

$$\varepsilon = \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M} \right\}$$

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

Chcielibyśmy, żeby ε nie zależał od punktu w którym zaczniemy.
Zauważmy, że

$$\|A(t)x(t) + b(t)\| \leq L(\|x_0\| + r_2) + c$$

zatem

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{M} &\geq \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} = \left| \text{Połóżmy } r_2 = \|x_0\| + c \right| = \\ &= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} = \\ &= \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} \geq \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} = \\ &= \frac{1}{2L + 1}, \end{aligned}$$

zatem

$$\varepsilon = \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L + 1} \right\}$$

(r_1 - pomijamy, bo $A(t)$ - ciągła na $[a, b]$).

Oznacza to, że wartość ε nie zależy od x , zatem rozwiązanie początkowo określone na

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times K(x_0, r_2)$$

możemy przedłużyć do określonego na całym $[a, b] \times X$!

0.1 Rezolwenta

Rozwiązaniem problemu Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

jest funkcja $x(t, t_0, x_0)$

Pytanie 1. Czy istnieje

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Takie, że

$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

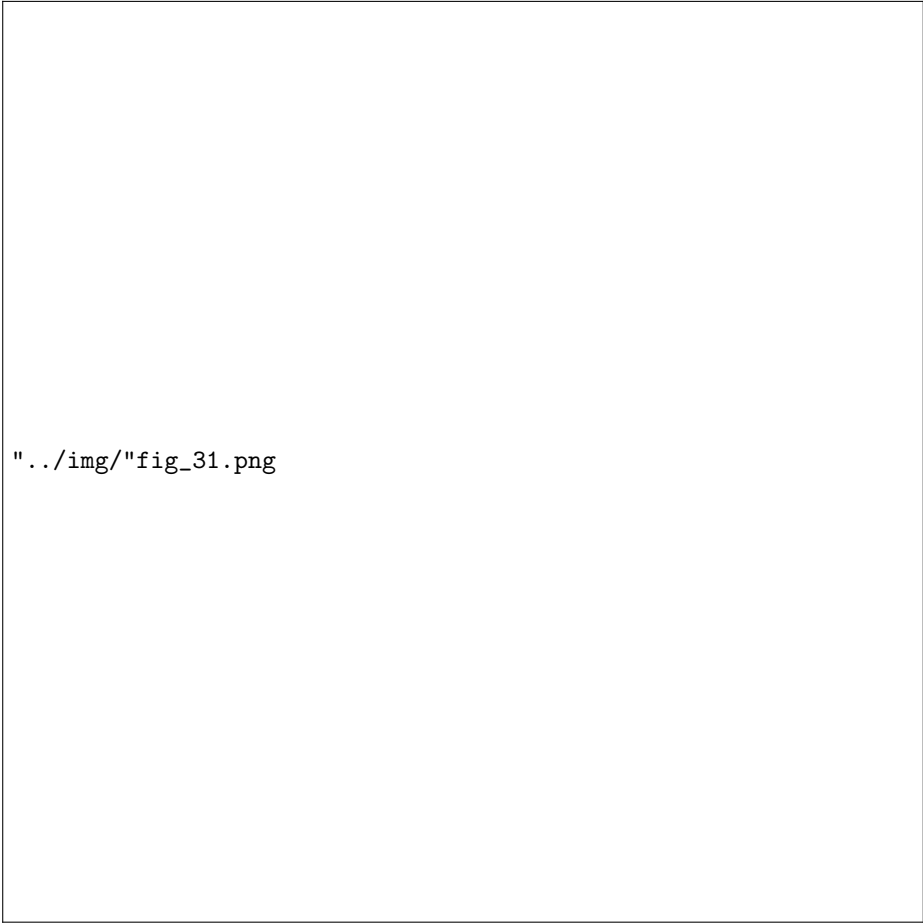
(Jeżeli $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$)

Definicja 1. Jakie własności $R(t, t_0)$ powinno posiadać?

