

0.1 Zbiory miary Lebesgue’a zero

Definicja 1. *Kostką w \mathbb{R}^n ($a_k \leq b_k$) nazywamy zbiór*

$$P_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Definicja 2. *Objętością kostki nazywamy*

$$|P_k| = |[a_1, b_1]| \cdot |[a_2, b_2]| \cdot \dots \cdot |[a_n, b_n]|,$$

gdzie $|[a_k, b_k]| = |b_k - a_k|$.

Definicja 3. *Niech $X \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że zbiór X jest miary Lebesgue’a zero, jeżeli*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{P=P_1 \cup \dots \cup P_k} : x \in P, \sum_{i=1}^k |P_i| < \varepsilon.$$

Uwaga: k nie musi być wielkością skończoną.

Przykład 1. *Niech $\{1\} \subset [-10, 10]$, wówczas*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{p=[1-\frac{\varepsilon}{4}, 1+\frac{\varepsilon}{4}]} : \{1\} \subset P, |P| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przykład 2. *zbiór Cantora*

Chcemy dojść do tw Lebesgue.

Twierdzenie 1. *(Lebesgue) Niech P - zbiór nieciągłości funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona na D , D - ... jest zbiorem miary Lebesgue’a zera $\iff f$ - całkowalna na D .*

Wiemy, że f - całkowalna \iff

$$\forall_{\varepsilon > 0} \cdot \exists_{\Pi} \cdot |\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geq \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja f na zbiorze A powinna być ograniczona!!!)

Obserwacja 1. *Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogę wziąć ileś karetek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu karetek) przykryć go skończoną liczbą karetek?*

"/img/"fig_33.png

Weźmy długi stół:

$$R = \bigcup_{n=0}^{\infty}]n-2, n+2[\cup]-n-2, -n+2[$$

$$]0, 1[\subset [-2, 2]$$

$$]0, 1[\subset [-2019, 2018] \cup [-2, 2]$$

$$]0, 1[= \bigcup_{n=2}^{\infty}]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[.$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

Definicja 4. Niech X - zbiór a $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ - rodzina zbiorów. Mówimy, że F jest pokryciem zbioru X , jeżeli $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$. Jeżeli zbiory A_α są otwarte, to mówimy, że F jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów A_α jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór F taki, że jest też pokryciem zbioru X nazywamy podpokryciem.

Definicja 5. Zbiór X nazywamy zwartym, jeżeli z **każdego** pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

Stwierdzenie 1. $(X - \text{domknięty, ograniczony}) \iff (X\text{-zbiór zwarty})$

Dowód 1. niech $X \in \mathbb{X}$, \mathbb{X} - przestrzeń metryczna

\Leftarrow 1 Pokażemy, że jeżeli X - zwarty, to X - ograniczony. (przypomnienie: zbiór $A \subset \mathbb{X}$

"../img/"fig_34.png

jest ograniczony jeżeli $\exists_r \exists_{x_0 \in A}$, że $A \subset K(x_0, r)$ Skoro X - zwarty, to niech F będzie pokryciem złożonym z $K(x, 1), x \in X$. $F = \left\{ K(x, 1), \forall_{x \in X} \right\}$. F jest pokryciem zbioru X , ale ponieważ X - zwarty, to znaczy, że z pokrycia F możemy wybrać **skończone** podpokrycie, co oznacza, że zbiór X możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem X - ograniczony.

\Leftarrow Pokażemy, że X - zwarty, to X - domknięty. Pokażemy, że X' - zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego $p \in X'$ $\exists_{K(p, \tilde{r})}$, że $K(p, \tilde{r}) \cap X = \emptyset$ co będzie oznaczało, że X' składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy $q \in X$, utwórzmy dwa otoczenia:

$$K(q, r), K(p, r); r = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Widać, że $K(q, r) \cap K(p, r) = \emptyset$. Powtarzamy taką procedurę dla każdego $q \in X$, oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru X kulami $K(q, r_q), q \in X$, ale X jest zbiorem zwartym więc mogą wybrać **skończoną** ilość kul

$K(q_1, r_1), K(q_2, r_2), \dots, K(q_k, r_k)$ będącą pokryciem zbioru X . A to znaczy, że

$$\underbrace{(K(p, r_1) \cap K(p, r_2) \cap \dots \cap K(p, r_k))}_{\text{jest do zbiór niepusty i otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1, r_1) \cup K(q_2, r_2) \cup \dots \cup K(q_k, r_k))}_{\text{Pokrywa cały } X} = \emptyset.$$

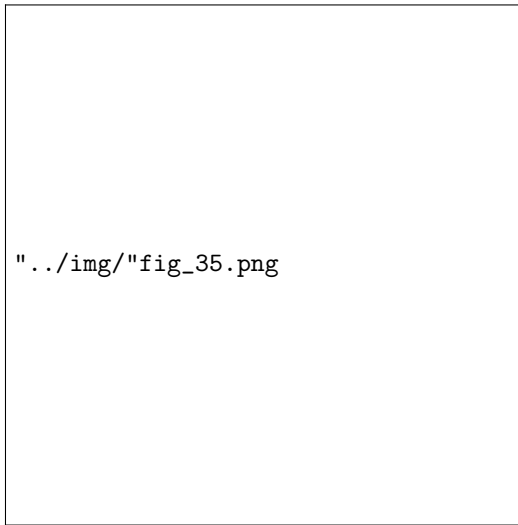
czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu $P : K(p, r_k) \cap \dots K(p, r_k)$, takie, że nie ma punktów wspólnych z X , więc p jest punktem wewnętrznym, czyli X' - otwarty, czyli X - domknięty.

