0.1 teoria

Równanie

$$w(z)f'' + p(z)f' + q(z)f(z) = 0.$$

Wybieramy sobie punkt ze sfery Riemanna ($z_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) i teraz mamy 3 opcje.

1. $\frac{p}{w}$ oraz $\frac{q}{w}$ są holomorficzna w z_0 - nieosobliwym.
2. z_0 nie jest nieosobliwy, ale $(z-z_0)\frac{p}{w}$ oraz $(z-z_0)^2\,\frac{q}{w}$ są holomorficzne regularnie osobliwe.
3. Pozostałe - nieregularnie osobliwy.

W nieskończoności bierzemy $u = \frac{1}{z}$ i patrzymy na zachowanie w $u = 0$.

0.2 zadania

$$(z-1)^2 f'' + (z-1)f' - f = 0.$$

Proszę sklasyfikować wszystkie punkty sfery Riemanna względem tego równania.

Trzeba sprawdzić holomorficzność funkcji $\frac{p}{w}$ i $\frac{q}{w}$, czyli

$$\frac{p}{w} = \frac{z-1}{(z-1)^2}, \quad \frac{q}{w} = -\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Jak się $\frac{p}{w}$ przemnoży przez $z-1$, to wychodzi 1, czyli holomorficzne, jak się przemnoży $\frac{q}{w}$ przez $(z-1)^2$, to wyjdzie -1, czyli też ok.
Teraz chcemy przepisać równanie w zmiennej $u = \frac{1}{z}$.

$$\left(\frac{1}{u}-1\right)^2 \left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right]'' + \left(\frac{1}{u}-1\right)\left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right]' - \left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 0.$$

Weźmy sobie $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, teraz np.

$$\frac{dg(u)}{du} = \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=\frac{1}{u}} \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{du} = -\frac{1}{u^2}f'.$$

I druga pochodna

$$\frac{d^2g(u)}{du^2} = \frac{2}{u^3}f' - \frac{1}{u^2}\left.\frac{df'(z)}{dz}\right|_{\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right).$$

Teraz można przepisać równanie

$$\left(\frac{1}{u}-1\right)^2 u^4\left(g''+\frac{2}{u}g'\right)-\left(\frac{1}{u}-1\right)u^2g'-g=0 \implies$$

$$g'\left(\frac{1}{u}-1\right)^2 u^4+g'\left(\left(\frac{1}{u}-1\right)^2 u^4\frac{2}{u}+u^2\right)-g=0 \implies$$

$$\left(\frac{1}{u}-1\right)^2 u^3+u^2=2\left(\frac{1}{u^2-\frac{2}{u}+1}\right)u^3+u^2=$$

$$=2u-4u^2+2u^3+u^2=-2u^3-3u^2+2u \implies$$

$$\frac{2u^3-3u^2+2u}{\left(u-u^2\right)^2}=\frac{2u^3-3u^2+2u}{u^2(1-u)^2}.$$

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ - nieosobliwy. Wtedy

$$f=f_1+f_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n.$$

Szukamy rozwiązań równania w postaci jak wyżej (w $z=0$, bo tak łatwo będzie)

$$f'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^{n-1}$$

$$f''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(n-1\right)n\left(z-z_0\right)^{n-2}.$$

$$\left(z-1\right)^2f''+\left(z-1\right)f'-f=0.$$

$$\left(z-1\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(n-1\right)nz^{n-2}+\left(z-1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nnz^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n-1)n(z^n-2z^{n-1}+z^{n-2})+\sum_{n=0}^{\infty}a_nn\left(z^n-z^{n-1}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=0.$$

Czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(n-1\right)n\left(z^n-2z^{n-1}+z^{n-2}\right)-a_nn\left(z^n-z^{n-1}\right)-a_nz^n\right]=0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[a_n\left(n-1\right)n+a_nn-a_n\right]+\sum_{k=-1}^{\infty}z^k\left[-2a_{k+1}k(k+1)-a_{k+1}(k+1)\right]+$$

$$+\sum_{k=-1}^{\infty}a_{k+2}(k+1)(k+2)z^k=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[a_n(n-1)n+a_nn-a_n-2a_{n+1}n(n+1)-a_{n+1}(n+1)+a_{n+2}(n+1)(n+2)\right]=0.$$

dalej jak się przyjmie $(a_0, a_1) = (1, -1)$, $(a_0, a_1) = (1, 1)$ i podstawiać i może wyjdzie.

0.2.1 równanie schrödingera

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right]\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R}.$$

po fajnych podstawieniach wyjdzie

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0.$$

Szukamy wokół $x_0 = 0$.

$$u' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$
$$u'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}.$$

Czyli mamy tak o

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n n(n-1)x^{n-2} - 2a_n n x^n + 2\lambda a_n x^n\right] = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[x^n\left(2\lambda a_n - 2na_n\right) + x^{n-2}\left(a_n n(n-1)\right)\right] = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(2\lambda a_n - 2na_n) + \sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+2}(k+1)(k+2)) = 0.$$

To teraz

$$a_n(2\lambda - 2n) = -a_{n+2}(n+1)(n+2) \implies a_{n+2} = \frac{-2(\lambda - n)}{(n+1)(n+2)}a_n.$$

wstawiamy $\psi = e^{-\frac{x^2}{2}}u(x)$

$$u(x) = \sum a_n x^n.$$

to jak się założy $n + 2 \approx n$ mamy tak

$$a_{n+2} = \frac{-2\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+2)}a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{n}a_n.$$

to wyjdzie

$$a_n = \frac{c_1}{(-1 + \frac{n}{2})!} + \frac{(-1)^n c_2}{(-1 + \frac{n}{2})}.$$