Równanie ciągłości

Mamy rurę między punktami a, i b i przechodzą przez nią biedronki. Przez $A(t)$ oznaczamy całkowitą liczbę biedronek w rurze. $U(x,t)$ to liczba biedronek w punkcie x w czasie t.

$$A(t) = \int_a^b U(x,t)dx \tag{1}$$

I na przykład mamy tak

1. $t = 1 \implies A(1) = 7$
2. $t = 2 \implies A(2) = 9$
3. $t = 3 \implies A(3) = 15$
4. $\ldots$
5. $t = 7 \implies A(7) = 349$

Na przykład możemy sobie zadać pytanie ile to jest $A(3) - A(2)$?
No my wiemy, to jest $A(3) - A(2) = 15 - 9$. Ale za to można to napisać tak:

$$A(3) - A(2) = \phi(a, \_) - \phi(b, \_) + \int_a^b f(x, \_)dx.$$

Tam ϕ to ruch na brzegach, a f to ile biedronek się zmęczyło w rurze.
To teraz wersja v2.0. Co będzie dla $t, t + \Delta t$?

$$A(t+\Delta t) - A(t) = \int_t^{t+\Delta t} (\phi(a,\xi) - \phi(b,\xi))\, d\xi + \int_t^{t+\Delta t}\int_a^b f(x,\xi)dxd\xi.$$

Dzielimy przez Δt i przechodzimy z granicą do zera.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)dx.$$

Wiemy jak wygląda (1)

$$\int_a^b \frac{\partial U}{\partial t} dx = -\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \int_a^b f(x,t)dx.$$

Teraz strzelamy w wyrażenie podcałkowe

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x,t).$$

I to jest równanie ciągłości. Do modelu przechodzenia biedronek przez rurę możemy wkładać funkcje ϕ. Na razie wiemy tylko coś tam o przepływie (coś wchodzi, wychodzi albo nie).

Pytanie 1. —

1. *Czy ϕ może zadać nam dynamikę w tej rurze?*
2. *Jak mamy dobrać te ϕ?*

1. Załóżmy na początek, że $\phi \sim U$, czyli np. adwekcja

$$\phi = c \cdot U, \quad f = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (c \cdot U)_{,x} = 0.$$

Ale jak my mamy takie równanie różniczkowe

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Ważne jest, żeby z takiego równania wyciągnąć sobie metodologię, która do niego doprowadziła - to może pomóc w szukaniu rozwiązań.

2. Weźmy na przykład

$$U(x,t) = F(x - ct),$$

gdzie $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Jak podstawimy, to mamy

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x-ct) + c\frac{\partial F(x-ct)}{\partial x} = F'(c) + c \cdot F' = 0.$$

Czyli to równanie spełnia dowolna funkcja, która przesuwa się w którąś stronę (prawo albo lewo). Na przykład taka hałda mrówek idąca przez rurę, albo maszerująca kolumna wojska.

3. Inny przypadek:

$$\phi = c \cdot U_{,x}.$$

Teraz dostaniemy takie równanie

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,xx} = 0,$$

czyli równanie dyfuzji, (przepływ ciepła przez długi pręt albo równanie Schrödingera).

4. Jeszcze inny przypadek
$$\phi = c \cdot U_{,x} + d \cdot U.$$
I teraz wychodzi
$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,xx} + d \cdot U_{,x} = 0.$$

5. Można włożyć własności pręta
$$\phi = k(U) \cdot U_{,x}.$$

6. Ciecz radioaktywna (wlewamy coś do rury, ale nam to po drodze trochę znika)
Rozpad radioaktywny to było coś takiego
$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda U.$$
No to może
$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,x} = -\lambda U.$$
A rozwój bakterii był taki:
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lambda U.$$
Jak powiązać tempo namnażania z jakąś graniczną wielkością? (taka nie-nieskończona skrzynka)
Rozwój z ograniczeniem
$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \cdot \left(1 - \frac{U}{\kappa}\right),$$
a κ to gęstość graniczna.

7. Ruch samochodów
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \phi(U) = 0.$$
ϕ bierzemy takie
$$\phi = \left(1 - \frac{U}{\kappa}\right) U.$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\left(1 - \frac{U}{\kappa}\right) U\right)_{,x} = 0.$$
(KDW)

8. Jeszcze jest np. równanie Burgersa, ale ono to już nawet liniowe nie jest.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{U^2}{2}\right)_{,x} = 0.$$

To jeszcze takie śmieszne ϕ, które patrzy co się dzieje dookoła

$$\phi(x) = \frac{\phi(x-h)+\phi(x+h)}{2}.$$

Metoda charakterystyk

Chcemy rozwiązać równanie

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0, \quad U : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ &U(x,0) = U_0(x)\end{aligned} \tag{2}$$

(2) możemy zapisać tak

$$[U_{,t}, U_x]\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix} = 0.$$

Wiemy, że gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy. Oznacza to, że jeżeli $(x(s), t(s))$ - krzywa taka, że

$$U(x(s), t(s)) = const, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

$(x(s), t(s))$ - parametryzacja poziomicy.

Wiemy, że wektor $\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix}$ musi być styczny do poziomicy, czyli

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$

Stąd mamy

$$x = c\cdot s + x_0, \quad t = s + t_0.$$

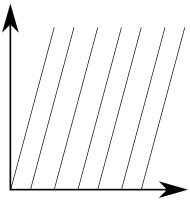
Z drugiego bierzemy $s = t - t_0$ i wsadzamy do pierwszego i wychodzi

$$x = c(t-t_0) + x_0.$$

Więc na każdej linii $U(x(s), t(s)) = const$, jak na rys 0.1

Skoro wiemy, że $U(x(s), t(s))$ jest stała, to

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U\left(x(s), t(s)\right) &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \\ &= c\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0.\end{aligned}$$



Rysunek 0.1: Fajne poziomice

Zmieńmy parametryzację. Niech $s = t$, wówczas

$$U\left(c(t - t_0) + x_0, t\right) = const.$$

Pytanie 2. *Ile wynosi wartość na poziomicy?*

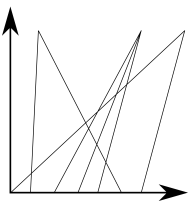
Odpowiedź: Dla krzywej $x = c(t - t_0) + x_0$, $U(x,t) = U_0(x_0)$, ale

$$x_0 = x - c(t - t_0).$$

No to trzeba wstawić

$$U(x,t) = U_0\left(x - c(t - t_0)\right).$$

Pytanie 3. *Gdzie się to psuje?*



Rysunek 0.2: Zepsute przecinające się poziomice

Odpowiedź: Problem się pojawia jak te poziomice zaczynają się przecinać. Bo co to wtedy znaczy, że funkcja jest stała na takiej poziomicy?

Przykład 1. *(trochę o równaniu Burgersa)*

$$U_{,t} + U \cdot U_{,x} = 0.$$

Wygląda strasznie, ale jak zapiszemy tak

$$[U_{,t}, U_{,x}] \begin{bmatrix} 1 \\ U \end{bmatrix} = 0.$$

To się okazuje, że dostajemy równania na poziomice.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = U\left(x(s), t(s)\right), \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$