X - domknięty i ograniczony $\implies X$ - zwarty. Niech P - kostka z \mathbb{R}^n , metryka d_2 . Pokażemy, że P jest zwarta.

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$



Rysunek 1: Nieważne, co A myśli o sobie, jeżeli otoczymy je kulą, to jest ograniczone i koniec

$$\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:
 Załóżmy, że P - domknięty i ograniczony i P nie jest zwarty. Co to znaczy, że P nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru P takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli P nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \dots \times [a_n, c_n]$ gdzie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli $P_1 \subset P$, kulę P_1 też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek $PP_1P_2P_3 \dots P_n \dots$. Weźmy ciąg elementów

$$\begin{aligned} x_0 &\in P \\ x_1 &\in P_1 \\ &\vdots \\ x_n &\in P_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ czyli X_n jest zbieżny. (bo \mathbb{R}^n - zupełna). Niech \tilde{x} będzie granicą $\{x_n\}$ a zbiór $\{P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ jest pokryciem P takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$, to znaczy, że

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \forall n > N . x_n \in K(\tilde{x}, \epsilon).$$

Oznacza to, że mogą tak dobrać ϵ , że w $K(\tilde{x}, \epsilon)$ będą się zawierać wszystkie $P_i, i > n$. Mogę wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki P .

"../img/"fig_36.png

Rysunek 2: Przykrywanie zbioru kulami

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

i sprzeczność

Wracamy do tw. Lebesgue'a. Obserwacja: Niech D - zwarty, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ - ograniczona i niech $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$. Wówczas:

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

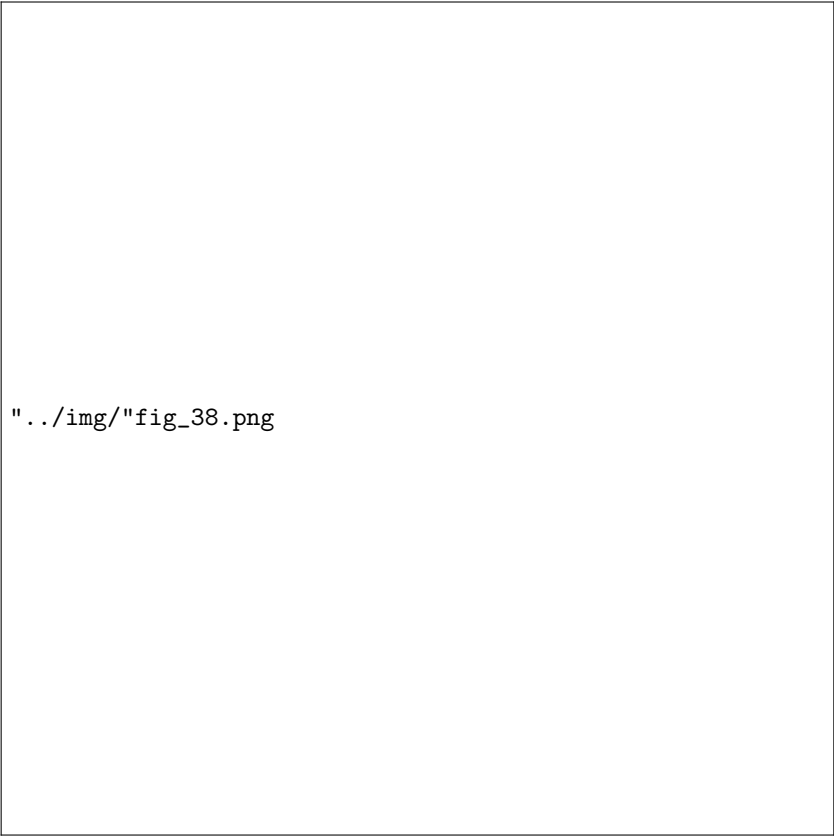
Dowód 2. Skoro $\forall_{x \in A} \lim_{r \rightarrow 0} | \sup_{K(x', r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x', r)} f(x') | < \varepsilon$ To znaczy, że \exists_{r_ε} takie, że $| \sup f(x') - \inf f(x') | < \varepsilon$. Jeżeli zbadamy wszystkie kule $K(x, r_\varepsilon)$ $\forall_{x \in D}$ to otrzymamy pokrycie A . Ale A jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że

$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \dots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

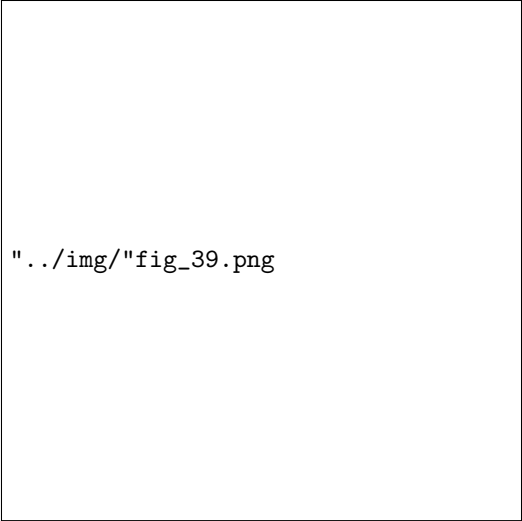
"../img/"fig_37.png

Możemy zatem wybrać podział Π zbioru D zgodny z podziałem $()$, w wyniku czego,*

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$



`"../img/"fig_38.png`



`"../img/"fig_39.png`

Rysunek 3: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszystkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

"../img/"fig_40.png