

Rysunek 1: Wymiar pęczka może być większy! $m > n$

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech M - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma(t) \in M$ nazywamy krzywą na M . σ jest klasy \mathcal{C}^∞

Przykład 1. (*spirala na walcu*)

$$\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

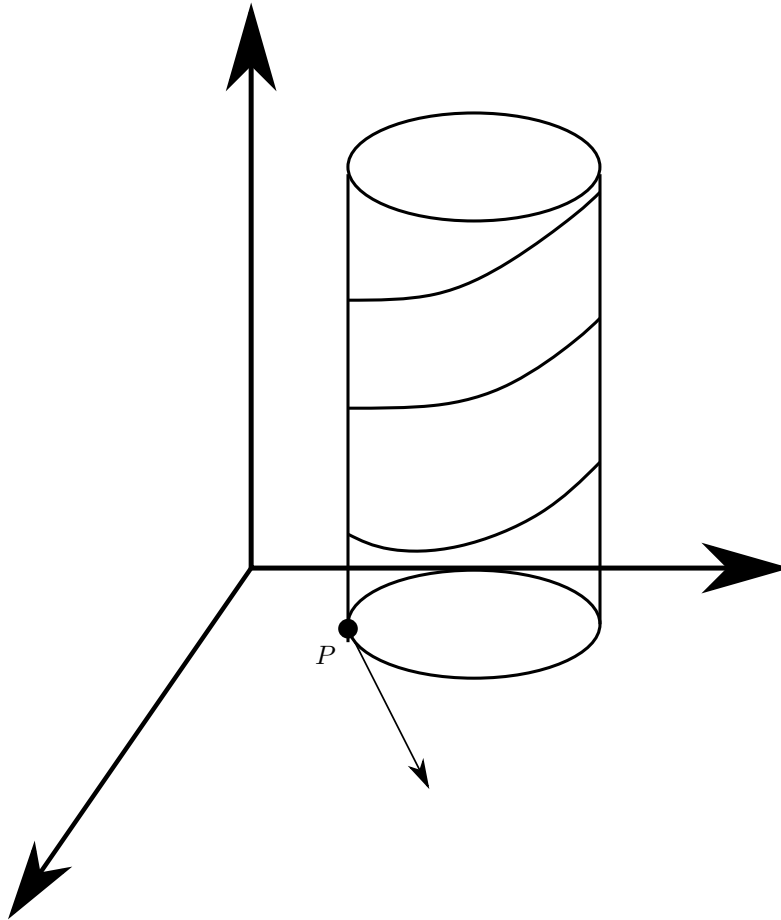
Definicja 1. Niech $p \in M$, σ_1, σ_2 - krzywe na M takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że σ_1 i σ_2 są styczne w punkcie P , jeżeli

$$\left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt $P \in M$. Na tym zbiorze wprowadzamy relację: $\sigma_1 \sim \sigma_2$ jeżeli σ_1 i σ_2 są styczne. Jeżeli σ krzywa przechodząca przez punkt P , to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie P nazwiemy $v = \underset{\text{równoważność}}{\overset{\text{klasa}}{[\sigma]}}$

Przykład 2. Weźmy krzywą $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Przykład 3. Niech $f(p) = C \forall_{p \in M}$. Ile wynosi $v(f)$?

$$\begin{aligned} v(f) &= v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli $v(f) = 2v(f)$, czyli $v(f) = 0$ (pochodna stałej = 0)

Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.

Pytanie 1. Jak można w praktyce zrealizować taki operator?

Niech $v \in T_p M, v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

Definicja 2. Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie $p \in M$ oznaczamy przez $T_p M$ i nazywamy przestrzenią styczną.

Chcemy wyposażyć $T_p M$ w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań. Niech $v_1, v_2 \in T_p M$ i $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$. Wówczas

$$\begin{aligned} v_1 \diamond v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)] \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot v_1 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1))]. \end{aligned}$$

$T_p M$ wraz z działaniami (\diamond, \cdot) ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M, T_p M\}$$

nazywamy wiązką styczną.

Pytanie 2. Czy w TM możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?

