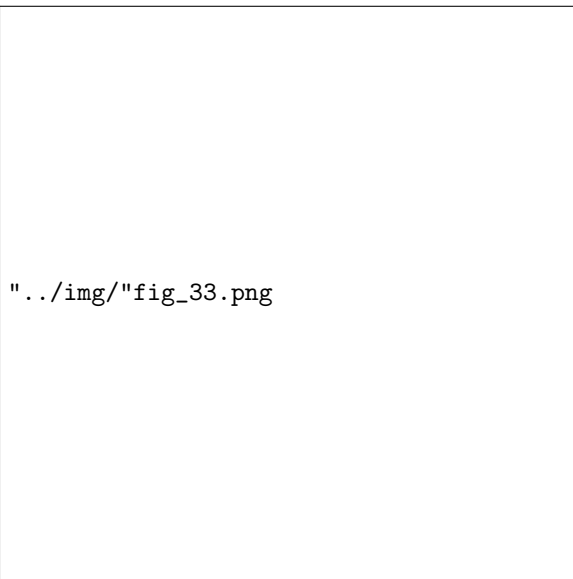


Chcemy dojść do tw Lebesque.

**Twierdzenie 1.** (Lebesque) Niech  $P$  - zbiór nieciągłości funkcji  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona na  $D$ ,  $D$  - ... jest zbiorem miary Lebesgue'a zera  $\iff f$  - całkowalna na  $D$ .

Wiemy, że  $f$  - całkowalna  $\iff$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$



"../img/"fig\_33.png

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geq \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja  $f$  na zbiorze  $A$  powinna być ograniczona!!!)

**Obserwacja 1.** Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogę wziąć ileś kartek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu kartek) przykryć go skończoną liczbą kartek?

Weźmy długi stół:

$$R = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]n-2, n+2[ \cup ]-n+2, n-2[ \cup ]0, 1[ \cup ]-2, 2[ \cup ]0, 1[ \cup ]-2019, 2018[ \cup ]-2, 2[ \cup ]0, 1[ = \bigcup_{n=2}^{\infty} ]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[.$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

"/img/"fig\_34.png

**Definicja 1.** Niech  $X$  - zbiór a  $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$  - rodzina zbiorów. Mówimy, że  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , jeżeli  $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$ . Jeżeli zbiory  $A_\alpha$  są otwarte, to mówimy, że  $F$  jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów  $A_\alpha$  jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór  $F$  taki, że jest też pokryciem zbioru  $X$  nazywamy podpokryciem.

**Definicja 2.** Zbiór  $X$  nazywamy zwartym, jeżeli z **każdego** pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

**Stwierdzenie 1.**  $(X - \text{domknięty, ograniczony}) \iff (X - \text{zbiór zwarty})$

**Dowód 1.** niech  $X \in \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  - przestrzeń metryczna

$\Leftarrow$  <sub>1</sub> Pokażemy, że jeżeli  $X$  - zwarty, to  $X$  - ograniczony. (przypomnienie: zbiór  $A \subset \mathbb{X}$  jest ograniczony jeżeli  $\exists x_0 \in A, \exists r$ , że  $A \subset K(x_0, r)$ ) Skoro  $X$  - zwarty, to niech  $F$  będzie pokryciem złożonym

z  $K(x, 1), x \in X$ .  $F = \left\{ K(x, 1), \forall x \in X \right\}$ .  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , ale ponieważ  $X$  - zwarty, to znaczy, że z pokrycia  $F$  możemy wybrać **skończone** podpokrycie, co oznacza, że zbiór  $X$  możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem  $X$  - ograniczony.

$\Leftarrow$  <sub>2</sub> Pokażemy, że  $X$  - zwarty, to  $X$  - domknięty. Pokażemy, że  $X'$  - zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego  $p \in X' \exists K(p, \tilde{r})$ , że  $K(p, \tilde{r}) \cap X = \emptyset$  co będzie oznaczało, że  $X'$  składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy  $q \in X$ , utwórzmy dwa otoczenia:

$$K(q, r), K(p, r); r = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Widać, że  $K(q, r) \cap K(p, r) = \emptyset$ . Powtarzamy taką procedurę dla każdego  $q \in X$ , oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru  $X$  kulami  $K(q, r_q), q \in X$ , ale  $X$  jest zbiorem zwartym więc mogę wybrać

"/img/"fig\_35.png

Rysunek 1: Nieważne, co  $A$  myśli o sobie, jeżeli otoczmy je kulą, to jest ograniczone i koniec

**skończoną** ilość kul

$K(q_1, r_1), K(q_2, r_2), \dots, K(q_k, r_k)$  będącą pokryciem zbioru  $X$ .  $A$  to znaczy, że

$$\underbrace{(K(p, r_1) \cap K(p, r_2) \cap \dots \cap K(p, r_k))}_{\text{jest do zbioru niepusty i otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1, r_1) \cup K(q_2, r_2) \cup \dots \cup K(q_k, r_k))}_{\text{Pokrywa cały } X} = \phi.$$

czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu  $P : K(p, r_k) \cap \dots K(p, r_k)$ , takie, że nie ma punktów wspólnych z  $X$ , więc  $p$  jest punktem wewnętrznym, czyli  $X'$  - otwarty, czyli  $X$  - domknięty.

