Ostatnio szukaliśmy takich współczynników $c_1, c_2, \ldots, c_N$, by wyrażenie

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n \right\|$$

było najmniejsze, jeżeli $f \in \mathcal{L}^2$, a ψ_n - wektory własne operatora Sturma-Liouville'a.
Okazało się, że $a_n = \langle f | \psi_n \rangle$ daje nam minimum, co więcej

$$\sum_{n=1}^{N} \|a_n\|^2 \leqslant \|f\|^2,$$

więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.
Potam pokazaliśmy, że jeżeli dla operatora Sturma-Liouville'a, poza warunkami na samosprzężoność

$$\underset{f,g}{\forall}\, p\left(f'\overline{g} - f\overline{g'}\right)\Big|_a^b = 0,$$

gdzie $Lf = -\frac{1}{r}\left((pf')' + qf\right)$ spełniony będzie warunek $-\left(pf'\right)\overline{f}\big|_a^b \geqslant 0$ i $g(x) \leqslant 0$, to wtedy wartości własne operatora L będą większe od zera. Pokazaliśmy to przy użyciu operatora

$$R(u) = \frac{\langle Lu|u\rangle}{\langle u|u\rangle},$$

dla którego $R(\psi_n) = \lambda_n$, jeżeli ψ_n takie, że $L\psi_n = \lambda_n \psi_n$.
Uzyskane warunki sprawdziliśmy dla operatora $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ i okazało się, że

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Chcielibyśmy pokazać, że dla wartości własnych operatora Sturma-Liouville'a

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

co więcej zbiór wartości własnych można uporządkować tak, że

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots.$$

Dowód. Dowód zrobimy dla operatora S-L z następującymi warunkami brzegowymi

$$-\Big((pf')' - qf\Big) = \lambda r f, \quad f(0) = f(1) = 0 \tag{1}$$

O takim równaniu wiemy, że spełnia wszystkie możliwe warunki fajności

$$\underset{f,g}{\forall}\, p\left(f'\overline{g} - f\overline{g'}\right)\Big|_0^1 = 0, \quad -\left(pf'\right)\overline{f}\Big|_0^1, \quad g(x) \leqslant 0.$$

(czy jednej wartości własnej odpowiada dokładnie jeden waktor własny? to musimy ustalić, na razie założymy, że tak jest).
O równaniu 1 wiemy zatem, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, czyli wektorów własnych o wartościach własnych równych zero nie ma, czyli problem jednorodny.

$$(pf')' - qf = 0, \quad f(0) = f(1).$$

To nie ma innych rozwiązań niż $f = 0$.
Wiemy, że z operatorem L możemy związać wektory własne i wartości własne

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_n, \ldots \\ \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, \ldots \end{array}$$

oraz, że jeżeli znajdziemy funkcję z L^2, np. $G(x)$, to do zestawu możemy dorzucić ciąg $c_k = \langle G|\psi_k\rangle$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots,$$

taki, że szreg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|^2$$

jest zbieżny. W jaki sposób moglibyśmy pokazać, że $\lambda_n \to \infty$? Znaleźć taką funkcję $G(x)$, że

$$\|c_n\|^2 = |\langle G|\psi_n\rangle|^2 = \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Bo ze zbieżności $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ wyjdzie $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.
Podsumowując, szukamy funkcji $G(x)$ takiej co spełnia te wszystkie warunki

$$\|c_n\|^2 = |\langle G|\psi_n\rangle|^2 = \frac{1}{\lambda_n^2},$$

$$(p\psi_n)' - q\psi_n = -\lambda_n r\psi_n,$$
$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0.$$

