

Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + \dots + \\ + \frac{1}{p!} \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{p+1}} + R_{p+1}(x_0, h), \\ \vdots \\ i_{p+1}=1$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \dots \\ i_{p+1}=1}}^n \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}} (x_0 + \theta h) h^{i_1} \dots h^{i_{p+1}}. \\ \text{0} < \theta < 1 \\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla} \\ \text{"} x_0 < c < x_0 + h \text{"}$$

Obserwacja 1. (bardzo ważna zależność!)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{p+1}(x_0, h)}{\|h\|^p} \rightarrow 0.$$

Przykład 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$, $f'(x, y) = [2xy^3, 3x^2 y^2]$.

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, to wtedy

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} h^1 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} h^1 h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} h^2 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} h^2 h^2 = \\ = \begin{bmatrix} h_1, h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na al-gebrze.

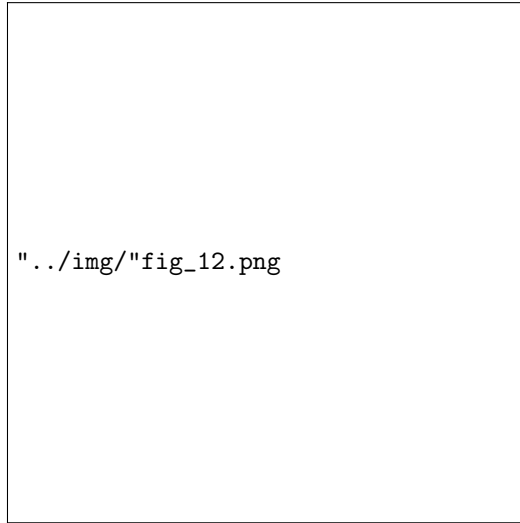
0.1 Minima i maksima

Przypomnienie: Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$.
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in K(x_0, \eta) \\ K(x_0, \eta) \subset \mathcal{O} \\ x \neq x_0}} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_h \quad ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0 + h) > f(x_0).$$



Rysunek 1: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1. jeżeli $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{O} - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$, f - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

Uwaga: jeżeli $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ i U - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na $\text{int}(U)$ oraz na $U - \{\text{int}(U)\}$

Dowód. Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0 , to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_h(t) \right|_{t=0} = 0,$$

czyli dla $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, $h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} g_h(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \dots, x_0^n + th^n) \right|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\forall : ||h|| < \eta, \end{aligned}$$

to znaczy:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Uwaga: jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

Twierdzenie 1. *Niech*

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{O} &\subset \mathbb{R}^n, \\ x_0 &\in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \text{ - otwarty}, \\ f &\in C^{2p}(\mathcal{O}), \\ f'(x_0) &= 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

oraz spełniony jest warunek

$$\begin{array}{c} \exists \\ c > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists \\ \eta > 0 \end{array} \quad \forall_{h \in K(x_0, \eta)} : \quad \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^n \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geq c \|h\|^{2p} (\leq c \|h\|^{2p})$$

to wtedy f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. (wersja uproszczona dla minimum i dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$).

Jeżeli f spełnia założenia, to wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{(2p)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p}=1}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p}}}_{(*)} + r_{2p+1}(x_0 + h) \quad (1)$$

Wiemy też , że

$$\begin{array}{c} \exists \\ c > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists \\ \eta > 0 \end{array} \quad (??)(*) \geq c \|h\|^{2p} .$$

Chodzi o to, żeby reszta
nie mogła tego przekroczyć

Chcemy pokazać, że

$$\begin{array}{c} \exists \\ \eta \end{array} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \left| r_{2p+1}(x, h) \right| \leq \frac{c}{2} \|h\|^{2p} .$$

albo 7,
albo 2019

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p+1}=1}^n \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0 + \theta h)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p+1}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{tu potrzebne założenie, że } f \in C^{2p+1} \\ \text{albo 7, albo 2019} \end{array} \right.$$

Zauważmy, że $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \rightarrow 0$, ale zatem

$$\forall_{M > 0} \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad \frac{r_{2p+1}(x_0 + h)}{\|h\|^{2p}} < M,$$

czyli

$$\left| \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \right| < M.$$

$$\forall_M \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad \left| r_{2p+1}(x_0, h) \right| < M \|h\|^{2p}$$

czyli jak przyjmiemy $M = \frac{c}{2}$ to dostajemy

$$\exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{c}{2} \|h\|^{2p}$$

□

Uwaga: dlaczego warunek $(-|-) > c\|h\|^{2p}$, a nie po prostu $(-|-) > 0$?

Przykład 2.

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Badamy: $f(0 + h) - f(0) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$ Czyli

$f(0 + h) - f(0) \star 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.

$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ - minimum, $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ - równo, coś takiego - punkt siodłowy.

Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\exists_c [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geq c \|h\|^2,$$

bo dla

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geq c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$$

0.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \omega \end{bmatrix}$$