Na ostatnim wykładzie przeszliśmy od rozwiązania 3-D do 2-D a potem do 1-D dla równania falowego. Zobaczyliśmy też, że problem nadawania morsem, ewentualnie uderzania w stół można zasymulować przy pomocy odpowiednio dobranych warunków początkowych. Co więcej, możliwość nadawania morsem zależy od liczby wymiarów, przy takim podejściu (dla odpowiednio przygotowanej funkcji f da się też uzyskać prędkość nadświetlną - tak robiono przygotowując ośrodek przed wpuszczeniem do niego impulsu).

Całki Duhamela

Chcemy rozwiązać równanie falowe z siłą wymuszającą:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = h(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\
&u(x,0) = f(x) \\
&u_{,t}(x,0) = g(x),
\end{aligned}$$

gdzie $h, g \in \mathcal{C}^{\in}$, $f \in \mathcal{C}^3$ (chyba, że przejdziemy do słabych rozwiązań)

Przykład 1. *równania maxwella to na przykład coś co wygląda tak:*

$$\begin{aligned}
\nabla \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A \\
\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad E = -\nabla \varphi.
\end{aligned}$$

Ale można też tak (fajniej)

$$d \star F = j.$$

Twierdzenie 1. *Chcemy rozłożyć problem na dwie części, jednorodną i niejednorodną. Rozwiązania jednorodne w 3-D przecież znamy a uzasadnienie sposobu (arbitralnego) wydzielenia części jednorodnej i niejednorodnej nie będzie potrzebne, jeżeli pojawi się twierdzenie o jednoznaczności. Załóżmy zatem, że $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, gdzie*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - c^2 \Delta w = 0 \\ w(x,0) = f(x) \\ w_{,t}(x,0) = g(x) \end{cases}, \ a \ \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = h(x,t) \\ v(x,0) = 0 \\ v_{,t}(x,0) = 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

Dowód. Suma rozwiązań odtworzy nam szukane $u(x,t)$.
Rozwiązanie na $w(x,t)$ znamy z poprzedniego wykładu, wystarczy teraz przedstawić nasz warunek tak, by uzyskać równanie jednorodne, a $h(x,t)$ wrzucić do

warunków brzegowych, bo możemy wtedy ponownie skorzystać z wcześniejszych rozwiązań.
Wyobraźmy sobie, że istnieje funkcja $\varphi(x,t,a)$, na $x \in \mathbb{R}^3, t > 0, a > 0$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t,a) - c^2\Delta\varphi(x,t,a) = 0 \\ \varphi(x,0,a) = 0 \\ \varphi_{,t}(x,0,a) = h(x,a) \end{cases}.$$

Zauważmy, że $\varphi(x,t,a)$ zbudujemy wstawiając $f = 0$ i $g(x) = h(x,a)$ do wzoru Kirchoffa. Mając $\varphi(x,t,a)$ pokażemy, że funkcja

$$v(x,t) = \int_0^t \varphi(x,t-a,a)da$$

jest rozwiązaniem naszego problemu, czyli problem sprowadzi się do wycałkowania wzoru Kirchoffa obecnego w $\varphi(x,t-a,a)$ po a.

Przykład 2. *Dla równań Maxwella*

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j.$$

(dygresja - mamy taki fajny operator $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, ale nikomu nie mówcie - to tajemnica).

Chcemy pokazać, że

$$v(x,t) = \int_0^t \varphi(x,t-a,a)da$$

spełnia równanie

$$\begin{cases} v_{,tt} - c^2\Delta v = h(x,t) \\ v(x,0) = 0 \\ v_{,t}(x,0) = 0 \end{cases}, \text{ gdy } \begin{cases} \varphi_{,tt} - c^2\Delta\varphi = 0 & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ \varphi(x,0,a) = 0 & a > 0 \\ \varphi_{,t}(x,0,a) = h(x,a) & (\heartsuit) \end{cases}.$$

Ale

$$v_{,t}(x,t) = \underbrace{\varphi(x,t-t,t)}_{\varphi(x,0,a)} + \int_0^t \varphi_{,t}(x,t-a,a)da.$$

Więc

$$v_{,tt}(x,t) = \underbrace{\varphi_{,t}(x,t-t,t)}_{(\heartsuit)} + \int_0^t \varphi_{,tt}(x,t-a,a)da.$$

A my wiemy, że

$$c^2\Delta v = c^2 \int\limits_0^t \Delta\varphi(x, t-a, a)da,$$

no to w takim razie

$$v_{,tt} - c^2\Delta v = \underbrace{h(x,t)}_{\varphi_{,t}(x,0,t)} + \int\limits_0^t (\varphi_{,tt} - \Delta\varphi)da = h(x,t).$$

$\square$

Wiemy ze wzoru Kirchoffa, że

$$\underbrace{\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi^2c^2t} \int\limits_{|x'|=ct} g(x+x')ds'}_{\text{całka po sferze w 3-D o promieniu } ct \text{ i środku w } x \in \mathbb{R}^3},$$

więc

$$\varphi(x, t-a, a) = \frac{1}{4\pi^2c^2(t-a)} \int\limits_{|x'|=c(t-a)} g(x+x')ds'.$$

Można zrobić podstawienie $x + x' = [x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z] = [\xi_0, \xi_1, \xi_2] = \xi$. Wtedy mamy całkę po kuli w środku (x_0, y_0, z_0). Więc wyjdzie

$$\varphi(x, t-a, a) = \frac{1}{4\pi^2c^2(t-a)} \int\limits_{|\xi-x|=c(t-a)} g(\xi)ds_\xi.$$