Zadanie zapowiada się karkołomnie, dojście do odpowiedzi też. Pamiętamy, że mając równanie

$$(pw')' - qw = -F(x),$$

moglibyśmy je rozwiązać przy pomocy funkcji Greena, czyli spełniającej warunek

$$p\left(G(x,\xi)'\right)' - pG(x,\xi) = -\delta(x-\xi),$$

bo wtedy

$$w(x) = \int_0^1 G(x,\xi)F(\xi)d\xi.$$

Funkcję $G(x,\xi)$ łatwo zbudować, bo mamy do dyspozycji dwa rozwiązania

$$(pw_1')' - qw_1 = 0, \quad w_1(0) = 0 \text{ ale nie } w_1(1) = 0,$$

$$(pw_2')' - qw_2 = 0, \quad w_2(0) = 0 \text{ ale nie } w_2(0) = 0,$$

Możemy złożyć G :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} w_1(x) & x < \xi \\ w_2(x) & x \geqslant \xi \end{cases}.$$

Nałożymy teraz na w_1 i w_2 warunki

$$w_1(\xi) = w_2(\xi), \quad w_1'(\xi) - w_2'(\xi) = -1.$$

Złóżmy razem następującą zależność

$$(pw'(x))' - q(x)w(x) = -F(x), \quad w(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi)F(\xi)d\xi \tag{2}$$

$$(p\psi_n'(x))' - q\psi_n(x) = \underbrace{-\lambda_n\psi_n(x)r(x)}_{(\star)} \tag{3}$$

Pamiętamy jeszcze, że $\langle u|v\rangle = \int\limits_0^1 u(\xi)v(\xi)r(\xi)d\xi$. Jeżeli teraz za $F(x)$ wstawimy $(\star)$ do warunku 2, to dostaniemy

$$\underset{x\in[0,1]}{\forall} \psi_n(x) = \int\limits_0^1 \underbrace{G(x,\xi)}_{u(\xi)}\lambda_n \underbrace{\psi_n(\xi)}_{v(\xi)} r(\xi)d\xi = \lambda_n \underbrace{\langle G|\psi_n\rangle}_{c_n}.$$

Czyli $\underset{x\in[0,1]}{\forall} \psi_n(x) = \lambda_n c_n$, gdzie c_n jest takie, że szereg

$$\sum \|c_n\|^2 \leqslant \int\limits_0^1 |G(x,\xi)|^2 \, d\xi \underset{x\in[0,1]}{\forall}.$$

Czyli

$$\underset{x\in[0,1]}{\forall} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_n(x)|^2}{\|\lambda_n\|^2} \leqslant \int\limits_0^1 |G(x,\xi)|^2 \, d\xi.$$

Zbieżnosć po lewej stronie jest zbieżnością bezwzględną, więc możemy wycałkować wszystko po x, pamiętając, że

$$\int\limits_0^1 |\psi_n(x)|^2 \, dx = 1,$$

bo ψ - unormowane. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leqslant \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 |G(x,\xi)|^2 \, d\xi}_{\text{ograniczone}} .$$

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ i już. □

Pytanie 1. *Dlaczego wartości własne funkcji Greena dla operatora S-L wynoszą $\frac{1}{\lambda_n}$? Intuicja z algebry:*
Jeżeli $Av = \lambda v$, to mamy $v = \lambda A^{-1} v$, czyli $\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$

Wiemy już, że szereg $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ jest zbieżny, czyli $\lambda_n \to \infty$. Chcemy pokazać, że można tak poprzestawiać elementy ciągu

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \ldots\} ,$$

że będą w kolejności rosnącej, co pozwoli nam też w jakiś sposób uporządkować wektory własne.

Stwierdzenie 1. *Zasada Rayleigh'a.*
Niech $\psi_0, \ldots, \psi_n$ - zbiór wektorów własnych operatora S-L (samosprzężonego), $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - wartości własne $\lambda_i > 0$. Niech

$$w_N \overset{ozn}{=} \langle \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N \rangle , \quad w_N^{\perp} = \xi u, \quad \langle u | w_N \rangle = 0.$$

Wówczas

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{\exists} \quad \min_{u \in w_N} \frac{\langle Lu|u\rangle}{\langle u|u\rangle} = c,$$

co więcej, $\underset{\varphi \in w_N^{\perp}}{\exists}$, że $L\varphi = c\varphi$.
(φ o takich własnościach oznaczymy przez ψ_{N+1}, a c przez λ_{N+1}).

