Twierdzenie 1. *(o lokalnej odwracalności)*
Niech

$$f : E \to E, E \text{ - otwarty, } E \subset \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(E),$$
$$\underset{a,b \in E}{\exists} : f(a) = b \text{ i } f'(a) \text{ - odwracalna } (det(f'(a)) \neq 0),$$

to wtedy:

1. $\underset{U,V \subset E}{\exists} \quad \underset{a \in U, b \in V}{\exists} \quad U, V$ *- otwarte, f - bijekcja między U, V*
2. $\underset{g: V \to U}{\exists} \quad \underset{x \in V}{\forall} \quad f(g(x)) = x,$
3. $g \in \mathcal{C}^1(V)$.

Uwaga: dowód składa się z trzech części:

- Pokażemy, że $\underset{U,V}{\exists} : f$ - bijekcja na U, V
- Pokażemy, że U, V - otwarte
- Pokażemy, że $\underset{g: V \to U}{\exists}, g$ - różniczkowalna na V i ciągła.

Przykład 1. $f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
$det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, *ale* $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ *(czyli funkcja jest okresowa)*

Dowód. **Część I**
Szukamy $U, V : f$ - bijekcja miedzy U i V.
Skoro $f'(a)$ - odwracalne, to znaczy, że $\underset{(f'(a))^{-1}}{\exists}$, zatem

$$\underset{\lambda}{\exists} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1.$$

Wiemy, że $f'(x)$ - ciągła w $x = a$, czyli

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} . \underset{x}{\forall}, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Położmy $\varepsilon = \lambda$.
Oznacza to, że

$$\underset{\delta_\lambda}{\exists} . \underset{x}{\forall} x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że f - bijekcja między U i V.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E$$

Pytanie 1. *Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)*
dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\underset{y\in V}{\forall}\quad\underset{x\in U}{\exists}: f(x)=y$$

Uwaga: o f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U.
Policzmy $\varphi'_y(x)$

$$\varphi'_y(x)=\mathbb{I}+(f'(a))^{-1}(-f'(x))=(f'(a))^{-1}(f'(a)-f'(x)),$$

więc

$$\begin{aligned}&\|\varphi'_y(x)\|=\|f'(a)^{-1}(f'(a)-f'(x))\|\leqslant\\&\leqslant\|(f'(a)^{-1})\|\|f'(a)-f'(x)\|\leqslant\\&\leqslant\underset{x\in U}{\forall}\frac{1}{2\lambda}\lambda=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pamiętamy, że jeżeli $\underset{M}{\exists}\|\varphi'_y(x)\|\leqslant M$, to $\underset{x,y}{\forall}\|\varphi(x)-\varphi(y)\|<M\|x-y\|$

Zatem skoro $\|\varphi'_y(x)\|\leqslant\frac{1}{2}$, to

$$\underset{x_1,x_2\in U}{\forall}\|\varphi_y(x_1)-\varphi_y(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\underset{y\in V}{\forall}$. Zatem f - bijekcja między U i V. $\square$

Część II
Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) $U=K(a,\delta_1)$, więc

$$\underset{x_0\in U}{\exists}\quad\underset{r}{\exists}K(x_0,r)\subset U$$

lub równoważnie

$$\|x-x_0\|\leqslant r\wedge x\in U.$$

Chcemy pokazać, że dla $y_0=f(x_0)\quad\exists\quad K(y_0,\lambda r)\subset V$, czyli że V - otwarty.
Weźmy $y\in K(y_0,\lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1\in V, x_1\in U$
Jeżeli pokażemy, że dla $\|y-y_0\|<\lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0,r)\subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y-y_0\|<\lambda r$ oraz $y\in V\iff K(y_0,\lambda r)\subset V$

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężające na $K(x_0,r)$, zbadamy tę wielkośc dla $x\in K(x_0,r)$. $\|\varphi_y(x)-x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x)-x_0\|\leqslant r$ i $\|y-y_0\|<\lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x)-x_0\|=\|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)+\varphi_y(x_0)-x_0\|\leqslant\|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)\|+\|\varphi y(x_0-x_0)\|.$$

Ale

$$\|\varphi_y(x_0)-x_0\|\leqslant\|(f'(a))^{-1}\|\|y-y_0\|\leqslant\frac{1}{2\lambda}\lambda r=\frac{r}{2},$$

więc

$$\|\varphi_y(x)-x_0\|\leqslant r,$$

jeżeli

$$\|y-y_0\|<\lambda r, \|x-x_0\|\leqslant r.$$

Stąd wiemy , że punkt stały dla $\varphi_y(x): x\in K(x_0,r)$ należy do $K(x_0,r)$ i $\|y-y_0\|<\lambda r$, zatem $y=f(x)$, czyli V - otwarty.

"../img/"fig_18.png

Rysunek 1: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Część III

Szukamy $g : V \to U$

Skoro f - bijekcja między U i V, to znaczy, że $\underset{g:V\to U}{\exists} f(g(x)) = x \underset{x\in V}{\forall}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w $x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\to} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \overset{k\to 0}{\to} 0 \tag{1}$$

to będziemy wiedzieli, że:

1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.

W tym celu pokażemy, że:

1. $(\|k\| \to 0) \implies (\|h\| \to 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) = x + h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) =$$

"../img/"fig_19.png

Rysunek 2: Nie ok.

$$= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)),$$

$$czyli \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geqslant \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|k\|} \leqslant \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|h\|} \to 0$, o ile $\underset{[f'(x)]^{-1}}{\exists}$

Pytanie 2. *skąd wiadomo, że* $(f'(x))^{-1}$*?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$ oraz U - taka, że

$$\underset{x \in U}{\forall} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

Zatem

$$0 \leqslant \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}\|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leqslant \|f'(a) - f'(x)\|\|y\| + \|f'(x)\|\|y\|.$$

Dalej $2\lambda\|y\| \leqslant \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$ dla $x \in U$
$0 \leqslant \lambda\|y\| \leqslant \|f'(x)y\|$ dla $y = 0$
Czyli

$$\underset{x \in U}{\forall} \|f'(x)y\| > 0.$$

"../img/"fig_20.png

Rysunek 3

□