## 0.1 Ekstrema związane

przykład:

$$f(x,y) = x + y$$
,  $G(x,y) = (x-1)^1 + (y-1)^2 - 1$ ,  $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, G(x,y) = 0\}$ .

Szukamy minimum lub maksimum f na M Rozważmy linię o stałej wartości x+y

**Definicja 1.** Niech  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$  i  $M \subset \mathbb{R}^n$  - zbiór.

Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie  $x_0 \in M$ , jeżeli

$$\exists \underset{\substack{r \\ \|h\| < r \\ (x_0 + h) \in M}}{\forall} f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$

Niech  $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 

 $G(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 

 $M=\{(x,y),G(x,y)=0\}$  Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć y(x) z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej g(x)=f(x,y(x)). Kiedy nie umiemy wyliczyć y(x) z więzów, możemy założyć, że y(x) jednak istnieje i G(x,y(x))=0. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

czyli: 
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial x}} = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

A co by było, gdyby G(x,y) = 0 zadawał funkcję x(y)?

$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y)$$
  $P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$ 

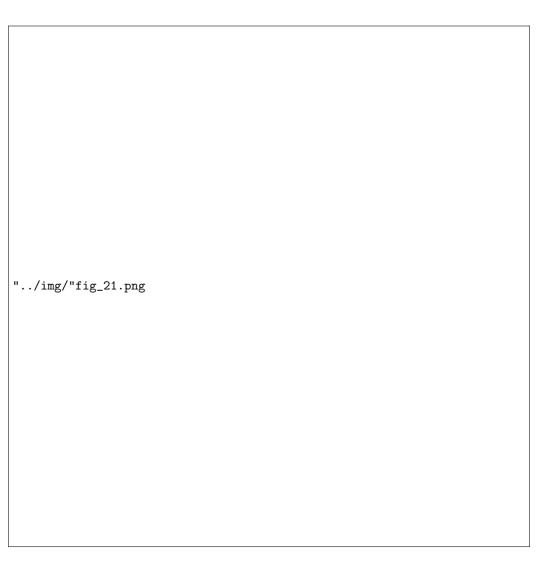
ale

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}$$
(1)

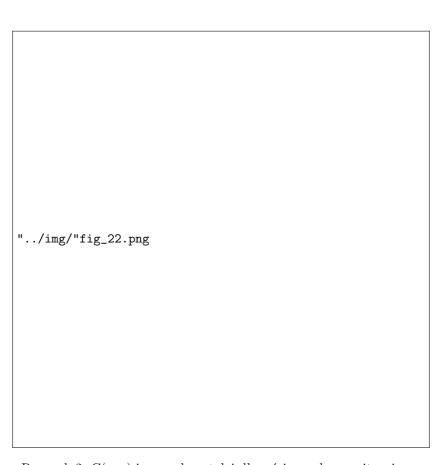
Co oznacza warunek 1?

Wiemy, że

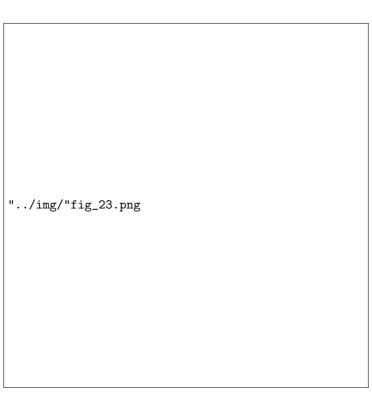
$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$



Rysunek 1: do poprzedniego wykładu



Rysunek 2:  $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 3: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???

 $"../img/"fig\_24.png$ 

Rysunek 4

$$V = [A,B] \quad W = [C,D] \text{ i } AD = BC.$$
 
$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby G'(x)=0, albo P'(y)=0 oznacza, że

$$\underset{\lambda \neq 0}{\exists} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$
 (2)

Wielkość  $\lambda$ często nazywa się  $mnożnikiem\ Lagrange$ 

**Obserwacja 1.** Do warunku (2) można dojść na skróty przez funkcję  $H(x,y) = f(x,y) - \lambda G(x,y)$  i badanie H(x,y) tak, jakby była to funkcja  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$  bez żadnych więzów.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$
,  $\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \left( + \text{warunek } G(x, y) = 0 \right)$ .

**Pytanie 1.** Co ze zbadaniem G''(x) lub P''(y)?

Odpowiedź: lepiej inaczej...(XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f''(x_0)(h, h).$$

