$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1,\quad G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad M=\{x:G(x)=0\}\,.$$

Badamy różnicę $f(x_0+h)-f(x_0)$ (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora)
Próbujemy ożenić te języki. Zbadajmy $G'(x)$.

- $G'(x)$ - jest macierzą $[G']_{m,n}$

$$G(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix}G^1(x_1,\dots,x_n)\\ G^2(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ G^m(x_1,\dots,x_n)\end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)]=\begin{bmatrix}\frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n}\end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)]:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m.$$

Pytanie 1 *Jaki jest "wymiar" zbioru M?*

Albo, jeżeli $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, to wiąż $G(x)=0$ zadaje funkcję

$$\varphi(x):\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^m.$$

Taką, że $G(x^1,\dots,x^{n-m},\varphi^1(x^1,\dots,x^{n-m}),\dots,\varphi^m(x^1,\dots,x^{n-m}))$, (jeżeli $\det G_y(x)\neq 0$)

Jeżeli $\det G'_y(x)\neq 0$, to znaczy, że w macierzy

$$G'=\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m}\\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m}\end{bmatrix}.$$

Gdzie $x\overset{\text{ozn}}{=}(x^1,\dots,x^{n-m},y^1,\dots,y^m)$. Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne $(y^1,\dots,y^m)$ można uzyskać z innych $(x^1,\dots,x^{n-m})$ poprzez funkcję $\varphi:x=\varphi(y)$

Gdy założymy, że $\det G'_y\neq 0$, to znaczy, że
m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim imG'(x)=m=\dim\mathbb{R}^m \text{ i } G'(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim\ker G'(x)=n-m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy $X_1=\ker G'(x)$ i $X_2=imG'(x)$ $(\dim X_1=n-m,\dim X_2=m)$ Oznacza to, że każdy wektor $h\in\mathbb{R}^n$ da się przedstawić jako $h=h_1+h_2,h_1\in X_1,h_2\in X_2$ czyli $\mathbb{R}^n=X_1\bigoplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1=\left\{\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^{n-m}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right\},X_2=\left\{\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ y^1\\ \vdots\\ y^m\end{bmatrix}\right\},\quad x^1,\dots,x^{n-m},y_1,\dots,y_m\in\mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}) \end{bmatrix}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach $G'(x)$? - jest ich m i są liniowo niezależne

Jeżeli $h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$, to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie $(r\frac{0,h_1}{\|h_1\|} \underset{\|h_1\|\to 0}{\to} 0)$ (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że φ - różniczkowalna, co więcej $\varphi' = -(G'_y)^{-1}G'_x$ a $\varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)$ czyli $\varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0, h_1)}{\|h_1\|} \underset{h_1\to 0}{\to} 0.$$

czyli h_2 maleje szybciej niż $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Skoro $h \in \mathbb{R}^n$, to możemy przedstawić h jako

$$h = h_\| + h_\perp, \quad h_\| \in X_1, h_\perp \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_\| = 0?.$$

Przykład 1 *niech* $G(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$, $G' = (2(x - 1), 2(y - 1))$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h_\perp + h_\|) - f(x_0).$$

W małym otoczeniu h będzie bardziej decydował $h_\|$, bo zawsze mogę zmniejszyć h i w efekcie $h_\perp$ się zmniejszy

