,t) = u(x,t) \quad \text{(zakładamy, że } u(x,t) \text{ - ciągła.}$$

Po co takie dziwne obiekty? Bo nie mamy separacji zmiennych.

**Stwierdzenie 1.** *(Lemat): Warunki*

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2\Delta u \quad x\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_{,t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

*sa równoważne warunkowi na* $\overline{u}(x,r,t)$*:*

$$\overline{u}_{,tt}(x,r,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\overline{u}(x,r,t) + 2c^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\overline{u}(x,r,t) \quad r\geqslant 0 \tag{1}$$

*(dla* $\mathbb{R}^n : \overline{u}_{,tt}(x,r,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\overline{u}(x,r,t)+c^2\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\overline{u}(x,r,t)$*) + warunki początkowe.*

Zauważmy, że zmieniła się zmienna, po której różniczkujemy. Równanie 1 nie jest równaniem falowym dla jednej zmiennej. Zanim udowodnimy 1, zobaczymy, co da się z nim zrobić.

Co mamy?

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2\Delta u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_{,t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

i warunki równoważne

$$\overline{u}(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)d\overline{s}'$$

$$\overline{u}_{,tt} = c^2\overline{u}_{,rr} + 2c^2\frac{1}{r}\overline{u}_{,r}.$$

Wprowadzamy $v(x,r,t) = r\overline{u}(x,r,t)$. Czyli mamy coś takiego

$$v(x,r,0) = r\overline{u}(x,r,0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|x'|=r} f(x+x')ds'}_{\overline{f}(x,r)}$$

$$v_{,t}(x,r,0) = r\overline{u}_{,t}(x,r,0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{|x'|=r} g(x+x')ds'}_{\overline{g}(x,r)}.$$

No i dodatkowo $v(x, 0, t) = 0$, dla $t \geqslant 0$.
Powyższe warunki pasowałyby dla struny półnieskończonej, jeżeli pokazalibyśmy, że

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r, t), \quad r > 0,$$

to mając rozwiązanie dla $v$ z problemu 1-D przeszlibyśmy do $\overline{u}(x, r, t)$, bo

$$\overline{u}(x, r, t) = \frac{1}{r} v(x, r, t),$$

a potem z $r$ do zera.
Ale!

$$\begin{aligned} v_{,tt} = r\overline{u}_{,tt} = r\left(c^2\overline{u}_{,rr} + 2c^2\frac{1}{r}\overline{u}_{,r}\right) &= rc^2\overline{u}_{,rr} + 2c^2\overline{u}_{,r} = \\ = c^2\left(r\overline{u}\right)_{,rr} = c^2 v_{,rr} = \\ = c^2\left(r\overline{u}\right)_{,rr} = c^2 v_{,rr}. \end{aligned}$$

Wniosek: $\overline{v}$ spełnia 1-D równanie falowe w $r$!

*Dowód.* (lematu)
Scałkujmy stronami równanie falowe $u_{,tt} = c^2 \Delta u$ :

$$\begin{aligned} \int\limits_{K(x,r)} u_{,tt}(x, t) dV = c^2 \int\limits_{K(x,r)} \Delta u dV = c^2 \int\limits_{K(x,r)} \nabla(\nabla u) dV = \\ = c^2 \int\limits_{\partial K(x,r)} \nabla u \cdot \overline{n} ds = c^2 \int\limits_{\partial K(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}} ds. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int\limits_{K(x,r)} u_{,tt}(x, t) dV = c^2 \int\limits_{\partial K(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}} ds.$$

Przejdźmy sobie do współrzędnych kulistych

$$x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \cos\theta' \sin\varphi' \\ r' \cos\theta' \cos\varphi' \\ r' \sin\theta' \end{bmatrix}.$$

$$\int\limits_{K(x,r)} u_{,tt}(x,t)dV \to \int\limits_{|x'|\leqslant r} u_{,tt}(x+x',t)dV' =$$

$$= \int\limits_0^r dr'r'^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' u_{,tt}(x+x'(r',\theta',\varphi'),t) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r} u(x+x'(r,\theta',\varphi'),t),$$

bo

$$\int\limits_{|x'|\leqslant r} u_{,tt}(x+x',t)dV' = c^2 \int\limits_{|x'|=r} \frac{\partial u}{\partial n} ds'.$$