Zatem

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \varphi(x, t-a, a)da,$$

no a

$$\varphi(x, t-a, a) = \frac{1}{4\pi^2c^2(t-a)} \int\limits_{|\xi-x|=c(t-a)} g(\xi)ds_\xi.$$

Więc

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi^2c^2} \int\limits_0^t \frac{da}{t-a} \int\limits_{|\xi-x|=c(t-a)} h(\xi, a)ds_\xi.$$

Pytanie 1. *Czy ten wynik ($v(x,t)$) da się przedstawić prościej? Czasami zamiast pisać $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$ można napisać po prostu $\iint_{\text{trójkąt ograniczony } y=1-x} dxdy$*

Dla każdego ustalonego a całkujemy po sferze o promieniu $c(t-a)$. Czyli mamy kolekcję sfer o promieniach od 0 do ct. Chcemy sprawdzić ile to będzie w sensie czasoprzestrzennym i w sensie przestrzennym.
Zamieńmy sobie zmienne. Niech $|\xi - x| = r$, czyli $c(t-a) = c \implies a = t - \frac{r}{c}$ i $da = -\frac{1}{c}dr$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{4\pi^2c^2}\int\limits_{ct}^{0}\frac{-dr}{c}\int\limits_{|\xi-x|=r}\frac{h(\xi,t-\frac{r}{c})}{r}cds_\xi = \\
&= \frac{1}{4\pi^2c^2}\int\limits_{0}^{ct}dr\int\limits_{|\xi-x|=r}ds_\xi\frac{h(\xi,t-\frac{r}{c})}{r} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2c^2}\iiint\limits_{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\leqslant(ct)^2}\frac{h(x',y',z',t-\frac{|x-x'|}{c})}{|x-x'|}d^3x'.
\end{aligned}
$$

Co się właśnie stało? W przeciwieństwie do równania przewodnictwa, dostaliśmy jawną zależność od prędkości rozchodzenia się sygnału. Układ związany z niejednorodnością w punkcie (x,t) zależy od zdarzeń, które miały miejsce odpowiednio wcześniej.

Przykład 3. *W przypadku elektrodynamiki*

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2\Delta\mathbf{A} = 4\pi c\mathbf{j} & \textit{gdzie } \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi = 4\pi c\rho & \textit{gdzie } \varepsilon = -\nabla\varphi + \frac{\partial A}{\partial t}
\end{cases},
$$

gdzie $\mathbf{j}$ *to na przykład cząstka naładowana poruszająca się po jakiejś trajektorii i wetdy na rozwiązanie, które uzyskaliśmy mówimy potencjały Lenarda-Wiecherta. Może zdarzyć się też tak (np. w przypadku fal dźwiękowych), że prędkość ośrodka jest większa, niż prędkość sygnału w ośrodku. Mamy wtedy fale uderzeniowe, efekt Czerenkowa i inne fajne ciekawostki.*

Pytanie 2. *Co z jednoznacznością?*

Pamiętamy, że badając operator Rayleigh'a mogliśmy wyciągnąć dużo wniosków (własności λ_n) bez konieczności rozwiązywania równań. Zobaczmy co można zrobić z równaniem falowym.

Stwierdzenie 1. *(lemat)*
Niech $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{cases} u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_{,t}(x,0) = g(x) \end{cases},$$

gdzie f i g - takie, że $u_{,t}(x,t)$ i $u_{,x}(x,t)$ są klasy $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Wówczas wielkość

$$\underset{t \geqslant 0}{\forall} \quad E(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}(u_{,t})^2 + \frac{c^2}{2}(u_{,x})^2 \right) dx$$

jest skończona i stała.

Uwaga: $E(t)$ wygląda jak energia całkowita układu, dla nośników zwartych f i g całka może być liczona na mniejszym obszarze.

Dowód. Wiemy, że
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u.$$
Przemnożymy przez $u_{,t}$ i pocałkujemy po x

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{,t} u_{,tt} dx.$$

Uwaga, sztuczka - $\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\zeta(x,t))^2 dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \zeta(x,t) \cdot \zeta_{,t}(x,t) dx$.

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u_{,t})^2 \, dx = c^2 u_{,t} u_{,x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - c^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{,tx} u_{,x} dx.$$

wycałkowane znika, bo nośnik zwarty, czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_{,t})^2 dx = -c^2 \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_{,x})^2 \, dx.$$

Wszystko na jedną stronę

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_{,t})^2 + c^2 (u_{,x})^2 dx \right] = 0 \implies E(t) = const.$$

Zatem $E(t) = E(0)$, a $u_{,t}(x,0) = g(x)$ i $u(x,0) = f(x)$, więc Znamy $E(t)$. □

Stwierdzenie 2. *(lemat)*
Niech

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} + h(x,t) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_{,t}(x,0) = g(x), \end{cases}$$

wówczas równanie posiada tylko jedno rozwiązanie.

Dowód. Niech $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ - rozwiązania równania. Niech $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Oznacza to, że $u(x,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u_{,t}(x,0) = 0 \end{cases}.$$

A wiemy, że

$$\underset{t \geqslant 0}{\forall} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon}(u_{,t})^2 + \frac{c^2}{2}(u_{,x})^2 dx = E(t) = E(0) = 0,$$

czyli $u_{,t} = 0$ i $u_{,x} = 0$, więc u jest stałe ze względu na t i x, czyli $u(x,t) = 0$ (bo warunki początkowe). W związku z tym,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

□