

Na ostatnim wykładzie badaliśmy zbieżność szeregu postaci $a_k \psi_k$, gdzie ψ_k - funkcje (wektory) własne operatora Sturm-Liouville'a spełniające dość dużą liczbę precyzyjnie zdefiniowanych warunków, dzięki którym operator S-L był samosprzężony i miał inne fajne własności (np. dodatnie wartości własne). Pamiętajmy, że samosprzężoność operatora S-L wyznacza nam zbiór funkcji, którymi ten operator karmimy

$$(\langle f | Lg \rangle = \langle Lf | g \rangle).$$

Czyli zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem na jakiejś dziedzinie.

Przykład 1. $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, na zbiorze $U = \{u \in \mathcal{L}^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}$. Do zbioru U należą wektory własne operatora L , czyli

$$\psi_n = \sin n\pi x, \quad \lambda_n = n^2\pi^2.$$

Jak i funkcji, które mogłyby być warunkami początkowymi, gdybyśmy chcieli rozwiązać równanie różniczkowe. Na przykład do U należy funkcja $u_1 = x(1 - x)$.

Na ostatnim wykładzie pokaaliśmy, że baza ψ_n jest zupełna, tzn. każdą funkcję f należącą do zbioru funkcji klasy \mathcal{L}^2 , na którym operator $S - L$ jest samosprzężony da się przedstawić jako granicę ciągu $a_k \psi_k$, gdzie $a_k = \langle f | \psi_k \rangle$ i zbieżność ta jest w \mathcal{L}^2 jednostajna. Czyli na przykład

$$x(1 - x) = a_k \sin k\pi x.$$

Dygresja: swoją drogą możemy policzyć $R(u_1)$, gdzie R jest operatorem Reynoldsa

$$R(u) = \frac{\langle Lu | u \rangle}{\langle u | u \rangle}.$$

W naszym przypadku: $Lu_1 = -\frac{d^2}{dx^2}(x(1 - x)) = 2$.

$$\langle 2 | x(1 - x) \rangle = \int_0^1 2 \cdot x(1 - x) dx = \frac{1}{3}.$$

$$\langle u_1 | u_1 \rangle = \int_0^1 x(1 - x)x(1 - x) dx = \frac{1}{30}.$$

Zatem

$$R(u_1) = \frac{1}{3} / \frac{1}{30} = 10.$$

I co z tego? A to, że pamiętamy, o tym, że $R(u)$ osiąga minimum na wektorach własnych i to minimum jest najmniejszą wartością własną, czyli

$$R(u) \geq \lambda_1 \quad \forall_{u \in U} \implies 10 \geq 1^2\pi^2.$$

No, zgadza się.

Pamiętamy, że zbieżność jednostajna w \mathcal{L}^2 nie oznacza zbieżności w \mathcal{L}^1 i szereg fouriera jest w \mathcal{L}^1 zbieżny punktowo. Może być zbieżny jednostajnie, gdy na \mathcal{L}^1 nałożymy dodatkowe warunki.

Pytanie 1. *Jak otrzymane twierdzenia mają się do równań cząstkowych i metody separacji zmiennych?*

Odpowiedź: Zależy o co pytamy i od takich pojęć jak *problem dobrze postawiony*.

Definicja 1. *Problem jest dobrze postawiony, jeżeli o równaniu różniczkowym możemy powiedzieć, że*

- *rozwiązania istnieją*
- *są jednoznaczne*
- *są ciągle ze względu na zmianę warunków początkowych.*

Pełność układu funkcji własnych operatora S-L związana jest z istnieniem i jednoznacznością oraz z teorią funkcji specjalnych. Ogólnej teorii dla dowolnego równania różniczkowego nie ma. Mamy trochę wyników dla konkretnych równań fizyki matematycznej, które sprowadzają się do nałożenia warunków dodatkowych na funkcje z \mathcal{L}^2 , co gorsza, niedziła warunek na "niefizyczność" (przykłady niedługo). Na szczęście, możemy też od czasu do czasu powiedzieć coś konstruktywnego - przykład takiej analizy przeprowadzimy dla równania falowego.

Równanie falowe - motywacja

Jak dojść do równania falowego? najprościej tak:

Niech

$$A = -\phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz,$$

jednoforma potencjału elektromagnetycznego. Wówczas $F = dA$ i $dF = 0$ - mamy trzy równania falowe i jedno równanie Laplace'a.

