

Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$v = [\sigma], v \in T_p M, v() \in D_p M$$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} v() &= ? \cdot ? + ? \cdot ? + ? \cdot ? = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}. \end{aligned}$$

Czyli jeżeli  $v \in T_p M$  i  $v \in [\sigma]$ , to wiemy, że

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1 + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2 + \dots + \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n = \\ &= \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \\ &= \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} = v(f). \end{aligned}$$

Zatem

$$v() = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

**Przykład 1.** Więć niech  $v = 2e_x + 3e_y \rightarrow v() = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ .

Wniosek: mając izomorfizm między  $T_p M$  i  $D_p M$  możemy zapisać bazy:

$$T_p M = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

To wtedy

$$D_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle.$$

np.  $v = 7e_r + 8e_\varphi \rightarrow v() = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \varphi}$  (często użyjemy bazy z  $D_p M$  jako bazy  $T_p M$ ).

**Definicja 1.** Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Zbiór jednoform ( $p \in M$ ) oznaczamy przez  $T_p^* M$  (lub  $\Lambda^1(M)$ ,  $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$ )

Skoro  $T_p^* M$  jest dualna do  $T_p M$ , to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną.

$$T_p^* M = \langle dx^1, dx^2, \dots, dx^n \rangle, \text{ gdzie } \langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_j^i$$

**Przykład 2.** Niech  $\Lambda^1(M) \rightarrow \omega = 7dx + 3dy, v \in T_p M = 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$ , wówczas

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, v \rangle &= \left\langle 7dx + 3dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= \left\langle 7dx, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \left\langle dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= 7 \cdot 2 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 7 \cdot 4 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \cdot 2 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 3 \cdot 4 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
 &= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4.
 \end{aligned}$$

**Przykład 3.**

$$\begin{aligned}
 v &= A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz = \\
 &= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.
 \end{aligned}$$

"../img/"fig\_50.pdf

Rysunek 1: Strumień przez balonik

**Definicja 2.** Zbiór wszystkich odwzorowań  $T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez  $\Lambda^k(M)$  i nazywamy  $k$ -formami.

**Definicja 3.** Niech  $\alpha \in T_p^* M, \beta \in T_p^* M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$ .

Odwzorowanie  $\wedge : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \Lambda^2(\theta), \theta \in M$  nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

**Przykład 4.** Niech  $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y}, w = 2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$   
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja:  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ . Tzn.  $\alpha \wedge \alpha = 0$ . Ważny przykład:

**Przykład 5.**

$$\begin{aligned} \alpha &= A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\ \alpha \wedge \beta &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\ &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\ &+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\ &+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y) dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

**Definicja 4.** Odwzorowanie  $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$  nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \rightarrow \mathbb{R}$$

(funkcje nazywamy zero-formami  $f \in \Lambda^0(\theta)$ )

$$\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

$$dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).$$

**Przykład 6.**  $f(r, \theta, \varphi)$  - funkcja z  $\mathbb{R}^3$  w  $\mathbb{R}^1$ .

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\alpha = 7x^2 y dx$$

$$d\alpha = d(7x^2 y) \wedge dx = \left( \frac{\partial}{\partial x} (7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx.$$

**Przykład 7.** Niech  $F = -E_x dt \wedge dx - E_x dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

$$\begin{aligned}
 dF &= \left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} dy - \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dx + \\
 &+ \left( -\frac{\partial E_y}{\partial x} dx - \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dy + \\
 &+ \left( -\frac{\partial E_z}{\partial x} dx - \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) \wedge dt \wedge dz + \\
 &+ \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) \wedge dy \wedge dz + \\
 &+ \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) \wedge dz \wedge dx + \\
 &+ \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \\
 &= \underbrace{\left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dy + \\
 &+ \underbrace{\left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dy \wedge dz + \\
 &+ \underbrace{\left( -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dz + \\
 &+ \underbrace{\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)}_{\nabla B} dx \wedge dy \wedge dz.
 \end{aligned}$$

*I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część)  $dF = 0$*