Dzisiaj czas na przykłady. Wiemy, że rozwiązania bardzo zależą od warunków początkowych. Przypomnijmy co nazywaliśmy problemem dobrze postawionym:

- ma rozwiązania
- które są jednoznaczne
- i które w sposób ciągły zależą od warunków początkowych .

Osobne pytanie dotyczy stabilności (mówiliśmy ostatnio o zasadzie maksimum), klasie rozwiązania (ostatnio po kolokwium) itp. Większość oczekiwań ma naturę zdroworozsądkową, na zasadzie *fizyczne vs. niefizyczne.*

Przykład 1. *(stabilność)*
Równanie Laplace'a w 2-D

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ u(x,0) = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) & k > 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że funkcja

$$u(x,y) = e^{-\sqrt{k}} \cos(ks) \cosh(ky)$$

spełnia warunek początkowy oraz równanie, bo

$$u_{,xx} = e^{-\sqrt{k}} \left(-k^2 \cos(kx)\right) \cosh(ky), \quad u_{,yy} = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \left(k^2 \cosh(ky)\right).$$

O co chodzi ze stabilnością? Zacznijmy zwiększać k w warunku początkowym

$$\lim_{k\to\infty} u(x,0) = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \to 0,$$

czyli dla $k \to \infty$, mamy $u(x,0) = 0$ i takiego zachowania moglibyśmy oczekiwać od rozwiązania. Ale jest problemik. Otóż

$$\left| \sup_x u(x,y) \right| = e^{-\sqrt{k}} \cosh(ky) = e^{-\sqrt{k}} \frac{e^{ky} + e^{-ky}}{2} \to \infty$$

oraz

$$u(x,y,k)|_{x,y=const} \to \infty.$$

Ale już

$$u(x,y,k) \overset{y\to 0}{\to} e^{-\sqrt{k}} \cosh(kx) \to 0.$$

No nie jest to stabilne, jeżeli warunek początkowy dąży do zera.

Przykład 2. *(struna 1-D, warunki początkowe)*
Rozważmy strunę

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & u(x,t) : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leqslant 1 \end{cases} \\ u_{,t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

Możemy separować zmienne

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Po podstawieniu

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda,$$

więc standardowo $X'' + \lambda X = 0$ *oraz* $T'' + \lambda T = 0$*, ale jeżeli struna zamocowana jest na obu końcach, to*

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Czyli λ *nie może być* $\leqslant 0$*. Zatem* $X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + D_1 \sin(\lambda x)$*. Dzięki czemu otrzymujemy*

$$c_1 = 0, \quad X(x) = D_1 \sin(\lambda x)$$

i $\lambda = k\pi$*,* $k = 1, 2, 3, \ldots$*. Zatem*

$$T(t) = A_k \cos(\pi t) + B_k \sin(\pi t),$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\pi t) + B_k \sin(\pi t)) \sin(\pi x).$$

Wiemy, że $u_{,t}(x,0) = 0$*, czyli* $B_k = 0$ *i mamy warunek*

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\pi x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Pamiętamy, że policzenie A_k *sprowadza się do całki*

$$A_k = \frac{2}{1} \int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi k x) dx, \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Całka da się policzyć.

$$A_k = \frac{2\sin(k\pi d)}{\pi^2 (1-d) k^2}.$$

Wynik w postaci jednej funkcji (bez przypadków) nie musi nas dziwić, bo transformata impulsu typu trójkąt też daje jedno wyrażenie. Zatem

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k\pi d) \sin(k\pi x) \cos(k\pi t)$$

i widzimy, że szereg jest zbieżny jednostajnie, więc do $\varphi(x)$ dąży.
A czy spełnia równanie falowe?

$$u_{,tt} = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi d) \sin(k\pi x) \sin(k\pi t)(k\pi)^2 \frac{(-1)}{k^2}$$

i mamy szereg rozbieżny z wyjątkiem punktów o współrzędnej całkowitej.

Widzimy więc, że nie potrzeba bardzo wyrafinowanych warunków brzegowych by równanie falowe sie wysypało - gdybyśmy chcieli modelować naciągnięcie i zwolnienie struny - to jakiej funkcji byśmy użyli?
Można myśleć o tym że trzeba w jakiś sposób wygładzić dziubek funkcji. Na przykład zakładając, że

$$\varphi(x) = x(1-x).$$

Można sprawdzić w domu, czy druga pochodna rozwiązania zajmuje się lepiej (hehe). Do stabilności rozwiązań jeszcze wrócimy. Zastanówmy się teraz nad problemami odwrotnymi.
Mamy równanie różniczkowe

$$\frac{dN}{dt} = -kN(t), \quad N(0) = N_0.$$

Znając N_0 i k znamy $N(T)$. A gdybyśmy znali tylko $N(t_k) = f_k$ i szukali N_0 i k?
Trochę analogiczny problem do odtwarzania trasy autobusu znając trajektorię kasownika.

