Na ostatnim wykładzie oglądaliśmy różne przypadki, w których maszynka równań różniczkowych nie zachowywała się tak, jakbyśmy chcieli. Widać też, że przypadki nie były dobrane pod kątem bardzo ekscentrycznych funkcji typu $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Możemy próbować zawężać dziedzinę dopuszczalnych warunków brzegowych ale kryteria "fizyczne", "niefizyczne" tym razem nam nie pomogą. Dzisiaj spróbujemy rozwiązań w postaci szeregu potęgowego. Dla oscylatora harmonicznego kiedyś nam się udało - wstawiliśmy szereg formalny, potem znaleźliśmy przepis na współczynniki i wyszedł $\sin(x)$ lub $\cos(x)$ jako rozwinięcie w szereg Taylora. Zobaczymy jak taka procedura zadziała w przypadku 2-D. Podobne podejście zastosowaliśmy w II semestrze, gdzie zamiast ogólnego przypadku, rozważaliśmy sytuację 2-D.
Wyobraźmy sobie, że szukamy funkcji $u:\mathbb{R}^2\supset\Omega\to\mathbb{R}$, spełniającą równanie

$$\begin{aligned}a(x,y,u,u_{,x},u_{,y})u_{,xx}+2b(x,y,u,u_{,x},u_{,y})u_{,xy}+\\+c(x,y,u,u_{,x},u_{,y})u_{,yy}=-d(x,y,u,u_{,x},u_{,y}).\end{aligned}$$

Gdzie a,b,c - funkcje, klasa do ustalenia. Nasze rozwiązanie zadaje jakąś powierzchnię $z=u(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$ w $\mathbb{R}^3$, musimy podać tylko warunek brzegowy na przykład

$$u(x,y)|_c=h(x,y)|_c\,,$$

gdzie c - krzywa na płaszczyźnie xy, czyli $c\subset\Omega$, a h - jakaś zadana funkcja.
W przypadku równania II rzędu samo $h(x,y)|_c$ nie wystarczy, potrzebne jeszcze będą pochodne na brzegu, najpierw jednak sparametryzujmy c na przykład tak

$$c=\{(x,y)\in\Omega, x=f(s), y=g(s), s\in I\subset\mathbb{R}\}\,.$$

Przy takiej parametryzacji możemy zapisać

$$h(x,y)|_c=h(s)=h(f(s),g(s))$$

i wprowadzić w $\mathbb{R}^3$ krzywą Γ :

$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=f(s), y=g(s), z=h(s), s\in I\right\}.$$

Plan: Wybierzemy punkt $P\subset\Gamma$ i spróbujemy wokół tego punktu znaleźć wszystkie możliwe pochodne $u(x,y)$:

$$u_{,x}|_P, u_{,y}|_P, u_{,xx}|_p,\ldots.$$

Dzięki znajomości tych pochodnych, będziemy mogli zapisać $u(x,y)$ w postaci szeregu, czyli "wzoru Taylora" - w cudzysłowie, bo nie wiemy, czy będzie on zbieżny.

trochę o warunkach brzegowych

Nasze równanie jest drugiego stopnia więc na brzegu Γ powinniśmy kontrolować także pochodne (zamiast (x, y) może być (t, x)). Czyli

$$\begin{cases} u(f(s), g(s)) = h(s) \\ u_{,x}(f(s), g(s)) = p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) = q(s) \end{cases} .$$

Na brzegu zadajemy $h(s)$. Dlaczego nie $p(s)$ i $q(s)$? Bo krzywa $c(f(s), g(s))$ niekoniecznie musi współpracować ze współrzędnymi (x, y).
Zauważmy, że jeżeli

$$\begin{aligned} h(s) &= u(f(s), g(s)) \\ \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial s} = p(s)f'(s) + q(s)g'(s). \end{aligned}$$

Czyli $p(s)$ i $q(s)$ nie są w pełni niezależne - składowa warunków brzegowych wzdłuż parametryzacji jest kontrolowana przez $\frac{\partial h}{\partial s}$. Co jest niezależnym elementem układanki? - Składowa normalna do Γ w punkcie P, czyli

$$X(s) = \frac{\partial}{\partial n}u(f(s), g(s)) = \mathbf{n}\nabla u(f(s), g(s)).$$

Ale jeżeli $\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial s}\right)$ - styczne do c, to

$$(-g'(s), f'(s)) \cdot \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}$$

będą normalne. Więc

$$X(s) = -u_{,x}g'(s) + u_{,y}f'(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}},$$

ostatecznie:

$$\begin{aligned} u(f(s), g(s)) &= h(s) \\ u_{,x}(f(s), g(s)) &= p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) &= q(s) \\ p(s)f'(s) + q(s)g'(s) &= h'(s) \\ -p(s)g'(s) + q(s)f'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