$X$  - domknięty i ograniczony  $\implies X$  - zwarty. Niech  $P$  - kostka z  $\mathbb{R}^n$ , metryka  $d_2$ . Pokażemy, że  $P$  jest zwarta.

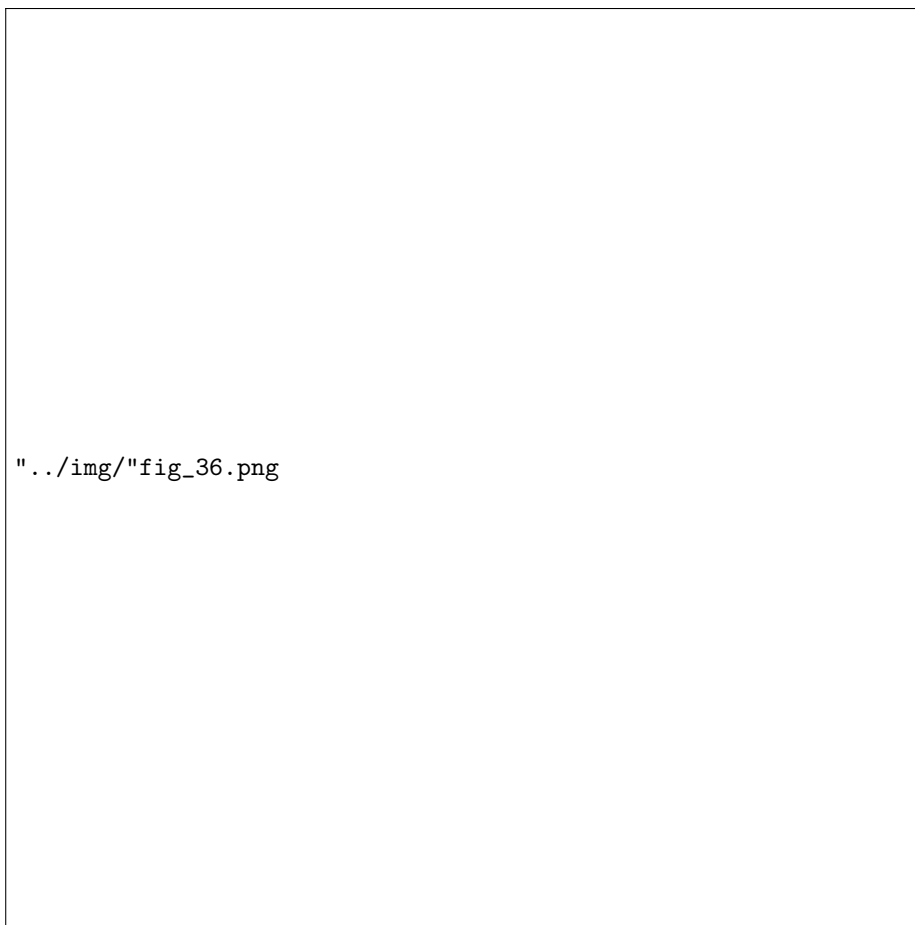
$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

$$\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:

Załóżmy, że  $P$  - domknięty i ograniczony i  $P$  nie jest zwarty. Co to znaczy, że  $P$  nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru  $P$  takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli  $P$  nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę  $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \dots \times [a_n, c_n]$  gdzie  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ , to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli  $P_1 \subset P$ , kulę  $P_1$  też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek  $PP_1P_2P_3 \dots P_n \dots$ . Weźmy ciąg



Rysunek 2: Przykrywanie zbioru kulami

elementów

$$\begin{aligned} x_0 &\in P \\ x_1 &\in P_1 \\ &\vdots \\ x_n &\in P_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Znaczy, że ciąg  $\{x_n\}$  jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg  $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$  czyli  $X_n$  jest zbieżny. (bo  $\mathbb{R}^n$  - zupełna). Niech  $\tilde{x}$  będzie granicą  $\{x_n\}$  a zbiór  $\{P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$  jest pokryciem  $P$  takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ , to znaczy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_n \forall_{n > N} . x_n \in K(\tilde{x}, \varepsilon).$$

Oznacza to, że mogę tak dobrać  $\varepsilon$ , że w  $K(\tilde{x}, \varepsilon)$  będą się zawierać wszystkie  $P_i, i > n$ . Mogę wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki  $P$ .

