Mamy za sobą metodę charakterystyk, zobaczyliśmy, że przedstawienie problemu jako równania całkowego pozwala na poszerzenie dziedziny rozwiązań. Dobrzy byłoby wrócić do równania Hamiltona-Jacobiego i zobaczyć w nim charakterystyki, na razie jednak zajmiemy się metodą separacji zmiennych

Metoda separacji zmiennych

Przykład 1. *Niech* $u : (x, y) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, taka, że*

$$u_{,x} + 2u_{,y} = 3.$$

Moglibyśmy rozwiązać to równanie charakterystykami, ale spróbujemy inaczej. Załóżmy, że

$$u(x, y) = p(x) + q(y), \quad p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Dlaczego akurat tak? Gdybyśmy mieli twierdzenie o jednoznaczności, to nie musielibyśmy przejmować się dzielnymi założeniami - skoro działa to znaczy, że jest ok.
Po podstawieniu otrzymujemy

$$p'(x) + 2q'(y) = 3,$$

czyli

$$p'(x) = 3 - 2q'(y) \underset{x,y \in X \subset \mathbb{R}^2}{\forall}.$$

Oznacza to, że prawa i lewa strona powinny mieć tą samą wartość niezależnie od x i y. Czyli

$$\underset{k}{\exists} \quad p'(x) = k \implies p(x) = kx + c_1$$
$$3 - 2q'(y) = k \implies q(y) = \frac{3-k}{2} y + c_2.$$

Zatem

$$u(x, y)_k = kx + c_1 + \frac{3-k}{2} y + c_2.$$

To ile to k powinno wynosić? Problem jest addytywny, więc moglibyśmy zsumować lub scałkować wszystkie $u(x, y)_k$.

$$[u_{,t} + u_{,x}] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \implies \nabla_{[a,b]} u = 0.$$

Czyli u - stała na poziomicy i $u(x, t) = f(bt - ax)$.
Widzimy, że poprzednie rozwiązanie nie było najogólniejsze na świecie. To po co nam superpozycja? **Bo szybko wychodzi.**

Przykład 2. *niech dla* $u(x,0) = g(x)$,

$$u_{,t} + au_{,x} = 0.$$

Wiemy, że $u = g(x - at)$.
Zamiast tego załóżmy, że

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

czyli

$$X(x) \cdot T_{,t}(t) + aT(t) \cdot X_{,x}(x) = 0.$$

Dalej

$$\frac{T_{,t}(t)}{T(t)} = -a \frac{X_x(x)}{X(x)} \underset{X,T \neq 0}{\forall}.$$

Czyli w tej konwencji

$$\frac{T_{,t}}{T} = -ak, \quad \frac{X_{,x}}{X} = k.$$

Czyli

$$X(x) = B_k e^{kx}, \quad T(t) = A_k e^{-kat},$$

zatem

$$u(x,t,k) = c_k e^{k(x-at)}.$$

Pisząc z sumami wyjdzie tak

$$u(x,t) = \sum c(k) e^{k(x-at)}, \quad u(x,0) = \sum A_k e^{kx} = g(x).$$

A bez sum, to tak samo, tylko bez sum.

Widzimy, że powyższe podejście wyznacza klasę g funkcji, która mogłaby zadać warunek brzegowy oraz klasę funkcji, na które chcemy rozwinąć warunek brzegowy. Językiem, który pozwoli opisać problem będzie język algebry. Popatrzmy na równania:

$$X_{,x}(t) = kX(x) \tag{1}$$
$$T_{,t}(t) = -akT(t) \tag{2}$$

w sposób następujący. Niech $L_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X(x) = \psi_1$, $\frac{\partial}{\partial t} = L_2$, $T(t) = \psi_2$, $ak = \lambda_2$. Wtedy 1 wygląda bardziej jak na kwantach

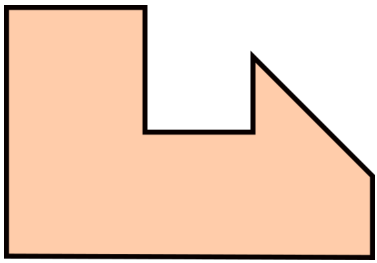
$$L_1\psi_1 = k\psi_1, \quad L_2\psi_2 = \lambda_2\psi_2.$$

Na algebrze pojawiały się podobne napisy, tylko że wyglądały tak $Av = \lambda v$. Wychodzi na to, że jak się postaramy, to będziemy mogli związać z np. operatorem

