

# Notatki z Analizy II L2019, FUW

Jakub Korsak

4 września 2019

# 1 Wykład (26.02.2019)

## 1.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x, y, z) \\ \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Potencjał pola niestacjonarnego } \mathcal{V}(x, y, z, t) \\ \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 - \text{Natężenie pola } \mathcal{E}(x, y, z) \\ \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ \mathbb{R}^6 &\rightarrow \mathbb{R}^1 \\ \mathbb{R}^8 &\rightarrow \mathbb{R}^1\end{aligned}$$

**Definicja 1.** (Ciągłość Heine)

Niech  $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$ . Mówimy, że odwzorowanie  $T : X \rightarrow Y$  jest ciągle w punkcie  $x_0$ , jeżeli

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0}, T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

**Uwaga:**  $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Pytanie 1.** Czy ciągłość w  $\mathbb{R}^n \iff$  ciągłość w  $\mathbb{R}^1$ ?

**Przykład 2.** Niech funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy  $f$  - ciągła w  $(0, 0)$ ? dla trajektorii I:

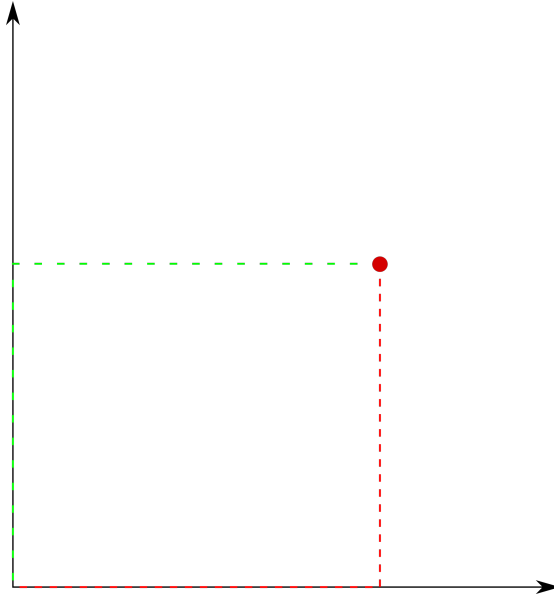
$$\lim_{y_n \rightarrow 0} (\lim_{x_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (\lim_{y_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

weźmy  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0} f(0, 0)$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

**Definicja 2.** (*Ciągłość Cauchy*)

$(X, d_X)$  - przestrzeń wektorowa z metryką  $d_X$ ,

$(Y, d_Y)$  - p.w. z metryką  $d_Y$ .

Niech  $x_0 \in X$ . Mówimy, że  $T : X \rightarrow Y$  - ciągłe, jeżeli

$$\forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x \in X} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

*Dowód.* Heine  $\iff$  Cauchy

$\implies$  (przez sprzeczność)

Zakładamy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$$

oraz

$$\exists_{\epsilon > 0}, \forall_{\delta > 0}, \exists_{x \in X} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geq \epsilon \quad (1)$$

Skoro  $T(x_n) \rightarrow T(x_0) \quad \forall_{x_n \rightarrow x_0}$ , to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (??), to dla  $\epsilon > 0$  weźmy  $\delta = 1$ ,

$$\begin{array}{ll}
\delta = 1 : & \exists_{x_1} d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\delta = \frac{1}{2} : & \exists_{x_2} d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\delta = \frac{1}{3} : & \exists_{x_3} d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\vdots & \vdots \\
\delta = \frac{1}{n} : & \exists_{x_n} d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon.
\end{array}$$

Zauważmy, że taki ciąg  $x_n \rightarrow x_0$ , ale  $T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$ , więc mamy sprzeczność.  $\square$   
 $\Leftarrow$  Wiemy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} \quad \forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_x \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon, \quad (2)$$

czyli:

$$\forall_{\delta_1} \quad \exists_N \quad \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \quad (3)$$

Chcemy pokazać, że  $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ , czyli, że

$$\forall_{\epsilon_1 > 0} \quad \exists_{N_1} \quad \forall_{n > N_1} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \text{ (dla } x_n \rightarrow x_0)$$

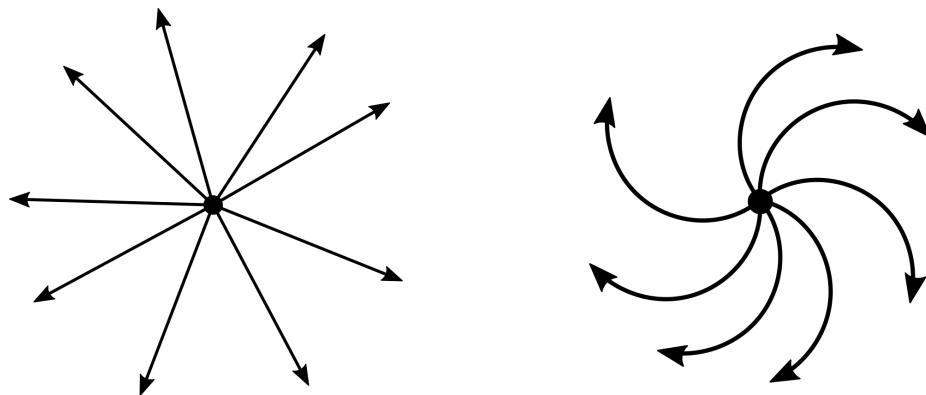
Przyjmijmy  $\epsilon = \epsilon_1$ . Oznacza to, że  $\exists_{\delta}$  spełniająca warunek (??) dla  $\epsilon_1$ . Połóżmy  $\delta_1 = \delta$  we wzorze (??), czyli wiemy, że

$$\exists_{N > N} \quad \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (??), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1$$

$\square$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

## 1.2 Różniczkowalność:

**Definicja 3.** *Pochodna cząstkowa:*

Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarty,  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $x \in \mathcal{O}$ ,  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ .

Mówimy, że  $f$  ma w punkcie  $x$  pochodną cząstkową w kierunku  $x^k$ , jeżeli istnieje granica

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{x=x_0}$$

**Przykład 3.** *Pochodna cząstkowa*

Niech  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

**Uwaga:** do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych.

$$\text{biegunowy} \rightarrow f(r, \varphi).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r, \varphi+h) - f(r, \varphi)}{h}. \end{aligned}$$

**Definicja 4.** *Pochodna kierunkowa:*

Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarte,  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $e \in \mathcal{O}$ ,  $T : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mówimy, że  $T$  ma w  $x_0$  pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

**Obserwacja:** Jeżeli np.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $e_x = (1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i  $e_y = (0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

**Przykład 4.** *Problemy z pochodną kierunkową:*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}. \text{ Wówczas } x_0 + te = (0 + t1, 0), \ x_0 = (0, 0), \ e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

$$\textbf{Uwaga: } f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm \infty$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \text{ Pochodna: } \nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$

## 2 Wykład (01.03.2019)

### Definicja 5. Norma

Niech  $X$  - przestrzeń wektorowa.

Odwzorowanie  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy normą, jeżeli:

$$\forall_{x \in X} \quad \|x\| \geq 0 \quad (4)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \forall_{x \in X} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (5)$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (6)$$

$$\forall_{x \in X} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (7)$$

Przestrzeń  $X$  wraz z normą  $\|\cdot\|$  nazywamy przestrzenią unormowaną (spoiler: przestrzenią Banacha).

**Przykład 5.** Przykładowa norma:

$$\|v\| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X = \mathbb{R}^n.$$

$$X \ni v \implies \|v\| = \sup(|x^1|, \dots).$$

Jeżeli  $f \in C([a, b])$ , to norma wygląda tak:

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} (f(x)).$$

**Przykład 6.**

$$\mathbb{R}_2^2 \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = v$$

$$\|v\| = \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

**Uwaga:** mając normę możemy zdefiniować metrykę  $\forall_{x, y \in X} d(x, y) = \|x - y\|$ , natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

**Przykład 7.** metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a| \|x - y\| = ad(x, y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

**Definicja 6.** *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ przy } \|h\| \rightarrow 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

**Definicja 7.** *Niech  $U \subset X, V \subset Y$*

*$U, V$  - otwarte,  $T : U \rightarrow V$*

*$x, h \in U$*

*Mówimy, że  $T$  - różniczkowalne w punkcie  $x_0$ , jeżeli prawdziwy jest wzór*

$$\forall_{h \in U} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

*gdzie  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , a  $L_{x_0}$  - liniowe :  $X \rightarrow Y$ .*

Odwzorowanie  $L_{x_0}(h)$  nazywamy pochodną  $T$  w punkcie  $x_0$ . Czasami  $L_{x_0}(h)$  możemy przedstawić w postaci  $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$ , to  $T'(x_0)$  nazywamy pochodną odwzorowania  $T$ .

**Uwaga:** Dlaczego  $L_{x_0}(h)$ , a nie  $T'(x_0)h$ ?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx,$$

a tego nie da się przedstawić jako

$$\left( \int_0^1 \sin x dx \right) h(x).$$

**Przykład 8.**  $T(x+h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$

$$1. T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ czyli } x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \implies T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} T'(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$2. T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = [-, -, -] \quad (9)$$

$$3. T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x_0 \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = \begin{bmatrix} - & - & - \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\cdot \quad (11)$$

**Przykład 9.**

$$f(x, y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
& f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) = \\
& = (x_0 + h_x)(y_0 + h_y)^2 - x_0 y_0^2 = \\
& = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = \\
& = [y_0^2, 2x_0 \cdot x_0] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y.
\end{aligned}$$

**Pytanie 2.** Czy  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ?

Weźmy  $\left\| \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ , wówczas

$$x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leq x_0 \|h\|^2 + \|h\|^3 + 2y_0 \|h\|^2 = \|h\|^2 (x_0 + 2y_0 + \|h\|),$$

zatem

$$\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2 (x_0 + 2y_0 + \|h\|)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

$$f(x, y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że

$$y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

**Uwaga:** skąd wiemy, że gdy  $h \rightarrow 0$ , to  $\|h\| \rightarrow 0$ ?

Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w  $h = 0$ ?

*odpowiedź za tydzień*

**Twierdzenie 1.** Jeżeli  $f$  - różniczkowalna w  $x_0 \in U$ , to dla dowolnego  $e \in U$ ,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

**Dowód 1.** skoro  $f$  - różniczkowalna, to

$$\forall_{h \in U} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \frac{r(x, h)}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \quad (12)$$

$$\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x \cdot h_y}}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Niech  $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ ,  $|h_x| > |h_y| \implies \|h\| = |h_x|$

$$\frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{h_x} \not\rightarrow 0.$$

**Pytanie 3.** Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?

**Przykład 10.**

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dla } f(x, y) \text{ policzyliśmy pochodne cząstkowe w } x_0 \quad \frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0.$$

$h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0, 0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + \sqrt{h_x h_y}$ , gdzie  $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$ .

Czyli  $f$  - różniczkowalna, jeżeli  $\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{\|h\|} \rightarrow 0$ .

Niech  $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$  i niech  $|h_x| > |h_y|$ .  $\|h\| = |h_x|$ .

Dalej mamy:  $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\rightarrow 0$  przy  $h_x \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

**Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.**

**Twierdzenie 2.** Niech  $O \subset \mathbb{R}^n$ ,  $O$  - otwarty.  $f : O \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in O$ .

Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe  $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ ,  $i = 1, \dots, n$  i są ciągłe w  $x_0$ , wtedy

$$\forall_{h \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h),$$

gdzie  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$

Dowód. (dla  $O = \mathbb{R}^3$ )

$$\text{Niech } x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) &= \\ &= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\ &+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\ &+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad \text{tw. o w. średniej} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1) h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) h^3 = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 + \\ &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^2 + \\ &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^3 \end{aligned}$$

gdzie  $c_1 \in ]x_0^1, x_0^1 + h^1[$ ,  $c_2 \in ]x_0^2, x_0^2 + h^2[$ ,  $c_3 \in ]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że  $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , gdy  $h \rightarrow 0$ .

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci  $\cos h^i$ , a  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h^i}{\|h\|} = 0$  dla normy np.

$\|h\| = \max |h^i| \neq 0$ . (np.  $\frac{h^1}{\|h\|} \rightarrow 1$ )

Oznacza to, że jeżeli  $\frac{r(x, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 \rightarrow 0$$

Czyli np.  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} - \text{ciągła} \right)$  □

### 3 Wykład (05.03.2019)

**Przykład 11. Uwaga:** jeżeli np.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , to znaczy, że

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}, f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \text{ wówczas}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

**Przykład 12.**

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x, y), h) = \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x, y), h) \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x, y), h). \end{aligned}$$

Czyli

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

#### 3.1 Uzupełnienie:

**Stwierdzenie 1.** Niech  $V$  - przestrzeń wektorowa z normą  $||\cdot||$  i  $x_0 \in V$ , wówczas

$$f(x) = ||x||, f : V \rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{ciągła w } x_0.$$

*Dowód.* Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_x \quad d_x(x, x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ale

$$d_x(x, y) = ||x - y||, d_{\mathbb{R}^1}(x, y) = |x - y|.$$

Czyli pokażemy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_x \quad ||x - x_0|| < \delta \implies |||x|| - ||x_0||| < \varepsilon.$$

Ale wiemy, że

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \\ \|y\| &= \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|, \\ \|y\| - \|x\| &\leq \|x - y\|, \end{aligned}$$

czyli  $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ . Niech  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , otrzymujemy  $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > \|x - y\| \geq \| \|x\| - \|y\| \| \geq 0$

□

**Pytanie 4.** Niech  $f(x, y) = 7x + 6y^2$  i  $g(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ . Wówczas  $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ile wynosi pochodna?

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

**Twierdzenie 3.** Niech  $G : U \rightarrow Y, U \subset X, U$  - otwarte,

$X$  - przestrzeń wektorowa unormowana,

$F : G(U) \rightarrow Z, G(U) \subset V$

$G$  - różniczkowalna w  $x_0 \in U$ ,

$F$  - różniczkowalna w  $G(x_0) \in U$ .

Wówczas:  $(F \circ G)$  - różniczkowalna w  $x_0$  oraz

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)} G'(x_0).$$

*Dowód.*

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{\|h_1\|_x} \rightarrow 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{\|h_2\|_y} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\ &= F(G(x_0)) + F'(G(x_0)) \cdot (G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + \\ &= r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)). \end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0)) \cdot r_1(x_0, h_1) + \\ &= r_2 \cdot (G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)). \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\frac{r_3}{\|h_1\|} \rightarrow 0,$$

ale

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{\|h_1\|} &= F'(G(x_0)) \frac{r_1(x_0, h_1)}{\|h_1\|} + \\ &+ \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}}_{\rightarrow 0 \text{ kiedy } h_1 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}{\|h_1\|}}_{\text{jest ograniczony}}, \end{aligned}$$

ale jeżeli  $h_1 \rightarrow 0$ , to  $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$ , zatem  $F(G(x))$  - różniczkowalna w  $x_0$

□

**Przykład 13.**  $f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$ ,  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$ ,  $h(t) = (f \circ \varphi)(t)$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Policzmy  $H'$ .  $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}$ ,  $\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$ , tzn.

$$H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \Big|_{x=2t^2, y=t^3} \cdot \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3) 3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$$

**Przykład 14.** Niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) \end{bmatrix}$   $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Niech  $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$ , czyli  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Szukamy pochodnej  $H$ , ale

$$f' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$H' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje:

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)}$$

## 4 Wykład (08.03.2019)

### 4.1 Konwencja z ćwiczeń z fizyki:

**Przykład 15.** Mamy funkcję  $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$

$$\begin{aligned}\Psi_1(r, \varphi) &= x(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) &= y(r, \varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

**Przykład 16.**

$$\begin{aligned}f(x, y) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ f(x, y) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad f' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

### 4.2 Interpretacja geometryczna $f'$

**Przykład 17.** Rozważmy zbiór

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \text{ np. } f(x, y) = x^2 + y^2 : P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}.$$

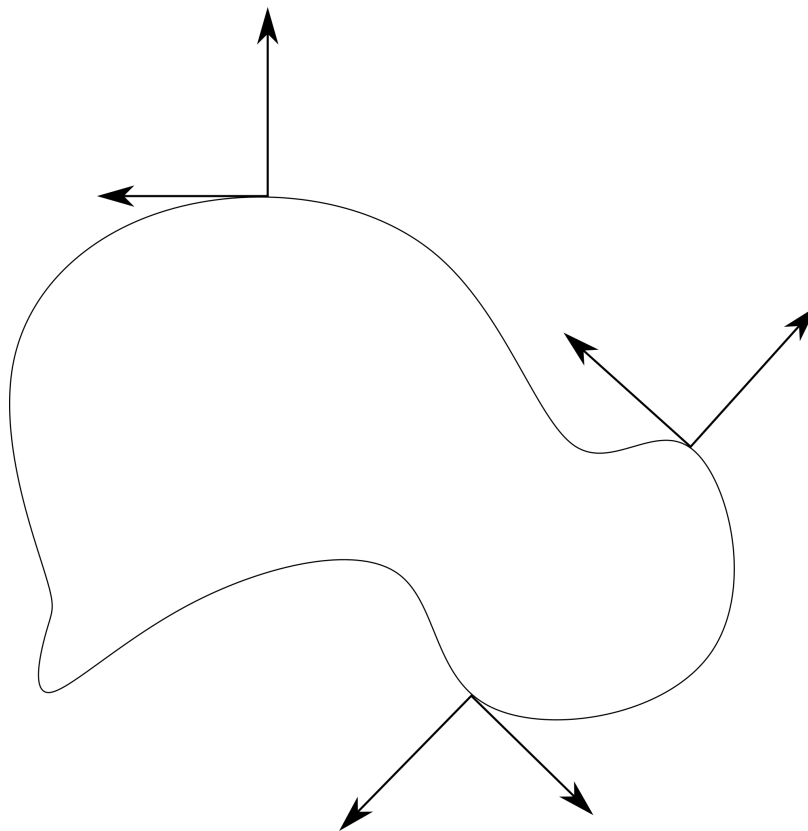
Założmy, że  $f(x, y)$  - taka, że  $P_c$  można sparametryzować jako

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in D, \text{ to znaczy, że } P_c = \{(x(t), y(t)), t \in D\}$$

**Przykład 18.**

Niech  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ . Wtedy  $P_c = \{(c \cdot \cos t, c \cdot \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$   
 $f(x(t), y(t)) = c \quad \forall_{t \in D}$  - powierzchnie ekwipotencjalne

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= 0, \\ \begin{bmatrix} 2x, 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \cdot \sin t \\ c \cdot \cos t \end{bmatrix} &= 0.\end{aligned}$$



Rysunek 3: Trajektoria kluki

**Definicja 8.** *Pochodna mieszana*

$$f(x, y) = x^2 y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y^3, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

**Przypadek???**

**Twierdzenie 4.** *(Uogólnione twierdzenie Schwarz)*

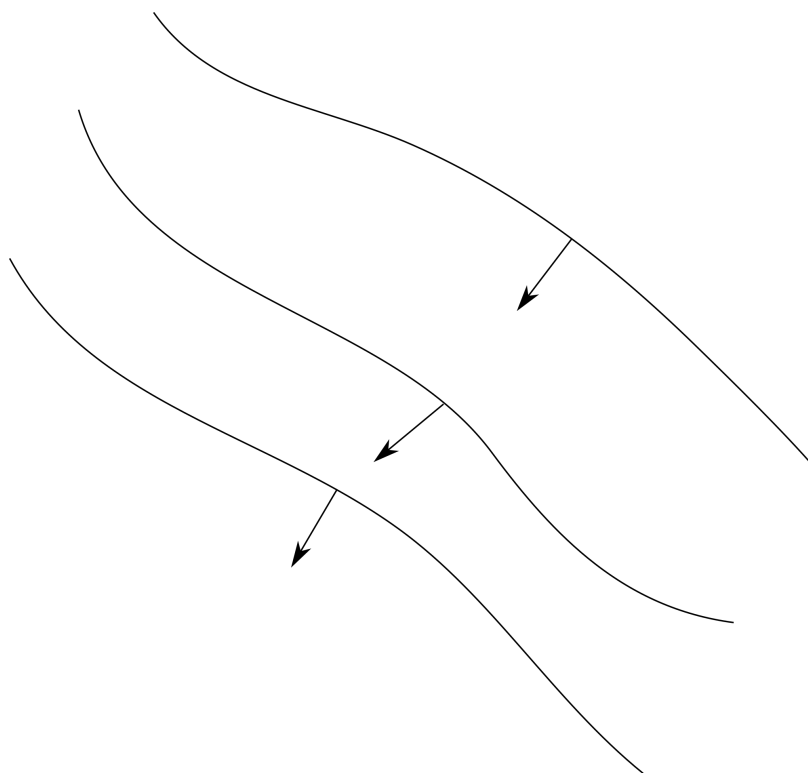
Niech  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , otwarty i  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ , wówczas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i, j = 1, \dots, n$$

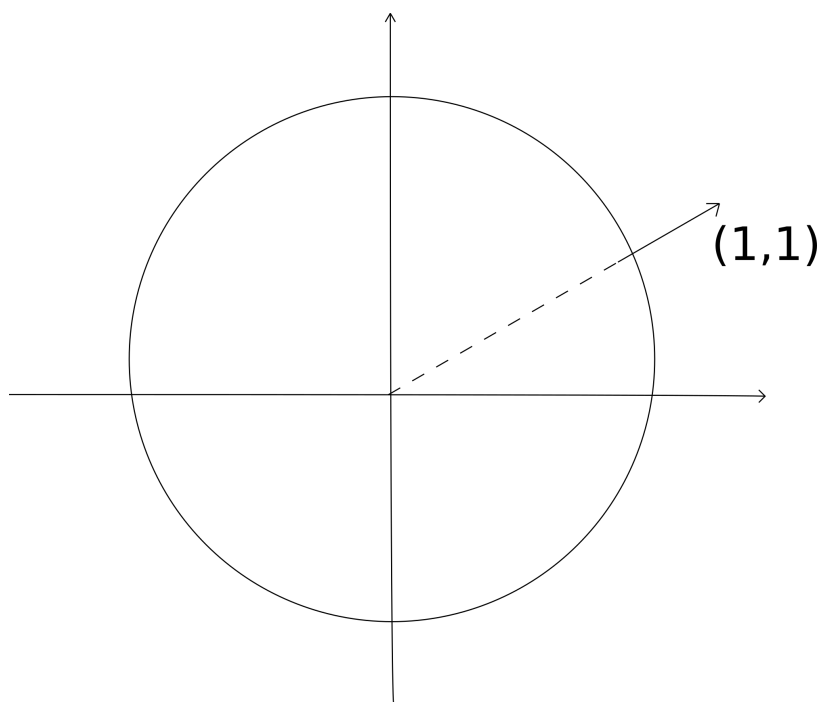
*Dowód.* Dowód dla  $n = 2$  Niech

$$w(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y),$$

$$\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$$



Rysunek 4: Powierzchnia ekwipotencjalna I



Rysunek 5: Powierzchnia ekwipotencjalna II



wówczas

$$\begin{aligned}
 w &= \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi)h = \\
 &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \right] h = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \right) hk, \\
 &\text{gdzie } x < \xi < x+h, \quad y < \eta < y+k
 \end{aligned}$$

Niech

$$\Psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \Psi(y+k) - \Psi(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\eta_1)k = \\
 &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, \eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_1) \right] k = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \right) kh,
 \end{aligned}$$

czyli

$$\exists_{\xi} \quad \xi \in ]x, x+h[, \quad \xi_1 \in ]x, x+h[, \quad \eta \in ]y, y+k[, \quad \eta_1 \in ]y, y+k[.$$

Jeżeli  $h \rightarrow 0$ ,

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \eta_1) \right),$$

to

$$\xi \rightarrow x, \xi_1 \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \eta_1 \rightarrow y,$$

czyli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

jeżeli każda z tych wielkości jest ciągła. □

### 4.3 Wzór Taylora (konstrukcja)

Niech  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  - otwarty

$\varphi(t) = f(x_0 + th)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Dla

$$h = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}, \varphi(t) = f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + th^2, \dots, x_0^n + th^n),$$

mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \Big|_{x=x_0+th} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0+th} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \Big|_{x=x_0+th} h_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{x_0+th} h_i \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x_0+th} h_j h_i \\
&\vdots \\
\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} &= \sum_{i^1, \dots, i^k}^n \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{i^1} \dots \partial x^{i^k}} h_{i^1} \dots h_{i^k}
\end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) = \varphi'(0)(t-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(t-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k}(t-0)^k + r(\dots),$$

czyli:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k!} + r(\dots) \\
f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h_i h_j + \dots
\end{aligned}$$

## 5 Wykład (12.03.2019)

Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + \dots + \\ + \frac{1}{p!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_p=1}}^n \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0, h),$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{p+1}=1}}^n \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}}(x_0 + \theta h) h^{i_1} \dots h^{i_{p+1}}.$$

$0 < \theta < 1$   
wersja  $\mathbb{R}^n$  dla  
" $x_0 < c < x_0 + h$ "

**Obserwacja 1.** (*bardzo ważna zależność!*)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{p+1}(x_0, h)}{\|h\|^p} \rightarrow 0.$$

**Przykład 19.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 y^3$ ,  $f'(x, y) = [2xy^3, 3x^2 y^2]$ .

Jeżeli  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ , to wtedy

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} h^1 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} h^1 h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} h^2 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} h^2 h^2 = \\ = \begin{bmatrix} h_1 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

*To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.*

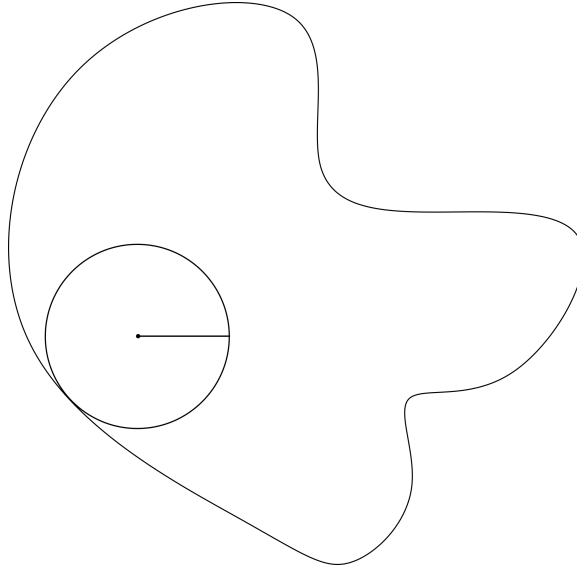
## 5.1 Minima i maksima

**Przypomnienie:** Niech  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$  - otwarty,  $x_0 \in \mathcal{O}$   
Mówimy, że  $f$  ma w  $x_0$  minimum lokalne, jeżeli:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in K(x_0, \eta) \\ K(x_0, \eta) \subset \mathcal{O} \\ x \neq x_0}} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_h \quad \|h\| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0 + h) > f(x_0).$$



Rysunek 6: istnieje otoczenie, dla którego  $f(x) > f(x_0)$  (nie musi być styczne!)

