Ćwiczenia 5
Przegląd wielomianów ortogonalnych

Analiza IV

20 marca

Zu einer Anwort, die man nicht aussprechen kann, kann man auch die Frage nich aussprechen.
Das Rätsel gibt es nicht.
Wenn sich eine Frage überhaupt stellen läst, so kann sie auch beantworten werden.

1 Teoria

Proszę powtórzyć sobie Teorię z ćwiczeń pierwszych (oszczędzamy kartki!)
Na dzisiejszych zajęciach wyprowadzimy 3 najważniejsze (dla fizyków) rodziny wielomianów ortogonalnych. Wszystkie trzy pojawiają się, gdy rozwiązujemy równanie Schrödingera, ale to połączenie pozostawimy już na kurs z kwantów.
Niech $\rho : (a, b) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (dopuszczamy a, b równe $\pm\infty$). Jeżeli

$$\int_a^b dx \rho(x)|x|^n < \infty, \tag{1}$$

dla każdego n, to jednomiany tworzą układ liniowo niezależny w $L^2([a, b], \rho)$. Możemy go zortonormalizować w tej przestrzeni (stosując ortogonalizację Grama–Schmidta) otrzymując układ ortonormalny $P_0, P_1, \ldots$.
Co więcej, jeżeli dla pewnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\int_a^b dx \rho(x) e^{\epsilon|x|} < \infty, \tag{2}$$

to wielomiany są gęste w$L^2([a, b], \rho)$, więc nasz układ $P_0, P_1, \ldots$ jest bazą ortonormalną[1]. Nasze podejście dziś będzie raczej skromne – wypiszemy często pojawiające się równania, rozwiążemy je i zobaczymy, że istotnie są to wielomiany ortogonalne z pewną wagą. Zanotujmy jedynie, że wielomiany ortogonalne muszą być wektorami własnymi operatora

$$\mathcal{C} = \rho(x)^{-1} \partial_x \rho(x) \sigma(x) \partial_x, \tag{3}$$

dla pewnej funkcji rzeczywistej $\sigma(x)$. Większość jednak takich operatorów nie będzie miała wektorów własnych w postaci wielomianów, więc muszą być one pieczołowicie dobrane.

2 Praktyka

Zadanie 1 *(wielomiany Hermite'a)*
Rozważamy zagadnienie własne

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0, \tag{4}$$

które można otrzymać z równania Schrödingera dla oscylatora harmonicznego. Fizyczna funkcja falowa (modulo stałe) będzie postaci $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} u \in L^2(\mathbb{R})$.

[1] Dowód można znaleźć np. w `https://www.fuw.edu.pl/~derezins/mmf-iii.pdf`. Tam też można znaleźć pełną charakteryzację dopuszczalnych wag ρ i objawiających się wówczas wielomianów.

i) Używając metody Frobeniusa, proszę znaleźć rozwiązania (w postaci szeregu) wokół $x_0 = 0$.

ii) Dla jakich λ funkcja $e^{-\frac{x^2}{2}}u$ jest całkowalna z kwadratem na $\mathbb{R}$?

iii) Niech (u_λ, λ), $(u_{\lambda'}, \lambda')$ będą dwoma rozwiązaniami tego zagadnienia, które spełniają warunek z drugiego punktu. Proszę pokazać, że jeżeli $\lambda \neq \lambda'$, to

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2} u_\lambda u_{\lambda'} = 0. \tag{5}$$

A zatem, odpowiednio unormowane rozwiązania (4) stanowią bazę ortonormalną dla prostej rzeczywistej z wagą $\rho(x) = e^{-x^2}$.
Zadanie 2 *(wielomiany Legendre'a i stowarzyszone funkcje Legendre'a)*
Rozważamy ogólne równanie Legendre'a:

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + l(l+1)u - \frac{m^2}{1-x^2}u = 0, \tag{6}$$

gdzie $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$. Równanie to odpowiada części kątowej równania Schrödingera w sferycznie symetrycznym potencjale w 3 wymiarach po dokonaniu separacji zmiennych.

(i) Połóżmy najpierw $m = 0$. Proszę znaleźć wszystkie regularne rozwiązania równania Legendre'a $P_l(x)$. Dla jakich l istnieją? Proszę udowodnić, że są to wielomiany.

(ii) Proszę udowodnić, że stanowią one bazę ortogonalną w $L^2([-1, 1])$ z wagą $\rho = 1$.

(iii) Będziemy normalizować nasze wielomiany w taki sposób, że $P_l(1) = 1$. Proszę udowodnić, że $P_0 = 1$, $P_1 = x$ i zachodzi *wzór Rodriguesa*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^n \tag{7}$$

(Podpowiedź: sprawdzić, że P_n to wielomian n-tego stopnia, wykazać ortogonalność, a następnie wykorzystać jednoznaczność.)
Wykorzystać wzór Rodriguesa by sprawdzić, że

$$\int_{-1}^{1} dx P_k P_l = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}. \tag{8}$$

(iv) Proszę teraz dopuścić $m \in \mathbb{Z}$ i znaleźć wszystkie regularne rozwiązania P_l^m na $[-1, 1]$. Dla jakich (l, m) istnieją? Kiedy są one wielomianami?

(v) Proszę pokazać, że

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l \tag{9}$$

i że wzór ten działa dla $-l \leq m \leq l$. Proszę wykazać (np. wykorzystując powyższy wzór), że

$$\int_{-1}^{1} dx P_k^m(x) P_l^m(x) = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{kl}. \tag{10}$$

(vi) Proszę pokazać, że zachodzi

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l. \tag{11}$$

Zadanie 3 *(wielomiany Laguerre'a)*
Część radialna równania Schrödingera prowadzi nas do równania

$$u'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)u' + \left(\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)u = 0, \tag{12}$$

gdzie $l \in \mathbb{N}$, λ jest powiązana z energią, a funkcja $\psi(\rho) - e^{-\frac{\rho}{2}}u(\rho)$ jest (modulo stałe fizyczne) radialną częściową funkcji falowej (to znaczy, że $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). Proszę znaleźć wszystkie rozwiązania tego równania, które odpowiadają funkcji falowej całkowalnej z kwadratem. Do jakiego warunku na λ, to żądanie prowadzi?