

korona Wykłady z Analizy IV

Jakub Korsak

II 2020 - VI 2020

Spis treści

Spis treści	ii
1 25.02.2020, Wykład <i>O zbieżności szeregów Fouriera i próbach unikania schodków</i>	1
2 28.02.2020, Ćwiczenia <i>Metoda Frobeniusa</i>	8
3 03.03.2020, Wykład <i>Wstęp do równań cząstkowych, metoda charakterystyk</i>	12
4 ?? .03.2020, Ćwiczenia <i>Metoda charakterystyk</i>	18
5 10.03.2020, Wykład <i>Metoda charakterystyk</i>	20
6 Wykład <i>Metoda separacji zmiennych oraz wstęp do operatorów Sturm-Liouville'a</i>	26
7 Wykład <i>Operatory Sturm-Liouville'a</i>	34
8 Wykład <i>Czy można uporządkować poziomy energetyczne?</i>	41
9 Wykład <i>Równanie falowe</i>	48
10 Wykład <i>Droga do wzoru Kirchoffa</i>	53
11 Wykład <i>Czy z Kirchoffa w 3D można wyprowadzić 2D i 1D? Co to znaczy nadawanie morsem?</i>	59
12 Wykład <i>Całki Duhamela, jednoznaczność równania falowego</i>	65
13 Wykład <i>Jednoznaczność równania przewodnictwa</i>	71

14	Wykład <i>Przykłady (nie)fajności metody separacji zmiennych</i>	76
15	Wykład <i>Rozwiązywanie przez rozwijanie w szereg a później sprowadzenie na Ziemię przykładem Kowalewskiej</i>	82

1. 25.02.2020, **Wykład** *O zbieżności szeregów Fouriera i próbach unikania schodków*

Rozważmy szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (\mathcal{F})$$

gdzie

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(k) e^{-2\pi i n k} dk.$$

Same nasuwają się pytania

1. Czy ten szereg (??) jest zbieżny?
2. Jak tak, to do czego?

Pamiętamy twierdzenie

Twierdzenie 1. *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$, to*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{2\pi i n x}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

i szereg (??) zbiega do $f(x)$.

Drugi wariant

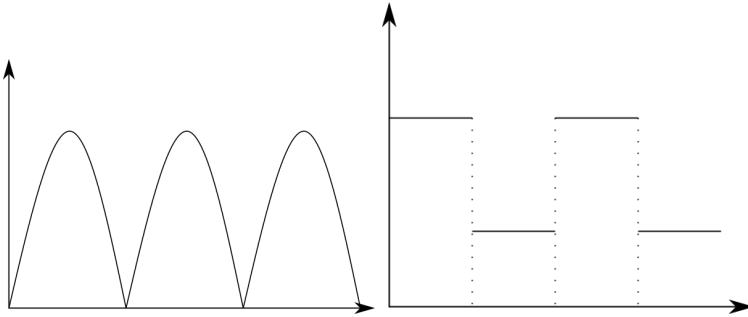
Twierdzenie 2. *Jeżeli $f \in \mathcal{L}^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$, to*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx,$$

wówczas szereg po lewej jest zbieżny, czyli mamy jeszcze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Pytanie 1. Jaka klasa funkcji nas interesuje?(?) (chcemy, żeby ładnie działało z (??)).



Rysunek 1.1: Takie funkcje nam pasują na pewno

Definicja 1. Mówimy, że $f(x)$ jest kawałkami ciągła na \mathbb{R} , jeżeli ma okres 1, na przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości.

Twierdzenie 3. (Lemat 1)

Niech

$$D_N(\xi) = \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n \xi}.$$

Wówczas

1.

$$D_N(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\frac{2\pi\xi}{2})}{\sin(\frac{2\pi\xi}{2})} & \xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\} \\ 2N+1 & \xi = 0 \end{cases}.$$

2.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) d\xi = 1 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) d\xi.$$

Dowód. (część 2)

$$\begin{aligned} D_N(\xi) &= e^{2\pi i N \xi} + e^{2\pi i \xi (N-1)} + \dots + e^{2\pi i \xi} + 1 + e^{-2\pi i \xi} + \dots = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n \xi). \end{aligned}$$

Wówczas

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi + 2 \sum_{n=1}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi n \xi) d\xi.$$

Każda taka całka jest równa $\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n \xi) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$ □

Dowód. (część 1)

Niech $2\pi\xi \equiv t$, wtedy nasze $D_N(\xi)$ jest takie.

$$\begin{aligned} D_N(\xi) &= e^{itN} + e^{it(N-1)} + \dots + e^{it} + 1 + e^{-it} + \dots + e^{-it(N-1)} + e^{-itN} = \\ &= e^{-itN} (1 + e^{it} + \dots + e^{2itN}) = \\ &= e^{-itN} \cdot \frac{1 - e^{it(2N+1)}}{1 - e^{it}} = \\ &= \frac{e^{-itN}}{2i} \frac{2i \cdot 2i}{\left(-e^{\frac{it}{2}}\right) \left(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}\right)} \cdot \frac{\left(-e^{it\frac{2N+1}{2}}\right) \left(e^{it\frac{2N+1}{2}} - e^{-it\frac{2N+1}{2}}\right)}{2i} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot e^{-it\left(N+\frac{1}{2}-\frac{2N}{2}-\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4. (*Lemat 2*)

Niech f - całkowalna na \mathbb{R} , o okresie 1 i $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) dy = \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(y) dy.$$

Dowód.

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(y) dy = \int_{a-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} f(y) dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(y) dy.$$

Ale

$$\int_{\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(y)dy = \left| \begin{matrix} k = y - 1 \\ dk = dy \end{matrix} \right| = \int_{-\frac{1}{2}-1}^{-\frac{1}{2}} f(k+1)dk.$$

□

Twierdzenie 5. *Niech*

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x}.$$

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(k) e^{-2\pi i n k} dk.$$

Jeżeli f - kawałkami ciągła na \mathbb{R} , to

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \begin{cases} f(x) & f - \text{ciągła w } x \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Zbieżność $S_N(x)$ jest punktowa.

Dowód. Zauważmy, że (jak wsadzimy c_n do wzoru na S_N)

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(k) e^{-2\pi i n k} e^{2\pi i n x} dk = \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(k) e^{2\pi i n(x-k)} dk = \\ &= \left| \begin{matrix} x - k = -\xi \\ k = x + \xi \end{matrix} \right| = \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} f(x + \xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Ten napis jest równy (używamy lematu 2!)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x + \xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x + \xi) \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n \xi} d\xi = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x + \xi) D_N(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Problem może się pojawić w punkcie $\xi = 0$, bo wtedy $D_N(0) = 2N + 1$. Chcemy pokazać, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| \rightarrow 0.$$

Ale spróbujmy S_N zapisać z tego co wyszło wcześniej

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{f(x^+)}{2} - \frac{f(x^-)}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x + \xi) D_N(\xi) d\xi - \frac{f(x^+)}{2} + \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x + \xi) D_N(\xi) d\xi - \frac{f(x^-)}{2}. \end{aligned}$$

To jest fajne, bo jednocześnie odklejamy się od niebezpiecznego $\xi = 0$. Wiemy (z lematu 1), że

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^0 D_N(\xi) d\xi.$$

W takim razie

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x + \xi) D_N(\xi) d\xi - \frac{f(x^+)}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x + \xi) - f(x^+)) D_N(\xi) d\xi \quad (OO)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x + \xi) D_N(\xi) d\xi - \frac{f(x^-)}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x + \xi) - f(x^-)) D_N(\xi) d\xi \quad (OOO)$$

Ale (??) na mocy lematu 1 jest równe

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x + \xi) - f(x^+)) \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)2\pi\xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi\xi}{2}\right)} d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x + \xi) - f(x^+)}{\frac{2\pi\xi}{2}} \frac{\frac{2\pi\xi}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi\xi}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)2\pi\xi\right) d\xi$$

Analogicznie (??) jest równy

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{f(x + \xi) - f(x^-)}{\frac{2\pi\xi}{2}} \frac{\frac{2\pi\xi}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi\xi}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)2\pi\xi\right) d\xi.$$

Wprowadźmy funkcję

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{f(x+\xi) - f(x^+)}{\xi} \frac{\pi\xi}{\sin(\frac{2\pi\xi}{2})} & \xi \in]0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{\pi} \frac{f(x+\xi) - f(x^-)}{\xi} \frac{\pi\xi}{\sin(\frac{2\pi\xi}{2})} & \xi \in [-\frac{1}{2}, 0[\end{cases}.$$

Czyli

$$(\text{??}) + (\text{??}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x, \xi) \sin((N+1)2\pi\xi) d\xi.$$

Ale co się dzieje z $\xi = 0$? Zauważmy, że

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} G(x, \xi) = \frac{1}{\pi} f'(x^+),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} G(x, \xi) = \frac{1}{\pi} f'(x^-).$$

(wiemy, że f może mieć nieciągłość w x , ale liczba punktów nieciągłości jest skończona - f jest kawałkami ciągła). Musimy założyć, że $f'(x^+)$ jest ograniczona, bo chcemy całkować po całym przedziale, czyli też w $\xi = 0$ Zatem

$$\begin{aligned} |(\text{??}) + (\text{??})| &= \left| \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x, \xi) e^{2\pi i N \xi} e^{\pi i \xi} d\xi - \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x, \xi) e^{-2\pi i N \xi} e^{-i \pi \xi} d\xi \right| \leq \\ &\leq \max_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left| \frac{1}{2i} e^{\pi i \xi} \right| \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x, \xi) e^{2\pi i N \xi} d\xi \right| + \\ &+ \max_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left| \frac{1}{2i} e^{\pi i \xi} \right| \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x, \xi) e^{-2\pi i N \xi} d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |c_N| + \frac{1}{2} |c_N| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

n -ty współczynnik rozwinięcia $G(x, \xi)$ w szereg Fouriera znika w ∞ , bo $\sum |c_n|$ jest zbieżny. \square

Wniosek: tych skoków przy końcówkach sygnału nie da się łatwo uniknąć. Zaletą takich rzeczy jest to, że widać zachowanie tych skoków, bo są różne po obu stronach. Można to rozwiązać zmieniając np. bazę, albo dealera, czyli stwierdzić, że interesuje nas nie różnica z początku ostatniego dowodu, tylko żeby cała z kwadratu tej różnicy zniknęła.

2. 28.02.2020, Ćwiczenia Metoda Frobeniusa

teoria

Równanie

$$w(z)f'' + p(z)f' + q(z)f(z) = 0.$$

Wybieramy sobie punkt ze sfery Riemanna ($z_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) i teraz mamy 3 opcje.

1. $\frac{p}{w}$ oraz $\frac{q}{w}$ są holomorficzna w z_0 - nieosobliwym.
2. z_0 nie jest nieosobliwy, ale $(z - z_0)\frac{p}{w}$ oraz $(z - z_0)^2\frac{q}{w}$ są holomorficzne regularnie osobliwe.
3. Pozostałe - nieregularnie osobliwe.

W nieskończoności bierzemy $u = \frac{1}{z}$ i patrzymy na zachowanie w $u = 0$.

zadania

$$(z - 1)^2 f'' + (z - 1)f' - f = 0.$$

Proszę sklasyfikować wszystkie punkty sfery Riemanna względem tego równania.

Trzeba sprawdzić holomorficzność funkcji $\frac{p}{w}$ i $\frac{q}{w}$, czyli

$$\frac{p}{w} = \frac{z - 1}{(z - 1)^2}, \quad \frac{q}{w} = -\frac{1}{(z - 1)^2}.$$

Jak się $\frac{p}{w}$ przemnoży przez $z - 1$, to wychodzi 1, czyli holomorficzne, jak się przemnoży $\frac{q}{w}$ przez $(z - 1)^2$, to wyjdzie -1 , czyli też ok.

Teraz chcemy przepisać równanie w zmiennej $u = \frac{1}{z}$.

$$\left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 \left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right]'' + \left(\frac{1}{u} - 1\right) \left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right]' - \left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 0.$$

Weźmy sobie $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, teraz np.

$$\frac{dg(u)}{du} = \frac{df(z)}{dz} \Big|_{z=\frac{1}{u}} \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{du} = -\frac{1}{u^2} f'.$$

I druga pochodna

$$\frac{d^2 g(u)}{du^2} = \frac{2}{u^3} f' - \frac{1}{u^2} \frac{df'(z)}{dz} \Big|_{\frac{1}{u}} \left(-\frac{1}{u^2}\right).$$

Teraz można przepisać równanie

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 u^4 \left(g'' + \frac{2}{u}g'\right) - \left(\frac{1}{u} - 1\right) u^2 g' - g = 0 \implies \\
 & g' \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 u^4 + g' \left(\left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 u^4 \frac{2}{u} + u^2\right) - g = 0 \implies \\
 & \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 u^3 + u^2 = 2 \left(\frac{1}{u^2 - \frac{2}{u} + 1}\right) u^3 + u^2 = \\
 & = 2u - 4u^2 + 2u^3 + u^2 = -2u^3 - 3u^2 + 2u \implies \\
 & \frac{2u^3 - 3u^2 + 2u}{(u - u^2)^2} = \frac{2u^3 - 3u^2 + 2u}{u^2(1 - u)^2}.
 \end{aligned}$$

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ - nieosobliwy. Wtedy

$$f = f_1 + f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Szukamy rozwiązań równania w postaci jak wyżej (w $z = 0$, bo tak łatwo będzie)

$$\begin{aligned}
 f' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1} \\
 f'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-1)n (z - z_0)^{n-2}.
 \end{aligned}$$

$$(z-1)^2 f'' + (z-1) f' - f = 0.$$

$$(z-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-1)n z^{n-2} + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-1)n (z^n - 2z^{n-1} + z^{n-2}) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (z^n - z^{n-1}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n (n-1)n (z^n - 2z^{n-1} + z^{n-2}) - a_n n (z^n - z^{n-1}) - a_n z^n] = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} z^n [a_n(n-1)n + a_n n - a_n] + \sum_{k=-1}^{\infty} z^k [-2a_{k+1}k(k+1) - a_{k+1}(k+1)] + \\
& + \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+2}(k+1)(k+2)z^k = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} z^n [a_n(n-1)n + a_n n - a_n - 2a_{n+1}n(n+1) - a_{n+1}(n+1) + a_{n+2}(n+1)(n+2)]
\end{aligned}$$

dalej jak się przyjmie $(a_0, a_1) = (1, -1)$, $(a_0, a_1) = (1, 1)$ i podstawiać i może wyjdzie.

równanie schrödingera

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \right] \psi = E \psi, \quad E \in \mathbb{R}.$$

po fajnych podstawieniach wyjdzie

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0.$$

Szukamy wokół $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
u' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \\
u'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}.
\end{aligned}$$

Czyli mamy tak o

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} [a_n n(n-1) x^{n-2} - 2a_n n x^n + 2\lambda a_n x^n] = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} [x^n (2\lambda a_n - 2n a_n) + x^{n-2} (a_n n(n-1))] = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} x^n (2\lambda a_n - 2n a_n) + \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2}(k+1)(k+2)) = 0.
\end{aligned}$$

To teraz

$$a_n(2\lambda - 2n) = -a_{n+2}(n+1)(n+2) \implies a_{n+2} = \frac{-2(\lambda - n)}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

wstawiamy $\psi = e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$

$$u(x) = \sum a_n x^n.$$

to jak się założy $n+2 \approx n$ mamy tak

$$a_{n+2} = \frac{-2\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+2)} a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} a_n.$$

to wyjdzie

$$a_n = \frac{c_1}{\left(-1 + \frac{n}{2}\right)!} + \frac{(-1)^n c_2}{\left(-1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

3. 03.03.2020, Wykład Wstęp do równań cząstkowych, metoda charakterystyk

Równanie ciągłości

Mamy rurę między punktami a , i b i przechodzą przez nią biedronki. Przez $A(t)$ oznaczamy całkowitą liczbę biedronek w rurze. $U(x, t)$ to liczba biedronek w punkcie x w czasie t .

$$A(t) = \int_a^b U(x, t) dx \quad (3.1)$$

I na przykład mamy tak

1. $t = 1 \implies A(1) = 7$

2. $t = 2 \implies A(2) = 9$

3. $t = 3 \implies A(3) = 15$

4. ...

5. $t = 7 \implies A(7) = 349$

Na przykład możemy sobie zadać pytanie ile to jest $A(3) - A(2)$?

No my wiemy, to jest $A(3) - A(2) = 15 - 9$. Ale za to można to napisać tak:

$$A(3) - A(2) = \phi(a, -) - \phi(b, -) + \int_a^b f(x, -) dx.$$

Tam ϕ to ruch na brzegach, a f to ile biedronek się zmęczyło w rurze.

To teraz wersja v2.0. Co będzie dla $t, t + \Delta t$?

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \int_t^{t+\Delta t} (\phi(a, \xi) - \phi(b, \xi)) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \int_a^b f(x, \xi) dx d\xi.$$

Dzielimy przez Δt i przechodzimy z granicą do zera.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t) dx.$$

Wiemy jak wygląda (??)

$$\int_a^b \frac{\partial U}{\partial t} dx = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \int_a^b f(x, t) dx.$$

Teraz strzelamy w wyrażenie podcałkowe

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x, t).$$

I to jest równanie ciągłości. Do modelu przechodzenia biedronek przez rurę możemy wkładać funkcje ϕ . Na razie wiemy tylko coś tam o przepływie (coś wchodzi, wychodzi albo nie).

Pytanie 2. —

1. Czy ϕ może zadać nam dynamikę w tej rurze?

2. Jak mamy dobrać te ϕ ?

1. Załóżmy na początek, że $\phi \sim U$, czyli np. adwekcja

$$\phi = c \cdot U, \quad f = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (c \cdot U)_{,x} = 0.$$

Ale jak my mamy takie równanie różniczkowe

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Ważne jest, żeby z takiego równania wyciągnąć sobie metodologię, która do niego doprowadziła - to może pomóc w szukaniu rozwiązań.

2. Weźmy na przykład

$$U(x, t) = F(x - ct),$$

gdzie $F \in C^1(\mathbb{R})$. Jak podstawimy, to mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x - ct) + c \frac{\partial F(x - ct)}{\partial x} = F'(c) + c \cdot F' = 0.$$

Czyli to równanie spełnia dowolna funkcja, która przesuwana się w którąś stronę (prawo albo lewo). Na przykład taka hałda mrówek idąca przez rurę, albo maszerująca kolumna wojska.

3. Inny przypadek:

$$\phi = c \cdot U_{,x}.$$

Teraz dostaniemy takie równanie

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,xx} = 0,$$

czyli równanie dyfuzji, (przepływ ciepła przez długi pręt albo równanie Schrödingera).

