

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

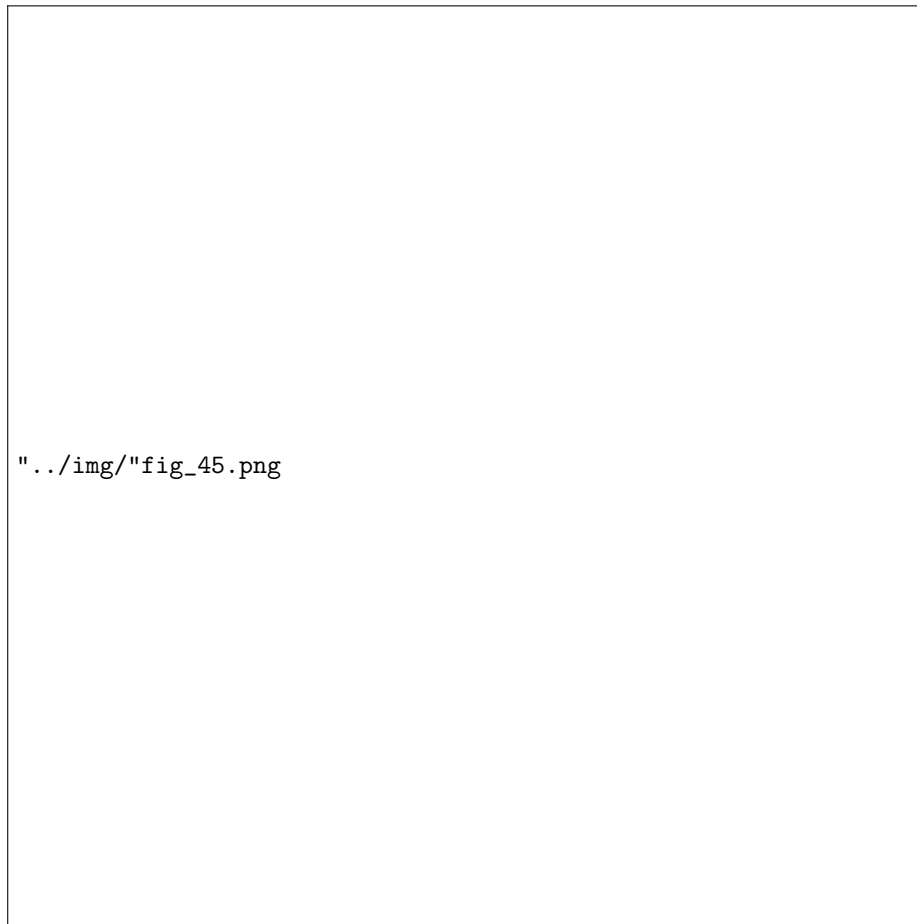
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = | x^2 = t, 2x dx = dt | = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy = | r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(\frac{y}{x}) | = \int dr \int d\varphi f(r, \varphi)??.$$



Rysunek 1: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie  $(x, y) \rightarrow (x, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} \int dx \int dy f(x, y) &= || y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi || = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\ &= || x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi || = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\ &= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli "??"} = r. \end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. ( $y \rightarrow r$ ), ( $x \rightarrow \varphi$ )

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dx dy &= \left\| y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right\| = \\ &= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = \left\| x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi \right\| = \\ &= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\ &= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r. \end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba ( $r$ ). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej  $\varphi$ , bo  $x = r \cos \varphi$  a  $\cos$  jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MK<sup>TM</sup>)

Niech  $\psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned} \psi' &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \|\psi'\| &= r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli  $\varphi : A \rightarrow A$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , to możemy przedstawić  $\varphi$  jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia  $n - 1$  zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

*Dowód.* (coś w rodzaju dowodu)  
 $\varphi$  możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 1.** Czy istnieje odwzorowanie  $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$  takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

( $t_{i \neq j}$ ) mogą zostać zamiast zamieniać je na  $x_i$ . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi : A \rightarrow A$ . Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!  $\det \varphi' \neq 0$ , czyli w macierzy  $\varphi'$  istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np.  $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$ . Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i  $\det \eta' \neq 0$ , więc istnieje  $\eta^{-1}$ .

Czyli  $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$   $\square$

$\square$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (1)$$

**Twierdzenie 1.** (*O zamianie zmiennych*)

Niech  $\Theta, \Omega$  - zbiory otwarte w  $\mathbb{R}^n$  i  $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$ ,  $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona i całkowalna.  $\xi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Omega$ ,  $\xi^{-1}$  klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Theta$ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (2)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

*Dowód.* (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla  $n = 1$  - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic:

$\left(\int_a^b f\right)$  oznacza, że zakładamy, że  $a \leq b$ . Dowód przeprowadzamy dla  $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  takiego, że  $\xi$  nie zamienia jednej zmiennej.

"../img/"fig\_46.png

Rysunek 2:  $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

**Obserwacja 1.** Niech  $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$ , niech  $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$ . Wówczas  $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$ , zatem  $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku  $n - 1 \rightarrow n$  i wiemy, że dla  $n - 1$  wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

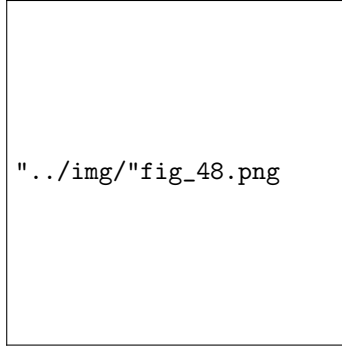
$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

Mając zbiór  $\Theta$ , zdefiniujmy zbiór  $\Theta_a$ , który jest zbiorem takich  $x \in \Theta$ , że na miejsca  $x_i$  wstawimy wielkość  $a$ .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$



Rysunek 3: Kółko  $K$  składamy z kresek  $K_a$  i mamy  $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy  $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$  taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(t_1, \dots, t_n) \\ t_1 \\ \xi_{i+1}(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Czyli  $\xi$  nie zmienia jednej współrzędnej np.  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$ .

Możemy więc zapisać transformację  $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt_2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n &= \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ &= [a = t_i] = \\ &= \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n.\end{aligned}$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

"../img/"fig\_47.png

**Przykład 1.** Policzmy całkę  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć  $I$ , to tym bardziej  $I^2$ ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .  $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $|\psi'| = r$  Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p$$

$$\frac{\pi}{2} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[ -\frac{1}{2} e^{-(0)^2} \right] \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

czyli  $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$