Ćwiczenia 9
Metoda fazy stacjonarnej

Analiza IV

24 kwietnia

1 Teoria

Na dzisiejszych zajęciach będziemy zajmować się dwiema pokrewnymi metodami szacowania całek – metodą stacjonarnej fazy i metodą punktu siodłowego. Jest to w gruncie rzeczy to samo, w języku fizycznym różnią się one o obrót Wicka.
Rozważmy całkę postaci

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) e^{ikf(x)}, \tag{1}$$

gdzie $g \in C_0^\infty$, $f \in C^\infty$, a o k zakładamy, że jest bardzo duże i dodatnie (interesuje nas wiodący wyraz, gdy $x \to \infty$. Można spodziewać się, że jeżeli k jest bardzo duże, to $e^{ikf(x)}$ bardzo szybko zmienia znak i całka bardzo szybko znika. Jeżeli jednak w jakimś punkcie pochodna f znika $df(x_0) = 0$, to wyrażenie to oscyluje trochę wolniej i takie punkty będą miały decydujący wkład. Okazuje się, że tak jest w istocie.
Niech $\Sigma_f = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : df(x_0) \neq 0\}$ będzie zbiorem punktów krytycznych funkcji f. Załóżmy, że w każdym punkcie krytycznym, druga pochodna nie jest zdegenerowana (oznaczmy jej macierz przez $D^2 f$), to znaczy

$$\det D^2 f(x_0) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)(x_0) \neq 0. \tag{2}$$

Wówczas mamy następującą asymptotykę[1]

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) e^{ikf(x)} = \sum_{x_0 \in \Sigma_f} e^{ikf(x_0)} \left| \det D^2 f(x_0) \right|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4} \mathrm{Ind} D^2 f(x_0)} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{n}{2}} g(x_0) + o\left(k^{-\frac{n}{2}}\right). \tag{3}$$

Przez $\mathrm{Ind} D^2 f$ rozumiemy różnicę między liczbą dodatnich i ujemnych wartości własnych macierzy $D^2 f(x_0)$.
Teraz rozważmy całki postaci

$$\int_a^b dx g(x) e^{kf(x)} \tag{4}$$

Zakładamy teraz, że g oraz f rozszerzają się na otoczeniu Ω odcinka $[a, b]$ do funkcji holomorficznych oraz, że k jest bardzo duże. Załóżmy, że istnieje taki łuk $\gamma \in \Omega$ łączący a i b, który ma następujące własności:

- Istnieje dokładnie jeden punkt z_0, w którym $f'(z_0) = 0$
- $f''(z_0) \neq 0$
- $\Re f|_\gamma$ ma maksimum w z_0.

[1] Proszę sobie przypomnieć różnicę między dużym O i małym o.

Wówczas

$$\int_a^b dx g(x) e^{kf(x)} = e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(z_0)}} \left(f(z_0) + O(\lambda^{-1}) \right). \tag{5}$$

W ogólności $f''(z_0)$ jest liczbą zespoloną, więc musimy być ciut ostrożni z wyciąganiem pierwiastka. W powyższym wzorze

$$\left| \arg \sqrt{-f''} \right| < \frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

2 Praktyka

Zadanie 0 *(inne oszacowanie)*
Rozważmy całkę

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) e^{ikf(x)}. \tag{7}$$

Załóżmy, że f nie ma punktów krytycznych w nośniku g: $\forall x_0 \in \mathrm{supp} g : df(x_0) \neq 0$. Proszę pokazać indukcyjnie, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) e^{ikf(x)} = O\left(k^{-N}\right), \tag{8}$$

tzn. ta całka zanika szybciej niż dowolna potęga k.
Zadanie 1 *(wzór Stirlinga)*
Niech

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \tag{9}$$

będzie funkcją Γ Eulera (powyższa definicja ma sens, gdy $\Re z > 0$). Proszę udowodnić wzór Stirlinga

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+1)}{\sqrt{2\pi z}} \left(\frac{e}{z}\right)^z = 1. \tag{10}$$

Ponieważ $\Gamma(n+1) = n!$, gdy n jest liczbą naturalną, to jest to także asymptotyczne zachowanie silni. Powyższe oszacowanie jest niezwykle przydatne w fizyce statystycznej.
Jako wniosek proszę wykazać, że funkcja Beta

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \tag{11}$$

spełnia

$$\lim_{x,y\to\infty} B(x+1,y+1) \sqrt{\frac{(x+y)^3}{2\pi xy}} \frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y} = 1. \tag{12}$$

(Można to pokazać albo bezpośrednio z definicji albo wyrazić B przez Γ i skorzystać ze wzoru Stirlinga.)
Zadanie 2 *(asymptotyka funkcji Bessela)*
Proszę użyć reprezentacji całkowej by znaleźć asymptotykę funkcji Bessela, gdy idziemy z argumentem do nieskończoności.
(przykład ten pokazuje siłę metody fazy stacjonarnej i reprezentacji całkowych– możemy zbadać zachowanie funkcji w punkcie nieregularnym.)