Weźmy takie równanie różniczkowe

$$U_{,t} + cU_{,x} = 0.$$

Ustawiamy U takie o

$$U(t,x) :]0,\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad U(0,x) = U_0(x).$$

$$[U_{,t}, U_{,x}] \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} = 0.$$

Ciekawi nas, czy istnieje taka parametryzacja $(t(s), x(t))$, że rozwiązanie U jest na niej stałe? Czyli

$$\frac{d}{ds} U(t(s), x(s)) = 0.$$

Spróbujmy tak

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$

Wtedy $x = cs + x_0$, $t = s + t_0$ Jeżeli $t = 0, s = 0$, to $t_0 = 0$.
Czyli mamy

$$\begin{cases} x = cs + x_0 \\ t = s \end{cases} \implies x = ct + x_0 \implies x_0 = x - ct.$$

No to teraz

$$U(x,t) - U_0(x_0) = U_0(x - ct).$$

(Sprawdzić czy przypadkiem czegoś podobnego nie było na mechanice klasycznej pod folderem Równania Hamiltona-Jacobiego)

Twierdzenie 1. *(Równanie Burgersa)*

$$U_{,t} + U \cdot U_{,x} = 0, \quad U(0,x) = \phi(x).$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}.$$

Rozważmy coś takiego

$$[U_{,t}, U_{,x}] \begin{bmatrix} 1 \\ U \end{bmatrix} = 0.$$

W parametryzacji $(x(s), t(s))$ - poziomica $U(t, x)$. Czyli dla jakiegoś z

$$U(t(s), x(s)) = z(s)$$

jest stała.

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = z(s) \\ \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \end{cases}.$$

Zakładamy warunki $t(0) = 0$, $x(0) = x_0$,

$$z(0) = U(t(0), x(0)) = U(0, x_0) = \phi(x_0).$$

Czyli skoro $z(s) = const$, to znaczy, że

$$z(s) = \phi(x_0) \implies \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = \phi(x_0) \\ \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\phi(x_0)) = 0 \end{cases}.$$

Czyli tak

$$t = 1 \cdot s + t_0, \quad (t(0) = 0) \implies t = s.$$

$$\begin{cases} x(s) = \phi(x_0)s + x_0 \\ z(s) = \phi(x_0) \end{cases}.$$

Zmieniamy parametryzację, czyli

$$x(t) = \phi(x_0)t + x_0.$$

Cała zabawa polega na tym, że mając punkt muszę umieć się cofnąć. To jaki kształt ma charakterystyka, to nie ma za bardzo znaczenia, ale tak długo jak istnieje parametryzacja i można się cofnąć to jest ok.
Rysujemy linie, wzdłuż których nasze rozwiązanie jest stałe (rys 0.1) Dla $x_0 < 0$ mamy $x(t) = t + x_0$, i $x_0 > 1$
Dla $0 < x_0 < 1$ mamy $x(t) = (1 - x_0)t + x_0$, czyli to jakie dostajemy rozwiązanie to bardzo mocno zależy, od tego gdzie stoimy na początku

Definicja 1. *(Słabe rozwiązania)*
Niech $\mathcal{C}^1 \ni \varphi(t, x) :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ma zwarty nośnik.*
Mówimy, że

$$U :]0, \infty[\times \mathbb{R}$$

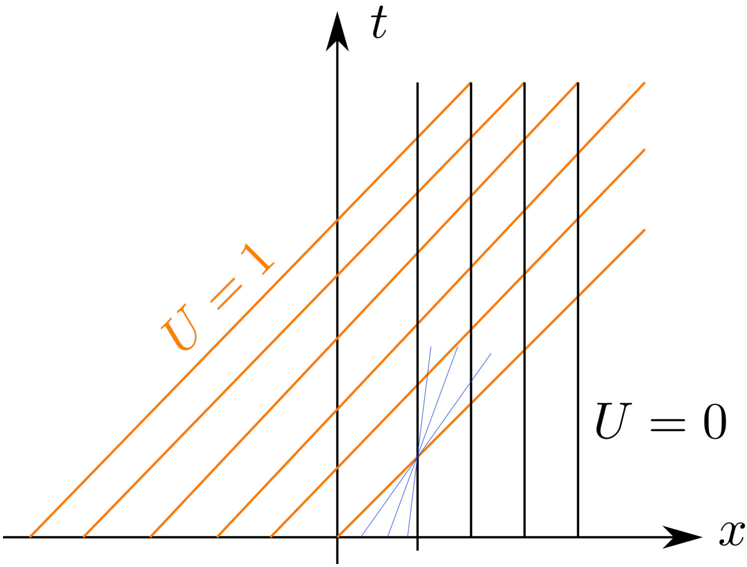
jest słabym rozwiązaniem równania

$$U_{,t} + (F(U))_{,x} = 0,$$

jeżeli

$$\forall_{\varphi} \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(U_{,t} + (F(U))_{,x} \right) \varphi(x,t) = 0.$$

Uwaga: *te dwa warunki mają różne dziedziny!*



Rysunek 0.1: Jak wyglądają nasze charakterystyki?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} dt U_{,t} \varphi(x,t) + \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (F(U))_{,x} \, \varphi(x,t) =$$

Całkujemy przez części

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, [U\varphi(x,t)]_0^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} dt U(x,t)\varphi_{,t} +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} dt F(U)\varphi(x,t)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx F(U)\varphi_{,x}.$$

Przedostatnie się zeruje bo φ ma nośnik zwarty, pierwsze do połowy wywalamy z tego samego powodu.

