Uwaga: Jeżeli np. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, to znaczy, że
$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ , wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

**Przykład 1**

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3 y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe: $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$
$f(x+h) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y +$
$r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2 y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x,y),h)$

$$\text{Czyli } f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

## 0.1 Uzupełnienie:

Niech $V$ - przestrzeń wektorowa z normą $||.||$ i $x_0 \in V$,
wówczas $f(x) = ||x||, f : V \to \mathbb{R}^1$ - ciągła w $x_0$.

**Dowód 1**

Chccemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad d_x(x,x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$
ale $d_x(x,y) = ||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y) = |x-y|$.

Chcemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad ||x - x_0|| < \delta \implies \big| ||x|| - ||x_0|| \big| < \epsilon$
ale $||x|| = ||x-y+y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||, ||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$,
$||y|| = ||y-x+x|| \leqslant ||y-x|| + ||x||$,
$||y|| - ||x|| \leqslant ||x-y||$, czyli $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leqslant ||x-y||$. Niech $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, otrzymujemy
$\epsilon > \frac{\epsilon}{2} > ||x-y|| \leqslant \big| ||x|| - ||y|| \big| \geqslant 0 \square$

**Pytanie 1** *Niech* $f(x,y) = 7x + 6y^2$ *i* $g(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$. *Wówczas* $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ile wynosi pochodna?*

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

**Twierdzenie 1** *Niech* $G : U \to Y, U \subset X, U$ *- otwarte ,* $X$ *- przestrzeń wektorowa unormowana,* $F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$
$G$ *- różniczkowalna w* $x_0 \in U$, $F$ *- różniczkowalna w* $G(x_0) \in U$.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1),\ gdy\ \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2),\ gdy\ \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

*Wówczas:* $(F \circ G)$ *- różniczkowalna w* $x_0$

*oraz* $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)}\, G'(x_0)$

**Dowód 2**

$$\begin{aligned}
&F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0)) + F'(G(x_0))(G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + r_2(G(x_0)) \\
&G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0))
\end{aligned}$$

zatem:
$F(G(x_0)) + F(G(x_0+h)) = F'(G(x_0))G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0))r_1(x_0, h_1) + r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r_3}{||h_1||} \to 0$, ale $\frac{r_3}{||h_1||} = F'(G(x_0))\frac{r_1(x_0,h_1)}{||h_1||} + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0}$

$\underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}}$, ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem
$F(G(x))$ - różniczkowalna w $x_0$ $\square$

**Przykład 2**

$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$

Policzmy $h'$. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}$, $\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn. $H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$

Weźmy przykład: Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r,\varphi) \\ \Psi_2(r,\varphi) \end{bmatrix}$

$\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej $H$, ale $f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}]$, $\Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$\text{Czyli } H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje: $\left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_2(r,\varphi)}$