

Pytanie:

Czy kolumny $R(t, t_0)$ są liniowo niezależne $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$?

Wiemy, że $R(t, t_0) = \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Chcielibyśmy, żeby $\forall_{t, t_0 \in [a, b]} \det R(t, t_0) \neq 0$.

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ możemy związać macierz $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$.

Zatem $\det A$ uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz A z pierwszą kolumną D^T .

Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz A przez drugą kolumnę D^T ?

Przykład 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ i wtedy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, zatem $AD^T = \sum_{i=1}^n D_{ik} a_{si} = \delta_{ks} \det A$

Twierdzenie 1 (Liouville)

Jeżeli $R(t, t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(x)x(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

i $x \in \mathbb{R}^n$, to $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$, gdzie $w(t) = \det R(t, t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wronskianem.

Uwaga:

Zauważmy, że $w(t)$ nigdy nie będzie równa zero, bo $w(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$ a

$\left| \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds \right| < +\infty$ (bo $A(t) \rightarrow$ lipszycowalna).

Oznacza to, że kolumny $R(t, t_0)$ są $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$ liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn $R(t, t_0)$

Dowód 1 Rezolwenta jest postaci:

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie $u_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$.

Wiemy, że $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$.

Obserwacja: policzmy $\det R(t, t_0)$ względem pierwszego wiersza:

$$w(t) = (-1)^{1+1} u_{11}(t) \begin{bmatrix} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix} + (\text{brak } u_{11}).$$

Zatem $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$ i ogólnie $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$.

Zatem $w(t)$ możemy potraktować jako funkcję od $n \times n$ zmiennych. $w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{nn}(t))$,
zatem

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}} \frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$ to znaczy, że

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^n a_{ks} u_{si}.$$

Czyli

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \sum_{k,i} D_{ki} \sum_s a_{ks} u_{si} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} D_{ki} u_{si} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} \delta_{ks} w(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk} w(t) \end{aligned}$$

Zatem $\frac{\partial w}{\partial t} = \text{tr}(A(t)) \cdot w(t)$. Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:

$$\int_{t_0}^t \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \rightarrow w(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} e^{\ln \ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} \quad \square$$

0.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \dots + a_{n-1} x^{n-1}(t) \quad (1)$$

(gdzie $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$).

Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.

Możemy zapisać (??) jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \sum_j \frac{t-t_0}{j} (a - \lambda_i \mathbb{I})^{\ln_i - 1} \underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki $w(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$

Przykład 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} a_1 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+4} a_2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} (a_3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0 \cdot 1 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \lambda^4$$

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' + a_3 x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = t e^t$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x + a_1 x' + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\lambda^n = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1}.$$

Polóżymy $x = e^{\lambda t} \rightarrow$ skrót mnemotechniczny

$$e^{\lambda t} \lambda^n = e^{\lambda t} a_0 + a_1 \lambda e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t}.$$

0.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki x_0^i we wzorze (*) bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy A ?

Przykład 3 Niech $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ i $x(0) = 0, x'(0) = 1$ i wiemy, że $\lambda^2 + \omega^2 = 0$.

Oznacza to, że $x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} (*)$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\omega, & n_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -i\omega, & n_2 &= 1. \end{aligned}$$

gdzie A i B nieznane, ale wiemy, że $x(0) = 0$ i $x'(0) = 1$ i $x'(t) = A i \omega e^{i\omega t} - B i \omega e^{-i\omega t}$.

Czyli

$$\begin{aligned} Ae^0 + Be^{-0} &= 0 \implies -A = +B \\ Ai\omega e^0 - Bi\omega e^{-0} &= 1 \\ 2Ai\omega &= 1 \\ A &= \frac{1}{2i\omega} \\ B &= -\frac{1}{2i\omega}. \end{aligned}$$

Czyli

$$x(t) = \frac{1}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Pytanie 1 Czy możemy zmienić bazę w równaniu (*)?

Odp: Możemy. Na przykład przyjmując $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Wówczas

$$\begin{aligned} x'(t) &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ x(0) &= A = 0 \\ x'(0) &= B\omega = 1 \rightarrow B = \frac{1}{\omega} \implies x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Pytanie 2 Co robić z niejednorodnością? (Dla równań wyższych rzędów)

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + b, \frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x}, \vec{x} = R(t, t_0)x_0.$$

Przykład 4

$$\ddot{x} + \omega^2 x = e^t(\Delta).$$

Wiemy, że rozwiązaniem problemu $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ jest $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

Może uzmiennimy stałe:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{A}(t) \cos(\omega t) - At \sin(\omega t) + \dot{B} \sin(\omega t) + B(t)t \cos(\omega t). \end{aligned}$$

W efekcie dostaniemy równanie drugiego rzędu na $A(t)$ i $B(t)$:

Zapiszmy więc równanie (Δ) w postaci macierzowej.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} (\Delta \nabla).$$

Jak wygląda rezolwenta?

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ i } \frac{d}{dt} R(t, t_0) = AR(t, t_0), R(t_0, t_0) = 1.$$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = R(t, t_0)x_0 \right).$$

Zauważmy, że skoro

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ x'(t) &= A (\cos(\omega t))' + B (\sin(\omega t))' \\ \text{to wtedy } \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

I możemy zbudować macierz

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u'_{11} & u'_{12} \end{bmatrix},$$

która od rezolwenty różni się tym, że w $t = t_0$ nie zmienia się w macierz jednostkową.

Uzmienniamy stałe:

$$(\Leftarrow) \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

i wstawiamy do $(\Delta \nabla)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = [\dots] + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{B}(t) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\Leftarrow) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \text{ ale} \\ & \left(\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ (\cos \omega t)' & (\sin \omega t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Czyli mamy:

$$\begin{aligned} & A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t = 0 \\ & A'(t) (\cos \omega t)' + B'(t) (\sin \omega t)' = e^t \\ & x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ & x(t) = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t \\ & x'(t) = A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t + A(t) (\cos \omega t)' + B(t) (\sin \omega t)'. \end{aligned}$$