

0.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja: $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(1) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Przykład 1

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t)$$

$$x(t) = ce^{-kt}.$$

Pytanie: czy to, że równanie jest pierwszego rzędu bardzo nam przeszkadza?

Przykład 2 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\dot{x} = p$$

$$\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt} x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{f(x,t)} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

Definicja 1 Niech $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$

$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$ taka, że $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) \in \mathcal{O}$

Mówimy, że f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in I} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \cdot \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Uwaga 1 Znane t, x nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach

Pytanie 1 Czy jeżeli

$$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \text{ takie, że } \exists_{L>0} \cdot$$

że

$$\forall_{x, x'} \|f(x) - f(x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

to czy f jest ciągła?

Twierdzenie 1 Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - domknięty i $f : [a, b] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ takie, że f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$ oraz f spełnia warunek Lipschitza na \mathcal{O} , to znaczy:

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in [a, b]} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Wówczas

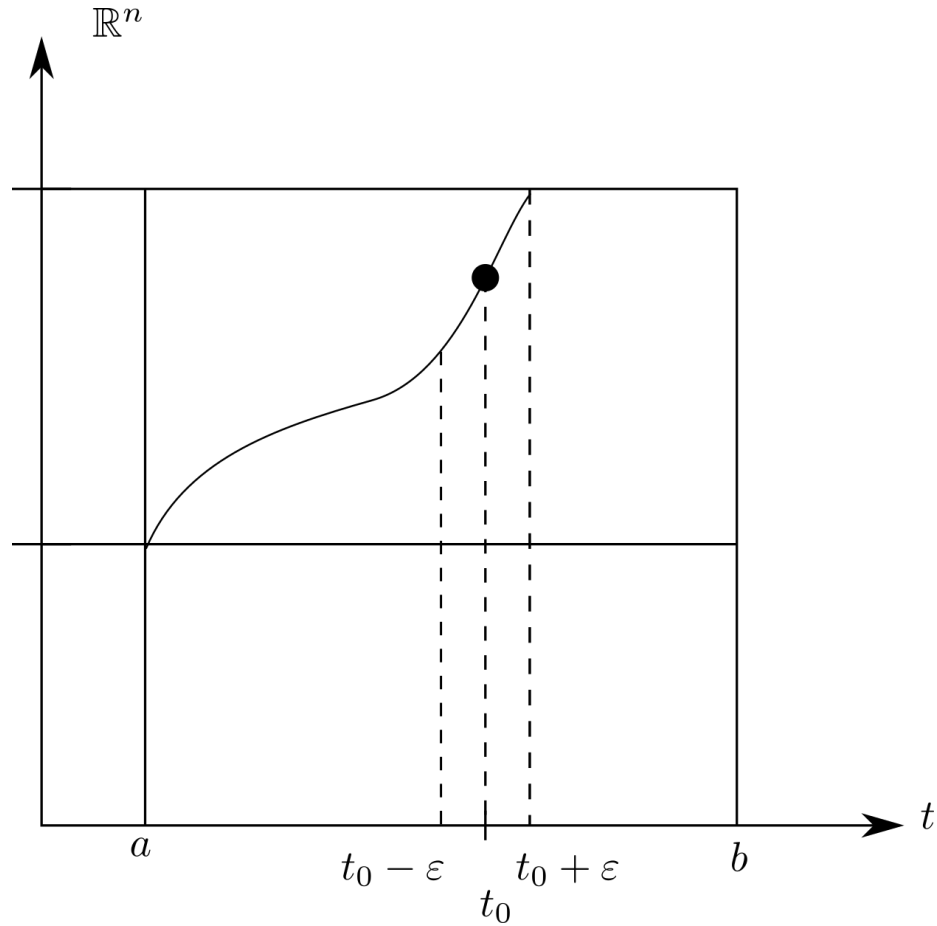
$$\forall_{t_0 \in [a, b]} \cdot \forall_{x_0 \in \mathcal{O}} \cdot \exists_{\varepsilon > 0}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Uwaga 2 Problem ?? nazywamy problemem Cauchy.

Ciągłość f na $[a, b] \times \mathcal{O}$ jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowość na \mathcal{O}



Rysunek 1

Dowód 1 Skoro f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli

$$\exists_{M>0} \cdot \exists_{y_1>0} \cdot \exists_{y_2>0}, \quad \|f(t, x)\| \leq M.$$

$t \in K(t_0, y_1), x \in K(x_0, y_2)$.

