Ćwiczenia 8
Wstęp do równań cząstkowych drugiego rzędu

Analiza IV

17 kwietnia

Quidquid Latine dictum sit, altum videtur.

1 Teoria

1.1 Klasyfikacja równań

W najbliższych tygodniach będziemy zainteresowani równaniami i układami równań cząstkowych (głównie liniowych, ale może niekoniecznie?) Zacznijmy od obserwacji, że jeżeli nasza niewiadoma zależy od więcej niż dwóch zmiennych, wówczas nie istnieje jakaś kompletna i użyteczna klasyfikacja. Niemniej jednak, podamy pewne najczęściej pojawiające się (w fizyce!) typy. W związku z tym, nie rościmy sobie pretensji do największej możliwej ogólności.
Żeby uniknąć powtórzeń podamy od razu te typy dla układów równań. Pracujemy w n-wymiarowej (czaso)przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a dokładniej na jej otwartym podzbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$. Niech $u : U \to V$ będzie poszukiwaną funkcją o wartościach w (rzeczywistej) przestrzeni wektorowej V o skończonym wymiarze (jeżeli interesuje nas równanie, wtedy $V = \mathbb{R}$). Indeksami łacińskimi oznaczamy wymiary przestrzenne, a greckimi czasoprzestrzenne, konwencja sumacyjna Einsteina jest używana.

- Równanie postaci
$$A^{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + F(x,u,u_i) = 0, \tag{1}$$
gdzie $A^{ij} : U \times V \to \mathbb{R}$, $A^{ij} = A^{ji}$, $F : U \times V \times V \times \mathbb{R}^n$ nazywamy eliptycznym jeżeli A^{ij} w każdym punkcie są dodatnio określoną formą kwadratową.

- Równanie postaci
$$A^{\mu\nu}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + F(x,u,u_\mu) = 0, \tag{2}$$
gdzie $A^{\mu\nu} : U \times V \to \mathbb{R}$, $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, $F : U \times V \times V \times \mathbb{R}^n$ nazywamy hiperbolicznym jeżeli $A^{\mu\nu}$ w każdym punkcie są formą kwadratową o sygnaturze $(- + + ... +)$[1].

- Równanie postaci
$$A^{\mu\nu}(t,x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + F(x,u,u_i) = 0, \tag{3}$$
gdzie $A^{ij} : U \times V \to \mathbb{R}$, $A^{ij} = A^{ji}$, $F : U \times V \times V \times \mathbb{R}^n$ nazywamy parabolicznym jeżeli A^{ij} w każdym punkcie są formą kwadratową o sygnaturze $(0 + + ... +)$.

Wygoda związana z tymi typami równań jest taka, że są one dobrze przebadane. Zatem, jeżeli uda nam się sformułować nasz problem fizyczny w ich języku, mamy gotową maszynerię różnorakich twierdzeń i technik (np. numerycznych), które mogą nam służyć pomocą.

[1] Proszę zauważyć, że nasza definicja równań parabolicznych nie określa kierunku czasu. W praktyce jest to dość istotny element, bo problem ewolucji w czasie dla równań parabolicznych jest dobrze postawiony tylko wprzód.

1.2 Równania dwóch zmiennych

Rozważymy teraz najogólniejsze liniowe równanie drugiego rzędu zależące od dwóch zmiennych (x, y). Ma ono postać:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \tag{4}$$

gdzie A, B, C, D, E, F, G są funkcjami x i y oraz $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Zdefiniujmy

$$\delta(x, y) := B^2 - 4AC. \tag{5}$$

Mówimy, że równanie (4) jest typu

- eliptycznego, gdy $\delta < 0$
- parabolicznego, gdy $\delta = 0$
- hiperbolicznego, gdy $\delta > 0$.

Proszę przekonać się, że zgadza się to z naszą klasyfikacją z poprzedniego podpunktu.
Przez odpowiednią zamianę zmiennych $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ da się zawsze sprowadzić równanie (4) do postaci kanonicznej

- dla równania typu eliptycznego
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0 \tag{6}$$
- dla równania typu parabolicznego
$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0 \tag{7}$$
- dla równania typu hiperbolicznego
$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \tag{8}$$

gdzie ... oznaczają wyrazy bez drugich pochodnych. Sprowadzenie równania do postaci kanonicznej może ułatwić jego rozwiązanie.

1.3 Metoda charakterystyk

Służy do tego metoda charakterystyk. Przepiszmy symbol główny naszego równania w nowym układzie współrzędnych (ξ, η):

$$\begin{gathered} A\partial_{xx} + B\partial_{xy} + C\partial_{yy} = A(\xi_x\partial_\xi + \eta_x\partial_\eta)^2 + B(\xi_x\partial_\xi + \eta_x\partial_\eta)(\xi_y\partial_\xi + \eta_y\partial_\eta) + C(\xi_y\partial_\xi + \eta_y\partial_\eta)^2 = \\ \left(A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2\right)\partial_{\xi\xi} + \left(A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2\right)\partial_{\eta\eta} + (2A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\eta_x\xi_y + 2C\xi_y\eta_y)\,\partial_{\xi\eta} + \ldots, \end{gathered} \tag{9}$$

gdzie ... oznaczają wyrazy, które nie zawierają drugich pochodnych.

