Ćwiczenia 4
Rozwiązania

Analiza IV

20 marca

The riddles of God are more satisfying than the solutions of man.

Zadania w zamyśle miały być raczej proste, więc mam nadzieję, że nie sprawiły Wam trudności.

Zadanie 1.1

$$\zeta_t + (uh)_x = 0 \tag{1}$$
$$u_t = -g\zeta_x, \tag{2}$$

(i) Różniczkujemy równanie (1) po czasie. Jeżeli $u \in C^2(\mathbb{R})$, to $(uh)_{xt} = (u_t h)_x$ i możemy wykorzystać równanie (2) otrzymując koniec końców:

$$\zeta_{tt} - g\left(\zeta_x h\right)_x = 0. \tag{3}$$

Jeżeli h jest stałe, to możemy wyłączyć je przed różniczkowanie otrzymując równanie falowe

$$\zeta_{tt} - gh\zeta_{xx} = 0 \tag{4}$$

z prędkością $v = \sqrt{gh}$.

(ii) Podstawiając $\zeta = \eta(x)e^{-i\omega t}$ do (4) otrzymujemy natychmiast

$$-\omega^2\eta - gh\eta_{xx} = 0, \tag{5}$$

skąd otrzymujemy natychmiast

$$\eta = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{6}$$

gdzie $k = \frac{\omega}{\sqrt{gh}}$. Wstawiając to do (2) razem z $u = Ue^{-i\omega t}$ znajdujemy

$$U = -ig\omega^{-1}\eta_x. \tag{7}$$

(iii) Najogólniejsze rozwiązanie (dla prostoty, tylko ζ) będzie postaci

$$\eta_j = A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x}, \tag{8}$$

gdzie $j \in \{1, 2, 3\}$ (numerujemy od lewej). Zachodzi $k_1 = k_3 = \frac{\omega}{\sqrt{gh_1}}$ oraz $k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{gh_2}}$.
Zauważmy jeszcze przy okazji, że ω nie może zależeć od obszaru, bo w przeciwnym razie nie udałoby się zszyć rozwiązań (bo zachowywałyby się inaczej w czasie).
Warunki zszycia są postaci $\eta_j = \eta_{j+1}$ oraz $h_j \frac{d\eta_j}{dx} = h_{j+1}\frac{d\eta_{j+1}}{dx}$ przy czym równości zachodzą w odpowiednich punktach. A zatem:

$$\begin{aligned}
A_1 e^{-ik_1 a} + B_1 e^{ik_1 a} &= A_2 e^{-ik_2 a} + B_2 e^{ik_2 a} \\
A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} &= A_3 e^{ik_1 a} + B_3 e^{-ik_1 a} \\
h_1 k_1 \left(A_1 e^{-ik_1 a} - B_1 e^{ik_1 a}\right) &= h_2 k_2 \left(A_2 e^{-ik_2 a} - B_2 e^{ik_2 a}\right) \\
h_2 k_2 \left(A_2 e^{ik_2 a} - B_2 e^{-ik_2 a}\right) &= h_1 k_1 \left(A_3 e^{ik_1 a} - B_3 e^{-ik_1 a}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Jak widać, jest to układ 4 liniowo niezależnych równań na 6 niewiadomych $\{A_j, B_j\}_{j\in\overline{1,3}}$. Jak widać, rozwiązanie zadanie jest przez podanie dwóch stałych, dokładnie tyle ile byśmy się spodziewali bazując na policzeniu niewiadomych w początkowym układzie.

(iv) Jeżeli zakładamy, że fala przychodzi z lewej, to w obszarze pierwszym będzie przemieszczać się w obie strony (bo część fali się odbije od schodka), tak samo w drugim (najpierw część fali przejdzie, potem część się odbije na drugiej granicy obszarów etc.), a w trzecim będzie przemieszczać się już tylko w prawo (bo nie ma od czego się odbić). Zatem $B_3 = 0$. Skoro $A_1 \neq 0$, to możemy bez straty ogólności przyjąć $A_1 = e^{ika}$ (bo całe zagadnienie jest jednorodne). Żeby trochę uprościć warunki zszycia wprowadźmy też $R = B_1 e^{ik_1 a}$ (R jak odbita fala) oraz $T = A_3 a^{ik_1 a}$. Porzućmy też indeksy w A_2, B_2. Rozwiązując układ równań liniowych otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{4s}{(1+s)^2 e^{2ik_2 a} - (1-s)^2 e^{-2ik_2 a}} \\
R &= \frac{2i(1-s)^2 \sin 2k_2 a}{(1+s)^2 e^{2ik_2 a} - (1-s)^2 e^{-2ik_2 a}} \\
A &= \frac{T}{2} e^{-ik_2 a}(1+s) \\
B &= \frac{T}{2} e^{ik_2 a}(1-s),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

gdzie $s = k_1 h_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$.
Proszę zauważyć, że istnieją takie wartości parametrów ω, a, h_1, h_2, dla których fala się nie odbija tylko przechodzi w całości na drugą stronę. Nie istnieją jednak takie, dla których fala się odbija w całości.

