Przykład 1 *funkcje wielu zmiennych:*

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ - Energia potencjalna $\mathcal{V}(x,y,z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ - Potencjał pola niestacjonarnego $\mathcal{V}(x,y,z,t)$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - Natężenie pola $\mathcal{E}(x,y,z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6$
$\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1$

Definicja 1 *(Ciągłość Heine)*
Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to Y$ jest ciągłe, jeżeli

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie: Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłośc w $\mathbb{R}^1$?

Przykład 2 *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0,0)$? dla trajektorii I:

$$\lim_{y_n \to 0} (\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \to 0} (\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0} (0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

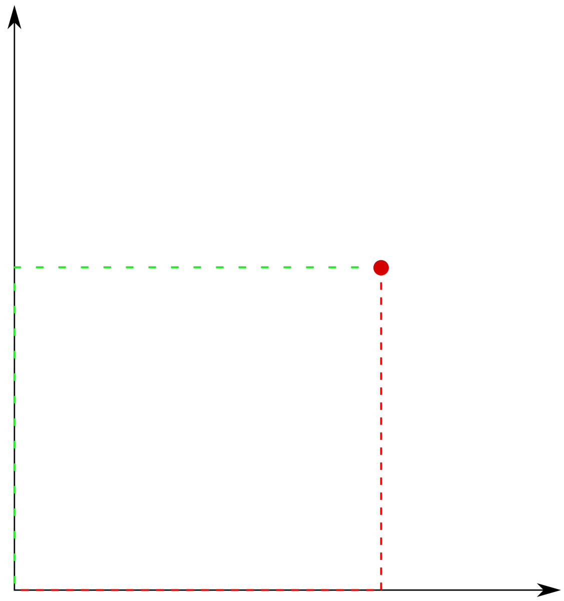
$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y

Definicja 2 *(Ciągłość Cauchy)*
Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x \in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Dowód 1 *Heine $\iff$ Cauchy*



Rysunek 1: trajektoria I i II

$\Longrightarrow_{\text{(przez sprzeczność)}}$:

zakładamy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0) \quad \wedge \quad \underset{\epsilon>0}{\exists}, \underset{\delta>0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} (*) : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0)_{\underset{x_n \to x_0}{\forall}}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

skoro $(*)$, to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\begin{aligned}
&\delta = 1 : \\
&\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \epsilon \\
&\delta = \frac{1}{2} : \\
&\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \epsilon \\
&\delta = \frac{1}{3} : \\
&\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \epsilon \\
&\vdots \\
&\delta = \frac{1}{n} : \underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0 \wedge T(x_n) \not\to T(x_0)$ i sprzeczność $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{x}{\exists} \; d_X(x,x_0)<\delta \implies d_Y(T(x),T(x_0))<\epsilon \; (\Delta)$, oraz, że $x_n \to x_0$, czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n,x_0)<\delta_1(\Delta_2)$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n)\to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\epsilon_1>0}{\forall}\underset{N_1}{\exists}\underset{n>N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n),T(x_0))<\epsilon_1(\text{dla } x_n\to x_0)$$

Przyjmijmy $\epsilon=\epsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (Δ) dla ϵ_1. Położmy $\delta_1=\delta$ we wzorze (Δ_2), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists}\underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n,x_0)<\delta_1,$$

ale na mocy (Δ), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n),T(x_0))<\epsilon_1\square$$

0.1 Różniczkowalność:

Niech $\mathbb{O}\subset\mathbb{R}^n, \mathbb{O}$ - otwarty, $f:\mathbb{O}\to\mathbb{R}^1, x\in\mathbb{Q}, x_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k, jeżeli istnieje granica $g=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0+h,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{h}\equiv\frac{\partial}{\partial x}f\big|_{x=x_0}$

Przykład 3 *różniczkowalność*

Niech $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$. $\frac{\partial}{\partial x}f=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \frac{\partial}{\partial y}f=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

UWAGA: do policzenia pochodnej cządkowej potrzebujemy układu współrzędnych, tj. (rys) Niech

$\mathbb{O}\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbb{O}$ - otwarte, $x_0\in\mathbb{O}, e\in\mathbb{O}, T:\mathbb{O}\to\mathbb{R}$.
Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (*spoiler:* pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g=\lim_{t\to0}\frac{T(x_0+te)-T(x_0)}{t}\equiv\nabla_e T(x_0)$$

0.2 Obserwacja:

Jeżeli np. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, e_x=(1,0)$ i $e_y=(0,1)$, to

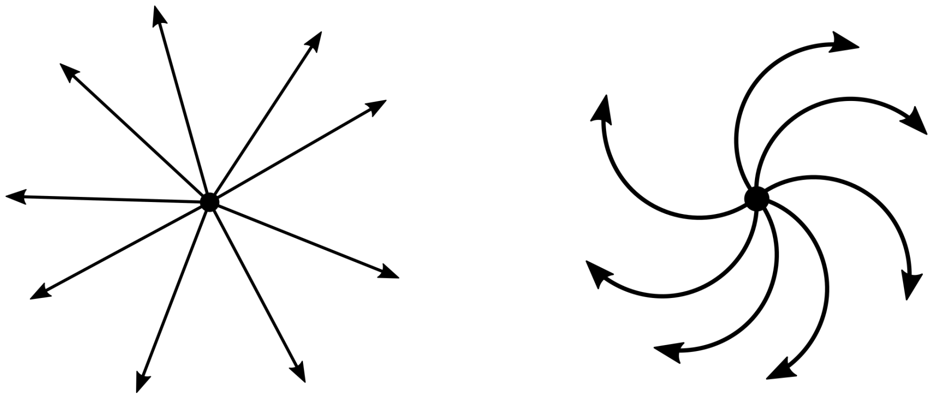
$$\nabla_{e_x}T=\frac{\partial}{\partial x}T \text{ i } \nabla_{e_y}T=\frac{\partial}{\partial y}T$$

Przykład 4

$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. Wówczas $x_0+te=(0+t1,0)$, $x_0=(0,0), e_x=\binom{1}{0}$

$$\nabla_{e_x}f\big|_x=(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{|t0|}-\sqrt{|00|}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0=\frac{\partial}{\partial x}f\bigg|_{(0,0)}$$

UWAGA: $f(x)=\sqrt{x}, \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{h}}{h}=\pm\infty$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \binom{h_1}{h_2}$. Pochodna: $\nabla_e f|_{x=(0,0)}$, $(x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$