

Przykład 1. Uwaga: jeżeli np. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, to znaczy, że
 $f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 2.

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x, y), h) = \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x, y), h) \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x, y), h). \end{aligned}$$

Czyli

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

0.1 Uzupełnienie:

Stwierdzenie 1. Niech V - przestrzeń wektorowa z normą $\|\cdot\|$ i $x_0 \in V$, wówczas

$$f(x) = \|x\|, f : V \rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{ciągła w } x_0.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_x \quad d_x(x, x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ale

$$d_x(x, y) = \|x - y\|, d_{\mathbb{R}^1}(x, y) = |x - y|.$$

Czyli pokażemy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_x \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \varepsilon.$$

Ale wiemy, że

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

czyli $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq 0$

□

Pytanie 1. Niech $f(x, y) = 7x + 6y^2$ i $g(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$. Wówczas $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ile wynosi pochodna?

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1. Niech $G : U \rightarrow Y, U \subset X, U$ - otwarte,

X - przestrzeń wektorowa unormowana,

$F : G(U) \rightarrow Z, G(U) \subset V$

G - różniczkowalna w $x_0 \in U$,

F - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.

Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w x_0 oraz

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)} G'(x_0).$$

Dowód.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{\|h_1\|_x} \rightarrow 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{\|h_2\|_y} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\ &= F(G(x_0)) + F'(G(x_0)) \cdot (G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + \\ &= r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)). \end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0)) \cdot r_1(x_0, h_1) + \\ &= r_2 \cdot (G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)). \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\frac{r_3}{\|h_1\|} \rightarrow 0,$$

ale

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{\|h_1\|} &= F'(G(x_0)) \frac{r_1(x_0, h_1)}{\|h_1\|} + \\ &+ \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}}_{\rightarrow 0 \text{ kiedy } h_1 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}{\|h_1\|}}_{\text{jest ograniczony}}, \end{aligned}$$

ale jeżeli $h_1 \rightarrow 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem $F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0

□

Przykład 3. $f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$, $h(t) = (f \circ \varphi)(t)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Policzmy H' . $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}$, $\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn.

$$H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \Big|_{x=2t^2, y=t^3} \cdot \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3) 3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$$

Przykład 4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) \end{bmatrix}$ $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Niech $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej H , ale

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)}$$