0.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja: $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$
$x(t_0) = x_0$
$x(1) : [a,b] \to \mathbb{R}$
$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Przykład 1.

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t)$$
$$x(t) = ce^{-kt}.$$

Pytanie: czy to, że równanie jest pierwszego rzędu bardzo nam przeszkadza?

Przykład 2. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$\dot{x} = p$
$\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x$
$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x,t)}$

Definicja 1. *Niech* $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ *taka, że* $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t,x) \to f(t,x)$
Mówimy, że f *spełnia warunek Lipschitza, jeżeli*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in I}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}.\|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Uwaga 1. *Znane* t, x *nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach*

Pytanie 1. *Czy jeżeli*

$$f : \mathcal{O} \to \mathcal{O} \text{ takie, że } \underset{L>0}{\exists}.$$

że

$$\underset{x,x'}{\forall}\|f(x) - f(x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

to czy f *jest ciągła?*

Twierdzenie 1. *Niech* $[a,b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- domknięty i* $f : [a,b] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *takie, że* f *- ciągła na* $[a,b] \times \mathcal{O}$ *oraz* f *spełnia warunek Lipschitza na* $\mathcal{O}$*, to znaczy:*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in[a,b]}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}\|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

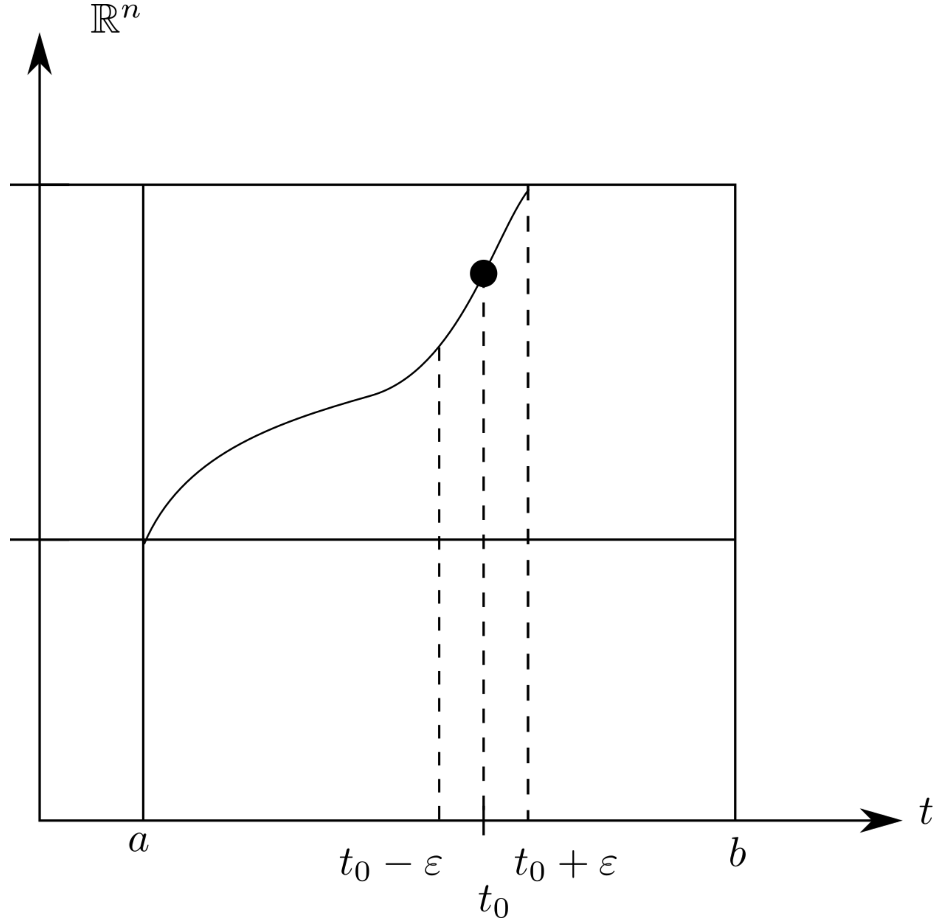
Wówczas

$$\underset{t_0\in[a,b]}{\forall}.\underset{x_0\in\mathcal{O}}{\forall}.\underset{\varepsilon>0}{\exists}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Uwaga 2. *Problem 1 nazywamy problemem Cauchy.*
Ciągłość f na $[a,b] \times \mathcal{O}$ jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na $\mathcal{O}$



Rysunek 1

Dowód 1. *Skoro f - ciągła na $[a,b] \times \mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli*

$$\underset{M>0}{\exists} . \underset{y_1>0}{\exists} . \underset{y_2>0}{\exists}, \quad \|f(t,x)\| \leqslant M.$$

$t \in K(t_0, y_1), x \in K(x_0, y_2)$.
Zauważmy, że problem 1 możemy zapisać jako

