Ćwiczenia 10
Równanie falowe w $(1+1)$ oraz $(1+3)$ wymiarach

Analiza IV

4 maja

1 Teoria

Na dzisiejszych zajęciach zajmować się będziemy równaniem falowym

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

na $\mathbb{R}^{1+1}$ oraz $\mathbb{R}^{1+3}$. Jak na fizyków przystało kładziemy $c = \hbar = 8\pi G = k_B = 1$.
Na wykładzie rozwiązano (niecharakterystyczny) problem Cauchy'ego, to znaczy znalezienia rozwiązania przy zadanych warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} u &= g, \quad \text{gdy} \quad t = 0 \\ u_t &= h, \quad \text{gdy} \quad t = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ oraz $h \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \{1, 3\}$.
W przypadku $(1+1)$-wymiarowym otrzymano wzór d'Alemberta:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy. \tag{3}$$

Znaleziono też rozwiązanie analogicznego problemu, przy dodatkowym warunku brzegowym

$$u = 0, \quad \text{gdy} \quad x \leq 0, \tag{4}$$

które można interpretować jako falę rozchodzącą się na nieskończonej linie zamocowanej z jednej strony. Rozwiązanie ma wówczas postać:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy, \quad \text{gdy} \quad x - t > 0 \\ &\frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)dy, \quad \text{gdy} \quad x - t < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Z kolei w $(1+3)$ wymiarach otrzymano wzór Kirchoffa, czyli rozwiązanie za pomocą średnich sferycznych:

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\partial_t\left(\frac{1}{t}\int_{\partial K(\vec{x},t)} g(s)dS\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial K(\vec{x},t)} h(s)dS. \tag{6}$$

2 Praktyka

2.1 Zagadnienia $(1+1)$-wymiarowe

Zadanie 1 *(struna półnieskończona)*
Rozważmy ruch nieskończonej struny zamocowanej w $x=0$. Proszę znaleźć rozwiązanie przy warunkach początkowych

$$\begin{aligned} u(t=0,x) &= \cos(x-4)\theta\left(\frac{\pi}{2}-|x-4|\right) \\ u_t(t=0,x) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasy C^2?
Zadanie 2 *(wibrująca skończona struna)*
Rozważamy ruch struny przymocowanej w punktach $x=0$ oraz $x=L$. Ruch ten będzie opisywany przez równanie falowe w obszarze $(t,x)\in\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,L]$ uzupełnione o warunki brzegowe Dirichleta $u(t,x=0)=u(t,x=L)=0$. Niech $u(0,x)=g(x)\in C^2((0,L))$, $u_t(0,x)=0$.
Proszę znaleźć dane początkowe $\tilde{u}(t=0,x)=\tilde{g}$, $\tilde{u}_t(t=0,x)=\tilde{h}$ dla rozwiązania równania falowego $\tilde{u}$, takie że:

- $\tilde{g}|_{[0,L]}=g$, $\tilde{h}|_{[0,L]}=0$
- $\tilde{g}\in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{h}\in C^1(\mathbb{R})$
- $\tilde{u}(t,x=0)=\tilde{u}(t,x=L)=0$.

Proszę uzasadnić, że wówczas $\tilde{u}|_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,L]}=u$.
Zadanie 3 *(zachowanie asymptotyczne)*
Załóżmy, że dane początkowe g oraz h zanikają szybciej niż x^{-1}, gdy $x\to\pm\infty$. Proszę znaleźć asymptotykę rozwiązania $u(x,t)$ danego przez (3) lub (5), gdy $t\to\infty$

(i) przy ustalonym x

(ii) przy ustalonym $x-t$.

Zadanie 4 *(zasada ekwipartycji energii)*
Załóżmy, że dane początkowe g oraz h mają zwarty nośnik. Zdefiniujmy energię kinetyczną

$$E_k(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx u_t^2(t,x) \tag{8}$$

oraz potencjalną

$$E_p(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx u_x^2(t,x). \tag{9}$$

Proszę wykazać, że

(i) całkowita energia $E(t)=E_k(t)+E_p(t)$ nie zależy od czasu.

(ii) $E_k(t)=E_p(t)$ dla dostatecznie dużych t.

2.2 Zagadnienia $(1+3)$-wymiarowe

Zadanie 1 *(harmoniki sferyczne)*
Niech

(i) $u(t=0,\vec{x})=x$, $u_t(t=0,\vec{x})=y$.

(ii) $u(t=0,\vec{x})=\alpha|\vec{x}|^l Y_{lm}(\vec{x})$, $u_t(t=0,\vec{x})=\beta|\vec{x}|^{l'}Y_{l'm'}(\vec{x})$.

Proszę znaleźć rozwiązanie równania falowego, gdy $t > 0$.

Zadanie 2 *(osobliwe dane początkowe)*

Będziemy rozważać teraz równanie falowe z osobliwymi danymi początkowymi. Nie przejmując się tym szczególnie, wykorzystamy wzór Kirchoffa (6) i zobaczymy co się stanie. Niech

$$\begin{aligned} u(t=0,\vec{x}) &= \frac{\alpha}{|\vec{x}|} \\ u_t(t=0,\vec{x}) &= \frac{\beta}{|\vec{x}|}. \end{aligned} \tag{10}$$

Proszę wykorzystać wzór Kirchoffa i zobaczyć co dostaniemy. Czy otrzymana funkcja spełnia równanie falowe w jakimś obszarze?

Zadanie 3 *(zachowanie asymptotyczne)*

Załóżmy, że dane początkowe g oraz h mają zwarty nośnik. Jak wygląda nośnik rozwiązania $u(t,\vec{x})$ dla ustalonej chwili czasu t? Proszę znaleźć asymptotykę rozwiązania $u(t,\vec{x})$ danego przez (6), gdy $t \to \infty$

(i) przy ustalonym $|\vec{x}|$

(ii) przy ustalonym $|\vec{x}| - t$.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy założymy, że dane początkowe zanikają potęgowo (jak szybko?)?