Przykład 3. *Równanie*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0,\tau], \quad u(0) = u_{,t}(0) = 0.$$

Zazwyczaj znamy $q(t)$ i szukamy $u(t)$. Wyobraźmy sobie, że tym razem znamy $u(t)$ i szukamy $q(t)$. Jak stabilne jest to poszukiwanie?
Niech

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n}\cos(nt).$$

Jak daleko od $q(t)$ będzie $q_n(t)$? Jeżeli $u(t)$ będzie takie, że $u_{,tt} = q(t)$, to

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{,tt} - n\cos(nt) = \underbrace{q(t) = n\cos(nt)}_{q_n}.$$

Wtedy $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$, ale $\|q - q_n\| = \|n\cos(nt)\| \not\to 0$! Mamy więc niestabilność ze względu na zaburzenia dla problemu odwrotnego a trudno powiedzieć, że równanie było bardzo wyrafinowane.

Przykład 4. *(równanie przewodnictwa, ale trzymamy końce pręta w lodzie)*

$$\begin{cases} u_{,t} = u_{,xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \\ u(x,0) = q(x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}.$$

Problem: *mając wartość funkcji $u(x,t)$ dla $t = \tau$ chcemy znaleźć $q(t)$ czyli rozwiązać równanie przewodnictwa do tyłu w czasie (jaka jest temperatura wszechświata w $t = 0$? :)*
Zatem niech $u(x,\tau) = f(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \pi$, pytamy o model żelazka (i krasnala co je przykłada do pręta).
Separacja zmiennych $u(x,t) = X(x)T(t)$, czyli

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Czyli $X'' + \lambda X = 0$ oraz $T' + \lambda T = 0$. Pręt ma końce w lodzie, więc $X(x) = \sin(nx)$ i $\lambda = n^2$. Więc

$$T(t) = A_n e^{-n^2 t},$$

ostatecznie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

gdzie A_n takie, że

- $t = 0$

$$u(x,0) = q(x) \implies A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\sin(nx)dx \stackrel{def}{=} q_n.$$

- $t = \tau$

$$u(x,\tau) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-n^2\tau} q_n}_{f_n} \sin(nx)dx.$$

Więc jeżeli rozwiniemy $f(x)$ *w szereg fouriera*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx)dx,$$

to znajdziemy $q_n = f_n e^{n^2\tau}$, $n \in \mathbb{N}$.
Chcielibyśmy, by wynik, czyli zrekonstruowane $u(x,t)$ *było jednoznaczne, czyli tak*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^{\pi} |u(x,t) - q(x)|^2 \, dx = 0.$$

To oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{2n^2\tau} < \infty$ *i widać, że to nie zadziała dla każdej* $f \in \mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Przykład 5. *(warunki brzegowe równania falowego)*
Mamy równanie falowe dla membrany zamocowanej na prostokątnym stelażu.

$$u_{,xx} - u_{,tt} = 0.$$

Dla równania Laplace'a wiemy, że $u(x,t)$ *byłoby tożsamościowo równe zero (bo na brzegach ma być zero - więc jak nie szarpniemy membrany to nie ma co się ruszać).*
Separacja zmiennych

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda.$$

Więc mamy dwa równania na oscylator

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$T'' + \lambda T = 0.$$

Wiemy, że $X(0) = X(\pi) = 0$, *czyli po nałożeniu tych warunków na rozwiązanie ogólne dla* $X(x)$

$$X(x) = D_1 \sin(\lambda x) + E_1 \cos(\lambda x),$$

otrzymujemy $E_1 = 0$ *i* $\lambda = n^2$. *Więc*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\right).$$

Ale $u(x,0) = 0 \implies A_n = 0$ *i*

$$u(x,\tau) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\tau)\sin(nx) = 0 \underset{x\in[0,\pi]}{\forall}.$$

Możemy zapytać o jednoznaczność wyliczenia B_n, gdy τ nieujemne, to $B_n = 0$, ale jeżeli τ jest ujemne, to mamy nieskończenie wiele rozwiązań. Jak to się ma do podziału na wielkości fizyczne i niefizyczne? Miejmy te przykłady w głowie, gdy usłyszymy, że separacja zmiennych to po prostu naturalna, bezproblemowa procedura.