Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator $P_a(x)$ i on miał być zwężający.

$$P_a(x) : X \to X \text{ - zwężający }.$$

$$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \to \tilde{x}(a)\}, \text{ gdzie } P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a).$$

Dowód 1 *Chcemy pokazać, że*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że P_a - ciągła ze względu na a:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} . \underset{\delta_1>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon \tag{1}$$

Wiemy, że $\underset{c' \in X}{\forall}$ ciąg $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \ldots\} \to \tilde{x}(a')$ Ale, jeżeli przyjmiemy za $c = \tilde{x}(a')$, to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \to \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli P_a - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leqslant \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wybierzmy $x_0 = \tilde{x}(a')$. Wówczas

$$d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leqslant \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) =$$
$$= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))).$$

Pytanie 1 *Jak ten obiekt ma się do $d(P_a, P_{a'})$?*

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} \quad d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$, to znaczy, że $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\textit{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leqslant \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy ε_1, to biorąc ε_1 taki, że $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$ i znajdujemy δ_1 z zależności **??** *i wiemy, że jeżeli*

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

Przykład 1 *(odwzorowanie zwężające)*

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że $x(t)$ jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s)) ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0)) \ldots \to x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$

$$f(t,x) = t + x . t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy f jest lipszycowalna?

$$\underset{t\in[a,b]}{\forall} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1\|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzymy kilka wyrazów ciągu

$$\underset{x^0(t)}{g_0}, \underset{x^1(t)}{P(g_0)}, \underset{x^2(t)}{P(P(g_0))}, \ldots.$$

$$\begin{aligned}
&x^0(t) = x_0(t) = 0\\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s))ds = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}\\
&x^2(t) = P(x^1(t)) = P(\frac{t^2}{2}) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s))ds = \int_0^t (s + \frac{s^2}{2})ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3}\\
&x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2\times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3} + \frac{t^4}{2\times 3\times 4}\\
&\vdots\\
&\vdots \to \infty\\
&e^t - t - 1.
\end{aligned}$$

Przykład 2 $\frac{dx}{dt} = 2tx, \quad x(0) = 1,$ *czyli* $f(t,x) = 2tx, \quad t_0 = 0$
dla $\underset{t\in[a,b]}{\forall}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |t| 2\|x - x'\|.$$

Czyli f - lipszycowalna z $L = \sup_{t\in[a,b]} |t| \times 2$

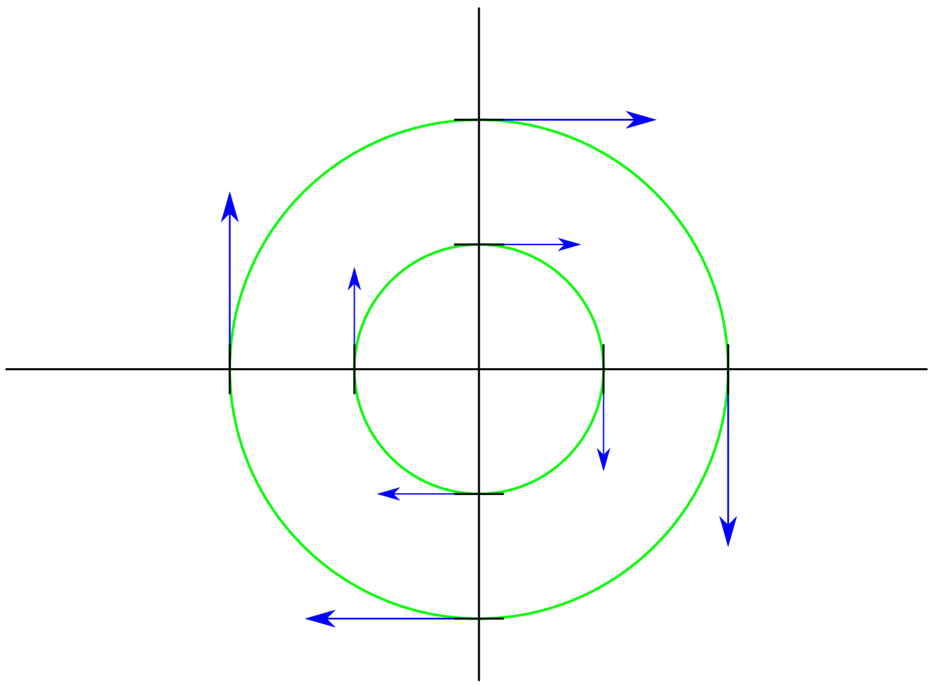
$$\begin{aligned}
&x^0(t) = 1\\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2\\
&x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\\
&x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{t^4}{2}) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3}\\
&\vdots \to \infty\\
&e^{t^2}.
\end{aligned}$$

Przykład 3

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t)\\ -x_1(t)\end{bmatrix}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

$$f(t,x) = f(t, \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
&x^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x^2(t) = P\left(\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
&x^3 = P\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{2\times 3} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
&\vdots \to \infty \\
&\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$



Rysunek 1

Twierdzenie 1 *Jeżeli odwzorowania*

$$
\begin{gathered}
t \in [a,b] \to A(t) \\
t \in [a,b] \to b(t).
\end{gathered}
$$

Gdzie $A(t) \in L(x,x), b(t) : \mathbb{R}^1 \to X$ *są ciągłe, to równanie*

$$
\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.
$$

Ma dla dowolnych $t_0 \in [a,b], x_0 \in X$ jednoznacznie określone rozwiązanie na $t \in]a,b[$
Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times \mathcal{O}$, mamy $]a,b[\times X$

Dowód 2 *Chcemy sprawdzić, czy $f(t,x) = A(t)x(t) + b(t)$ spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że $A(t)$ i $b(t)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[a,b]$. Zatem, istnieje $\sup\limits_{t \in [a,b]} \|b(t)\| = C$, a $A : X \to X$ i A jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania*

$$\sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

$$\underset{t \in [a,b]}{\forall} \|A(t)x + b(t) - (A(t)x' + b(t)\| = \|A(t)(x - x')\| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\| \|x - x'\| = L\|x - x'\|.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ oraz $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$ takie, że dla

$$\varepsilon = min \left\{ |a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L} \right\} \tag{2}$$

Gdzie r_1, r_2 były takie, że na zbiorze $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$ funkcja $f(t,x)$ była ograniczona. Zależy nam na tym, aby w warunku **??** *wyeliminować r_2*
Ale $\|A(t)x + b(t)\| \leqslant \|A(t)x\| + \|b(t)\|$ dla $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned} &= \|A(t)x\| + C \leqslant L\|x\| + C = \\ &= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leqslant \\ &\leqslant L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leqslant \\ &\leqslant Lr_2 + L\|x_0\| + C. \end{aligned}$$