Ćwiczenia 3
Fale biegnące i związki dyspersyjne

Analiza IV

13 marca

Life has never been normal. Even those periods which we think most tranquil, like the nineteenth century, turn out, on closer inspection, to be full of cries, alarms, difficulties, emergencies. Plausible reasons have never been lacking for putting off all merely cultural activities until some imminent danger has been averted or some crying injustice put right. But humanity long ago chose to neglect those plausible reasons. They wanted knowledge and beauty now, and would not wait for the suitable moment that never come. Periclean Athens leaves us not only the Parthenon but, significantly, the Funeral Oration. The insects have chosen a different line: they have sought first the material welfare and security of the hive, and presumable they have their reward. Men are different.They propound mathematical theorems in beleaguered cities, conduct metaphysical arguments in condemned cells, make jokes on scaffold, discuss, the last new poem while advancing to the walls of Quebec, and comb their hair at Thermopylae. This is not panache; it is our nature.

Zadanie 1 *(równania liniowe)*
Rozważać będziemy równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej

$$iu_t = -u_{xx} \tag{1}$$

oraz równanie dyfuzji

$$u_t = u_{xx}. \tag{2}$$

(i) Proszę uzupełnić te równania o stałe wymiarowe tak, aby jednostki i interpretacja fizyczna się zgadzały.

(ii) Proszę znaleźć dla obu równań relacje dyspersyjne.

(iii) Proszę rozwiązać oba z tych równań na obszarze $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ z warunkiem początkowym:

$$u(t = 0, x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3}$$

Czy nasze intuicje wyniesione z relacji dyspersyjnych były poprawne?

(iv) Co z $t < 0$?

Podpunkt pierwszy pozostawiam jako ćwiczenie. Otrzymane relacje dyspersyjne, to

$$E = p^2 \tag{4}$$

oraz

$$E = -ip^2 \tag{5}$$

dla równania Schrödingera oraz dyfuzji, odpowiednio. Spodziewamy się zachowania oscylacyjnego i zaniku, również odpowiednio. Policzmy transformatę Fouriera danych początkowych[1]

$$\hat{u}(0, k) := \int_{\mathbb{R}} dx u(0, x) e^{-2\pi i k x} = \sqrt{2\sqrt{\pi}} e^{-2k^2\pi^2}. \tag{6}$$

[1] W konwencji, mam nadzieję, zgodnej z wykładem

Zauważmy, że możemy napisać $u(0,x)$ jako kombinację liniową (całkę) z fal płaskich:

$$u(0,x) = \int_{\mathbb{R}} dk \hat{u}(0,k) e^{2\pi ikx}. \tag{7}$$

Każdą falę płaską potrafimy przeewoluować – po prostu mnoży się ona przez e^{-iEt}. Skoro nasze równania są liniowe, to wiemy też jak przeewoluować kombinację fal płaskich i w rezultacie dostajemy:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} dk \hat{u}(0,k) e^{i(2\pi kx - E(2\pi k)t)}. \tag{8}$$

Stąd, mamy rozwiązanie równania Schrödingera:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} dk \sqrt{2\sqrt{\pi}} e^{-2k^2\pi^2} e^{i(2\pi kx - (2\pi k)^2 t)} = \pi^{-\frac{1}{4}} (1+2it)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+2it}}. \tag{9}$$

Widzimy, że ma ono charakter fali, która się rozpływa – jej amplituda maleje, ale norma w L^2 pozostaje stała (proszę to sprawdzić!)
Z kolei dla równania dyfuzji:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} dk \sqrt{2\sqrt{\pi}} e^{-2k^2\pi^2} e^{i2\pi kx - (2\pi k)^2 t)} = e^{-\frac{x^2}{2+4t}} \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+2t}}, \tag{10}$$

które opisuje zanikającą w czasie funkcję. Proszę zauważyć, że (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) jest to rozwiązanie fundamentalne równania dyfuzji, tylko przesunięte w czasie.
Z postaci rozwiązań widzimy natychmiast, że ewolucja wstecz w czasie jest dobrze zdefiniowana dla równania Schrödingera, ale już nie dla równania dyfuzji – rozwiązanie ma osobliwość w $t = -\frac{1}{2}$.
Uwaga Trochę machaliśmy po drodze rękoma twierdząc, że nasze rozwiązanie jest kombinacją liniową fal płaskich, ponieważ nie jest to kombinacja skończona. Raczej należałoby to traktować jako ansatz na rozwiązanie i zauważyć, że spełnia ono stosowne warunki początkowe i rozwiązuje dane równanie różniczkowe, gdy wejdziemy z różniczkowaniem pod całkę. Powstaje pytanie – dla jakich danych początkowych to wejście z różniczkowaniem pod całkę jest legalne? Pytanie to zostawiamy czytelnikowi_czce do refleksji własnej.
Zadanie 2 *(soliton)*
Szukamy rozwiązań, które wyglądają tak samo, gdy po czasie Δt przesuniemy się o $\pm c\Delta t$ w zależności od tego w którą stronę porusza się fala, tzn.

