Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$
\begin{aligned}
&v=[\sigma], v\in T_pM, v\,()\in D_pM\\
&v(f)=\frac{d}{dt}f(\sigma(t))|_{t=0}\\
&v\,()=?\cdot?+?\cdot?+?\cdot?=\frac{d}{dt}(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\sigma(t))|_{t=0}=\\
&=\frac{d}{dt}(\tilde{f}\circ\varphi(\sigma(t)))|_{t=0}=\frac{d}{dt}(\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)),\varphi^2(\sigma(t)),\dots,\varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0}=\\
&=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Czyli jeżeli $v\in T_pM$ i $v\in[\sigma]$, to wiemy, że

$$
\begin{aligned}
v&=\frac{\partial\varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}e_1+\frac{\partial\varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}e_2+\ldots+\frac{\partial\varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}e_n=\\
&=\xi^1e_1+\xi^2e_2+\ldots+\xi^ne_n=\\
&=\xi_1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^1}+\xi_2\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^n}=v(f).
\end{aligned}
$$

Zatem

$$v\,()=\xi_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\xi_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Przykład 1. *Więc niech* $v=2e_x+3e_y\to v\,()=2\cdot\frac{\partial}{\partial x}+3\cdot\frac{\partial}{\partial y}$.

Wniosek: mając izomorfizm między T_pM i D_pM możemy zapisać bazy:

$$T_pM=\langle e_1,e_2,\dots,e_n\rangle\,.$$

To wtedy

$$D_pM=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle.$$

np. $v=7e_r+8e_\varphi\to v\,()=7\frac{\partial}{\partial r}+8\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (często użyjemy bazy z D_pM jako bazy T_pM).

Definicja 1. *Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe* $\omega: T_pM\to\mathbb{R}$. *Zbiór jednoform* ($p\in M$) *oznaczamy przez* T_p^*M *(lub* $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta),\theta\in M$*)*

Skoro T_p^*M jest dualna do T_pM, to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną. $T_p^*M=\left\langle dx^1,dx^2,\dots,dx^n\right\rangle$, gdzie $\left\langle dx^i,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle=\delta^i_j$

Przykład 2. *Niech* $\Lambda^1(M)\to\omega=7dx+3dy, v\in T_pM=2\frac{\partial}{\partial x}+4\frac{\partial}{\partial y}$, *wówczas*

$$
\begin{aligned}
&\langle\omega,v\rangle=\left\langle 7dx+3dy,2\frac{\partial}{\partial x}+4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\\
&=\left\langle 7dx,2\frac{\partial}{\partial x}+4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle+3\left\langle dy,2\frac{\partial}{\partial x}+4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\\
&=7\cdot2\left\langle dx,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle+7\cdot4\left\langle dx,\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle+3\cdot2\left\langle dy,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle+3\cdot4\left\langle dy,\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\\
&=7\cdot2+3\cdot4.
\end{aligned}
$$

Przykład 3.

$$v = A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz =$$
$$= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.$$

> **Definicja 2.** *Zbiór wszystkich odwzorowań $T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k-formami.*

> **Definicja 3.** *Niech $\alpha \in T_p^*M, \beta \in T_p^*M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$.*
> *Odwzorowanie $\wedge : T_p^*M \times T_p^*M \to \Lambda^2(\theta), \theta \in M$ nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:*
> $$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Przykład 4. *Niech $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}, w = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$*
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tzn. $\alpha \wedge \alpha = 0$. Ważny przykład:

Przykład 5.

$$\begin{aligned}
&\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\
&\alpha \wedge \beta = (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\
&= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\
&+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\
&+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\
&= (A_x B_y - A_y B_x)\, dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y)\, dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z)\, dz \wedge dx
\end{aligned}$$
.

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

> **Definicja 4.** *Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:*
> $$\begin{aligned}
> &df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \to \mathbb{R} \\
> &(funkcje\ nazywamy\ zero\text{-}formami\ f \in Lambda^0(\theta)) \\
> &\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \\
> &dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).
> \end{aligned}$$

Przykład 6. *$f(r, \theta, \varphi)$ - funkcja z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^1$.*

"../img/"fig_50.pdf

Rysunek 1: Strumień przez balonik

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$
$$\alpha = 7x^2ydx$$
$$d\alpha = d(7x^2y) \wedge dx = \left(\frac{\partial}{\partial x}(7x^2y)dx + \frac{\partial}{\partial y}(7x^2y)dy\right) \wedge dx = 7x^2dy \wedge dx.$$

Przykład 7. *Niech* $F = -E_xdt \wedge dx - E_xdt \wedge dy - E_zdt \wedge dz + B_xdy \wedge dz + B_ydz \wedge dx + B_zdx \wedge dy$

$$\begin{aligned}
dF = &\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}dy - \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right) \wedge dt \wedge dx + \\
&+ \left(-\frac{\partial E_y}{\partial x}dx - \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\right) \wedge dt \wedge dy + \\
&+ \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x}dx - \frac{\partial E_z}{\partial y}dy\right) \wedge dt \wedge dz + \\
&+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}dt + \frac{\partial B_x}{\partial x}dx\right) \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t}dt + \frac{\partial B_y}{\partial y}dy\right) \wedge dz \wedge dx + \\
&+ \left(\frac{\partial B_z}{\partial t}dt + \frac{\partial B_z}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy = \\
&= \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\right)} dt \wedge dx \wedge dy + \\
&+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right)} dt \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\right)}_{rotE - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)}_{\nabla B} dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część) $dF = 0$