Prace domowe

Analiza IV

13 marca 2020

Nous ne recevons pas la sagesse; nous devons la découvrir pour nous-mêmes après un voyage que personne ne peut prendre pour nous ou nous épargner.

Streszczenie

Celem niniejszego pliczku jest zebranie zadań, które Studenci i Studentki Analizy IV mogą uznać za przydatne w przygotowaniu do kolokwiów, egzaminu oraz życia. Nie są one w żaden sposób obowiązkowe, ich (nie)robienie nie będzie miało wpływu na ocenę z przedmiotu.

1 Metoda Frobeniusa

Zadanie 1.1 *(próżnia Maxwella w dS)*
Rozważmy równania

$$\begin{aligned} &\sigma'' + 5A\sigma' - \frac{6}{R^2}\sigma = 0 \\ &\alpha'' + 5A\alpha' - \frac{4}{R^2}\alpha = \frac{A}{2C}\sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

na funkcje $\sigma(\mu)$, $\alpha(\mu)$, przy czym $A(\mu) = \frac{1}{R}\cot\left(\frac{\mu}{R}\right)$, zaś $C(\mu) = -\frac{1}{R}\csc\left(\frac{\mu}{R}\right)$.

i) Proszę przepisać te równania w zmiennej $z = \cos^2\left(\frac{\mu}{2R}\right)$.

ii) Proszę rozwiązać pierwsze z nich metodą Frobeniusa, tak aby rozwiązanie było gładkie w $z = 0$ oraz spełniało warunek normalizacyjny

$$\lim_{z\to 1} \sigma(z)(z-1)^2 = \left(8\pi^2 R^4\right)^{-1}. \tag{2}$$

iii) Proszę rozwiązać drugie podstawiając σ z powyższego podpunktu. α również musi być regularne w $z = 0$ i być unormowane

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\alpha(z) = -(16\pi^2 R^2)^{-1}. \tag{3}$$

(Równania te pojawiają się przy wyznaczaniu stanu próżni dla elektromagnetyzmu w cechowaniu Feynmana na czasoprzestrzeni de Sittera.

Narzucona struktura biegunów, to tzw. warunek Hadamaarda – oczekujemy, że przynajmniej dla małych odległości stan kwantowy powinien wyglądać tak samo w zakrzywionej jak i płaskiej czasoprzestrzeni.)

Zadanie 1.2 *(Potencjał Pöschla–Tellera)*

Rozważmy równanie Schrödingera (w jednostkach $\hbar^2 m^{-1} = 1$):

$$-\frac{1}{2}\psi'' - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\cosh^{-2}(x)\psi = E\psi. \tag{4}$$

Proszę przepisać to równanie w zmiennej $u = \tanh x$, a następnie znaleźć rozwiązania całkowalne z kwadratem. Czy dla każdego λ istnieją rozwiązania w $L^2(\mathbb{R})$?

Zadanie 1.3

Proszę znaleźć poziomy energetyczne (i w miarę możności, funkcje falowe) cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(x) = \frac{V_0}{\tan^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \tag{5}$$

($V_0 > 0, 0 < x < a$). W tym celu należy zaproponować odpowiednią zamianę zmiennych w równaniu Schrödingera i rozwiązać otrzymane równanie metodą Frobeniusa (lub przynajmniej znaleźć warunki kwantyzacji energii).

Co dzieje się w granicach:

(i) $V_0 \to 0$

(ii) $V_0, a \to \infty$ tak, że $V_0 a^{-2}$ jest stałe?

Zadanie 1.4

Proszę znaleźć poziomy energetyczne (i w miarę możności, funkcje falowe) cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{V_1}{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)} \tag{6}$$

($V_0, V_1 > 0, 0 < x < \frac{a\pi}{2}$). W tym celu należy zaproponować odpowiednią zamianę zmiennych w równaniu Schrödingera i rozwiązać otrzymane równanie metodą Frobeniusa (lub przynajmniej znaleźć warunki kwantyzacji energii).

Zadanie 1.5

Proszę znaleźć poziomy energetyczne (i w miarę możności, funkcje falowe) cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(x) = V_0\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2 \tag{7}$$

($V_0, a, x > 0$).