**Stwierdzenie 2.** jeżeli  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O}$  - otwarty,  $x_0 \in \mathcal{O}, f$  - posiada w  $x_0$  minimum lub maksimum lokalne, to

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

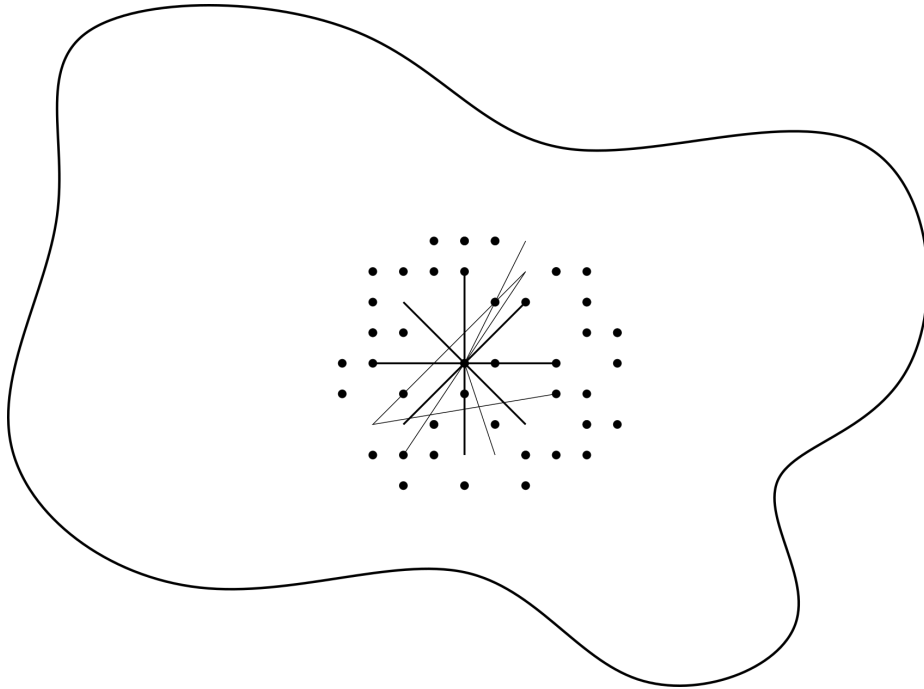
**Uwaga:** jeżeli  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U$  - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na  $\text{int}(U)$  oraz na  $U - \{\text{int}(U)\}$

*Dowód.* Niech  $g_h(t) = f(x_0 + th)$  i  $g : [0, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zauważmy, że jeżeli  $f$  ma minimum lub maksimum w  $x_0$ , to znaczy, że  $g_h(t)$  ma minimum lub maksimum w  $t = 0$ , czyli

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_h(t) \right|_{t=0} = 0,$$

$$\text{czyli dla } x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n), \quad h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$$



Rysunek 7

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} g_h(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \dots, x_0^n + th^n) \right|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n) \Big|_{t=0} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad \forall_h: \|h\| < \eta,
 \end{aligned}$$

to znaczy:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

**Uwaga:** jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

**Twierdzenie 5.** *Niech*

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{O} &\subset \mathbb{R}^n, \\ x_0 &\in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} - \text{otwarty}, \\ f &\in C^{2p}(\mathcal{O}), \\ f'(x_0) &= 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

*oraz spełniony jest warunek*

$$\begin{aligned} \exists_{c>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad \forall_{h \in K(x_0, \eta)} : \quad & \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geq c \|h\|^{2p} (\leq c \|h\|^{2p}) \\ & \vdots \\ & i_{2p}=1 \end{aligned}$$

*to wtedy  $f$  ma w  $x_0$  minimum (maksimum) lokalne.*

*Dowód.* (wersja uproszczona dla minimum i dla  $f$  klasy  $C^{2p+1}(\mathcal{O})$ ).

Jeżeli  $f$  spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{(2p)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p}=1}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p}}}_{(*)} + r_{2p+1}(x_0 + h) \quad (13)$$

Wiemy też , że

$$\begin{aligned} \exists_{c>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad & (??)(*) \geq c \|h\|^{2p} . \\ & \text{Chodzi o to, żeby reszta} \\ & \text{nie mogła tego przekroczyć} \end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że

$$\begin{aligned} \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\|<\eta} \quad & \left| r_{2p+1}(x, h) \right| \leq \frac{c}{2} \|h\|^{2p}. \\ & \text{albo 7,} \\ & \text{albo 2019} \end{aligned}$$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p+1}=1}^n \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0 + \theta h)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p+1}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p+1}} = \left| \text{tu potrzebne założenie, że } f \in C^{2p+1}(\mathcal{O}) \right| = r_{2p+1}(x, h).$$

Zauważmy, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \rightarrow 0$ , ale zatem

$$\forall_{M>0} \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\|<\eta} \quad \frac{r_{2p+1}(x_0 + h)}{\|h\|^{2p}} < M,$$

czyli

$$\begin{aligned} & \left| \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \right| < M. \\ \forall_M \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\|<\eta} \quad & \left| r_{2p+1}(x_0, h) \right| < M \|h\|^{2p} \end{aligned}$$

czyli jak przyjmiemy  $M = \frac{c}{2}$  to dostajemy

$$\exists_{\eta} \quad \forall_{||h|| < \eta} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{c}{2} ||h||^{2p}$$

□

**Uwaga:** dlaczego warunek  $(-|-) > c||h||^{2p}$ , a nie po prostu  $(-|-) > 0$ ?

**Przykład 20.**

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

*Badamy:*  $f(0 + h) - f(0) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$  Czyli  $f(0 + h) - f(0) \star 2h_1^2$  - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.

$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  - minimum,  $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$  - równo, coś takiego - punkt siodłowy.

Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\exists_c [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geq c ||h||^2,$$

bo dla

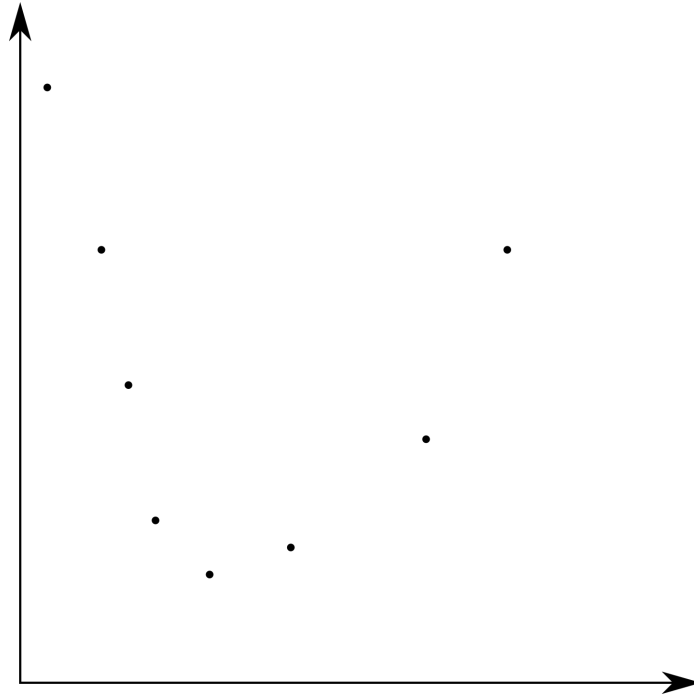
$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geq c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$$

## 5.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \omega \end{bmatrix}$$

## 6 Wykład (15.03.2019)



Rysunek 8: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

**Definicja 9.** Niech  $L : V \rightarrow W, L$  - liniowe,  $(V, \|\cdot\|_v), (W, \|\cdot\|_w)$  - unormowane. Mówimy, że  $L$  jest ograniczone, jeżeli

$$\exists_{A>0} \quad \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A\|x\|_v.$$

**Przykład 21.** dla  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists_A \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

ale

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

**Twierdzenie 6.**  $(L - \text{ograniczone}) \iff (L - \text{ciągłe})$

*Dowód.*  $\Leftarrow$

Wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0}, \exists_{\delta}, \forall_{x, x' \in V}, \quad \|x - x'\|_v < \delta \implies \|L(x) - L(x')\|_w < \varepsilon,$$

chcemy pokazać, że:

$$\exists_{A>0} \quad \forall_{x, x' \in V} \quad \|L(x - x')\| \leq A\|x - x'\|,$$



zatem wiemy, że para  $(\varepsilon, \delta)$  spełniająca warunek  $(*)$  istnieje.

Ale

$$\|L(x - x')\| = \underbrace{\left\| L\left(\frac{x - x'}{\|x - x'\|}\right) \frac{\delta}{2} \right\| \frac{\|x - x'\|}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leq \varepsilon \frac{\|x - x'\|}{\delta}$$

Co wiemy o  $\left\| \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \frac{\delta}{2} \right\|_v < \delta$ ?

$$\forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\|_w \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x - x'\|_v$$

Szukane  $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$  istnieje!

□

*Dowód.*  $\implies$

Wiemy, że

$$\exists_A \forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\| \leq A \|x - x'\| \quad (14)$$

Chcemy pokazać, że jeżeli  $x_n \rightarrow x_0$ , to  $L(x_n) \rightarrow L(x_0)$ , ale

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w = \|L(x_n - x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\| \quad (\text{bo } (??))$$

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\| \quad (\text{wszystko dąży do } 0)$$

□

**Definicja 10.** *Wielkość*

$$\inf_A \{ \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A \|x\|_v \}$$

nazywamy normą odwzorowania  $L$  i oznaczamy  $A \stackrel{\text{ozn}}{=} \|L\|$ .

**Definicja 11.** Niech  $U \subset \mathbb{R}^m$  - jest zbiorem wypukłym, jeżeli

$$\forall_{a, b \in U} [a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{a(1 - t) + bt, t \in [0, 1]\} \subset U$$

**Stwierdzenie 3.** Niech  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, U$  - wypukłe,

$$\exists_M \forall_{x \in U} \|f'(x)\| \leq M,$$

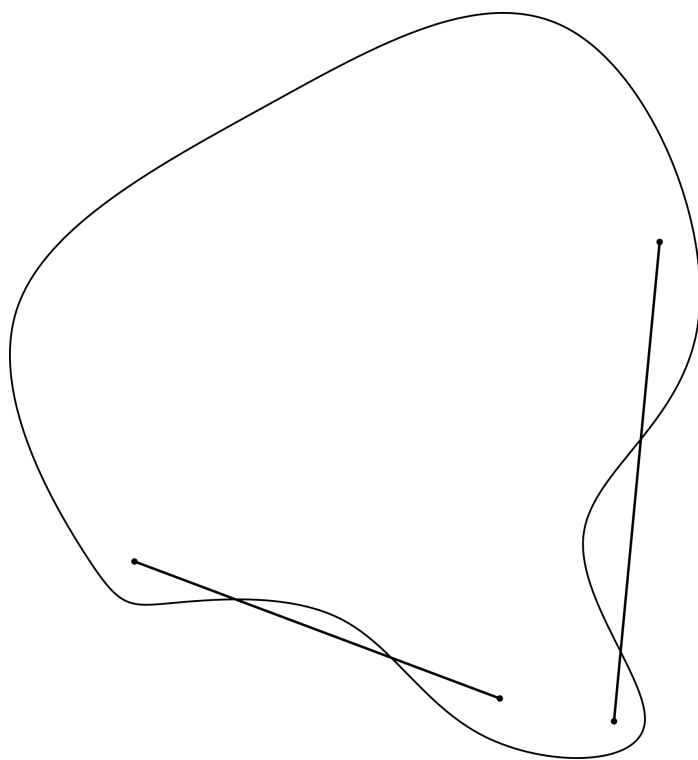
to

$$\forall_{a, b \in U} \|f(b) - f(a)\|_n \leq M \|b - a\|_m$$

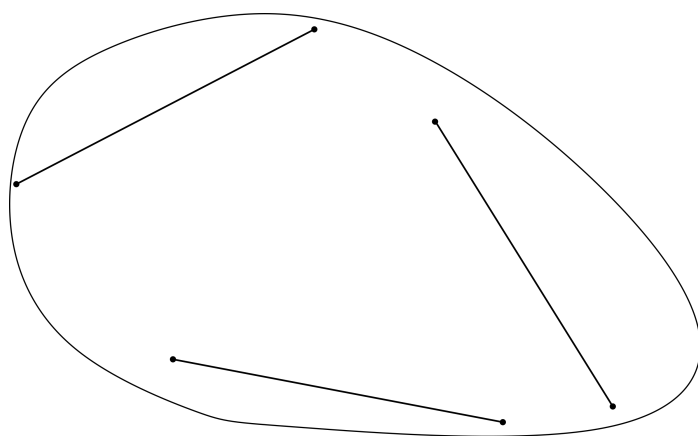
(jakiegokolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe \*wink\* \*wink\*)

*Dowód.* niech  $\gamma(t) = a(1 - t) + bt, t \in [0, 1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , czyli

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$



Rysunek 9: zbiór wklęsły



Rysunek 10: zbiór wypukły

zatem

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0)\| &= \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \stackrel{\text{Tw. Lagrange!}}{=} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1)(1-0) \\ g'_2(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g'_n(c_n)(1-0) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1) \\ g'_2(c_2) \\ \vdots \\ g'_n(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\| \end{aligned}$$

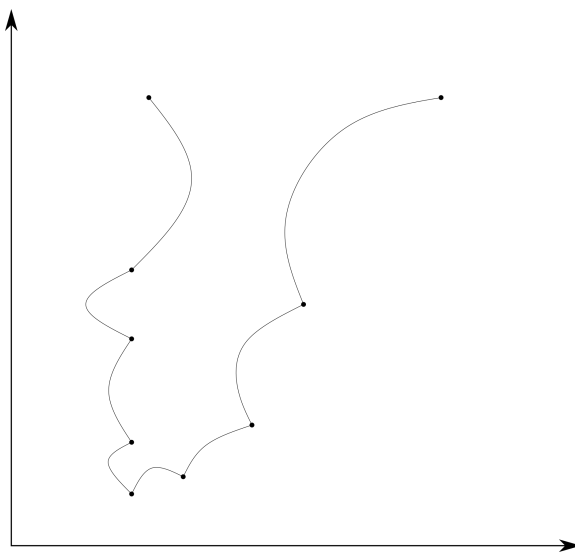
$0 < c_i < 1$

$$\text{Ale } g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rightarrow \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leq \|f'(\gamma(t))\| \|b-a\| \stackrel{\text{z zał. stw.}}{\leq} M$$

$$\text{Czyli } \forall_{t \in [0,1]} \|g'(t)\| \leq M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|$$

□

**Definicja 12.** Niech  $X$  - unormowana:  $P : X \rightarrow X$ ,  $P$  - ciągła na  $X$ .  
 Interesuje nas zbieżność ciągów typu  $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}$ ,  $x_0 \in X$   
 $\tilde{x} \in X$  nazywamy punktem stałym, jeżeli  $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$



**Twierdzenie 7.** Jeżeli ciąg  $\{x_0, P(x_0), \dots\}$  - zbieżny i  $P$  - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.

*Dowód.* Niech  $x_n = P^{(n)}(x_0)$ . Wiemy, że  $x_n$  - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez  $\tilde{x}$ . Mamy:

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \quad \exists_{N_1} \quad \forall_{n > N_1} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \quad (15)$$

$$\forall_{\varepsilon_2 > 0} \quad \exists_{N_2} \quad \forall_{n > N_2} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \quad (16)$$

$P$  - ciągle, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x'} : \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (??)$$

Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (17)$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leq d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (18)$$

$$\text{Ale z } (??) \text{ wynika, że } \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (19)$$

Zatem znając  $\varepsilon$  z  $(??)$  przyjmujemy  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , oprócz tego znajdujemy  $\delta$  przyjmując  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , a potem położymy  $\varepsilon_2 = \delta$  z  $(??)$  i dzięki temu mamy  $(??)$   $\square$

**Definicja 13.** Niech  $X$  - przestrzeń metryczna, odwzorowanie  $P : X \rightarrow X$  nazywamy *związającym*, jeżeli:

$$\exists_{q \in [0, 1[} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d(P(x), P(y)) \leq qd(x, y) \quad (20)$$

**Twierdzenie 8.** (Zasada Banacha o lustrach)

Jeżeli  $P : X \rightarrow X$ ,  $P$  - związające, to

$$1. \quad \forall_{x_0 \in X} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\} - \text{Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \quad (21)$$

$$2. \quad \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \quad (22)$$

$$3. \quad \forall_m \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (23)$$

**Przykład 22. (Uwaga)**

( $P$  - nie musi być ciągle) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*  
- lustra w łazience koło sali 1.01  $\rightarrow$  można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu  
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz  
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

*Dowód.* ad. 2

Założmy, że

$$\exists_{\tilde{x}_1, \tilde{x}} \quad P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$$

Wtedy

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leq q \leq 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{sprzeczność!}$$

$\square$

*Dowód.*

**Obserwacja 2.**

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leq \\ &\leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq q^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Co, jeżeli zamiast  $n+1$  weźmiemy  $n+m$ ?

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leq \\ &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leq \\ &\leq \dots \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (q^{n+m-1} + \dots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq q^n \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leq q < 1}{\leq} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Czyli  $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

Skoro  $X$  - zupełna, to jeżeli  $x_n$  - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w  $X$ . Czyli czy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{n,m} \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Założmy, że  $m > n$  i  $m = n + k$ . Wtedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{n,k} \forall n, k > N \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla  $N$  takiego, że  $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ . Stąd wiadomo, że  $x_n$  - Cauchy, czyli jest zbieżny.  $x_n \rightarrow \tilde{x}$ , zatem jeżeli  $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow d(\tilde{x}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$ . □

## 7 Wykład (19.03.2019)

**Twierdzenie 9.** (o lokalnej odwracalności)

Niech

$$f : E \rightarrow E, E - \text{otwarty}, E \subset \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(E),$$

$$\exists_{a,b \in E} : f(a) = b \text{ i } f'(a) - \text{odwracalna } (\det(f'(a)) \neq 0),$$

to wtedy:

1.  $\exists_{U,V \subset E} \exists_{a \in U, b \in V} U, V - \text{otwarte}, f - \text{bijekcja między } U, V$
2.  $\exists_{g: V \rightarrow U} \forall_{x \in V} f(g(x)) = x,$
3.  $g \in \mathcal{C}^1(V).$

**Uwaga:** dowód składa się z trzech części:

- Pokażemy, że  $\exists_{U,V} : f - \text{bijekcja na } U, V$
- Pokażemy, że  $U, V - \text{otwarte}$
- Pokażemy, że  $\exists_{g: V \rightarrow U}, g - \text{różniczkowalna na } V \text{ i ciągła}.$

**Przykład 23.**  $f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$   
 $\det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$ , ale  $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$  (czyli funkcja jest okresowa)

**Dowód. Część I**

Szukamy  $U, V : f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V.$

Skoro  $f'(a) - \text{odwracalne}$ , to znaczy, że  $\exists_{(f'(a))^{-1}}$ , zatem

$$\exists_{\lambda} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1.$$

Wiemy, że  $f'(x) - \text{ciągła w } x = a$ , czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_x, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon$$

Położmy  $\varepsilon = \lambda$ .

Oznacza to, że

$$\exists_{\delta_\lambda} \forall x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda$$

Więc  $U = K(a, \delta_\lambda)$ , niech  $V = f(U)$ . Chcemy pokazać, że  $f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V.$

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E$$

**Pytanie 5.** Co by było gdyby  $\varphi_y(x)$  posiadała punkt stały? (jakie własności  $x$  by z tego faktu wynikały)

dla  $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$ ?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwiężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\forall_{y \in V} \exists_{x \in U} : f(x) = y$$

**Uwaga:** o  $f$  - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na  $U$ .  
Policzmy  $\varphi'_y(x)$

$$\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x)),$$

więc

$$\begin{aligned} \|\varphi'_y(x)\| &= \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leq \\ &\leq \|(f'(a))^{-1}\| \|f'(a) - f'(x)\| \leq \\ &\leq \forall_{x \in U} \frac{1}{2\lambda} \lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pamiętamy, że jeżeli  $\exists_M \|\varphi'_y(x)\| \leq M$ , to  $\forall_{x,y} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$

Zatem skoro  $\|\varphi'_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$ , to

$$\forall_{x_1, x_2 \in U} \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

więc  $\varphi$  - zwiężający na  $U$ , więc posiada dokładnie jeden punkt stały  $\forall_{y \in V}$ . Zatem  $f$  - bijekcja między  $U$  i  $V$ .  $\square$

## Część II

Zbiór  $U$  - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy)  $U = K(a, \delta_1)$ , więc

$$\exists_{x_0 \in U} \exists_r K(x_0, r) \subset U$$

lub równoważnie

$$\|x - x_0\| \leq r \wedge x \in U.$$

Chcemy pokazać, że dla  $y_0 = f(x_0) \exists K(y_0, \lambda r) \subset V$ , czyli że  $V$  - otwarty.

Weźmy  $y \in K(y_0, \lambda r)$ . Zauważmy, że  $\varphi_{y_1}(x_1)$  - zwiężające, jeżeli  $y_1 \in V, x_1 \in U$ .  
Jeżeli pokażemy, że dla  $\|y - y_0\| < \lambda r$ ,  $\varphi_y(x)$  - zwiężająca na  $K(x_0, r) \subset U$ , to będziemy wiedzieli, że  $\|y - y_0\| < \lambda r$  oraz  $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że  $\varphi_y(x)$  - zwiężające na  $K(x_0, r)$ , zbadamy tę wielkość dla  $x \in K(x_0, r)$ .  $\|\varphi_y(x) - x_0\|$ , chcielibyśmy, aby  $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r$  i  $\|y - y_0\| < \lambda r$ , ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\|.$$

Ale

$$\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \|y - y_0\| \leq \frac{1}{2\lambda} \lambda r = \frac{r}{2},$$

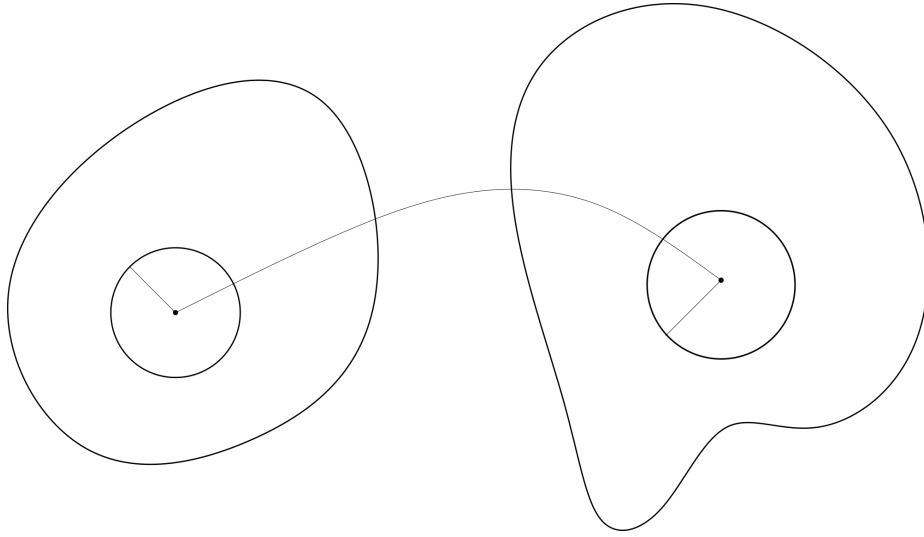
więc

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r,$$

jeżeli

$$\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leq r.$$

Stąd wiemy, że punkt stały dla  $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$  należy do  $K(x_0, r)$  i  $\|y - y_0\| < \lambda r$ , zatem  $y = f(x)$ , czyli  $V$  - otwarty.



Rysunek 11: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

### Część III

Szukamy  $g : V \rightarrow U$

Skoro  $f$  - bijekcja między  $U$  i  $V$ , to znaczy, że  $\exists_{g:V \rightarrow U} f(g(x)) = x \quad \forall_{x \in V}$ .

Chcemy pokazać, że  $g(x)$  - różniczkowalne. Wiemy, że  $f$  - różniczkowalna w  $x \in U$ , czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (24)$$

to będziemy wiedzieli, że:

1.  $g$  - różniczkowalne dla  $y \in V$
2.  $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$ .

W tym celu pokażemy, że:

1.  $(\|k\| \rightarrow 0) \implies (\|h\| \rightarrow 0)$
2.  $[f'(x)]^{-1}$  istnieje dla  $x \in U$ . (na razie wiemy, że  $(f'(a))^{-1}$  istnieje)

*Ad 1.* Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= x+h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) = \\ &= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)), \end{aligned}$$

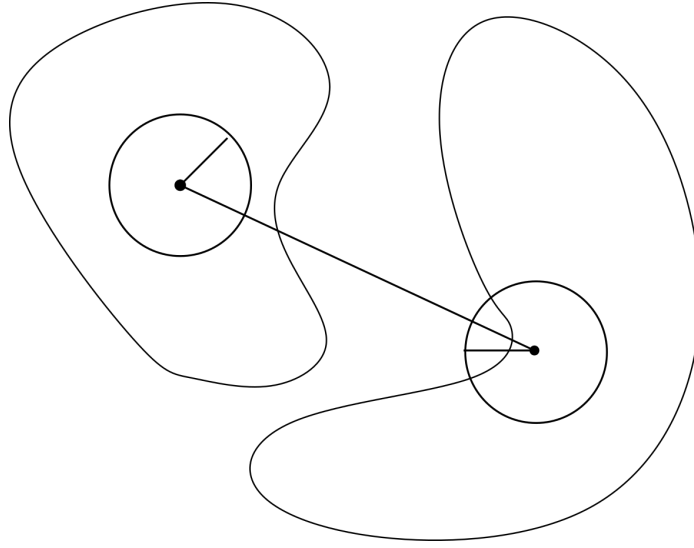
$$\text{czyli } \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem  $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geq \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy:  $\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|k\|} \leq \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , o ile  $\exists_{[f'(x)]^{-1}}$

**Pytanie 6.** skąd wiadomo, że  $(f'(x))^{-1}$ ?





Rysunek 12: Nie ok.