∂_x jego wektory własne!
W naszym przypadku by to miało postać

$$\psi_1(x) = e^{xk}, \quad \psi_2(t) = e^{-\lambda t}.$$

Jeżeli dołożymy do tego liniową niezależność, to będziemy mogli pytać o bazę rozwiązań, o to, jakie warunki brzegowe da się w takiej bazie przedstawić i jak zszyć ze sobą wartości własne λ_1 i λ_2 (k i $-ak$). Wartości własne muszą być funkcjami sensownej klasy (sensowna = fajna). Pamiętamy, że z L^1 nie zwiążemy iloczynu skalarnego z normą supremum (a ona jest przecież najfajniejsza na świecie). W większej niż jeden liczbie wymiarów dochodzi jeszcze problem dziedziny wartości własnych. Nikt nam nie przeszkodzi w znajdowaniu funkcji własnych dla membrany okrągłęj (bębna), ale dla membran ładnych inaczej 0.1 już jak najbardziej. Nawet nie chodzi nam tutaj o trudności w rachunkach, tylko bardziej o istnienie rozwiązań).



Rysunek 0.1: Membrana ładna inaczej, czyli w zasadzie dowolna niepodobna do elipsy

Inną przydatą rzeczą, jest umiejętność rozwiązania problemu odwrotnego - mając rozwiązanie znaleźć warunek początkowy. Na przykład mając sygnał z tomografu chcemy odtworzyć to w co on strzelał.
Widzimy zatem, że metoda separacji bynajmniej nie jest konstrukcją naturalną i na wiele rzeczy nam nie pozwoli (nawet na takie niewinne rzeczy jak potencjał zmienny w czasie).
A na co pozwala?

Przykład 3. *Rozważmy równanie* $u_t = u_{xx}$ *dla* $0 < x < \pi$ *i* $t > 0$. *Jeszcze nałożymy warunek brzegowy*

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

czyli na początku i na końcu mocowania ma się zerować.
Zastosujemy separację zmiennych:

$$u(x,t) = y(x)g(t) \implies y(x)g'(t) = g(t)y''(x).$$

Warunek brzegowy zmnienia się w taki ładny układ

$$y(0)g(t) = 0$$
$$y(\pi)g(t) = 0.$$

Zatem

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda.$$

Czyli

$$g'(t) = -\lambda g(t), \quad y''(x) = -\lambda y(x).$$

No to trzeba rozwiązać, wyjdzie

$$g(t) = A_\alpha e^{-\lambda t}, \quad \begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & 0 < x < \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Co to znaczy λ*? To jest ujemne, czy dodatnie?*
Gdyby $\lambda = -\alpha^2$*, to wtedy*

$$y(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x},$$

co nie mogłoby spełnić warunku brzegowego. To może inaczej.
Niech $\lambda = \alpha^2$*, wtedy*

$$y(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x).$$

Pierwszy wyraz nam odpada, bo $y(0) = 0$*, a z drugiego warunku wynika*

$$y(\pi) = 0 \implies B_\alpha \sin(\alpha\pi) = 0.$$

Czyli $\alpha = n \implies \lambda = n^2$*. To fajnie nawet się ułożyło, można podstawić do* $u(x, t)$*,*

$$u_n(x, t) = A_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

A jak się przesumuje po n*, to będzie tak samo tylko z sumą po* n*. Pamiętamy, że*

$$u(x, 0) = \sum_n A_n \sin(nx).$$

Czyli mamy fouriera. Współczynniki liczymy jak zawsze,

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\xi \sin(n\xi)\, u(\xi, 0).$$

Można podstawić do wzoru na $u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_n \int_0^\pi \sin(n\xi) u(\xi,0) d\xi \cdot \sin(nx) e^{-n^2 t} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\xi \left(\sum_n \sin(n\xi) \sin(nx) e^{-n^2 t} \right) u(\xi, 0).$$

Co z jednoznacznością, rodzajem zbieżności i tak dalej?
Ograniczmy się tutaj do takich operatorów, które pojawiają się w równaniach fizyki matematycznej przy okazji separacji zmiennych w postaci iloczynu (wtedy można mówić o wartościach własnych).

Operatory Sturma-Liouville'a

Niech $p, q, r \in \mathcal{C}^2[a,b]$ spełniające $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. Będziemy szukać rozwiązań problemu

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x) v(x) = \lambda r(x) v(x).$$

$\lambda \in \mathbb{C}$.
Iloczyn skalarny dany tak

$$\langle u | v \rangle = \int_a^b \overline{v(x)} u(x) r(x) dx.$$

Więc norma to

$$\|f\| = \langle f | f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Nie jest zbyt wygodna dla szacowań, wolelibyśmy *sup*, ale nie dostaniemy takiej z iloczynu skalarnego.