4. Jeszcze inny przypadek

$$\phi = c \cdot U_{,x} + d \cdot U.$$

I teraz wychodzi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,xx} + d \cdot U_{,x} = 0.$$

5. Można włożyć własności pręta

$$\phi = k(U) \cdot U_{,x}.$$

6. Ciecz radioaktywna (wlewamy coś do rury, ale nam to po drodze trochę znika)

Rozpad radioaktywny to było coś takiego

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda U.$$

No to może

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \cdot U_{,x} = -\lambda U.$$

A rozwój bakterii był taki:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lambda U.$$

Jak powiązać tempo namnażania z jakąś graniczną wielkością? (taka nieskończona skrzynka)

Rozwój z ograniczeniem

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \cdot \left(1 - \frac{U}{\kappa}\right),$$

a κ to gęstość graniczna.

7. Ruch samochodów

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \phi(U) = 0.$$

ϕ bierzemy takie

$$\phi = \left(1 - \frac{U}{\kappa}\right) U.$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\left(1 - \frac{U}{\kappa}\right) U \right)_{,x} = 0.$$

(KDW)

8. Jeszcze jest np. równanie Burgersa, ale ono to już nawet liniowe nie jest.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{U^2}{2} \right)_{,x} = 0.$$

To jeszcze takie śmieszne ϕ , które patrzy co się dzieje dookoła

$$\phi(x) = \frac{\phi(x-h) + \phi(x+h)}{2}.$$

Metoda charakterystyk

Chcemy rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= 0, \quad U : \mathbb{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ U(x, 0) &= U_0(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

(??) możemy zapisać tak

$$[U, t, U_x] \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} = 0.$$

Wiemy, że gradient funkcji jest prostopadły do poziomic. Oznacza to, że jeżeli $(x(s), t(s))$ - krzywa taka, że

$$U(x(s), t(s)) = \text{const}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

$(x(s), t(s))$ - parametryzacja poziomic.

Wiemy, że wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ musi być styczny do poziomic, czyli

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$

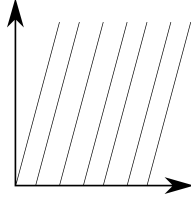
Stąd mamy

$$x = c \cdot s + x_0, \quad t = s + t_0.$$

Z drugiego bierzemy $s = t - t_0$ i wsadzamy do pierwszego i wychodzi

$$x = c(t - t_0) + x_0.$$

Więc na każdej linii $U(x(s), t(s)) = \text{const}$, jak na rys ??



Rysunek 3.1: Fajne poziomicie

Skoro wiemy, że $U(x(s), t(s))$ jest stała, to

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U(x(s), t(s)) &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} = \\ &= c \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Zmieńmy parametryzację. Niech $s = t$, wówczas

$$U(c(t - t_0) + x_0, t) = \text{const}.$$

Pytanie 3. Ile wynosi wartość na poziomiczy?

Odpowiedź: Dla krzywej $x = c(t - t_0) + x_0$, $U(x, t) = U_0(x_0)$, ale

$$x_0 = x - c(t - t_0).$$

No to trzeba wstawić

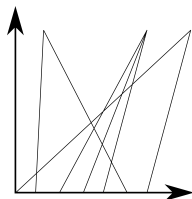
$$U(x, t) = U_0(x - c(t - t_0)).$$

Pytanie 4. Gdzie się to psuje?

Odpowiedź: Problem się pojawia jak te poziomicie zaczynają się przecinać. Bo co to wtedy znaczy, że funkcja jest stała na takiej poziomiczy?

Przykład 1. (trochę o równaniu Burgersa)

$$U_{,t} + U \cdot U_{,x} = 0.$$



Rysunek 3.2: Zepsute przecinające się poziomicie

Wygląda strasznie, ale jak zapiszemy tak

$$[U, t, U, x] \begin{bmatrix} 1 \\ U \end{bmatrix} = 0.$$

To się okazuje, że dostajemy równania na poziomicie.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = U(x(s), t(s)), \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$

4. ??03.2020, Ćwiczenia Metoda charakterystyk

Ulice w Warszawie to po prostu bardzo długa prosta po której poruszają się ciągle samochody. Żeby to tak działało, to można warunek ciągłości zapisać tak:

$$\rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x = 0, \quad v_m, \rho_m > 0.$$

Przepisujemy do postaci

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Dzielimy przez pochodną ρ

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} = v_m - \frac{2v_m}{\rho_m} \rho.$$

No i wychodzi jak się scałkuje

$$q(\rho) = v_m \rho - \frac{v_m}{\rho_m} \rho^2 + c.$$

Interpretacja stałych ρ_m i v_m - gęstość i prędkość maksymalna. One w ogóle zaczynają się odpychać przy za dużej gęstości, bo jest ten minus przy v_m . Zadajemy warunek początkowy

$$\rho(t=0, x) = \rho_m \theta(-x) \quad (4.1)$$

Pytanie 5. Jaka to sytuacja na drodze?

Odp. No światła drogowe.

To teraz trzeba narysować charakterystyki.

Co to znaczy równanie ciągłości ale z nie-stałymi współczynnikami?

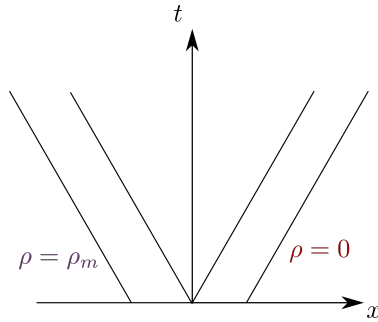
$$u(t, x(t)) = \text{const} \implies \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Czyli dalej

$$- \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{dx}{dt} \implies x(t) = \int q'(u) dt.$$

Dla warunku (??), wyglądać będzie jakoś tak

$$x(t) = q'(g(\xi))t + \xi = v_m \left(1 - \frac{2\rho_m}{\rho_m}\right)t + \xi = -v_m t + \xi.$$



Rysunek 4.1: Tak wyglądają nasze charakterystyki

$$s'(t) = \frac{q(0) - q(\rho_m)}{0 - \rho_m} = \frac{c - c - v_m(\rho_m - \rho_m)}{-\rho_m} = 0.$$

No to mamy jedno fajne rozwiązanie. A inne?

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}.$$

$$q' = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right).$$

$$\rho = -\frac{q' - v_m}{2v_m} \rho_m.$$

$$R(\alpha) = \left(\frac{v_m - \alpha}{2v_m}\right) \rho_m.$$

$$R\left(\frac{x - x_0}{t - x_0}\right) = \frac{v_m - \frac{x}{t}}{2v_m} \rho_m = \rho(x, t).$$

5. 10.03.2020, Wykład Metoda charakterystyk

Weźmy takie równanie różniczkowe

$$U_{,t} + cU_{,x} = 0.$$

Ustawiamy U takie o

$$U(t, x) :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(0, x) = U_0(x).$$

$$[U_{,t}, U_{,x}] \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} = 0.$$

Ciekawi nas, czy istnieje taka parametryzacja $(t(s), x(s))$, że rozwiązanie U jest na niej stałe? Czyli

$$\frac{d}{ds} U(t(s), x(s)) = 0.$$

Spróbujmy tak

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1.$$

Wtedy $x = cs + x_0$, $t = s + t_0$. Jeżeli $t = 0$, $s = 0$, to $t_0 = 0$.

Czyli mamy

$$\begin{cases} x = cs + x_0 \\ t = s \end{cases} \implies x = ct + x_0 \implies x_0 = x - ct.$$

No to teraz

$$U(x, t) - U_0(x_0) = U_0(x - ct).$$

(Sprawdzić czy przypadkiem czegoś podobnego nie było na mechanice klasycznej pod folderem Równania Hamiltona-Jacobiego)

Twierdzenie 6. (*Równanie Burgersa*)

$$U_{,t} + U \cdot U_{,x} = 0, \quad U(0, x) = \phi(x).$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}.$$

Rozważmy coś takiego

$$[U, t, U, x] \begin{bmatrix} 1 \\ U \end{bmatrix} = 0.$$

W parametryzacji $(x(s), t(s))$ - poziomica $U(t, x)$. Czyli dla jakiegoś z

$$U(t(s), x(s)) = z(s)$$

jest stała.

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = z(s) \\ \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \end{cases}.$$

Zakładamy warunki $t(0) = 0$, $x(0) = x_0$,

$$z(0) = U(t(0), x(0)) = U(0, x_0) = \phi(x_0).$$

Czyli skoro $z(s) = \text{const}$, to znaczy, że

$$z(s) = \phi(x_0) \implies \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = \phi(x_0) \\ \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\phi(x_0)) = 0 \end{cases}.$$

Czyli tak

$$t = 1 \cdot s + t_0, \quad (t(0) = 0) \implies t = s.$$

$$\begin{cases} x(s) = \phi(x_0)s + x_0 \\ z(s) = \phi(x_0) \end{cases}.$$

Zmieniamy parametryzację, czyli

$$x(t) = \phi(x_0)t + x_0.$$

Cała zabawa polega na tym, że mając punkt muszę umieć się cofnąć. To jaki kształt ma charakterystyka, to nie ma za bardzo znaczenia, ale tak długo jak istnieje parametryzacja i można się cofnąć to jest ok.

Rysujemy linie, wzdłuż których nasze rozwiązanie jest stałe (rys ??) Dla $x_0 < 0$ mamy $x(t) = t + x_0$, i $x_0 > 1$

Dla $0 < x_0 < 1$ mamy $x(t) = (1 - x_0)t + x_0$, czyli to jakie dostajemy rozwiązanie to bardzo mocno zależy, od tego gdzie stoimy na początku

Definicja 2. (Słabe rozwiązania)

Niech $C^1 \ni \varphi(t, x) :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma zwarty nośnik.

Mówimy, że

$$U :]0, \infty[\times \mathbb{R}$$

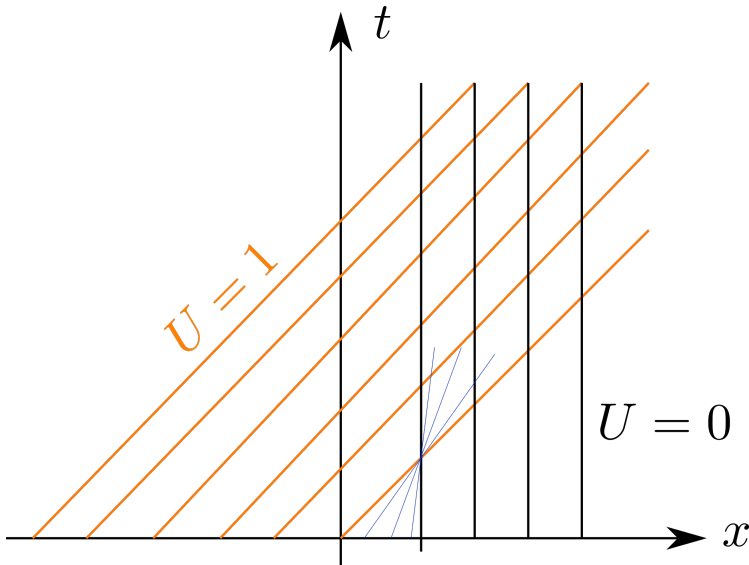
jest słabym rozwiązaniem równania

$$U_{,t} + (F(U))_{,x} = 0,$$

jeżeli

$$\forall \varphi \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(U_{,t} + (F(U))_{,x} \right) \varphi(x, t) = 0.$$

Uwaga: te dwa warunki mają różne dziedziny!



Rysunek 5.1: Jak wyglądają nasze charakterystyki?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt U_{,t} \varphi(x, t) + \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx (F(U))_{,x} \varphi(x, t) =$$

Całkujemy przez części

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [U \varphi(x, t)]_0^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt U(x, t) \varphi_{,t} + \\ &+ \int_0^{\infty} dt F(U) \varphi(x, t)_{-\infty}^{+\infty} - \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx F(U) \varphi_{,x}. \end{aligned}$$

Przedostatnie się zeruje bo φ ma nośnik zwarty, pierwsze do połowy wywalamy z tego samego powodu.

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt [U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x}] - \int_{-\infty}^{\infty} dx U(0, x)\varphi(x, 0).$$

Czyli warunek z definicji jest w sensie słabych rozwiązań równoważny warunkowi

$$\forall \varphi \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt [U\varphi_{,t} + F(U)\varphi_{,x}] + \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)\varphi(x, 0) = 0.$$

Stwierdzenie 1. (*Przypomnienie*)

Niech $V \subset]0, \infty[\times \mathbb{R}$ - rozmaitość.

Dla $\omega \in \Lambda^1(V)$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \omega &= \int_V d\omega. \\ \int_{\partial V} \star \omega &= \int_V d(\star \omega). \end{aligned}$$

Niech

$$A = A^{t+A^x dx},$$

wtedy

$$d \star A = -\frac{\partial A^x}{\partial x} dx \wedge dt + \frac{\partial A^t}{\partial t} dt \wedge dx = \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x} \right) dt \wedge dx.$$

Podstawiając do tw. Stokesa

$$\int_V \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x} \right) dt \wedge dx = \int_{\partial V} \left\langle -A^x dt + A^t dx, \frac{\partial}{\partial V} \right\rangle.$$

Zakładamy, że brzeg V możemy sparametryzować jakoś fajnie

$$\partial V = \left\{ \begin{bmatrix} c^t(s) \\ c^x(s) \end{bmatrix}, s \in]0, 1[\right\}.$$

Czyli

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial c^t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c^x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Bierzemy RHS stokesa

$$\begin{aligned} \left\langle -A^x dt + A^t dx, \frac{\partial c^t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c^x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= -A^x \frac{\partial c^t}{\partial s} + A^t \frac{\partial c^x}{\partial s} = \\ &= [A^t, A^x] \left[\frac{\partial c^x}{\partial s} \right] = \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

prostopadły do wektora stycznego. Czyli

$$\int_V \left(\frac{\partial A^t}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x} \right) dV = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{L}.$$

Stwierdzenie 2. (Warunek Cauchy-Hugoniot)(Rankine-Hugoniot tak naprawdę)

Szukamy krzywej, która pozwala na wybór wartości $U(x, t)$, w obszarze, w którym charakterystyki przecinają się.

Wiemy, że na V_I (??)

$$U_{,t}^I + F(U_{,x}^I) = 0.$$

Na V_{II}

$$U_{,t}^{II} + F(U^{II})_{,x} = 0.$$

Szukamy funkcji U , która na V jest słabym rozwiązaniem równania

$$U_{,t} + F(U)_{,x} = 0.$$

Jeżeli U jest słabym rozwiązaniem, to znaczy, że

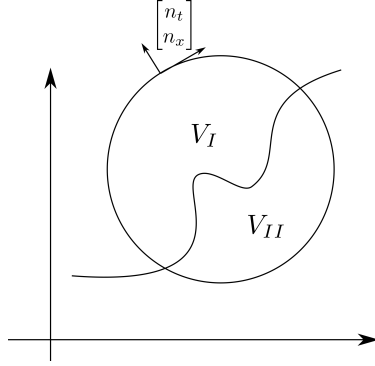
$$\forall \int_{\varphi} dx \int dt (U \varphi_{,t} + F(U) \varphi_{,x}) = 0.$$

(Zakładamy, że V jest daleko od linii $t = 0$, i φ ma nośnik zwarty). To wtedy to się równa

$$\forall \int_{\varphi} \int_{V_1} (U \varphi_t + F(U) \varphi_{,x}) + \int_{V_2} (U \varphi_{,t} + F(U) \varphi_{,x}) = 0.$$

Ale pierwszy człon można scałkować przez części.

$$\begin{aligned} \iint_{V_I} U \varphi_{,t} + F(U) \varphi_{,x} &= \int_{V_I} dx \int_{V_I} dt (U \varphi)_{,t} + (F(U) \varphi)_{,x} - \iint_{V_I} dx dt (U_{,t} + F(U)_{,x}) \varphi = \\ &= \iint_{\partial V_I} ((U \varphi) n_t + (F(U) \varphi) n_x) dL + 0. \end{aligned}$$



Rysunek 5.2: Tak dzielimy sobie nasze rozwiązania

Analogicznie

$$\iint_{V_{II}} U \varphi_{,t} + F(U) \varphi_{,x} = \int_{\partial V_{II}} (U^{II} \varphi) n'^t + F(U^{II}) \varphi n'^x + 0.$$

Ale

$$\begin{bmatrix} n^t \\ n^x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} n'^t \\ n'^x \end{bmatrix},$$

więc warunek sprowadza się do

$$\int_{\partial V_I \cap \partial V_{II}} ((U^I - U^I) n^t + (F(U^I) - F(U^{II}) n^x) \varphi) = 0.$$

$\partial V_I \cap \partial V_{II}$ poza częścią wspólną zakładamy, że $\varphi = 0$, bo ma zwarty nośnik.

6. Wykład Metoda separacji zmiennych oraz wstęp do operatorów Sturm-Liouville'a

Mamy za sobą metodę charakterystyk, zobaczyliśmy, że przedstawienie problemu jako równania całkowego pozwala na poszerzenie dziedziny rozwiązań. Dobrzy byłoby wrócić do równania Hamiltona-Jacobiego i zobaczyć w nim charakterystyki, na razie jednak zajmijmy się metodą separacji zmiennych

Metoda separacji zmiennych

Przykład 2. Niech $u : (x, y) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, taka, że

$$u_{,x} + 2u_{,y} = 3.$$

Moglibyśmy rozwiązać to równanie charakterystykami, ale spróbujemy inaczej. Załóżmy, że

$$u(x, y) = p(x) + q(y), \quad p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dlaczego akurat tak? Gdybyśmy mieli twierdzenie o jednoznaczności, to nie musielibyśmy przejmować się dzielnymi założeniami - skoro działa to znaczy, że jest ok.

Po podstawieniu otrzymujemy

$$p'(x) + 2q'(y) = 3,$$

czyli

$$p'(x) = 3 - 2q'(y) \quad \forall_{x, y \in X \subset \mathbb{R}^2}.$$

Oznacza to, że prawa i lewa strona powinny mieć tą samą wartość niezależnie od x i y . Czyli

$$\begin{aligned} \exists_k \quad p'(x) = k &\implies p(x) = kx + c_1 \\ 3 - 2q'(y) = k &\implies q(y) = \frac{3-k}{2}y + c_2. \end{aligned}$$

Zatem

$$u(x, y)_k = kx + c_1 + \frac{3-k}{2}y + c_2.$$

To ile to k powinno wynosić? Problem jest addytywny, więc moglibyśmy zsumować lub scałkować wszystkie $u(x, y)_k$.

$$[u_{,t} + u_{,x}] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \implies \nabla_{[a,b]} u = 0.$$

Czyli u - stała na poziomie i $u(x, t) = f(bt - ax)$.

