Ćwiczenia 1
Metoda Frobeniusa

Analiza IV

28 lutego

Lasciate ogne speranza, voi ch'intrate.

1 Teoria

Rozważamy równanie postaci

$$w(z)f'' + p(z)f' + q(z)f(z) = 0, \tag{1}$$

na nieznaną funkcję $f(z)$, w którym to równaniu $w(z), p(z), q(z)$ są funkcjami holomorficznymi (to zazwyczaj będą wielomiany lub funkcje, które można sprowadzić do postaci wielomianów przez odpowiednią transformację zmiennej.)

1.1 Klasyfikacja punktów

i) Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ nazywamy nieosobliwym (*ordinary*) jeżeli funkcje pw^{-1} oraz qw^{-1} są holomorficzne w punkcie z_0.

ii) Punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ nazywamy regularnie osobliwym jeżeli nie jest on nieosobliwy, ale funkcje $(z - z_0)pw^{-1}$ oraz $(z - z_0)^2qw^{-1}$ są holomorficzne w punkcie z_0.

iii) Wszystkie pozostałe punkty na sferze Riemanna nazywamy nieregularnie osobliwymi.

Żeby sprawdzić zachowanie w nieskończoności, wprowadzamy zmienną $u = z^{-1}$, przepisujemy w niej równanie (1) i badamy holomorficzność w $u_0 = 0$.

1.2 Rozwiązania

i) Na otoczeniu punktu nieosobliwego z_0 istnieją dwa holomorficzne rozwiązania [1] równania (1).
Jak je dostać? Po prostu rozwijamy funkcje w, p, q, f w szereg wokół z_0 i porównujemy współczynniki. Dostajemy równania rekurencyjne na współczynniki a_k w szeregu Taylora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$.

[1] Przez 2 rozwiązania rozumieć będziemy oczywiście 2 liniowo niezależne rozwiązania

ii) Niech $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ będzie punktem regularnie osobliwym. Rozważmy równanie:

$$r^2 + \left(\lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{w(z)}(z - z_0) - 1 \right) r + \lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{w(z)}(z - z_0)^2 = 0, \tag{2}$$

które nazywa się *równaniem indeksowym*. Ma ono dwa rozwiązania r_+, r_-.

- Jeżeli $(r_+ - r_-) \notin \mathbb{Z}$, wówczas (1) ma dwa rozwiązania postaci $(z - z_0)^{r_\pm} g(z)$, gdzie $g(z)$ jest funkcją holomorficzną na otoczeniu z_0.
  Jak je dostać? Wstawiamy $f(z) = (z - z_0)^{r_\pm} g(z)$ do (1) i rozwijamy w, p, q, g w szereg wokół z_0 i porównujemy współczynniki. Dostajemy równania rekurencyjne na współczynniki a_k w szeregu Taylora $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.
- Jeżeli $(r_+ - r_-) \in \mathbb{N}_0$, wtedy mamy jedno rozwiązanie postaci $f_+ = (z - z_0)^{r_+} g_+(z)$ z $g_+(z)$ holomorficznym na otoczeniu z_0. Drugie rozwiązanie to $f_- = b \log(z - z_0) f_1 + (z - z_0)^{r_-} g_-(z)$, gdzie $g_-(z)$ jest holomorficzne na otoczeniu z_0, a b jest stałą.
  Jak je dostać? Wstawiamy postać $f_\pm(z)$ do (1) i rozwijamy $w, p, q, g_\pm$ w szereg wokół z_0 i porównujemy współczynniki. Dostajemy równania rekurencyjne na współczynniki a_k w szeregu Taylora $g_\pm(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ oraz b. Jeżeli $r_+ = r_-$, to $b = 1$.

