

**Definicja 1** *Norma: niech  $X$  - przestrzeń wektorowa. Odwzorowanie  $||\cdot|| : X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy normą, jeżeli:*

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \forall_{x \in X} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \quad (2)$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad (3)$$

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \quad (4)$$

Przestrzeń  $X$  wraz z normą  $||\cdot||$  nazywamy przestrzenią unormowaną (*spółier*: przestrzenią Banacha).

### Przykład 1

$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (v \in X) \implies ||v|| = \sup(|x^1|, \dots), f \in C([a, b])$ , to  $||f|| = \sup_{x \in [a, b]}(f(x))$

UWAGA: mając normę możemy zdefiniować metrykę  $\forall_{x, y \in X} d(x, y) = ||x - y||$ , natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

**Przykład 2** *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(a_x, a_y) = ||a_x - a_y|| = |a| ||x - y|| = ad(x, y),$$

*czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

**Definicja 2** *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

*- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).*

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0, h)}{||h||} \rightarrow 0 \text{ przy } ||h|| \rightarrow 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

**Definicja 3** Niech  $U \subset X, V \subset Y$

$U, V$  - otwarte,  $T : U \rightarrow V; x, h \in U$

Mówimy, że  $T$  - różniczkowalne w punkcie  $x_0$ , jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\forall_{h \in U} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , a  $L_{x_0}$  - liniowe :  $X \rightarrow Y$ .

Odwzorowanie  $L_{x_0}(h)$  nazywamy pochodną  $T$  w punkcie  $x_0$ . Czasami  $L_{x_0}(h)$  możemy przedstawić w postaci  $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$ , to  $T'(x_0)$  nazywamy pochodną odwzorowania  $T$ .

UWAGI: Dlaczego  $L_{x_0}(h)$ , a nie  $T'(x_0)h$ ?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx$$

, a tego nie da się przedstawić jako

$$\left( \int_0^1 \sin x dx \right) h(x)$$

### Przykład 3

$$T(x + h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$$

1. Niech  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , czyli  $x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $T(x)$  - wektor (3 el.),  $T'(x)$  - wektor (3 el.)

2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  - wektor (3 el.),  $h$  - wektor (3.el),  $T'(x)$  - p.wektor (3 el.)

3.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $x_0$  - wektor (2 el.),  $h$  - wektor (2 el.),  $T(x)$  - wektor (3 el.),

$T'(x)$  - macierz (3x2)

$$4. f(x, y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

$$f(x_0 + hx, y_0 + hy) - f(x_0, y_0) = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0 y_0^2 = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = (y_0^2, 2x_0 y_0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y.$$

$$\text{Czy } \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0?$$

$$\text{Weźmy } \left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}.$$

$$\text{Wówczas } x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leq x_0 \|h\|^2 + \|h\|^3 + 2y_0 \|h\|^2 = \|h\|^2 (x_0 + 2y_0 + \|h\|)$$

$$\text{Zatem } \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2 (|x_0| + 2y_0 + \|h\|)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

$$f(x, y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że  $y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f$

UWAGA: skąd wiemy, że gdy  $h \rightarrow 0$ , to  $\|h\| \rightarrow 0$ ?  
 Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w  $h = 0$ ?  
 <odpowiedź za tydzień>

**Twierdzenie 1** Jeżeli  $f$  - różniczkowalna w  $x_0 \in U$ , to dla dowolnego  $e \in U$ ,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

### Dowód 1

**Pytanie 1** Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?

### Przykład 4

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , dla  $f(x, y)$  policzyliśmy pochodne cząstkowe w  $x_0$   $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0$ .

$h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0, 0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + \sqrt{h_x h_y}$ , gdzie  $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$ .

Czyli  $f$  - różniczkowalna, jeżeli  $\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

Niech  $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$  i niech  $|h_x| > |h_y|$ .  $\|h\| = |h_x|$ .

Dalej mamy:  $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\rightarrow 0$  przy  $h_x \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

**Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.**

**Twierdzenie 2** Niech  $O \subset \mathbb{R}^n, O$  - otwarty.  $f : O \rightarrow Y, x_0 \in O$ .

Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe  $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \dots, n$  i są ciągłe w  $x_0$ , wtedy  $\forall_{h \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h)$ , gdzie  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$

### Dowód 2 (dla $O = \mathbb{R}^3$ )

$$\text{Niech } x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\ & = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \end{aligned}$$

tw. o w. średniej

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1)h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3)h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3)h^3 = \\
& \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 + \\
& + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^2 + \\
& + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^3 \\
& \text{gdzie } c_1 \in ]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in ]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in ]x_0^3, x_0^3 + h^3[
\end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , gdy  $h \rightarrow 0$ .

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci  $\cos h^i$ , a  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h^i}{\|h\|} =$

$\{\{ \text{dla normy np. } \|h\| = \max |h^i| \} \} \neq 0$ . (np.  $\frac{h^1}{h^1} \rightarrow 1$ )

Oznacza to, że jeżeli  $\frac{r(x, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 \rightarrow 0$$

Czyli np.  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1} - \text{ciągła}) \square$