$$\phi(t,x) = \phi(t+\Delta t, x \pm c\Delta t). \tag{11}$$

Stąd, ϕ może być jedynie funkcją $x \mp c\Delta t$. Bez straty ogólności weźmy znak minus, tzn. $\phi(t,x) = f(x-ct) = f(X)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \phi_t &= -cf' \\ \phi_x &= f' \\ \phi_{xxx} &= f''', \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie przecinek oznacza pochodną po X. Wstawiając to do równania KdV otrzymujemy:

$$-cf' + f''' - 6ff' = 0. \tag{13}$$

Ponieważ $2ff' = (f^2)'$, to możemy to natychmiast scałkować otrzymując

$$-cf + f'' - 3f^2 = A. \tag{14}$$

Jeżeli ϕ opisuje o ile podniósł się poziom wody i interesują nas fale dobrze zlokalizowane, to oczekujemy, że bardzo daleko od środka fali, ϕ znika, to znaczy $\lim_{x\to\pm\infty} \phi = 0$. Ale równanie (14) zachodzi dla każdego (t,x). W szczególności, biorąc granicę $x \to \pm\infty$ przy stałym t (czyli $X \to \pm\infty$), zauważamy, że lewa strona znika, a zatem $A = 0$.
Pozostaje nam równanie

$$f'' = 3f^2 + cf = \frac{\partial}{\partial X}\left(f^3 + \frac{cf^2}{2}\right), \tag{15}$$

czyli równanie Newtona na zmienną $f(X)$ w potencjale $V(f) = -\left(f^3 + \frac{cf^2}{2}\right)$, z masą $m = 1$.
Logika jest taka, że teraz X jest odpowiednikiem czasu, a f położenia z mechaniki klasycznej. Nie ma to oczywiście żadnego znaczenia – takie same równania mają takie same rozwiązania, niezależnie od tego jakich liter używamy.
Takie równania już łatwo rozwiązać, bo mamy zasadę zachowania energii

$$E = \frac{(f')^2}{2} + V(f), \tag{16}$$

która zadaje już ruch praktycznie jednoznacznie w jednym wymiarze.
Tak jak dyskutowaliśmy uprzednio, chcemy mieć $\lim_{X\to\pm\infty} f(X) = 0$. Łatwo się przekonać, że 0 jest lokalnym ekstremum naszego potencjału, a zatem interesuje nas ruch zaczynający się i kończący w tym ekstremum.
Widzimy z wykresu, że jeżeli cząstka zacznie się staczać z $f = 0$ w prawo, to ucieknie bardzo szybko do nieskończoności, więc ten przypadek odrzucamy. Druga możliwość jest taka, że zacznie staczać się w lewo, doleci do $f = -\frac{c}{2}$ (co wynika z zasady zachowania energii) i zawróci[2]. W tym scenariuszu $E = 0$ (bo początkowo nie ma energii kinetycznej). Korzystając z zasady zachowania energii otrzymujemy:

$$\frac{df}{dX} = \pm\sqrt{2f^3 + cf^2}. \tag{17}$$

Znak $-$ odpowiada ruchowi w lewo (czyli początkowemu), a $+$ w prawo (końcowemu). Bez straty ogólności możemy ograniczyć się do ruchu w prawo. Mamy wówczas:

$$X - X_0 = \int_{-\frac{c}{2}}^{f(X)} \frac{df}{\sqrt{2f^3 + cf^2}}, \tag{18}$$

gdzie X_0 jest chwilą, dla której zachodzi $f(X_0) = -\frac{c}{2}$. Rozpiszmy to jeszcze odrobinkę:

$$X - X_0 = \int_{-\frac{c}{2}}^{f(X)} -\frac{df}{f\sqrt{c}\sqrt{\frac{2f}{c} + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-1}^{\frac{2f(X)}{c}} \frac{du}{u\sqrt{1+u}}. \tag{19}$$

Tę ostatnią całkę można już policzyć przez proste podstawienie $u = -\frac{1}{ch^2 v}$. Stąd:

$$X - X_0 = -\frac{2}{\sqrt{c}} \cosh^{-1}\left(\sqrt{-\frac{c}{2f(X)}}\right). \tag{20}$$