2 Praktyka

2.1 Klasyfikacja punktów

Zadanie 1.1 Rozważmy równanie

$$(z - 1)^2 f'' + (z - 1) f' - f = 0. \tag{3}$$

Proszę sklasyfikować wszystkie punkty sfery Riemanna względem tego równania.
Zadanie 1.2 Rozważmy równanie

$$z(1 - z) f'' + [c - (a + b + 1)z] f' - abf = 0, \tag{4}$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{C}$ są stałymi.
(jest to słynne równanie hipergeometryczne. Praktycznie wszystkie równania zwyczajne 2 rzędu, na które się natykamy w życiu są tej właśnie postaci.)
Proszę sklasyfikować wszystkie punkty sfery Riemanna względem tego równania.

2.2 Rozwiązania

Zadanie 2.1
Proszę rozwiązać (tzn. znaleźć rozwiązanie w postaci szeregu i w miarę możności go zwinąć) równanie (3) wokół punktów $z_0 = 0$ oraz $z_1 = 1$.
Zadanie 2.2 *(funkcje Hermite'a)*
Rozważmy zagadnienie własne

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0 \tag{5}$$

na funkcję $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oraz stałą $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Jest to równanie Schrödingera opisujące oscylator harmoniczny zapisane w odpowiedni sposób.)

i) Używając metody Frobeniusa, proszę znaleźć rozwiązania (w postaci szeregu) wokół $x_0 = 0$.

ii) Dla jakich λ funkcja $e^{-\frac{x^2}{2}} u$ jest całkowalna z kwadratem na $\mathbb{R}$?
(Fizycznie $e^{-\frac{x^2}{2}} u$ (modulo stałe) jest funkcją falową, a ta musi należeć do $L^2(\mathbb{R})$.)

iii) Niech $(u_\lambda, \lambda), (u_{\lambda'}, \lambda')$ będą dwoma rozwiązaniami tego zagadnienia, które spełniają warunek z drugiego punktu. Proszę pokazać, że jeżeli $\lambda \neq \lambda'$, to

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2} u_\lambda u_{\lambda'} = 0 \tag{6}$$

Zadanie 2.3 *(wielomiany Czebyszewa)*
Rozważmy równanie

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \tag{7}$$

na wielomian $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ przy $n \in \mathbb{N}_0$.

i) Proszę znaleźć rozwiązania dla $n \in \{0, 1, 2\}$.

ii) Niech T_k, T_{k-1} będą rozwiązaniami (7) z $n = k, k - 1$ (odpowiednio). Proszę pokazać, że

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \tag{8}$$

rozwiązuje (7) z $n = k + 1$.

iii) Weźmy $T_0 = 1, T_1 = x$. Proszę pokazać, że

$$T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta). \tag{9}$$

Zadanie 2.4 *(potencjał Morse'a)*
Rozważmy równanie Schrödingera:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r)\right)\psi(r) = E\psi(r), \tag{10}$$

w którym $\psi \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ z potencjałem Morse'a

$$V(r) = V_0\left(e^{-\frac{2}{b}(r-r_0)} - 2e^{-\frac{1}{b}(r-r_0)}\right), \tag{11}$$

który opisuje oddziaływanie między atomami w cząsteczkach dwuatomowych[2].

i) Proszę przepisać równanie (10) w zmiennej $z = K_0 b e^{-\frac{1}{b}(r-r_0)}$, gdzie $K_0 = \frac{\sqrt{2\mu V_0}}{\hbar}$. Energię wygodnie można zapisać za pomocą parametru $\kappa = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$.

ii) Proszę podstawić $\psi(z) = e^{\pm z} w(z)$ i użyć metody Frobeniusa by rozwiązać otrzymane równanie w postaci szeregu. (D) Skąd takie podstawienie?

iii) Narzuciwszy warunek $\int_{\mathbb{R}_+} dr r^2 |\psi|^2 < \infty$, proszę wyznaczyć skwantowane poziomy energetyczne E.

[2] Rozwiązujemy tu uproszczony przypadek, w którym zakładamy, że funkcja falowa jest sferycznie symetryczna.