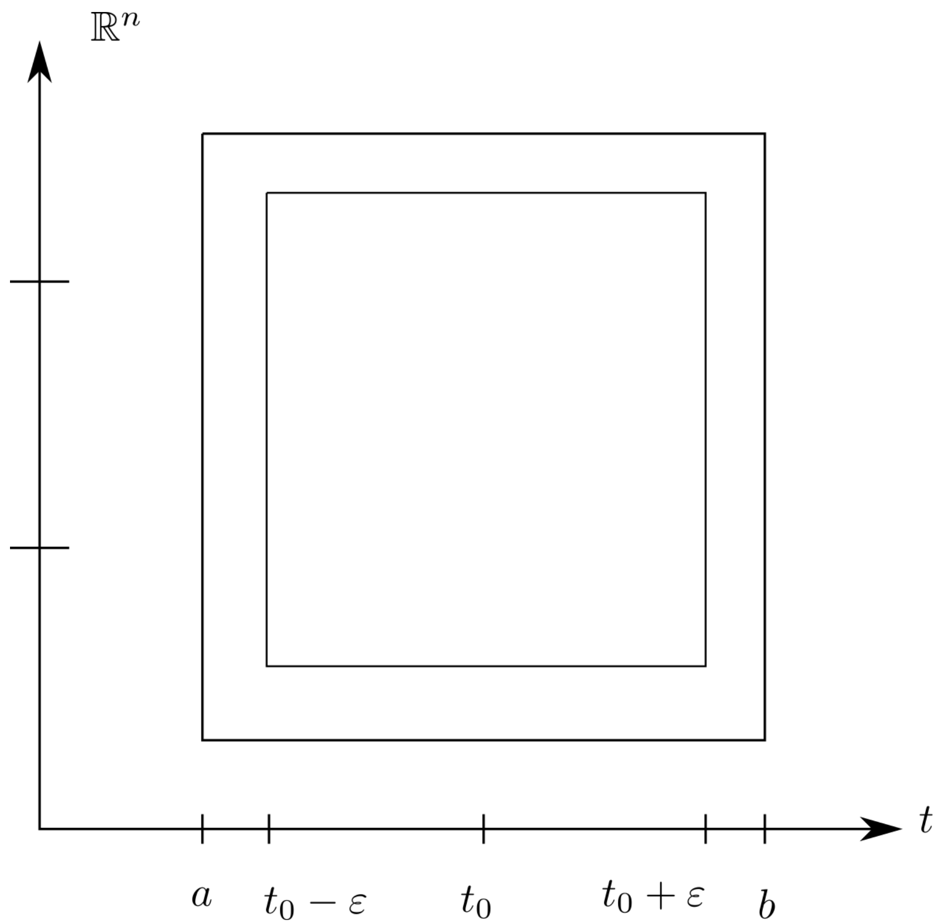
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \tag{2}$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia 2, to raslkdj problem 1.
Rozważmy odwzorowanie

$$\underset{g\in a}{P(g)(t)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

$$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \to \mathbb{R}^n\} \text{ funkcja ciągła na kuli o wartościach w } \mathbb{R}^n.$$

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\underset{x(t)\in A}{\exists}$ *takie, że* $P(x(t)) = x(t)$



Rysunek 2

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem 2

Niech $E = \left\{ g \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n, \|g(t) - \overset{g_0(t)}{x_0}\| \underset{ważne!}{\leqslant} r_2 \right\}$, *czyli*

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leqslant r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.
(domkniętość ze względu na zasdę Banacha ($x_0 \overset{ozn}{=} g_0(t)$))
Szukamy takiego ε, żeby:

$$P(g) \in E \quad g \in E \tag{3}$$

$$P \text{ - zwężająca na } E. \tag{4}$$

bo jeżeli 4 jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.
Jeżeli 3 jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E
Warunek 3: $P(g) \in E$, czyli

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leqslant r_2.$$

czyli

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds - x_0\| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|f(s, g(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} |t - t_0|M = \varepsilon M.$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leqslant r_2$
to znaczy, że $\varepsilon \leqslant \frac{r_2}{M}$
i jednocześnie $\varepsilon \leqslant r_1$
czyli aby warunek 3 był spełniony

$$\varepsilon < min\left\{\frac{r_2}{M}, r_1\right\}.$$

Warunek 4. Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\underset{g_1, g_2 \in E}{\forall} P(g_1) - P(g_2) \leqslant q\|q_1 - q_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1) - P(g_2)\| = \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g_1(s))ds - (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g_2(s))ds\| = .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \| \int_{t_0}^{t} f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))ds\| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} L\|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \underset{\substack{\in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2}}{\|g_1 - g_2\|}.$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E, to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$
Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu 1

$$\varepsilon < min\left\{\frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L}\right\} \quad \square.$$

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:
niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągłe ze względu na $a \in A$
Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\underset{a \in A}{\forall} . \underset{x, x'}{\forall} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leqslant q\|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A.

Uwaga 3. *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągłe ze względu na x_0 i t_0.