W ten sposób zgraliśmy układ współrzędnych z geometrią Γ w punkcie P. Oczywiście, znając równanie krzywej Γ, czy c możemy tak lokalnie dobrać układ

współrzędnych, że $u_{,x}$ będzie np. normalny do Γ, a $u_{,y}$ styczny, a do tego $h(s)$ w punkcie P będzie równe zero, bo naszew rozwiązanie jest zawsze lokalne. Czas więc na procedurę znajdowania pochodnych.
Wiemy, że

$$\begin{aligned} u_{,x}(f(s), g(s)) &= p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) &= q(s). \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu i dorzuceniu wyjściowego równania otrzymujemy

$$\begin{cases} p'(s) = u_{,xx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{,xy}(f(s), g(s))g'(s) + 0u_{,yy} \\ q'(s) = 0u_{,xx} + u_{,yx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{,yy}(f(s), g(s))g'(s) \end{cases}.$$

$$-d(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s)) = au_{,xx} + 2bu_{,xy} + cu_{,yy}.$$

Gdzie $a = a(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s))$ i analogicznie b i c. Widzimy, że z powyższego układu wyliczymy $u_{,xx}, u_{,xy}, u_{,yy}$, jeżeli

$$\det \begin{bmatrix} f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \\ a & 2b & c \end{bmatrix} \neq 0.$$

Widzimy tutaj jak istotne może być zgranie (albo nie) krzywej, na której zadamy warunki brzegowe z wewnętrzną strukturą równania wyznaczoną przez a, b, c. Jeżeli $\det || \neq 0$, to możemy rozwiązać układ równań i wyznaczyć $u_{,xx}, u_{,xy}, u_{yy}$ w punkcie P. Co z wyższymi pochodnymi?
Możemy zróżniczkować równanie po $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned} &- d(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})|_P = a\,()\,u_{,xx} + 2b\,()\,u_{,xy} + c\,(u_{,yy})|_P \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(-d(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})\right)\Big|_P = a\,()\,u_{,xxx} + 2b\,()\,u_{,xyx} + c\,()\,u_{yyx} + \\ &+ \left(\frac{\partial a}{\partial x}u_{,xx} + 2b\frac{\partial b}{\partial x}u_{,xy} + \frac{\partial c}{\partial x}u_{,yy}\right)\Big|_P . \end{aligned}$$

Jest fajnie, bo ostatni wyraz znamy. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(d(x, y, u = z, u_{,x}, u_{,y})\right|_P = d_{,x}(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s)) + \\ &+ d_{,z}(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s))u_{,x}(f(s), g(s)) + \\ &+ d_{,p}\,()\,u_{,xx}(f(s), g(s)) + \\ &+ d_{,q}\,()\,u_{,xy}(f(s), g(s)). \end{aligned}$$

Reasumując, coś, co znamy $= au_{,xxx} + 2bu_{,xxy} + cu_{,xyy}$. Do tego

$$\frac{d}{ds}(u_{,xx}(f(s),g(s))) = u_{,xxx}f'(s) + u_{,xxy}(f(s),g(s))q'(s)$$
$$\frac{d}{ds}(u_{,xy}(f(s),g(s))) = u_{,xyx}f'(s) + u_{,xyy}(f(s),g(s))q'(s)$$
$$\frac{d}{ds}(u_{,yy}(f(s),g(s))) = u_{,yyx}f'(s) + u_{,yyy}(f(s),g(s))q'(s).$$

I mamy układ równań

$$\begin{array}{ccccccccc}
a\cdot u_{,xxx} & + & 2b\cdot u_{,xxy} & + & c\cdot u_{,xyy} & + & 0\cdot u_{,yyy} & = & \heartsuit \\
f'(s)\cdot u_{,xxx} & + & g'(s)\cdot u_{,xxy} & + & 0\cdot u_{,xyy} & + & 0\cdot u_{,yyy} & = & \spadesuit \\
0\cdot u_{,xxx} & + & f'(s)\cdot u_{,xxy} & + & g'(s)\cdot u_{,xyy} & + & 0\cdot u_{,yyy} & = & \diamondsuit \\
0\cdot u_{,xxx} & + & 0\cdot u_{,xxy} & + & f'(s)\cdot u_{,xyy} & + & g'(s)\cdot u_{,yyy} & = & \clubsuit \\
. & & & & & & & &
\end{array}$$

Warunek dostajemy taki

$$\det\begin{bmatrix} a & 2b & c & 0 \\ f'(s) & g'(s) & 0 & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & 0 & f'(s) & g'(s) \end{bmatrix} \neq 0,$$

czyli to samo co wcześniej. Jeżeli założymy, że a, b, c, d są różniczkowalne tak bardzo, że aż do dowolnego stopnia (analityczne), to znaleziony ciąg pochodnych odtworzy nam szukany szereg. Jest tylko mały detal związany z pokazaniem, że szereg taki jest zbieżny (smileyface.jpg). Ale za to w nagrodę mamy istnienie rozwiązania (bo właśnie je zbudowaliśmy) oraz twierdzenie, że gdy a, b, c, d są analityczne, to innego rozwiązania nie ma.

