Uzupełnienie:
Na ostatnim wykładzie wprowadziliśmy wielkość

$$\overline{u}(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|x'|=r} u(x+x',t)ds',$$

która spełniała równanie

$$\overline{u}_{,tt}(x,r,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\overline{u}(x,r,t) + 2c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\overline{u}(x,r,t) \tag{1}$$

Podczas dowodu doszliśmy (dzięki tożsamości Greena) do zależności:

$$\int\limits_0^r (r')^2\, dr' \int\limits_{\text{kąty}} u_{,tt} = r^2 c^2 \int\limits_{\text{kąty}} \frac{\partial u}{\partial r} \tag{2}$$

teraz różniczkujemy po r

$$r^2 \int\limits_{\text{kąty}} u_{,tt} = 2rc^2 \int\limits_{\text{kąty}} u_{,r} + r^2 c^2 \int\limits_{\text{kąty}} u_{,rr} \tag{3}$$

Pytanie 1. *jak ze wzoru 3 przejść do wzoru 1?*
Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x,r,t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int d\theta' \sin\theta' \int d\varphi u(r_0+r, \theta_0+\theta', \varphi_0+\varphi')r^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d\theta' \sin\theta' \int d\varphi u(r_0+r, \theta_0+\theta', \varphi_0+\varphi') = \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{kąty} u(r_0+r, \ldots).
\end{aligned}$$

Popatrzmy na wzór 2. Jeżeli wyciągniemy $\frac{\partial}{\partial r}$ przed całkę, to:

$$\int\limits_0^r (r')^2\, dr' \int\limits_{\text{kąty},\partial K(0,1)} u_{,tt} = r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{\text{kąty}} u.$$

$$\int\limits_0^r (r')^2\, dr' \overline{u}(r',t,x) = r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r}\overline{u}(r,t,x).$$

To teraz zróżniczkować po r i już

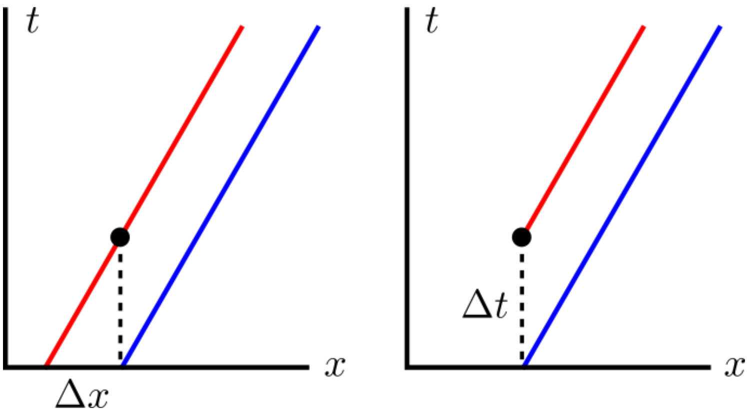
$$r^2 \overline{u}(r,x,t) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 c^2 \overline{u}_{,r}\right).$$

Zasada Huygensa

Jak przełożyć na język matematyki możliwość nadawania morsem? Co to znaczy, że ktoś uderzył w stół? Widzimy, że z punktu widzenia (słyszenia) odbiorcy to jest tak, jakby warunki początkowe zmieniały się w czasie. Jak przełożyć taki problem na język, który poznaliśmy? My umiemy tak:

$$u(x,0) = f(x) \quad u_{,t}(x,0) = g(x).$$

Czyli zamiast jednego krasnala z instrukcją (trzymaj naciśnięte 5 sekund), usta-



Rysunek 0.1: Zauważmy, że normalnie, to oba rysunki dają ten sam efekt

wiamy w rzędzie ileś krasnali (ostatni będzie oddalony o dajmy na to $5 \times 3 \times 10^8$ m) i każemy błysnąć ultrakrótko, a te wszystkie błyski złożą się w naszym oku w błysk pięciosekundowy.

Pytanie 2. *To kiedy w końcu można nadawać morsem?*

Kiedy warunek brzegowy zlokalizowany przestrzennie da się zlokalizować czasowo, w tym sensie, że dla nas później go nie ma. Wyobraźmy sobie sytuację, w której uderzenie w stół dźwięczy cały cas w powietrzu, a błysk światła nie zanika (gdzieś obok jest pytanie dlaczego niebo w nocy jest czarne). Czyli przeszłość się ciągnie jak adres e-mailowy założony przez 12-latka. Koszmar, prawda?

Twierdzenie 1. *(Obserwacja - Zasada Huygensa)*

Niech f i g - funkcje o nośniku zwartym.

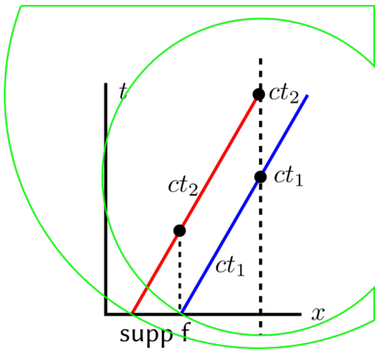
$$\operatorname{supp} f = \left\{x \in \mathbb{R}^3, f(x) \neq 0\right\}$$
$$\operatorname{supp} g = \left\{x \in \mathbb{R}^3, g(x) \neq 0\right\}$$

i niech $s = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$. *Wówczas* $u(x,t) = 0 \underset{t \in [t_1(x), t_2(x)]}{\forall}$, *gdzie*

$$t_1(x) = \inf_t \left\{t > 0, s^2(x, ct) \cap s \neq \phi\right\}$$
$$t_2(x) = \inf_r \left\{t > 0, s^2(x, ct) \cap s \neq \phi\right\}.$$

(Brzeg sfery czterowymiarowej jest trójwymiarowy).

