

Rysunek 1: Wymiar pączka może być większy!  $m > n$

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech  $M$  - rozmaitość. Odwzorowanie  $\sigma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma(t) \in M$  nazywamy krzywą na  $M$ .  $\sigma$  jest klasy  $\mathcal{C}^\infty$

**Przykład 1** (*spirala na walcu*)

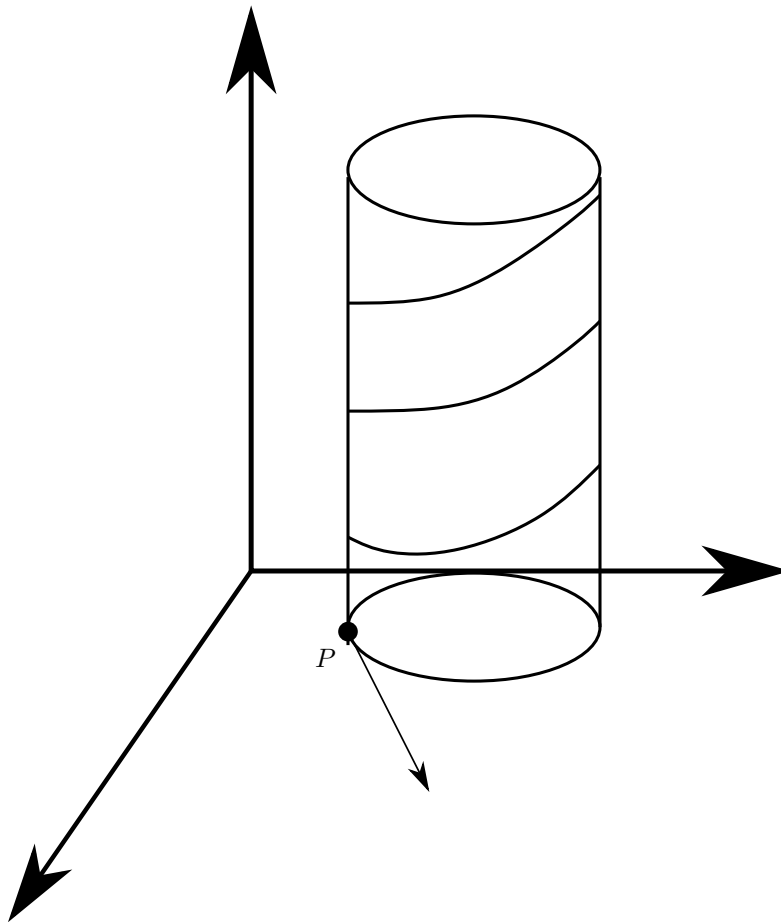
$$\sigma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

**Definicja 1** Niech  $p \in M$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  - krzywe na  $M$  takie, że  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$ . Mówimy, że  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są styczne w punkcie  $P$ , jeżeli

$$\left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt  $P \in M$ . Na tym zbiorze wprowadzamy relację:  $\sigma_1 \sim \sigma_2$  jeżeli  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są styczne. Jeżeli  $\sigma$  krzywa przechodząca przez punkt  $P$ , to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie  $P$  nazwiemy  $v = \underset{\substack{\text{klasa} \\ \text{równoważności}}}{[\sigma]}$

**Przykład 2** Weźmy krzywą  $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$ ,  $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .  
 $\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .



**Przykład 3** Niech  $f(p) = C \ \forall_{p \in M}$ . Ile wynosi  $v(f)$ ?

$$\begin{aligned} v(f) &= v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli  $v(f) = 2v(f)$ , czyli  $v(f) = 0$  (pochodna stała = 0)

Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.

**Pytanie 1** Jak można w praktyce zrealizować taki operator?

Niech  $v \in T_p M$ ,  $v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

**Definicja 2** Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie  $P$  oznaczamy przez  $D_p M$

Chcemy nadać  $D_p M$  strukturę przestrzeni wektorowej.

$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in D_p M, f \in \mathcal{C}^\infty(M) &\implies (v_1 \diamond v_2)f \stackrel{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha \bowtie v_1)f &= \alpha \cdot v_1(f) \end{aligned}$$

**Pytanie 2** Co to znaczy, że  $f$  - klasy  $\mathcal{C}^\infty(M)$ ?

Jeżeli  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  - jest klasy  $\mathcal{C}^\infty$ .