Wariant trudniejszy - wyobraźmy sobie funkcję, której wartość zależy od średniej wartości funkcji w otoczeniu. Możemy ten warunek zapisać jako

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2},$$

h - odpowiednio małe, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Moglibyśmy teraz pomyśleć o funkcji $\varphi(x, t)$, której dynamika (przyspieszenie) zależy od średniej wartości zmian w

okolicy, czyli

$${}''ma'' = \varphi(x, t)_{,tt} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2} - \varphi(x).$$

Ale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(y+2h) + \varphi(y) - \varphi(y+h) - \varphi(y-h)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi((y+h)+h) - \varphi(y+h) - (\varphi(y+h) - \varphi(y))] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi'(y+h)h + r_1(y+h) - (\varphi'(y)h + r_2(y))] = \\ &= \frac{1}{2} [h(\varphi'(y+h) - \varphi'(y)) + r_1(y+h) - r_2(y)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi''(y)hh + r_3(y+h)h + r_1(y+h) - r_2(y)]. \end{aligned}$$

Czyli jeżeli zachodzenie funkcji zależy od średniego odchylenia, to $\varphi_{,tt} \sim \varphi''$ (bo druga pochodna po czasie też jest rzędu h^2). Dla przypadku statycznego wychodzi $\varphi'' = 0$ i ogólniej $\Delta\varphi = 0$.

Przykład 2. Dla ruchu jednowymiarowego

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_{,t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad x \in R, t > 0.$$

Pytanie 2. Jak wyprowadzić równanie falowe z równania ciągłości?

Problem typu $u_{,tt}(x, t) = c^2 u_{,xx}$ rozważaliśmy już w drugim semestrze przy okazji zamiany zmiennych

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta \\ t &= \xi - \eta. \end{aligned}$$

Dzięki której równanie zmieniło się na dużo fajniejszą formę

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

W efekcie dostaliśmy

$$u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct).$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(x) + \beta(x) \\ g(x) &= -c\alpha'(x) + c\beta(x). \end{aligned}$$

No i tam ostatecznie wyszło

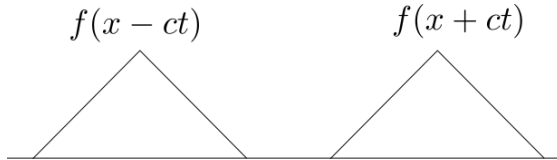
$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

gdzie $f \in \mathcal{C}^2$ i $g \in \mathcal{C}^1$. Warunki na f i g można osłabić przepisując równanie falowe w postaci całkowej dla słabych rozwiązań

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx [u_{,tt} - c^2 u_{,xx}] v(t, x) = 0 \quad \forall_{v(t,x) \in \text{funkcje próbne}}.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do równania przewodnictwa w rozwiązaniach równania falowego pojawia się wreszcie wpływ skończonej prędkości przekazywania informacji.

Pytanie 3. Jak przełożyć na język $f(x)$ i $g(x)$ szarpnięcie struny nieskończonej? Jeżeli na przykład f - trójkąt i $g(x) \equiv 0$, to jak będzie zachowywał się taki impuls?



Rysunek 0.1: Zachowanie impulsu

Nie rozmyje się, więc kłaśnięcie w 1-D usłyszymy precyzyjnie, niezależnie od tego jak daleko będziemy, tylko trzeba chwilę poczekać. Co będzie gdy kłaśniemy w 2-D? W 3-D jest ważniejsze, ale sprawdzimy czy na przykład 2-D zachowuje się tak samo. W fizyce materiałów, tam gdzie występują przerwy energetyczne na przykład 2-D działa. Rzeczywistość może być czasami opisywana przez 2-D.

Przykład 3. Struna pólnieskończona

Mając rozwiązanie dla struny nieskończonej

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (1)$$

chcemy znaleźć rozwiązania problemu

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} & t > 0, x > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \geq 0 \\ u_{,t}(x, 0) = g(x) & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Widzimy, że gdy $x \geq ct$, to rozwiązania będą takie jak wcześniej - nie zauważymy nawet, że warunki brzegowe nie są określone dla $(x < 0, t = 0)$. Wróćmy do wyprowadzenia wzoru typu ???. Wiemy, że

$$u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct),$$

ale dla $x - ct < 0$ nie mamy informacji o $\alpha(x - ct)$. Za to wiemy, że $u(0, t \geq 0) = 0$, czyli

$$0 = \alpha(-ct) + \beta(ct), \quad t > 0$$

$$0 = \alpha(-s) + \beta(s), \quad t > 0, u(x, 0) = f(x), x > 0$$

$$f(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad x > 0.$$

Zatem $\alpha(-s) = -\beta(s)$, $s > 0$ i wiemy, czym zastąpić α na ujemnych wartościach. $\beta(x)$ liczymy dla $x > 0$ tak jak poprzednio

$$\beta(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s)ds, \quad x > 0.$$

Ale gdy $x - ct \leq 0$, to $ct - x \geq 0$ i wtedy

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) - f(ct - x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s)ds.$$

Możemy to zapisać jako

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} f(s)ds + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s)ds, & x - ct < 0 \\ \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds & x - ct > 0 \end{cases}.$$