0.1 Ekstrema związane

przykład:

$$f(x,y) = x+y, \quad G(x,y) = (x-1)^1 + (y-1)^2 - 1, \quad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, G(x,y) = 0\right\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum f na M
Rozważmy linię o stałej wartości $x+y$

Definicja 1. *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.*
Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

$$\underset{r}{\exists} \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} \quad f(x_0+h) \leqslant f(x_0).$$

Niech $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$G(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$M = \{(x,y), G(x,y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \underline{\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby $G(x,y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{1}$$

Co oznacza warunek 1?
Wiemy, że

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

"../img/"fig_21.png

Rysunek 1: do poprzedniego wykładu

"../img/"fig_22.png

Rysunek 2: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym

"../img/"fig_23.png

Rysunek 3: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???

"../img/"fig_24.png

Rysunek 4

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B]\,, \quad B = [\lambda, 1]\,, \quad W = [D\lambda, D]\,, \quad D = [\lambda, 1]\,.$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x) = 0$, albo $P'(y) = 0$ oznacza, że

$$\underset{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}}{\exists} f' = \lambda G', \quad G(x,y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

Obserwacja 1. *Do warunku (2) można dojść na skróty przez funkcję $H(x,y) = f(x,y) - \lambda G(x,y)$ i badanie $H(x,y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0\,(\ + \textit{warunek}\ G(x,y) = 0)\,.$$

Pytanie 1. *Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?*
Odpowiedź: lepiej inaczej... (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \tilde{=} f''(x_0)(h,h).$$

"../img/"fig_25.png

Rysunek 5