Wiemy, że

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)(h, h) + r_1(x_0, h).$$

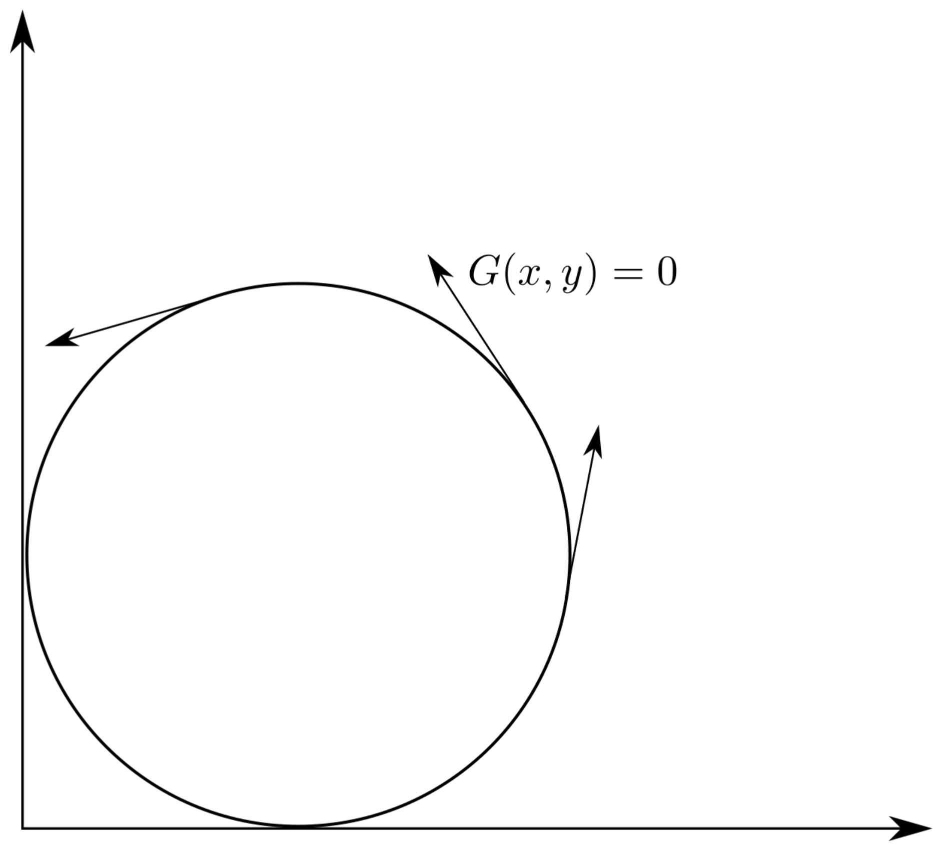
bo f - różniczkowalna

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x_0)h + \frac{1}{2!}G''(x_0)(h, h) + r_2(x_0, h).$$

bo G - różniczkowalna

niech

$$\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}.$$



Rysunek 1: biedronka i szprycha

Wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \Lambda(G(x_0 + h) - G(x_0)) = (f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h.$$

Dalej dostajemy

$$(f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h + \frac{1}{2!}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) + r_1(x_0, h) + r_2(x_0, h).$$

Ale dla minimum lub maksimum chcemy, aby

$$f'(x_0) = \Lambda G'(x_0).$$

więc dla minimum / maksimum $f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h)+r_1(x_0,h)+r_2(x_0,h)$

Zatem jako, że $\frac{r_1(0,h)}{\|h\|^2} \underset{\|h\|^2}{\to} 0$, $\frac{r_2(0,h)}{\|h\|^2} \underset{\|h\|^2}{\to} 0$, to o znaku $f(x_0 + h) - f(x_0)$ decyduje znak

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h).$$

Wiemy, że $h \in \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^n = X_1 \bigoplus X_2$, czyli $h = h_\perp + h_\parallel$

$$f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) = \underbrace{f''(x_0)\Lambda G''(x_0)}_{\square}(h_\parallel + h_\perp, h_\perp + h_\parallel).$$

$$= (\square)(h_\perp, h_\perp) + (\square)(h_\perp, h_\parallel) + (\square)(h_\parallel, h_\perp) + (\square)(h_\parallel, h_\parallel).$$

Pytanie 2 *Króre z powyższych wyrażeń jest najmniejsze (które z powyższych wyrażeń są o rząd mniejsze od pozostałych dla $\|h\| \to 0$*

Wiemy, że

$$\|h_\perp\| \ \|h_\|\|.$$

Oznacza to, że dla małych $\|h_\|\|$ o znaku decyduje

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\|, h_\|).$$

Twierdzenie 1 *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, f \in \mathcal{C}^2(U), G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, G \in \mathcal{C}^2(U_2), \underset{x_0}{\exists} G(x_0) = 0, G'(x_0)$ *- ma rząd maksymalny* (m) *oraz*

$$\underset{\Lambda}{\exists} \Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\|, h_\|) > 0, h_\| \overset{def}{=} \left\{G'(x_0)h_\| = 0\right\}.$$

to f *posiada w* x_0 *minimum lokalne* (< 0, *to maksimum lokalne) na zbiorze* $M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$