Wiemy, że  $f'(a)$  jest odwracalna, więc  $(f'(a))^{-1}$  istnieje,  $a \in U$ .  
 Chcemy pokazać, że  $f'(x)$  jest odwracalna dla  $x \in U$ . Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że  $2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1$  oraz  $U$  - taka, że

$$\forall_{x \in U} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

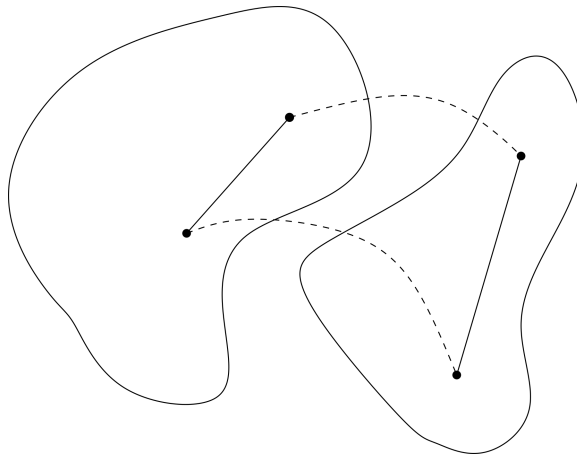
Zatem

$$0 \leq \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leq \|f'(a) - f'(x)\| \|y\| + \|f'(x)\| \|y\|.$$

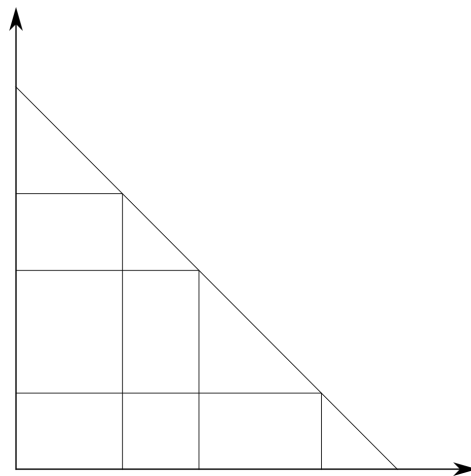
Dalej  $2\lambda\|y\| \leq \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$  dla  $x \in U$   
 $0 \leq \lambda\|y\| \leq \|f'(x)y\|$  dla  $y = 0$   
 Czyli

$$\forall_{x \in U} \|f'(x)y\| > 0.$$

□



Rysunek 13



Rysunek 14: (a)

## 8 Wykład (22.03.2019)

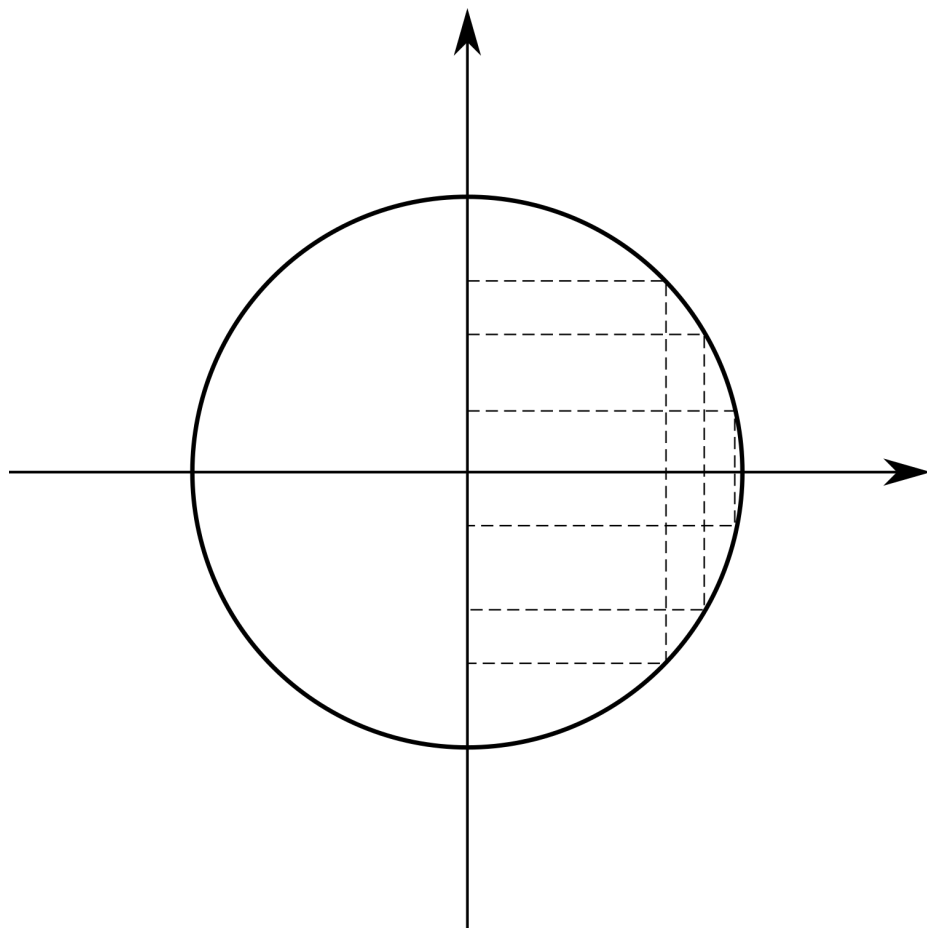
### 8.1 Zabawki działające dzięki wnioskowi z Tw. wyżej - funkcje uwikłane

$$x + y = 1 \quad (\text{a}).$$

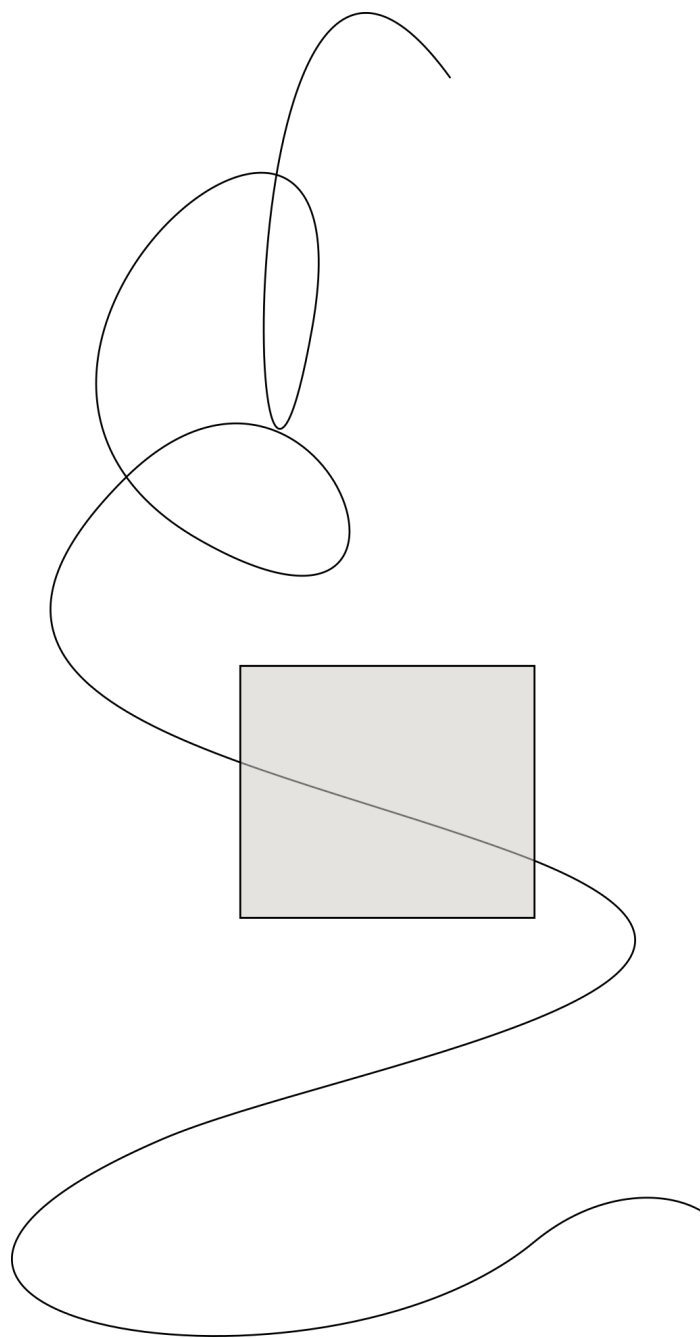
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{b}).$$

$$H(x, y) = \sin x e^{xy} + \operatorname{tg} y - x = 0.$$

**Przykład 24.** *Równanie gazowe*



Rysunek 15: (b)



Rysunek 16: (c)

$$H(p, V, T) = 0, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$p(V, T) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$V(p, T) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$T(p, V) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

istnienie przedziałów, w których funkcja uwikłana zadaje inne funkcje

**Przykład 25.**

$$H(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

**Pytanie 7.** Czy istnieje  $y(x) : H(x, y(x)) = 0$ , dla  $x \in V$ ?

$$\frac{dH}{dx}(x, y(x)) = \frac{d}{dx}(H(x, y) \circ g(x)).$$

$$H' = \left[ \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right].$$

$$g(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, g'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ y'(x) \end{bmatrix}.$$

$$H'(x, y)g'(x) = 0 \implies \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}.$$

Więc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\cos y + ye^{xy} - 1}{xe^y + \frac{1}{\cos^2 y}}.$$

**Przykład 26.**

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + x_2x_3 - 4x_3 + 3 \\ x^2 \cos x_1 - 6x_1 + 2x_3 - x_5, H : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}.$$

$$H(x_1, \dots, x_5) = 0 \text{ może zadać funkcję } g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$x_4(x_1, x_2, x_3), x_5(x_1, x_2, x_3).$$

$$g(x_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}.$$

**Obserwacja 3.**  $H(0, 1, 3, 2, 7) = 0$

$$H : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \\ H_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 8.** Czy  $H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0$  zadaje nam

$$g_1(y_1, y_2, y_3).$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3)?$$

czyli  $g(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$H_1(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H_2(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Szukamy  $g'$ .

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial y_3} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3} = 0.$$

napięcie rośnie (6 równań oho)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{H'_x} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{g'} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{H'_y}.$$

$$H'_x g' = -H'_y \implies g' = -(H'_x)^{-1} H'_y.$$

**Twierdzenie 10.** (o funkcji uwikłanej)

Niech

$$\begin{aligned} H &: E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ H &\in \mathcal{C}^1 \text{ na } E, (x_0, y_0) \in E, \\ H(x_0, y_0) &= 0, \\ (x_0, y_0) &= (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m), \\ H &\text{ - odwracalna..} \end{aligned}$$

Wówczas istnieje  $U \subset E$  takie, że  $(x_0, y_0) \in U$ ,  $\exists W \subset \mathbb{R}^n$ , że

$$x_0 \in W, \forall_{x \in W} \exists! y H(x, y) = 0, (x, y) \in U.$$

Jeżeli  $y = \varphi(x)$ , to

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ i } \varphi \in \mathcal{C}^1(W), \\ \varphi'(x) &= -(H'_y)^{-1} H'_x. \end{aligned}$$

Dowód. Oznaczenia:

$$\begin{aligned} H(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) &= \begin{bmatrix} H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}. \\ H'_y &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial y^m} \end{bmatrix}, H'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy funkcję  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$

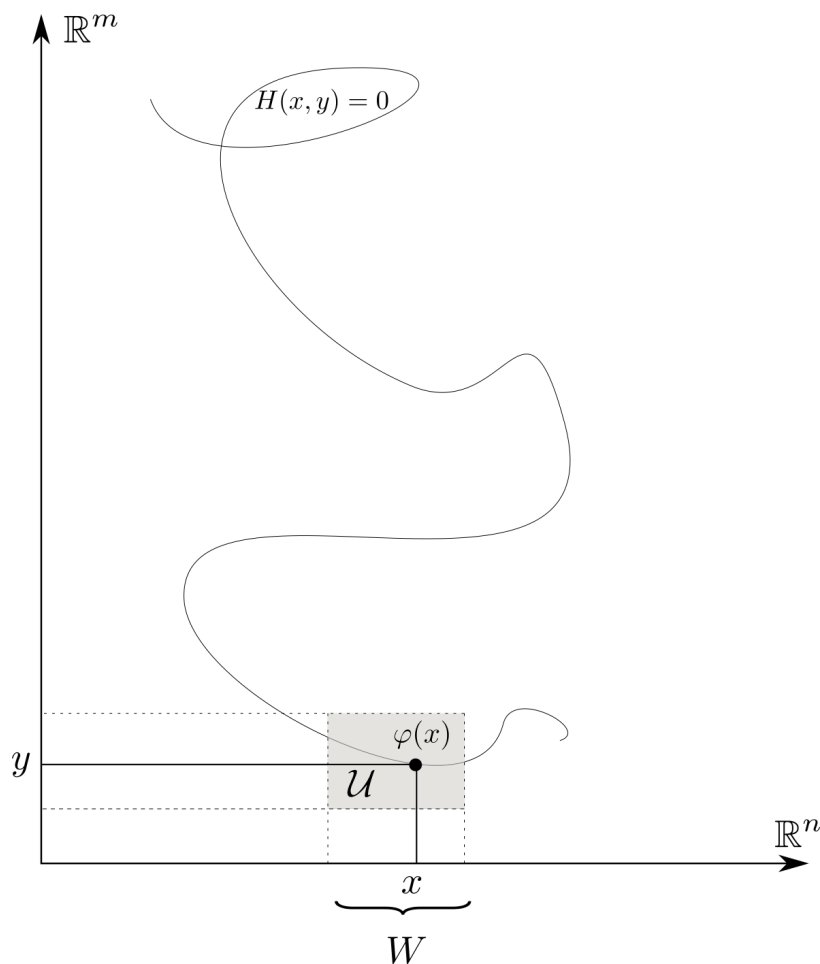
$$F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}.$$

Jakie własności ma  $F$ ?

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ale

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & H'_x & & H'_y \end{bmatrix}, \det F' = \det H'_y.$$



Rysunek 17

Jeżeli  $H'_y(x_0, y_0)$  - odwracalna, to  $F'(x_0, y_0)$  - też. Oznacza to (na podstawie tw. o lokalnej odwracalności), że

$$\exists_{U \subset \mathbb{R}^{n+m}}, (x_0, y_0) \in U, \exists_{V \subset \mathbb{R}^{n+m}}, (x_0, 0) \in V,$$

że  $F$  jest bijekcją między  $U$  i  $V$  oraz  $\exists F^{-1} : V \rightarrow U$ ,  $F^{-1}$  - różniczkowalna taka, że

$$F^{-1}(x, \alpha) = (a(x, \alpha), b(x, \alpha)), x, \alpha \in V,$$

gdzie  $a(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $b(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Dla  $(x', y') \in \mathcal{V}$ ,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że  $a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $b : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  istnieją i są różniczkowalne, bo  $F^{-1}$  istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach  $a$  i  $b$ ?

Wiemy że

$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y')) = F(\underbrace{a(x', y')}_n, \underbrace{b(x', y')}_m).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$



Czyli  $a(x', y')$  jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$

Czyli jeżeli  $y = b(x, 0)$ , to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

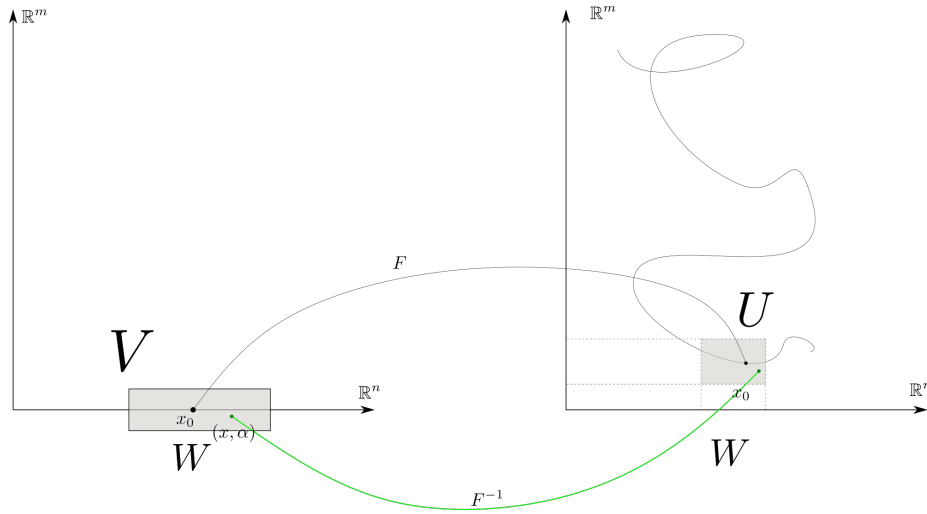
Czyli dla  $y = (x, 0)$  otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczmy  $b(x, 0) \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$ , to znaczy, że znaleźliśmy funkcję  $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0.$$

□



Rysunek 18

## 9 Wykład (26.03.2019)

### 9.1 Ekstrema związane

przykład:

$$f(x, y) = x + y, \quad G(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum  $f$  na  $M$

Rozważmy linię o stałej wartości  $x + y$

**Definicja 14.** Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  i  $M \subset \mathbb{R}^n$  - zbiór.

Mówimy, że  $f$  ma minimum/maksimum związane na zbiorze  $M$ , w punkcie  $x_0 \in M$ , jeżeli

$$\exists_r \quad \forall_{\substack{h \\ \|h\| < r \\ (x_0+h) \in M}} \quad f(x_0 + h) \leq f(x_0).$$

Niech  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$G(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$M = \{(x, y), G(x, y) = 0\}$  Szukamy minimum/maksimum  $f$ . Można wyliczyć  $y(x)$  z więzów, wstawić do  $f$  i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej  $g(x) = f(x, y(x))$ . Kiedy nie umiemy wyliczyć  $y(x)$  z więzów, możemy założyć, że  $y(x)$  jednak istnieje i  $G(x, y(x)) = 0$ . Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

A co by było, gdyby  $G(x, y) = 0$  zadawał funkcję  $x(y)$ ?

$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

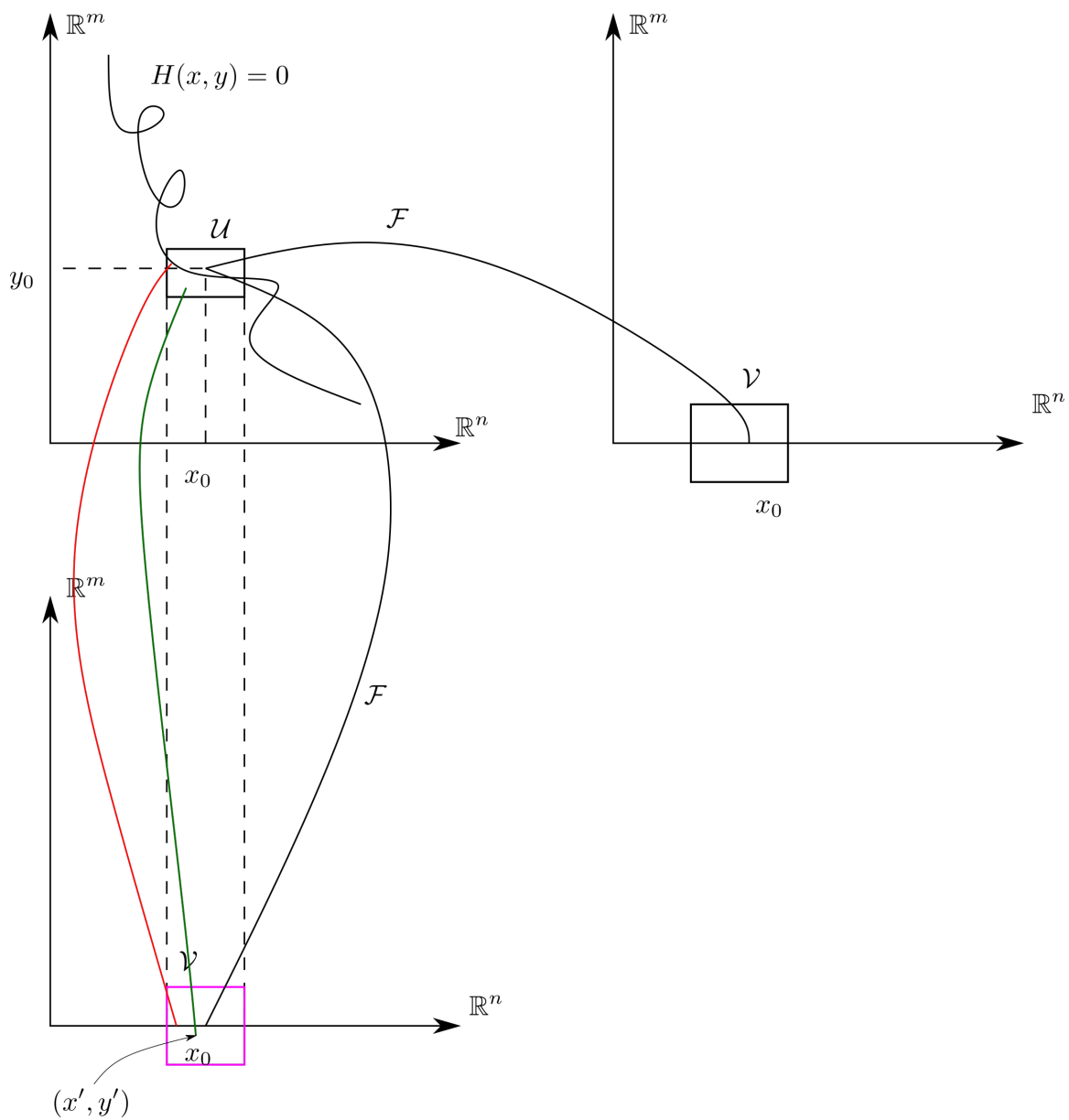
$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \quad (25)$$

Co oznacza warunek ???

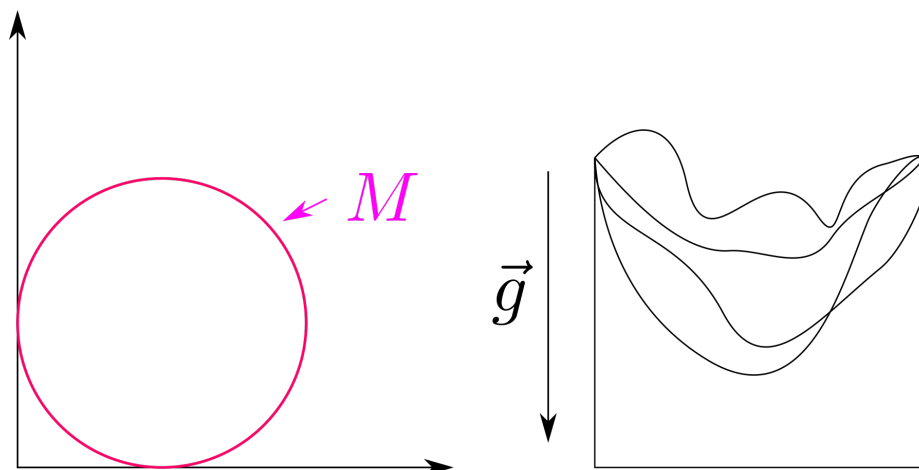
Wiemy, że

$$f' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] G' = \left[ \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right], \text{ czyli.}$$

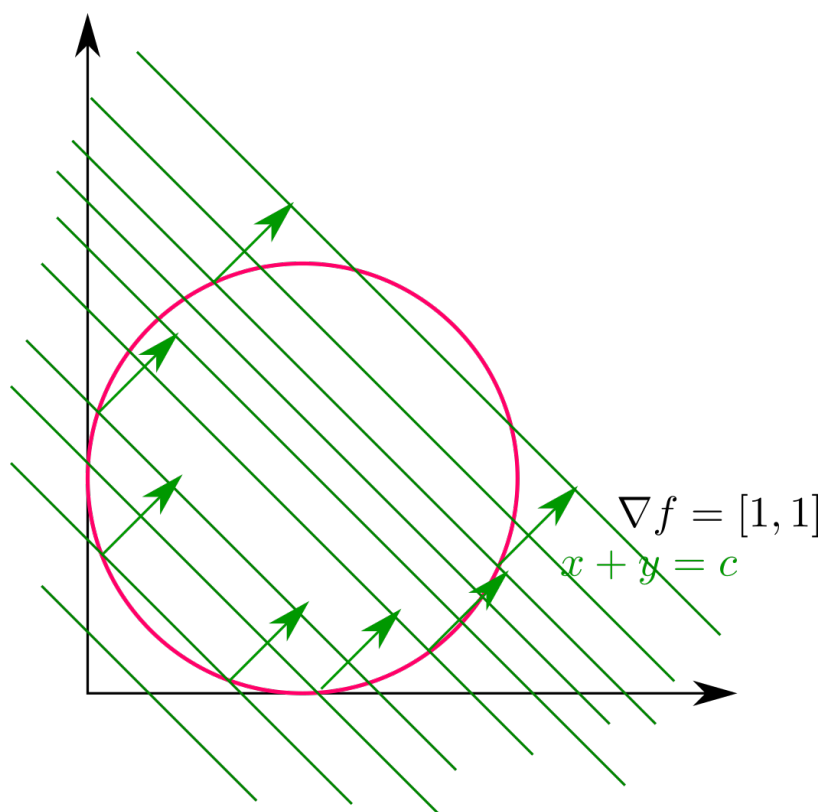
$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$



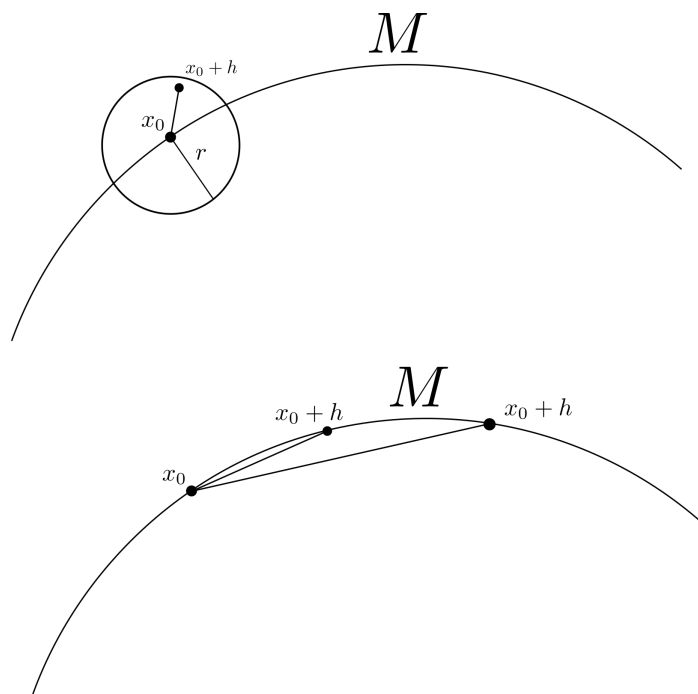
Rysunek 19: do poprzedniego wykładu



Rysunek 20:  $G(x, y)$  i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 21: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wylądje???



Rysunek 22

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby  $G'(x) = 0$ , albo  $P'(y) = 0$  oznacza, że

$$\exists_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

Wielkość  $\lambda$  często nazywa się *mnóżnikiem Lagrange*

**Obserwacja 4.** Do warunku (??) można dojść na skróty przez funkcję  $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$  i badanie  $H(x, y)$  tak, jakby była to funkcja  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  bez żadnych więzów.

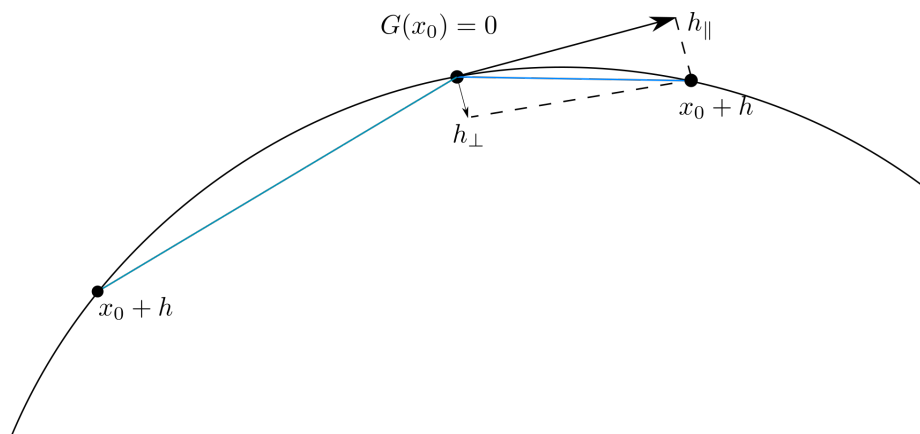
$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (+ \text{warunek } G(x, y) = 0).$$

**Pytanie 9.** Co ze zbadaniem  $G''(x)$  lub  $P''(y)$ ?

Odpowiedź: lepiej inaczej... (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \cong f''(x_0)(h, h).$$



Rysunek 23

## 10 Wykład (29.03.2019)

**Problem:**

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad M = \{x : G(x) = 0\}.$$

Badamy różnicę  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora)  
 Próbujeśmy ożenić te języki. Zbadajmy  $G'(x)$ .