Odwracając tę zależność dostajemy rozwiązanie:

$$f(X) = -\frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(X - X_0)\right)}, \tag{21}$$

a zatem

$$\phi(t, x) = -\frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - X_0)\right)}. \tag{22}$$

Zadanie 3 *(twierdzenie Hegerfeldta dla początkujących)*
Wiemy już z zadania pierwszego jak znaleźć rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera – wystarczy policzyć transformatę Fouriera stanu początkowego, pomnożyć ją przez fazę $\exp\left(-i\frac{(2\pi p)^2}{2m}t\right)$ i policzyć transformatę odwrotną. A zatem:

$$\Psi(t, x) = \int dp \hat{\Psi}(t = 0, p) e^{i\left(2\pi p x - \frac{(2\pi p)^2}{2m}t\right)} \tag{23}$$

lub inaczej

$$\hat{\Psi}(t, p) = \hat{\Psi}(t = 0, p) e^{-i\frac{(2\pi p)^2}{2m}t}. \tag{24}$$

[2] Jest też trzeci wariant, w którym kulka będzie spoczywała przez cały czas w $f = 0$. Łatwo się przekonać, że jest to rozwiązanie równania KdV, ale charakteryzuje się byciem wyjątkowo nudnym.

Przypomnijmy sobie *twierdzenie Paleya–Wienera*[3] W jednym ze sformułowań mówi ono między innymi to, że jeżeli f jest funkcją o zwartym nośniku, to $\hat{f}$ jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej i do tego spełnia:

$$|\hat{f}(p)| \leq Ce^{A|p|}, \tag{25}$$

dla pewnych stałych $C, A > 0$.
W szczególności, jeżeli nasze dane początkowe $\Psi(t = 0, x)$ miały zwarty nośnik, to $\hat{\Psi}(0, p)$ spełnia ten warunek. Widzimy jednak, że pisząc $p = |p|e^{i\theta}$, otrzymamy wyraz postaci $e^{\frac{2\pi^2|p|^2 \sin 2\theta t}{m}}$, który wybucha gdy $|p| \to \infty$ szybciej niż funkcja wykładnicza (jeśli $\sin 2\theta > 0$), a zatem $\hat{\Psi}(t, p)$ nie może być transformatą Fouriera funkcji o zwartym nośniku dla dowolnego $t \neq 0$.
Uwaga Ktoś mógłby mieć wątpliwości – czy przypadkiem $\hat{\Psi}(0, p)$ nie mogłaby zanikać jeszcze szybciej gdy $\sin 2\theta > 0$ i wtedy nasza argumentacja nie byłaby poprawna. Pozostawiamy jako ćwiczenie dowód tego, że w istocie nie może to zajść.
Zadanie 4 *(charakterystyczny problem Cauchy'ego)*
Standardowo dla równania falowego dane początkowe zadaje się na powierzchni $t = 0$. Należy wtedy podać $\phi(0, x)$ oraz $\phi_t(0, x)$. W tym ćwiczeniu przekonamy się, że wybór tzw. powierzchni charakterystycznej jako powierzchni początkowej prowadzi do innego typu danych, które należy zadać.

(i) Proszę przepisać dwuwymiarowe równanie falowe $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$ w zmiennych $(u, v) = (t - r, t + r)$ i uzasadnić, że ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\phi(t, x) = F(t - r) + G(t + r). \tag{26}$$

(ii) Rozważmy powierzchnię $v = v_0$ i zadajmy na niej ϕ jako funkcję od u. Czy ϕ_v jest teraz arbitralne? Czy ϕ oraz ϕ_v na tej powierzchni wystarczają by znaleźć funkcję ϕ wszędzie?

(iii) Weźmy dodatkową powierzchnię $u = u_1$. Czy znajomość $\phi(u, v_0)$ oraz $\phi_v(u, v_0)$ nakłada jakieś więzy na $\phi(u_1, v)$?

(iv) Proszę pokazać, że dane z poprzedniego podpunktu już jednoznacznie zadają rozwiązanie równania falowego.

(Zadanie danych 'początkowych' na powierzchni charakterystycznej równań hiperbolicznych bywa bardzo użyteczną techniką, znajduje zastosowanie np. przy badaniu czarnych dziur. Niestety, zbadanie jakie dane można są swobodne i dowód, że zadają jednoznacznie rozwiązanie bywa już bardzo nietrywialny – w przypadku równań Einsteina rygorystyczna analiza została przeprowadzona dopiero w 1990, 38 lat po dowodzie, tego że problem Cauchy'ego jest dobrze postawiony.)

[3] patrz np. Wikipedia, Rudin '73 lub Hörmander '76.