0.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Potencjał pola niestacjonarnego} \mathcal{V}(x,y,z,t)\\
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ - } \textit{Natężenie pola } \mathcal{E}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6\\
&\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1\\
&\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1\\
&.
\end{aligned}$$

Definicja 1. *(Ciągłość Heine)*
Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. *Mówimy, że odwzorowanie* $T : X \to Y$ *jest ciągłe w punkcie* x_0*, jeżeli*

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

Uwaga: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie 1. *Czy ciągłość w* $\mathbb{R}^n \iff$ *ciągłośc w* $\mathbb{R}^1$*?*

Przykład 2. *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f *- ciągła w* $(0,0)$*? dla trajektorii I:*

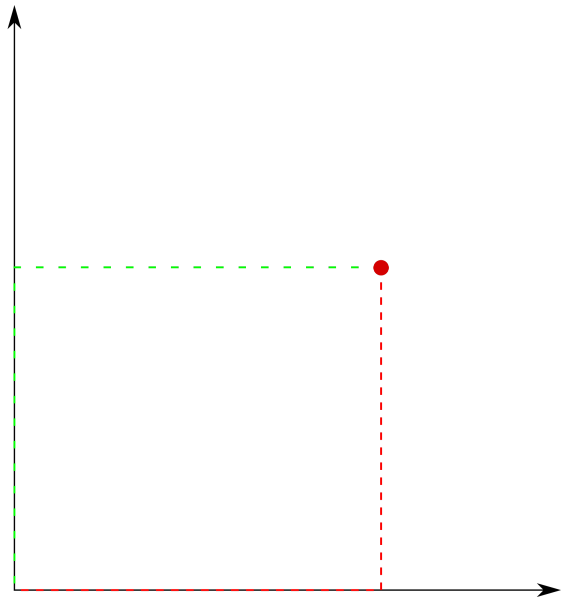
$$\lim_{y_n \to 0}(\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0}(0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \to 0}(\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0}(0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Definicja 2. *(Ciągłość Cauchy)*
(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y.
Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x\in X}{\forall} d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Dowód. Heine $\iff$ Cauchy

$$\implies_{\text{(przez sprzeczność)}}$$

Zakładamy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0)$$

oraz

$$\underset{\epsilon>0}{\exists}, \underset{\delta>0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geqslant \epsilon \tag{1}$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n \to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (**??**), to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$\delta = 1:$

$$\exists_{x_1} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \dfrac{1}{2}:$

$$\exists_{x_2} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \dfrac{1}{3}:$

$$\exists_{x_3} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$\delta = \dfrac{1}{n}:$

$$\exists_{x_n} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon.$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0$, ale $T(x_n) \not\to T(x_0)$, więc mamy sprzeczność. $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że

$$\forall_{x_n \to x_0} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{x} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon, \tag{2}$$

czyli:

$$\forall_{\delta_1} \quad \exists_{N} \quad \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \tag{3}$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\forall_{\epsilon_1 > 0} \exists_{N_1} \forall_{n > N_1} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 (\text{dla } x_n \to x_0)$$

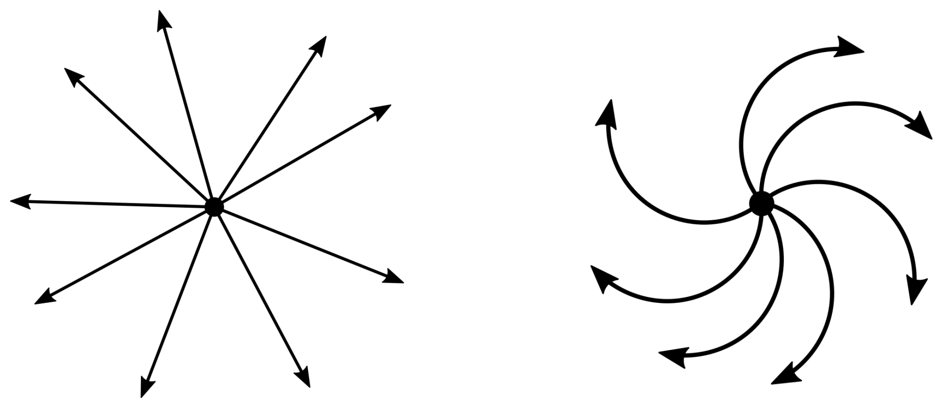
Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że $\exists_{\delta}$ spełniająca warunek (**??**) dla ϵ_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (**??**), czyli wiemy, że

$$\exists_{N} \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (**??**), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1$$

$\square$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

0.2 Różniczkowalność:

Definicja 3. *Pochodna cząstkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.
Mówimy, że f *ma w punkcie* x *pochodną cząstkową w kierunku* x^k*, jeżeli istnieje granica*

$$g \stackrel{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{x = x_0}$$

Przykład 3. *Pochodna cząstkowa*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Uwaga: *do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych.*

$$\textit{biegunowy} \ \to f(r, \varphi).$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(r, \varphi + h) - f(r, \varphi)}{h}.$$

Definicja 4. *Pochodna kierunkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ - otwarte, $x_0 \in \mathcal{O}, e \in \mathcal{O}, T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

Obserwacja: Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $e_y = (0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

Przykład 4. *Problemy z pochodną kierunkową:*

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. *Wówczas* $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0,0), e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

Uwaga: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$. *Pochodna:* $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$