Zadanie 2.1
Rozpocznijmy od obserwacji, że hamiltonian komutuje z operatorem parzystości $\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$, a zatem możemy bez straty założyć, że funkcja falowa ma określoną parzystość. Przedstawiamy rozwiązanie jedynie dla parzystych funkcji falowych. Przypadek nieparzysty pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelniczce_kowi.

(i) Gdy $|x| > a$, potencjał znika i rozwiązujemy problem cząstki swobodnej. Jeżeli interesują nas stany stacjonarne, to rozwiązanie musi zanikać wykładniczo. Wewnątrz studni potencjału też mamy do czynienia z cząstką swobodną tylko o przesuniętej energii. Zatem ogólne parzyste rozwiązanie parzyste będzie postaci

$$
\Psi(x) = Ae^{-\alpha|x|}\theta\left(|x| - a\right) + B\cos\beta x \theta\left(a - |x|\right), \tag{11}
$$

gdzie $\alpha = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$, $\beta = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ (chwilowo nie zakładamy nic o znaku $(E - V_0)$, jeżeli będzie to ujemne, to cosinus po prostu zamieni się na cosinus hiperboliczny). Dopiero warunki zszycia wymuszą na nas *jakieś* ograniczenia.

(ii) Chcemy żeby funkcja falowa była przynajmniej klasy C^1, co prowadzi nas do warunków:

$$
\begin{aligned}
Ae^{-\alpha a} - B\cos\beta a &= 0 \\
-A\alpha e^{-\alpha a} + B\beta\sin\beta a &= 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Mamy zatem układ dwóch równań jednorodnych na dwie niewiadome. Jeżeli rzeczone równania są liniowo niezależne, to jedynym rozwiązaniem będzie $(A, B) = 0$. Stąd, musimy żądać by wyznacznik powyższego układu zanikał:

$$
\beta\sin\beta a - \alpha\cos\beta a = 0, \tag{13}
$$

co prowadzi do skwantowania energii E (od której zależą β oraz α). Proszę rozwiązać to (przestępne!) równanie numerycznie w Mathematice dla różnych wartości parametrów i sprawdzić co się dzieje w przypadku hiperbolicznym.

(iv) Pozostałe podpunkty zostawiamy Czytelnikowi_czce jako ćwiczenie. Na czym polega różnica między przypadkiem związanym, a rozproszeniowym?

Zadanie 2.2

(i) Powtarzając rozumowanie z Teorii, całkujemy równanie Schrödingera po małym otoczeniu zera otrzymujemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi'(0) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} dx\,(E\Psi(x) - g\delta(x)\Psi(x)) = -g\Psi(0), \tag{14}$$

a zatem funkcja Ψ będzie miała nieciągłą pierwszą pochodną. Proszę zauważyć, że jest to jedyny efekt jaki potencjał ma na rozwiązanie, na otoczeniu każdego punktu $x \neq 0$, to jest po prostu równanie na cząstkę swobodną.

(ii) Oznacza to, że wszędzie poza $x = 0$, rozwiązanie będzie dane jako funkcja eksponencjalna. Ponieważ interesują nas stany związane, wykładniki będą rzeczywiste, a zatem energia musi być ujemna. Pomijając warunki zszycia mamy:

$$\Psi(x) = Ae^{\alpha x}\theta(-x) + Be^{-\alpha x}\theta(x), \tag{15}$$

gdzie $\alpha = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$. Funkcja falowa musi być ciągła w zerze (w przeciwnym razie nie należy do dziedziny δ), a zatem A=B. Zszycie daje nam:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-\alpha B - \alpha A) = -gA, \tag{16}$$

skąd otrzymujemy warunek kwantyzacji

$$\frac{\hbar^2}{m}\alpha = -g, \tag{17}$$

więc $g < 0$ (potencjał jest przyciągający, w przeciwnym razie nie mógłby powstać stan związany), zaś $E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}$, czyli istnieje tylko jeden stan związany!