Pamiętamy, że $ds' = r^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. Dalej mamy

$$\int\limits_0^r dr'r'^2 \int u_{,tt}(x+x'(r',\theta',\varphi')) \sin\theta' d\varphi' d\theta' =$$

$$= r^2c^2 \int \frac{\partial u}{\partial r}(x+x'(r',\theta',\varphi')) \sin\theta' d\varphi' d\theta'.$$

Jak zróżniczkujemy stronami po $r$, to dostaniemy

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)ds' = 2c^2 c \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{|x'|=4} u(x+x',t)ds + c^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)ds.$$

Ale

$$\overline{u}(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)ds',$$

więc po podzieleniu przez $4\pi r^2$,

$$r^2 \overline{u}_{,tt}(x,r,t) = 2c^2 r \overline{u}(x,r,t) + c^2 \overline{u}_{,rr}(x,r,t).$$

$\square$

Udało nam się udowodnić lemat, wiemy już, że $v(x,r,t)$ spełnia równanie falowe dla struny półnieskończonej i że mając $v(x,r,t)$ możemy odzyskać $u(x,t)$ poprzez przejście

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} \frac{v(x,r,t)}{r},$$

gdzie

$$v(x,r,t)=\frac{1}{2}\left[v(x,r+ct,0)-v(x,ct-r,0)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}v_{,t}(x,s,0)ds.$$

(dla $ct-r>0$ ). Zatem

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0^+}\frac{v(x,r,t)}{r}=\lim_{r\to 0^+}\frac{v(x,r,t)-v(x,0,t)}{r}=\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=0}.$$

Ale

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}v_{,t}(x,s,0)ds\right)\right|_{r=0}=\frac{1}{2c}\left.\left(v_{,t}(x,ct+r,0)+v_{,t}(x,ct-r,0)\right)\right|_{r=0}=$$

$$=\left.\frac{1}{c}r\overline{g}(x,r)\right|_{r=ct}.$$

Ale

$$\left.\frac{1}{c}r\overline{g}(x,r)\right|_{r=ct}=\left.\frac{1}{c}\frac{1}{4\pi r^2}r\int\limits_{|x'|=r}g(x+x')ds'\right|_{r=ct}=$$

$$=\frac{1}{c}\frac{ct}{4\pi(ct)^2}\int\limits_{|x'|=ct}g(x+x')ds=\frac{1}{4\pi c^2t}\int\limits_{|x'|=ct}g(x+x')ds.$$

To jeszcze załatwimy drugą część równania

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(v(x,r+ct,0)-v(x,ct-r,0)\right)\right|_{r=0}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{v(x,r+ct,0)-v(x,ct,0)}{r}+\lim_{r\to 0}\frac{v(x,ct+(-r),0)-v(x,ct,0)}{-r}=$$

$$=2\left.\frac{\partial v(x,r,0}{\partial r}\right|_{r=ct}=2\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{f}(x,r)\right)\right|_{r=ct}=$$

$$=2\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\int\limits_{|x'|=r}f(x+x')ds\cdot\frac{1}{4\pi r^2}\right)\right|_{r=ct}=\frac{2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left.\left(\frac{1}{r}\int\limits_{|x'|=r}f(x+x')ds'\right)\right|_{r=ct}.$$

Chcielibyśmy ostatnie wyrażenie zamienić na zróżniczkowane po $t$ :

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{|x'|=r}f(x+x')ds\right|_{r=ct}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|x'|=ct}f(x+x')ds.$$

No i

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{r=ct} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Dostaliśmy nareszcie wzór Kirchoffa!

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} f(x)ds\right)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} g(s)ds$$

dla $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ i $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.