Widzimy, że poprzednie rozwiązanie nie było najogólniejsze na świecie. To po co nam superpozycja? **Bo szybko wychodzi.**

Przykład 3. niech dla $u(x, 0) = g(x)$,

$$u_{,t} + au_{,x} = 0.$$

Wiemy, że $u = g(x - at)$.

Zamiast tego załóżmy, że

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

czyli

$$X(x) \cdot T_{,t}(t) + aT(t) \cdot X_{,x}(x) = 0.$$

Dalej

$$\frac{T_{,t}(t)}{T(t)} = -a \frac{X_{,x}(x)}{X(x)} \quad \forall_{x, T \neq 0}.$$

Czyli w tej konwencji

$$\frac{T_{,t}}{T} = -ak, \quad \frac{X_{,x}}{X} = k.$$

Czyli

$$X(x) = B_k e^{kx}, \quad T(t) = A_k e^{-kat},$$

zatem

$$u(x, t, k) = c_k e^{k(x-at)}.$$

Pisząc z sumami wyjdzie tak

$$u(x, t) = \sum c(k) e^{k(x-at)}, \quad u(x, 0) = \sum A_k e^{kx} = g(x).$$

A bez sum, to tak samo, tylko bez sum.

Widzimy, że powyższe podejście wyznacza klasę g funkcji, która mogłaby zadać warunek brzegowy oraz klasę funkcji, na które chcemy rozwinąć warunek brzegowy. Językiem, który pozwoli opisać problem będzie język algebry. Popatrzmy na równania:

$$X_{,x}(t) = kX(x) \tag{6.1}$$

$$T_{,t}(t) = -akT(t) \tag{6.2}$$

w sposób następujący. Niech $L_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X(x) = \psi_1$, $\frac{\partial}{\partial t} = L_2$, $T(t) = \psi_2$, $ak = \lambda_2$. Wtedy ?? wygląda bardziej jak na kwantach

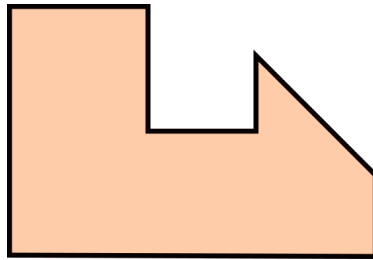
$$L_1 \psi_1 = k \psi_1, \quad L_2 \psi_2 = \lambda_2 \psi_2.$$

Na algebrze pojawiały się podobne napisy, tylko że wyglądały tak $Av = \lambda v$. Wychodzi na to, że jak się postaramy, to będziemy mogli związać z np. operatorem ∂_x jego wektory własne!

W naszym przypadku by to miało postać

$$\psi_1(x) = e^{xk}, \quad \psi_2(t) = e^{-\lambda t}.$$

Jeżeli dołożymy do tego liniową niezależność, to będziemy mogli pytać o bazę rozwiązań, o to, jakie warunki brzegowe da się w takiej bazie przedstawić i jak zszyć ze sobą wartości własne λ_1 i λ_2 (k i $-ak$). Wartości własne muszą być funkcjami sensownej klasy (sensowna = fajna). Pamiętamy, że z L^1 nie zwiążemy iloczynu skalarnego z normą supremum (a ona jest przecież najfajniejsza na świecie). W większej niż jeden liczbie wymiarów dochodzi jeszcze problem dziedziny wartości własnych. Nikt nam nie przeszkodzi w znajdowaniu funkcji własnych dla membrany okrągłej (bębna), ale dla membran ładnych inaczej ?? już jak najbardziej. Nawet nie chodzi nam tutaj o trudności w rachunkach, tylko bardziej o istnienie rozwiązań).



Rysunek 6.1: Membrana ładna inaczej, czyli w zasadzie dowolna niepodobna do elipsy

Inną przydatą rzeczą, jest umiejętność rozwiązania problemu odwrotnego - mając rozwiązanie znaleźć warunek początkowy. Na przykład mając sygnał z tomografu chcemy odtworzyć to w co on strzelał.

Widzimy zatem, że metoda separacji bynajmniej nie jest konstrukcją naturalną i na wiele rzeczy nam nie pozwoli (nawet na takie niewinne rzeczy jak potencjał zmienny w czasie).

A na co pozwala?

Przykład 4. Rozważmy równanie $u_t = u_{xx}$ dla $0 < x < \pi$ i $t > 0$. Jeszcze nałożymy warunek brzegowy

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

czyli na początku i na końcu mocowania ma się zerować.

Zastosujemy separację zmiennych:

$$u(x, t) = y(x)g(t) \implies y(x)g'(t) = g(t)y''(x).$$

Warunek brzegowy zmniejsza się w taki ładny układ

$$y(0)g(t) = 0$$

$$y(\pi)g(t) = 0.$$

Zatem

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda.$$

Czyli

$$g'(t) = -\lambda g(t), \quad y''(x) = -\lambda y(x).$$

No to trzeba rozwiązać, wyjdzie

$$g(t) = A_\alpha e^{-\lambda t}, \quad \begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & 0 < x < \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Co to znaczy λ ? To jest ujemne, czy dodatnie?

Gdyby $\lambda = -\alpha^2$, to wtedy

$$y(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x},$$

co nie mogłoby spełnić warunku brzegowego. To może inaczej.

Niech $\lambda = \alpha^2$, wtedy

$$y(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x).$$

Pierwszy wyraz nam odpada, bo $y(0) = 0$, a z drugiego warunku wynika

$$y(\pi) = 0 \implies B_\alpha \sin(\alpha\pi) = 0.$$

Czyli $\alpha = n \implies \lambda = n^2$. To fajnie nawet się ułożyło, można podstawić do $u(x, t)$,

$$u_n(x, t) = A_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

A jak się przesumuje po n , to będzie tak samo tylko z sumą po n . Pamiętamy, że

$$u(x, 0) = \sum_n A_n \sin(nx).$$

Czyli mamy fouriera. Współczynniki liczymy jak zawsze,

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi \sin(n\xi) u(\xi, 0).$$

Można podstawić do wzoru na $u(x, t)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \sum_n \int_0^{\pi} \sin(n\xi) u(\xi, 0) d\xi \cdot \sin(nx) e^{-n^2 t} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi \left(\sum_n \sin(n\xi) \sin(nx) e^{-n^2 t} \right) u(\xi, 0). \end{aligned}$$

Co z jednoznacznością, rodzajem zbieżności i tak dalej?

Ograniczmy się tutaj do takich operatorów, które pojawiają się w równaniach fizyki matematycznej przy okazji separacji zmiennych w postaci iloczynu (wtedy można mówić o wartościach własnych).

Operatory Sturma-Liouville'a

Niech $p, q, r \in \mathcal{C}^2[a, b]$ spełniające $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $a \leq x \leq b$. Będziemy szukać rozwiązań problemu

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x)v(x) = \lambda r(x)v(x).$$

$\lambda \in \mathbb{C}$.

Iloczyn skalarny dany tak

$$\langle u|v \rangle = \int_a^b \overline{v(x)} u(x) r(x) dx.$$

Więc norma to

$$\|f\| = \langle f|f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Nie jest zbyt wygodna dla szacowań, wolelibyśmy *sup*, ale nie dostaniemy takiej z iloczynu skalarnego.

Przykład 5. Równanie Schrödingera po separacji zmiennych

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

Czyli operator jest postaci

$$L(v) = -\frac{1}{r(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x)v \right],$$

gdzie $\frac{p}{r} = \frac{\hbar^2}{2m}$, $\frac{q}{r} = E - V$. Dla niego wektor własny spełnia $L(v) = \lambda v$.
Przykładowe warunki brzegowe

- pudełko - $\psi(0) = 0, \psi(L) = 0$
- okrąg - $\psi(0) = \psi(L)$

Do czego potrzebny nam iloczyn skalarny? Pamiętamy z algebry, że na przestrzeni Hilberta wektory własne, (jeżeli operator jest wystarczająco fajny) są prostopadłe w danym iloczynie skalarnym. Aby tak było, L musi spełniać warunek

$$\langle Lf|g \rangle = \langle f|Lg \rangle.$$

To oznacza, że

$$\begin{aligned} \langle Lf|g \rangle &= \int_a^b (Lf)(x) \overline{g(x)} r(x) dx = \int_a^b (-(p(x)f')' + q(x)f) \overline{g(x)} dx = \\ &= - \int_a^b \left((p(x)f')' \overline{g(x)} + q(x)f(x) \overline{g(x)} \right) dx = \\ &= - p(x)f'(x) \overline{g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \left(-p(x)f'(x) \overline{g'(x)} + q(x)f(x) \overline{g(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

Prawa strona

$$\begin{aligned} \langle f|Lg \rangle &= \int_a^b f(x) \overline{(-p(x)g'(x))'} - q(x)f(x) \overline{g(x)} dx = \\ &= - p(x) \overline{g'(x)} f(x) \Big|_a^b - \int_a^b \left(-p(x) \overline{g'(x)} f'(x) + q(x)f(x) \overline{g(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

Czyli lewa strona minus prawa strona

$$\langle f|Lg \rangle - \langle Lf|g \rangle = p(x) f' \overline{g(x)} - p(x) \overline{g'(x)} f(x) \Big|_a^b.$$

Jeżeli

- $p(a) = p(b) = 0$, to $\langle Lf|g \rangle = \langle f|Lg \rangle$.
- $f, g \in \mathcal{L}^2, [a, b] \rightarrow]-\infty, \infty[$ to też może być ok,
- możliwe oczywiście też inne warunki.

Przypomnienie z algebry - jeżeli $\langle Lf|g \rangle = \langle f|Lg \rangle$, to mówimy, że operator jest samosprzężony, wówczas

- wszystkie jego wartości własne są rzeczywiste

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|^2 &= \lambda \langle u|u \rangle = \langle \lambda u|u \rangle = \langle Lu|u \rangle = \\ &= \langle u|Lu \rangle = \langle u|\lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u|u \rangle = \bar{\lambda} \|u\|^2. \end{aligned}$$

- wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe

To znaczy, że jeżeli u, v są takie, że

$$Lu = \lambda u, \quad Lv = \lambda v,$$

to

$$vLu - uLv = v\lambda u - u\lambda v = 0.$$

No i co z tego? ano

$$-v \frac{d}{dx} (p(x)u') + u \frac{d}{dx} (p(x)v') = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dx} (p(x)(uv' - u'v)) = 0.$$

Zatem

$$p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = \text{const} \quad \forall_{x \in [a, b]}.$$

Jak połączymy to z warunkiem brzegowym, to dostaniemy

$$p(x) \left(\overline{u(x)}v'(x) - \overline{u'(x)}v(x) \right) \Big|_a^b = 0.$$

Co by było jakby $\overline{u(a)}v'(a) - \overline{u'(a)}v(a) = 0$?

No wtedy to jest fajnie, bo $\forall_x u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = 0$, czyli

$$\det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix} = 0.$$

A to oznacza, że kolumny są liniowo zależne. Czyli jeżeli

$$Lu = \lambda u, \quad Lv = \lambda v \implies \exists_c u = cv.$$

A co jeżeli

$$\begin{aligned} p(a) \left[\overline{u(a)}v'(a) - \overline{u'(a)}v(a) \right] &= \text{const} \neq 0 \\ p(b) \left[\overline{u(b)}v'(b) - \overline{u'(b)}v(b) \right] &= \text{const} \neq 0 \\ &? \end{aligned}$$

Warunek na samosprężoność jest spełniony, ale

$$\det \begin{bmatrix} u & v \\ v' & v' \end{bmatrix} \neq 0,$$

czyli dla tej samej λ mamy dwa różne rozwiązania. Znajomość λ i samosprężoność nie dają jednoznaczności rozwiązań. W ten sposób różnią się rozwiązania o periodycznych warunkach brzegowych (np na okręgu) od struny zamocowanej na obu końcach.

Przykład 6.

$$-y'' = \lambda y, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

warunki periodyczne $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$. Wartości własne to $\mathbb{N} \ni n^2$, a wektory własne to

$$\begin{aligned} u_n^1 &= \cos(nx) \\ u_n^2 &= \sin(nx). \end{aligned}$$

Osobną sprawą jest znak wartości własnych i to, czy są one ograniczone np. od dołu, żeby przypominało na przykład energię.

7. Wykład Operatory Sturm-Liouville'a

Ostatnio mówiliśmy o metodzie separacji zmiennych. Chcielibyśmy przełożyć trudne równanie typu (atom wodoru)

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{c^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Na kilka prostych, postulując

$$\psi(x, y, z) = \psi^x(x) \cdot \psi^y(y) \cdot \psi^z(z)$$

lub

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \psi^r(r) \cdot \psi^\theta(\theta) \cdot \psi^\varphi(\varphi).$$

I otrzymać w efekcie trzy równania drugiego rzędu jednej zmiennej.

Równania można także przedstawić w formie bardziej znajomej

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0,$$

lub mniej znajomej,

$$-\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x(t) = \lambda r(t)x(t).$$

Przykład 7. *Równanie Bessela:*

$$x^2 y_{xx} + x y_x (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0.$$

Można zapisać też jako

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(x - \frac{\alpha^2}{x} \right) y(x) = 0,$$

czyli

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + x^2 y(x) = \alpha^2 y(x).$$

Ta postać równania pomocna jest przy analizie rozwiązań, zależności od warunków brzegowych oraz dopuszczalnych wartości parametru λ .

$$L(y) = -\frac{1}{r(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) \right).$$

Dlaczego taka postać?

Wartości własne mają interpretację fizyczną a wektory własne mogą tworzyć

bazę, w której chcielibyśmy rozpisać warunki początkowe. Język, który to opisuje to oczywiście algebra.

Pamiętamy, że jeżeli $\langle \cdot | \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny, a L - operator taki, że

$$\forall_{f,g} \langle f | Lg \rangle - \langle Lf | g \rangle = 0,$$

to wartości własne są rzeczywiste a wektory własne są prostopadłe. Prostopadłość daje nam bazę, możemy więc pytać jak taka baza nadaje się do przedstawienia w niej warunków brzegowych i co rozumiemy przez "przedstawienie". Co robić w sytuacji, gdy jednej wartości własnej odpowiada kilka wektorów własnych (klatki jordanowskie, poziomy energetyczne w atomie wodoru - orbitale s,p,d...) dla tego samego n .

Mówiliśmy ostatnio jakie warunki powinny być spełnione, aby operator

$$L(v) = -\frac{1}{r(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x)v(x) \right)$$

był samosprężony. Wyszedł warunek

$$p(x) \left(f'(x) \overline{g(x)} - f(x) \overline{g'(x)} \right)_a^b = \langle f | Lg \rangle - \langle Lf | g \rangle.$$

Pytanie 6. Mamy operator L i jego wartości i wektory własne

$$L\psi_n = \lambda_n \psi_n.$$

Przysłano nam smsem funkcję f i pytamy o to, że da się utworzyć szereg $\sum_n a_n \psi_n$ taki, żeby

$$\sum_n (a_n \psi_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Czyli żeby był zbieżny jednostajnie. Jeżeli dobierzemy sobie normę, to piszemy tak

$$\left\| \sum a_n \psi_n - f \right\| \rightarrow 0.$$

Jest to pytanie o możliwość dobrania współczynników a_n . Jak to zrobić?

Weźmy funkcję

$$E(a_1, a_2, \dots, a_N) = \left\| \sum_{n=1}^N a_n \psi_n - f \right\|^2.$$

Pytamy o taki zestaw a_1, \dots, a_N , dla którego funkcja E osiąga minimum. A potem zbudujemy ciąg cyferek.

$$E(a_1), E(b_1, b_2), E(c_1, c_2, c_3), \dots E(a'_1, a'_2, \dots, a'_N)$$

i pokażemy, że taki ciąg dąży (albo nie) do zera jak $N \rightarrow \infty$. Uwaga, dla każdego N , zestaw cyferek może być inny! Przykłady na znajdowanie a_i były przy okazji szeregów fouriera. Załóżmy, że

$$\langle \psi_n | \psi_k \rangle = \delta_{nk}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} E(a_1, \dots, a_n) &= \left\langle f - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \middle| f - \sum_{k=1}^N a_k \psi_k \right\rangle = \langle f | f \rangle + \\ &\quad - \left\langle f \middle| \sum_{k=1}^N a_k \psi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \middle| f \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \sum_{n=1}^n a_n \psi_n \middle| \sum_{k=1}^N a_k \psi_k \right\rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N \overline{a_k} \langle f | \psi_k \rangle + \\ &\quad - \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n | f \rangle + \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^N \overline{a_k} \langle \psi_n | \psi_k \rangle. \end{aligned}$$

Ale

$$\sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^N \overline{a_k} \langle \psi_n | \psi_k \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \overline{a_n} = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Przenumerujemy wyrażenie z k , w efekcie:

$$E(a_1, \dots, a_N) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \overline{a_n} \langle f | \psi_n \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n | f \rangle + \sum_{n=1}^N a_n \overline{a_n}.$$

Traktując to jak przepis na a_n , widać, że dla

$$a_n = \langle f | \psi_n \rangle,$$

E będzie najmniejsze ($\langle \psi_n | f \rangle = \overline{\langle f | \psi_n \rangle}$).

I wtedy $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2$, więc

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Czyli o ile f jest klasy L^2 , to szereg po prawej stronie jest zbieżny, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Uwaga: a_n nie ulegnie już zmianie. Widzimy też, że przepis na a_n , z wykorzystaniem iloczynu skalarnego daje nam, dla ustalonego N najbardziej optymalne przybliżenie.

Zauważmy, że nie pokazaliśmy jeszcze, że ciąg (E) dąży do zera. Pokazaliśmy zbieżność ciągu

$$\|a_n\|^2 = \|\langle f|\psi_n\rangle\|^2,$$

ale chcielibyśmy pokazać, że

$$\sum_{n=1}^N a_n \psi_n \rightarrow f,$$

czyli by w granicy na przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 = \|f\|^2.$$

Co więcej, nasze rozważania dotyczyły sytuacji, w której indeks n jest na przykład dyskretny i ograniczony od dołu. Chcemy zatem odpowiedzieć na następane pytanie. Czy

$$\sum_{k=0}^N c_k \psi_k,$$

jest zbieżny (i jak) do $f \in L^2$, jeżeli

a) $c_k = \langle f|\psi_k\rangle$

b) $L\psi_k = \lambda\psi_k$

c) $\langle Lf|g\rangle = \langle f|Lg\rangle$

gdzie $Lf = -\frac{1}{r(x)}((pf')' + qf)$, $p(x)[f'\bar{g} - f\bar{g}']_a^b = 0$. Zaczniemy od pytania

Pytanie 7. Kiedy wartości własne operatora Sturm-Liouville'a są nieujemne? (czy też ograniczone od dołu). W równaniu Schrödingera pojawia się warunek

$$H\psi_n = E_n\psi_n,$$

jeżeli cyferkę E_n chcemy interpretować jako energię, to powinna być ograniczona od dołu.

