

Mając \sharp możemy zdefiniować operację odwrotną:

$$\flat : T_p^*M \rightarrow T_pM, \text{ taką, że } \alpha \in T_p^*M, \alpha = v_i dx^i$$

to wtedy

$$T_pM \ni v \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^\flat = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie: $v^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j$, to mamy

$$\alpha^\flat = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Przykład 1

$$\begin{aligned} [g_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ v &= a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{\partial}{\partial \varphi}, \alpha = v^\sharp = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} v^j dx^i = \\ &= \frac{1}{2} (g_{11} v^1 dx^1 + g_{12} v^2 dx^1 + g_{13} v^3 dx^1) + (g_{21} v^1 dx^2 + g_{22} v^2 dx^2 + g_{23} v^3 dx^2) + \\ &+ (g_{31} v^1 dx^3 + g_{32} v^2 dx^3 + g_{33} v^3 dx^3). \end{aligned}$$

czyli mamy

$$\alpha = v^\sharp = 1 \cdot a dr + r^2 b d\theta + r^2 \sin^2 \theta c d\varphi.$$

Dostaliśmy z laboratorium wektor: $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a i_r + b i_\theta + c i_\varphi = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Chcemy ten wektorek podnieść.

$$\begin{aligned} \alpha &= v^\sharp = (g) dr + \left(r^2 \frac{b}{r} \right) d\theta + \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r \sin \theta} c \right) d\varphi = \\ &= a dr + r b d\theta + r \sin \theta c d\varphi \end{aligned}$$

Przykład 2 Niech $\alpha = a dr + b d\theta + c d\varphi$. Chcemy zrobić wektorek v , który jest dokładnie tyle:

$$v = \alpha^\flat = (1 \cdot a) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} b \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} c \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Czyli ta nasza } \alpha^\flat = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{r^2} \\ \frac{c}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} = a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b}{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{c}{r \sin \theta} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Okazuje się, że } \alpha^\flat = \begin{bmatrix} b \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r \sin \theta} \end{bmatrix} i_r, i_\theta, i_\varphi$$

Definicja 1 niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{b} (df)^b \in T_p M$$

nazywamy gradientem funkcji $f : \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (df)^b$, gdzie $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$, f - klasy $C^k(M)$

Przykład 3 $f(r, \theta, \varphi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$,
 $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} (df)^b &= 1 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Sila tego polega na tym, że jak dostaniemy na ulicy tensor metryczny, to przez 3 minuty w cieniu możemy obliczyć np. gradient funkcji:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix}.$$

Przykład 4 Dostaliśmy tensor metryczny i chcemy obliczyć $\nabla f(\xi, \eta, \delta)$, $\begin{bmatrix} \heartsuit & & \\ & \Delta & \\ & & \square \end{bmatrix}$.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\heartsuit}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\square}} \frac{\partial f}{\partial \delta} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll} M = \mathbb{R}^3 & \\ f \rightarrow \Lambda^0(M) & \dim \Lambda^0(M) = 1 \downarrow d \\ T_p M \xleftrightarrow[b]{\#} \Lambda^1(M) & \dim \Lambda^1(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^2(M) & \dim \Lambda^2(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^3(M) & \dim \Lambda^3(M) = 1. \end{array}$$

Definicja 2 Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \rightarrow \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "Hodge'a" i definiujemy następująco:

$$* (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_L}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_L j_L} \in_{j_1 j_2 \dots j_L k_1 k_2 \dots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-L}},$$

gdzie $\in_{i_1, \dots, i_n} = \{sgn(i_1, \dots, i_n) \text{ jeżeli } i_m \neq i_p, \quad 0 \text{ w.p.p}\}$

Przykład 5 $M = \mathbb{R}^3$, $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} *(dx) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{1j_1} \in_{j_1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \in_{1k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \\ &= \frac{1}{(3-1)!} g^{11} [\in_{123} dx^2 \wedge dx^3 + \in_{132} dx^3 \wedge dx^2] = \frac{1}{2} [1 \cdot dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^2] \\ &= dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Czyli $*(dx) = dy \wedge dz$.

$$\begin{aligned} *(dy) &= *(dx^2) = \frac{1}{(3-1)!} g^{22} \in_{2k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \\ g^{22} [\in_{213} dx^1 \wedge dx^3 + \in_{231} dx^3 \wedge dx^1] &= \frac{1}{(3-1)!} 1 [-dx^1 \wedge dx^2 + 1 dx^3 \wedge dx^1] = \\ &= dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Więc $*(dy) = dz \wedge dx$.

$$\begin{aligned} *(dz) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{33} \in_{3k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{2} g^{33} [\in_{321} dx^2 \wedge dx^1 + \in_{312} dx^1 \wedge dx^2] = \\ &= \frac{1}{2} 1 [-dx^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^2]. \end{aligned}$$

Więc $*(dz) = dx \wedge dy$

Przykład 6 $M = \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi), [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} *(dr) &= r^2 \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi \\ *(d\theta) &= r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} d\varphi \wedge dr \\ *(d\varphi) &= \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Pytanko jest takie: Chcemy zapytać co to jest $*(dx \wedge dy)$?

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-2)!} g^{1j_1} g^{2j_2} \in_{j_1 j_2 k_1} dx^{k_1} = \\ &= \frac{1}{(3-2)!} g^{11} g^{22} \in_{123} dx^3. \end{aligned}$$

Więc $*(dx \wedge dy) = dz$.

A np. $*(dx \wedge dz)$:

$$*(dx \wedge dz) = \frac{1}{(3-2)!} \epsilon_{132} dx^2 = -dy$$

$$*(dr \wedge d\theta) = r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r^2} d\varphi$$

$$*(dr \wedge d\varphi) = -r^2 \sin \theta \frac{1}{1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{\sqrt{g}}{(3-3)!} g^{1j_1} g^{2j_2} g^{3j_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} \epsilon_{123} = 1$$

$$*(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) = r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}.$$

Definicja 3 $M = \mathbb{R}^3$

niech $v \in T_p M$, operację

$$\text{rot}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (* (dv^\sharp))^\flat$$

nazywamy rotacją wektora v i oznaczamy $\text{rot } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \times v$.

Operację

$$\text{div } v \stackrel{\text{def}}{=} d(*v^\sharp)$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy $\text{div } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \cdot v$.

Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na M takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \rightarrow \Lambda^2(M)$

Pozakonkursowo: chcemy zrobić z funkcji funkcję:

$$f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \longrightarrow \underset{\text{operator Laplace}}{*d*df}}.$$