Zauważmy, że problem ?? możemy zapisać jako

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2)$$

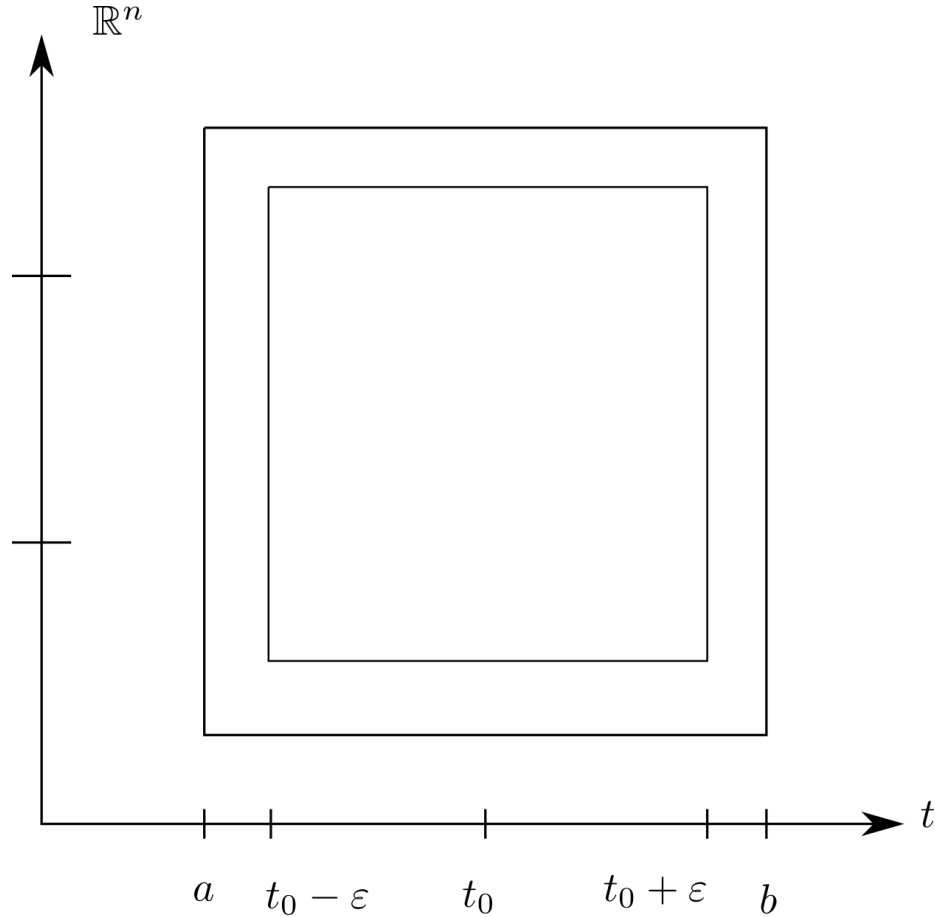
Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia ??, to rozwiązujemy problem ??.

Rozważmy odwzorowanie

$$P(g)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ funkcja ciągła na kuli o wartościach w \mathbb{R}^n .

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\exists_{x(t) \in A}$ takie, że $P(x(t)) = x(t)$



Rysunek 2

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem ??

Niech $E = \left\{ g \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n, \|g(t) - \overset{g_0(t)}{x_0}\| \underset{\text{ważne!}}{\leq} r_2 \right\}$, czyli

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leq r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.

(domkniętość ze względu na zasadę Banacha ($x_0 \overset{\text{ozn}}{=} g_0(t)$))

Szukamy takiego ε , żeby:

$$P(g) \in E \quad g \in E \quad (3)$$

$$P - \text{zweźająca na } E. \quad (4)$$

bo jeżeli ?? jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.

Jeżeli ?? jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E

Warunek ?? : $P(g) \in E$, czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leq r_2.$$

czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds - x_0\| \leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} |t - t_0| M = \varepsilon M.$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leq r_2$

to znaczy, że $\varepsilon \leq \frac{r_2}{M}$

i jednocześnie $\varepsilon \leq r_1$

czyli aby warunek ?? był spełniony

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1 \right\}.$$

Warunek ?? . Chcemy aby P było zweźające, czyli:

$$\forall_{g_1, g_2 \in E} P(g_1) - P(g_2) \leq q \|g_1 - g_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1) - P(g_2)\| = \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_2(s)) ds)\| = .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s)) ds \right\| \leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\| ds \leq .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t L \|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \sup_{\substack{g_1, g_2 \in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2}} \|g_1 - g_2\| .$$

Zatem, jeżeli P ma być zweźające na E , to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$

Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu ??

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\} \quad \square.$$

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:

niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zweźające i ciągłe ze względu na $a \in A$

Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zweźające, to znaczy, że

$$\forall_{a \in A} . \forall_{x, x'} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leq q \|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A .

Uwaga 3 Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągle ze względu na x_0 i t_0 .