- $G'(x)$  - jest macierzą  $[G']_{m,n}$

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} G^1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ G^m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

**Pytanie 10.** Jaki jest "wymiar" zbioru  $M$ ?

Albo, jeżeli  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , to wiąż  $G(x) = 0$  zadaje funkcję

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Taką, że  $G(x^1, \dots, x^{n-m}, \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}), \dots, \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}))$ , (jeżeli  $\det G_y(x) \neq 0$ )

Jeżeli  $\det G'_y(x) \neq 0$ , to znaczy, że w macierzy

$$G' = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m} \end{bmatrix}.$$

Gdzie  $x \stackrel{\text{ozn}}{=} (x^1, \dots, x^{n-m}, y^1, \dots, y^m)$ . Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne  $(y^1, \dots, y^m)$  można uzyskać z innych  $(x^1, \dots, x^{n-m})$  poprzez funkcję  $\varphi : x = \varphi(y)$

Gdy założymy, że  $\det G'_y \neq 0$ , to znaczy, że m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim \operatorname{im} G'(x) = m = \dim \mathbb{R}^m \text{ i } G'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim \ker G'(x) = n - m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy  $X_1 = \ker G'(x)$  i  $X_2 = \operatorname{im} G'(x)$  ( $\dim X_1 = n - m, \dim X_2 = m$ ) Oznacza to, że każdy wektor  $h \in \mathbb{R}^n$  da się przedstawić jako  $h = h_1 + h_2, h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$  czyli  $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\}, \quad x^1, \dots, x^{n-m}, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}) \end{bmatrix} \right\}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach  $G'(x)$ ? - jest ich  $m$  i są liniowo niezależne

Jeżeli  $h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$ , to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie  $(r \frac{0, h_1}{\|h_1\|} \xrightarrow{\|h_1\| \rightarrow 0} 0)$  (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że  $\varphi$  - różniczkowalna, co więcej  $\varphi' =$

$$-(G'_y)^{-1}G'_x \text{ a } \varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0) \text{ czyli } \varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0, h_1)}{\|h_1\|} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0.$$

czyli  $h_2$  maleje szybciej niż  $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

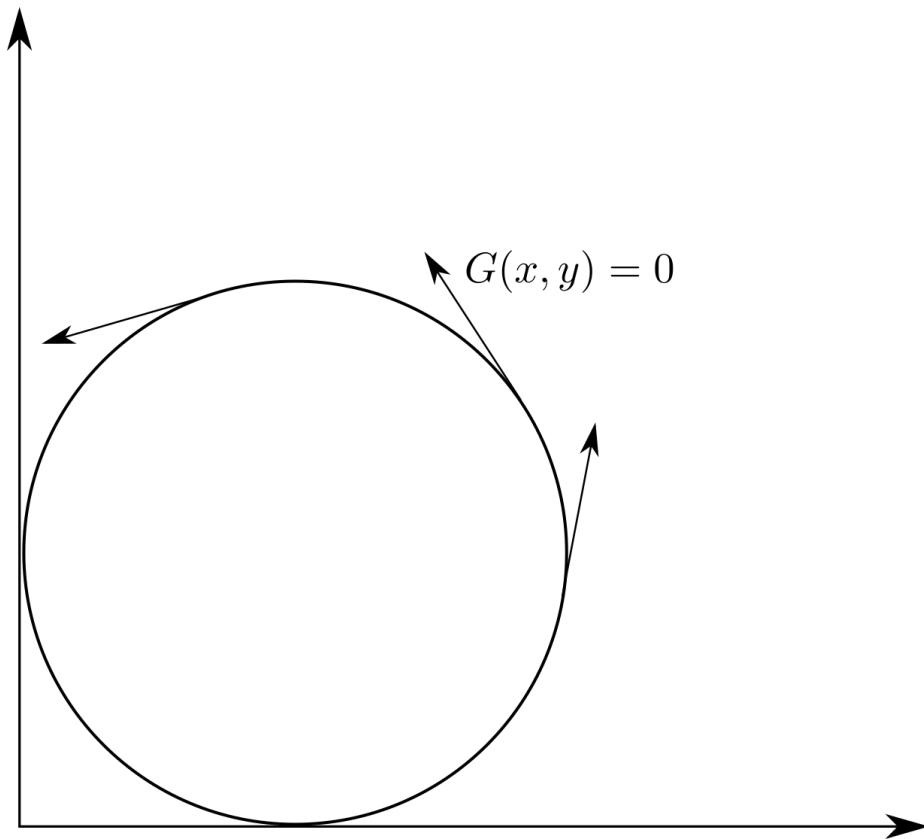
$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Skoro  $h \in \mathbb{R}^n$ , to możemy przedstawić  $h$  jako

$$h = h_{\parallel} + h_{\perp}, \quad h_{\parallel} \in X_1, h_{\perp} \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_{\parallel} = 0?.$$



Rysunek 24: biedronka i szprycha

**Przykład 27.** niech  $G(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$ ,  $G' = (2(x - 1), 2(y - 1))$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h_{\perp} + h_{\parallel}) - f(x_0).$$

W małym otoczeniu  $h$  będzie bardziej decydował  $h_{\parallel}$ , bo zawsze mogą zmniejszyć  $h$  i w efekcie  $h_{\perp}$  się zmniejszy

Wiemy, że

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)(h, h) + r_1(x_0, h).$$

bo  $f$  - różniczkowalna

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x_0)h + \frac{1}{2!}G''(x_0)(h, h) + r_2(x_0, h).$$

bo  $G$  - różniczkowalna  
niech

$$\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \Lambda(G(x_0 + h) - G(x_0)) = (f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h.$$

Dalej dostajemy

$$(f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h + \frac{1}{2!}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) + r_1(x_0, h) + r_2(x_0, h).$$



Ale dla minimum lub maksimum chcemy, aby

$$f'(x_0) = \Lambda G'(x_0).$$

więc dla minimum / maksimum  $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) + r_1(x_0, h) + r_2(x_0, h)$

Zatem jako, że  $\frac{r_1(0, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{\|h\|^2} 0$ ,  $\frac{r_2(0, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{\|h\|^2} 0$ , to o znaku  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  decyduje znak

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h).$$

Wiemy, że  $h \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$ , czyli  $h = h_\perp + h_\parallel$

$$\begin{aligned} f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) &= \underbrace{f''(x_0) \Lambda G''(x_0)}_{\square}(h_\parallel + h_\perp, h_\perp + h_\parallel). \\ &= (\square)(h_\perp, h_\perp) + (\square)(h_\perp, h_\parallel) + (\square)(h_\parallel, h_\perp) + (\square)(h_\parallel, h_\parallel). \end{aligned}$$

**Pytanie 11.** Które z powyższych wyrażeń jest najmniejsze (które z powyższych wyrażeń są o rząd mniejsze od pozostałych dla  $\|h\| \rightarrow 0$ )

Wiemy, że

$$\|h_\perp\| \leq \|h_\parallel\|.$$

Oznacza to, że dla małych  $\|h_\parallel\|$  o znaku decyduje

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel).$$

**Twierdzenie 11.** Niech

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f \in \mathcal{C}^2(U), \\ G : U_2 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G \in \mathcal{C}^2(U_2), \\ \exists_{x_0} G(x_0) &= 0, \quad G'(x_0) \text{ - ma rząd maksymalny } (m). \end{aligned}$$

oraz

$$\exists_{\Lambda} \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel) > 0, h_\parallel \stackrel{\text{def}}{=} \{G'(x_0)h_\parallel = 0\}.$$

to  $f$  posiada w  $x_0$  minimum lokalne ( $< 0$ , to maksimum lokalne) na zbiorze

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$$

## 11 Wykład (02.04.2019)

### 11.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja:  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(1) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Przykład 28.**

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kx(t) \\ x(t) &= ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Pytanie: czy to, że równanie jest pierwszego rzędu bardzo nam przeszkadza?

**Przykład 29.**  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\dot{x} = p$$

$$\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt} x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x, t)}$$

**Definicja 15.** Niech  $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$

$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$  taka, że  $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) \rightarrow f(t, x)$

Mówimy, że  $f$  spełnia warunek Lipschitza, jeżeli

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in I} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \cdot \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

**Uwaga 1.** Znane  $t, x$  nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach

**Pytanie 12.** Czy jeżeli

$$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \text{ takie, że } \exists_{L>0} \cdot$$

że

$$\forall_{x, x'} \|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

to czy  $f$  jest ciągła?

**Twierdzenie 12.** Niech  $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$  - domknięty i  $f : [a, b] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  takie, że  $f$  - ciągła na  $[a, b] \times \mathcal{O}$  oraz  $f$  spełnia warunek Lipschitza na  $\mathcal{O}$ , to znaczy:

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in [a, b]} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Wówczas

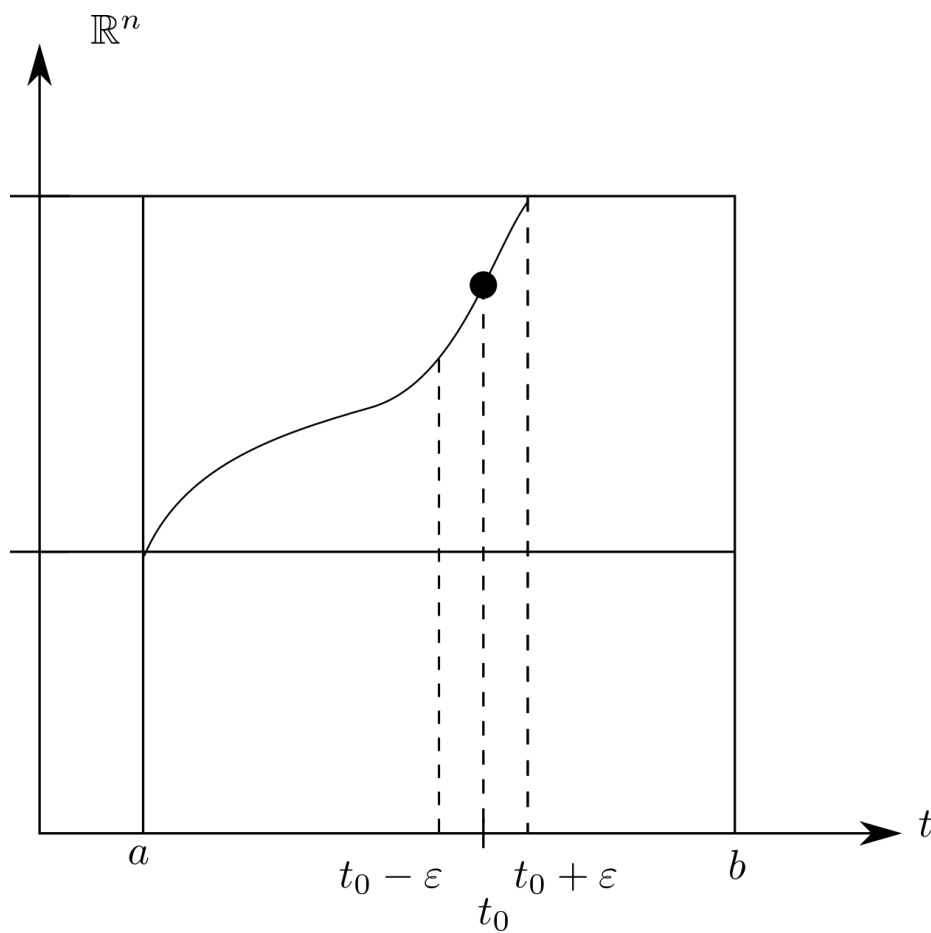
$$\forall_{t_0 \in [a, b]} \cdot \forall_{x_0 \in \mathcal{O}} \cdot \exists_{\varepsilon>0}, \text{ że dla } t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na  $x_0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (27)$$

**Uwaga 2.** Problem ?? nazywamy problemem Cauchy.

Ciągłość  $f$  na  $[a, b] \times \mathcal{O}$  jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na  $\mathcal{O}$



Rysunek 25

**Dowód 2.** Skoro  $f$  - ciągła na  $[a, b] \times \mathcal{O}$ , to znaczy, że  $f$  jest ograniczona, czyli

$$\exists_{M>0} \cdot \exists_{y_1>0} \cdot \exists_{y_2>0}, \quad \|f(t, x)\| \leq M.$$

$t \in K(t_0, y_1), x \in K(x_0, y_2)$ .

Zauważmy, że problem ?? możemy zapisać jako

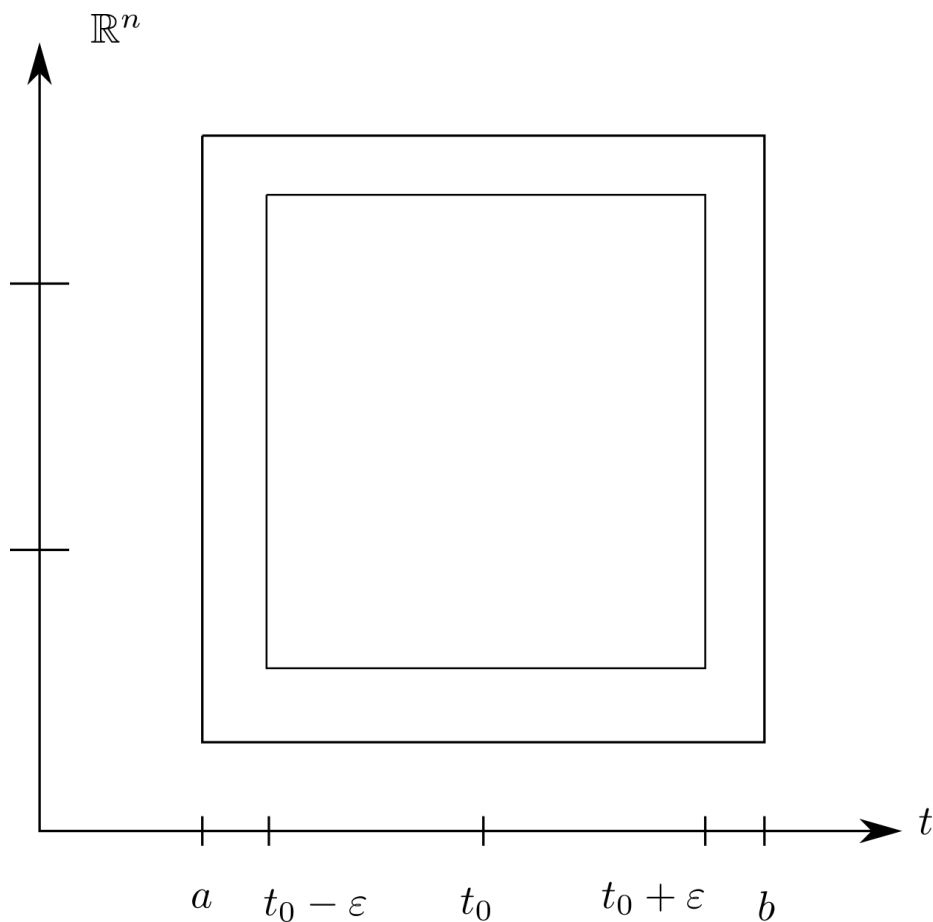
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (28)$$

Czyli, jeżeli znajdziemy  $x(t)$  takie, co spełnia ??, to rozwiąż problem ??.  
 Rozważmy odwzorowanie

$$P(g)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  funkcja ciągła na kuli o wartościach w  $\mathbb{R}^n$ .

Co by było, gdyby  $P$  miało punkt stały? Czyli  $\exists_{x(t) \in A}$  takie, że  $P(x(t)) = x(t)$



Rysunek 26

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Co więcej, gdyby  $P$  było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór  $A$  taki, że  $P$  - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem ??

Niech  $E = \left\{ g \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n, \|g(t) - x_0\| \leq r_2) \right\}$ , czyli

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leq r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

i  $g$  - ciągła.

(domkniętość ze względu na zasadę Banacha ( $x_0 \stackrel{\text{ozn}}{=} g_0(t)$ ))

Szukamy takiego  $\varepsilon$ , żeby:

$$P(g) \in E \quad g \in E \quad (29)$$

$$P - \text{zwężająca na } E. \quad (30)$$

bo jeżeli ?? jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.

Jeżeli ?? jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do  $E$

Warunek ?? :  $P(g) \in E$ , czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leq r_2.$$

czyli

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds - x_0\| &\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq . \\ \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} |t - t_0| M &= \varepsilon M. \end{aligned}$$

Jeżeli chcemy aby  $\varepsilon M \leq r_2$

to znaczy, że  $\varepsilon \leq \frac{r_2}{M}$

i jednocześnie  $\varepsilon \leq r_1$

czyli aby warunek ?? był spełniony

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1 \right\}.$$

Warunek ?? . Chcemy aby  $P$  było zwężające, czyli:

$$\forall_{g_1, g_2 \in E} P(g_1) - P(g_2) \leq q \|g_1 - g_2\|.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \|P(g_1) - P(g_2)\| &= \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) ds - \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_2(s)) ds \right) \right\| = . \\ \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s)) ds \right\| &\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\| ds \leq . \\ \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t L \|g_1 - g_2\| &= \varepsilon L \|g_1 - g_2\| . \\ &\quad \substack{\in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2} \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli  $P$  ma być zwężające na  $E$ , to  $\varepsilon L < 1$ , czyli  $\varepsilon < \frac{1}{L}$  i  $g \in E$

Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu ??

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\} \quad \square.$$

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany  $x_0$

Lemat:

niech  $A, X$  - przestrzenie metryczne,  $P_a(x), a \in A, x \in X$  - odwzorowanie zwężające i ciągłe ze

względem na  $a \in A$

Niech  $\tilde{x}(a)$  taki, że  $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$ . Zwróćmy uwagę, to znaczy, że

$$\forall_{a \in A} \cdot \forall_{x, x'} \cdot \|P_a(x) - P_a(x')\| \leq q \|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja  $\tilde{x}(a)$  jest ciągła na  $A$ .

**Uwaga 3.** Odwzorowanie  $P(g)$  wygląda tak:

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

Więc rolę parametru  $a$  pełnią  $x_0, t_0$  i  $P(g(t))$  jest ciągłe ze względu na  $x_0$  i  $t_0$ .

## 12 Wykład (05.04.2019)

Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator  $P_a(x)$  i on miał być zwężający.

$$P_a(x) : X \rightarrow X \text{ - zwężający .}$$

$$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \rightarrow \tilde{x}(a)\}, \text{ gdzie } P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a).$$

**Dowód 3.** Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} . \exists_{\delta > 0} . \forall_{a'} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że  $P_a$  - ciągła ze względu na  $a$ :

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} . \exists_{\delta_1 > 0} . \forall_{a'} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon \quad (31)$$

Wiemy, że  $\forall_{c' \in X}$  ciąg  $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \dots\} \rightarrow \tilde{x}(a')$  Ale, jeżeli przyjmiemy za  $c = \tilde{x}(a')$ , to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \rightarrow \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli  $P_a$  - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leq \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wyberzmy  $x_0 = \tilde{x}(a')$ . Wówczas

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) &\leq \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) = \\ &= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))). \end{aligned}$$

**Pytanie 13.** Jak ten obiekt ma się do  $d(P_a, P_{a'})$ ?

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli  $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$ , to znaczy, że  $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\text{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leq \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy  $\varepsilon_1$ , to biorąc  $\varepsilon_1$  taki, że  $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$  i znajdujemy  $\delta_1$  z zależności ?? i wiemy, że jeżeli

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

**Przykład 30.** (odwzorowanie zwężające)

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że  $x(t)$  jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0)) \dots \rightarrow x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$

$$f(t, x) = t + x, t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy  $f$  jest lipszycowalna?

$$\forall_{t \in [a, b]} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1 \|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzmy kilka wyrazów ciągu

$$g_0, P(g_0), P(P(g_0)), \dots$$

$$x^0(t), x^1(t), x^2(t)$$

$$x^0(t) = x_0(t) = 0$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s)) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = P\left(\frac{t^2}{2}\right) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s)) ds = \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3} + \frac{t^4}{2 \times 3 \times 4}$$

$\vdots$

$\vdots \rightarrow \infty$

$$e^t - t - 1.$$

**Przykład 31.**  $\frac{dx}{dt} = 2tx, \quad x(0) = 1$ , czyli  $f(t, x) = 2tx, \quad t_0 = 0$   
dla  $\forall_{t \in [a, b]}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leq \sup_{t \in [a, b]} |t| 2 \|x - x'\|.$$

Czyli  $f$  - lipszycowalna z  $L = \sup_{t \in [a, b]} |t| \times 2$

$$x^0(t) = 1$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s, 1) ds = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s\left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2}\right) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3}$$

$\vdots \rightarrow \infty$

$$e^{t^2}.$$

**Przykład 32.**

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

$$f(t, x) = f\left(t, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



$$x^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

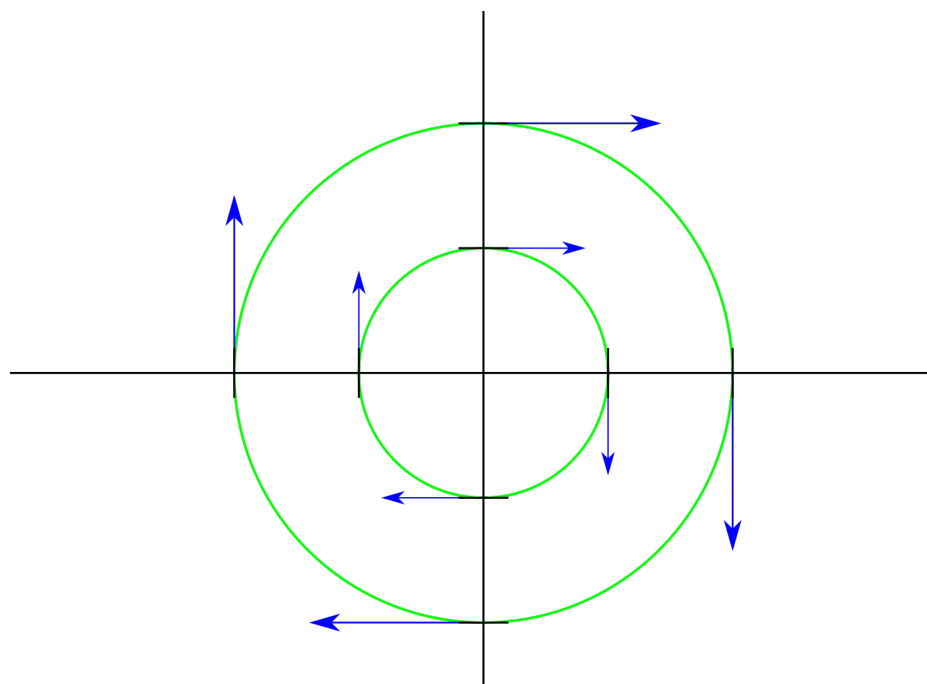
$$x^1(t) = P(x^0(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2(t) = P\left(\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^3 = P\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{2 \times 3} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$\vdots \rightarrow \infty$

$$\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$



Rysunek 27

**Twierdzenie 13.** *Jeżeli odwzorowania*

$$t \in [a, b] \rightarrow A(t)$$

$$t \in [a, b] \rightarrow b(t).$$

*Gdzie  $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow X$  są ciągłe, to równanie*

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych  $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$  jednoznacznie określone rozwiązanie na  $t \in ]a, b[$ .  
 Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o  
 żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast  $]t_0 -$   
 $\varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times \mathcal{O}$ , mamy  $]a, b[ \times X$

**Dowód 4.** Chcemy sprawdzić, czy  $f(t, x) = A(t)x(t) + b(t)$  spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że  $A(t)$  i  $b(t)$  są ciągle na przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Zatem, istnieje  $\sup_{t \in [a, b]} \|b(t)\| = C$ , a  $A : X \rightarrow X$  i  $A$  jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania

$$\sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

$$\forall_{t \in [a, b]} \|A(t)x + b(t) - (A(t)x' + b(t))\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| \|x - x'\| = L\|x - x'\|.$$

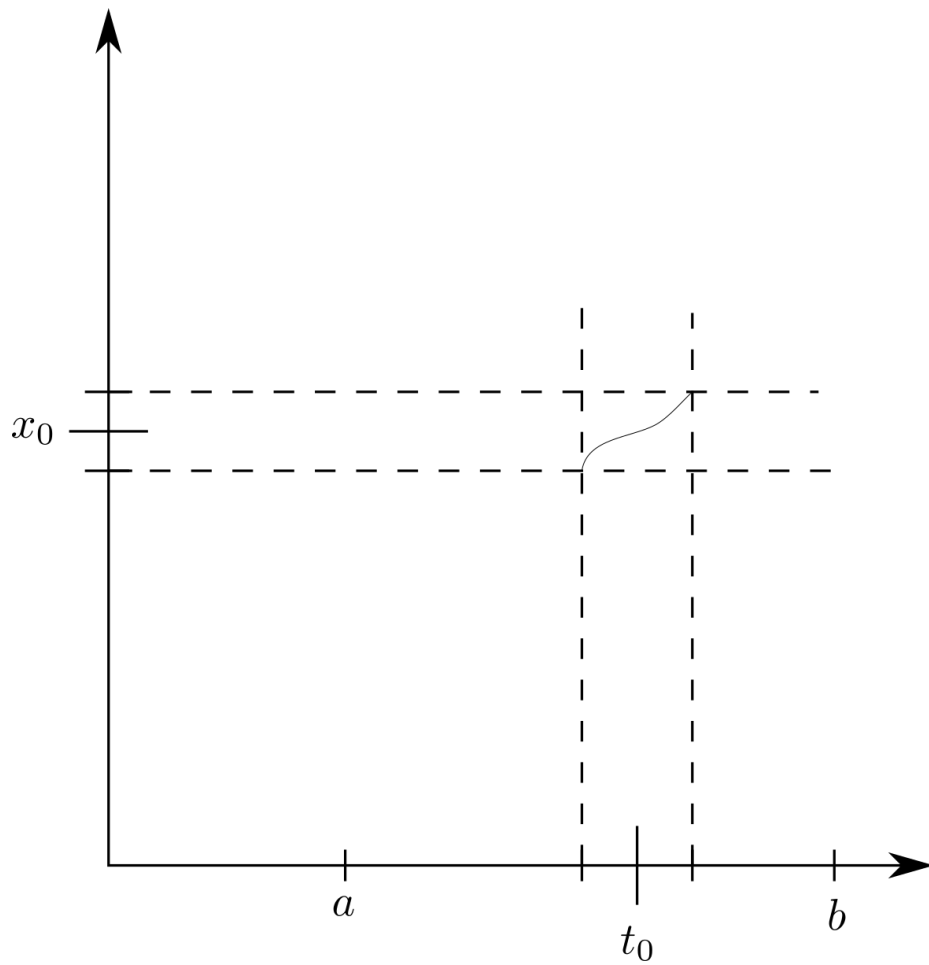
Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  oraz  $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$  takie, że dla

$$\varepsilon = \min \left\{ |a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L} \right\} \quad (32)$$

Gdzie  $r_1, r_2$  były takie, że na zbiorze  $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$  funkcja  $f(t, x)$  była ograniczona. Zależy nam na tym, aby w warunku ?? wyeliminować  $r_2$

Ale  $\|A(t)x + b(t)\| \leq \|A(t)x\| + \|b(t)\|$  dla  $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned} &= \|A(t)x\| + C \leq L\|x\| + C = \\ &= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leq \\ &\leq L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leq \\ &\leq Lr_2 + L\|x_0\| + C. \end{aligned}$$

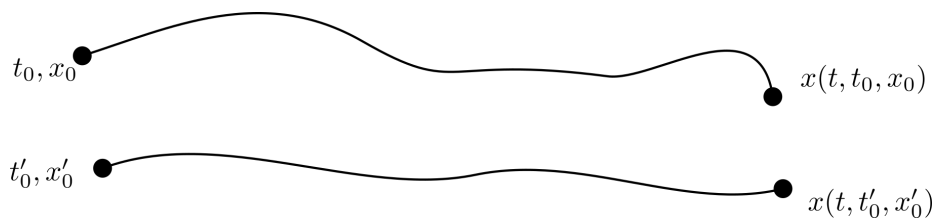


Rysunek 28: Czego byśmy chcieli.

### 13 Wykład (09.04.2019)

$$\varepsilon = \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M} \right\}$$

$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  Chcielibyśmy, żeby  $\varepsilon$  nie zależał od punktu w którym zaczniemy. Rys. ??