1. $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, R - liniowy

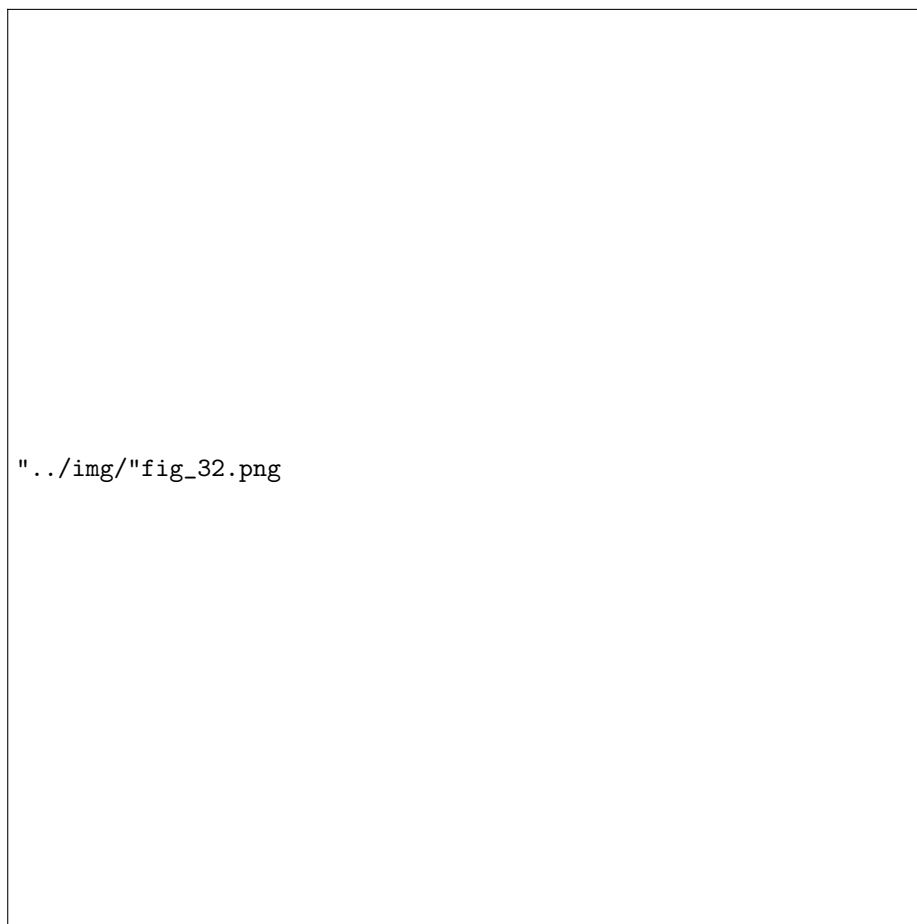
Bo jeżeli $x_1(t), x_1(t_0) = x_0^1$ i $x_2(t), x_2(t_0) = x_0^2$ są rozwiązaniem, to chcielibyśmy, by $x_1(t) + x_2(t)$ też było rozwiązaniem z wartością początkową $x_0^1 + x_0^2$. Rys ??

2. funkcja $R(t, t_0)$



`"../img/"fig_31.png`

Rysunek 1: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi



Rysunek 2: Jak pośpimy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)

$$3. R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0) \\ \forall \\ t, t_0, s \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$$

$$4. R(t_0, t_0) = \mathbb{I}, \text{ bo } x(t) = R(t, t_0)x_0 \quad \forall \\ t_0 \in \mathcal{O}$$

Ad 3. Wstawiając t_0 do trzeciej kropki otrzymujemy

$$R(t_0, t_0) = R(t_0, s)R(s, t_0) \rightarrow \forall_{t, s \in \mathcal{O}} R(s, t) = R(t, s)^{-1}$$

5.

$$\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0), \\ R(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

bo wtedy $x(t) = R(t, t_0)x_0$ jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0.$$

$$\text{bo } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)x_0) = A(t)R(t, t_0)x_0 = A(t)x(t) \text{ i } x(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie $x(t) = R(t, t_0)x_0$ da nam jednoznaczne rozwiązanie.

Pytanie 2. A co z $b(t)$? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)

Chcemy rozwiązać problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0.$$

Założmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t) = R(t, t_0)C(t), C(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)c(t)) = \frac{dR(t, t_0)}{dt}c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \quad / R(t, t_0)^{-1}.$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)^{-1}b(t).$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)b(t).$$

$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale $c(t_0) = x_0$, więc $\alpha = x_0$.

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t, t_0)c(t) = R(t, t_0) \left(x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds \right) = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, s)b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds.$$

dygresja:

dają nam rozkład gęstości masy $\rho(x')$. Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x - x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to $\frac{1}{\|x - x'\|}$

Pytanie 3. *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ spełnia warunki 1 – 5 dla rezolwenty

- $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $R(t, t_0)$ - jest ciągła względem t i t_0
- $R(t, \alpha)R(\alpha, t_0) = R(t, t_0)$, bo $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^\alpha A(s)ds + \int_\alpha^t A(s)ds}$
 $R(t, t_0) = R(t, \alpha)R(\alpha, t_0)$
- $R(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$
- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t, t_0)$

Dowód:

$$\begin{aligned} \frac{R(t+h, t_0) - R(t, t_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left(e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right) = . \\ &= \frac{1}{h} \left[e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right] = . \\ \frac{1}{h} \left[e^{\int_t^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I} \right] e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} &- \frac{1}{h} \left[e^{hA(\beta) - \mathbb{I}} \right] R(t, t_0) = . \\ \frac{1}{h} \left[\mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \dots = \mathbb{I} \right] R(t, t_0) &= . \end{aligned}$$

$$A(\beta)R(t, t_0) + h[\dots] \rightarrow A(t)R(t, t_0).$$

$$t < \beta < t+h$$

$$((((\int_t^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta))))))$$

Przykład 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$