Definicja 1 *Niech* $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ *taka, że* $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t,x) \to f(t,x)$
Mówimy, że f *spełnia warunek Lipschitza, jeżeli*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in I}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}.\|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Definicja 2 *Rezolwenta*

Definicja 3 *Niech* X *- zbiór a* $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ *- rodzina zbiorów. Mówimy, że* F *jest pokryciem zbioru* X*, jeżeli* $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$*. Jeżeli zbiory* A_α *są otwarte, to mówimy, że* F *jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów* A_α *jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór* F *taki, że jest też pokryciem zbioru* X *nazywamy podpokryciem.*

Definicja 4 *Zbiór* X *nazywamy zwartym, jeżeli z* ***każdego*** *pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.*

Definicja 5 *Niech* U *- zbiór otwarty* $\subset M$ *i niech odwzorowanie* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *takie, że* φ *- klasy* $\mathcal{C}^1$*, (czasami* $\mathcal{C}^\infty$ *),* φ^{-1} *- klasy* $\mathcal{C}^1$*, (czasami* $\mathcal{C}^\infty$ *) nazywamy mapą.*
Uwaga: mapa <u>*nie musi*</u> *pokrywać całego zbioru* M*.*

Definicja 6 $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ *- mapy na* M*.*
U_1 *i* U_2 *nazywamy zgodnymi jeżeli*
a) $U_1 \cap U_2 = \phi$
albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ *jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie* $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ *)*

Definicja 7 *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór* M *wraz z atlasem, który pokrywa cały* M *nazywamy* ***rozmaitością*** *(ang. manifold).*

Definicja 8 *(Ciągłość Heine)*
Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$*. Mówimy, że odwzorowanie* $T : X \to Y$ *jest ciągłe, jeżeli*

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$*.*

Definicja 9 *(Ciągłość Cauchy)*
Niech $x_0 \in X$*. Mówimy, że* $T : X \to Y$ *- ciągłe, jeżeli*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x\in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Definicja 10 *Niech $p \in M$, σ_1, σ_2 - krzywe na M takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że σ_1 i σ_2 są styczne w punkcie P, jeżeli*

$$\left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Definicja 11 *Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie P oznaczamy przez D_pM*

Definicja 12 *Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$.Zbiór jednoform ($p \in M$) oznaczamy przez T_p^*M (lub $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$)*

Definicja 13 *Zbiór wszystkich odwzorowań $T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k-formami.*

Definicja 14 *Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n, f : \theta \to \mathbb{R}$$

(funkcje nazywamy zero-formami $f \in Lambda^0(\theta)$)

$$\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

$$dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).$$

Definicja 15 *Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T_p^*M \in \Lambda'(M)$, wówczas $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(M)$ i dla $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_p^*M$,*

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k; v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_1)\ldots\alpha_k(v_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(v_k)\alpha_2(v_k)\ldots\alpha_k(v_k) \end{bmatrix}.$$

Definicja 16 *Niech M, N - rozmaitości, $h : M \to N$ i niech $p \in M, \alpha \in T^*_{h(p)}N$. Cofnięciem formy α w odwzorowaniu h nazywamy formę $h^*\alpha \in T_pM$, taką, że $\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, hv\rangle \underset{v \in T_pM}{\forall}$ i caaa. Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$ i $v_1, \ldots, v_k \in T_p(M)$, to*

$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), v_1, \ldots, v_k \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \langle h^*\alpha_1, v_1\rangle & \langle h^*\alpha_2, v_1\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = (h^*\alpha_1) \wedge (h^*\alpha_2) \wedge \ldots \wedge h^*(\alpha_k).$$

Definicja 17 *niech M - rozmaitość wymiaru n, g_{ij} - tensor metryczny na M, operacją $\sharp$: $T_pM \to T_p^*M$ taką, że dla $v = a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + a^n\frac{\partial}{\partial x^n}$,*

$$v^\sharp = a^i g_{i1}dx^1 + a^i g_{i2}dx^2 + \ldots + a^i g_{in}dx^n, i = 1, \ldots, n.$$

zadaje izomorfizm między T_pM a T_p^*M.

Definicja 18 *niech $M = \mathbb{R}^3$,*

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{\flat} (df)^\flat \in T_pM$$

nazywamy gradientem funkcji f : $\nabla f \overset{def}{=} (df)^\flat$, gdzie $f : M \to \mathbb{R}^1$, f - klasy $\mathcal{C}^k(M)$

Definicja 19 *Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \to \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "$*$" Hodge'a i definiujemy następująco:*

$$*\left(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_L}\right) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1j_1} g^{i_2j_2} g^{i_Lj_L} \in_{j_1j_2\ldots j_Lk_1k_2\ldots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{n-1}},$$

gdzie $\in_{i_1,\ldots,i_n} = \{sgn(i_1, \ldots, i_n)$ jeżeli $i_m \neq i_p, \quad 0$ w.p.p$\}$

Definicja 20 *$M = \mathbb{R}^3$*
niech $v \in T_pM$, operację

$$rot(v) \overset{def}{=} \left(*\left(dv^\sharp\right)\right)^\flat$$

nazywamy rotacją wektora v i oznaczamyrot $v \overset{ozn}{=} \nabla \times v$.
Operację

$$div\ v \overset{def}{=} d\left(*v^\sharp\right)$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy div $v \overset{ozn}{=} \nabla \cdot v$.
Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na M takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \to \Lambda^2(M)$

Definicja 21 *Norma: niech X - przestrzeń wektorowa.*
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

Definicja 22 *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

Definicja 23 *Niech $U \subset X, V \subset Y$*
U, V - otwarte, $T : U \to V; x, h \in U$Mówimy, że T - różniczkowalne w punkcie x_0, jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\underset{h \in U}{\forall} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, *a* L_{x_0} *- liniowe* $: X \to Y$.

Definicja 24 *Pochodna mieszana*

Definicja 25 *Niech* $L : V \to W, L$ *- liniowe,* $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ *- unormowane.Mówimy, że* L *jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists}, \underset{x\in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v$$

Definicja 26 *Wielkość* $\underset{A}{inf}\{\underset{x\in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v\}$ *nazywamy normą odwzorowania* L *i oznaczamy* $A \overset{ozn}{=} ||L||$.

Definicja 27 *Niech* $U \subset \mathbb{R}^m$ *- jest zbiorem wypukłym, jeżeli* $\underset{a,b\in U}{\forall}. \quad [a, b] \overset{def}{=} \{a(1-t) + bt, t \in [0, 1]\} \subset U$

Definicja 28 $\tilde{x} \in X$ *nazywamy punktem stałym, jeżeli* $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Definicja 29 *Funkcje uwikłane*

Definicja 30 *Ekstrema związane*

Definicja 31 *Niech* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *i* $M \subset \mathbb{R}^n$ *- zbiór.*
Mówimy, że f *ma minimum/maksimum związane na zbiorze* M*, w punkcie* $x_0 \in M$*, jeżeli*

$$\underset{r}{\exists} \quad \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} \quad f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$