Stwierdzenie 3. Wartości własne operatora Sturm-Liouville'a są nieujemne.

Dowód. Niech $R(u) = \frac{\langle Lu|u \rangle}{\langle u|u \rangle}$ będzie funkcją z $L^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Zauważmy, że $R(u)$ nie jest normą operatora. ($\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_x \frac{\langle Ax|Ax \rangle}{\langle x|x \rangle}$).

Obserwacja: jeżeli za u wstawimy ψ_n , to dostaniemy

$$R(\psi_n) = \frac{\langle L\psi_n|\psi_n \rangle}{\langle \psi_n|\psi_n \rangle} = \lambda_n \frac{\langle \psi_n|\psi_n \rangle}{\langle \psi_n|\psi_n \rangle} = \lambda_n.$$

Wstawmy teraz do $R(u)$ funkcję f

$$R(f) = \frac{\langle Lf|f \rangle}{\langle f|f \rangle},$$

więc

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle R(f) &= \langle Lf|f \rangle = \int_a^b \left(-(pf')' - qf \right) \bar{f} dx = \\ &= -pf' \bar{f} \Big|_a^b + \int_a^b (pf' \bar{f}' - qf \bar{f}) dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$R(f) = -\frac{(pf') \bar{f} \Big|_a^b}{\langle f|f \rangle} + \frac{\int_a^b p \|f'\|^2 - q \|f\|^2}{\langle f|f \rangle}.$$

Jeżeli oba człony będą większe od zera, to

$$R(f) > 0 \implies \lambda > 0.$$

□

Widzimy zatem, że jeżeli \forall_f

$$-(pf') \bar{f} \Big|_a^b \geq 0, \quad g(x) \leq 0,$$

to wtedy $R(f) > 0$ pod warunkiem, że L jest samosprężony. Czyli

$$\forall_{f,g} p (f' \bar{g} - f \bar{g}') \Big|_a^b = 0, \quad Lf = -\frac{1}{r} (qf + (pf')').$$

Nie zapominajmy, że był jeszcze jeden warunek związany z ilością wektorów własnych (w sensie wymiaru przestrzeni) dla danej wartości własnej:

$$p(x) (f(x)g'(x) - f'(x)g(x)) = 0 \quad \forall_{x \in [a,b]}.$$

Przykład 8. Trudno uzyskane współczynniki nazwać inaczej niż zagmatwanymi. Zobaczmy, czy dla prostych operatorów wartości własne rzeczywiście są ograniczone z dołu. Niech $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, szukamy wektorów własnych dla warunków $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 0$. Czyli

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda\psi = 0.$$

Czyli $q = 0$, $p = 1$. Warunek

$$p(x) (f'(x)\bar{g} - f\bar{g}')_0^1 = 1 \cdot \left[\psi_1'(x)\bar{\psi}_2(x) - \psi_1(x)\bar{\psi}_2'(x) \right]_0^1.$$

Dla $L\psi_1 = \lambda_1\psi_1$ ale przy warunkach $\psi(0) = 0$
 $L\psi_2 = \lambda_2\psi_2$ $\psi(1) = 0$ widać, że jest ok. Co więcej,

$$-(p(x)\psi'(x))\bar{\psi}(x)|_0^1 \geq 0$$

też jest ok.

Sprawdzamy

$$\psi'' + \lambda\psi = 0, \quad \begin{matrix} \psi(0) = 0 \\ \psi(1) = 0 \end{matrix}$$

- Jeżeli $\lambda < 0$, to mamy rozwiązanie typu

$$\psi(x) = A_k e^{-k^2 x} + B_k e^{k^2 x},$$

ale warunek brzegowy nam daje sprzeczność!

- Jeżeli $\lambda = 0$, to rozwiązanie jest

$$\psi = Ax + B.$$

Wtedy z warunkiem brzegowym wyjdzie, że $\psi = 0$

- Jeżeli $\lambda > 0$, to rozwiązanie

$$\psi(x) = A_k \sin(\sqrt{k^2}x) + B_k \cos(\sqrt{k^2}x).$$

Warunki brzegowe zostawiają

$$A_k \sin(k) = 0.$$

Więc $k = n\pi$ dla n całkowitych, czyli

$$\lambda_n = n^2 \pi^2$$

dla n naturalnych.

Pokazaliśmy więc, że wartości własne tego operatora są ograniczone od dołu.

W następnym odcinku Dla powyższego przykładu zauważymy, że $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$. Gdyby była to prawda dla każdego operatora Sturm-Liouville'a, oznaczałoby to, że możemy wartości własne uporządkować i mieć na przykład gwarancję, że poziomy energetyczne będą rosnąć.

8. Wykład Czy można uporządkować poziomy energetyczne?

Ostatnio szukaliśmy takich współczynników c_1, c_2, \dots, c_N , by wyrażenie

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \right\|$$

było najmniejsze, jeżeli $f \in \mathcal{L}^2$, a ψ_n - wektory własne operatora Sturma-Liouville'a.

Okazało się, że $a_n = \langle f | \psi_n \rangle$ daje nam minimum, co więcej

$$\sum_{n=1}^N \|a_n\|^2 \leq \|f\|^2,$$

więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Potam pokazaliśmy, że jeżeli dla operatora Sturma-Liouville'a, poza warunkami na samosprężoność

$$\forall_{f,g} p(f' \bar{g} - f \bar{g}')|_a^b = 0,$$

gdzie $Lf = -\frac{1}{r}((pf')' + qf)$ spełniony będzie warunek $-(pf')\bar{f}|_a^b \geq 0$ i $g(x) \leq 0$, to wtedy wartości własne operatora L będą większe od zera. Pokazaliśmy to przy użyciu operatora

$$R(u) = \frac{\langle Lu | u \rangle}{\langle u | u \rangle},$$

dla którego $R(\psi_n) = \lambda_n$, jeżeli ψ_n takie, że $L\psi_n = \lambda_n \psi_n$.

Uzyskane warunki sprawdziliśmy dla operatora $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ i okazało się, że

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Chcielibyśmy pokazać, że dla wartości własnych operatora Sturma-Liouville'a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

co więcej zbiór wartości własnych można uporządkować tak, że

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Dowód. Dowód zrobimy dla operatora S-L z następującymi warunkami brzegowymi

$$-(pf')' - qf = \lambda r f, \quad f(0) = f(1) = 0 \quad (8.1)$$

O takim równaniu wiemy, że spełnia wszystkie możliwe warunki fajności

$$\forall_{f,g} p(f'\bar{g} - f\bar{g}')\big|_0^1 = 0, \quad - (pf')\bar{f}\big|_0^1, \quad g(x) \leq 0.$$

(czy jednej wartości własnej odpowiada dokładnie jeden wektor własny? to musimy ustalić, na razie założymy, że tak jest).

O równaniu ?? wiemy zatem, że $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, czyli wektorów własnych o wartościach własnych równych zero nie ma, czyli problem jednorodny.

$$(pf')' - qf = 0, \quad f(0) = f(1).$$

To nie ma innych rozwiązań niż $f = 0$.

Wiemy, że z operatorem L możemy związać wektory własne i wartości własne

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_n, & \dots & & \\ \psi_1, & \psi_2, & \dots, & \psi_n, & \dots & & \end{array}$$

oraz, że jeżeli znajdziemy funkcję z L^2 , np. $G(x)$, to do zestawu możemy dorzucić ciąg $c_k = \langle G | \psi_k \rangle$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n, \dots,$$

taki, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|^2$$

jest zbieżny. W jaki sposób moglibyśmy pokazać, że $\lambda_n \rightarrow \infty$? Znaleźć taką funkcję $G(x)$, że

$$\|c_n\|^2 = |\langle G | \psi_n \rangle|^2 = \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Bo ze zbieżności $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ wyjdzie $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Podsumowując, szukamy funkcji $G(x)$ takiej co spełnia te wszystkie warunki

$$\|c_n\|^2 = |\langle G | \psi_n \rangle|^2 = \frac{1}{\lambda_n^2},$$

$$(p\psi_n)' - q\psi_n = -\lambda_n r\psi_n,$$

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0.$$

Zadanie zapowiada się karkołomnie, dojście do odpowiedzi też. Pamiętamy, że mając równanie

$$(pw')' - qw = -F(x),$$

moglibyśmy je rozwiązać przy pomocy funkcji Greena, czyli spełniającej warunek

$$p(G(x, \xi))' - pG(x, \xi) = -\delta(x - \xi),$$

bo wtedy

$$w(x) = \int_0^1 G(x, \xi) F(\xi) d\xi.$$

Funkcję $G(x, \xi)$ łatwo zbudować, bo mamy do dyspozycji dwa rozwiązania

$$(pw'_1)' - qw_1 = 0, \quad w_1(0) = 0 \text{ ale nie } w_1(1) = 0,$$

$$(pw'_2)' - qw_2 = 0, \quad w_2(0) = 0 \text{ ale nie } w_2(1) = 0,$$

Możemy złożyć G :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} w_1(x) & x < \xi \\ w_2(x) & x \geq \xi \end{cases}.$$

Nałożymy teraz na w_1 i w_2 warunki

$$w_1(\xi) = w_2(\xi), \quad w'_1(\xi) - w'_2(\xi) = -1.$$

Złożmy razem następującą zależność

$$(pw'(x))' - q(x)w(x) = -F(x), \quad w(x) = \int_0^1 G(x, \xi) F(\xi) d\xi \quad (8.2)$$

$$(p\psi'_n(x))' - q\psi_n(x) = \underbrace{-\lambda_n \psi_n(x) r(x)}_{(\star)} \quad (8.3)$$

Pamiętamy jeszcze, że $\langle u|v \rangle = \int_0^1 u(\xi)v(\xi)r(\xi)d\xi$. Jeżeli teraz za $F(x)$ wstawimy (\star) do warunku ??, to dostaniemy

$$\forall_{x \in [0,1]} \psi_n(x) = \int_0^1 \underbrace{G(x, \xi)}_{u(\xi)} \underbrace{\lambda_n \psi_n(\xi)}_{v(\xi)} r(\xi) d\xi = \lambda_n \underbrace{\langle G|\psi_n \rangle}_{c_n}.$$

Czyli $\forall_{x \in [0,1]} \psi_n(x) = \lambda_n c_n$, gdzie c_n jest takie, że szereg

$$\sum \|c_n\|^2 \leq \int_0^1 |G(x, \xi)|^2 d\xi \quad \forall_{x \in [0,1]}.$$

Czyli

$$\forall_{x \in [0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_n(x)|^2}{\|\lambda_n\|^2} \leq \int_0^1 |G(x, \xi)|^2 d\xi.$$

Zbieżność po lewej stronie jest zbieżnością bezwzględną, więc możemy wyciąkać wszystko po x , pamiętając, że

$$\int_0^1 |\psi_n(x)|^2 dx = 1,$$

bo ψ - unormowane. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 |G(x, \xi)|^2 d\xi}_{\text{ograniczone}}.$$

Czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ i już. □

Pytanie 8. Dlaczego wartości własne funkcji Greena dla operatora S - L wynoszą $\frac{1}{\lambda_n}$? Intuicja z algebry:

Jeżeli $Av = \lambda v$, to mamy $v = \lambda A^{-1}v$, czyli $\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$

Wiemy już, że szereg $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ jest zbieżny, czyli $\lambda_n \rightarrow \infty$. Chcemy pokazać, że można tak poprzestawiać elementy ciągu

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_N, \dots\},$$

że będą w kolejności rosnącej, co pozwoli nam też w jakiś sposób uporządkować wektory własne.

Stwierdzenie 4. Zasada Rayleigh'a.

Niech ψ_0, \dots, ψ_n - zbiór wektorów własnych operatora S - L (samosprężonego), $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - wartości własne $\lambda_i > 0$. Niech

$$w_N \stackrel{\text{ozn}}{=} \langle \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N \rangle, \quad w_N^\perp = \xi u, \quad \langle u | w_N \rangle = 0.$$

Wówczas

$$\exists_{c \in \mathbb{R}} \min_{u \in w_N} \frac{\langle Lu | u \rangle}{\langle u | u \rangle} = c,$$

co więcej, $\exists_{\varphi \in w_N^\perp}$, że $L\varphi = c\varphi$.

(φ o takich własnościach oznaczmy przez ψ_{N+1} , a c przez λ_{N+1}).

Obserwacja: Powyższa procedura pozwoli na uporządkowanie zbioru wartości własnych i wektorów własnych - na razie jest to tylko ponumerowanie λ_i i nie mamy jeszcze zależności typu $>$, $<$.

Dowód. Pokażemy, że jeżeli $u \in w_N^\perp$, to $L(u) \in w_N^\perp$. Niech

$$v = \sum_{n=0}^N d_n \psi_n.$$

Wiemy, że

$$\forall_{n=0 \dots N} \langle u | \psi_n \rangle = 0.$$

Policzmy sobie

$$\begin{aligned} \langle Lu | v \rangle &= \langle u | Lv \rangle = \left\langle u \left| \sum_{n=0}^N d_n L \psi_n \right. \right\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^N \bar{d}_n \langle u | \lambda_n \psi_n \rangle = \sum_{n=0}^N \bar{d}_n \lambda_n \langle u | \psi_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Wiemy, że $R(u)$ jest ograniczone od dołu (pokazaliśmy to w poprzednim odcinku). Zbiór wartości $R(u)$ jest ograniczony od dołu. Załóżmy, że $R(u)$ osiąga swoje kresy (formalny dowód - poprzez własności funkcji Greena, tutaj odpuszczamy). Pokażemy część drugą stwierdzenia.

Założmy zatem, że $\exists_{u_{m,n} \in w_N^\perp}$ takie, że $R(u_{m,n})$ jest najmniejsze. Oznacza to, że

$$g(s) = R(u_{m,n} + s \cdot u), \quad s \in \mathbb{R}, \quad u \in w_N^\perp$$

ma minimum w zerze, czyli $g'(s=0) = 0$. Załóżmy, że u jest funkcją rzeczywistą

$$g(s) = \frac{\langle L(u_{m,n} + su) | u_{m,n} + su \rangle}{\langle u_{m,n} + su | u_{m,n} + su \rangle}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \langle u_{m,n} + su | u_{m,n} + su \rangle_{,s} &= \langle u_{m,n} | u_{m,n} + su \rangle_{,s} + \langle u_{m,n} + su | u_{m,n} \rangle_{,s} + \\ &+ (s^2 \langle u | u \rangle)_{,s} = \langle u_{m,n} | u \rangle + \langle u | u_{m,n} \rangle + 2s \langle u | u \rangle. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \langle L(u_{m,n}) + sL(u) | u_{m,n} + su \rangle_{,s} &= \langle L(u_{m,n}) | u_{m,n} + su \rangle_{,s} + \\ &+ \langle L(u_{m,n}) + sL(u) | u_{m,n} \rangle_{,s} + (s^2 \langle L(u) | u \rangle)_{,s} = \\ &= \langle L(u_{m,n}) | u \rangle + \langle L(u) | u_{m,n} \rangle + 2s \langle L(u) | u \rangle. \end{aligned}$$

Liczymy teraz pochodną g

$$g'(s)|_{s=0} = \frac{(\square)'}{\Delta} \Big|_{s=0} - \frac{\square \Delta'}{\Delta^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\Delta} \left(\square' - \frac{\square \Delta'}{\Delta} \right) \Big|_{s=0}.$$

$$R(u_{m,n}) = \frac{\langle L(u_{m,n}) | u_{m,n} \rangle}{\langle u_{m,n} | u_{m,n} \rangle}.$$

$$\begin{aligned} g'(s)|_{s=0} &= \frac{1}{\langle u_{m,n} | u_{m,n} \rangle} \left(\langle L(u_{m,n}) | u \rangle + \langle L(u) | u_{m,n} \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle L(u_{m,n}) | u_{m,n} \rangle}{\langle u_{m,n} | u_{m,n} \rangle} (\langle u_{m,n} | u \rangle + \langle u | u_{m,n} \rangle) \right) = \\ &= \frac{1}{\langle u_{m,n} | u_{m,n} \rangle} (\langle L(u_{m,n}) - R(u_{m,n})u_{m,n} | u \rangle + \langle u | L(u_{m,n}) - R(u_{m,n})u_{m,n} \rangle). \end{aligned}$$

$L(u_{m,n}) = R(u_{m,n})u_{m,n}$, czyli wartość $R(u)$ dla $u_{m,n}$ jest wartością własną funkcji $u_{m,n}$. Zatem, jeżeli $u_{m,n} \in w_N^\perp$, gdzie $w_N = (\psi_0, \dots, \psi_N)$, to

$$u_{m,n} \stackrel{\text{ozn}}{=} \psi_{N+1}, \quad R(u_{m,n}) = \lambda_{N+1}$$

i możemy porządkować dalej, bo weźmiemy kolejny zbiór w_{N+1}^\perp , dla którego znajdziemy nowe $u_{m,n}$ i tak dalej. \square

Obserwacja:

$$\forall_{\psi \in w_N^\perp} R(\psi) \geq \lambda_{N+1}.$$

Czyli następne wartości własne dla $w_{N+1}^\perp \subset w_N^\perp$ będą coraz większe.

Twierdzenie 7. Niech $f \in \mathcal{L}^2$, $J_m = f - \sum_{k=1}^m c_k \psi_k$, $c_k = \langle f | \psi_k \rangle$. Wówczas

$$\|J_m\|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

(pamiętamy, że $\langle \psi_k | \psi_i \rangle = \delta_{ki}$).