Obserwacja: Powyższa procedura pozwoli na uporządkowanie zbioru wartości własnych i wektorów własnych - na razie jest to tylko ponumerowanie λ_i i nie mamy jeszcze zależności typu $>, <$.

Dowód. Pokażemy, że jeżeli $u \in w_N^{\perp}$, to $L(u) \in w_N^{\perp}$. Niech

$$v = \sum_{n=0}^{N} d_n \psi_n .$$

Wiemy, że
$$\underset{n\in 0\ldots N}{\forall} \langle u|\psi_n\rangle = 0.$$
Policzmy sobie
$$\langle Lu|v\rangle = \langle u|Lv\rangle = \left\langle u \left| \sum_{n=0}^{N} d_n L\psi_n \right. \right\rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \overline{d}_n \langle u|\lambda_n\psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{N} \overline{d}_n\lambda_n \langle u|\psi_n\rangle = 0.$$
Wiemy, że $R(u)$ jest ograniczone od dołu (pokazaliśmy to w poprzenim odcinku). Zbiór wartości $R(u)$ jest ograniczony od dołu. Załóżmy, że $R(u)$ osiąga swoje kresy (formalny dowód - poprzez własności funkcji Greena, tutaj odpuszczamy). Pokażemy część drugą stwierdzenia.
Załóżmy zatem, że $\underset{u_{m,n}\in w_N^{\perp}}{\exists}$ takie, że $R(u_{m,n})$ jest najmniejsze. Oznacza to, że
$$g(s) = R\left(u_{m,n} + s\cdot u\right), \quad s\in\mathbb{R}, \quad u\in w_N^{\perp}$$
ma minimum w zerze, czyli $g'(s=0) = 0$. Załóżmy, że u jest funkcją rzeczywistą
$$g(s) = \frac{\langle L(u_{m,n}+su)\,|u_{m,n}+su\rangle}{\langle u_{m,n}+su\,|u_{m,n}+su\rangle}.$$
Ale
$$\langle u_{m,n}+su\,|u_{m,n}+su\rangle_{,s} = \langle u_{m,n}\,|u_{m,n}+su\rangle_{,s} + \langle u_{m,n}+su\,|u_{m,n}\rangle_{,s} +$$
$$+ \left(s^2\langle u\,|u\rangle\right)_{,s} = \langle u_{m,n}\,|u\rangle + \langle u\,|u_{m,n}\rangle + 2s\langle u\,|u\rangle.$$
Analogicznie
$$\langle L\left(u_{m,n}\right) + sL(u)\,|u_{m,n}+su\rangle_{,s} = \langle L\left(u_{m,n}\right)|u_{m,n}+su\rangle_{,s} +$$
$$+ \langle L\left(u_{m,n}\right) + sL(u)\,|u_{m,n}\rangle_{,s} + \left(s^2\langle L(u)\,|u\rangle\right)_{,s} =$$
$$= \langle L\left(u_{m,n}\right)|u\rangle + \langle L(u)\,|u_{m,n}\rangle + 2s\langle L(u)\,|u\rangle.$$
Liczymy teraz pochodną g
$$g'(s)|_{s=0} = \left.\frac{(\Box)'}{\Delta}\right|_{s=0} - \left.\frac{\Box\Delta'}{\Delta^2}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{\Delta}\left(\Box' - \frac{\Box\Delta'}{\Delta}\right)\right|_{s=0}.$$
$$R(u_{m,n}) = \frac{\langle L(u_{m,n})\,|u_{m,n}\rangle}{\langle u_{m,n}\,|u_{m,n}\rangle}.$$

$$g'(s)|_{s=0} = \frac{1}{\langle u_{m,n} \,|u_{m,n} \rangle} \Big(\langle L(u_{m,n}) \,|u \rangle + \langle L(u) \,|u_{m,n} \rangle - \\ - \frac{\langle L(u_{m,n})|u_{m,n}\rangle}{\langle u_{m,n} \,|u_{m,n} \rangle} \left(\langle u_{m,n} \,|u \rangle + \langle u \,|u_{m,n} \rangle\right) \Big) = \\ = \frac{1}{\langle u_{m,n} \,|u_{m,n} \rangle} \left(\langle L(u_{m,n}) - R(u_{m,n}) u_{m,n} \,|u \rangle + \langle u \,|L(u_{m,n}) - R(u_{m,n}) u_{m,n} \rangle\right).$$