Związek między  $T_p M$ , a  $D_p M$  :

Niech  $v = 5e_x + 6e_y \in T_p M$ . Czy znajdziemy odwzorowanie z  $T_p M$  do  $D_p M$ , (które dokładnie jednemu  $v$  przyporządkowałoby jeden element).  $\rightarrow$  izomorfizm między  $T_p M$  i  $D_p M$ .

## 0.1 asdasdasd

Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie  $p \in M$  oznaczamy przez  $T_p M$  i nazywamy przestrzenią styczną. (Uwaga: warunek (\*) nie zależy od wyboru mapy).

Chcemy wyposażyć  $T_p M$  w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań.

Niech  $v_1, v_2 \in T_p M$  i  $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$ . Wówczas

$$\begin{aligned} v_1 \diamond v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)] \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot v_1 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1))] \end{aligned}$$

$T_p M$  wraz z działaniami  $(\diamond, \cdot)$  ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M, T_p M\}$$

nazywamy wiązką styczną.

**Pytanie 3** Czy w  $TM$  możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?

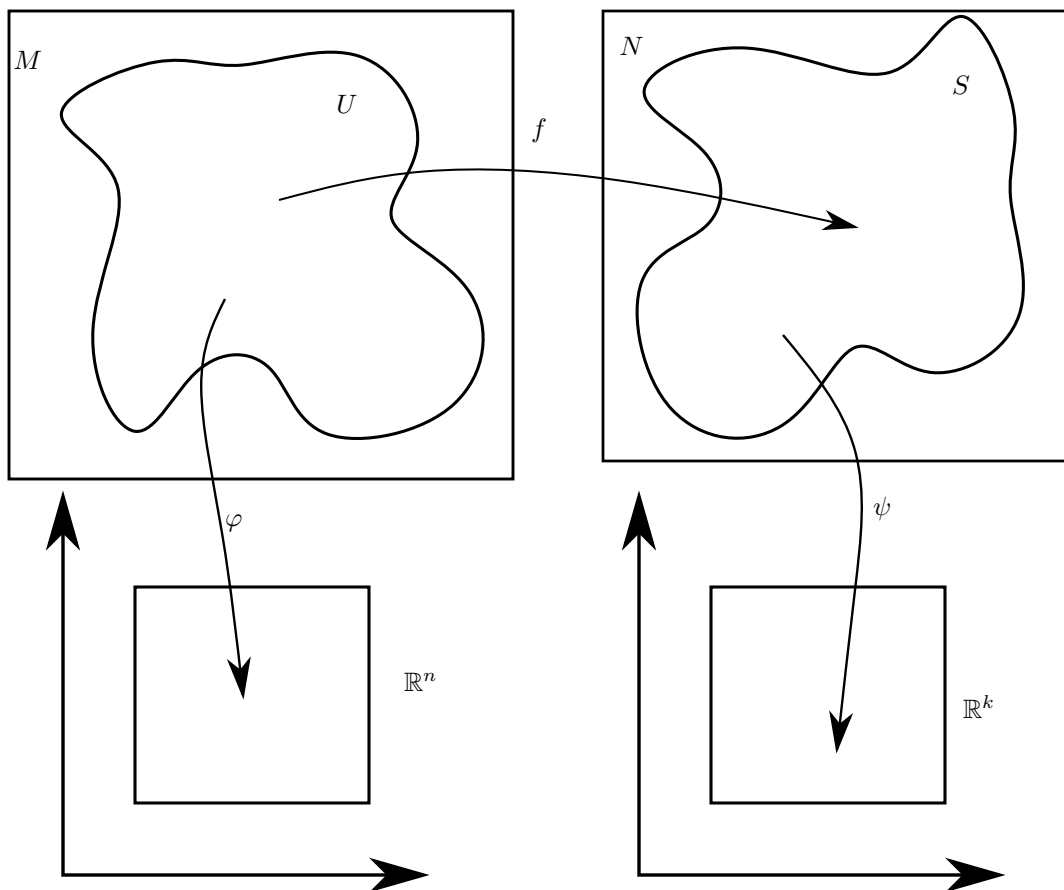
Odpowiedź: NIE DA SIĘ

## 0.2 Przestrzeń różniczkowa

Niech  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - klasy  $\mathcal{C}^\infty(M)$

niech  $v(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , takie, że

$$\begin{aligned} \forall_{f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) &= v(f) + v(g) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{f \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(\alpha f) &= \alpha v(f) \\ \forall_{f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) &= f(p) \cdot v(g) + g(p)v(f). \end{aligned}$$



Rysunek 2:  $f$  nie musi być bijekcją jakby co

$v()$  spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie  $p$ .