Przykład 1. ***Uwaga:*** *jeżeli np.* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *to znaczy, że*
$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, *wówczas*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 2.

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3 y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = & \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x,y),h) = \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x,y),h) \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2 y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x,y),h). \end{aligned}$$

Czyli

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, *to*

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

0.1 Uzupełnienie:

Stwierdzenie 1. *Niech* V *- przestrzeń wektorowa z normą* $||.||$ *i* $x_0 \in V$, *wówczas*

$$f(x) = ||x||, f : V \to \mathbb{R}^1 \text{ - ciągła w } x_0.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta}{\exists} \ \underset{x}{\forall} \ \ d_x(x,x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ale

$$d_x(x,y) = ||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y) = |x-y|.$$

Czyli pokażemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \ \ ||x - x_0|| < \delta \implies \big| ||x|| - ||x_0|| \big| < \varepsilon.$$

Ale wiemy, że

$$||x|| = ||x - y + y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||, ||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||,$$

$$||y|| = ||y - x + x|| \leqslant ||y - x|| + ||x||,$$
$$||y|| - ||x|| \leqslant ||x - y||,$$

czyli $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > ||x - y|| \geqslant \big|||x|| - ||y||\big| \geqslant 0$

$\square$

Pytanie 1. *Niech* $f(x, y) = 7x + 6y^2$ *i* $g(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$. *Wówczas* $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ile wynosi pochodna?*

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1. *Niech* $G : U \to Y, U \subset X, U$ *- otwarte,*
X *- przestrzeń wektorowa unormowana,*
$F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$
G *- różniczkowalna w* $x_0 \in U$*,*
F *- różniczkowalna w* $G(x_0) \in U$*.*
Wówczas: $(F \circ G)$ *- różniczkowalna w* x_0 *oraz*

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)}\, G'(x_0).$$

Dowód.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

$$\begin{aligned} F\left(G(x_0 + h)\right) - F(G(x_0)) = & \\ & = F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\ & = F(G(x_0)) + F'(G(x_0)) \cdot (G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + \\ & = r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)). \end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) = & \\ & = F'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0)) \cdot r_1(x_0, h_1) + \\ & = r_2 \cdot (G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)). \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\frac{r_3}{||h_1||} \to 0,$$

ale

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{||h_1||} = & F'(G(x_0)) \frac{r_1(x_0, h_1)}{||h_1||} + \\ & + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0} \cdot \underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}}, \end{aligned}$$

ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem $F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 $\square$

Przykład 3. $f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$

Policzmy H'. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}, \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn.

$$H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \cdot \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$$

Przykład 4. *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*
$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$\Psi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r,\varphi) \\ \Psi_2(r,\varphi) \end{bmatrix}$ $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Szukamy pochodnej H, ale

$$f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$H' = \Big[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje:

$$\Big[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\Big] = \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\Big]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_2(r,\varphi)}$$