

0.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t) &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f &: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Przykład 1.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kx(t) \\ x(t) &= ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Przykład 2.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x} &= p \\ \dot{p} = \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt} x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x, t)}.\end{aligned}$$

Definicja 1. Niech $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$

$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$ taka, że $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) \rightarrow f(t, x')$

Mówimy, że f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli

$$\exists_{L>0} . \forall_{t \in I} . \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} . \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Uwaga 1. Zmienne t, x nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach

Pytanie 1. Czy jeżeli

$$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \text{ takie, że } \exists_{L>0} .$$

że

$$\forall_{x, x'} \|f(x) - f(x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

to czy f jest ciągła?

Twierdzenie 1. *(problem Cauchy)*

Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - domknięty i $f : [a, b] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ takie, że f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$ oraz f spełnia warunek Lipschitza na \mathcal{O} , to znaczy:

$$\exists_{L>0} \quad \forall_{t \in [a, b]} \quad \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Wówczas

$$\forall_{t_0 \in [a, b]} \quad \forall_{x_0 \in \mathcal{O}} \quad \exists_{\varepsilon > 0}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Uwaga 2. Ciągłość f na $[a, b] \times \mathcal{O}$ jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na \mathcal{O}

"../img/"fig_27.png

Rysunek 1

Dowód. Skoro f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli

$$\exists_{M>0} \quad \exists_{r_1>0} \quad \exists_{r_2>0} \quad \|f(t, x)\| \leq M.$$

$$t \in K(t_0, r_1), x \in K(x_0, r_2).$$

Zauważmy, że problem (??) możemy zapisać jako

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2)$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia (??), to rozwiążemy problem ??.

Rozważmy odwzorowanie

$$P(g)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

$$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \rightarrow \mathbb{R}^n\} \text{ funkcja ciągła na kuli o wartościach w } \mathbb{R}^n.$$

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\exists_{x(t) \in A}$ takie, że $P(x(t)) = x(t)$

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem (??)

Niech $E = \left\{ g \in A, \|g(t) - \underset{\text{ważne!}}{x_0^{g_0(t)}}\| \leq r_2 \right\}$, czyli

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leq r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.

(domkniętość ze względu na zasadę Banacha ($x_0 \overset{\text{ozn}}{=} g_0(t)$))

Szukamy takiego ε , żeby:

$$1. \quad P(g) \in E \quad g \in E$$

$$2. \quad P \text{ - zwężająca na } E$$

bo jeżeli (??) jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.

Jeżeli (??) jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E

Warunek (??): $P(g) \in E$, czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leq r_2.$$

"/img/"fig_28.png

Rysunek 2

czyli

$$\begin{aligned} \sup_{t_0-\varepsilon \leq t_0 \leq t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds - x_0\| &\leq \sup_{t_0-\varepsilon \leq t_0 \leq t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq \\ &\leq \sup_{t_0-\varepsilon \leq t_0 \leq t_0+\varepsilon} |t - t_0| M = \varepsilon M. \end{aligned}$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leq r_2$, to znaczy, że $\varepsilon \leq \frac{r_2}{M}$ i jednocześnie $\varepsilon \leq r_1$.

Czyli aby warunek (??) był spełniony to musi być:

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1 \right\}.$$

Warunek (??). Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\forall_{g_1, g_2 \in E} \|P(g_1) - P(g_2)\| \leq q \|g_1 - g_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1) - P(g_2)\| = \sup_{t_0-\varepsilon \leq t_0 \leq t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_2(s)) ds)\| = .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s)) ds \right\| \leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\| ds \leq .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t L \|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \sup_{\substack{g_1, g_2 \in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2}} \|g_1 - g_2\| .$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E , to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$
 Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu ??

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\} .$$

□

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:

niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągle ze względu na $a \in A$

Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\forall_{a \in A} . \forall_{x, x'} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leq q \|x - x'\| .$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A .

Uwaga 3. *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds .$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągle ze względu na x_0 i t_0 .