Rysunek 29: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi

$$\begin{aligned}
 \|A(t)x(t) + b(t)\| &\leq L(\|x_0\| + r_2) + c \\
 \frac{r_2}{M} &\geq \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} = \\
 &\text{Połóżmy } r_2 = \|x_0\| + c \\
 &= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} = \\
 \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} &\geq \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} = \\
 &\frac{1}{2L + 1}, \text{ zatem} \\
 \varepsilon &= \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L + 1} \right\}.
 \end{aligned}$$

( $r_1$  - pomijamy, bo  $A(t)$  - ciągła na  $[a, b]$ .) Oznacza to, że wartość  $\varepsilon$  nie zależy od  $x$ , zatem rozwiązanie początkowo określone na  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times K(x_0, r_2)$  możemy przedłużyć do określonego na całym  $[a, b] \times X$  !

**Definicja 16.** *Rezolwenta*

Rozwiązaniem problemu

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t) \\
 x(t_0) &= x_0.
 \end{aligned}$$

jest funkcja  $x(t, t_0, x_0)$

**Pytanie 14.** *Czy istnieje*

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

*Takie, że*

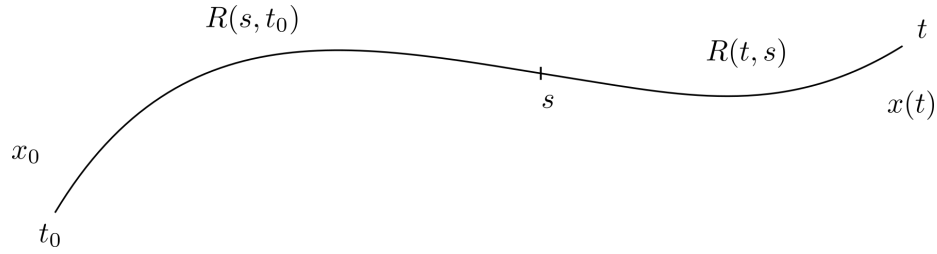
$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

(Jeżeli  $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$ )

**Pytanie 15.** *Jakie własności  $R(t, t_0)$  powinno posiadać?*

- $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R$  - liniowy

Bo jeżeli  $x_1(t), x_1(t_0) = x_0^1$  i  $x_2(t), x_2(t_0) = x_0^2$  są rozwiązaniem, to chcielibyśmy, by  $x_1(t) + x_2(t)$  też było rozwiązaniem z wartością początkową  $x_0^1 + x_0^2$ . Rys ??



Rysunek 30: Jak pośpiemy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)

- funkcja  $R(t, t_0)$
- $R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0)$   
 $\forall t, t_0, s \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$
- $R(t_0, t_0) = \mathbb{I}$ , bo  $x(t) = R(t, t_0)x_0$   
 $\forall t_0 \in \mathcal{O}$   
 Ad 3. Wstawiając  $t_0$  do trzeciej kropki otrzymujemy  $R(t_0, t_0) = R(t_0, s)R(s, t_0) \rightarrow \forall_{t, s \in \mathcal{O}} R(s, t) = R(t, s)^{-1}$
- 

$$\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0),$$

$$R(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

bo wtedy  $x(t) = R(t, t_0)x_0$  jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

$$\text{bo } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)x_0) = A(t)R(t, t_0)x_0 = A(t)x(t) \text{ i } x(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie  $x(t) = R(t, t_0)x_0$  da nam jednoznaczne rozwiązanie.

**Pytanie 16.**  $A$  co z  $b(t)$ ? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)

Chcemy rozwiązać problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Założmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t) = R(t, t_0)C(t), C(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)C(t)) = \frac{dR(t, t_0)}{dt}C(t) + R(t, t_0)\frac{dC}{dt} = A(t)R(t, t_0)C(t) + R(t, t_0)\frac{dC}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \quad / R(t, t_0)^{-1}.$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)^{-1}b(t).$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)b(t).$$

$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale  $c(t_0) = x_0$ , więc  $\alpha = x_0$ .

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t, t_0)c(t) = R(t, t_0) \left( x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds \right) = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \underset{R(t, s)}{R(t, t_0)R(t_0, s)}b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds.$$

dygresja:

dają nam rozkład gęstości masy  $\rho(x')$ . Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x - x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to  $\frac{1}{\|x - x'\|}$

**Pytanie 17.** *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja  $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$  spełnia warunki 1 – 5 dla rezolwenty

- $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $R(t, t_0)$  - jest ciągła względem  $t$  i  $t_0$
- $R(t, \alpha)R(\alpha, t_0) = R(t, t_0)$ , bo  $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^{\alpha} A(s)ds + \int_{\alpha}^t A(s)ds}$   
 $R(t, t_0) = R(t, \alpha)R(\alpha, t_0)$
- $R(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$

- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t, t_0)$

Dowód:

$$\frac{R(t+h, t_0) - R(t, t_0)}{h} = \frac{1}{h} \left( e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right) = .$$

$$= \frac{1}{h} \left[ e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right] = .$$

$$\frac{1}{h} \left[ e^{\int_t^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I} \right] e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} - \frac{1}{h} \left[ e^{hA(\beta) - \mathbb{I}} \right] R(t, t_0) = .$$

$$\frac{1}{h} \left[ \mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \dots = \mathbb{I} \right] R(t, t_0) = .$$

$$A(\beta)R(t, t_0) + h[\dots] \rightarrow A(t)R(t, t_0).$$

$t < \beta < t+h$

$$((((\int_t^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta))))))$$

**Przykład 33.**

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

## 14 Wykład (12.04.2019)

**Przykład 34.**

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t=0) \\ p(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{(t-0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda^2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + a\lambda + b.$$

$$f(-1) = -a + b, f(1) = a + b.$$

$$b = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2}, a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)}_{R(t, t_0)} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 18.** Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia  $R(t, t_0)$ ?

**Obserwacja 5.** Załóżmy, że macierz  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ma  $n$  różnych wartości własnych.

$$\begin{array}{ll} \lambda_1, & \lambda_2, \lambda_3, \dots \\ v_1, & v_2, v_3, \dots \end{array}$$

**Obserwacja 6.** Jeśli  $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{I})$ , to znaczy, że

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^2 v &= \lambda^2 v \\ A^n v &= \lambda^n v \\ e^{At} v &= e^{\lambda t} v. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem przedstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\begin{aligned} \overline{x_0} &= x'_0 + x_0^2 + \dots + x_0^n \\ e^{A(t-t_0)} \overline{x_0} &= \sum_{i=1}^n e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0^i \end{aligned}$$

**Obserwacja 7.** najogólniejsza postać  $\lambda_j$  (pierwiastki równania  $w(\lambda) = 0$ ) to

$$\lambda_j = a_j + ib_j.$$



Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy  $n$  różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt), \quad \sin(bt), \quad e^{at}, \quad ch(at), \quad sh(at), \quad e^{at} \sin(bt), \quad e^{at} \cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x} &= p \\ \dot{p} = \ddot{x} &= -a\dot{x} - \omega^2 x \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Założmy, że macierz  $A \in M_n^n$  ma  $k$  różnych wartości własnych i  $A$  nie zależy od czasu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow n_1 \\ \lambda_2 &\rightarrow n_2 \\ &\vdots \\ \lambda_k &\rightarrow n_k - V_k = \ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}. \end{aligned}$$

(gdzie  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ )

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \dots + x_0^k.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^k e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda_i \mathbb{I}(t-t_0)} x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A - \lambda_i \mathbb{I})(t-t_0)} x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A - \lambda_i \mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right) \\ \text{ale } x_0^i &\in \ker(A - \lambda_i \mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_i = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i. \end{aligned}$$

**Przykład 35.** *Rozwiązać równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = \det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$\ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a + b + 2c = 0$$

$$-b + c = 0$$

$$c = b$$

$$-a - b + 2b = 0$$

$$a = 3b$$

$$v \in V_{\lambda_2} \iff v = \begin{bmatrix} 3b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = 0, v \in V_{\lambda_1} \iff v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0^1 \in V_{\lambda_1} + x_0^2 \in V_{\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i =$$

$$= e^{\lambda_1(t)\mathbb{I}} \left( \sum_{j=0}^{2-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_1)^j \right) x_0^1 + e^{\lambda_2 t \mathbb{I}} (\mathbb{I}) x_0^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t^1}{1!} \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t\mathbb{I}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^t(a + bt) + e^{2t} + C.$$

## 14.1 Baza rozwiązań

**Obserwacja 8.** Jeżeli  $x(t) = R(t, t_0)x_0$  i  $R(t, t_0) \in M_n^n$ , to znaczy, że

$$x(t) = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} + x_0^2 \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} + \dots + x_0^n \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 19.** Czy  $\det(R(t, t_0)) \neq 0$ ?

Jeżeli tak, to kolumny  $R(t, t_0)$  możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i  $\det R(t, t_0) \neq 0 \quad \forall_{t \in [a, b]}$ .

W bazie wektorów własnych macierz  $e^{At}$  wygląda tak (zakładamy  $n$  wartości własnych):

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{t \operatorname{Tr} A} \neq 0.$$

## 15 Wykład (30.04.2019)

Pytanie:

Czy kolumny  $R(t, t_0)$  są liniowo niezależne  $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$ ?

Wiemy, że  $R(t, t_0) = \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$ .

Chcielibyśmy, żeby  $\forall_{t, t_0 \in [a, b]} \det R(t, t_0) \neq 0$ .

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą  $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  możemy związać macierz  $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$ .

Zatem  $\det A$  uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz  $A$  z pierwszą kolumną  $D^T$ .

Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz  $A$  przez drugą kolumnę  $D^T$ ?

**Przykład 36.**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  i wtedy  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , zatem  $AD^T = \sum_{i=1}^n D_{ik} a_{si} = \delta_{ks} \det A$

**Twierdzenie 14.** (Liouville)

Jeżeli  $R(t, t_0)$  - rezolwenta dla problemu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(x)x(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

i  $x \in \mathbb{R}^n$ , to  $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$ , gdzie  $w(t) = \det R(t, t_0)$  i  $w(t)$  nazywamy wrońskianem.

Uwaga:

Zauważmy, że  $w(t)$  nigdy nie będzie równa zero, bo  $w(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$  a

$\left| \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds \right| < +\infty$  (bo  $A(t) \rightarrow$  lipszycowalna).

Oznacza to, że kolumny  $R(t, t_0)$  są  $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$  liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn  $R(t, t_0)$

**Dowód 5.** Rezolwenta jest postaci:

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie  $u_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ .

Wiemy, że  $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$ .

Obserwacja: policzmy  $\det R(t, t_0)$  względem pierwszego wiersza:

$$w(t) = (-1)^{1+1} u_{11}(t) \begin{bmatrix} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix} + (\text{brak } u_{11}).$$

Zatem  $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$  i ogólnie  $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$ .

Zatem  $w(t)$  możemy potraktować jako funkcję od  $n \times n$  zmiennych.  $w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{nn}(t))$ , zatem

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}} \frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro  $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$  to znaczy, że

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^n a_{ks} u_{si}.$$

Czyli

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \sum_{k,i} D_{ki} \sum_s a_{ks} u_{si} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} D_{ki} u_{si} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} \delta_{ks} w(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk} w(t) \end{aligned}$$

Zatem  $\frac{\partial w}{\partial t} = \text{tr}(A(t)) \cdot w(t)$ . Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:

$$\int_{t_0}^t \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \rightarrow w(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} e^{\ln \ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} \quad \square$$

## 15.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \dots + a_{n-1} x^{n-1}(t) \quad (33)$$

(gdzie  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ).

Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.

Możemy zapisać (??) jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \sum_j \frac{t-t_0}{j} (a - \lambda_i \mathbb{I})^{\ln_i - 1} \underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki  $w(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$

**Przykład 37.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} a_1 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + \\ & (-1)^{3+4} a_2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} (a_3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0 \cdot 1 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \lambda^4 \\ \frac{d^4 x}{dt^4} &= a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' + a_3 x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = te^t$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= a_0 x + a_1 x' + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \\ \lambda^n &= a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

Położmy  $x = e^{\lambda t} \rightarrow$  skrót mnemotechniczny

$$e^{\lambda t} \lambda^n = e^{\lambda t} a_0 + a_1 \lambda e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t}.$$

## 15.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki  $x_0^i$  we wzorze (\*) bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy  $A$ ?

**Przykład 38.** Niech  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  i  $x(0) = 0, x'(0) = 1$  i wiemy, że  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ . Oznacza to, że  $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}(*),$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\omega, & n_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -i\omega, & n_2 &= 1. \end{aligned}$$

gdzie  $A$  i  $B$  nieznane, ale wiemy, że  $x(0) = 0$  i  $x'(0) = 1$  i  $x'(t) = Ai\omega e^{i\omega t} - Bi\omega e^{-i\omega t}.$

Czyli

$$\begin{aligned} Ae^0 + Be^{-0} &= 0 \implies -A = +B \\ Ai\omega e^0 - Bi\omega e^{-0} &= 1 \\ 2Ai\omega &= 1 \\ A &= \frac{1}{2i\omega} \\ B &= -\frac{1}{2i\omega}. \end{aligned}$$

Czyli

$$x(t) = \frac{1}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

**Pytanie 20.** Czy możemy zmienić bazę w równaniu (\*)?

Odp: Możemy. Na przykład przyjmując  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . Wówczas

$$\begin{aligned} x'(t) &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ x(0) &= A = 0 \\ x'(0) &= B\omega = 1 \rightarrow B = \frac{1}{\omega} \implies x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

**Pytanie 21.** Co robić z niejednorodnością? (Dla równań wyższych rzędów)

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + b, \frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x}, \vec{x} = R(t, t_0)x_0.$$

**Przykład 39.**

$$\ddot{x} + \omega^2 x = e^t(\Delta).$$

Wiemy, że rozwiązaniem problemu  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  jest  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .  
Może uzmiennimy stałe:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{A}(t) \cos(\omega t) - A(t) \sin(\omega t) + \dot{B}(t) \sin(\omega t) + B(t) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

W efekcie dostaniemy równanie drugiego rzędu na  $A(t)$  i  $B(t)$  :(  
Zapišemy więc równanie  $(\Delta)$  w postaci macierzowej.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} (\Delta \nabla).$$

Jak wygląda rezolwenta?

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ i } \frac{d}{dt} R(t, t_0) = AR(t, t_0), R(t_0, t_0) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = R(t, t_0)x_0.$$

Zauważmy, że skoro

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ x'(t) &= A (\cos(\omega t))' + B (\sin(\omega t))' \\ \text{to wtedy } \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



I możemy zbudować macierz

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u'_{11} & u'_{12} \end{bmatrix},$$

która od rezolwenty różni się tym, że w  $t = t_0$  nie zmienia się w macierz jednostkową.

Uzmienniamy stałe:

$$(\exists) \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

i wstawiamy do  $(\Delta \nabla)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = [\dots] + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{B}(t) \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\exists) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \text{ ale} \\ & \left( \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ (\cos \omega t)' & (\sin \omega t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Czyli mamy:

$$\begin{aligned} & A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t = 0 \\ & A'(t) (\cos \omega t)' + B'(t) (\sin \omega t)' = e^t \\ & x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ & x(t) = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t \\ & x'(t) = A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t + A(t) (\cos \omega t)' + B(t) (\sin \omega t)'. \end{aligned}$$

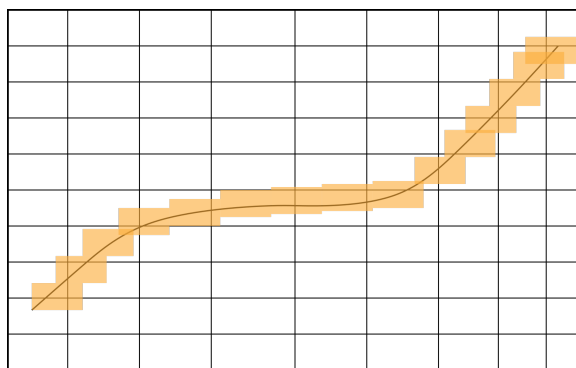
## 16 Wykład (07.05.2019)

Chcemy dojść do tw Lebesque.

**Twierdzenie 15.** (Lebesque) Niech  $P$  - zbiór nieciągłości funkcji  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona na  $D$ ,  $D$  - ... jest zbiorem miary Lebesque'a zera  $\iff f$  - całkowalna na  $D$ .

Wiemy, że  $f$  - całkowalna  $\iff$

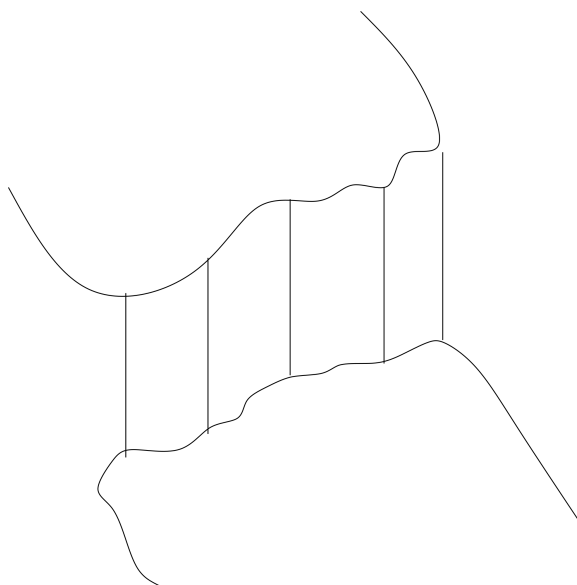
$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi \cdot |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$



Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geq \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja  $f$  na zbiorze  $A$  powinna być ograniczona!!!)



**Obserwacja 9.** Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogą wziąć ileś kartek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogą nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogą (niezależnie od kształtu kartek) przykryć go skończoną liczbą kartek?

Weźmy długi stół:

$$R = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]n-2, n+2[ \cup ]-n+2, n-2[ \\ ]0, 1[ \cup ]-2, 2[ \\ ]0, 1[ \cup ]-2019, 2018[ \cup ]-2, 2[ \\ ]0, 1[ = \bigcup_{n=2}^{\infty} ]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[.$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogą wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

**Definicja 17.** Niech  $X$  - zbiór a  $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$  - rodzina zbiorów. Mówimy, że  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , jeżeli  $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$ . Jeżeli zbiory  $A_\alpha$  są otwarte, to mówimy, że  $F$  jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów  $A_\alpha$  jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór  $F$  taki, że jest też pokryciem zbioru  $X$  nazywamy podpokryciem.

**Definicja 18.** Zbiór  $X$  nazywamy zwartym, jeżeli z **każdego** pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

**Stwierdzenie 4.**  $(X - \text{domknięty, ograniczony}) \iff (X - \text{zbiór zwarty})$

**Dowód 6.** niech  $X \in \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  - przestrzeń metryczna

$\Leftarrow$  1 Pokażemy, że jeżeli  $X$  - zwarty, to  $X$  - ograniczony. (przypomnienie: zbiór  $A \subset \mathbb{X}$  jest ograniczony jeżeli  $\exists \epsilon > 0, \exists x_0 \in A$ , że  $A \subset K(x_0, \epsilon)$ ) Skoro  $X$  - zwarty, to niech  $F$  będzie pokryciem złożonym

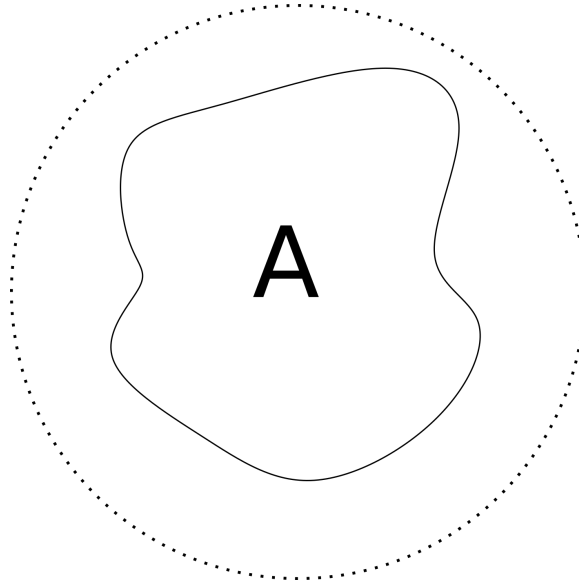
z  $K(x, 1), x \in X$ .  $F = \left\{ K(x, 1), \forall x \in X \right\}$ .  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , ale ponieważ  $X$  - zwarty, to znaczy, że z pokrycia  $F$  możemy wybrać **skończone** podpokrycie, co oznacza, że zbiór  $X$  możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem  $X$  - ograniczony.

$\Leftarrow$  2 Pokażemy, że  $X$  - zwarty, to  $X$  - domknięty. Pokażemy, że  $X'$  - zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego  $p \in X'$   $\exists \epsilon > 0$ , że  $K(p, \epsilon) \cap X = \emptyset$  co będzie oznaczało, że  $X'$  składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy  $q \in X$ , utwórzmy dwa otoczenia:

$$K(q, r), K(p, r); r = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Widać, że  $K(q, r) \cap K(p, r) = \emptyset$ . Powtarzamy taką procedurę dla każdego  $q \in X$ , oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru  $X$  kulami  $K(q, r_q), q \in X$ , ale  $X$  jest zbiorem zwartym więc mogą wybrać **skończoną** ilość kul

$K(q_1, r_1), K(q_2, r_2), \dots, K(q_k, r_k)$  będącą pokryciem zbioru  $X$ . A to znaczy, że



Rysunek 31: Nieważne, co  $A$  myśli o sobie, jeżeli otoczmy je kulą, to jest ograniczone i koniec

$$\underbrace{(K(p, r_1) \cap K(p, r_2) \cap \dots \cap K(p, r_k))}_{\text{jest do zbioru niepusty i otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1, r_1) \cup K(q_2, r_2) \cup \dots \cup K(q_k, r_k))}_{\text{Pokrywa cały } X} = \phi.$$

czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu  $P : K(p, r_k) \cap \dots K(p, r_k)$ , takie, że nie ma punktów wspólnych z  $X$ , więc  $p$  jest punktem wewnętrznym, czyli  $X'$  - otwarty, czyli  $X$  - domknięty.

$X$  - domknięty i ograniczony  $\implies X$  - zwarty. Niech  $P$  - kostka z  $\mathbb{R}^n$ , metryka  $d_2$ . Pokażemy, że  $P$  jest zwarta.

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

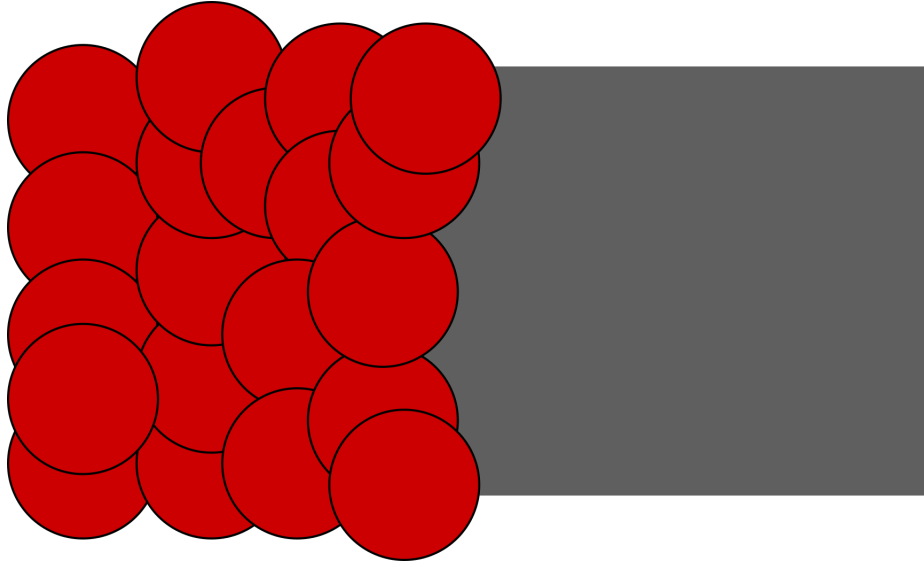
$$\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:

Załóżmy, że  $P$  - domknięty i ograniczony i  $P$  nie jest zwarty. Co to znaczy, że  $P$  nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru  $P$  takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli  $P$  nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę  $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \dots \times [a_n, c_n]$  gdzie  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ , to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli  $P_1 \subset P$ , kulę  $P_1$  też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek  $PP_1P_2P_3 \dots P_n \dots$ . Weźmy ciąg elementów

$$\begin{aligned} x_0 &\in P \\ x_1 &\in P_1 \\ &\vdots \\ x_n &\in P_n \\ &\vdots \end{aligned}$$



Rysunek 32: Przykrywanie zbioru kulami

Znaczy, że ciąg  $\{x_n\}$  jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu *asdasd*). Ciąg  $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$  czyli  $X_n$  jest zbieżny. (bo  $\mathbb{R}^n$  - zupełna). Niech  $\tilde{x}$  będzie granicą  $\{x_n\}$  a zbiór  $\{P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$  jest pokryciem  $P$  takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ , to znaczy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall n > N . x_n \in K(\tilde{x}, \varepsilon).$$

Oznacza to, że mogą tak dobrać  $\varepsilon$ , że w  $K(\tilde{x}, \varepsilon)$  będą się zawierać wszystkie  $P_i, i > n$ . Mogą wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki  $P$ .

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

i sprzeczność

Wracamy do tw. Lebesque'a. Obserwacja: Niech  $D$  - zwarty,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  - ograniczona i niech  $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$ . Wówczas:

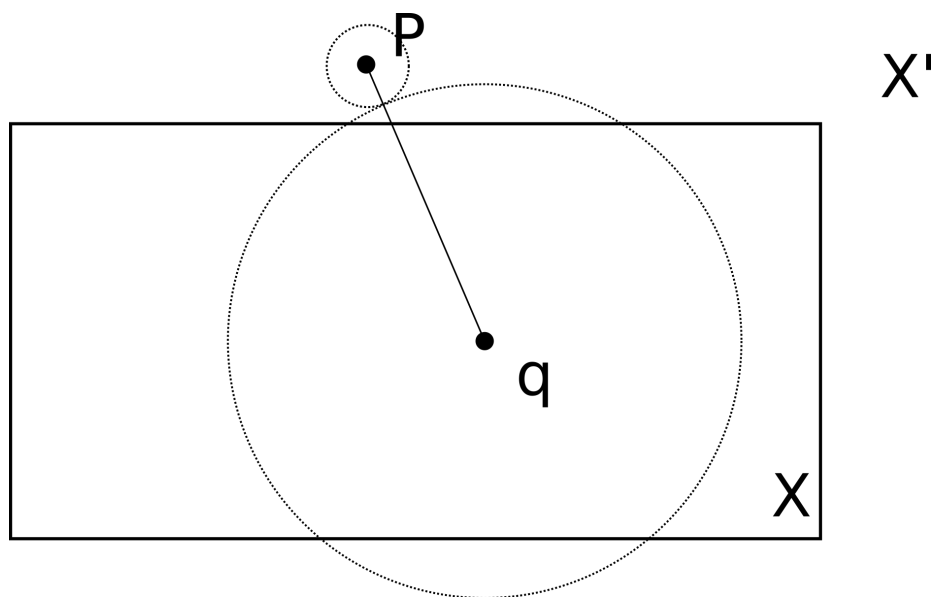
$$\exists \Pi |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

**Dowód 7.** Skoro  $\forall x \in A \lim_{r \rightarrow 0} | \sup_{K(x', r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x', r)} f(x') | < \varepsilon$  To znaczy, że  $\exists r_\varepsilon$  takie, że  $|\sup_{r_\varepsilon} f(x') - \inf_{r_\varepsilon} f(x')| < \varepsilon$ . Jeżeli zbadamy wszystkie kule  $K(x, r_\varepsilon) \forall x \in D$  to otrzymamy pokrycie  $A$ . Ale  $A$  jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że

$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \dots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

Możemy zatem wybrać podział  $\Pi$  zbioru  $D$  zgodny z podziałem  $(*)$ , w wyniku czego,

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$



## 17 Wykład (10.05.2019)

Ostatnio było:

$$A \subset D : \forall_{x \in A} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

**Twierdzenie 16.** (Lebesgue'a) niech  $D$  - kostka,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona.  
 Wówczas  $f$  - (całkowalna na  $D$ )  $\iff$  (zbiór nieciągłości funkcji  $f$  jest miary Lebesgue'a zero)

**Dowód 8.**  $\Leftarrow$

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłości jest miary  $L$ . zero.

