Definicja 1. *Norma*
Niech X - przestrzeń wektorowa.
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\underset{x \in X}{\forall} \quad ||x|| \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall}, \underset{x \in \mathbb{X}}{\forall} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \tag{2}$$

$$\underset{x,y \in X}{\forall} \quad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \tag{3}$$

$$\underset{x \in X}{\forall} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{4}$$

Przestrzeń X wraz z normą $||.||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (spoiler: przestrzenią Banacha).

Przykład 1. *Przykładowa norma:*

$$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X = \mathbb{R}^n.$$
$$X \ni v \implies ||v|| = sup(|x^1|, \dots).$$

Jeżeli $f \in \mathcal{C}([a,b])$, to norma wygląda tak:

$$||f|| = sup_{x \in [a,b]}(f(x)).$$

Przykład 2.

$$\mathbb{R}^2_2 \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = v$$
$$\|v\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Uwaga: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\underset{x,y \in X}{\forall} d(x,y) = ||x-y||$, natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 3. *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(ax, ay) = ||ax - ay|| = |a| ||x - y|| = ad(x,y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 2. *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0 \text{ przy } ||h|| \to 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 3. *Niech* $U \subset X, V \subset Y$
U, V *- otwarte,* $\quad T : U \to V$
$x, h \in U$

Mówimy, że T *- różniczkowalne w punkcie* x_0*, jeżeli prawdziwy jest wzór*

$$\underset{h \in U}{\forall} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$*, a* L_{x_0} *- liniowe* $: X \to Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0. Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T.

Uwaga: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx,$$

a tego nie da sie przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx \right) h(x).$$

Przykład 4. $T(x + h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$

$$1. T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \text{ czyli } x_0 \in \mathbb{R}, h \in R \implies T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} T'(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$2. T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad x_0 = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = [-, -, -] \tag{6}$$

$$3. T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad x_0 \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$. \tag{8}$$

Przykład 5.

$$f(x, y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) = \\ & = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0 y_0^2 = \\ & = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = \\ & = \left[y_0^2, 2x \cdot x_0 \right] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y. \end{aligned}$$

Pytanie 1. *Czy* $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$*?*

Weźmy $\left\| \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, wówczas

$$x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leqslant x_0||h||^2 + ||h||^3 + 2y_0||h||^2 = ||h||^2(x_0 + 2y_0 + ||h||),$$

zatem

$$\frac{r(x_0,h)}{||h||} \leqslant \frac{||h||^2(|x_0| + 2y_0 + ||h||)}{||h||} \to 0.$$

$$f(x,y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że

$$y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Uwaga: skąd wiemy, że gdy $h \to 0$, to $||h|| \to 0$?
Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?
odpowiedź za tydzień

Twierdzenie 1. *Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,*

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód 1. *skoro f - różniczkowalna, to*

$$\underset{h\in U}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(x_0,h), \frac{r(x,h)}{\|h\|} \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{9}$$

$$\underset{h_x,h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x \cdot h_y}}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Niech $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}, |h_x| > |h_y| \implies \|h\| = |h_x|$

$$\frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y}}{h_x} \not\to 0.$$

Pytanie 2. *Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?*

Przykład 6.

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \binom{0}{0}$, dla $f(x,y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0.$

$h = \binom{h_x}{h_y}, x_0 = \binom{0}{0}, f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0,0)\binom{h_x}{h_y} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0,h) = \sqrt{h_x h_y}$.
Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\underset{h_x,h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \to 0.$
Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\to 0$ przy $h_x \to 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2. *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w x_0, wtedy

$$\underset{h \in \mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$

Dowód. (dla $O = \mathbb{R}^3$)

Niech $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
&f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\
&= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\
&+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\
&+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \underset{\text{tw. o w. średniej}}{=} \\
&\frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1) h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, c_3) h^3 = \\
&(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^1 + \\
&+ (\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^2 + \\
&+ (\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^3 \\
&.
\end{aligned}$$

gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, gdy $h \to 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci *coś* h^i, a $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{h^i}{||h||} =$ *dla normy np.* $||h|| = max|h^i| \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \to 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x,h)}{||h||} \to 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\Big) h^1 \to 0$$

Czyli np. $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1}$ - ciągła) $\square$