Przykład 1

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x(t)\\p(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\p(t)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x(t=0)\\p(t=0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\p_0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\p(t)\end{bmatrix}=e^{(t-0)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_0\\p_0\end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\0 & -1-\lambda\end{bmatrix}=-(1-\lambda)(1+\lambda)=-(1-\lambda^2)=0 \iff \lambda_1=1,\lambda_2=1.$$

$$f(\lambda)=e^{\lambda t}, f(\lambda)=q(\lambda)w(\lambda)+a\lambda+b.$$

$$f(-1)=-a+b, f(1)=a+b.$$

$$b=\frac{f(-1)+f(1)}{2}=\frac{e^{-t}+e^t}{2}, a=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\p(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)}_{R(t,t_0)}\begin{bmatrix}x_0\\p_0\end{bmatrix}.$$

Pytanie 1 *Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia $R(t,t_0)$?*

Obserwacja 1 *Załóżmy, że macierz $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych.*

$$\begin{matrix}\lambda_1, & \lambda_2,\lambda_3,\ldots\\ v_1, & v_2,v_3,\ldots.\end{matrix}$$

Obserwacja 2 *Jeśli $v\in ker(A-\lambda\mathbb{I})$, to znaczy, że*

$$\begin{aligned}Av&=\lambda v\\A^2v&=\lambda^2v\\A^nv&=\lambda^nv\\e^Av&=e^{\lambda t}v.\end{aligned}$$

Jeżeli zatem przdstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\begin{aligned}\overline{x_0}&=x_0'+x_0^2+\ldots+x_0^n\\e^{A(t-t_0)}\overline{x_0}=sum_{i=1}^n e^{A(t-t_0)}x_0^i&=sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)}x_0^i\\ &.\end{aligned}$$

Obserwacja 3 *najogólniesza postać λ_j (pierwiastki równania $w(\lambda)=0$) to*

$$\lambda_j=a_j+ib_j.$$

Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy n różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt),\quad \sin(bt),\quad e^{at},\quad ch(at),\quad sh(at),\quad e^{at}\sin(bt),\quad e^{at}\cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 0$$
$$\dot{x} = p$$
$$\dot{p} = \ddot{x} = -a\dot{x} - \omega^2 x$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}.$$

Załóżmy, że macierz $A \in M_n^n$ ma k różnych wartości własnych i A nie zależy od czasu

$$\lambda_1 \to n_1$$
$$\lambda_2 \to n_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_k \to n_k - V_k = ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}.$$

(gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$)

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus .. \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \ldots + x_0^k.$$

Wówczas

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^{k} e^{A(t-t_0)}x_0^i = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda\mathbb{I}(t-t_0)}x_0^i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A-\lambda\mathbb{I})(t-t_0)}x_0^i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A-\lambda_j\mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right)$$

ale $x_0^i \in ker(A - \lambda_i \mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_\lambda =$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A-\lambda_i\mathbb{I})^j \right) x_0^i.$$

Przykład 2 *Rozwiązać równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a + b + 2c = 0$$

$$-b + c = 0$$

$$c = b$$

$$-a - b + 2b = 0$$

$$a = 3b$$

$$v \in V_{\lambda_2} \iff v = \begin{bmatrix} 3b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_1} = ker(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = 0, v \in V_{\lambda_1} \iff v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0^1 \in V_{\lambda_1} + x_0^2 \in V_{\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i (t-to)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i =$$

$$= e^{\lambda_1 (t)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{2-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_1)^j \right) x_0^1 + e^{\lambda_2 t \mathbb{I}} (\mathbb{I}) \, x_0^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t^1}{1!} \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t\mathbb{I}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^t (a + bt) + e^{2t} + C.$$

0.1 Baza rozwiązań

Obserwacja 4 *Jeżeli* $x(t) = R(t,t_0)x_0$ *i* $R(t,t_0) \in M_n^n$*, to znaczy, że*

$$x(t) = [||||||] \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \left[|\right] + x_0^2 \left[|\right] + \ldots + x_0^n \left[|\right].$$

Pytanie 2 *Czy* $\det(R(t,t_0)) \neq 0$*?*

Jeżeli tak, to kolumny $R(t,t_0)$ możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i $\det R(t,t_0) \neq 0 \underset{t\in[a,b]}{\forall}$.
W bazie wektorów własnych macierz e^{At} wygląda tak (zakładamy n wartości własnych):

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{t*TrA} \neq 0.$$