Wprowadźmy zbiór  $A_n = \{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

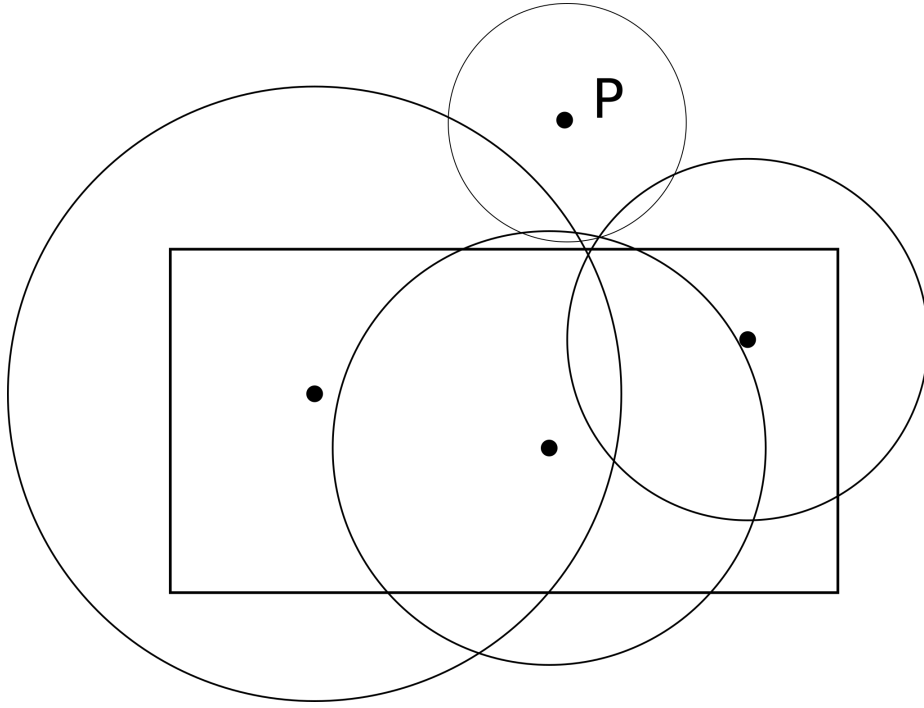
**Obserwacja 10.**  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$  na  $D$ .

*Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego  $A_n$ , bo przeliczalna suma zbiorów miary  $L$ . zero też jest zbiorem miary  $L$ . zero.*

**Uwaga 4.** Zbiór  $A_n$  jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero gdy istnieje  $P_i \subset D$ , ( $P_i$  - kostki), że  $A_n \subset \bigcup P_i$ ,  $\sum |P_i|$  - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).



Niech  $\varepsilon > 0$ . Wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n > N \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wyberzmy zatem taki indeks  $n$  dla zbioru  $A_n$ , że  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Wiemy, że  $A_n$  - domknięty i ograniczony (bo  $A_n \subset D$ , a  $D$  - kostka w  $\mathbb{R}^n$ ), to znaczy, że  $A_n$  jest zbiorem zwartym, a  $\{P_i\}$  jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie  $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$

$$\sum_{j=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę  $\{P_i\}$ , że  $\sum |P_i|$  - dowolnie mała. Wybierzmy podział  $\Pi$  zbioru  $D$  taki, że  $\Pi$  jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie  $A_n$  zbioru  $\bigcup P_j$ . Oznacza to, że podział  $\Pi$  możemy podzielić na dwa podziały

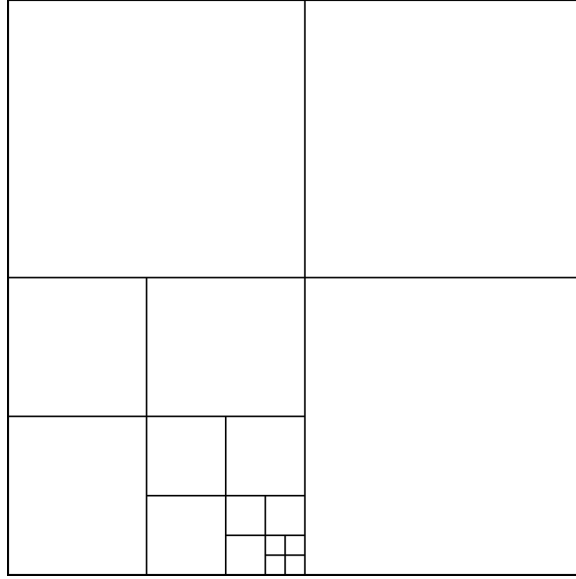
$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}$$

$\Delta$

$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$

$$\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.$$

$\Delta$  : każda kostka z  $\{P_j\}$  składa się z kostek należących do  $\Pi_1$



Rysunek 33: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszystkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

$$|\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = |\bar{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) + \bar{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2)|, \text{ ale}$$

$$\bar{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_1} (\sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_i} f) |Q_i| \quad (34)$$

Gdzie wiemy, że  $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$ , a  $f$  - ograniczona na  $D$  czyli

$$\exists_M \forall_{x \in D} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$(\text{??}) \leq M \cdot \sum |Q_i| \leq M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) &= \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|. \end{aligned}$$

Zatem

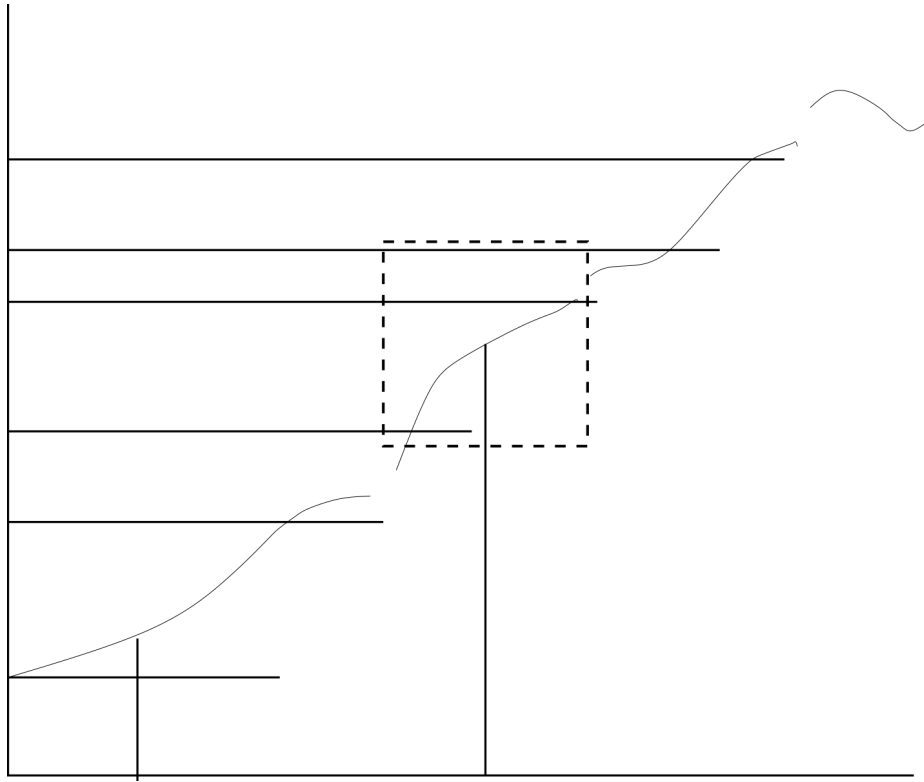
$$|\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |D| = \frac{1}{n} \cdot \text{const.}$$

czyli możemy tak zwiększyć  $n$ , że  $\forall_{\varepsilon > 0} \frac{1}{n} \cdot \text{const} < \varepsilon \quad \square$

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego  $A$ ?

np. dla  $A_{2019}$  działa, ale co dalej. Bo  $A_k$  dla  $k > n$  też spełniają warunek, że  $\frac{1}{k} \cdot \text{const} < \varepsilon$ , a  $A_j$  dla  $j < n$  jest takie, że  $A_j \subset A_n$





$\Rightarrow$

Wiemy, że  $f$  - całkowalne, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi^S |(f, \Pi) - \int_S f| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero)

$$\begin{aligned} \Pi &= \{T_i\} \\ \frac{\varepsilon}{n} &> |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = \\ &= \sum | \sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f | |T_i| (*). \end{aligned}$$

z podziału  $T_i$  wybieram takie kostki  $P_i$ , że  $| \sup_{x \in P_i} f - \inf_{x \in P_i} f | \geq \frac{1}{n}$ .

Wówczas

$$\begin{aligned} (*) &\geq \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum |P_i| \\ \text{czyli } \forall_{\varepsilon > 0} \frac{\varepsilon}{n} &> \frac{1}{n} \sum |P_i|, \text{ gdzie } P_i \text{ jest pokryciem } A_n. \end{aligned}$$

Czyli  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero  $\square$

**Przykład 40.**  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ,  $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy,$$



gdzie  $\varphi_1(x) = \int_0^1 x \sin(xy) dy$ ,  $\varphi_2(y) = \int_0^1 x \sin(xy) dx$

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y).$$

**Twierdzenie 17.** (Fubiniiego)

Niech  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ .  $A \subset \mathbb{R}^l$ ,  $B \subset \mathbb{R}^k$ ,  $A \times B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  - ograniczona i całkowalna na  $A \times B$ .  
Oznaczmy  $x^l \in A$ ,  $y^k \in B$ ,  $A, B$  - kostki.

Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}, \psi(x) = \underline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}.$$

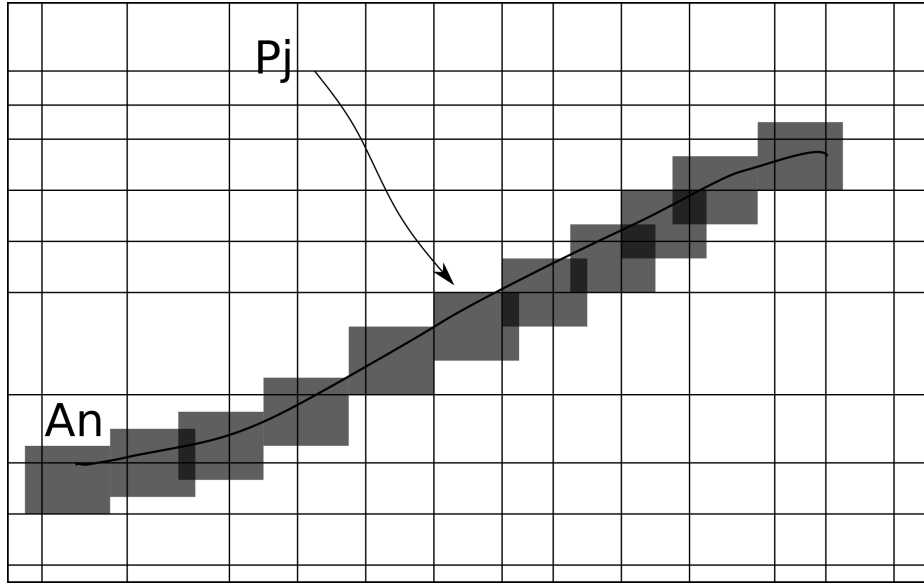
Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

**Uwaga 5.** całkowalność na  $A \times B$  nie oznacza całkowalności na np.  $B$ .

**Dowód 9.** Niech  $\{Q_i\} = \Pi_1$  - podział zbioru  $A$ ,  $\{R_j\} = \Pi_2$  - podział zbioru  $B$ .  
Wówczas  $\Pi_1 \times \Pi_2$  - podział  $A \times B$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) &= \\ &= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |R_j| |Q_i| \leqslant \\ &\quad \text{suma dolna dla } \psi(x) \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \quad \text{bo suma dolna } \leqslant \text{calki dolnej} \quad = \quad \sum_S (\psi, \Pi_1). \end{aligned}$$



Ale  $\int_A \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|$ .

Czyli  $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{S}(\psi, \Pi_1)$ . Analogicznie możemy pokazać, że

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

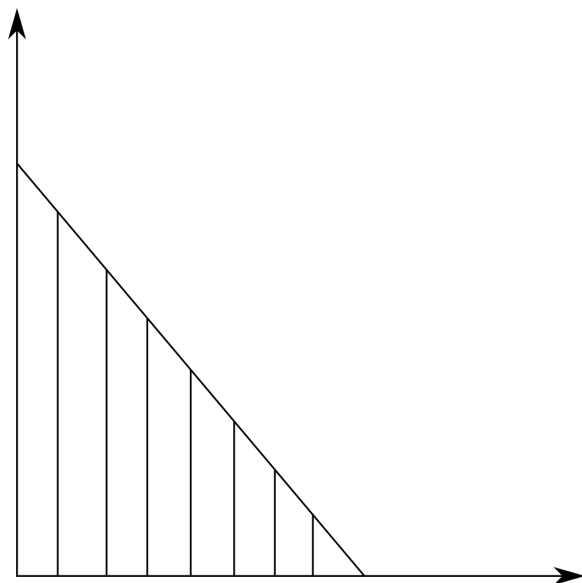
Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro  $f$  - całkowalna na  $A \times B$ , to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że  $\int_A \psi$  i  $\int_B \varphi$  - istnieją i wynoszą  $\int_{A \times B} f$   $\square$



Rysunek 34: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

## 18 Wykład (14.05.2019)

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

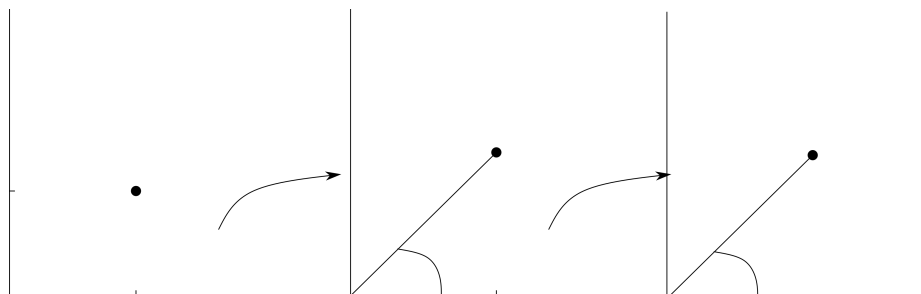
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = \int_{x^2=2}^{x^2=4} e^t dt = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy = \int r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \mid = \int dr \int d\varphi f(r, \varphi)??.$$



Rysunek 35: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie  $(x, y) \rightarrow (x, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned}
\int dx \int dy f(x, y) &= \|y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi\| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\
&= \|x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi\| = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\
&= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli } "??" = r.
\end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. ( $y \rightarrow r$ ), ( $x \rightarrow \varphi$ )

$$\begin{aligned}
\int \int f(x, y) dx dy &= \|y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2r dr}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\| = \\
&= \int dx \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = \|x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi\| = \\
&= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\
&= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r.
\end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba ( $r$ ). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej  $\varphi$ , bo  $x = r \cos \varphi$  a  $\cos$  jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MK<sup>TM</sup>)

$$\text{Niech } \psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\psi' &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \\
\|\psi'\| &= r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r.
\end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli  $\varphi : A \rightarrow A$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , to możemy przedstawić  $\varphi$  jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia  $n - 1$  zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

*Dowód.* (coś w rodzaju dowodu)  
 $\varphi$  możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 22.** Czy istnieje odwzorowanie  $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$  takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$(t_{i \neq j})$  mogą zostać zamiast zamieniać je na  $x_i$ . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi : A \rightarrow A$ . Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!  $\det \varphi' \neq 0$ , czyli w macierzy  $\varphi'$  istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np.  $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$ . Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i  $\det \eta' \neq 0$ , więc istnieje  $\eta^{-1}$ .

Czyli  $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$   $\square$

$\square$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (35)$$

**Twierdzenie 18.** (O zamianie zmiennych)

Niech  $\Theta, \Omega$  - zbiory otwarte w  $\mathbb{R}^n$  i  $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$ ,  $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona i całkowalna.  $\xi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Omega$ ,  $\xi^{-1}$  klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Theta$ . Wtedy

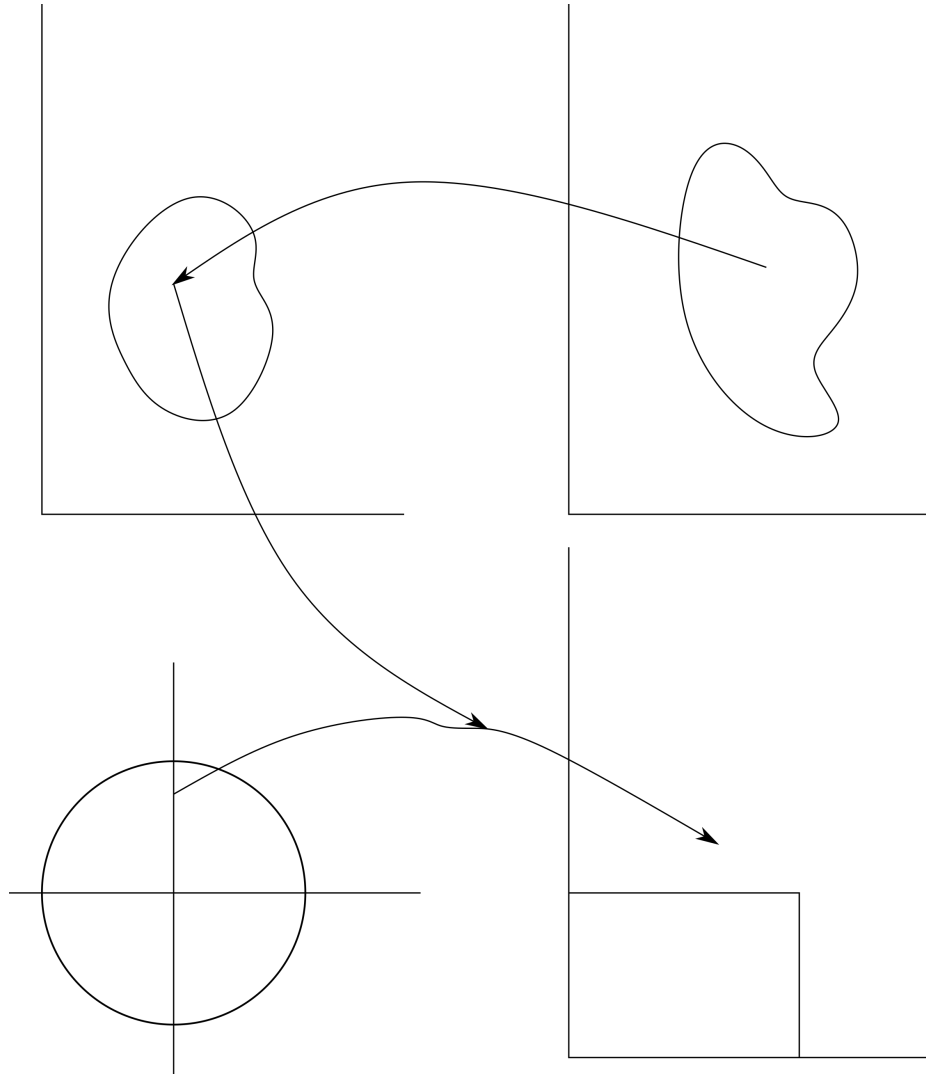
$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (36)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

*Dowód.* (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla  $n = 1$  - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$



Rysunek 36:  $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A \subset \mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic:

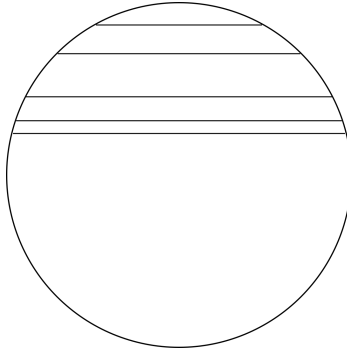
$\left(\int_a^b f\right)$  oznacza, że zakładamy, że  $a \leq b$ . Dowód przeprowadzamy dla  $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  takiego, że  $\xi$  nie zamienia jednej zmiennej.

**Obserwacja 11.** Niech  $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$ , niech  $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$ .

Wówczas  $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$ , zatem  $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku  $n - 1 \rightarrow n$  i wiemy, że dla  $n - 1$  wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |det \xi'| dt.$$



Rysunek 37: Kółko  $K$  składamy z kresek  $K_a$  i mamy  $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

Mając zbiór  $\Theta$ , zdefiniujemy zbiór  $\Theta_a$ , który jest zbiorem takich  $x \in \Theta$ , że na miejsca  $x_i$  wstawimy wielkość  $a$ .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy  $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$  taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Czyli  $\xi$  nie zmienia jednej współrzędnej np.  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$ .

Możemy więc zapisać transformację  $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$



Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt^2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n &= \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ &= [a = t_i] = \\ &= \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n. \end{aligned}$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

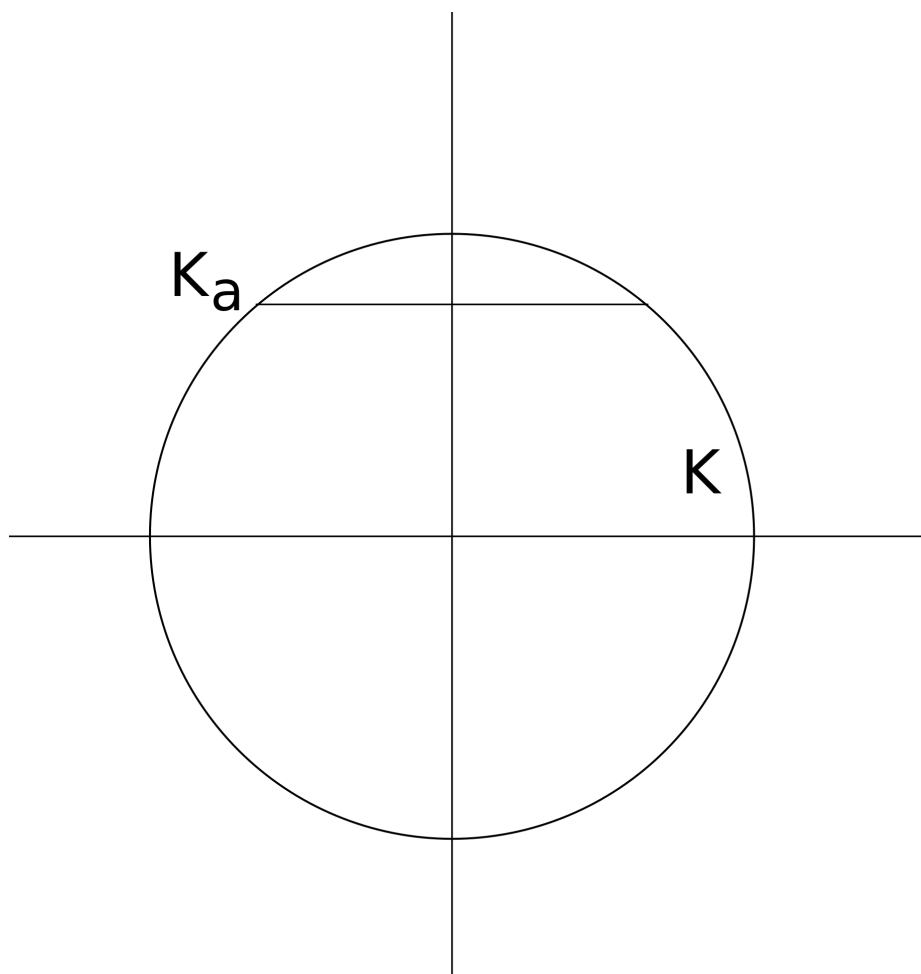
**Przykład 41.** Policzmy całkę  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć  $I$ , to tym bardziej  $I^2$ ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .  $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $|\psi'| = r$  Mamy

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p \\ \frac{\pi}{2} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[ -\frac{1}{2} e^{-(0)^2} \right] \right] &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{czyli } I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



## 19 Wykład (17.05.2019)

### 19.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  - taki, że dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje otoczenie otwarte  $U \subset M$

**Przykład 42.** (sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie)

**Definicja 19.** Niech  $U$  - zbiór otwarty  $\subset M$  i niech odwzorowanie  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  takie, że  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , (czasami  $\mathcal{C}^\infty$ ),  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , (czasami  $\mathcal{C}^\infty$ ) nazywamy mapą.

Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru  $M$ .

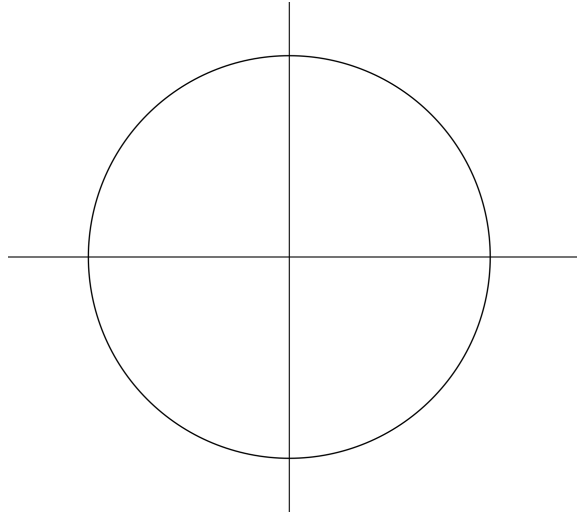
Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór  $M$ . Połowa tego zbioru to niech będzie  $U_1$ , i ono się przecina z  $U_2$ .  $U_1$  i  $U_2$  możemy rozłożyć na prostokąty w  $\mathbb{R}^2$ . Co się stanie z punktami mapowanymi do obu  $U$ ?

**Definicja 20.**  $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$  - mapy na  $M$ .

$U_1$  i  $U_2$  nazywamy zgodnymi jeżeli

a)  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

albo odwzorowanie  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$  jest bijekcją (klasę powiedzmy sobie  $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ )



Rysunek 38:  $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

**Przykład 43.**

$$U_1 = \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \rightarrow x$$

$$U_2 = \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \rightarrow y$$

$$U_3 = \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \rightarrow x$$

$$U_4 = \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \rightarrow y.$$

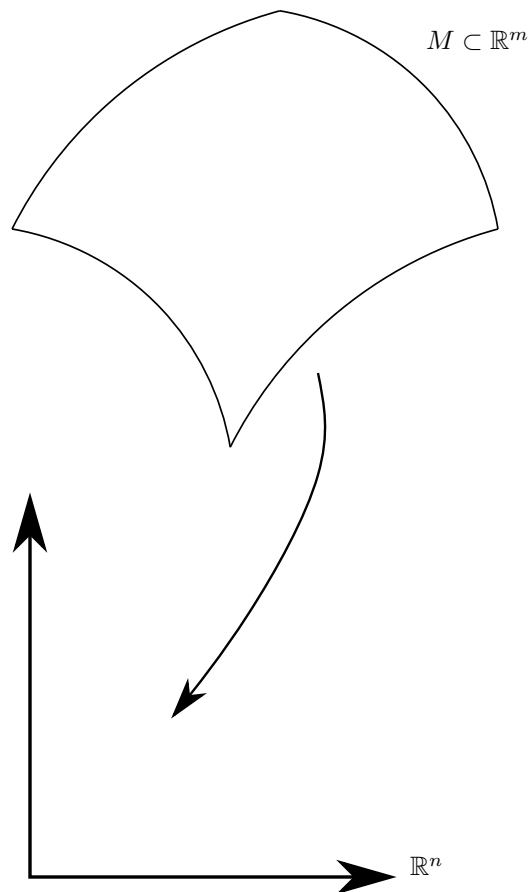
$U_1$  i  $U_3$  oraz  $U_2$  i  $U_4$  są zgodne. Czy zgodne są  $U_1$  i  $U_2$ ? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie  $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ , ale  $\varphi_1(x, y) \in U_1 \rightarrow x$ .