Dowód. Zauważmy, że $\forall_{i \leq m}$ mamy $\langle J_m | \psi_i \rangle = 0$, bo

$$\langle J_m | \psi_k \rangle = \langle f | \psi_i \rangle - \sum_{k=1}^m c_k \langle \psi_k | \psi_i \rangle = c_i - c_i = 0.$$

Zatem $J_m \in w_m^\perp$ - od wektora odjęliśmy k składowych. Pamiętamy, że $\forall_{\psi \in w_N^\perp} R(\psi) \geq \lambda_{N+1}$, czyli

$$R(J_m) \geq \lambda_{m+1} \implies \frac{\langle L J_m | J_m \rangle}{\langle J_m | J_m \rangle} \geq \lambda_{m+1}.$$

Czyli $\langle J_m | J_m \rangle \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle L J_m | J_m \rangle$. Policzmy teraz prawą stronę

$$\begin{aligned} & \left\langle L \left(f - \sum_{k=1}^m c_k \psi_k \right) \middle| f - \sum_{k=1}^m c_k \psi_k \right\rangle = \langle L f | f \rangle + \\ & - \left\langle \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \psi_k \middle| f \right\rangle - \left\langle f \middle| \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \psi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^m c_k \psi_k \middle| \sum_{i=1}^m c_i \psi_i \right\rangle = \\ & = \langle L f | f \rangle - \sum_{k=1}^m \lambda_k c_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^m \bar{c}_k \lambda_k c_k + \sum_{k=1}^m c_k \bar{c}_k. \end{aligned}$$

Zatem

$$\langle J_m | J_m \rangle \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} (\langle L f | f \rangle + \text{const}).$$

Czyli $\langle J_m | J_m \rangle \rightarrow 0$

□

Niech $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ na zbiorze

$$U = \{u \in \mathcal{L}^2, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Wiemy, że wartości własne L to $n^2\pi^2$ a wektory własne to $\sin(n\pi x)$. Niech $u_1 = x(1-x)$, $u_1 \in U$. Policzmy

$$R(u) = \frac{\langle -2|x(1-x) \rangle}{\langle x(1-x) | x(1-x) \rangle} = 10.$$

Widzimy, że $R(u) \geq \lambda_1$ dla $n = 1$. $10 > \pi^2$ i już.

9. Wykład Równanie falowe

Na ostatnim wykładzie badaliśmy zbieżność szeregu postaci $a_k \psi_k$, gdzie ψ_k - funkcje (wektory) własne operatora Sturm-Liouville'a spełniające dość dużą liczbę precyzyjnie zdefiniowanych warunków, dzięki którym operator S-L był samosprężony i miał inne fajne własności (np. dodatnie wartości własne). Pamiętajmy, że samosprężoność operatora S-L wyznacza nam zbiór funkcji, którymi ten operator karmimy

$$(\langle f | Lg \rangle = \langle Lf | g \rangle).$$

Czyli zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem na jakiejś dziedzinie.

Przykład 9. $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, na zbiorze $U = \{u \in \mathcal{L}^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}$. Do zbioru U należą wektory własne operatora L , czyli

$$\psi_n = \sin n\pi x, \quad \lambda_n = n^2\pi^2.$$

Jak i funkcji, które mogłyby być warunkami początkowymi, gdybyśmy chcieli rozwiązać równanie różniczkowe. Na przykład do U należy funkcja $u_1 = x(1 - x)$.

Na ostatnim wykładzie pokaaliśmy, że baza ψ_n jest zupełna, tzn. każdą funkcję f należącą do zbioru funkcji klasy \mathcal{L}^2 , na którym operator $S - L$ jest samosprężony da się przedstawić jako granicę ciągu $a_k \psi_k$, gdzie $a_k = \langle f | \psi_k \rangle$ i zbieżność ta jest w \mathcal{L}^2 jednostajna. Czyli na przykład

$$x(1 - x) = a_k \sin k\pi x.$$

Dygresja: swoją drogą możemy policzyć $R(u_1)$, gdzie R jest operatorem Reynoldsa

$$R(u) = \frac{\langle Lu | u \rangle}{\langle u | u \rangle}.$$

W naszym przypadku: $Lu_1 = -\frac{d^2}{dx^2}(x(1 - x)) = 2$.

$$\langle 2 | x(1 - x) \rangle = \int_0^1 2 \cdot x(1 - x) dx = \frac{1}{3}.$$

$$\langle u_1 | u_1 \rangle = \int_0^1 x(1 - x)x(1 - x) dx = \frac{1}{30}.$$

Zatem

$$R(u_1) = \frac{1}{3} / \frac{1}{30} = 10.$$

I co z tego? A to, że pamiętamy, o tym, że $R(u)$ osiąga minimum na wektorach własnych i to minimum jest najmniejszą wartością własną, czyli

$$R(u) \geq \lambda_1 \quad \forall_{u \in U} \implies 10 \geq 1^2 \pi^2.$$

No, zgadza się.

Pamiętamy, że zbieżność jednostajna w \mathcal{L}^2 nie oznacza zbieżności w \mathcal{L}^1 i szereg fouriera jest w \mathcal{L}^1 zbieżny punktowo. Może być zbieżny jednostajnie, gdy na \mathcal{L}^1 nałożymy dodatkowe warunki.

Pytanie 9. *Jak otrzymane twierdzenia mają się do równań cząstkowych i metody separacji zmiennych?*

Odpowiedź: Zależy o co pytamy i od takich pojęć jak *problem dobrze postawiony*.

Definicja 3. *Problem jest dobrze postawiony, jeżeli o równaniu różniczkowym możemy powiedzieć, że*

- *rozwiązania istnieją*
- *są jednoznaczne*
- *są ciągle ze względu na zmianę warunków początkowych.*

Zupełność układu funkcji własnych operatora S-L związana jest z istnieniem i jednoznacznością oraz z teorią funkcji specjalnych. Ogólnej teorii dla dowolnego równania różniczkowego nie ma. Mamy trochę wyników dla konkretnych równań fizyki matematycznej, które sprowadzają się do nałożenia warunków dodatkowych na funkcje z \mathcal{L}^2 , co gorsza, niedziałają warunek na "niefizyczność" (przykłady niedługo). Na szczęście, możemy też od czasu do czasu powiedzieć coś konstruktywnego - przykład takiej analizy przeprowadzimy dla równania falowego.

Równanie falowe - motywacja

Jak dojść do równania falowego? najprościej tak:

Niech

$$A = -\phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz,$$

jednoforma potencjału elektromagnetycznego. Wówczas $F = dA$ i $dF = 0$ - mamy trzy równania falowe i jedno równanie Laplace'a.

Wariant trudniejszy - wyobraźmy sobie funkcję, której wartość zależy od średniej wartości funkcji w otoczeniu. Możemy ten warunek zapisać jako

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2},$$

h - odpowiednio małe, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Moglibyśmy teraz pomyśleć o funkcji $\varphi(x, t)$, której dynamika (przyspieszenie) zależy od średniej wartości zmian w okolicy, czyli

$${}''ma'' = \varphi(x, t)_{,tt} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2} - \varphi(x).$$

Ale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(y+2h) + \varphi(y) - \varphi(y+h) - \varphi(y-h)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi((y+h)+h) - \varphi(y+h) - (\varphi(y+h) - \varphi(y))] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi'(y+h)h + r_1(y+h) - (\varphi'(y)h + r_2(y))] = \\ &= \frac{1}{2} [h(\varphi'(y+h) - \varphi'(y)) + r_1(y+h) - r_2(y)] = \\ &= \frac{1}{2} [\varphi''(y)hh + r_3(y+h)h + r_1(y+h) - r_2(y)]. \end{aligned}$$

Czyli jeżeli zachodzenie funkcji zależy od średniego odchylenia, to $\varphi_{,tt} \sim \varphi''$ (bo druga pochodna po czasie też jest rzędu h^2). Dla przypadku statycznego wychodzi $\varphi'' = 0$ i ogólniej $\Delta\varphi = 0$.

Przykład 10. Dla ruchu jednowymiarowego

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_{,t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad x \in R, t > 0.$$

Pytanie 10. Jak wyprowadzić równanie falowe z równania ciągłości?

Problem typu $u_{,tt}(x, t) = c^2 u_{,xx}$ rozważaliśmy już w drugim semestrze przy okazji zamiany zmiennych

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta \\ t &= \xi - \eta. \end{aligned}$$

Dzięki której równanie zmieniło się na dużo fajniejszą formę

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

W efekcie dostaliśmy

$$u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct).$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(x) + \beta(x) \\ g(x) &= -c\alpha'(x) + c\beta'(x). \end{aligned}$$

No i tam ostatecznie wyszło

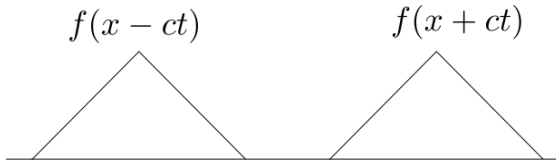
$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

gdzie $f \in \mathcal{C}^2$ i $g \in \mathcal{C}^1$. Warunki na f i g można osłabić przepisując równanie falowe w postaci całkowej dla słabych rozwiązań

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} dx [u_{,tt} - c^2 u_{,xx}] v(t, x) = 0 \quad \forall_{v(t,x) \in \text{funkcje próbne}}.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do równania przewodnictwa w rozwiązaniach równania falowego pojawia się wreszcie wpływ skończonej prędkości przekazywania informacji.

Pytanie 11. *Jak przełożyć na język $f(x)$ i $g(x)$ szarpnięcie struny nieskończonej? Jeżeli na przykład f - trójkąt i $g(x) \equiv 0$, to jak będzie zachowywał się taki impuls?*



Rysunek 9.1: Zachowanie impulsu

Nie rozmyje się, więc kłaśnięcie w 1-D usłyszymy precyzyjnie, niezależnie od tego jak daleko będziemy, tylko trzeba chwilę poczekać. Co będzie gdy kłaśniemy w 2-D? W 3-D jest ważniejsze, ale sprawdzimy czy na przykład 2-D zachowuje się tak samo. W fizyce materiałów, tam gdzie występują przerwy energetyczne na przykład 2-D działa. Rzeczywistość może być czasami opisywana przez 2-D.

Przykład 11. *Struna półnieskończona*
Mając rozwiązanie dla struny nieskończonej

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (9.1)$$

chcemy znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} & t > 0, x > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \geq 0 \\ u_{,t}(x, 0) = g(x) & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Widzimy, że gdy $x \geq ct$, to rozwiązania będą takie jak wcześniej - nie zauważymy nawet, że warunki brzegowe nie są określone dla $(x < 0, t = 0)$. Wróćmy do wyprowadzenia wzoru typu ???. Wiemy, że

$$u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct),$$

ale dla $x - ct < 0$ nie mamy informacji o $\alpha(x - ct)$. Za to wiemy, że $u(0, t \geq 0) = 0$, czyli

$$0 = \alpha(-ct) + \beta(ct), \quad t > 0$$

$$0 = \alpha(-s) + \beta(s), \quad t > 0, u(x, 0) = f(x), x > 0$$

$$f(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad x > 0.$$

Zatem $\alpha(-s) = -\beta(s)$, $s > 0$ i wiemy, czym zastąpić α na ujemnych wartościach. $\beta(x)$ liczymy dla $x > 0$ tak jak poprzednio

$$\beta(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds, \quad x > 0.$$

Ale gdy $x - ct \leq 0$, to $ct - x \geq 0$ i wtedy

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) - f(ct - x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s) ds.$$

Możemy to zapisać jako

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} f(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s) ds, & x - ct < 0 \\ \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds & x - ct > 0 \end{cases}.$$

10. Wykład Droga do wzoru Kirchhoffa

Na ostatnim wykładzie pojawiły się rozwiązania równania falowego dla struny nieskończonej i półnieskończonej. Analizując rozwiązania staramy się pamiętać, że chcemy zapytać o możliwość nadawania morsem, czyli o to jak sygnał wysłany ma się do sygnału odebranego. Dla struny półnieskończonej rozwiązanie wygląda tak

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} f(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(\xi) d\xi & x - ct < 0 \\ \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi & x - ct > 0 \end{cases}.$$

A równanie było takie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x > 0.$$

Z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x) \\ u_{,t}(0, x) &= g(x) \\ u(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Chcemy teraz rozwiązać problem trójwymiarowy, tzn.

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2 \Delta u \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_{,t}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Przykładami mogą być balon nakłuty szpilką, zderzenie dwóch samochodów, zapalenie żarówki itp. Chcemy rozwiązanie znaleźć używając metody dla struny półnieskończonej. Żeby skorzystać z rozwiązania dla struny półnieskończonej musimy przekształcić równanie tak, aby pojawił się problem falowy w jednej zmiennej. W tym celu wybierzemy punkt $x \in \mathbb{R}^3$ i sferę o promieniu r i środku w x . Wprowadzimy teraz nową funkcję

$$\bar{u}(x, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} u(x + x', t) ds'.$$

$\bar{u}(x, r, t)$ jest wartością średnią funkcji u , będącej rozwiązaniem (zakładamy, że takowe istnieje) równania $u_{,tt} = c^2 \Delta u$. Zauważmy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(x, r, t) = u(x, t) \quad (\text{zakładamy, że } u(x, t) \text{ - ciągła}).$$

Po co takie dziwne obiekty? Bo nie mamy separacji zmiennych.

Stwierdzenie 5. (Lemat): Warunki

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2 \Delta u \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_{,t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

sa równoważne warunkowi na $\bar{u}(x, r, t)$:

$$\bar{u}_{,tt}(x, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \bar{u}(x, r, t) + 2c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}(x, r, t) \quad r \geq 0 \quad (10.1)$$

(dla \mathbb{R}^n : $\bar{u}_{,tt}(x, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \bar{u}(x, r, t) + c^2 \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}(x, r, t)$) + warunki początkowe.

Zauważmy, że zmieniła się zmienna, po której różniczkujemy. Równanie ?? nie jest równaniem falowym dla jednej zmiennej. Zanim udowodnimy ??, zobaczymy, co da się z nim zrobić.

Co mamy?

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2 \Delta u \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_{,t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

i warunki równoważne

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} u(x+x', t) d\bar{s}' \\ \bar{u}_{,tt} &= c^2 \bar{u}_{,rr} + 2c^2 \frac{1}{r} \bar{u}_{,r}. \end{aligned}$$

Wprowadzamy $v(x, r, t) = r\bar{u}(x, r, t)$. Czyli mamy coś takiego

$$\begin{aligned} v(x, r, 0) &= r\bar{u}(x, r, 0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} f(x+x') ds'}_{\bar{f}(x, r)} \\ v_{,t}(x, r, 0) &= r\bar{u}_{,t}(x, r, 0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} g(x+x') ds'}_{\bar{g}(x, r)}. \end{aligned}$$

No i dodatkowo $v(x, 0, t) = 0$, dla $t \geq 0$.

Powyższe warunki pasowałyby dla struny półnieskończonej, jeżeli pokazalibyśmy, że

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r, t), \quad r > 0,$$

to mając rozwiązanie dla v z problemu 1-D przeszlibyśmy do $\bar{u}(x, r, t)$, bo

$$\bar{u}(x, r, t) = \frac{1}{r} v(x, r, t),$$

a potem z r do zera.

Ale!

$$\begin{aligned} v_{,tt} &= r \bar{u}_{,tt} = r \left(c^2 \bar{u}_{,rr} + 2c^2 \frac{1}{r} \bar{u}_{,r} \right) = r c^2 \bar{u}_{,rr} + 2c^2 \bar{u}_{,r} = \\ &= c^2 (r \bar{u})_{,rr} = c^2 v_{,rr} = \\ &= c^2 (r \bar{u})_{,rr} = c^2 v_{,rr}. \end{aligned}$$

Wniosek: \bar{v} spełnia 1-D równanie falowe w r !

Dowód. (lematu)

Scałkujemy stronami równanie falowe $u_{,tt} = c^2 \Delta u$:

$$\begin{aligned} \int_{K(x,r)} u_{,tt}(x, t) dV &= c^2 \int_{K(x,r)} \Delta u dV = c^2 \int_{K(x,r)} \nabla(\nabla u) dV = \\ &= c^2 \int_{\partial K(x,r)} \nabla u \cdot \bar{n} ds = c^2 \int_{\partial K(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int_{K(x,r)} u_{,tt}(x, t) dV = c^2 \int_{\partial K(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds.$$

Przejdźmy sobie do współrzędnych kulistych

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \cos \theta' \sin \varphi' \\ r' \cos \theta' \cos \varphi' \\ r' \sin \theta' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{K(x,r)} u_{,tt}(x,t)dV &\rightarrow \int_{|x'|\leq r} u_{,tt}(x+x',t)dV' = \\
&= \int_0^r dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' u_{,tt}(x+x'(r',\theta',\varphi'),t) = \\
&= \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r} u(x+x'(r,\theta',\varphi'),t),
\end{aligned}$$

bo

$$\int_{|x'|\leq r} u_{,tt}(x+x',t)dV' = c^2 \int_{|x'|=r} \frac{\partial u}{\partial n} ds'.$$

Pamiętamy, że $ds' = r^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. Dalej mamy

$$\begin{aligned}
&\int_0^r dr' r'^2 \int u_{,tt}(x+x'(r',\theta',\varphi')) \sin\theta' d\varphi' d\theta' = \\
&= r^2 c^2 \int \frac{\partial u}{\partial r}(x+x'(r,\theta',\varphi')) \sin\theta' d\varphi' d\theta'.
\end{aligned}$$

Jak zróżniczkujemy stronami po r , to dostaniemy

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{|x'|=r} u(x+x',t) ds' = 2c^2 c \frac{\partial}{\partial r} \int_{|x'|=4} u(x+x',t) ds + c^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{|x'|=r} u(x+x',t) ds.$$

Ale

$$\bar{u}(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} u(x+x',t) ds',$$

więc po podzieleniu przez $4\pi r^2$,

$$r^2 \bar{u}_{,tt}(x,r,t) = 2c^2 r \bar{u}(x,r,t) + c^2 \bar{u}_{,rr}(x,r,t).$$

□

Udało nam się udowodnić lemat, wiemy już, że $v(x,r,t)$ spełnia równanie falowe dla struny półnieskończonej i że mając $v(x,r,t)$ możemy odzyskać $u(x,t)$ poprzez przejście

$$u(x,t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x,r,t)}{r},$$

gdzie

$$v(x, r, t) = \frac{1}{2} [v(x, r + ct, 0) - v(x, ct - r, 0)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} v_{,t}(x, s, 0) ds.$$

(dla $ct - r > 0$). Zatem

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(x, r, t)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(x, r, t) - v(x, 0, t)}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=0}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} v_{,t}(x, s, 0) ds \right) \Big|_{r=0} &= \frac{1}{2c} (v_{,t}(x, ct + r, 0) + v_{,t}(x, ct - r, 0)) \Big|_{r=0} = \\ &= \frac{1}{c} r \bar{g}(x, r) \Big|_{r=ct}. \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} r \bar{g}(x, r) \Big|_{r=ct} &= \frac{1}{c} \frac{1}{4\pi r^2} r \int_{|x'|=r} g(x + x') ds' \Big|_{r=ct} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{ct}{4\pi(ct)^2} \int_{|x'|=ct} g(x + x') ds = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x'|=ct} g(x + x') ds. \end{aligned}$$

To jeszcze załatwimy drugą część równania

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} (v(x, r + ct, 0) - v(x, ct - r, 0)) \Big|_{r=0} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x, r + ct, 0) - v(x, ct, 0)}{r} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x, ct + (-r), 0) - v(x, ct, 0)}{-r} = \\ &= 2 \frac{\partial v(x, r, 0)}{\partial r} \Big|_{r=ct} = 2 \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{f}(x, r)) \Big|_{r=ct} = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{|x'|=r} f(x + x') ds \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \right) \Big|_{r=ct} = \frac{2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int_{|x'|=r} f(x + x') ds' \right) \Big|_{r=ct}. \end{aligned}$$

Chcielibyśmy ostatnie wyrażenie zamienić na różniczkowane po t :

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{|x'|=r} f(x + x') ds \Big|_{r=ct} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x'|=ct} f(x + x') ds.$$

No i

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right|_{r=ct} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \right).$$

Dostaliśmy nareszcie wzór Kirchoffa!