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{\infty} dt \left[U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x}\right] - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx U(0,x)\varphi(x,0).$$

Czyli warunek z definicji jest w sensie słabych rozwiązań równoważny warunkowi

$$\underset{\varphi}{\forall} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{\infty} dt \left[U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x}\right] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx g(x)\varphi(x,0) = 0.$$

Stwierdzenie 1. *(Przypomnienie)*
Niech $V \subset]0,\infty[\times \mathbb{R}$ - rozmaitość.
Dla $\omega \in \Lambda^1(V)$ mamy

$$\int\limits_{\partial V} \omega = \int\limits_{V} d\omega.$$

$$\int\limits_{\partial V} \star\omega = \int\limits_{V} d\left(\star\omega\right).$$

Niech

$$A = A^{t + A^x dx},$$

wtedy

$$d \star A = -\frac{\partial A^x}{\partial x} dx \wedge dt + \frac{\partial A^t}{\partial t} dt \wedge dx = \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x}\right) dt \wedge dx.$$

Podstawiając do tw. Stokesa

$$\int\limits_{V} \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x}\right) dt \wedge dx = \int\limits_{\partial V} \left\langle -A^x dt + A^t dx, \frac{\partial}{\partial V}\right\rangle.$$

Zakładamy, że brzeg V możemy sparametryzować jakoś fajnie

$$\partial V = \left\{ \begin{bmatrix} c^t(s) \\ c^x(s) \end{bmatrix}, s \in]0,1[\right\}.$$

Czyli

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial c^t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c^x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Bierzemy RHS stokesa

$$\left\langle -A^x dt + A^t dx, \frac{\partial c^t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c^x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle = -A^x \frac{\partial c^t}{\partial s} + A^t \frac{\partial c^x}{\partial s} =$$

$$= \left[A^t, A^x\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial c^x}{\partial s}\\ \frac{\partial c^t}{\partial s}\end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$$

prostopadły do wektora stycznego. Czyli

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x}\right) dV = \int\limits_{\partial V} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{dL}.$$

Stwierdzenie 2. *(Warunek Cauchy-Hugoniot)(Rankine-Hugoniot tak naprawdę)*
Szukamy krzywej, która pozwala na wybór wartości $U(x,t)$, w obszarze, w którym charakterystyki przecinają się.

Wiemy, że na V_I (**??**)

$$U^I_{,t} + F\left(U^I_{,x}\right) = 0.$$

Na V_{II}

$$U^{II}_{,t} + F\left(U^{II}\right)_{,x} = 0.$$

Szukamy funkcji U, która na V jest słabym rozwiązaniem równania

$$U_{,t} + F(U)_{,x} = 0.$$

Jeżeli U jest słabym rozwiązaniem, to znaczy, że

$$\forall_{\varphi} \int dx \int dt \left(U\varphi_{,t} + F\left(U\right)\varphi_{,x}\right) = 0.$$

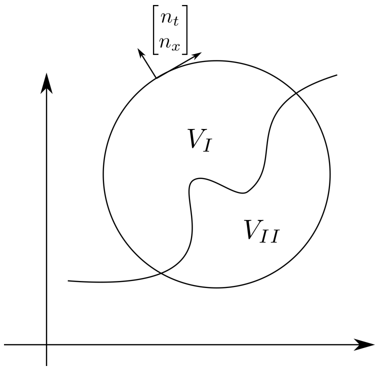
(Zakładamy, że V jest daleko od linii $t=0$, i φ ma nośnik zwarty). To wtedy to się równa

$$\forall_{\varphi} \iint\limits_{V_1} \left(U\varphi_t + F(U)\varphi_{,x}\right) + \iint\limits_{V_2} \left(U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x}\right) = 0.$$

Ale pierwszy człon można se scałkować przez części.

$$\iint\limits_{V_I} U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x} = \int\limits_{V_I} dx \int\limits_{V_I} dt \left(U\varphi\right)_{,t} + \left(F(U)\varphi\right)_{,x} - \iint\limits_{V_I} dxdt\left(U_{,t} + F(U)_{,x}\right)\varphi =$$

$$= \iint\limits_{\partial V_I} \left((U\varphi)n_t + (F(U)\varphi)n_x\right) dL + 0.$$



Rysunek 0.2: Tak dzielimy sobie nasze rozwiązania

Analogicznie

$$\iint_{V_{II}} U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x} = \int_{\partial V_{II}} \left(U^{II}\varphi\right) n'^t + F(U^{II})\varphi)n'^x + 0.$$

Ale

$$\begin{bmatrix} n^t \\ n^x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} n'^t \\ n'^x \end{bmatrix},$$

więc warunek sprowadza się do

$$\int_{\partial V_I \cap \partial V_{II}} \left((U^I - U^I)n^t + \left(F(U^I) - F(U^{II})n^x\right)\varphi\right) = 0.$$

$\partial V_I \cap \partial V_{II}$ poza częścią wspólną zakładamy, że $\varphi = 0$, bo ma zwarty nośnik.