Ulice w Warszawie to po prostu bardzo długa prosta po której poruszają się ciągłe samochody. Żeby to tak działało, to można warunek ciągłości zapisać tak:

$$\rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x = 0, \quad v_m, \rho_m > 0.$$

Przepisujemy do postaci

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Dzielimy przez pochodą ρ

$$\frac{\partial q}{\partial \rho} = v_m - \frac{2v_m}{\rho_m} \rho.$$

No i wychodzi jak się scałkuje

$$q(\rho) = v_m \rho - \frac{v_m}{\rho_m} \rho^2 + c.$$

Interpretacja stałych ρ_m i v_m - gęstość i prędkość maksymalna. One w ogóle zaczną się odpychać przy za dużej gęstości, bo jest ten minus przy v_m. Zadajemy warunek początkowy

$$\rho\,(t = 0, x) = \rho_m \theta(-x) \tag{1}$$

Pytanie 1. *Jaka to sytuacja na drodze?*

Odp. No światła drogowe.

To teraz trzeba narysować charakterystyki.

Co to znaczy równanie ciągłości ale z nie-stałymi współczynnikami?

$$u(t, x(t)) = const \implies \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

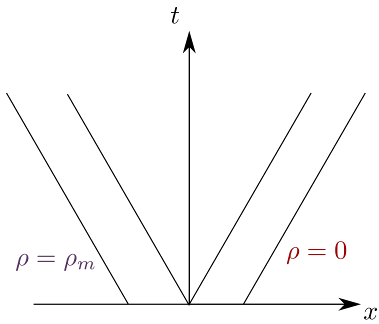
Czyli dalej

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{dx}{dt} \implies x(t) = \int q'(u) dt.$$

Dla warunku (1), wyglądać będzie jakoś tak

$$x(t) = q'(g(\xi))t + \xi = v_m \left(1 - \frac{2\rho_m}{\rho_m}\right) t + \xi = -v_m t + \xi.$$

$$s'(t) = \frac{q(0) - q(\rho_m)}{0 - \rho_m} = \frac{c - c - v_m\,(\rho_m - \rho_m)}{-\rho_m} = 0.$$



Rysunek 0.1: Tak wyglądają nasze charakterystyki

No to mamy jedno fajne rozwiązanie. A inne?

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}.$$

$$q' = v_m(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}).$$

$$\rho = -\frac{q' - v_m}{2v_m}\rho_m.$$

$$R(\alpha) = \left(\frac{v_m - \alpha}{2v_m}\right)\rho_m.$$

$$R\left(\frac{x - x_0}{t - x_0}\right) = \frac{v_m - \frac{x}{t}}{2v_m}\rho_m = \rho(x, t).$$