Pytanie 1. *Co się stanie, gdy*

$$\det\begin{bmatrix} a & 2b & c \\ f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \end{bmatrix} = 0?$$

Widzimy, że nie da się wtedy odnaleźć wyższych pochodnych i metoda nie działa.

Przykład 1. *(ale też trochę pytanie)*
Jak wygląda równanie krzywej, dla której $\Delta = 0$ dla równania falowego

$$u_{,tt} + 0\cdot u_{,tx} - c^2 u_{,xx} = 0?$$

W naszych literkach wychodzi

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -c^2.$$

Czyli

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c^2 \\ t'(s) & x'(s) & 0 \\ 0 & t'(s) & g'(s) \end{bmatrix} = 0 \implies (x'(s))^2 - c^2 (t'(s))^2 = 0.$$

Czyli $x'(s) = \pm ct'(s)$, *czyli dostajemy dwie proste* $x - ct = 0$ *i* $x + ct = 0$, *czyli po prostu stożek świetlny!*
Wniosek: *na stożku świetlnym nie zadajemy warunków brzegowych, bo to niegrzeczne.*

Przykład 2. *Niech*

$$\begin{cases} u_{,xx} + u_{,yy} = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}.$$

Czy istnieje $g(x) \in \mathcal{C}^\infty$, *takie że równanie nie ma rozwiązań?*
Pamiętamy, że jeżeli $u(x,y)$ *(lub* $u(x+iy)$*) jest holomorficzna, to spełnia warunki Cauchy-Riemmana.*
Wymyślmy funkcję, która jest gładka, ale nieanalityczna... na przykład taka

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$

Wtedy szereg $f(s) = \sum_k e^{-\sqrt{k}} \cos(kx)$ *nie jest zbieżny.*
Jeżeli więc f *- holomorficzna i* $u(x,y) = \Re f$, *to*

$$u_{,xx} + u_{,yy} = 0, \ gdy\ f = u(x,y) + iv(x,y).$$

Oznacza to, że u *jest analityczna (musi być). Więc jeżeli na brzegu zadamy funkcję nieanalityczną, to rozwiązanie nie będzie istnieć (o ile udowodnimy mówiące o tym twierdzenie).*

Przykład 3. *(równanie przewodnictwa)*
Mamy znane równanie

$$u_{,t} - u_{,xx} = 0.$$

W naszych literkach to jest $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ t'(s) & x'(s) & 0 \\ 0 & t'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Czyli $(-1)(t'(s))^2 = 0$, *czyli* $t = const$. *Zauważmy, że* $t = const$ *oznacza, że na przykład* $t = 0$ *i to właśnie nasze ulubione sposoby zadawania warunków brzegowych.*

Przykład 4. *Znowu drut (przykład Kowalewskiej)*

$$\begin{cases} u_{,t} - u_{,xx} = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Załóżmy, że

$$u(x,t) = \sum_{m,n\geqslant 0} a_{m,n} \frac{x^m t^n}{m!n!},$$

gdzie $a_{m,n} = D^{m,n}u$ *w zerze. Dla* $t = 0$,

$$u(x,t) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{m\geqslant 0} (-1)^m x^{2m}.$$

Czyli $a_{2m,0} = (-1)^m (2m)!$, $a_{2m+1,0} = 0 \cdot (2m)! = 0$. *Tylko dla* $n = 0$ *szereg* $u(x,0)$ *daje niezerowy układ. Ale*

$$a_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n}.$$

Więc

$$a_{m,n+1} = \frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x^m t^{n+1}} u(0) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \frac{\partial}{\partial t} (u(0)) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(0)).$$

Czyli $a_{m,n+1} = a_{m+2,n}$. *Czyli jeżeli* $a_{m,n+1} = a_{m+2,n}$ *i* $a_{2n,0} = (-1)^m (2m)!$ *i* $a_{2m+1,0} = 0$, *to znaczy, że*

$$a_{2m,n} = a_{2m+2n,0} = (-1)^{m+n} (2m+2n)!$$
$$a_{2m+1,n} = a_{2m+1+2n,0} = a_{2(m+n)+1,0} = 0.$$

Zatem (dla u już nie na brzegu)

$$u(x,t) = \sum_{m,n\geqslant 0} \frac{a_{2m,n} x^{2m} t^n}{(2m)!n!} = \sum_{m,n\geqslant 0} (-1)^{m+n} (2m+2n)! \frac{x^{2m} t^n}{(2m)!n!}.$$

Ale

$$\frac{(2m+2n)!}{(2m)!n!} \overset{m=n}{=} \frac{(4n)!}{(2n)!n!}.$$

I z kryterium d'Alemberta $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{(4(n+1))!}{(2(n+1))!(n+1)!} \frac{(2n)!n!}{(4n!}.$$

Czyli problem

$$\begin{cases} u_{,t} - u_{,xx} = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Nie ma rozwiązania analitycznego!