Uwaga: w.w. warunek działa tylko wtedy, gdy rozwiązanie spełnia zasadę Huygensa.



Rysunek 0.2: zasada Huygensa

Przykład 1. *Popatrzmy na problem 3-D:*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} f(s)ds\right)\right] + \frac{1}{4\pi^2 c^2 t}\int\limits_{\partial K(x,ct)} g(s)ds.$$

Widzimy, że jeżeli $s^2(x, ct) \wedge \operatorname{supp} f = \phi$, *to całka da nam zero.*

Przykład 2. *Problem 1-D:*

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi.$$

Chcemy rozwiązać następujący problem

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2 \Delta u, \quad u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ u(x,y,0) &= f(x,y) \\ u_{,t}(x,y,0) &= g(x,y). \end{aligned}$$

Czyli problem dwuwymiarowy. Zauważmy, że fajne rozwiązanie moglibyśmy dostać z Kirchoffa, wkładając do niego warunki początkowe zależne od z:

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int\limits_{|x'|=ct} f(x+x') ds' \right].$$

Czyli chodzi o wycałkowanie funkcji

$$\int\limits_{(x')^2+(y')^2+(z')^2=(ct)^2} f(x+x', y+y') ds'.$$

Pamiętamy, że z macierzy Grama mieliśmy

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Skoro $(z')^2 = (ct)^2 - (x')^2 - (y')^2$, to

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{-2x'}{2\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{-2y'}{2\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= 1 + (z_{,x})^2 + (z_{,y})^2 = \\ &= \frac{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2 + (x')^2 + (y')^2}{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2} = \frac{(ct)^2}{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}. \end{aligned}$$

Czyli teraz jak podstawimy to dostaniemy (pamiętamy, że jak mapujemy sferę na płaszczyznę, to bierzemy płat z góry i płat z dołu)

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \frac{2 \cdot 1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_{(x')^2+(y')^2 \leqslant (ct)^2} \frac{f(x+x', y+y') dx' dy' (ct)}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}} \right) + \\ + \frac{2 \cdot 1}{4\pi c^2} \frac{1}{t} (ct) \int\limits_{(x')^2+(y')^2 \leqslant (ct)^2} \frac{g(x+x', y+y') dx' dy'}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}. \end{aligned}$$

Pytanie 3. *Co z zasadą Huygensa?*

Zauważmy, że wartość rozwiązania w punkcie (x, y, t) zależy od całki po wnętrzu kuli $(x')^2 + (y')^2 \leqslant (ct)^2$, czyli sygnał nigdy nie zniknie! (oczywiście, kiedy mówimy o falach biegnących).

Pytanie 4. *Czy tą samą metodą możemy przejść z 2-D do 1-D?*

Powinniśmy założyć, że $f(x, y)$ zależy tylko od x i włożyć to do wzoru 2-D:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(x')^2+(y')^2\leqslant(ct)^2} \frac{f(x+x')dx'dy'}{\sqrt{(ct)^2-(x')^2-(y')^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-ct}^{ct} dx' f(x+x')\cdot 2 \int\limits_{0}^{\sqrt{(ct)^2-(x')^2}} \frac{dy'}{\sqrt{(ct)^2-(x')^2-(y')^2}}.$$

Pamiętamy, że mamy wzorek

$$\int\limits_0^r \frac{dy'}{\sqrt{r'^2-(y')^2}} = \arcsin\left(\frac{y'}{r'}\right)\bigg|_0^r = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Możemy bez problemu przejść sobie do starego rozwiązania

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-ct}^{ct} dx' f(x+x') + \frac{1}{2c}\int\limits_{-ct}^{ct} g(x+x')dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x+x'=s \\ dx'=ds \end{vmatrix} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} ds f(s) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds =$$

$$= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Wartości własne vs. geometria - do zastanowienia

Przykład 3. *Struna zamocowana na obu końcach:* $u(0) = u(L) = 0$.
Wartości własne dla operatora S-L: $-\frac{d^2}{dx^2}\psi = \lambda\psi$ *i* $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. *Wiemy, że* $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *ale* $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{n} \to \frac{\pi}{L}$

Czy oznacza to, że w asymptotyce wartości własnych mieszkają własności geometryczne układu?

Przykład 4. *Prostokątna membrana:* $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u.$

$$u(x,y)|_{\partial D} = 0, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\right\}.$$

Wartości własne: $\lambda_{m,n} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$*, tam wychodziło* $u_{mn}(x,y) = \sin()\cos()$*.*
Niech $N(\xi)$ *- liczba wartości własnych* $\leqslant \xi$*, czyli takich, że*

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \leqslant \xi.$$

Czyli

$$\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leqslant \frac{\xi}{\pi^2} \left(\frac{n}{\frac{\sqrt{\xi}a}{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{m}{\frac{\sqrt{\xi}b}{\pi}}\right)^2 = 1.$$

Widać, że liczba wartości własnych jest proporcjonalna do pola powierzchni

$$N(\xi) \leqslant \pi \cdot \frac{\sqrt{\xi}a}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\xi}b}{\pi} = \xi\frac{ab}{\pi}.$$

Co daje nam

$$\frac{N(\xi)}{\xi} \sim \frac{ab}{\pi}.$$

Mamy informację o polu powierzchni. Co dalej?