Czyli  $\varphi_1^{-1}(x) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$ ,

czyli  $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$ .

Zatem czy  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$  przesuwa  $]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze  $]0, 1[$  jest.

**Definicja 21.** Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór  $M$  wraz z atlasem, który pokrywa cały  $M$  nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).



Rysunek 39: Wymiar pęczka może być większy!  $m > n$

## 20 Wykład (21.05.2019)

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech  $M$  - rozmaitość. Odwzorowanie  $\sigma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma(t) \in M$  nazywamy krzywą na  $M$ .  $\sigma$  jest klasy  $\mathcal{C}^\infty$

**Przykład 44.** (*spiralą na walcu*)

$$\sigma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

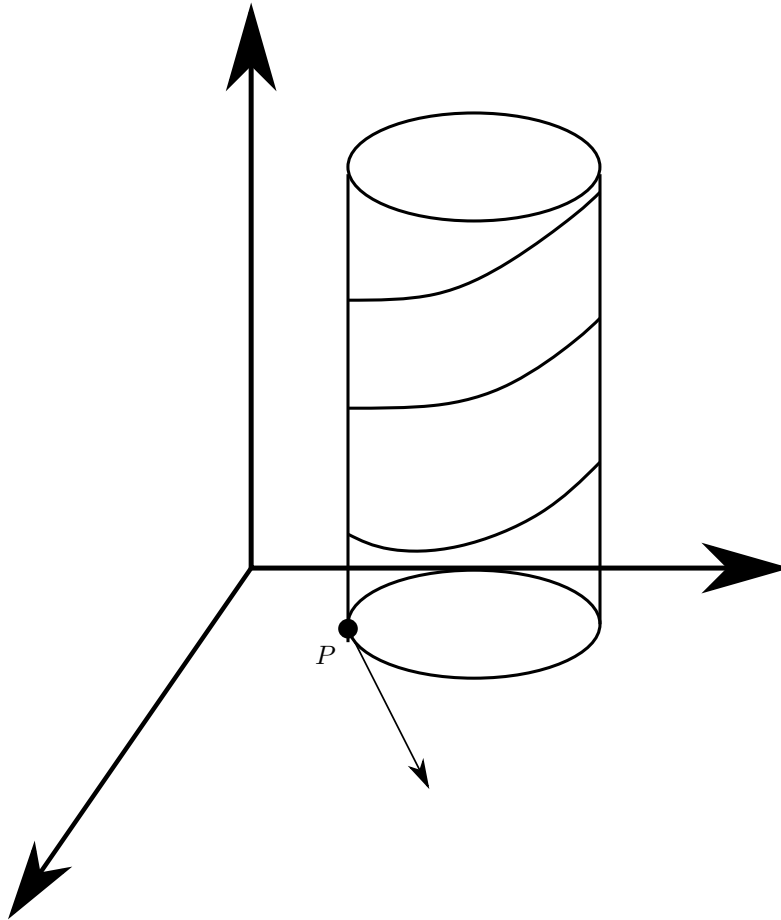
**Definicja 22.** Niech  $p \in M$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  - krzywe na  $M$  takie, że  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$ . Mówimy, że  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są styczne w punkcie  $P$ , jeżeli

$$\left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt  $P \in M$ . Na tym zbiorze wprowadzamy relację:  $\sigma_1 \sim \sigma_2$  jeżeli  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są styczne. Jeżeli  $\sigma$  krzywa przechodząca przez punkt  $P$ , to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie  $P$  nazwiemy  $v = \underset{\text{klasa równoważności}}{[\sigma]}$

**Przykład 45.** Weźmy krzywą  $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$ ,  $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



**Przykład 46.** Niech  $f(p) = C \quad \forall_{p \in M}$ . Ile wynosi  $v(f)$ ?

$$\begin{aligned} v(f) &= v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli  $v(f) = 2v(f)$ , czyli  $v(f) = 0$  (pochodna stałej = 0)

**Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.**

**Pytanie 23.** Jak można w praktyce zrealizować taki operator?

Niech  $v \in T_p M$ ,  $v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

**Definicja 23.** Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie  $p \in M$  oznaczamy przez  $T_p M$  i nazywamy przestrzenią styczną.

Chcemy wyposażyć  $T_p M$  w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań. Niech  $v_1, v_2 \in T_p M$  i  $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$ . Wówczas

$$\begin{aligned} v_1 \diamond v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)] \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot v_1 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1))]. \end{aligned}$$

$T_p M$  wraz z działaniami  $(\diamond, \cdot)$  ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M, T_p M\}$$

nazywamy wiązką styczną.

**Pytanie 24.** Czy w  $TM$  możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?

Odpowiedź: NIE DA SIĘ

**Definicja 24.** Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie  $P$  oznaczamy przez  $D_p M$

Chcemy nadać  $D_p M$  strukturę przestrzeni wektorowej.

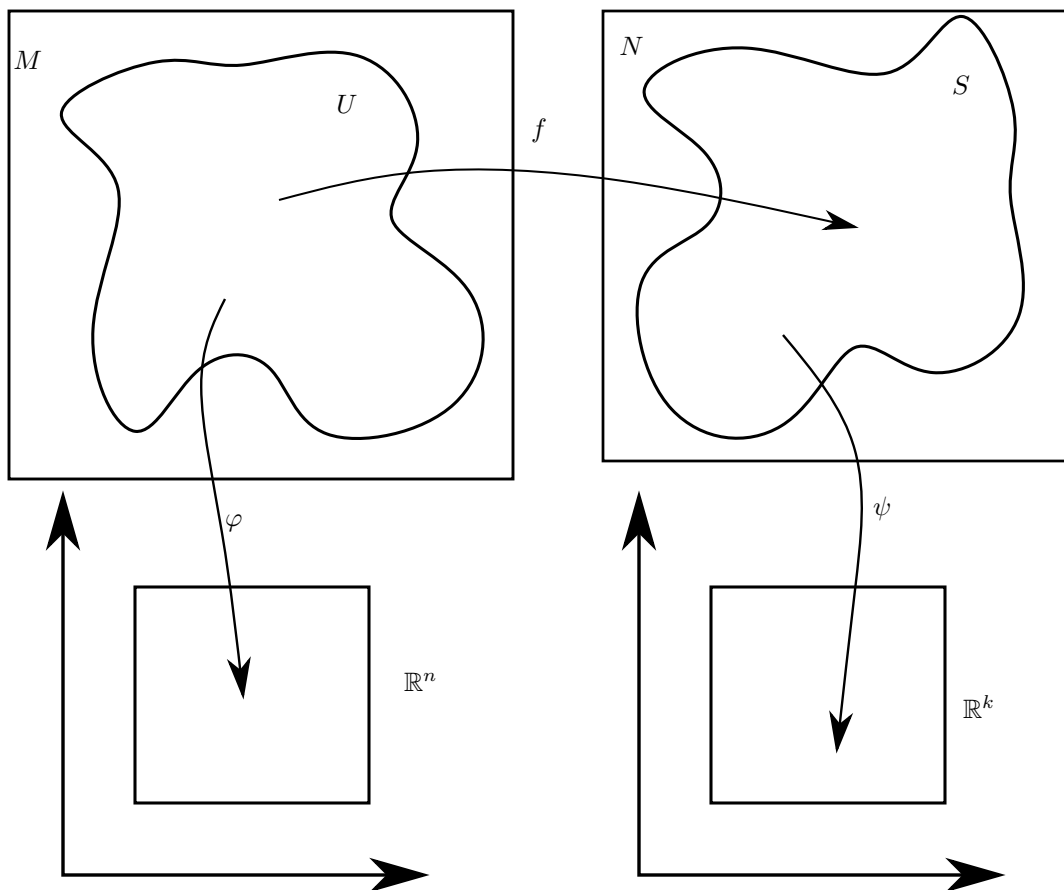
$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in D_p M, f \in C^\infty(M) &\implies (v_1 \diamond v_2)f \stackrel{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha \bowtie v_1)f &= \alpha \cdot v_1(f) \end{aligned}$$

**Pytanie 25.** Co to znaczy, że  $f$  - klasy  $C^\infty(M)$ ?

Jeżeli  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  - jest klasy  $C^\infty$ .

Związek między  $T_p M$ , a  $D_p M$  :

Niech  $v = 5e_x + 6e_y \in T_p M$ . Czy znajdziemy odwzorowanie z  $T_p M$  do  $D_p M$ , (które dokładnie jednemu  $v$  przyporządkowałoby jeden element).  $\rightarrow$  izomorfizm między  $T_p M$  i  $D_p M$ .



Rysunek 40:  $f$  nie musi być bijekcją jakby co

## 20.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - klasy  $\mathcal{C}^\infty(M)$

niech  $v(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , takie, że

$$\begin{aligned} \forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) &= v(f) + v(g) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{f \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(\alpha f) &= \alpha v(f) \\ \forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) &= f(p) \cdot v(g) + g(p)v(f). \end{aligned}$$

$v(\cdot)$  spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie  $p$ .

## 21 Wykład (24.05.2019)

Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$\begin{aligned}
 v &= [\sigma], v \in T_p M, v() \in D_p M \\
 v(f) &= \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} \\
 v() &= ? \cdot ? + ? \cdot ? + ? \cdot ? = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t))|_{t=0} = \\
 &= \frac{d}{dt} (\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Czyli jeżeli  $v \in T_p M$  i  $v \in [\sigma]$ , to wiemy, że

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1 + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2 + \dots + \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n = \\
 &= \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \\
 &= \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} = v(f).
 \end{aligned}$$

Zatem

$$v() = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

**Przykład 47.** Więc niech  $v = 2e_x + 3e_y \rightarrow v() = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ .

Wniosek: mając izomorfizm między  $T_p M$  i  $D_p M$  możemy zapisać bazy:

$$T_p M = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

To wtedy

$$D_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle.$$

np.  $v = 7e_r + 8e_\varphi \rightarrow v() = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \varphi}$  (często użyjemy bazy z  $D_p M$  jako bazy  $T_p M$ ).

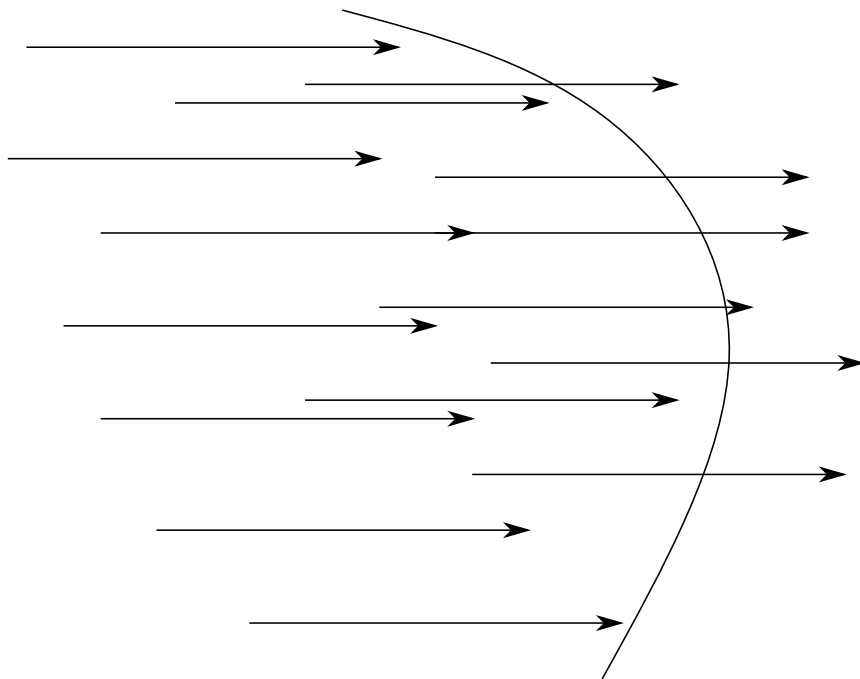
**Definicja 25.** Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Zbiór jednoform ( $p \in M$ ) oznaczamy przez  $T_p^* M$  (lub  $\Lambda^1(M)$ ,  $\Lambda^1(\theta)$ ,  $\theta \in M$ )

Skoro  $T_p^* M$  jest dualna do  $T_p M$ , to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną.  $T_p^* M = \langle dx^1, dx^2, \dots, dx^n \rangle$ , gdzie  $\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_j^i$

**Przykład 48.** Niech  $\Lambda^1(M) \rightarrow \omega = 7dx + 3dy$ ,  $v \in T_p M = 2 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y}$ , wówczas

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, v \rangle &= \left\langle 7dx + 3dy, 2 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= \left\langle 7dx, 2 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \left\langle dy, 2 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= 7 \cdot 2 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 7 \cdot 4 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \cdot 2 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 3 \cdot 4 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
 &= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4.
 \end{aligned}$$





Rysunek 41: Strumień przez balonik

**Przykład 49.**

$$v = A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz =$$

$$= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.$$

**Definicja 26.** Zbiór wszystkich odwzorowań  $T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez  $\Lambda^k(M)$  i nazywamy  $k$ -formami.

**Definicja 27.** Niech  $\alpha \in T_p^* M, \beta \in T_p^* M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$ .  
Odwzorowanie  $\wedge : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \Lambda^2(\theta), \theta \in M$  nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

**Przykład 50.** Niech  $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}, w = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$   
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja:  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ . Tzn.  $\alpha \wedge \alpha = 0$ . Ważny przykład:

**Przykład 51.**

$$\begin{aligned}\alpha &= A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\ \alpha \wedge \beta &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\ &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\ &+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\ &+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y) dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z) dz \wedge dx\end{aligned}$$

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

**Definicja 28.** Odwzorowanie  $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$  nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \rightarrow \mathbb{R} \\ (\text{funkcje nazywamy zero-formami } f \in \Lambda^0(\theta)) \\ \omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) &\implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \\ dd\omega &= 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).\end{aligned}$$

**Przykład 52.**  $f(r, \theta, \varphi)$  - funkcja z  $\mathbb{R}^3$  w  $\mathbb{R}^1$ .

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\ \alpha &= 7x^2 y dx \\ d\alpha &= d(7x^2 y) \wedge dx = \left( \frac{\partial}{\partial x} (7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx.\end{aligned}$$

**Przykład 53.** Niech  $F = -E_x dt \wedge dx - E_x dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

$$\begin{aligned}
dF &= \left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} dy - \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dx + \\
&+ \left( -\frac{\partial E_y}{\partial x} dx - \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dy + \\
&+ \left( -\frac{\partial E_z}{\partial x} dx - \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) \wedge dt \wedge dz + \\
&+ \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) \wedge dz \wedge dx + \\
&+ \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \\
&= \underbrace{\left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)}_{\text{rot} E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dy + \\
&+ \underbrace{\left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)}_{\text{rot} E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left( -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)}_{\text{rot} E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)}_{\nabla B} dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

*I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część)  $dF = 0$*

## 22 Wykład (28.05.2019)

**Definicja 29.** Niech  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T_p^*M \in \Lambda'(M)$ , wówczas  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(M)$  i dla  $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p^*M$ ,

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k; v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_1)\dots\alpha_k(v_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(v_k)\alpha_2(v_k)\dots\alpha_k(v_k) \end{bmatrix}.$$

Uwagi do operatora  $d$  ( $dd = 0$ ):  
Niech  $M = \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \in \Lambda^0(M)$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ ddf &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) dz \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dz \wedge dx = 0. \end{aligned}$$

Niech  $\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dz \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) dz \wedge dx \\ d d\alpha &= \left(\pm \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}\right)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= A_x dy \wedge dz + A_y dx \wedge dz + A_z dy \wedge dx \\ d\beta &= 0 \\ dd\beta &= 0. \end{aligned}$$

Niech  $M = \mathbb{R}^4$ ,  $A = \phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$ .

$$dA = \underbrace{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)}_{E_x} dx \wedge dt + \underbrace{\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right)}_{E_y} dy \wedge dt + \underbrace{\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right)}_{E_z} dz \wedge dt +$$

$$\underbrace{\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}_{B_z} dx \wedge dy + \underbrace{\left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)}_{B_x} dy \wedge dz + \underbrace{\left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)}_{B_y} dz \wedge dx$$

$$ddA = 0.$$

niech  $dA = F$

$$dF = 0.$$

Pytanie: niech  $M$  - rozmaitość wymiaru 3 (bo mamy bijekcję między  $\theta \in M$  i  $\mathbb{R}^3$ ). Czy istnieje  $\Lambda^4(M)$ ?

niech  $M = \mathbb{R}^3$

$$\Lambda^0(M) \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$$

$$\dim \Lambda^0(M) = 1$$

$$\Lambda^1(M) \quad \alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$\Lambda^1(\eta) = \underbrace{\langle dx, dy, dz \rangle}_3$$

$$\Lambda^2(M) \quad \beta = A_z dx \wedge dy + A_y dz \wedge dx + A_x dy \wedge dz$$

$$\Lambda^2(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz \rangle}_3$$

$$\Lambda^3(\eta) \quad \gamma = f dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\Lambda^3(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy \wedge dz \rangle}_1$$

Niech  $M = \mathbb{R}^4$ .

$$\Lambda^0(M) \quad f(t, x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\dim \Lambda^0(M) = 1$$

$$\Lambda^1(M) \quad \alpha = A_t dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$\dim \Lambda^1(M) = 4$$

$$\Lambda^2(M) \quad \beta = A_1 dt \wedge dx + A_2 dt \wedge dy + A_3 dt \wedge dz + B_1 dy \wedge dx + B_2 dz \wedge dx + C_1 dz \wedge dy$$

$$\dim \Lambda^2(M) = 6$$

$$\Lambda^3(M) : \quad \gamma = C_1 dy \wedge dt \wedge dx + C_2 dz \wedge dt \wedge dx + D_1 dz \wedge dt \wedge dy + E_1 dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\dim \Lambda^3(M) = 4$$

$$\Lambda^4(M) \quad \delta = g dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\dim \Lambda^4(M) = 1.$$

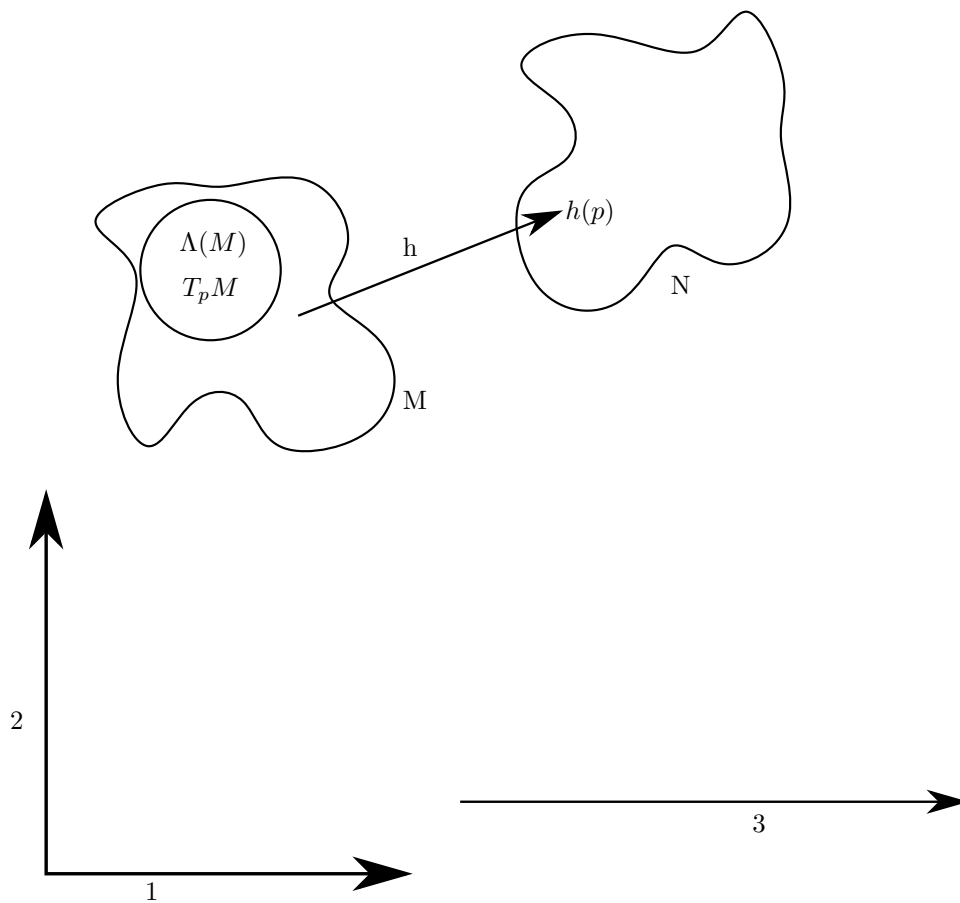
## 22.1 Pchnięcia i cofnięcia

**Definicja 30.** Niech  $M, N$  - rozmaitości  $\dim M = n, \dim N = k$  i niech  $h : M \rightarrow N$ . ( $h$  nie musi być bijekcją !!!)

Niech  $p \in M$ . Pchnięciem punktu  $p$  w odwzorowaniu  $h$  nazywamy punkt  $h_*(p) \stackrel{\text{def}}{=} h(p)$

**Przykład 54.** Niech  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = x + y$ ,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_*(p) = 3$$



$$M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, p = \frac{\pi}{2}.$$

$$h_x(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

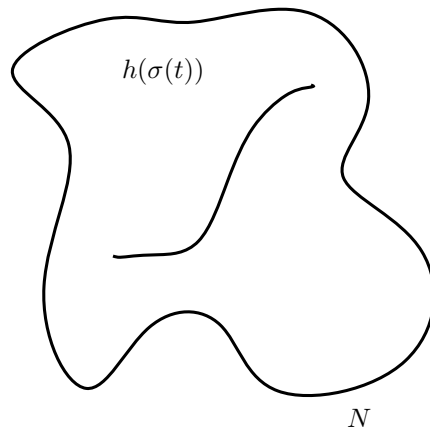
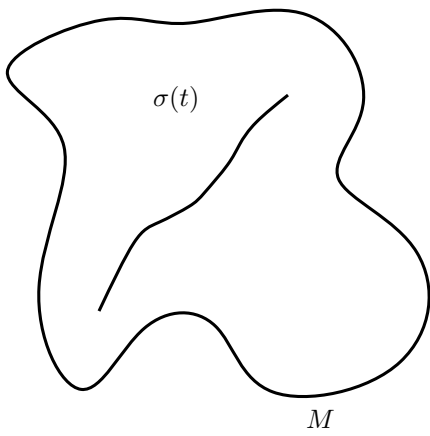
Niech  $\sigma(t)$  - krzywa na  $M$ . Pchnięciem krzywej  $\sigma$  w odwzorowaniu  $h$  nazywamy krzywą  $h_*(\sigma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} h(\sigma(t))$

Niech  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Cofnięciem funkcji  $f$  w odwzorowaniu  $h$  nazywamy funkcję

$$h^* f(p) = f(h(p)).$$

**Przykład 55.**  $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, f : N \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}, h(x, y) = x + y.$

$$h^* f(x, y) = f(h(x, y)) = \begin{bmatrix} 2(x + y) \\ x + y \end{bmatrix}.$$



**Definicja 31.** *Pchnięciem wektora  $V$  w odwzorowaniu  $h$  nazywamy wektor*

$$h_*V = [h(\sigma)], h_*v \in T_{h(p)}N.$$

**Przykład 56.** *Niech  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = x + 2y$ ,  $v = 2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}$ . Co to jest  $h_*v$ ?*  
 $p = (1, 2) = (\varphi^1(p), \varphi^2(p))$

$$\sigma(t) : \frac{d}{dt}(\varphi(\sigma(t)))|_{t=0}$$

$$\varphi(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 2t + 1 \\ 3t + 2 \end{bmatrix}$$

$$h[\sigma(t)] = 2t + 1 + 2(3t + 2)$$

$$h[\sigma(t)] = 8t + 5$$

$$[h[\sigma(t)]] = 8\frac{\partial}{\partial t} \in t_s N.$$

$\dim M = n$ ,  $\varphi(\sigma(t)) = (\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t)))$ ,  $v \in T_p M$ .

$$v = \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^2} \dots \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$\frac{d(\varphi \circ h(\sigma(t)))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ h \circ \varphi^{-1}\sigma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\tilde{h} \circ \tilde{\sigma}(t)).$$

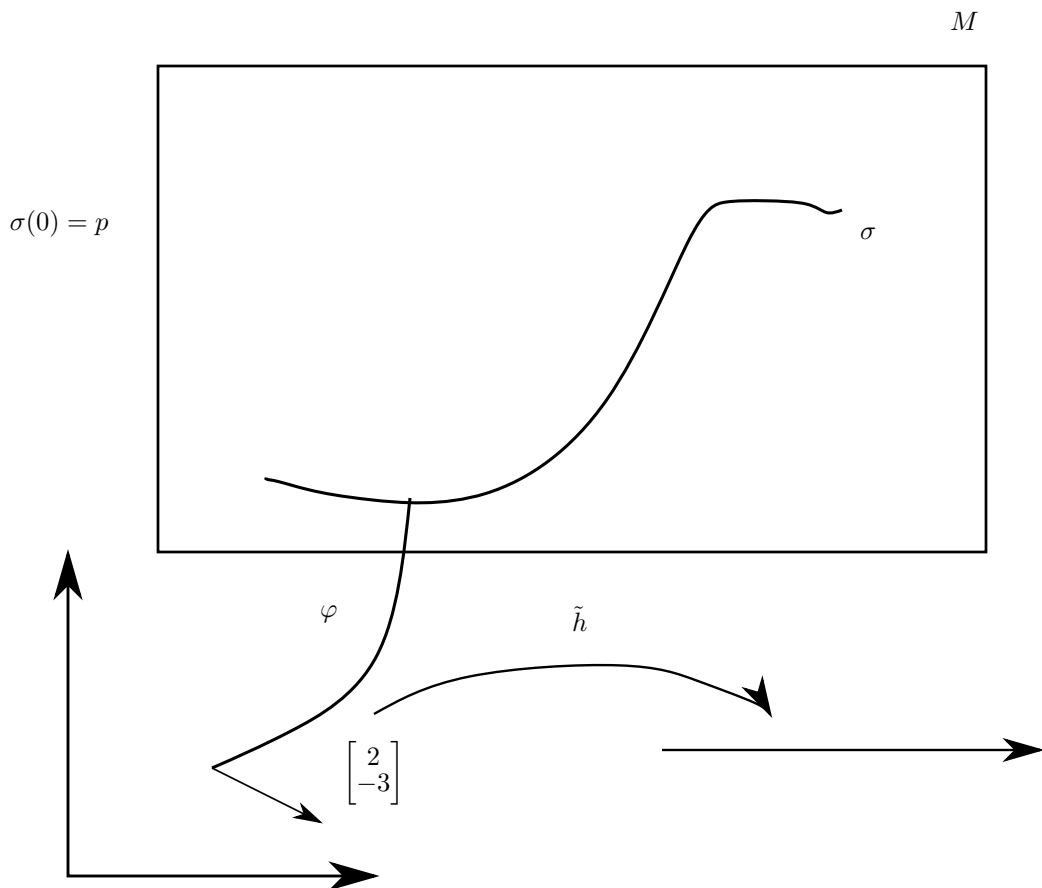
$$= \frac{d}{dt}\tilde{h}(\tilde{\sigma}_1(t), \tilde{\sigma}_2(t), \dots, \tilde{\sigma}^n(t))|_{t=0} = \tilde{h}'_{\tilde{\sigma}(0)} \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}|_{t=0} = \tilde{h}' \cdot v.$$

Czyli ostatecznie  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}$ ,  $\tilde{h}(x, y) = x + 2y \rightarrow \tilde{h}(x, y) = [1, 2]$ .

$$h_*v = [1, 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 6 = 8\frac{\partial}{\partial t}.$$

Niech  $\alpha \in \Lambda^1(?)$  - pytanie: czy formy się pcha, czy cofa?





