Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$
\begin{aligned}
&v = [\sigma], v \in T_pM, v() \in D_pM \\
&v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} \\
&v() = ?\cdot ? + ?\cdot ? + ?\cdot ? = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t))|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \ldots, \varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Czyli jeżeli $v \in T_pM$ i $v \in [\sigma]$, to wiemy, że

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1 + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n = \\
&= \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n = \\
&= \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} = v(f).
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
v() = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.
$$

Przykład 1. *Więc niech* $v = 2e_x + 3e_y \to v() = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$.

Wniosek: mając izomorfizm między T_pM i D_pM możemy zapisać bazy:

$$
T_pM = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle .
$$

To wtedy

$$
D_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle .
$$

np. $v = 7e_r + 8e_\varphi \to v() = 7\frac{\partial}{\partial r} + 8\frac{\partial}{\partial \varphi}$ (często użyjemy bazy z D_pM jako bazy T_pM).

Definicja 1. *Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe* $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$. *Zbiór jednoform* ($p \in M$) *oznaczamy przez* T_p^*M *(lub* $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$*)*

Skoro T_p^*M jest dualna do T_pM, to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną. $T_p^*M = \left\langle dx^1, dx^2, \ldots, dx^n \right\rangle$, gdzie $\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \delta^i_j$

Przykład 2. *Niech* $\Lambda^1(M) \to \omega = 7dx + 3dy, v \in T_pM = 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$, *wówczas*

$$
\begin{aligned}
&\langle \omega, v \rangle = \left\langle 7dx + 3dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
&= \left\langle 7dx, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \left\langle dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
&= 7 \cdot 2 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 7 \cdot 4 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \cdot 2 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 3 \cdot 4 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
&= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4.
\end{aligned}
$$

Przykład 3.

$$
\begin{aligned}
&v = A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz = \\
&= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.
\end{aligned}
$$

"../img/"fig_50.pdf

Rysunek 1: Strumień przez balonik

Definicja 2. *Zbiór wszystkich odwzorowań $T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k-formami.*

Definicja 3. *Niech $\alpha \in T_p^*M, \beta \in T_p^*M(\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$.*
Odwzorowanie $\wedge : T_p^*M \times T_p^*M \to \Lambda^2(\theta), \theta \in M$ nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w\rangle \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Przykład 4. *Niech $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}, w = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$*
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w\rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7\cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tzn. $\alpha \wedge \alpha = 0$. Ważny przykład:

Przykład 5.

$$\begin{aligned}
&\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\
&\alpha \wedge \beta = (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\
&= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\
&+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\
&+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\
&= (A_x B_y - A_y B_x)\, dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y)\, dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z)\, dz \wedge dx
\end{aligned}$$

.

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

Definicja 4. *Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:*

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \to \mathbb{R} \\
&(\textit{funkcje nazywamy zero-formami } f \in \Lambda^0(\theta)) \\
&\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \\
&dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).
\end{aligned}$$

Przykład 6. *$f(r, \theta, \varphi)$ - funkcja z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^1$.*

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\
&\alpha = 7x^2 y dx \\
&d\alpha = d(7x^2 y) \wedge dx = \left(\frac{\partial}{\partial x}(7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y}(7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx.
\end{aligned}$$

Przykład 7. *Niech* $F = -E_x dt\wedge dx - E_x dt\wedge dy - E_z dt\wedge dz + B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy$

$$\begin{aligned}
dF &= \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}dy - \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right)\wedge dt\wedge dx+\\
&+\left(-\frac{\partial E_y}{\partial x}dx - \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\right)\wedge dt\wedge dy+\\
&+\left(-\frac{\partial E_z}{\partial x}dx - \frac{\partial E_z}{\partial y}dy\right)\wedge dt\wedge dz+\\
&+\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}dt + \frac{\partial B_x}{\partial x}dx\right)\wedge dy\wedge dz+\\
&+\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}dt + \frac{\partial B_y}{\partial y}dy\right)\wedge dz\wedge dx+\\
&+\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}dt + \frac{\partial B_z}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy =\\
&= \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\right)} dt\wedge dx\wedge dy+\\
&+\underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right)} dt\wedge dy\wedge dz+\\
&+\underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\right)}_{rot E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt\wedge dx\wedge dz+\\
&+\underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)}_{\nabla B} dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część) $dF = 0$