

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

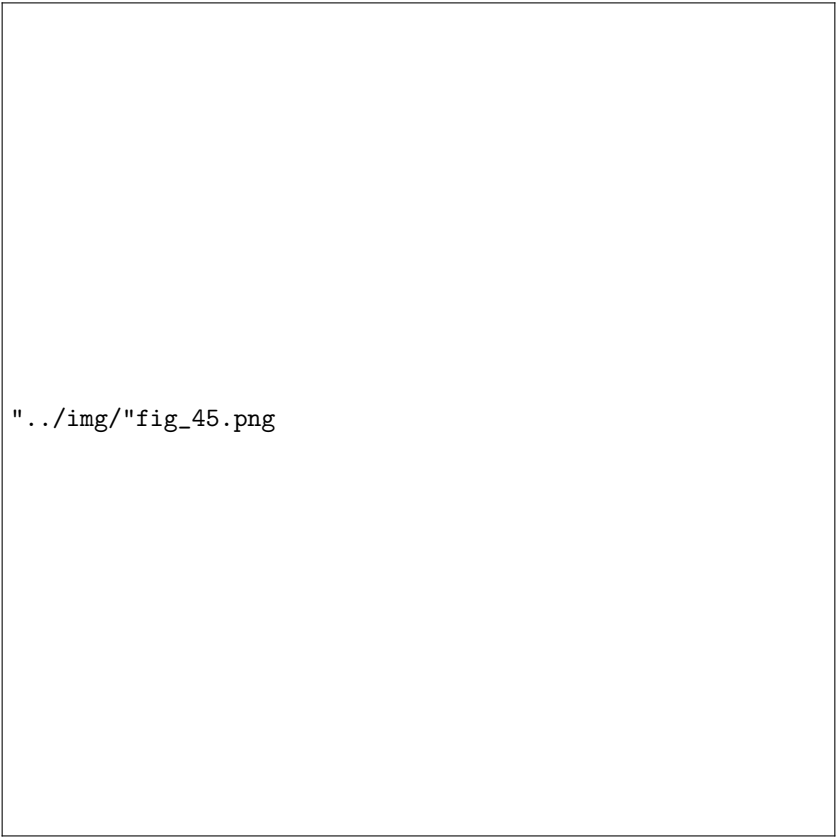
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = | x^2 = t, 2x dx = dt | = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = | r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) | = \int dr \int d\varphi f(r,\varphi)??.$$



Rysunek 1: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie $(x,y) \rightarrow (x,\varphi) \rightarrow (r,\varphi)$

$$\begin{aligned}
\int dx \int dy f(x, y) &= \|y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi\| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\
&= \|x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi\| = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\
&= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli "??"} = r.
\end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. $(y \rightarrow r), (x \rightarrow \varphi)$

$$\begin{aligned}
\int \int f(x, y) dx dy &= \|y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2r dr}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\| = \\
&= \int dx \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = \|x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi\| = \\
&= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\
&= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r.
\end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba (r). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej φ , bo $x = r \cos \varphi$ a \cos jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MKTM)

$$\text{Niech } \psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\psi' &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \\
\|\psi'\| &= r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r.
\end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $\varphi : A \rightarrow A$, $A \subset \mathbb{R}^n$, φ - klasy \mathcal{C}^1 , φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , to możemy przedstawić φ jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia $n - 1$ zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

Dowód. (coś w rodzaju dowodu)
 φ możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pytanie 1. Czy istnieje odwzorowanie $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$ takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

($t_{i \neq j}$) mogą zostać zamiast zamieniać je na x_i . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że φ - klasy \mathcal{C}^1 i φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 i $\varphi : A \rightarrow A$. Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!

$\det \varphi' \neq 0$, czyli w macierzy φ' istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np. $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$. Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i $\det \eta' \neq 0$, więc istnieje η^{-1} .

Czyli $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$ \square

\square

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (1)$$

Twierdzenie 1. *(O zamianie zmiennych)*

Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w \mathbb{R}^n i $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$, $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowlana. ξ - klasy \mathcal{C}^1 na Ω , ξ^{-1} klasy \mathcal{C}^1 na Θ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (2)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

"/img/fig_46.png

Rysunek 2: $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

Dowód. (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla $n = 1$ - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

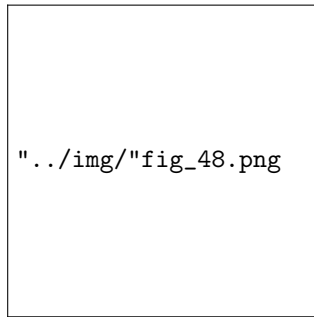
$$\int_{A \subset \mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic: $\left(\int_a^b f\right)$ oznacza, że zakładamy, że $a \leq b$. Dowód przeprowadzamy dla $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że ξ nie zamienia jednej zmiennej.

Obserwacja 1. Niech $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$, niech $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$. Wówczas $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$, zatem $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku $n - 1 \rightarrow n$ i wiemy, że dla $n - 1$ wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |det \xi'| dt.$$



Rysunek 3: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |det \xi'| dt.$$

Mając zbiór Θ , zdefiniujemy zbiór Θ_a , który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$.

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ & \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt_2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n = \\ & = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ & = [a = t_i] = \\ & = \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n. \end{aligned}$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

"../img/"fig_47.png

Przykład 1. Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I , to tym bardziej I^2 ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$ Mamy

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p \\ \frac{\pi}{2} \left[\lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{-(0)^2} \right] \right] &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{czyli } I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$