$L(u_{m,n}) = R(u_{m,n})u_{m,n}$, czyli watość $R(u)$ dla $u_{m,n}$ jest wartością własną funkcji $u_{m,n}$. Zatem, jeżeli $u_{m,n} \in w_N^{\perp}$, gdzie $w_N = (\psi_0, \ldots, \psi_N)$, to

$$u_{m,n} \overset{\text{ozn}}{=} \psi_{N+1}, \quad R(u_{m,n}) = \lambda_{N+1}$$

i możemy porządkować dalej, bo weźmiemy kolejny zbiór $w_{N+1}^{\perp}$, dla którego znajdziemy nowe $u_{m,n}$ i tak dalej. □

Obserwacja:

$$\underset{\psi \in w_N^{\perp}}{\forall} R(\psi) \geqslant \lambda_{N+1}.$$

Czyli następne wartości własne dla $w_{N+1}^{\perp} \subset w_N^{\perp}$ będą coraz większe.

Twierdzenie 1. *Niech $f \in \mathcal{L}^2$, $J_m = f - \sum_{k=1}^{m} c_k \psi_k$, $c_k = \langle f \,|\psi_k \rangle$. Wówczas*

$$\|J_M\|^2 \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

(pamiętamy, że $\langle \psi_k \,|\psi_i \rangle = \delta_{ki}$).

Dowód. Zauważmy, że $\underset{i \leqslant m}{\forall}$ mamy $\langle J_m \,|\psi_i \rangle = 0$, bo

$$\langle J_m \,|\psi_k \rangle = \langle f \,|\psi_i \rangle - \sum_{k=1}^{m} c_k \langle \psi_k \,|\psi_i \rangle = c_i - c_i = 0.$$

Zatem $J_m \in w_m^{\perp}$ - od wektora odjęliśmy k składowych. Pamiętamy, że $\underset{\psi \in w_N^{\perp}}{\forall} R(\psi) \geqslant \lambda_{N+1}$, czyli

$$R(J_m) \geqslant \lambda_{m+1} \implies \frac{\langle LJ_m \,|J_m \rangle}{\langle J_m \,|J_m \rangle} \geqslant \lambda_{m+1}.$$

Czyli $\langle J_m \,|J_m \rangle \leqslant \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle LJ_m \,|J_m \rangle$. Policzymy teraz prawą stronę

$$\left\langle L\left(f-\sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k\right)\middle| f-\sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k \right\rangle = \langle Lf \,|f \rangle +$$
$$-\left\langle \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda_k\psi_k \,|f \right\rangle - \left\langle f \middle| \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda_k\psi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k \middle| \sum_{i=1}^{m} c_m\psi_m \right\rangle =$$
$$= \langle Lf \,|f \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k c_k \overline{c_k} - \sum_{k=1}^{m} \overline{c_k}\lambda_k c_k + \sum_{k=1}^{m} c_k \overline{c_k}.$$

Zatem
$$\langle J_m \,|J_n \rangle \leqslant \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left(\langle Lf \,|f \rangle + const\right).$$

Czyli $\langle J_m \,|J_m \rangle \to 0$ □

Niech $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ na zbiorze
$$U = \left\{u \in \mathcal{L}^2, u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

Wiemy, że wartości własne L to $n^2\pi^2$ a wektory własne to $\sin(n\pi x)$. Niech $u_1 = x(1-x)$, $u_1 \in U$. Policzmy
$$R(u) = \frac{\langle -2 \,|x(1-x) \rangle}{\langle x(1-x) \,|x(1-x) \rangle} = 10.$$

Widzimy, że $R(u) \geqslant \lambda_1$ dla $n = 1$. $10 > \pi^2$ i już.