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{\partial K(x, ct)} f(x) ds \right) \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K(x, ct)} g(s) ds$$

dla $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ i $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

11. Wykład Czy z Kirchoffa w 3D można wyprowadzić 2D i 1D? Co to znaczy nadawanie morsem?

Uzupełnienie:

Na ostatnim wykładzie wprowadziliśmy wielkość

$$\bar{u}(x, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x'|=r} u(x + x', t) ds',$$

która spełniała równanie

$$\bar{u}_{,tt}(x, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \bar{u}(x, r, t) + 2c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}(x, r, t) \quad (11.1)$$

Podczas dowodu doszliśmy (dzięki tożsamości Greena) do zależności:

$$\int_0^r (r')^2 dr' \int_{\text{kąty}} u_{,tt} = r^2 c^2 \int_{\text{kąty}} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (11.2)$$

teraz różniczkujemy po r

$$r^2 \int_{\text{kąty}} u_{,tt} = 2rc^2 \int_{\text{kąty}} u_{,r} + r^2 c^2 \int_{\text{kąty}} u_{,rr} \quad (11.3)$$

Pytanie 12. jak ze wzoru ?? przejść do wzoru ???

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int d\theta' \sin \theta' \int d\varphi u(r_0 + r, \theta_0 + \theta', \varphi_0 + \varphi') r^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\theta' \sin \theta' \int d\varphi u(r_0 + r, \theta_0 + \theta', \varphi_0 + \varphi') = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int_{\text{kąty}} u(r_0 + r, \dots). \end{aligned}$$

Popatrzmy na wzór ?. Jeżeli wyciągniemy $\frac{\partial}{\partial r}$ przed całkę, to:

$$\int_0^r (r')^2 dr' \int_{\text{kąty}, \partial K(0,1)} u_{,tt} = r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\text{kąty}} u.$$

$$\int_0^r (r')^2 dr' \bar{u}(r', t, x) = r^2 c^2 \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}(r, t, x).$$

To teraz zróżniczkować po r i już

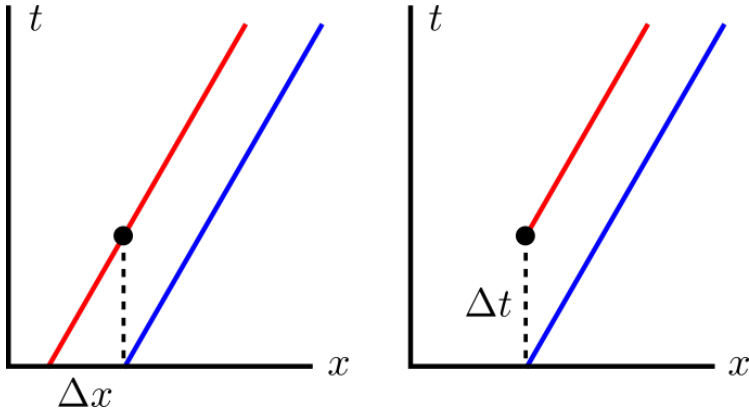
$$r^2 \bar{u}(r, x, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 c^2 \bar{u}_{,r}).$$

Zasada Huygensa

Jak przełożyć na język matematyki możliwość nadawania morsem? Co to znaczy, że ktoś uderzył w stół? Widzimy, że z punktu widzenia (słyszenia) odbiorcy to jest tak, jakby warunki początkowe zmieniały się w czasie. Jak przełożyć taki problem na język, który poznaliśmy? My umiemy tak:

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_{,t}(x, 0) = g(x).$$

Czyli zamiast jednego krasnala z instrukcją (trzymaj naciśnięte 5 sekund), usta-



Rysunek 11.1: Zauważmy, że normalnie, to oba rysunki dają ten sam efekt

wiamy w rzędzie ileś krasnali (ostatni będzie oddalony o dajmy na to $5 \times 3 \times 10^8$ m) i każemy błysnąć ultrakrótko, a te wszystkie błyski złożą się w naszym oku w błysk pięciosekundowy.

Pytanie 13. *To kiedy w końcu można nadawać morsem?*

Kiedy warunek brzegowy zlokalizowany przestrzennie da się zlokalizować czasowo, w tym sensie, że dla nas później go nie ma. Wyobraźmy sobie sytuację,

w której uderzenie w stół dźwięczy cały czas w powietrzu, a błysk światła nie zanika (gdzieś obok jest pytanie dlaczego niebo w nocy jest czarne). Czyli przeszłość się ciągnie jak adres e-mailowy założony przez 12-latkę. Koszmar, prawda?

Twierdzenie 8. (*Obserwacja - Zasada Huygensa*)

Niech f i g - funkcje o nośniku zwartym.

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) \neq 0\}$$

$$\text{supp } g = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x) \neq 0\}$$

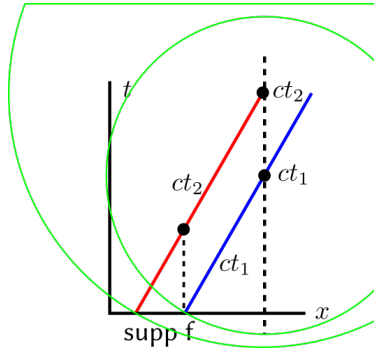
i niech $s = \text{supp } f \cup \text{supp } g$. Wówczas $u(x, t) = 0 \quad \forall_{t \in [t_1(x), t_2(x)]}$, gdzie

$$t_1(x) = \inf_t \{t > 0, s^2(x, ct) \cap s \neq \emptyset\}$$

$$t_2(x) = \inf_r \{t > 0, s^2(x, ct) \cap s \neq \emptyset\}.$$

(Brzeg sfery czterowymiarowej jest trójwymiarowy).

Uwaga: w.w. warunek działa tylko wtedy, gdy rozwiązanie spełnia zasadę Huygensa.



Rysunek 11.2: zasada Huygensa

Przykład 12. Popatrzmy na problem 3-D:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{\partial K(x, ct)} f(s) ds \right) \right] + \frac{1}{4\pi^2 c^2 t} \int_{\partial K(x, ct)} g(s) ds.$$

Widzimy, że jeżeli $s^2(x, ct) \wedge \text{supp } f = \phi$, to całka da nam zero.

Przykład 13. Problem 1-D:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi.$$

Chcemy rozwiązać następujący problem

$$\begin{aligned} u_{,tt} &= c^2 \Delta u, & u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u_{,t}(x, y, 0) &= g(x, y). \end{aligned}$$

Czyli problem dwuwymiarowy. Zauważmy, że fajne rozwiązanie moglibyśmy dostać z Kirchhoffa, wkładając do niego warunki początkowe zależne od z :

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|x'|=ct} f(x + x') ds' \right].$$

Czyli chodzi o wycałkowanie funkcji

$$\int_{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct)^2} f(x + x', y + y') ds'.$$

Pamiętamy, że z macierzy Grama mieliśmy

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Skoro $(z')^2 = (ct)^2 - (x')^2 - (y')^2$, to

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{-2x'}{2\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{-2y'}{2\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= 1 + (z_{,x})^2 + (z_{,y})^2 = \\ &= \frac{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2 + (x')^2 + (y')^2}{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2} = \frac{(ct)^2}{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}. \end{aligned}$$

Czyli teraz jak podstawimy to dostaniemy (pamiętamy, że jak mapujemy sferę na płaszczyznę, to bierzemy płat z góry i płat z dołu)

$$u(x, y, t) = \frac{2 \cdot 1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{(x')^2 + (y')^2 \leq (ct)^2} \frac{f(x + x', y + y') dx' dy'(ct)}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}} \right) + \\ + \frac{2 \cdot 1}{4\pi c^2} \frac{1}{t} (ct) \int_{(x')^2 + (y')^2 \leq (ct)^2} \frac{g(x + x', y + y') dx' dy'}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}.$$

Pytanie 14. *Co z zasadą Huygensa?*

Zauważmy, że wartość rozwiązania w punkcie (x, y, t) zależy od całki po wnętrzu kuli $(x')^2 + (y')^2 \leq (ct)^2$, czyli sygnał nigdy nie zniknie! (oczywiście, kiedy mówimy o falach biegnących).

Pytanie 15. *Czy tą samą metodą możemy przejść z 2-D do 1-D?*

Powinniśmy założyć, że $f(x, y)$ zależy tylko od x i włożyć to do wzoru 2-D:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(x')^2 + (y')^2 \leq (ct)^2} \frac{f(x + x') dx' dy'}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}} = \\ = \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-ct}^{ct} dx' f(x + x') \cdot 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2}} \frac{dy'}{\sqrt{(ct)^2 - (x')^2 - (y')^2}}.$$

Pamiętamy, że mamy wzorek

$$\int_0^r \frac{dy'}{\sqrt{r'^2 - (y')^2}} = \arcsin \left(\frac{y'}{r'} \right) \Big|_0^r = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Możemy bez problemu przejść sobie do starego rozwiązania

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-ct}^{ct} dx' f(x + x') + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(x + x') dx = \\ = \left| \frac{x + x'}{dx'} = ds \right| = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-ct}^{x+ct} ds f(s) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \\ = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Wartości własne vs. geometria - do zastanowienia

Przykład 14. Struna zamocowana na obu końcach: $u(0) = u(L) = 0$.

Wartości własne dla operatora S - L : $-\frac{d^2}{dx^2}\psi = \lambda\psi$ i $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Wiemy, że $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, ale $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{n} \rightarrow \frac{\pi}{L}$

Czy oznacza to, że w asymptotyce wartości własnych mieszkają własności geometryczne układu?

Przykład 15. Prostokątna membrana: $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u$.

$$u(x, y)|_{\partial D} = 0, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

Wartości własne: $\lambda_{m,n} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$, tam wychodziło $u_{mn}(x, y) = \sin(\cdot) \cos(\cdot)$. Niech $N(\xi)$ - liczba wartości własnych $\leq \xi$, czyli takich, że

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \leq \xi.$$

Czyli

$$\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\xi}{\pi^2} \left(\frac{n}{\frac{\sqrt{\xi}a}{\pi}} \right)^2 + \left(\frac{m}{\frac{\sqrt{\xi}b}{\pi}} \right)^2 = 1.$$

Widać, że liczba wartości własnych jest proporcjonalna do pola powierzchni

$$N(\xi) \leq \pi \cdot \frac{\sqrt{\xi}a}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\xi}b}{\pi} = \xi \frac{ab}{\pi}.$$

Co daje nam

$$\frac{N(\xi)}{\xi} \sim \frac{ab}{\pi}.$$

Mamy informację o polu powierzchni. Co dalej?

12. Wykład Całki Duhamela, jednoznaczność równania falowego

Na ostatnim wykładzie przeszliśmy od rozwiązywania 3-D do 2-D a potem do 1-D dla równania falowego. Zobaczyliśmy też, że problem nadawania morsem, ewentualnie uderzania w stół można zasymulować przy pomocy odpowiednio dobranych warunków początkowych. Co więcej, możliwość nadawania morsem zależy od liczby wymiarów, przy takim podejściu (dla odpowiednio przygotowanej funkcji f da się też uzyskać prędkość nadświatlną - tak robiono przygotowując ośrodek przed wpuszczeniem do niego impulsu).

Całki Duhamela

Chcemy rozwiązać równanie falowe z siłą wymuszającą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= h(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

gdzie $h, g \in C^\infty$, $f \in C^3$ (chyba, że przejdziemy do słabych rozwiązań)

Przykład 16. *równania maxwella to na przykład coś co wygląda tak:*

$$\begin{aligned}\nabla \times B &= j + \frac{\partial E}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad E = -\nabla \varphi.\end{aligned}$$

Ale można też tak (fajniej)

$$d \star F = j.$$

Twierdzenie 9. *Chcemy rozłożyć problem na dwie części, jednorodną i niejednorodną. Rozwiązania jednorodne w 3-D przecież znamy a uzasadnienie sposobu (arbitralnego) wydzielenia części jednorodnej i niejednorodnej nie będzie potrzebne, jeżeli pojawi się twierdzenie o jednoznaczności. Założmy*

zatem, że $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$, gdzie

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - c^2 \Delta w = 0 \\ w(x, 0) = f(x) \\ w_{,t}(x, 0) = g(x) \end{cases}, \text{ a } \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v - c^2 \Delta v = h(x, t) \\ v(x, 0) = 0 \\ v_{,t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

Dowód. Suma rozwiązań odtworzy nam szukane $u(x, t)$.

Rozwiązanie na $w(x, t)$ znamy z poprzedniego wykładu, wystarczy teraz przedstawić nasz warunek tak, by uzyskać równanie jednorodne, a $h(x, t)$ wrzucić do warunków brzegowych, bo możemy wtedy ponownie skorzystać z wcześniejszych rozwiązań.

Wyobraźmy sobie, że istnieje funkcja $\varphi(x, t, a)$, na $x \in \mathbb{R}^3, t > 0, a > 0$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t, a) - c^2 \Delta \varphi(x, t, a) = 0 \\ \varphi(x, 0, a) = 0 \\ \varphi_{,t}(x, 0, a) = h(x, a) \end{cases}.$$

Zauważmy, że $\varphi(x, t, a)$ zbudujemy wstawiając $f = 0$ i $g(x) = h(x, a)$ do wzoru Kirchhoffa. Mając $\varphi(x, t, a)$ pokażemy, że funkcja

$$v(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t - a, a) da$$

jest rozwiązaniem naszego problemu, czyli problem sprowadzi się do wycalkowania wzoru Kirchhoffa obecnego w $\varphi(x, t - a, a)$ po a .

Przykład 17. Dla równań Maxwella

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \quad \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j.$$

(dygresja - mamy taki fajny operator $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, ale nikomu nie mówcie - to tajemnica).

Chcemy pokazać, że

$$v(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t - a, a) da$$

spełnia równanie

$$\begin{cases} v_{,tt} - c^2 \Delta v = h(x, t) \\ v(x, 0) = 0 \\ v_{,t}(x, 0) = 0 \end{cases}, \text{ gdy } \begin{cases} \varphi_{,tt} - c^2 \Delta \varphi = 0 & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ \varphi(x, 0, a) = 0 & a > 0 \\ \varphi_{,t}(x, 0, a) = h(x, a) & (\heartsuit) \end{cases}.$$

Ale

$$v_{,t}(x, t) = \underbrace{\varphi(x, t - t, t)}_{\varphi(x, 0, a)} + \int_0^t \varphi_{,t}(x, t - a, a) da.$$

Więc

$$v_{,tt}(x, t) = \underbrace{\varphi_{,t}(x, t - t, t)}_{(\heartsuit)} + \int_0^t \varphi_{,tt}(x, t - a, a) da.$$

A my wiemy, że

$$c^2 \Delta v = c^2 \int_0^t \Delta \varphi(x, t - a, a) da,$$

no to w takim razie

$$v_{,tt} - c^2 \Delta v = \underbrace{h(x, t)}_{\varphi_{,t}(x, 0, t)} + \int_0^t (\varphi_{,tt} - \Delta \varphi) da = h(x, t).$$

□

Wiemy ze wzoru Kirchoffa, że

$$\underbrace{\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 c^2 t} \int_{|x'|=ct} g(x + x') ds'}_{\text{całka po sferze w 3-D o promieniu } ct \text{ i środku w } x \in \mathbb{R}^3},$$

więc

$$\varphi(x, t - a, a) = \frac{1}{4\pi^2 c^2 (t - a)} \int_{|x'|=c(t-a)} g(x + x') ds'.$$

Można zrobić podstawienie $x + x' = [x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z] = [\xi_0, \xi_1, \xi_2] = \xi$. Wtedy mamy całkę po kuli w środku (x_0, y_0, z_0) . Więc wyjdzie

$$\varphi(x, t - a, a) = \frac{1}{4\pi^2 c^2 (t - a)} \int_{|\xi - x|=c(t-a)} g(\xi) ds_\xi.$$

Zatem

$$v(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t - a, a) da,$$

no a

$$\varphi(x, t - a, a) = \frac{1}{4\pi^2 c^2 (t - a)} \int_{|\xi - x| = c(t - a)} g(\xi) ds_\xi.$$

Więc

$$v(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_0^t \frac{da}{t - a} \int_{|\xi - x| = c(t - a)} h(\xi, a) ds_\xi.$$

Pytanie 16. Czy ten wynik ($v(x, t)$) da się przedstawić prościej? Czasami zamiast pisać $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$ można napisać po prostu $\iint_{\text{trójkąt ograniczony } y = 1 - x} dx dy$

Dla każdego ustalonego a całkujemy po sferze o promieniu $c(t - a)$. Czyli mamy kolekcję sfer o promieniach od 0 do ct . Chcemy sprawdzić ile to będzie w sensie czasoprzestrzennym i w sensie przestrzennym.

Zamieńmy sobie zmienne. Niech $|\xi - x| = r$, czyli $c(t - a) = r \implies a = t - \frac{r}{c}$ i $da = -\frac{1}{c} dr$. Wtedy

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_{ct}^0 \frac{-dr}{c} \int_{|\xi - x| = r} \frac{h(\xi, t - \frac{r}{c})}{r} c ds_\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_0^{ct} dr \int_{|\xi - x| = r} ds_\xi \frac{h(\xi, t - \frac{r}{c})}{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c^2} \iiint_{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \leq (ct)^2} \frac{h(x', y', z', t - \frac{|x-x'|}{c})}{|x - x'|} d^3 x'. \end{aligned}$$

Co się właśnie stało? W przeciwieństwie do równania przewodnictwa, dostaliśmy jawną zależność od prędkości rozchodzenia się sygnału. Układ związany z niejednorodnością w punkcie (x, t) zależy od zdarzeń, które miały miejsce odpowiednio wcześniej.

