Pytanie:
Czy kolumny $R(t,t_0)$ są liniowo niezależne $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$?

Wiemy, że $R(t,t_0)=\mathbb{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 1\end{bmatrix}$.

Chcielibyśmy, żeby $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall} \det R(t,t_0)\neq 0$.

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą $\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_n\end{bmatrix}$ możemy związać macierz $D=\begin{bmatrix}D_{11} & \dots & D_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ D_{n1} & \dots & D_{nn}\end{bmatrix}$.

Zatem $\det A$ uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz A z pierwszą kolumną D^T.
Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz A przez drugą kolumnę D^T?

Przykład 1 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $D^T=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ *i wtedy* $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, *zatem* $AD^T=\sum_{i=1}^n D_{ik}a_{si}=\delta_{ks}\det A$

Twierdzenie 1 *(Liouville)*
Jeżeli $R(t,t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\frac{dx}{dt}=A(x)x(t)$$
$$x(t_0)=x_0.$$

i $x\in\mathbb{R}^n$, to $w(t)=w(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}$, gdzie $w(t)=\det R(t,t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wrońskianem.

Uwaga:
Zauważmy, że $w(t)$ nigdy nie będzie równa zero, bo $w(t_0)=\det(R(t_0,t_0))=\det\begin{bmatrix}1 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 1\end{bmatrix}=1$ a $\left|\int_{t_0}^t trA(s)ds\right|<+\infty$ (bo $A(t)\to$ lipszycowalna).
Oznacza to, że kolumny $R(t,t_0)$ są $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$ liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn $R(t,t_0)$

Dowód 1 *Rezolwenta jest postaci:*

$$R(t,t_0)=\begin{bmatrix}u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t)\\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

gdzie $u_{ij}(t_0)=\delta_{ij}$.
Wiemy, że $\frac{dR(t,t_0)}{dt}=A(t)R(t,t_0)$.
Obserwacja: policzmy $\det R(t,t_0)$ *względem pierwszego wiersza:*

$$w(t)=(-1)^{1+1}u_{11}(t)\begin{bmatrix}u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{bmatrix}+(\textit{ brak } u_{11}).$$

Zatem $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$ *i ogólnie* $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$.
Zatem $w(t)$ *możemy potraktować jako funkcję od* $n\times n$ *zmiennych.* $w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \ldots, u_{nn}(t))$, *zatem*

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}}\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}}\frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}}\frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro $\frac{dR(t,t_0)}{dt} = A(t)R(t,t_0)$ *to znaczy, że*

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}u_{si}.$$

Czyli

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{k,i} D_{ki}\sum_{s} a_{ks}u_{si} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}D_{ki}u_{si} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\delta_{ks}w(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}w(t)$$

.

Zatem $\frac{\partial w}{\partial t} = tr(A(t))\cdot w(t)$. *Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:*

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dw}{w} = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \to w(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}e^{\ln\ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} \quad \square$$

0.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0x(t) + a_1x'(t) + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}(t) \tag{1}$$

(gdzie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$).
Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.
Możemy zapisać (1) jako

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & & a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t)\end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n}(t)\end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i(t-t_0)}\sum_j \frac{t-t_0}{j}(a-\lambda_i\mathbb{I})^{\ln_i -1}\underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki $w(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I})$

Przykład 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3-\lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}a_1\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)^{3+4}a_2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(a_3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0\cdot 1 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - a_3\lambda^3 + \lambda^4$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = a_0x + a_1x' + a_2x'' + a_3x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

$\ddot{x} + \omega^2 x = te^t$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} = a_0x + a_1x' + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Połóżmy $x = e^{\lambda t} \to$ *skrót mnemotechniczny*

$$e^{\lambda t}\lambda^n = e^{\lambda t}a_0 + a_1\lambda e^{\lambda t} + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}.$$

0.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki x_0^i we wzorze $(*)$ bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy A?

Przykład 3 *Niech* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ *i* $x(0) = 0, x'(0) = 1$ *i wiemy, że* $\lambda^2 + \omega^2 = 0$.
Oznacza to, że $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}(*)$,

$$\lambda_1 = i\omega, \qquad n_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -i\omega, \qquad n_2 = 1.$$