0.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = f(t,x) \\
&x(t_0) = x_0 \\
&x(t) : [a,b] \to \mathbb{R} \\
&f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -kx(t) \\
&x(t) = ce^{-kt}.
\end{aligned}$$

Przykład 2.

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\
&\dot{x} = p \\
&\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x \\
&\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x,t)}.
\end{aligned}$$

Definicja 1. *Niech* $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ *taka, że* $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t,x) \to f(t,x')$
Mówimy, że f *spełnia warunek Lipschitza, jeżeli*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in I}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}.\|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Uwaga 1. *Zmienne* t, x *nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach*

Pytanie 1. *Czy jeżeli*

$$f : \mathcal{O} \to \mathcal{O} \text{ takie, że } \underset{L>0}{\exists}.$$

że

$$\underset{x,x'}{\forall}\|f(x) - f(x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

to czy f *jest ciągła?*

Twierdzenie 1. *(problem Cauchy)*
Niech $[a,b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- domknięty i* $f : [a,b] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *takie, że* f *- ciągła na* $[a,b] \times \mathcal{O}$ *oraz* f *spełnia warunek Lipschitza na* $\mathcal{O}$*, to znaczy:*

$$\underset{L>0}{\exists} \quad \underset{t\in[a,b]}{\forall} \quad \underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall} \|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Wówczas

$$\underset{t_0\in[a,b]}{\forall} \quad \underset{x_0\in\mathcal{O}}{\forall} \quad \underset{\varepsilon>0}{\exists}, \textit{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Uwaga 2. *Ciągłość* f *na* $[a,b] \times \mathcal{O}$ *jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na* $\mathcal{O}$

"../img/"fig_27.png

Rysunek 1

Dowód. Skoro f - ciągła na $[a,b]\times\mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli

$$\underset{M>0}{\exists}\quad\underset{r_1>0}{\exists}\quad\underset{r_2>0}{\exists}\quad\|f(t,x)\|\leqslant M.$$

$t\in K(t_0,r_1), x\in K(x_0,r_2)$.
Zauważmy, że problem (1) możemy zapisać jako

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds \tag{2}$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia (2), to rozwiążemy problem 1.
Rozważmy odwzorowanie

$$\underset{g\in a}{P(g)(t)}=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,g(s))ds.$$

$$A=\{C:[t-r_1,t_0+r_1]\to\mathbb{R}^n\}\text{ funkcja ciągła na kuli o wartościach w }\mathbb{R}^n.$$

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\underset{x(t)\in A}{\exists}$ takie, że $P(x(t))=x(t)$
Oznaczałoby to, że

$$x(t)=-x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem (2)
Niech $E=\left\{g\in A,\|g(t)-\overset{g_0(t)}{x_0}\|\underset{\text{ważne!}}{\leqslant}r_2\right\}$, czyli

$$g\in E\iff\underset{t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon}{sup}\|g(t)-x_0\|\leqslant r_2.$$

i

$$g:[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.
(domkniętość ze względu na zasdę Banacha ($x_0\overset{\text{ozn}}{=}g_0(t)$))

Szukamy takiego ε, żeby:

1. $P(g)\in E\quad g\in E$
2. P - zwężająca na E

bo jeżeli (2) jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.
Jeżeli (1) jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E
Warunek (1): $P(g)\in E$, czyli

$$\underset{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}{sup}\|P(g(t))-x_0\|\leqslant r_2.$$

"../img/"fig_28.png

Rysunek 2

czyli

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\|x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,g(s))ds - x_0\| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s,g(s))\|ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}|t-t_0|M = \varepsilon M.$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leqslant r_2$, to znaczy, że $\varepsilon \leqslant \frac{r_2}{M}$ i jednocześnie $\varepsilon \leqslant r_1$.
Czyli aby warunek (1) był spełniony to musi być:

$$\varepsilon < min\left\{\frac{r_2}{M}, r_1\right\}.$$

Warunek (2). Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\forall_{g_1,g_2\in E}\|P(g_1)-P(g_2)\| \leqslant q\|q_1-q_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1)-P(g_2)\| = \sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\|x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,g_1(s))ds - (x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,g_2(s))ds\| = .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \| \int_{t_0}^{t} f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))ds \| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} L\|g_1-g_2\| = \varepsilon L \underset{\substack{\in E \\ \|g_1-g_2\|<2r_2}}{\|g_1-g_2\|} .$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E, to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$
Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu 1

$$\varepsilon < min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\}.$$

□

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:
niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągłe ze względu na $a \in A$
Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\underset{a\in A}{\forall} . \underset{x,x'}{\forall} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leqslant q\|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A.

Uwaga 3. *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągłe ze względu na x_0 i t_0.