Odpowiedź: NIE DA SIĘ

Definicja 3. Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie P oznaczamy przez $D_p M$

Chcemy nadać $D_p M$ strukturę przestrzeni wektorowej.

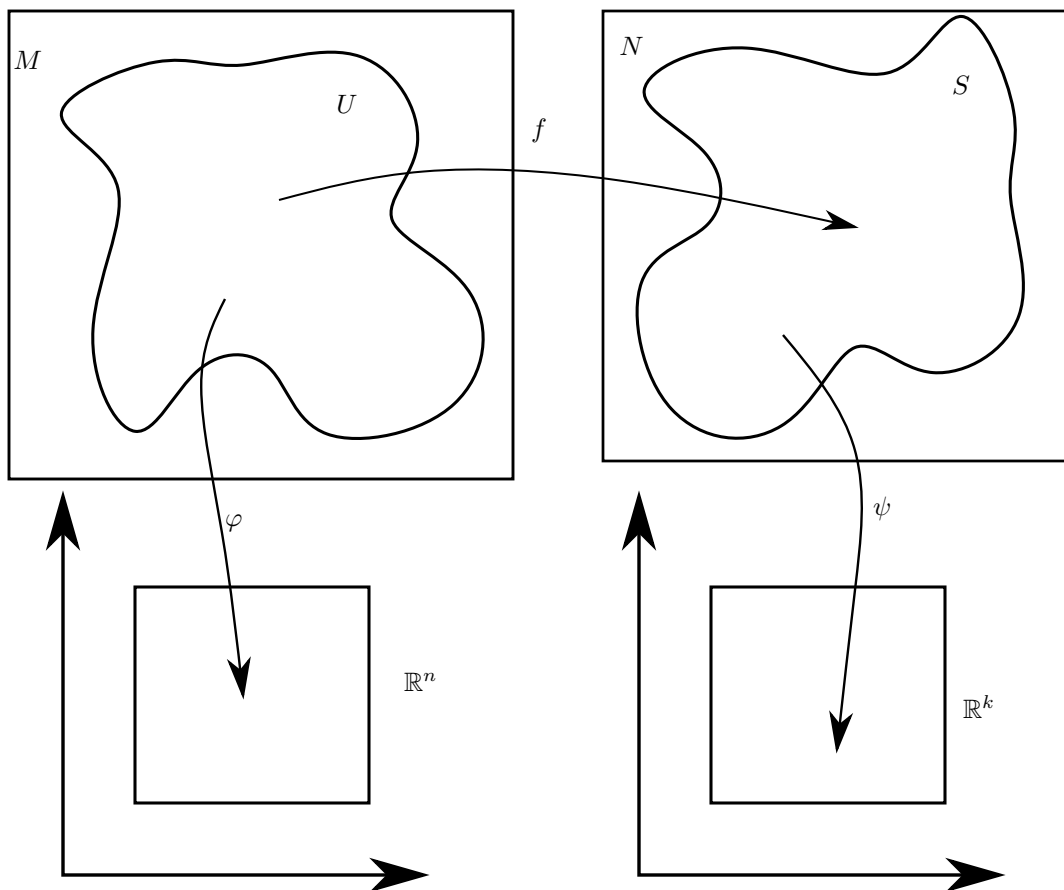
$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in D_p M, f \in C^\infty(M) &\implies (v_1 \diamond v_2)f \stackrel{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha \bowtie v_1)f &= \alpha \cdot v_1(f) \end{aligned}$$

Pytanie 3. Co to znaczy, że f - klasy $C^\infty(M)$?

Jeżeli $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ - jest klasy C^∞ .

Związek między $T_p M$, a $D_p M$:

Niech $v = 5e_x + 6e_y \in T_p M$. Czy znajdziemy odwzorowanie z $T_p M$ do $D_p M$, (które dokładnie jednemu v przyporządkowałoby jeden element). \rightarrow izomorfizm między $T_p M$ i $D_p M$.



Rysunek 2: f nie musi być bijekcją jakby co

0.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, f - klasy $\mathcal{C}^\infty(M)$

niech $v(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, takie, że

$$\forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{f \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(\alpha f) = \alpha v(f)$$

$$\forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p)v(f).$$

$v(\cdot)$ spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie p .