Przykład 18. W przypadku elektrodynamiki

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{A} = 4\pi c \mathbf{j} & \text{gdzie } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 4\pi c \rho & \text{gdzie } \varepsilon = -\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases},$$

gdzie \mathbf{j} to na przykład cząstka naładowana poruszająca się po jakiejś trajektorii i wtedy na rozwiązanie, które uzyskaliśmy mówimy potencjały Lenarda-Wiecherta. Może zdarzyć się też tak (np. w przypadku fal dźwiękowych), że prędkość ośrodka jest większa, niż prędkość sygnału w ośrodku. Mamy wtedy fale uderzeniowe, efekt Czerenkowa i inne fajne ciekawostki.

Pytanie 17. *Co z jednoznacznościami?*

Pamiętamy, że badając operator Rayleigh'a mogliśmy wyciągnąć dużo wniosków (własności λ_n) bez konieczności rozwiązywania równań. Zobaczmy co można zrobić z równaniem falowym.

Stwierdzenie 6. *(lemat)*

Niech $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{cases} u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_{,t}(x, 0) = g(x) \end{cases},$$

gdzie f i g - takie, że $u_{,t}(x, t)$ i $u_{,x}(x, t)$ są klasy $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Wówczas wielkość

$$\forall_{t \geq 0} \quad E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} (u_{,t})^2 + \frac{c^2}{2} (u_{,x})^2 \right) dx$$

jest skończona i stała.

Uwaga: $E(t)$ wygląda jak energia całkowita układu, dla nośników zwartych f i g całka może być liczona na mniejszym obszarze.

Dowód. Wiemy, że

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u.$$

Przemnożymy przez $u_{,t}$ i pokażemy po x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{,t} u_{,tt} dx.$$

Uwaga, sztuczka - $\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\zeta(x, t))^2 dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \zeta(x, t) \cdot \zeta_t(x, t) dx$.

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u_{,t})^2 dx = c^2 u_{,t} u_{,x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{,tx} u_{,x} dx.$$

wycałkowane znika, bo nośnik zwarty, czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_{,t})^2 dx = -c^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{,x})^2 dx.$$

Wszystko na jedną stronę

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_t)^2 + c^2 (u_x)^2 dx \right] = 0 \implies E(t) = \text{const.}$$

Zatem $E(t) = E(0)$, a $u_t(x, 0) = g(x)$ i $u(x, 0) = f(x)$, więc znamy $E(t)$. \square

Stwierdzenie 7. (lemat)

Niech

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} + h(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

wówczas równanie posiada tylko jedno rozwiązanie.

Dowód. Niech $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ - rozwiązania równania. Niech $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Oznacza to, że $u(x, t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} u_{,tt} = c^2 u_{,xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}.$$

A wiemy, że

$$\forall_{t \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (u_t)^2 + \frac{c^2}{2} (u_x)^2 dx = E(t) = E(0) = 0,$$

czyli $u_t = 0$ i $u_x = 0$, więc u jest stałe ze względu na t i x , czyli $u(x, t) = 0$ (bo warunki początkowe). W związku z tym,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

\square

13. Wykład Jednoznaczność równania przewodnictwa

Na ostatnim wykładzie udało nam się pokazać w jaki sposób można pokazać jednoznaczność dla równania falowego niejednorodnego (co prawda w 1-D i z dodatkowymi założeniami, ale jednak). Przy okazji wprowadziliśmy wielkość, która może stanowić punkt wyjścia dla rozważań o tym, czym może być i jak zdefiniować energię dla pola (czy fali $u(x, t)$) czyli obiektu, który nie jest tak lokalizowalny jak np. kamień. Dzisiaj zobaczymy co można powiedzieć o jednoznaczności dla równania przewodnictwa (dyfuzji).

Przypomnijmy sobie najpierw jak wyglądało rozwiązanie równania dyfuzji:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & u : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Rozwiązanie (w 1-D) to

$$u(x, t) = \phi \star f = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-s, t) f(s) ds, \quad \phi(x, t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Czyli

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{(x-s)^2}{4kt}} f(s) ds & t > 0 \\ f(x) & t = 0 \end{cases}.$$

A dla 3-D,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\mathbf{x}-\mathbf{s}}{4kt}} f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Funkcja f musiała dać się transfourierować, pamiętamy, że zachowanie rozwiązania jest inne niż równania falowego - wglądanie + natychmiastowość.

Zauważmy, że jeżeli $f(x)$ wyglądałoby jak pojedynczy impuls, to w przeciwieństwie do równania falowego w 3-D, gdzie impuls zacząłby przemieszczać się niezaburzony (na pewno? a co z wysokością?), to w przypadku równania przewodnictwa, sygnał błyskawicznie się wygładza. Co więcej, rozchodzi się natychmiastowo. Weźmy $\text{supp } f = 1 \text{ m}$, $t = \frac{1}{3 \times 10^8}$, $x = 5 \times 10^{10}$, wtedy $u(x, t) \neq 0$. Nasze doświadczenia z prętem metalowym w ognisku wskazują na konieczność poprawy modelu (dla chętnych).

Twierdzenie 10. *Przypadek skończony - jednoznaczność*

Dowód. Wyobraźmy sobie równanie przewodnictwa z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} u_{,t} - ku_{,xx} = f(x) & 0 \leq x \leq L, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u(0, t) = g(t) & u(L, t) = h(t) \end{cases}.$$

Założmy, że istnieją u_1 i u_2 spełniające ww. równanie. Wówczas $u = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ spełnia równanie

$$\begin{cases} u_{,t} - u_{,xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}.$$

Zobaczmy, co można uzyskać z metod energetycznych:

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = ku \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t))^2 dx = k \int_0^L uu_{,xx} dx = kuu_{,x} \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_0^L (u(x, t))^2 dx \right) = - \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \text{coś co znika na brzegach}.$$

Widać, że $E'(t) < 0$, czyli $E(t)$ - malejące, więc:

$$0 \leq \int_0^L (u(x, t))^2 dx \leq \int_0^L (u(x, 0))^2 dx.$$

Ale $u(x, 0)$ jako różnica dwóch rozwiązań z tym samym warunkiem dla $t = 0$ też wynosi zero i mamy jednoznaczność. \square

Jak widać, dużo można wyciągnąć z samej struktury równań, chcemy teraz odpowiedzieć na następne pytanie: mamy kawałek (prostokątny) blachy i go jakoś podgrzewamy z jednego końca. Pytanie: czy gdzieś w środku (wewnątrz) blachy temperatura może wzrosnąć do wyższej niż zadana na brzegu?

Przy fali akustycznej tak się zdarza, mamy przecież interferencję, możemy skrzyżować kilka wiązek itp. Czy jest to możliwe dla równania przewodnictwa?

Intuicja: weźmy równanie $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$ w 1-D. Co możemy powiedzieć o funkcji u ? (na chwilę założymy, że nie umiemy znaleźć jawnego rozwiązania). Na przykład to, że funkcja $u(x, t)$ nie będzie miała minimum lub maksimum, bo w dowolnym x i t ma zawsze punkt przegięcia (a co z wyższymi pochodnymi?)

Jeżeli teraz zapiszemy inne znane równanie $u_{,tt} = -\omega^2 u$ dla $u \in \mathbb{R}$, to tam gdzie $u = 0$, funkcja będzie miała punkt przegięcia, dalej dla u - ujemnego, u'' będzie dodatnie i odwrotnie. Czyli jak będzie wyglądał wykres? (no prawie sinus, tylko odcinków między zerami a maksami nie ma).

Weźmy teraz funkcję dwóch zmiennych. Dla maksimum u'' powinna być określona ujemnie

$$\left| \begin{bmatrix} u_{,tt} & u_{,tx} \\ u_{,xt} & u_{,xx} \end{bmatrix} \right| = u_{,tt}u_{,xx} - (u_{,tx})^2 > 0.$$

Jeżeli weźmiemy $u_{,t} = ku_{,xx}$, to jedyna szansa na maksimum lokalne, to $u_{,xx} < 0$, czyli $u_{,t} < 0$, czyli temperatura maleje. Ewolucja w czasie to powolne chłodzenie systemu, jeżeli w chwili $t = 0$ zadaliśmy temperaturę początkową. Zatem gdzie może być maksimum? Chciałoby się powiedzieć, że na brzegu, co może oznaczać, że we wnętrzu blachy maksimum lokalnego nie będzie. Zauważmy, że mielibyśmy wtedy inny argument za jednoznacznością rozwiązań, bo funkcja

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \text{ spełnia warunek } u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Jeżeli wewnątrz blachy nie ma maksimum a na brzegu $u = 0$, to znaczy, że wszędzie $u = 0$.

A jeszcze inaczej?

A co się dzieje na drugim końcu blachy weźmy w chwili $t = T$?

$$\forall_{h>0} u(x, T) > u(x, T - h), (\text{maksimum}).$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_T = \frac{v(x, T) - v(x, T - h)}{h} \geq 0 \implies u_{,xx} > 0.$$

Ale jeżeli $u_{,t} = ku_{,xx}$, to wtedy $u_{,tt}u_{,xx} - (u_{,tx})^2 < 0$ i sprzeczność.

Twierdzenie 11. (Zasada maksimum)

Niech

$$\mathcal{M} = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Niech

$$u(x, t) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} - \text{rozwiązanie równania przewodnictwa.}$$

Wówczas największą wartość $u(x, t)$ osiągnie w chwili $t = 0$ lub dla $x = 0$ lub $x = L$.

Uwaga: Skoro $u \in C^2(\mathcal{M})$ czyli na zbiorze zwartym, to wiadomo, że maksimum będzie, pytanie tylko gdzie?

Dowód. Oznaczmy przez

$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathcal{M}, t = 0 \vee x = 0 \vee x = L\},$$

czyli

$$\partial\mathcal{M} = \Gamma \cup \{(x, t) \in \mathcal{M}, t = T\}.$$

Wtedy

$$\max_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \mathcal{M}} u(x, t).$$

(jest to słaba zasada maksimum), co więcej, można też pokazać, że

$$\max_{(x,t) \in \mathcal{M}} > \max_{(x,t) \in \mathcal{M} \setminus \Gamma}.$$

Niech $(x_0, t_0) \in \mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$, czyli punkt wewnętrzny. Jeżeli mamy mieć w tym punkcie maksimum, to $u_{,t}(x_0, t_0) = 0$ i $u_{,x}(x_0, t_0) = 0$. Jeżeli $u_{,xx} < 0$, to sprawa jest załatwiona, bo wtedy

$$u_{,t}(x_0, t_0) - ku_{,xx}(x_0, t_0) = -ku_{,xx}(t_0, x_0) > 0$$

i równanie przewodnictwa nie jest spełnione (podobnie dla $u_{,xx} > 0$). A co się dzieje, gdy $u_{,xx}(t_0, x_0) = 0$?

Niech $A = \max_{\mathcal{M}} u(x, T)$. Chcemy pokazać, że

$$\max_{\mathcal{M}} u(x, t) \leq A.$$

Niech $v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2$ dla jakiegoś $\varepsilon > 0$ (dla 3-D byśmy mieli $v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon |x|^2$). Wówczas

$$v_{,t} - v_{,xx} = u_{,t} - ku_{,xx} - 2k\varepsilon < 0 \tag{13.1}$$

Założmy, że $v(x, t)$ ma maksimum lokalne na $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, w punkcie (x_0, t_0) , $t_0 < T$. Oznacza to, że $v_{,t} = 0$, $v_{,x} = 0$, $v_{,xx} \leq 0$ i sprzeczność, bo $v_{,t} - kv_{,xx} < 0$ (??) a $v_{,t} = 0$, czyli $v_{,xx} > 0$.

Założmy, że v ma maksimum dla $t = T$, w punkcie $(x_1, T) \in \partial\mathcal{M}$. Wtedy $v_{,x} = 0$, $v_{,xx} \leq 0$, $v_{,t} \geq 0$, bo w punkcie siodłowym nie ma maksimum. Więc

$$v_{,t} - k\Delta v \geq 0.$$

I sprzeczność z (??).

Wniosek: maksimum istnieje jedynie na zbiorze Γ , czyli

$$\begin{aligned} u(x, t) + \varepsilon|x|^2 &\leq \max_{(x, t) \in \Gamma} (u(x, t) + \varepsilon(x)^2) \leq \\ &\leq \max_{(x, t) \in \Gamma} u + \varepsilon c. \end{aligned}$$

gdzie $c = \max_{x \in \Gamma} x^2$ - ważne, że T jest skończone.

Zatem

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq A + \varepsilon(c - x^2) \\ u(x, t) &\leq A + \varepsilon C \end{aligned}$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$, czyli

$$\forall_{(x, t) \in \Gamma} u(x, t) \leq M.$$

Mocna zasada mówi, że maksimum jest osiągnięte na brzegach (jedynie) albo, że u jest stałe na całym \mathcal{M} . \square

Możemy pytać teraz o stabilność rozwiązań - widzimy, że mając dwa rozwiązania, dla których warunki brzegowe nie różnią się np. o co najmniej 7, zasada maksimum automatycznie mówi nam, że rozwiązania we wnętrzu nie będą różniły się bardziej.

Przykład 19. (dygresja)

Wyobraźmy sobie cząstkę (1-D), która może iść albo w lewo albo w prawo, z prawdopodobieństwami p i q . Załóżmy, że czas i przestrzeń są dyskretne. Chcemy policzyć jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka w chwili $t = N\tau$ znajduje się w położeniu $x = mL$.

Jeżeli założymy, że p i q nie zależą od czasu ani historii cząstki, to możemy zapostulować równanie stochastyczne:

$$P_{n+1}(m) = pP_n(m-1) + qP_n(m+1).$$

Jeżeli na przykład $p = q = \frac{1}{2}$, to mamy równanie

$$P_{n+1}(m) = \frac{1}{2} [P_n(m-1) + P_n(m+1)].$$

Czyli średnia arytmetyczna z otoczenia w chwili n ?

14. Wykład Przykłady (nie)fajności metody separacji zmiennych

Dzisiaj czas na przykłady. Wiemy, że rozwiązania bardzo zależą od warunków początkowych. Przypomnijmy co nazywaliśmy problemem dobrze postawionym:

- ma rozwiązania
- które są jednoznaczne
- i które w sposób ciągły zależą od warunków początkowych.

Osobne pytanie dotyczy stabilności (mówiliśmy ostatnio o zasadzie maksimum), klasie rozwiązania (ostatnio po kolokwium) itp. Większość oczekiwań ma naturę zdroworozsądkową, na zasadzie *fizyczne vs. niefizyczne*.

Przykład 20. (stabilność)

Równanie Laplace'a w 2-D

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) & k > 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że funkcja

$$u(x, y) = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \cosh(ky)$$

spełnia warunek początkowy oraz równanie, bo

$$u_{,xx} = e^{-\sqrt{k}} (-k^2 \cos(kx)) \cosh(ky), \quad u_{,yy} = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) (k^2 \cosh(ky)).$$

O co chodzi ze stabilnością? Zaczniemy zwiększać k w warunku początkowym

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x, 0) = e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \rightarrow 0,$$

czyli dla $k \rightarrow \infty$, mamy $u(x, 0) = 0$ i takiego zachowania moglibyśmy oczekiwać od rozwiązania. Ale jest problemik. Otóż

$$\left| \sup_x u(x, y) \right| = e^{-\sqrt{k}} \cosh(ky) = e^{-\sqrt{k}} \frac{e^{ky} + e^{-ky}}{2} \rightarrow \infty$$

oraz

$$u(x, y, k)|_{x, y = \text{const}} \rightarrow \infty.$$

Ale już

$$u(x, y, k) \xrightarrow{y \rightarrow 0} e^{-\sqrt{k}} \cosh(kx) \rightarrow 0.$$

No nie jest to stabilne, jeżeli warunek początkowy dąży do zera.

Przykład 21. (struna 1-D, warunki początkowe)

Rozważmy strunę

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & u(x, t) : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leq 1 \end{cases} \\ u_{,t}(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}.$$

Możemy separować zmienne

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Po podstawieniu

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda,$$

więc standardowo $X'' + \lambda X = 0$ oraz $T'' + \lambda T = 0$, ale jeżeli struna zamocowana jest na obu końcach, to

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Czyli λ nie może być ≤ 0 . Zatem $X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + D_1 \sin(\lambda x)$. Dzięki czemu otrzymujemy

$$c_1 = 0, \quad X(x) = D_1 \sin(\lambda x)$$

i $\lambda = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Zatem

$$T(t) = A_k \cos(\pi t) + B_k \sin(\pi t),$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\pi t) + B_k \sin(\pi t)) \sin(\pi x).$$

Wiemy, że $u_{,t}(x, 0) = 0$, czyli $B_k = 0$ i mamy warunek

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\pi x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leq 1 \end{cases}.$$

Pamiętamy, że policzenie A_k sprowadza się do całki

$$A_k = \frac{2}{1} \int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi k x) dx, \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq d \\ \frac{d(1-x)}{1-d} & d < x \leq 1 \end{cases}.$$

Całka da się policzyć.

$$A_k = \frac{2 \sin(k\pi d)}{\pi^2(1-d)k^2}.$$

Wynik w postaci jednej funkcji (bez przypadków) nie musi nas dziwić, bo transformata impulsu typu trójkąt też daje jedno wyrażenie. Zatem

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k\pi d) \sin(k\pi x) \cos(k\pi t)$$

i widzimy, że szereg jest zbieżny jednostajnie, więc do $\varphi(x)$ dąży.
A czy spełnia równanie falowe?

$$u_{,tt} = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi d) \sin(k\pi x) \sin(k\pi t) (k\pi)^2 \frac{(-1)}{k^2}$$

i mamy szereg rozbieżny z wyjątkiem punktów o współrzędnej całkowitej.

Widzimy więc, że nie potrzeba bardzo wyrafinowanych warunków brzegowych by równanie falowe się wysypało - gdybyśmy chcieli modelować naciągnięcie i zwolnienie struny - to jakiej funkcji byśmy użyli?

Można myśleć o tym że trzeba w jakiś sposób wygładzić dziubek funkcji. Na przykład zakładając, że

$$\varphi(x) = x(1-x).$$

Można sprawdzić w domu, czy druga pochodna rozwiązania zajmuje się lepiej (hehe). Do stabilności rozwiązań jeszcze wrócimy. Zastanówmy się teraz nad problemami odwrotnymi.

