

Przykład 1 funkcje wielu zmiennych:

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ - Energia potencjalna $\mathcal{V}(x, y, z)$
 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ - Potencjał pola niestacjonarnego $\mathcal{V}(x, y, z, t)$
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ - Natężenie pola $\mathcal{E}(x, y, z)$
 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^6$
 $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$
 $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^1$

Definicja 1 (Ciągłość Heine)

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ jest ciągłe, jeżeli

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0}, T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pytanie: Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłość w \mathbb{R}^1 ?

Przykład 2 Niech funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0, 0)$? dla trajektorii I:

$$\lim_{y_n \rightarrow 0} (\lim_{x_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (\lim_{y_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0} f(0, 0)$$

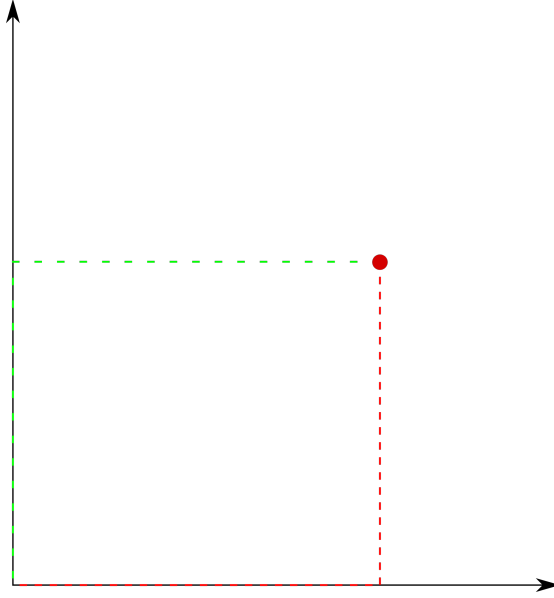
(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X ,
 (Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y

Definicja 2 (Ciągłość Cauchy)

Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \rightarrow Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x \in X}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Dowód 1 Heine \iff Cauchy



Rysunek 1: trajektoria I i II

\implies (przez sprzeczność):

zakładamy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} T(x_n) \rightarrow T(x_0) \quad \wedge \quad \exists_{\epsilon > 0}, \forall_{\delta > 0}, \exists_{x \in X} (*) : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon$$

Skoro $T(x_n) \rightarrow T(x_0) \quad \forall_{x_n \rightarrow x_0}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

skoro (*), to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\delta = 1 :$$

$$\exists_{x_1} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geq \epsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} :$$

$$\exists_{x_2} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geq \epsilon$$

$$\delta = \frac{1}{3} :$$

$$\exists_{x_3} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geq \epsilon$$

$$\vdots$$

$$\delta = \frac{1}{n} : \exists_{x_n} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon.$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \rightarrow x_0 \wedge T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$ i sprzeczność \square

\Leftarrow Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_x d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon$ (Δ), oraz, że $x_n \rightarrow x_0$, czyli:

$$\forall_{\delta_1} \exists_N \forall_{n > N} d_X(x_n, x_0) < \delta_1(\Delta_2)$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$, czyli, że

$$\forall_{\epsilon_1 > 0} \exists_{N_1} \forall_{n > N_1} d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \text{ (dla } x_n \rightarrow x_0)$$

Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że \exists_{δ} spełniająca warunek (Δ) dla ϵ_1 . Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (Δ_2), czyli wiemy, że

$$\exists_{N > N} \forall_{n > N} d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (Δ), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \square$$

0.1 Różniczkowalność:

Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathbb{O} - otwarty, $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{O}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k , jeżeli istnieje granica $g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$

Przykład 3 różniczkowalność

Niech $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$. $\frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$.

UWAGA: do policzenia pochodnej cząstkowej potrzebujemy układu współrzędnych, tj. (rys) Niech

$\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathbb{O} - otwarte, $x_0 \in \mathbb{O}$, $e \in \mathbb{O}$, $T : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (*spoiler*: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0)$$

0.2 Obserwacja:

Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $e_x = (1, 0)$ i $e_y = (0, 1)$, to

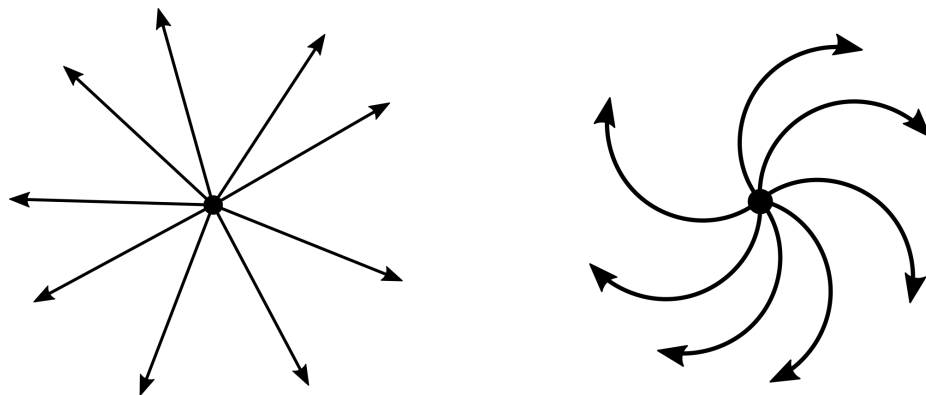
$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T$$

Przykład 4

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Wówczas $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0, 0)$, $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\nabla_{e_x} f|_x = (0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t0|} - \sqrt{|00|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

UWAGA: $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm \infty$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$. Pochodna: $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$