Przykład 4. *Równanie Schrödingera po separacji zmiennych*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x) \psi = E \psi.$$

Czyli operator jest postaci

$$L(v) = -\frac{1}{r(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x) v \right],$$

gdzie $\frac{p}{r} = \frac{\hbar^2}{2m}$, $\frac{q}{r} = E - V$. Dla niego wektor własny spełnia $L(v) = \lambda v$.
Przykładowe warunki brzegowe

- *pudełko* - $\psi(0) = 0$, $\psi(L) = 0$
- *okrąg* - $\psi(0) = \psi(L)$

Do czego potrzebny nam iloczyn skalarny? Pamiętamy z algebry, że na przestrzeni Hilberta wektory własne, (jeżeli operator jest wystarczająco fajny) są prostopadłe w danym iloczynie skalarnym. Aby tak było, L musi spełniać warunek

$$\langle Lf|g\rangle = \langle f|Lg\rangle\,.$$

To oznacza, że

$$\langle Lf|g\rangle = \int\limits_a^b (Lf)(x)\overline{g(x)}r(x)dx = \int_a^b \left(-(p(x)f')' + q(x)f\right)\overline{g(x)} =$$

$$= -\int\limits_a^b \left((p(x)f')'\overline{g(x)} + q(x)f(x)\overline{g(x)}\right)dx =$$

$$= -\,p(x)f'(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left(-p(x)f'(x)\overline{g'(x)} + q(x)f(x)\overline{g(x)}\right)dx.$$

Prawa strona

$$\langle f|Lg\rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{(-p(x)g'(x))'} - q(x)f(x)\overline{g(x)} =$$

$$= -\,p(x)\overline{g'(x)}f(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left(-p(x)\overline{g'(x)}f'(x) + q(x)f(x)\overline{g(x)}\right)dx.$$

Czyli lewa strona minus prawa strona

$$\langle f|Lg\rangle - \langle Lf|g\rangle = p(x)f'\overline{g(x)} - p(x)\overline{g'(x)}f(x)\Big|_a^b\,.$$

Jeżeli

- $p(a) = p(b) = 0$, to $\langle Lf|g\rangle = \langle f|Lg\rangle$.
- $f, g \in \mathcal{L}^2$, $[a,b] \to]-\infty,\infty[$ to też może być ok,
- możliwe oczywiście też inne warunki.

Przypomnienie z algebry - jeżeli $\langle Lf|g\rangle = \langle f|Lg\rangle$, to mówimy, że operator jest samosprzężony, wówczas

- wszystkie jego wartości własne są rzeczywiste

$$\lambda\|u\|^2 = \lambda \langle u|u\rangle = \langle \lambda u|u\rangle = \langle Lu|u\rangle = \\ = \langle u|Lu\rangle = \langle u|\lambda u\rangle = \overline{\lambda} \langle u|u\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2.$$

- wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe

To znaczy, że jeżeli u, v są takie, że

$$Lu = \lambda u, \quad Lv = \lambda v,$$

to

$$vLu - uLv = v\lambda u - u\lambda v = 0.$$

No i co z tego? ano

$$-v\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) + u\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right) = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)(uv' - u'v)\right) = 0.$$

Zatem

$$p(x)\left(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\right) = const \underset{x\in[a,b]}{\forall}.$$

Jak połączymy to z warunkiem brzegowym, to dostaniemy

$$p(x)\left(\overline{u(x)}v'(x) - \overline{u'(x)}v(x)\right)\Big|_a^b = 0.$$

Co by było jakby $\overline{u(a)}v'(a) - \overline{u'(a)}v(a) = 0$?
No wtedy to jest fajnie, bo $\underset{x}{\forall} u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = 0$, czyli

$$\det\begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x)\end{bmatrix} = 0.$$

A to oznacza, że kolumny są liniowo zależne. Czyli jeżeli

$$Lu = \lambda u, \quad Lv = \lambda v \implies \underset{c}{\exists} u = cv.$$

A co jeżeli

$$p(a)\left[\overline{u(a)}v'(a) - \overline{u'(a)}v(a)\right] = const \neq 0$$
$$p(b)\left[\overline{u(b)}v'(b) - \overline{u'(b)}v(b)\right] = const \neq 0$$

?

Warunek na samosprzężoność jest spełniony, ale

$$\det \begin{bmatrix} u & v \\ v' & v' \end{bmatrix} \neq 0,$$

czyli dla tej samej λ mamy dwa różne rozwiązania. Znajomość λ i samosprzężoność nie dają jednoznaczności rozwiązań. W ten sposób różnią się rozwiązania o periodycznych warunkach brzegowych (np na okręgu) od struny zamocowanej na obu końcach.

Przykład 5.

$$-y'' = \lambda y, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi.$$

warunki periodyczne $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$. *Wartości własne to* $\mathbb{N} \ni n^2$, *a wektory własne to*

$$u_n^1 = \cos(nx)$$
$$u_n^2 = \sin(nx).$$

Osobną sprawą jest znak wartości własnych i to, czy są one ograniczone np. od dołu, żeby przypominało na przykład energię.