Mamy równanie różniczkowe

$$\frac{dN}{dt} = -kN(t), \quad N(0) = N_0.$$

Znając N_0 i k znamy $N(T)$. A gdybyśmy znali tylko $N(t_k) = f_k$ i szukali N_0 i k ?

Trochę analogiczny problem do odtwarzania trasy autobusu znając trajektorię kasownika.

Przykład 22. Równanie

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, \tau], \quad u(0) = u_{,t}(0) = 0.$$

Zazwyczaj znamy $q(t)$ i szukamy $u(t)$. Wyobraźmy sobie, że tym razem znamy $u(t)$ i szukamy $q(t)$. Jak stabilne jest to poszukiwanie?

Niech

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Jak daleko od $q(t)$ będzie $q_n(t)$? Jeżeli $u(t)$ będzie takie, że $u_{,tt} = q(t)$, to

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{,tt} - n \cos(nt) = \underbrace{q(t) = n \cos(nt)}_{q_n}.$$

Wtedy $\|u_n(t) - u(t)\| \rightarrow 0$, ale $\|q - q_n\| = \|n \cos(nt)\| \not\rightarrow 0$! Mamy więc niestabilność ze względu na zaburzenia dla problemu odwrotnego a trudno powiedzieć, że równanie było bardzo wyrażone.

Przykład 23. (równanie przewodnictwa, ale trzymamy końce pręta w lodzie)

$$\begin{cases} u_{,t} = u_{,xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = q(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Problem: mając wartość funkcji $u(x, t)$ dla $t = \tau$ chcemy znaleźć $q(t)$ czyli rozwiązać równanie przewodnictwa do tyłu w czasie (jaka jest temperatura wszechświata w $t = 0$? :)

Zatem niech $u(x, \tau) = f(x)$ dla $0 \leq x \leq \pi$, pytamy o model żelazka (i krasnala co je przykład do pręta).

Separacja zmiennych $u(x, t) = X(x)T(t)$, czyli

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Czyli $X'' + \lambda X = 0$ oraz $T' + \lambda T = 0$. Pręt ma końce w lodzie, więc $X(x) = \sin(nx)$ i $\lambda = n^2$. Więc

$$T(t) = A_n e^{-n^2 t},$$

ostatecznie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

gdzie A_n takie, że

- $t = 0$

$$u(x, 0) = q(x) \implies A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \sin(nx) dx \stackrel{\text{def}}{=} q_n.$$

- $t = \tau$

$$u(x, \tau) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-n^2 \tau} q_n}_{f_n} \sin(nx) dx.$$

Więc jeżeli rozwinjemy $f(x)$ w szereg fouriera

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) dx,$$

to znajdziemy $q_n = f_n e^{n^2 \tau}$, $n \in \mathbb{N}$.

Chcielibyśmy, by wynik, czyli zrekonstruowane $u(x, t)$ było jednoznaczne, czyli tak

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi} |u(x, t) - q(x)|^2 dx = 0.$$

To oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{2n^2 \tau} < \infty$ i widać, że to nie zadziała dla każdej $f \in \mathcal{L}^2(0, \pi)$.

Przykład 24. (warunki brzegowe równania falowego)

Mamy równanie falowe dla membrany zamocowanej na prostokątnym stelażu.

$$u_{,xx} - u_{,tt} = 0.$$

Dla równania Laplace'a wiemy, że $u(x, t)$ byłoby tożsamościowo równe zero (bo na brzegach ma być zero - więc jak nie szarpniemy membrany to nie ma co się ruszać).

Separacja zmiennych

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda.$$

Więc mamy dwa równania na oscylator

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + \lambda T &= 0. \end{aligned}$$

Wiemy, że $X(0) = X(\pi) = 0$, czyli po nałożeniu tych warunków na rozwiązanie ogólne dla $X(x)$

$$X(x) = D_1 \sin(\lambda x) + E_1 \cos(\lambda x),$$

otrzymujemy $E_1 = 0$ i $\lambda = n^2$. Więc

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)).$$

Ale $u(x, 0) = 0 \implies A_n = 0$ i

$$u(x, \tau) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\tau) \sin(nx) = 0 \quad \forall_{x \in [0, \pi]}.$$

Możemy zapytać o jednoznaczność wyliczenia B_n , gdy τ nieujemne, to $B_n = 0$, ale jeżeli τ jest ujemne, to mamy nieskończenie wiele rozwiązań. Jak to się ma do podziału na wielkości fizyczne i niefizyczne? Miejmy te przykłady w głowie, gdy usłyszymy, że separacja zmiennych to po prostu naturalna, bezproblemowa procedura.

15. Wykład Rozwiązywanie przez rozwijanie w szereg a później sprowadzenie na Ziemię przykładem Kowalewskiej

Na ostatnim wykładzie oglądaliśmy różne przypadki, w których maszynka równań różniczkowych nie zachowywała się tak, jakbyśmy chcieli. Widać też, że przypadki nie były dobrane pod kątem bardzo ekscentrycznych funkcji typu $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Możemy próbować zawężać dziedzinę dopuszczalnych warunków brzegowych ale kryteria "fizyczne", "niefizyczne" tym razem nam nie pomogą. Dzisiaj spróbujemy rozwiązań w postaci szeregu potęgowego. Dla oscylatora harmonicznego kiedyś nam się udało - wstawiliśmy szereg formalny, potem znaleźliśmy przepis na współczynniki i wyszedł $\sin(x)$ lub $\cos(x)$ jako rozwinięcie w szereg Taylora. Zobaczmy jak taka procedura zadziała w przypadku 2-D. Podobne podejście zastosowaliśmy w II semestrze, gdzie zamiast ogólnego przypadku, rozważaliśmy sytuację 2-D.

Wyobraźmy sobie, że szukamy funkcji $u : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, spełniającą równanie

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = -d(x, y, u, u_x, u_y).$$

Gdzie a, b, c - funkcje, klasa do ustalenia. Nasze rozwiązanie zadaje jakąś powierzchnię $z = u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ w \mathbb{R}^3 , musimy podać tylko warunek brzegowy na przykład

$$u(x, y)|_c = h(x, y)|_c,$$

gdzie c - krzywa na płaszczyźnie xy , czyli $c \subset \Omega$, a h - jakaś zadana funkcja.

W przypadku równania II rzędu samo $h(x, y)|_c$ nie wystarczy, potrzebne jeszcze będą pochodne na brzegu, najpierw jednak sparametryzujemy c na przykład tak

$$c = \{(x, y) \in \Omega, x = f(s), y = g(s), s \in I \subset \mathbb{R}\}.$$

Przy takiej parametryzacji możemy zapisać

$$h(x, y)|_c = h(s) = h(f(s), g(s))$$

i wprowadzić w \mathbb{R}^3 krzywą Γ :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = f(s), y = g(s), z = h(s), s \in I\}.$$

Plan: Wybierzemy punkt $P \in \Gamma$ i spróbujemy wokół tego punktu znaleźć wszystkie możliwe pochodne $u(x, y)$:

$$u_{,x}|_P, u_{,y}|_P, u_{,xx}|_P, \dots$$

Dzięki znajomości tych pochodnych, będziemy mogli zapisać $u(x, y)$ w postaci szeregu, czyli "wzoru Taylora" - w cudzysłowie, bo nie wiemy, czy będzie on zbieżny.

trochę o warunkach brzegowych

Nasze równanie jest drugiego stopnia więc na brzegu Γ powinniśmy kontrolować także pochodne (zamiast (x, y) może być (t, x)). Czyli

$$\begin{cases} u(f(s), g(s)) = h(s) \\ u_{,x}(f(s), g(s)) = p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) = q(s) \end{cases}.$$

Na brzegu zadajemy $h(s)$. Dlaczego nie $p(s)$ i $q(s)$? Bo krzywa $c(f(s), g(s))$ niekoniecznie musi współpracować ze współrzędnymi (x, y) .

Zauważmy, że jeżeli

$$\begin{aligned} h(s) &= u(f(s), g(s)) \\ \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial s} = p(s)f'(s) + q(s)g'(s). \end{aligned}$$

Czyli $p(s)$ i $q(s)$ nie są w pełni niezależne - składowa warunków brzegowych wzdłuż parametryzacji jest kontrolowana przez $\frac{\partial h}{\partial s}$. Co jest niezależnym elementem układanki? - Składowa normalna do Γ w punkcie P , czyli

$$X(s) = \frac{\partial}{\partial n} u(f(s), g(s)) = \mathbf{n} \nabla u(f(s), g(s)).$$

Ale jeżeli $\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial s}\right)$ - styczne do c , to

$$(-g'(s), f'(s)) \cdot \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}$$

będą normalne. Więc

$$X(s) = -u_{,x}g'(s) + u_{,y}f'(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}},$$

ostatecznie:

$$\begin{aligned} u(f(s), g(s)) &= h(s) \\ u_{,x}(f(s), g(s)) &= p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) &= q(s) \\ p(s)f'(s) + q(s)g'(s) &= h'(s) \\ -p(s)g'(s) + q(s)f'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

W ten sposób zgraliśmy układ współrzędnych z geometrią Γ w punkcie P . Oczywiście, znając równanie krzywej Γ , czy c możemy tak lokalnie dobrać układ współrzędnych, że $u_{,x}$ będzie np. normalny do Γ , a $u_{,y}$ styczny, a do tego $h(s)$ w punkcie P będzie równe zero, bo naszemu rozwiązaniu jest zawsze lokalne. Czas więc na procedurę znajdowania pochodnych.

Wiemy, że

$$\begin{aligned} u_{,x}(f(s), g(s)) &= p(s) \\ u_{,y}(f(s), g(s)) &= q(s). \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu i dorzuceniu wyjściowego równania otrzymujemy

$$\begin{cases} p'(s) = u_{,xx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{,xy}(f(s), g(s))g'(s) + 0u_{,yy} \\ q'(s) = 0u_{,xx} + u_{,yx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{,yy}(f(s), g(s))g'(s) \end{cases} \quad .$$

$$-d(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s)) = au_{,xx} + 2bu_{,xy} + cu_{,yy}.$$

Gdzie $a = a(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s))$ i analogicznie b i c . Widzimy, że z powyższego układu wyliczymy $u_{,xx}, u_{,xy}, u_{,yy}$, jeżeli

$$\det \begin{bmatrix} f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \\ a & 2b & c \end{bmatrix} \neq 0.$$

Widzimy tutaj jak istotne może być zgranie (albo nie) krzywej, na której zadamy warunki brzegowe z wewnętrzną strukturą równania wyznaczoną przez a, b, c .

Jeżeli $\det || \neq 0$, to możemy rozwiązać układ równań i wyznaczyć $u_{,xx}, u_{,xy}, u_{,yy}$ w punkcie P . Co z wyższymi pochodnymi?

Możemy zróżniczkować równanie po $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned} -d(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})|_P &= a() u_{,xx} + 2b() u_{,xy} + c(u_{,yy})|_P \\ \frac{\partial}{\partial x} (-d(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})) \Big|_P &= a() u_{,xxx} + 2b() u_{,xyx} + c() u_{,yyx} + \\ &+ \left(\frac{\partial a}{\partial x} u_{,xx} + 2b \frac{\partial b}{\partial x} u_{,xy} + \frac{\partial c}{\partial x} u_{,yy} \right) \Big|_P. \end{aligned}$$

Jest fajnie, bo ostatni wyraz znamy. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (d(x, y, u = z, u_{,x}, u_{,y})|_P &= d_{,x}(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s)) + \\ &+ d_{,z}(f(s), g(s), h(s), p(s), q(s))u_{,x}(f(s), g(s)) + \\ &+ d_{,p}() u_{,xx}(f(s), g(s)) + \\ &+ d_{,q}() u_{,xy}(f(s), g(s)). \end{aligned}$$

Reasumując, coś, co znamy $= au_{,xxx} + 2bu_{,xxy} + cu_{,xyy}$. Do tego

$$\frac{d}{ds}(u_{,xx}(f(s), g(s))) = u_{,xxx}f'(s) + u_{,xxy}(f(s), g(s))q'(s)$$

$$\frac{d}{ds}(u_{,xy}(f(s), g(s))) = u_{,xyx}f'(s) + u_{,xyy}(f(s), g(s))q'(s)$$

$$\frac{d}{ds}(u_{,yy}(f(s), g(s))) = u_{,yyx}f'(s) + u_{,yyy}(f(s), g(s))q'(s).$$

I mamy układ równań

$$\begin{array}{cccccccl} a \cdot u_{,xxx} & + & 2b \cdot u_{,xxy} & + & c \cdot u_{,xyy} & + & 0 \cdot u_{,yyy} & = & \heartsuit \\ f'(s) \cdot u_{,xxx} & + & g'(s) \cdot u_{,xxy} & + & 0 \cdot u_{,xyy} & + & 0 \cdot u_{,yyy} & = & \spadesuit \\ 0 \cdot u_{,xxx} & + & f'(s) \cdot u_{,xxy} & + & g'(s) \cdot u_{,xyy} & + & 0 \cdot u_{,yyy} & = & \diamondsuit \\ 0 \cdot u_{,xxx} & + & 0 \cdot u_{,xxy} & + & f'(s) \cdot u_{,xyy} & + & g'(s) \cdot u_{,yyy} & = & \clubsuit \end{array}$$

Warunek dostajemy taki

$$\det \begin{bmatrix} a & 2b & c & 0 \\ f'(s) & g'(s) & 0 & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & 0 & f'(s) & g'(s) \end{bmatrix} \neq 0,$$

czyli to samo co wcześniej. Jeżeli założymy, że a, b, c, d są różniczkowalne tak bardzo, że aż do dowolnego stopnia (analityczne), to znaleziony ciąg pochodnych odtworzy nam szukany szereg. Jest tylko mały detal związany z pokazaniem, że szereg taki jest zbieżny (smileyface.jpg). Ale za to w nagrodę mamy istnienie rozwiązania (bo właśnie je zbudowaliśmy) oraz twierdzenie, że gdy a, b, c, d są analityczne, to innego rozwiązania nie ma.

Pytanie 18. *Co się stanie, gdy*

$$\det \begin{bmatrix} a & 2b & c \\ f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \end{bmatrix} = 0?$$

Widzimy, że nie da się wtedy odnaleźć wyższych pochodnych i metoda nie działa.

Przykład 25. *(ale też trochę pytanie)*

Jak wygląda równanie krzywej, dla której $\Delta = 0$ dla równania falowego

$$u_{,tt} + 0 \cdot u_{,tx} - c^2 u_{,xx} = 0?$$

W naszych literkach wychodzi

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -c^2.$$

Czyli

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c^2 \\ t'(s) & x'(s) & 0 \\ 0 & t'(s) & g'(s) \end{bmatrix} = 0 \implies (x'(s))^2 - c^2 (t'(s))^2 = 0.$$

Czyli $x'(s) = \pm ct'(s)$, czyli dostajemy dwie proste $x - ct = 0$ i $x + ct = 0$, czyli po prostu stożek świetlny!

Wniosek: na stożku świetlnym nie zadajemy warunków brzegowych, bo to nie-grzeczne.

Przykład 26. Niech

$$\begin{cases} u_{,xx} + u_{,yy} = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}.$$

Czy istnieje $g(x) \in C^\infty$, takie że równanie nie ma rozwiązań?

Pamiętamy, że jeżeli $u(x, y)$ (lub $u(x+iy)$) jest holomorficzna, to spełnia warunki Cauchy-Riemmana.

Wymyślmy funkcję, która jest gładka, ale nieanalityczna... na przykład taka

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wtedy szereg $f(s) = \sum_k e^{-\sqrt{k}} \cos(kx)$ nie jest zbieżny.

Jeżeli więc f - holomorficzna i $u(x, y) = \Re f$, to

$$u_{,xx} + u_{,yy} = 0, \text{ gdy } f = u(x, y) + iv(x, y).$$

Oznacza to, że u jest analityczna (musi być). Więc jeżeli na brzegu zadamy funkcję nieanalityczną, to rozwiązanie nie będzie istnieć (o ile udowodnimy mówiące o tym twierdzenie).

Przykład 27. (równanie przewodnictwa)

Mamy znane równanie

$$u_{,t} - u_{,xx} = 0.$$

W naszych literkach to jest $a = 0, b = 0, c = -1$.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ t'(s) & x'(s) & 0 \\ 0 & t'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Czyli $(-1)(t'(s))^2 = 0$, czyli $t = \text{const}$. Zauważmy, że $t = \text{const}$ oznacza, że na przykład $t = 0$ i to właśnie nasze ulubione sposoby zadawania warunków brzegowych.

Przykład 28. Znowu drut (przykład Kowalewskiej)

$$\begin{cases} u_{,t} - u_{,xx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Załóżmy, że

$$u(x, t) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} \frac{x^m t^n}{m!n!},$$

gdzie $a_{m,n} = D^{m,n}u$ w zerze. Dla $t = 0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{m \geq 0} (-1)^m x^{2m}.$$

Czyli $a_{2m,0} = (-1)^m (2m)!$, $a_{2m+1,0} = 0 \cdot (2m)! = 0$. Tylko dla $n = 0$ szereg $u(x, 0)$ daje niezerowy układ. Ale

$$a_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n}.$$

Więc

$$a_{m,n+1} = \frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x^m \partial t^{n+1}} u(0) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \frac{\partial}{\partial t} (u(0)) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(0)).$$

Czyli $a_{m,n+1} = a_{m+2,n}$. Czyli jeżeli $a_{m,n+1} = a_{m+2,n}$ i $a_{2n,0} = (-1)^m (2m)!$ i $a_{2m+1,0} = 0$, to znaczy, że

$$\begin{aligned} a_{2m,n} &= a_{2m+2n,0} = (-1)^{m+n} (2m+2n)! \\ a_{2m+1,n} &= a_{2m+1+2n,0} = a_{2(m+n)+1,0} = 0. \end{aligned}$$

Zatem (dla u już nie na brzegu)

$$u(x, t) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{a_{2m,n} x^{2m} t^n}{(2m)!n!} = \sum_{m,n \geq 0} (-1)^{m+n} (2m+2n)! \frac{x^{2m} t^n}{(2m)!n!}.$$

Ale

$$\frac{(2m+2n)!}{(2m)!n!} \stackrel{m=n}{=} \frac{(4n)!}{(2n)!n!}.$$

I z kryterium d'Alemberta $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{(4(n+1))!}{(2(n+1))!(n+1)!} \frac{(2n)!n!}{(4n)!}.$$

Czyli problem

$$\begin{cases} u_{,t} - u_{,xx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Nie ma rozwiązania analitycznego!