Pytanie 1. *Jak pokazać, że zbiór Cantora jest niepusty?*

Stwierdzenie 1. *Przeliczalna ilość zbiorów miary Lebesgue'a zero jest też zbiorem miary Lebesgue'a zero.*

Dowód. Weźmy rodzinę zbioru $X_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}_+$, X_n - zbiór miary Lebesgue'a zero. Weźmy rodzinę kostek P_n, gdzie P_i - kostka z $\mathbb{R}^n$ taka, że

$$|P_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(możemy tak zrobić, bo X - miary Lebesgue'a zero)
wówczas $X \subset P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots$

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup \ldots| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

Pytanie 2. *Jak pociąć prostokąt?*

będzie trzeba wprowadzić język.
weźmy kostkę z $\mathbb{R}^n$. Wtedy

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

niech Π_i - podział przedziału $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
Zatem podział kostki P wyznaczy kolekcja podziałów

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n\}.$$

W takim razie P możemy przedstawić jako sumę

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \text{ gdzie } Q_i = \left[a_1^{i_1}, b_1^{i_1}\right] \times \ldots \times \left[a_n^{i_n}, b_n^{i_n}\right].$$

$\left[a_j^{i_j}, b_j^{i_j}\right]$ - jeden z elementów podziału odcinka $[a_1, b_1]$ przy podziale $\Pi_1, \ldots$, itp.
Wówczas zauważmy, że jeżeli zdefiniujemy

$$int(Q_i) = \left]a_1^{i_1}, b_1^{i_1}\right[\times \ldots,$$

to wtedy

$$int(Q_i) \wedge int(Q_j) = \phi.$$

Poza tym

$$|Q_i| \stackrel{\text{def}}{=} \left|b_1^{i_1} - a_1^{i_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|b_n^{i_n} - a_n^{i_n}\right|.$$

W związku z tym

$$|P| = \sum_i |Q_i|.$$

Uwaga: czasami zamiast pisać $\Pi = \{\Pi_1, \ldots\}$, piszemy $\Pi = \{Q_1, \ldots\}$

Definicja 1. *Rozważmy dwa podziały:*

$$\Pi_1 = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$$
$$\Pi_2 = \{R_1, \ldots, R_s\}.$$

Podział Π_2 *nazywamy drobniejszym, jeżeli dla* $\Pi_1 \neq \Pi_2$

$$\underset{a_j}{\forall}, j \in \{1, \ldots, k\} \quad \underset{i \in \left\{R_{m_1}, \ldots, R_{m_j}\right\}}{\exists}, Q_j = R_{m_1} \cup \ldots \cup R_{m_j}.$$

Definicja 2. *Suma górna dla* $f : P \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|,$$

oraz suma dolna

$$\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|.$$

Definicja 3. *Całka górna:*

$$\overline{\int_p} f = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi),$$

oraz

$$\underline{\int_p} f = \sup_{\Pi} \underline{S}(f, \Pi).$$

Obserwacja 1. *Jeżeli* Π_2 *- podział drobniejszy, niż* Π_1*, to*

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leqslant \underline{S}(f, \Pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1).$$

Pytanie 3. *Czym to się właściwie różni od całki na* $\mathbb{R}$*?*

Pytanie 4. *Czy całkę na np.* $\mathbb{R}^2$ *możemy policzyć przy pomocy dwóch całek na* $\mathbb{R}$*?*

Przykład 1.

$$p = [0, 1] \times [0, 2], \quad f(x, y) = xy^2.$$

$$\int_p xy^2 \overset{??}{=} \int_0^1 dx \int_0^2 dy \cdot xy^2 \overset{??}{=} \int_0^2 dy \int_0^1 dx \cdot xy^2.$$

$$\int_0^1 dx \left[\frac{xy^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_0^2 dy \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{y^3}{2 \cdot 3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Pytanie 5. *Co robimy ze zbiorami, które nie są prostokątami?*

Przykład 2. *niech $A \subset P \subset \mathbb{R}^n$, wprowadźmy funkcję*

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

wówczas jeżeli

$$f : P \to \mathbb{R}, A \subset P,$$

to

$$\int_A f \stackrel{def}{=} \int_P f \cdot X_A.$$

Jeżeli f - takie, że $f : A \to \mathbb{R}$, to definiujemy funkcję

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

i wtedy

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}.$$

Konsekwencją takiego podejścia jest konieczność radzenia sobie z całkami z funkcji nieciągłych. Oznacza to, że warunek na całkowalność punktu musi być związany z nieciągłością. W tym celu wprowadzamy kilka nowych pojęć:

Definicja 4. *Wahanie funkcji:*
niech $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, niech $x_0 \in \int(A)$. Wahaniem funkcji w punkcie x_0 nazywamy wielkość

$$O(f, x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{r \to 0} \left| \sup_{K(x_0,r)} f(x) - \inf_{K(x_0,r)} f(x) \right|.$$

Stwierdzenie 2. *Niech A - domknięty, $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$.*

$$A_\varepsilon = \{x \in A : O(f, x) \geqslant \varepsilon\},$$

wówczas A_ε teże jest zbiorem domkniętym.

Dowód. Pokażemy, że zbiór A'_ε jest zbiorem otwartym.
Mamy dwa przypadki:

1. $x \in A'_\varepsilon$, $x \notin A$, czyli $x \in A'$ więc $\underset{r}{\exists} K(x, r) \in A'$ (bo A' jest otwarty)

2. $x \in A$, $x \in A'_\varepsilon$, czyli $O(f, x) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{r>0}{\exists} \; \underset{y \in K(x,r)}{\forall} O(f, y) < \varepsilon.$$

czyli znajdziemy takie otoczenie $x \in A'_\varepsilon$, że wszystkie elementy z tego otoczenia też należą do A'_ε czyli A'_ε jest otwarty.
Wiemy, że

$$\lim_{r \to 0} \left| \sup_{x' \in K(x,r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x,r)} f(x') \right| = c < \varepsilon.$$

Z definicji granicy oraz warunku wyżej wiemy, że

$$\exists_{r} \left| \sup_{x' \in K(x,r)} f(x) - \inf_{x' \in K(x,r)} f(x) \right| < \varepsilon,$$

zatem dla dowolnego $y \in K(x,r)$ mamy

$$\exists_{r'} r' = r - \|x - y\| : \forall_{y' \in K(y,r)} |\sup f(y') - \inf f(y')| < \varepsilon,$$

czyli

$$O(f, y') < \varepsilon \to \forall_{y'} y' \in K(y, r') \subset K(x, r),$$

co oznacza, że punkt x jest punktem wewnętrznym A'_ε, czyli A'_ε jest otwarty, więc A_ε - domknięty. $\square$