"../img/"fig_14.png

Rysunek 1: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 1. *Niech $L : V \to W, L$ - liniowe, $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ - unormowane. Mówimy, że L jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists} \quad \underset{x \in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v.$$

Przykład 1. *dla* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\underset{A}{\exists} \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leqslant A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

ale

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

Twierdzenie 1. *(L - ograniczone) $\iff$ (L - ciągłe)*

Dowód. $\Longleftarrow$
Wiemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}, \underset{\delta}{\exists}, \underset{x,x' \in V}{\forall}, \quad ||x - x'||_v < \delta \implies ||L(x) - L(x')||(*) < \varepsilon,$$

chcemy pokazać, że:

$$\underset{A>0}{\exists}. \underset{x,x' \in V}{\forall} \quad ||L(x - x')|| \leqslant A||x - x'||,$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.
Ale

$$||L(x-x')|| = \underbrace{\left\|L\left(\frac{x-x'}{||x-x'||}\right)\frac{\delta}{2}\right\|\frac{||x-x'||2}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leqslant \varepsilon\frac{||x-x'||2}{\delta}$$

Co wiemy o $\left\|\frac{x-x'}{||x-x'||}\frac{\delta}{2}\right\|_v < \delta$?

$$\underset{x,x'\in V}{\forall}||L(x-x')||_w \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}||x-x'||_v$$

Szukane $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ istnieje! □

Dowód. $\Longrightarrow$
Wiemy, że

$$\underset{A}{\exists}\quad\underset{x,x'\in V}{\forall}\quad \|L(x-x')\| \leqslant A\,\|x-x'\| \tag{1}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \to x_0$, to $L(x_n) \to L(x_0)$, ale

$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w = ||L(x_n - x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{ bo (1)})$$

$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{ wszystko dąży do 0})$$

□

Definicja 2. *Wielkość*

$$\underset{A}{inf}\{\underset{x\in V}{\forall}||L(x)||_w \leqslant A||x||_v\}$$

nazywamy normą odwzorowania L i oznaczamy $A \overset{ozn}{=} ||L||$.

Definicja 3. *Niech* $U \subset \mathbb{R}^m$ *- jest zbiorem wypukłym, jeżeli*

$$\underset{a,b\in U}{\forall}\quad [a,b] \overset{def}{=} \{a(1-t)+bt, t\in[0,1]\} \subset U$$

Stwierdzenie 1. *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, U$ *- wypukłe,*

$$\underset{M}{\exists}\quad\underset{x\in U}{\forall}||f'(x)|| \leqslant M,$$

to

$$\underset{a,b\in U}{\forall}||f(b)-f(a)||_n \leqslant M||b-a||_m$$

*(jakiekolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)*

Dowód. niech $\gamma(t) = a(1-t)+bt, t\in[0,1]$, $\quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, czyli

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

"../img/"fig_15.png

Rysunek 2: zbiór wklęsły

"../img/"fig_16.png

Rysunek 3: zbiór wypukły

zatem

$$\|g(1)-g(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} g_1(1)-g_1(0) \\ g_2(1)-g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1)-g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{Tw. Lagrange!}}{=}$$

$$= \left\| \underset{0<c_i<1}{\begin{bmatrix} g_1'(c_1)(1-0) \\ g_2'(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g_n'(c_n)(1-0) \end{bmatrix}} \right\| \leqslant \left\| \begin{bmatrix} g_1'(c_1) \\ g_2'(c_2) \\ \vdots \\ g_n'(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\|$$

$$\text{Ale } g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \to \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leqslant \|f'(\gamma(t))\| \, \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leqslant} M$$

$$\text{Czyli } \underset{t\in[0,1]}{\forall} \|g'(t)\| \leqslant M \, \|b-a\| \implies \|f(b)-f(a)\| \leqslant M \, \|b-a\|$$

□

Definicja 4. *Niech X - unormowana: $P : X \to X, P$ - ciągła na X.*
Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$
$\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

"../img/"fig_17.png

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.*

Dowód. Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez $\tilde{x}$. Mamy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} \quad \underset{N_1}{\exists} \quad \underset{n>N_1}{\forall} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \tag{2}$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall} \quad \underset{N_2}{\exists} \quad \underset{n>N_2}{\forall} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \tag{3}$$

P - ciągłe, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x'}{\forall}: \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (2)$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{4}$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leqslant d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{5}$$

$$\text{Ale z (2) wynika, że } \underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{6}$$

Zatem znając ε z (4) przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z (3) i dzięki temu mamy (5) □

Definicja 5. *Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \to X$ nazywamy zwężającym, jeżeli:*

$$\underset{q\in[0,1[}{\exists} \quad \underset{x,y\in X}{\forall} d(P(x), P(y)) \leqslant q d(x, y) \tag{7}$$

Twierdzenie 3. *(Zasada Banacha o lustrach)*
Jeżeli $P : X \to X, P$ - zwężające, to

1. $\underset{x_0\in X}{\forall} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\})$ *- Zbieżny do punktu stałego $\tilde{x}$* (8)
2. *Istnieje tylko jedno $\tilde{x}$* (9)
3. $\underset{m}{\forall} \quad d(x_m, \tilde{x}) < \dfrac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$ (10)

Przykład 2. ***(Uwaga)***
(P - nie musi być ciągłe) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi implicite
- lustra w łazience koło sali 1.01 → można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód. ad. 2
Załóżmy, że

$$\underset{\tilde{x}_1, \tilde{x}}{\exists} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$$

Wtedy

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < q d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant q d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leqslant q \leqslant 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{ sprzeczność!}$$

□

Dowód.

Obserwacja 1.

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&=d(P(x_n),P(x_{n-1}))\leqslant qd(x_n,x_{n-1})=qd(P(x_{n-1}),P(x_{n-2}))\leqslant\\&\leqslant q^2d(x_{n-1},x_{n-2})\leqslant q^nd(x_1,x_0).\end{aligned}$$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$?

$$\begin{aligned}d(x_{n+m},x_n)&\leqslant d(x_{n+m},x_{n+m+1})+d(x_{n+m-1},x_n)\leqslant\\&\leqslant d(x_{n+m},x_{n+m-1})+d(x_{n+m-1},x_{n+m-2})+d(x_{n+m-2},x_n)\leqslant\\&\leqslant\cdots\leqslant d(x_{n+m},x_{n+m-1}+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\leqslant\\&\leqslant(q^{n+m-1}+\cdots+q^{n+2}+q^{n+1}+q^n)d(x_1,x_0)\leqslant\\&\leqslant q^n\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)d(x_1,x_0)\underset{0\leqslant q<1}{\leqslant}\frac{q^n}{1-q}d(x_1,x_0).\end{aligned}$$

Czyli $d(x_{n+m},x_n)\leqslant\frac{q^n}{1-q}d(x_1,x_0)$

Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X. Czyli czy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n,m>N}{\forall}\quad d(x_n,x_m)<\varepsilon?$$

Załóżmy, że $m>n$ i $m=n+k$. Wtedy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n>N}{\forall}\quad d(x_n,x_{n+k})<\varepsilon?\ \text{TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q}d(x_1,x_0)<\varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n\to\tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m},x_n)\leqslant\frac{q^n}{1-q}d(x_1,x_0)\to d(\tilde{x},x_n)\leqslant\frac{q^n}{1-q}d(x_1,x_0)$. □