Definicja 1 *Norma: niech X - przestrzeń wektorowa.*
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\underset{x\in X}{\forall} \quad ||x|| \geqslant 0 \tag{1}$$
$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}, \underset{x\in\mathbb{X}}{\forall} \quad ||\alpha x|| = |\alpha|||x|| \tag{2}$$
$$\underset{x,y\in X}{\forall} \quad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \tag{3}$$
$$\underset{x\in X}{\forall} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{4}$$

Przestrzeń X wraz z normą $||.||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (*spoiler:* przestrzenią Banacha).

Przykład 1

$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X \to \mathbb{R}^n \quad (v \in X) \implies ||v|| = sup(|x^1|, \dots), f \in C([a,b])$, to $||f|| = sup_{x\in[a,b]}(f(x))$

UWAGA: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\underset{x,y\in X}{\forall} d(x,y) = ||x-y||$, natomiast niekażdą metryką da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 2 *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(a_x, a_y) = ||a_x - a_y|| = |a|||x-y|| = ad(x,y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 2 *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \ \textit{dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0,h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0 \text{ przy } ||h|| \to 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 3 *Niech $U \subset X, V \subset Y$*
U, V - otwarte, $\quad T : U \to V; x, h \in U$
Mówimy, że T - różniczkowalne w punkcie x_0, jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\underset{h\in U}{\forall} \quad T(x_0+h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0,h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, *a* L_{x_0} *- liniowe* $: X \to Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0. Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T.

UWAGI: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x)\sin x dx$$

, a tego nie da sie przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx\right) h(x)$$

Przykład 3

$T(x+h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0,h)$

1. Niech $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, czyli $x_0 \in \mathbb{R}, h \in R$. Wtedy $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - wektor (3 el.)
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ - wektor (3 el.), h - wektor (3.el), $T'(x)$ - p.wektor (3 el.)
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad x_0$ - wektor (2 el.), h - wektor (2 el.), $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - macierz (3x2)
4. $f(x,y) = xy^2, h = \binom{h_x}{h_y}$

$f(x_0 + hx, y_0 + hy) - f(x_0, y_0) = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0y_0^2 = x_0y_0^2 + 2y_0x_0h_y + x_0h_y^2 + h_yy_0^2 + h_xh_y2y_0 + h_xh_y) = (y_0^2, 2xx_0)\binom{h_x}{h_y} + x_0h_y^2 + h_xh_y^2 + 2y_0h_xh_y$.

Czy $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$?

Weźmy $||\binom{h_x}{h_y}|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$.
Wówczas $x_0h_y^2 + h_xh_y^2 + 2y_0h_xh_y \leqslant x_0||h||^2 + ||h||^3 + 2y_0||h||^2 = ||h||^2(x_0 + 2y_0 + ||h||)$
Zatem $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \leqslant \frac{||h||^2(|x_0|+2y_0+||h||)}{||h||} \to 0$.
$f(x,y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy]$.
zauważmy, że $y^2 = \frac{\partial}{\partial x}f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y}f$

UWAGA: skąd wiemy, że gdy $h \to 0$, to $||h|| \to 0$?
Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?
<odpowiedź za tydzień>

Twierdzenie 1 *Jeżeli* f *- różniczkowalna w* $x_0 \in U$, *to dla dowolnego* $e \in U$,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód 1

Pytanie 1 *Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?*

Przykład 4

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \binom{0}{0}$, dla $f(x,y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0.$

$h = \binom{h_x}{h_y}, x_0 = \binom{0}{0}, f(x_0+h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0,0)\binom{h_x}{h_y} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0,h) = \sqrt{h_x h_y}$.

Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\underset{h_x,h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \to 0.$

Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\to 0$ przy $h_x \to 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2 *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w x_0, wtedy $\underset{h\in\mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0,h)$, gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$

Dowód 2 *(dla $O = \mathbb{R}^3$)*

Niech $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$

$f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) =$
$= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) +$
$+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) +$
$+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \overbrace{=}^{\text{tw. o w. średniej}}$
$\frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1)h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3)h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, c_3)h^3 =$
$(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^1 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^2 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^3$
gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, gdy $h \to 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci *coś* h^i, a $\lim_{||h||\to 0} \frac{h^i}{||h||} = \{\{$ *dla normy np.* $||h|| = max|h^i|$ $\}\} \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \to 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x,h)}{||h||} \to 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\Big)h^1 \to 0$$

Czyli np. $\lim_{||h||\to 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1}$ - ciągła$)\square$