

Twierdzenie 1 Niech $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, f \in \mathcal{C}^2(U), G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, G \in \mathcal{C}^2(U_2), \exists_{x_0} G(x_0) = 0, G'(x_0)$ - ma rząd maksymalny (m) oraz

$$\exists_{\Lambda} \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_{\parallel}, h_{\parallel}) > 0, h_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \{G'(x_0)h_{\parallel} = 0\}.$$

to f posiada w x_0 minimum lokalne (< 0 , to maksimum lokalne) na zbiorze $M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$

Twierdzenie 2 Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - domknięty i $f : [a, b] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ takie, że f - ciągle na $[a, b] \times \mathcal{O}$ oraz f spełnia warunek Lipschitza na \mathcal{O} , to znaczy:

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in [a, b]} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Wówczas

$$\forall_{t_0 \in [a, b]} \cdot \forall_{x_0 \in \mathcal{O}} \cdot \exists_{\varepsilon > 0}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Twierdzenie 3 Jeżeli odwzorowania

$$t \in [a, b] \rightarrow A(t)$$

$$t \in [a, b] \rightarrow b(t).$$

Gdzie $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow X$ są ciągłe, to równanie

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$ jednoznacznie określone rozwiązanie na $t \in]a, b[$

Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycywalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times \mathcal{O}$, mamy $]a, b[\times X$

Twierdzenie 4 (Liouville)

Jeżeli $R(t, t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

i $x \in \mathbb{R}^n$, to $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$, gdzie $w(t) = \det R(t, t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wrońskianem.

Twierdzenie 5 (Lebesgue) Niech P - zbiór nieciągłości funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona na D , $D - \dots$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zera $\iff f$ - całkowalna na D .

Stwierdzenie 1 (X - domknięty, ograniczony) $\iff (X$ -zbiór zwarty)

Twierdzenie 6 (Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona. Wówczas f - (całkowalna na D) \iff (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Twierdzenie 7 (Fubiniego)

Niech $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l$, $B \subset \mathbb{R}^k$, $A \times B \subset \mathbb{R}^n$, f - ograniczona i całkowalna na $A \times B$. Oznaczmy $x^l \in A$, $y^k \in B$, A, B - kostki.

Niech

$$\varphi(x) = \int_B f(x^l, y^k) dy^k, \psi(x) = \int_A f(x^l, y^k) dx^l.$$

Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_B \psi.$$

Uwaga 1 całkowalność na $A \times B$ nie oznacza całkowalności na np. B .

Twierdzenie 8 (O zamianie zmiennych)

Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w \mathbb{R}^n i $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$, $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowalna. ξ - klasy \mathcal{C}^1 na Ω , ξ^{-1} klasy \mathcal{C}^1 na Θ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (2)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

Twierdzenie 9 Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Twierdzenie 10 Niech $O \subset \mathbb{R}^n$, O - otwarty. $f : O \rightarrow Y$, $x_0 \in O$. Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $i = 1, \dots, n$ i są ciągle w x_0 , wtedy $\forall_{h \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h)$, gdzie $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$

Twierdzenie 11 Niech $G : U \rightarrow Y$, $U \subset X$, U - otwarte, X - przestrzeń wektorowa unormowana, $F : G(U) \rightarrow Z$, $G(U) \subset V$

G - różniczkowalna w $x_0 \in U$, F - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{\|h_1\|_x} \rightarrow 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{\|h_2\|_y} \rightarrow 0$$

Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w x_0
 oraz $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)} G'(x_0)$

Twierdzenie 12 Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, otwarty i $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, wówczas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i, j = 1, \dots, n$$

Stwierdzenie 2 jeżeli $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)))

Twierdzenie 13 Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathcal{O}, \mathcal{O}$ - otwarty, a f - klasy $\mathcal{C}^{2p}(\mathcal{O})$ oraz $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$

$$\begin{array}{c} \exists_{c>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad \forall_{h \in K(x_0, \eta)} : \quad \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geq c \|h\|^{2p} (\leq c \|h\|^{2p}) \\ \vdots \\ i_{2p}=1 \end{array}$$

to f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Twierdzenie 14 Twierdzenie $(L - \text{ograniczone}) \iff (L - \text{ciągłe})$

Stwierdzenie 3 Niech $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, U$ - otwarte, wypukłe $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in U} \|f'(x)\| \leq M$, to
 $\forall_{a, b \in U} \|f(b) - f(a)\|_n \leq M \|b - a\|_m$ (jakośkolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)

Twierdzenie 15 Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.

Twierdzenie 16 (Zasada Banacha o lustrach)
 Jeżeli $P : X \rightarrow X, P$ - zwężające, to

$$1. \quad \forall_{x_0 \in X} \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\} - \text{Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \quad (3)$$

$$2. \quad \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \quad (4)$$

$$3. \quad \forall_m \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (5)$$

Twierdzenie 17 (o lokalnej odwracalności)

Niech $f : E \rightarrow E$, E - otwarty, $E \subset \mathbb{R}^N$, f - różniczkowalna w sposób ciągły na E . (f - klasy $\mathcal{C}^1(E)$), $\exists_{a,b \in E} :$

$f(a) = b \wedge f'(a)$ - odwracalna ($\det(f'(a)) \neq 0$), to:

1. $\exists_{U,V \subset E}, \exists_{a \in U, b \in V}, U, V$ - otwarte, f - bijekcja między U, V
2. $\exists_{g:V \rightarrow U} \cdot \forall_{x \in V}, f(g(x)) = x, g$ - ciągła i różniczkowalna na V

Twierdzenie 18 (o funkcji uwikłanej)

Niech $H : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, H \in \mathcal{C}^1$ na E . $(x_0, y_0) \in E, H(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m), H$ - odwracalna.

Wówczas istnieje $U \subset E$ takie, że $(x_0, y_0) \in U, \exists_{W \subset \mathbb{R}^n},$ że $x_0 \in W, \forall_{x \in W} \exists!_{y \in \mathbb{R}^m} H(x, y) = 0, (x, y) \in U$.

Jeżeli $y = \varphi(x)$, to $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $\varphi \in \mathcal{C}^1$ na W . $\varphi'(x) = -(H'_y)^{-1} H'_x$