2 Równanie ciągłości

Zadanie 2.1 *(równanie Burgersa bez lepkości)*

Rozważmy równanie Burgersa bez lepkości:

$$u_t + u u_x = 0 \tag{8}$$

na funkcję $u : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}$.

(i) Uzupełnijmy to równanie o zagadnienie początkowe $u(t=0,x) = \arctan x$ i ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$. Proszę udowodnić, że

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x_0) = 0. \tag{9}$$

Czy u zbiega jednostajnie do zera?

(ii) Proszę znaleźć rozwiązanie z warunkiem początkowym $u_0(x) = x^2 \theta(x)$.

(iii) Proszę znaleźć rozwiązanie zawierające fale uderzeniowe z warunkiem początkowym

$$u(t=0,x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x < -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{gdy } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{gdy } x > 1 \end{cases} \tag{10}$$

Uwaga! Będzie kilka fal uderzeniowych!

(iv) Proszę znaleźć rozwiązanie zawierające fale uderzeniowe z warunkiem początkowym

$$u(t=0,x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leqslant 0 \text{ lub } x > 1 \\ 2x & \text{gdy } 0 < x < 1 \end{cases} \tag{11}$$

Uwaga! Nie dość, że będzie kilka fal uderzeniowych, to jeszcze jedna z nich nie będzie półprostą (w końcu!).

Zadanie 2.2 *(zasady zachowania)*
Rozważmy ogólne równanie ciągłości:

$$u_t + F(u)_x = 0 \tag{12}$$

wraz z warunkiem początkowym

$$u(t=0,\cdot) = g(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{13}$$

Proszę udowodnić, że dla każdego $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} dx u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} dx g(x). \tag{14}$$

Zadanie 2.3 *(niejednorodne równanie ciągłości)*
Rozważmy równanie ciągłości z niejednorodnością

$$u_t + F(u)_x = f(u,x,t) \tag{15}$$

wraz z warunkiem początkowym

$$u(t=0,x) = g(x). \tag{16}$$

(i) Niech $x = x(t)$ będzie charakterystyką dla jednorodnego (tzn. $f = 0$) zagadnienia. Zdefiniujmy:

$$z(t) = u(x(t), t). \tag{17}$$

Proszę znaleźć równanie różniczkowe spełniane przez z i w ten sposób uogólnić metodę charakterystyk na przypadek niejednorodny.

(ii) Załóżmy, że f i g są ograniczone. Naśladując rozumowanie z ćwiczeń, proszę zdefiniować słabe rozwiązanie tego zagadnienia.

(iii) Naśladując rozumowanie z wykładu, proszę wyprowadzić warunek Rankine'a–Hugoniota dla fal uderzeniowych w przypadku niejednorodnym.

Zadanie 2.4 *(przeciekająca rura)*
Rozważamy nieskończenie długą rurę wypełnioną płynem poruszającym się w prawo z prędkością $v(t,x) = \frac{1}{2}\rho$, gdzie $\rho(t,x)$ jest gęstością. Co więcej, rura przecieka i na jednostkę czasu wycieka $k\rho^2$ masy płynu na jednostkę długości.

(i) Proszę uzasadnić, że dla odpowiednio gładkich ρ zachodzi

$$\rho_t + \rho\rho_x = -k\rho^2. \tag{18}$$

(ii) Załóżmy, że rura była początkowo jednorodnie wypełniona:

$$\rho(t=0,x) = 1. \tag{19}$$

Proszę znaleźć ewolucję gęstości używając informacji z poprzedniego zadania.

3 Relacje dyspersyjne

Zadanie 3.1 *(równanie Kleina–Gordona)*
Rozważmy równanie Kleina–Gordona

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = 0. \tag{20}$$

Proszę znaleźć rozwiązanie w postaci (przestrzennej) transformaty Fouriera tego równania przy danych początkowych:

$$\begin{aligned} u(t=0,x) &= e^{-\frac{x^2}{a^2}} \\ u(t=0,x)_t &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Proszę zauważyć, że teraz z relacji dyspersyjnych otrzymujemy dwie możliwe wartości $E(p)$ i obie musimy brać pod uwagę ponieważ równanie jest drugiego rzędu.