Prace domowe 2

Analiza IV

25 kwietnia 2020

Nous ne recevons pas la sagesse; nous devons la découvrir pour nous-mêmes après un voyage que personne ne peut prendre pour nous ou nous épargner.

Streszczenie

Celem niniejszego pliczku jest zebranie zadań, które Studenci i Studentki Analizy IV mogą uznać za przydatne w przygotowaniu do kolokwiów, egzaminu oraz życia. Nie są one w żaden sposób obowiązkowe, ich (nie)robienie nie będzie miało wpływu na ocenę z przedmiotu.

1 Równania drugiego rzędu

Zadanie 1 *(postać kanoniczna)*
Proszę doprowadzić do postaci kanonicznej następujące równania:

- $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + au_x + u_y + c = 0$
- $yu_{xx} + u_{yy}$, gdy $y < 0$ (jest to równanie Eulera–Tricomiego opisujące przepływy z prędkością porównywalną do prędkości dźwięku)
- $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$
- $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$
- $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$

Proszę określić zakres nowych zmiennych, a tam gdzie to możliwe i łatwe, również rozwiązać otrzymane równania.
Zadanie 2 *(rozwiązania)*
Proszę rozwiązać następujące równania:

- $u_{xx} + u_x + x + y + 1 = 0$
- $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + x + y + 1 = 0.$

2 Całki z funkcji szybko oscylujących

Zadanie 1 *(funkcja Airy'ego)*
Funkcja Airy'ego

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \cos\left(kx + \frac{k^3}{3}\right) \tag{1}$$

stanowi rozwiązanie równania

$$y'' - xy = 0. \tag{2}$$

(i) Proszę przekonać się, że powyższe zdanie jest prawdą.

(ii) Proszę znaleźć asymptotykę funkcji Airy'ego, gdy $x \to \infty$.

Zadanie 2 *(całkowanie przez części)*
W tym zadaniu nauczymy się jak ewaluować całki z funkcji szybko oscylujących, gdy metoda fazy stacjonarnej zawodzi. Rozważmy funkcję

$$I(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t} \tag{3}$$

i jej zachowanie, gdy $x \to \infty$. Łatwo zauważyć, że nie można tu zastosować metody fazy stacjonarnej.

(i) Proszę przekształcić prawą stronę (3) przez części tak, by nowa całka była rzędu $o(x)$ i odczytać wiodący wyraz asymptotyczny z wyrazów brzegowych.

(ii) Proszę powtórzyć tę procedurę by otrzymać rozwinięcie $I(x)$ z dokładnością do wyrazów rzędu x^{-3}.

Podpowiedź: lemat Riemanna–Lebesgue'a.
Zadanie 3 *(encore)*
W tym zadaniu połączymy obie te metody. Rozważmy

$$I(x) = \int_0^1 \cos\left(xt^2\right) dt \tag{4}$$

i zachowanie tej funkcji, gdy $x \to \infty$.

(i) Zauważywszy, że funkcja podcałkowa jest parzysta, proszę przepisać $I(x)$ jako całkę po przedziale $[-1, 1]$, a następnie oszacować ją metodą fazy stacjonarnej.

(ii) Proszę porównać otrzymane wyrażenie z numerycznie policzoną wartością $I(x)$ (np. kreśląc stosowny wykres w Mathematice).

(iii) W tym podpunkcie oszacujemy błąd, który wynika z rozciągnięcia przedziału całkowania na całą oś liczb rzeczywistych. Możemy zapisać

$$I(x) = \Re\left[\int_0^\infty e^{ixt^2} - \int_1^\infty e^{ixt^2}\right]. \tag{5}$$

Pierwszy wyraz to wartość w punkcie stacjonarnym. Całkując przez części proszę znaleźć wiodący wyraz w rozwinięciu drugiej całki, gdy $x \to \infty$.

(iv) Ponownie proszę o porównanie wszystkich trzech wyników (metoda fazy stacjonarnej, metoda fazy stacjonarnej+całkowanie przez części, numeryka).

Zadanie 4 *(asymptotyka rozwiązań równania Kleina–Gordona)*
Rozważmy funkcję $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left(b(\vec{p}) e^{ip\cdot x} + d^\star(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} \right), \tag{6}$$

gdzie $E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$, $p \cdot x = -E_p t + \vec{p} \cdot \vec{x}$, $m > 0$, a b, d są zespolonymi funkcjami klasy Schwarza.

(i) Proszę sprawdzić, że spełnia ona równanie Kleina–Gordona

$$\phi_{tt} - \Delta_{\mathbb{R}^3}\phi + m^2\phi = 0. \tag{7}$$

(ii) Jak łączą się funkcje b i d z danymi początkowymi $\phi(t = 0, \vec{x})$ oraz $\phi_t(t = 0, \vec{x})$?

(iii) Dla $t > |\vec{x}| = r$ proszę wprowadzić nowy układ współrzędnych

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{t^2 - r^2} \\ \rho &= \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

i zapisać za jego pomocą $p \cdot x$. Kierunki można parametryzować w standardowy sposób kątami lub wektorem jednostkowym (tzn. pisząc $\vec{x} = r\hat{x}$).
Następnie, proszę zbadać zachowanie ϕ, gdy $\tau \to \infty$, a $(\rho, \hat{x})$ są stałe.

(iv) Jak zmieni się odpowiedź, gdy $m = 0$?

Powyższy rachunek jest kluczowym krokiem do wyznaczenia wkładu do formy symplektycznej dla masywnego pola Kleina–Gordona w asymptotycznej przyszłości i^+.