Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \dots +$$

$$+ \frac{1}{p!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots\\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\dots \partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h),$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \dots\\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\dots \partial x^{i_p+1}} \underbrace{(x_0+\theta h)}_{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla}\\ \text{"}x_0<c<x_0+h\text{"}}} h^{i_1}\dots h^{i_{p+1}}.$$

Obserwacja 1. *(bardzo ważna zależność!)*

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0.$$

Przykład 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2y^3, f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^3, 3x^2y^2 \end{bmatrix}$.

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, *to wtedy*

$$\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} h_1, h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

0.1 Minima i maksima

Przypomnienie: Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in K(x_0,\eta)\\ K(x_0,\eta)\subset\mathcal{O}\\ x\neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h}{\forall} \quad ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0+h) > f(x_0).$$

"../img/"fig_12.png

Rysunek 1: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1. *jeżeli* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $x_0 \in \mathcal{O}, f$ *- posiada w* x_0 *minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \ldots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

Uwaga: jeżeli $f : U \to \mathbb{R}$ i U - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na $int(U)$ oraz na $U - \{int(U)\}$

Dowód. Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} g_h(t)\right|_{t=0} = 0,$$

czyli dla $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right), \quad h = \left(h^1, h^2, \ldots, h^n\right)$

"../img/"fig_13.png

Rysunek 2

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g_h(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \ldots, x_0^n + th^n)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n)\Big|_{t=0} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i = 0 \quad |\underset{h}{\forall} : ||h|| < \eta,
\end{aligned}
$$

to znaczy:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Uwaga: jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

Twierdzenie 1. *Niech*

$$\begin{aligned} & f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}, \\ & \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n, \\ & x_0\in\mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \text{ - otwarty}, \\ & f\in C^{2p}(\mathcal{O}), \\ & f'(x_0)=0, f''(x_0)=0,\dots,f^{(2p-1)}(x_0)=0. \end{aligned}$$

oraz spełniony jest warunek

$$\underset{c>0}{\exists}\quad\underset{\eta>0}{\exists}\quad\underset{h\in K(x_0,\eta)}{\forall}:\quad \sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n}\frac{\partial^{(2p)}f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{2p}}}(x_0)h^{i_1}\dots h^{i_{2p}}\geqslant c||h||^{2p}(\leqslant c||h||^{2p})$$

to wtedy f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. (wersja uproszczona dla minimum i dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$).
Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\underbrace{\frac{1}{(2p)!}\sum_{i_1=1\dots i_{2p}=1}^{2p}\frac{\partial^{(2p)}f(x_0)}{\partial x^{i_1}\dots x^{i_{(2p)}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p)}}}_{(*)}+r_{2p+1}(x_0+h) \tag{1}$$

Wiemy też , że

$$\underset{c>0}{\exists}\quad\underset{\eta>0}{\exists}\quad\underbrace{(\textbf{??})(*))\geqslant c||h||^{2p}}_{\substack{\text{Chodzi o to, żeby reszta}\\ \text{nie mogła tego przekroczyć}}}.$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\eta}{\exists}\quad\underset{||h||<\eta}{\forall}\Big|r_{2p+1}(x,h)\Big|\leqslant\underbrace{\frac{c}{2}}_{\substack{\text{albo 7,}\\ \text{albo 2019}}}||h||^{2p}.$$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{i_1=1\dots i_{2p+1}=1}^{n}\frac{\partial^{(2p+1)}f(x_0+\theta h)}{\partial x^{i_1}\underset{0<\theta<1}{\dots}\partial x^{i_{(2p+1)}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p+1)}}=\Big|\text{tu potrzebne założenie, że } f\in C^{2p+1}(\mathcal{O})\Big|=r_{2p+1}(x,h).$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}}\to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall}\quad\underset{\eta}{\exists}\quad\underset{||h||<\eta}{\forall}\frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}}<M,$$

czyli

$$\left|\frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}}\right|<M.$$

$$\underset{M}{\forall}\quad\underset{\eta}{\exists}\quad\underset{||h||<\eta}{\forall}\quad\Big|r_{2p+1}(x_0,h)\Big|<M\Big||h|\Big|^{2p}$$

czyli jak przyjmiemy $M = \frac{c}{2}$ to dostajemy

$$\underset{\eta}{\exists} \underset{||h||<\eta}{\forall} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant \frac{c}{2}||h||^{2p}$$

$\square$

Uwaga: dlaczego warunek $(-|-) > c||h||^{2p}$, a nie po prostu $(-|-) > 0$?

Przykład 2.

$$f(x,y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Badamy: $f(0+h) - f(0) = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$ *Czyli* $f(0+h) - f(0) \star 2h_1^2$ *- minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.*
$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *- minimum,* $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ *- równo, coś takiego - punkt siodłowy.*
Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\underset{c}{\exists} [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c \left\| h \right\|^2,$$

bo dla

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad 0 \ngeqslant c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$$

0.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$