$$\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M}\right\}$$

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

Chcielibyśmy, żeby ε nie zależał od punktu w którym zaczniemy.
Zauważmy, że

$$\|A(t)x(t) + b(t)\| \leqslant L(\|x_0\| + r_2) + c$$

zatem

$$\frac{r_2}{M} \geqslant \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} = \left|\text{Połóżmy } r_2 = \|x_0\| + c\right| =$$
$$= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} =$$
$$\frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} \geqslant \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} =$$
$$\frac{1}{2L + 1},$$

zatem

$$\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L+1}\right\}$$

(r_1 - pomijamy, bo $A(t)$ - ciągła na $[a, b]$).
Oznacza to, że wartość ε nie zależy od x, zatem rozwiązanie początkowo określone na

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times K(x_0, r_2)$$

możemy przedłużyć do określonego na całym $[a, b] \times X$!

0.1 Rezolwenta

Rozwiązaniem problemu Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

jest funkcja $x(t, t_0, x_0)$

Pytanie 1. *Czy istnieje*

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Takie, że

$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

(Jeżeli $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$)

"../img/"fig_31.png

Rysunek 1: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi

"../img/"fig_32.png

Rysunek 2: Jak pośpimy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)

Definicja 1. *Jakie własności $R(t,t_0)$ powinno posiadać?*

1. $R(t,t_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, R$ *- liniowy*
   Bo jeżeli $x_1(t), x_1(t_0)=x_0^1$ i $x_2(t), x_2(t_0)=x_0^2$ są rozwiązaniem, to chcielibyśmy, by $x_1(t)+x_2(t)$ też było rozwiązaniem z wartością początkową $x_0^1+x_0^2$. Rys **??**

2. *funkcja* $R(t,t_0)$

3. $\underset{t,t_0,s\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}}{\forall}\; R(t,t_0)=R(t,s)R(s,t_0)$

4. $R(t_0,t_0)=\mathbb{I}$, *bo* $x(t)=R(t,t_0)x_0 \underset{t_0\in\mathcal{O}}{\forall}$
   Ad 3. Wstawiając t_0 do trzeciej kropki otrzymujemy

   $$R(t_0,t_0)=R(t_0,s)R(s,t_0)\to \underset{t,s\in\mathcal{O}}{\forall} R(s,t)=R(t,s)^{-1}$$

5. $$\frac{dR(t,to)}{dt}=A(t)R(t,t_0),$$
   $$R(t_0,t_0)=\mathbb{I}.$$

   bo wtedy $x(t)=R(t,t_0)x_0$ jest rozwiązaniem problemu

   $$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)$$
   $$x(t_0)=x_0.$$

   bo $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(R(t,t_0)x_0)=A(t)R(t,t_0)x_0=A(t)x(t)$ *i* $x(t_0)=R(t_0,t_0)x_0=\mathbb{I}x_0=x_0$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie $x(t)=R(t,t_0)x_0$ da nam jednoznaczne rozwiązanie.

Pytanie 2. *A co z $b(t)$? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)*

Chcemy rozwiązać problem

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+b(t)$$
$$x(t_0)=x_0.$$

Załóżmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t)=R(t,t_0)C(t), C(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)c(t)\right)=\frac{dR(t,t_0)}{dt}c(t)+R(t,t_0)\frac{dc}{dt}=A(t)R(t,t_0)c(t_)+R(t,t_0)\frac{dc}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t,to)c(t) + R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t,t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \qquad /R(t,t_0)^{-1}.$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)^{-1}b(t).$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)b(t).$$

$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale $c(t_0) = x_0$, więc $\alpha = x_0$.

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t,t_0)c(t) = R(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds\right) = .$$

$$R(t,t_0)x_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds = .$$

$$R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{R(t,t_0)R(t_0,s)}_{R(t,s)}b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds.$$

dygresja:
dają nam rozkład gęstości masy $\rho(x')$. Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x - x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to $\frac{1}{\|x-x'\|}$

Pytanie 3. *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$ spełnia warunki $1-5$ dla rezolwenty

- $R(t,t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $R(t,t_0)$ - jest ciągła względem t i t_0

- $R(t,\alpha)R(\alpha,t_0) = R(t,t_0)$, bo $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^\alpha A(s)ds + \int_\alpha^t A(s)ds}$
  $R(t,t_0) = R(t,\alpha)R(\alpha,t_0)$

- $R(t_0,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$

- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t,t_0)$
  Dowód:

$$\frac{R(t+h,t_0) - R(t,t_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right) = .$$

$$= \frac{1}{h}\left[e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right] = .$$

$$\frac{1}{h}\left[e^{\int_{t}^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I}\right] e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - \frac{1}{h}\left[e^{hA(\beta)-\mathbb{I}}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\frac{1}{h}\left[\mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \ldots = \mathbb{I}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\underset{t<\beta<t+h}{A(\beta)} R(t,t_0) + h[...] \to A(t)R(t,t_0).$$

$((((\int_t^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta)))))$

Przykład 1.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^{t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$