1.3.1 Przypadek hiperboliczny

Aby sprowadzić równanie do postaci kanonicznej w przypadku hiperbolicznym musimy wyzerować współczynniki przy $\partial_{\xi\xi}$ oraz $\partial_{\eta\eta}$. Są one symetryczne względem zamiany $\xi \longleftrightarrow \eta$, więc skupimy się tylko na tym pierwszym współczynniku. Mamy zatem równanie

$$A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 = 0 \tag{10}$$

na funkcję $\xi = \xi(x, y)$. Skoro ξ ma być nową współrzędną, to równanie $\xi =$ const. powinno wyznaczać nam krzywe w $\mathbb{R}^2$ (przynajmniej tak długo jak długo jest to dobra współrzędna). Zatem możemy spróbować przepisać powyższe równanie na równanie zwyczajne. Załóżmy, że ta krzywa ma parametryzację $y(x)$[2]. Wówczas, z twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{11}$$

[2] Jest to prawda tak długo jak $\xi_y \neq 0$. W przeciwnym razie możemy po prostu wybrać parametryzację $y(x)$. Widzimy, że jeżeli $AC \neq 0$, to będą one równoważne.

co wstawiając do równania (10) daje

$$(\xi_y)^2 \left(A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C \right) = 0. \tag{12}$$

Skoro $\xi_y \neq 0$, to otrzymujemy równanie kwadratowe na $\frac{dy}{dx}$. Ponieważ $\delta > 0$, to ma ono na dwa rozwiązania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\delta}}{2A}. \tag{13}$$

Jedno z rozwiązań odpowiada ξ, a drugie η. Pozostaje tylko odwikłać tę relację (rozwiązując to równanie zwyczajne. Otrzymamy jedną stałą całkowania, którą będzie można utożsamić z ξ lub η[3].) i w ten sposób znaleźć nowe współrzędne.

1.3.2 Przypadek paraboliczny

Tym razem chcemy wyzerować współczynniki przy $\partial_{\xi\xi}$ oraz $\partial_{\xi\eta}$. Ten pierwszy warunek mamy już z głowy. Ponieważ tym razem $\delta = 0$, to krzywe $\xi =$ const. zadane są równaniem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}. \tag{14}$$

Łatwo się przekonać, że wówczas współczynnik przy $\partial_{\xi\eta}$ automatycznie też znika. Zatem współrzędną η możemy przyjąć dowolnie, byle (ξ, η) były dobrym układem współrzędnych (czyli żeby jakobian przejścia $(x, y) \mapsto (\xi(x, y), \eta(x, y))$ był niezerowy).

1.3.3 Przypadek eliptyczny

Jeżeli $\delta < 0$, to nie mamy żadnych rzeczywistych rozwiązań równania charakterystyk (10), mamy za to parę zespolonych, sprzężonych rozwiązań z oraz $\bar{z}$. Wtedy wiodący wyraz (modulo współczynnik przed nim) jest postaci $\partial_{z\bar{z}}$. Ale wiemy doskonale, że biorąc $\xi = \Re z$ oraz $\eta = \Im z$ sprowadzimy to do postaci kanonicznej (bo wiemy, że równanie Laplace w zmiennej zespolonej $z = x + iy$ ma postać $\partial_{z\bar{z}} f = 0$).

2 Praktyka

Zadanie 1.1 *(symbol główny w różnych układach współrzędnych)*
Niech $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$ (ew. $\xi^a = \xi^a(x^b)$) będą nowymi współrzędnymi na $\mathbb{R}^n$. Jak transformują się macierze $A^{\mu\nu}$ (ew. A^{ij})? Czy warunek bycia eliptycznym, hiperbolicznym, parabolicznym zależy od użytego układu współrzędnych?
Zadanie 1.2 *(równania Maxwella)*
Proszę zapisać równania Maxwella za pomocą potencjałów $(\phi, \vec{A})$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \vec{A}_t \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \tag{15}$$

i przekonać się, że nie należą one do żadnej z omawianych kategorii. Następnie uzupełnić te warunki o swój ulubiony warunek cechowania i powtórzyć analizę. Jakie są rezultaty? W przypadku braku ulubionego warunku cechowania proszę narzucić cechowanie Coulomba $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.
Zadanie 2.1
Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xy} - 4u_{yy} &= 0 \\ u(x, 0) &= 5x^2 \\ u_y(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

[3] Czemu?

Proszę sprowadzić to równanie do postaci kanonicznej, a następnie rozwiązać.

Zadanie 2.2

Proszę znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0. \tag{17}$$

Zadanie 2.3

Proszę znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$xy^3 u_{xx} + x^3 y u_{yy} - y^3 u_x - x^3 u_y = 0. \tag{18}$$