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

"../img/"fig\_37.png

i sprzeczność

Wracamy do tw. Lebesque'a. Obserwacja: Niech  $D$  - zwarty,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  - ograniczona i niech  $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$ . Wówczas:

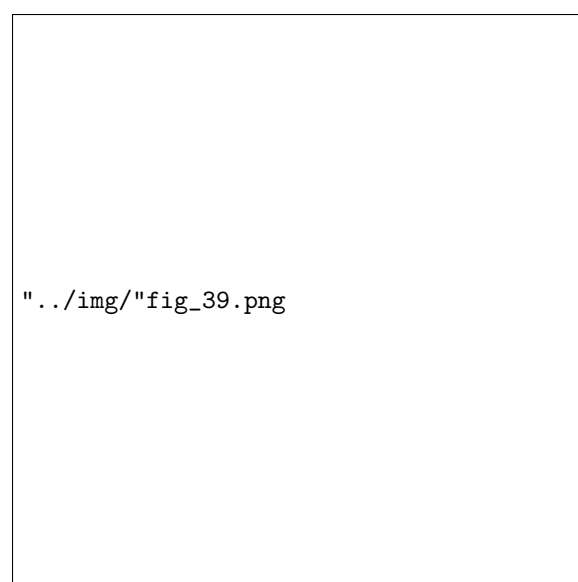
$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

**Dowód 2.** Skoro  $\forall_{x \in A} \lim_{r \rightarrow 0} | \sup_{K(x', r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x', r)} f(x') | < \varepsilon$  To znaczy, że  $\exists_{r_\varepsilon}$  takie, że  $| \sup f(x') - \inf f(x') | < \varepsilon$ . Jeżeli zbadamy wszystkie kule  $K(x, r_\varepsilon)$   $\forall_{x \in D}$  to otrzymamy pokrycie  $A$ . Ale  $A$  jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że

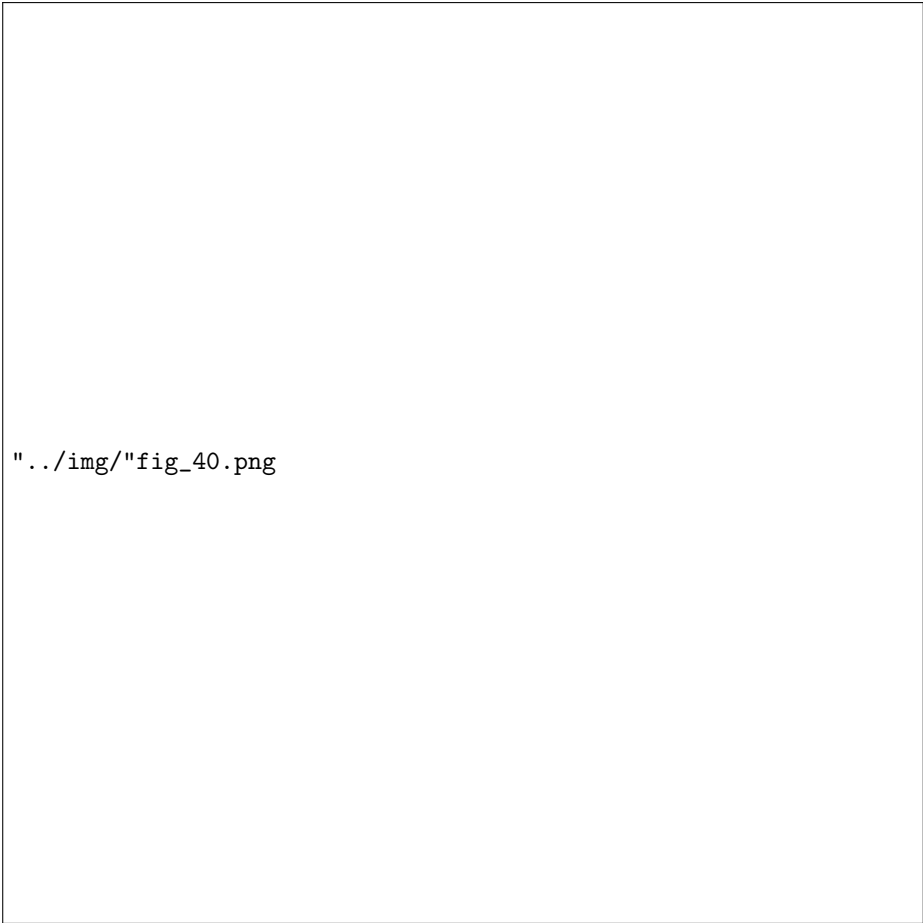
$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \dots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

Możemy zatem wybrać podział  $\Pi$  zbioru  $D$  zgodny z podziałem  $(*)$ , w wyniku czego,

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$



Rysunek 3: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszystkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!



`"../img/"fig_40.png`