Pytanie 1. *Czy kolumny $R(t,t_0)$ są liniowo niezależne $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$?*

$$\text{Wiemy, że } R(t,t_0) = \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Chcielibyśmy, żeby $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall} \det R(t,t_0) \neq 0$.

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_n \end{bmatrix}$ możemy związać macierz $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$.

Zatem $\det A$ uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz A z pierwszą kolumną D^T.
Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz A przez drugą kolumnę D^T?

Przykład 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *i wtedy*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

zatem $AD^T = \sum_{i=1}^n D_{ik} a_{si} = \delta_{ks} \det A$

Twierdzenie 1. *(Liouville)*
Jeżeli $R(t,t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

i $x \in \mathbb{R}^n$, to $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}$, gdzie $w(t) = \det R(t,t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wrońskianem.

Uwaga:
Zauważmy, że $w(t)$ nigdy nie będzie równa zero, bo

$$w(t_0) = \det(R(t_0,t_0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

a $\left| \int_{t_0}^t trA(s)ds \right| < +\infty$ (bo $A(t) \to$ lipszycowalna).
Oznacza to, że kolumny $R(t,t_0)$ są $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$ liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn $R(t,t_0)$

Dowód 1. *Rezolwenta jest postaci:*

$$R(t,t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie $u_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$.
Wiemy, że $\frac{dR(t,t_0)}{dt} = A(t)R(t,t_0)$.
Obserwacja: policzmy $\det R(t,t_0)$ *względem pierwszego wiersza:*

$$w(t) = (-1)^{1+1}u_{11}(t)\begin{bmatrix} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix} + (\text{ brak } u_{11}).$$

Zatem $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$ *i ogólnie* $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$.
Zatem $w(t)$ *możemy potraktować jako funkcję od* $n \times n$ *zmiennych.*

$$w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{nn}(t)),$$

zatem

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}}\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}}\frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}}\frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro $\frac{dR(t,t_0)}{dt} = A(t)R(t,t_0)$ *to znaczy, że*

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}u_{si}.$$

Czyli

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{k,i} D_{ki}\sum_{s} a_{ks}u_{si} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}D_{ki}u_{si} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\delta_{ks}w(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}w(t)$$

.

Zatem $\frac{\partial w}{\partial t} = tr(A(t)) \cdot w(t)$. *Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:*

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \to w(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} e^{\ln\ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} \quad \square$$

0.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}(t) \tag{1}$$

(gdzie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$).
Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.
Możemy zapisać (1) jako

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n}(t) \end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \sum_j \frac{t-t_0}{j} (a - \lambda_i \mathbb{I})^{\ln_i - 1} \underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki $w(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$

Przykład 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3-\lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+4}a_1\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}a_2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+4}(a_3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0\cdot 1 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - a_3\lambda^3 + \lambda^4$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = a_0x + a_1x' + a_2x'' + a_3x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = te^t$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} = a_0x + a_1x' + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Połóżmy $x = e^{\lambda t} \rightarrow$ skrót mnemotechniczny

$$e^{\lambda t}\lambda^n = e^{\lambda t}a_0 + a_1\lambda e^{\lambda t} + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}.$$

0.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki x_0^i we wzorze $(*)$ bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy A?

Przykład 3. *Niech $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ i $x(0) = 0, x'(0) = 1$ i wiemy, że $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Oznacza to, że $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}(*)$,*

$$\lambda_1 = i\omega, \qquad n_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -i\omega, \qquad n_2 = 1.$$

gdzie A i B nieznane, ale wiemy, że $x(0) = 0$ i $x'(0) = 1$ i $x'(t) = Ai\omega e^{i\omega t} - Bi\omega e^{-i\omega t}$.

Czyli

$$
\begin{aligned}
&Ae^0 + Be^{-0} = 0 \implies -A = +B \\
&Ai\omega e^0 - Bi\omega e^{-0} = 1 \\
&2Ai\omega = 1 \\
&A = \frac{1}{2i\omega} \\
&B = -\frac{1}{2i\omega}.
\end{aligned}
$$

Czyli

$$x(t) = \frac{1}{2i\omega}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Pytanie 2. *Czy możemy zmienić bazę w równaniu (*)?*

Odp: Możemy. Na przykład przyjmując $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\
&x(0) = A = 0 \\
&x'(0) = B\omega = 1 \to B = \frac{1}{\omega} \implies x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).
\end{aligned}
$$

Pytanie 3. *Co robić z niejednorością? (Dla równań wyższych rzędów)*

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + b, \frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}, \vec{x} = R(t, t_0)x_0.$$

Przykład 4.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = e^t (\Delta).$$

Wiemy, że rozwiązaniem problemu $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ *jest* $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. *Może uzmiennimy stałe:*

$$
\begin{aligned}
&x(t) = A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t) \\
&\dot{x}(t) = \dot{A}(t)\cos(\omega t) - At\sin(\omega t) + \dot{B}\sin(\omega t) + B(t)t\cos(\omega t).
\end{aligned}
$$

W efekcie dostaniemy równanie drugiego rzędu na $A(t)$ *i* $B(t)$ *:(*
Zapiszmy więc równanie (Δ) *w postaci macierzowej.*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}(\Delta\nabla).$$

Jak wygląda rezolwenta?

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \ i \ \frac{d}{dt}R(t, t_0) = AR(t, t_0), R(t_0, t_0) = 1.$$

$\left(\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = R(t,t_0)x_0\right)$.

Zauważmy, że skoro

$$\begin{aligned}
&x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
&x'(t) = A\left(\cos(\omega t)\right)' + B\left(\sin(\omega t)\right)' \\
&\textit{to wtedy } \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

I możemy zbudować macierz

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u'_{11} & u'_{12} \end{bmatrix},$$

która od rezolwenty różni się tym, że w $t = t_0$ *nie zmienia się w macierz jednostkową. Uzmienniamy stałe:*

$$(\approx) \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

i wstawiamy do $(\Delta\nabla)$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = [\ldots] + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{B}(t) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\right)'\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\approx) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \textit{ ale} \\
&\left(\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\right)'\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & -\omega^2\sin\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & -\omega^2\sin\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ (\cos\omega t)' & (\sin\omega t)' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Czyli mamy:

$$\begin{aligned}
&A'(t)\cos\omega t + B'(t)\sin\omega t = 0 \\
&A'(t)\left(\cos\omega t\right)' + B'(t)\left(\sin\omega t\right)' = e^t \\
&x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\
&x(t) = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \\
&x'(t) = A'(t)\cos\omega t + B'(t)\sin\omega t + A(t)\left(\cos\omega t\right)' + B(t)\left(\sin\omega t\right)'.
\end{aligned}$$