Rysunek 42:  $\tilde{h} = \psi h \varphi^{-1}$

## 23 Wykład (31.05.2019)

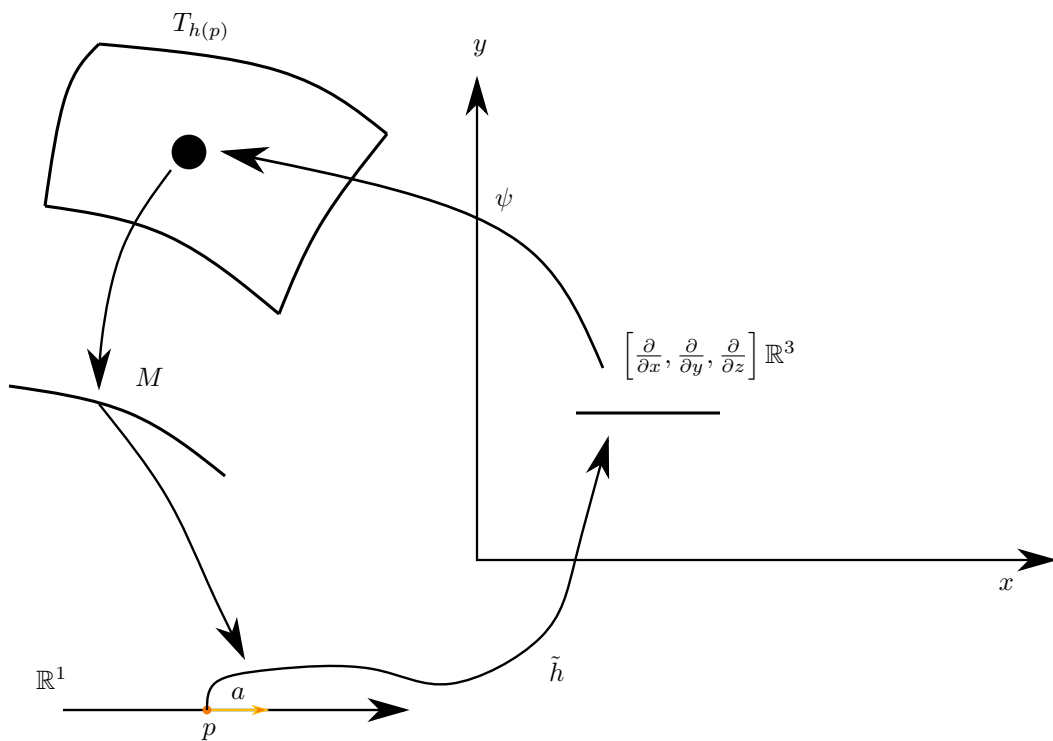
**Przykład 57.** (na pchnięcie wektora)

Niech  $M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$

Niech  $p \in \mathbb{R}^1$ , niech  $v \in T_p M, v = a \frac{\partial}{\partial t}$ .  $v = [\sigma], \tilde{\sigma}(t) = at + p, \sigma(c) = p, \frac{d\tilde{\sigma}(t)}{dt}|_{t=0} = a$ .

$$h_x \sigma = \begin{bmatrix} f(at + p) \\ g(at + p) \\ r(at + p) \end{bmatrix}, h_x v = [h_x \sigma], \frac{d}{dt}(\tilde{h}_x \sigma)|_{t=0}.$$

$$h_x v = \begin{bmatrix} af'(p) \\ ag'(p) \\ ar'(p) \end{bmatrix} = af'(p) \frac{\partial}{\partial x} + ag'(p) \frac{\partial}{\partial y} + ar'(p) \frac{\partial}{\partial z}.$$

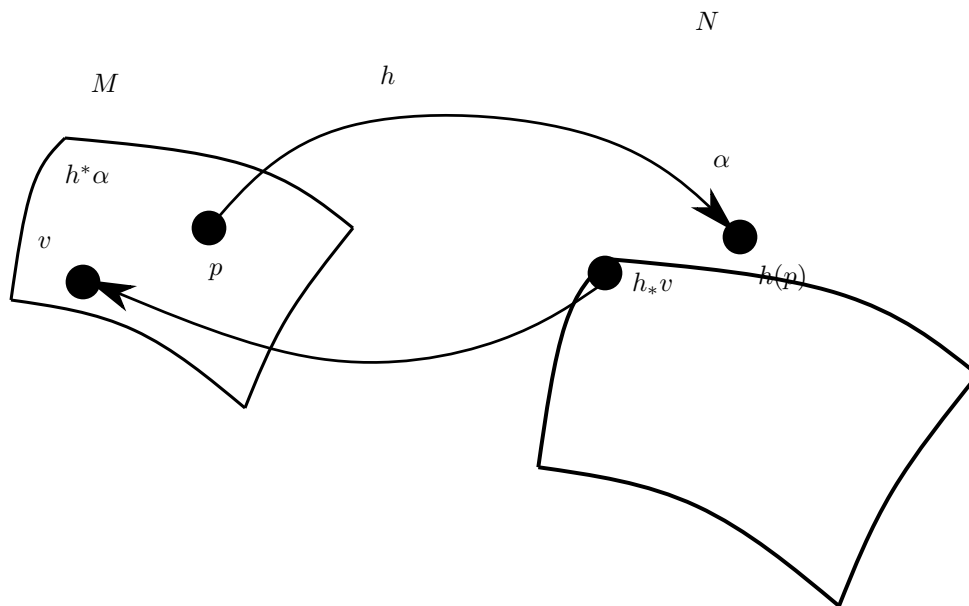


**Definicja 32.** Niech  $M, N$  - rozmaitości,  $h : M \rightarrow N$  i niech  $p \in M, \alpha \in T_{h(p)}^* N$ . Cofnięciem formy  $\alpha$  w odwzorowaniu  $h$  nazywamy formę  $h^* \alpha \in T_p^* M$ , taką, że  $\langle h^* \alpha, v \rangle = \langle \alpha, hv \rangle \quad \forall_{v \in T_p M}$  i ciągła. Jeżeli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$  i  $v_1, \dots, v_k \in T_p(M)$ , to

$$h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k), v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \langle h^* \alpha_1, v_1 \rangle & \langle h^* \alpha_2, v_1 \rangle & \dots & \langle h^* \alpha_k, v_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h^* \alpha_k, v_k \rangle & \langle h^* \alpha_k, v_k \rangle & \dots & \langle h^* \alpha_k, v_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = (h^* \alpha_1) \wedge (h^* \alpha_2) \wedge \dots \wedge h^*(\alpha_k).$$



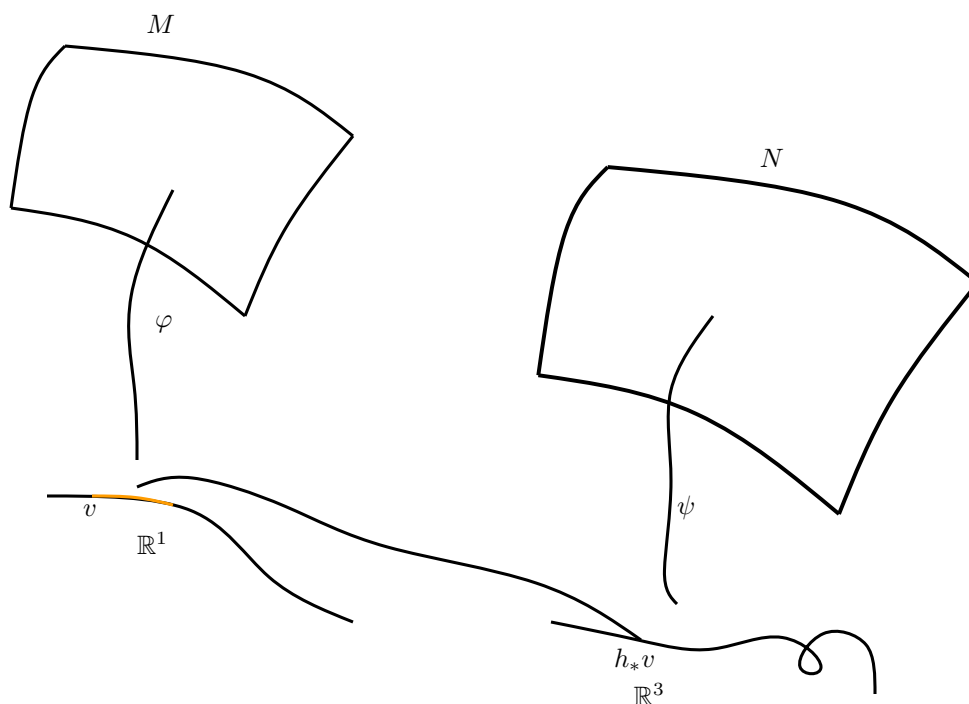
Rysunek 43:  $\langle h^*\alpha, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha, h_*v \rangle$

**Przykład 58.** (wstępny)

Niech  $\alpha = 3(x^2 + y^2)dx - 2xdy + 2z^2dz, \alpha \in \Lambda^1(N)$  (jednoformy nad  $N$ ,  $\dim N = 3$ , chociaż można dać więcej jak się chce).

$h(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{bmatrix}$ . Czym jest  $h^*\alpha$ ?

$$\langle h^*\alpha, v \rangle = \langle \alpha, h_*v \rangle.$$



Niech  $v \in T_p M$  i  $v = a \frac{\partial}{\partial t}$ . Zatem  $h_x v = a \cos(p) \frac{\partial}{\partial x} - a \sin(p) \frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1 \frac{\partial}{\partial t}$ .

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha, h_* v \rangle &= \langle 3(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dx - 2(\sin(t)) dy + 2(t^2) dz, h_x v \rangle = \\
 &= \left\langle 3dx - 2\sin(t)dy + 2t' dz, a \cos(t) \frac{\partial}{\partial x} - a \sin(t) \frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1 \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{t=p} = \\
 &= 3a \cos(t) + 2a \sin^2(t) + at^2|_{t=p} = \\
 &= \left\langle (3 \cos(t) dt + 2a \sin^2(t) + at^2) |_{t=p}, a \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \\
 &\text{czyli } h^* \alpha = (3 \cos(t) + 2 \sin^2(t) + t^2) dt
 \end{aligned}$$

.

Na skróty!

$$\begin{aligned}
 x &= \sin(t) \\
 y &= \cos(t) \\
 z &= t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dx &= \cos(t) dt \\
 dy &= -\sin(t) dt \\
 dz &= dt.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} h^* \alpha &= 3 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) \cos(t) dt - 2 \sin(t) (-\sin t dt) + 2t^2 dt \\ &= (3 \cos(t) + 2 \sin^2(t) + 2t^2) dt. \end{aligned}$$

**Przykład 59.** Niech  $M = \mathbb{R}^4, N = \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ c &= 1 \\ h: \quad t &= \gamma(t' - vx') \\ x &= \gamma(x' - vt') \\ y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned} dt &= \gamma(dt' - vdx') \\ dx &= \gamma(dx' - vdt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz'. \end{aligned}$$

Chcemy cofnąć naszą formę. Na fizyce nie używamy słowa cofnięte.

$$\begin{aligned} F' &= -E_x (\gamma(dt' - vdx')) \wedge \gamma(dx' - vdt') - E_y \gamma(dt' - vdx') \wedge dy' = \\ &= -E_x \gamma^2 (1 - v^2) dt' \wedge dx' - E_y \gamma dt' \wedge dy' + E_y \gamma v dx' \wedge dy' = \\ &= -E_x \frac{1}{1-v^2} (1 - v^2) dt' \wedge dx' - E_y \gamma dt' \wedge dy' + \gamma v E_x dx' \wedge dy' \\ F' &= -E'_x dt' \wedge dx' - E'_y dt' \wedge dy' + B'_z dx' \wedge dy' \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma E_y \\ B'_z &= \gamma v E_y. \end{aligned}$$

Obserwacja: Niech  $\alpha \in \Lambda^1(N)$ ,  $\dim N = k$ , niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$  i  $h : M \rightarrow N$ . Wówczas

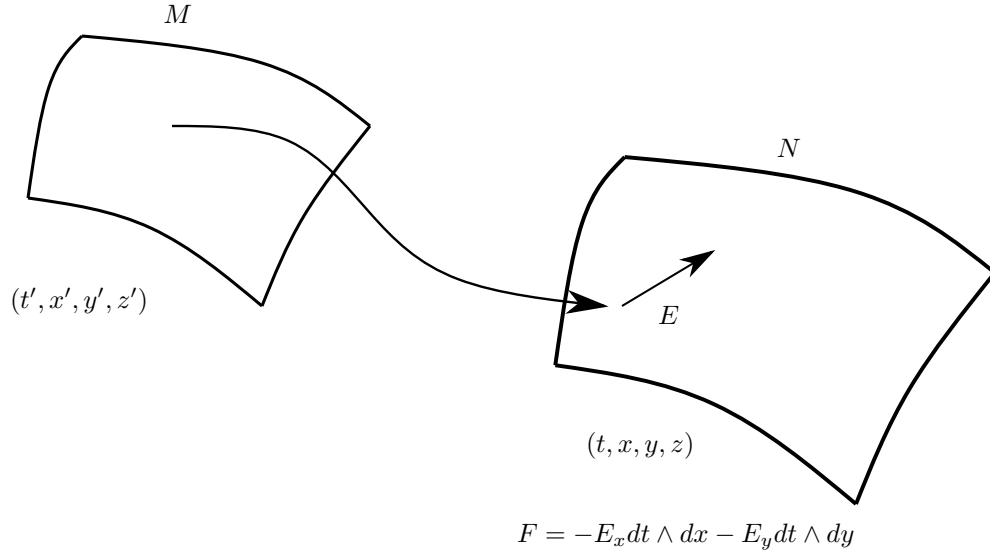
$$h^* f \in \Lambda^0(M).$$

Oraz

$$d(h^* f) = h^*(df).$$

*Dowód.* Skoro  $f \in \Lambda^0(N)$ , to  $f(x^1, x^2, \dots, x^k)$ ,  
 $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$ .

$$\langle h^*(df), v \rangle = \langle df, h_* v \rangle, v \in T^p M.$$



Niech  $V \in T_p M$ .

$$\tilde{h}(t_1, \dots, t_n) = \begin{bmatrix} h_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ h_k(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli  $v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n}$ , to  $h_* v = \left( [h'] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}}.$

$$\begin{aligned} h_x v &= \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \left( \frac{\partial h_1}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \\ &+ \dots + \left( \frac{\partial h_k}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned}\langle df, h_* v \rangle &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \left( \frac{\partial h_1}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n} a_n \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \left( \frac{\partial h_k}{\partial t^1} a_n + \dots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n} a_n \right) = \\ &= \left\langle df(h_1(t_1, \dots, t_n), h_2(t_1, \dots, t_n), \dots, h_k(t_1, \dots, t_n)), a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle\end{aligned}$$

.

□

## 24 Wykład (04.06.2019)

W ostatnim odcinku:

$M, N$  - rozmaitości,  $\dim M = n, \dim N = k, h : M \rightarrow N, \langle h^* \alpha, v \rangle = \langle \alpha, h_* v \rangle$  i ogólnie, jeżeli  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$  to  $\langle h^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k), v_1, \dots, v_n \rangle = \langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, h_* v_1, \dots, h_* v_n \rangle$ .

**Przykład 60.** Niech  $N = \mathbb{R}^2$  i  $M = \mathbb{R}^1, \alpha = 7dx \wedge dy \in \Lambda^2(N)$ ,

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \end{bmatrix} \rightarrow (x = 2t, y = 3t \implies dx = 2dt, dy = 3dt).$$

$$h^* \alpha = 7 \cdot 2dt \wedge 3dt = h^* \alpha = 0.$$

Ostatnio chcieliśmy pokazać, że  $d(h^* f) = h^*(df)$ . To jest istotne w kontekście tej dwuformy przekształcenia transformacji Lorentza co była ostatnio.  $(d(h^* F) = 0 \implies dF = 0, h^* F \xrightarrow{h} F)$ .

Wzięliśmy sobie  $f : N \rightarrow \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_k)$ . Potem mieliśmy  $h : M \rightarrow N : h(t_1, \dots, t_n) =$

$$\begin{bmatrix} h^1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ h^k(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \text{ i chcieliśmy pokazać, że } h^*(df) = d(h^* f).$$

Wiemy, że  $\langle h^*(df), v \rangle = \langle df, h_* v \rangle$  ( $v \in T_p M : v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n}$ ). Przepchnięcie wektor-

$$\text{ka } h_* v = \begin{pmatrix} [h'] \\ [a_n] \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h^k}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \left( a_1 \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots +$$

$$\left( a_1 \frac{\partial h^k}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle df, h_* v \rangle &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^2} a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} a_n + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} a_n = \\ &= a_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) + \dots + a_n \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) = \\ &= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) dt^1 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) dt^n, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle = \\ &= \left\langle \underbrace{f(h^1(t^1, \dots, t^n), h^2(t^1, \dots, t^n), \dots, h^k(t^1, \dots, t^n))}_{h^* f}, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle = \langle d(h^* f), v \rangle \end{aligned}$$

co daje

$$d(h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)) = h^*(d(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)) \quad \square.$$



## 24.1 Bazy w $T_p M$

Obserwacja: Niech  $M$  - rozmaitość i  $\langle | \rangle$  - iloczyn skalarny. Niech  $e_1, \dots, e_n$  - baza  $T_p M$ . Wówczas, jeżeli  $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$  i  $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$  ( $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ ).

$$\begin{aligned} \langle v | w \rangle &= \langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \rangle = \\ &= a_1 b_1 \langle e_1 | e_1 \rangle + a_1 b_2 \langle e_1 | e_2 \rangle + \dots + a_1 b_n \langle e_1 | e_n \rangle + \dots + a_n b_n \langle e_n | e_n \rangle = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \langle e_1 | e_2 \rangle & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & & \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_n | e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz  $[g_{ij}]$  nazywamy tensorem metrycznym  $\det [g_{ij}] \stackrel{\text{ozn}}{=} g \cdot [g_{ij}]^{-1} \stackrel{\text{ozn}}{=} [g^{ij}]$  - macierz odwrotna.

W zwykłym  $\mathbb{R}^4$ :  $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ , p. Minkowskiego:  $g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \mu, \nu = 0, \dots, 3$

Bazy w  $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} M = \mathbb{R}^2, & & N = \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x, y \\ e_x, e_y \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} & \xrightarrow{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} & \begin{bmatrix} r, \varphi \\ e_r, e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\ g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & [?] \end{array}$$

$$h^*(e_r) = \left( [h'] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, h^*(e_\varphi)$$

$$h(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}, h' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$h^*(e_r) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}_{e_x, e_y}, e_r = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y$$

$$z = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y$$

$$h^*(e_\varphi) = [h'] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{bmatrix}, e_\varphi = -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \langle e_1 | e_2 \rangle \\ \langle e_2 | e_1 \rangle & \langle e_2 | e_2 \rangle \end{bmatrix}, [g_{ij}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \langle e_x | e_x \rangle = 1, \langle e_x | e_y \rangle = 0$$

$$\langle e_r | e_r \rangle = \langle \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y | \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y \rangle = \cos^2 \varphi \langle e_x | e_x \rangle + \sin^2 \varphi \langle e_y | e_y \rangle$$

$$\langle e_r | e_\varphi \rangle = \langle \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y | -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y \rangle = 0$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|^2 = \langle e_\varphi | e_\varphi \rangle = \langle -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y | -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y \rangle = r^2.$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| = r, [g_{ij}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

baza  $\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle$  nie jest bazą ortonormalną!!!

$$e_x, e_y, e_z \rightarrow g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ - jest fajnie.}$$

$$e_r, e_\theta, e_\varphi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ r^2 & & \\ & r^2 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \|e_\theta\| = r, \|e_\varphi\| = r \sin \theta$$

**Przykład 61.** Dostałem wektorek  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  w sferycznych. Ale w jakiej konkretnie bazie?

W fizyce mierzone wielkości np. wektorowe podajemy zawsze we współrzędnych ortonormalnych.  
 We współrzędnych sferycznych mamy dwie bazy: - ortogonalną:  $e_r, e_\theta, e_\varphi : \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$   
 - ortonormalną:  $i_r, i_\theta, i_\varphi : \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ . Więc jeżeli ktoś powiedział, że dostał  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  to znaczy, że ma  $2 \frac{\partial}{\partial r} + 3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 4 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

Obserwacja: niech  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  i niech  $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$  i niech  $g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$  - tensor metryczny. Wówczas wiemy, że  $\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] [w] = \underbrace{\left[ a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + a_3 g_{31}, \sum_{i=1}^3 a_i g_{i2}, \sum_{i=1}^3 a_i g_{i3} \right]}_{\langle v|}$

Ale w sumie to mogą wziąć coś takiego  $\langle v|$ .

$$\left( \sum_{i=1}^3 a^i g_{i1} \right) dx^1 + \left( \sum_{i=1}^3 a^i g_{i2} \right) dx^2 + \left( \sum_{i=1}^3 a^i g_{i3} \right) dx^3 = .$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i g_{ij} dx^j = a^i g_{ij} dx^j.$$

Zapomniałem o sumach, bo  $a^i b_i \stackrel{\text{ozn}}{=} a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$ , w odróżnieniu od  $a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + \dots$  (Konwencja sumacyjna Einsteina).

Ozn.  $\sum_{i=1}^3 a^i g_{ik} \stackrel{\text{ozn}}{=} a^i g_{ik} = a_k$

**Definicja 33.** niech  $M$  - rozmaitość wymiaru  $n$ ,  $g_{ij}$  - tensor metryczny na  $M$ , operacją  $\sharp : T_p M \rightarrow T_p^* M$  taką, że dla  $v = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ ,

$$v^\sharp = a^i g_{i1} dx^1 + a^i g_{i2} dx^2 + \dots + a^i g_{in} dx^n, i = 1, \dots, n.$$

zadaje izomorfizm między  $T_p M$  a  $T_p^* M$ .

**Przykład 62.**  $v = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \theta} + 9 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

$$\alpha \in T_p^* M = v^\sharp = 7q_{11} dr + 8q_{22} d\theta + 9q_{33} d\varphi = 7dr + 8r^2 d\theta + 9r^2 \sin^2 \theta d\varphi.$$

## 25 Wykład (07.06.2019)

Mając  $\sharp$  możemy zdefiniować operację odwrotną:

**Definicja 34.**

$$\flat : T_p^*M \rightarrow T_pM, \text{ tak, że } \alpha \in T_p^*M, \alpha = v_i dx^i$$

to wtedy

$$T_pM \ni v \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^\flat = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie:  $v^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j$ , to mamy

$$\alpha^\flat = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Przykład 63.**

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v &= a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{\partial}{\partial \varphi}, \alpha = v^\sharp = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} v^j dx^i = \\ &= \frac{1}{2} (g_{11} v^1 dx^1 + g_{12} v^2 dx^1 + g_{13} v^3 dx^1) + (g_{21} v^1 dx^2 + g_{22} v^2 dx^2 + g_{23} v^3 dx^2) + \\ &+ (g_{31} v^1 dx^3 + g_{32} v^2 dx^3 + g_{33} v^3 dx^3). \end{aligned}$$

czyli mamy

$$\alpha = v^\sharp = 1 \cdot a dr + r^2 b d\theta + r^2 \sin^2 \theta c d\varphi.$$

Dostaliśmy z laboratorium wektor:  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a i_r + b i_\theta + c i_\varphi = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . Chcemy ten wektorek podnieść.

$$\begin{aligned} \alpha &= v^\sharp = (g) dr + \left( r^2 \frac{b}{r} \right) d\theta + \left( r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r \sin \theta} c \right) d\varphi = \\ &= a dr + r b d\theta + r \sin \theta c d\varphi \end{aligned}$$

**Przykład 64.** Niech  $\alpha = a dr + b d\theta + c d\varphi$ . Chcemy zrobić wektorek  $v$ , który jest dokładnie tyle:

$$v = \alpha^\flat = (1 \cdot a) \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} b \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} c \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Czyli ta nasza } \alpha^\flat = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{r^2} \\ \frac{c}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \stackrel{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}}{=} a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b}{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{c}{r \sin \theta} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Okazuje się, że } \alpha^\flat = \begin{bmatrix} b \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \stackrel{i_r, i_\theta, i_\varphi}{=}$$

**Definicja 35.** niech  $M = \mathbb{R}^3$ ,

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{b} (df)^b \in T_p M$$

nazywamy gradientem funkcji  $f : \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (df)^b$ , gdzie  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $f$  - klasy  $C^k(M)$

**Przykład 65.**  $f(r, \theta, \varphi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} (df)^b &= 1 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Sila tego polega na tym, że jak dostaniemy na ulicy tensor metryczny, to przez 3 minuty w cieniu możemy obliczyć np. gradient funkcji:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix}.$$

**Przykład 66.** Dostaliśmy tensor metryczny i chcemy obliczyć  $\nabla f(\xi, \eta, \delta)$ ,  $\begin{bmatrix} \heartsuit & & \\ & \Delta & \\ & & \square \end{bmatrix}$ .

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\heartsuit}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\square}} \frac{\partial f}{\partial \delta} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll} M = \mathbb{R}^3 & \\ f \rightarrow \Lambda^0(M) & \dim \Lambda^0(M) = 1 \downarrow d \\ T_p M \xleftrightarrow[\#]{b} \Lambda^1(M) & \dim \Lambda^1(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^2(M) & \dim \Lambda^2(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^3(M) & \dim \Lambda^3(M) = 1. \end{array}$$

**Definicja 36.** Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$ ,  $[g_{ij}]$  - tensor metryczny. Operację  $\Lambda^L(M) \rightarrow \Lambda^{n-L}(M)$  nazywamy gwiazdką "Hodge'a" i definiujemy następująco:

$$* (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_L}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_L j_L} \in_{j_1 j_2 \dots j_L k_1 k_2 \dots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-L}},$$

gdzie  $\in_{i_1, \dots, i_n} = \{ \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) \text{ jeżeli } i_m \neq i_p, \quad 0 \text{ w.p.p} \}$

**Przykład 67.**  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} *(dx) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{1j_1} \in_{j_1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \in_{1k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \\ &= \frac{1}{(3-1)!} g^{11} [\in_{123} dx^2 \wedge dx^3 + \in_{132} dx^3 \wedge dx^2] = \frac{1}{2} [1 \cdot dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^2] \\ &= dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Czyli  $*(dx) = dy \wedge dz$ .

$$\begin{aligned} *(dy) &= *(dx^2) = \frac{1}{(3-1)!} g^{22} \in_{2k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \\ g^{22} [\in_{213} dx^1 \wedge dx^3 + \in_{231} dx^3 \wedge dx^1] &= \frac{1}{(3-1)!} 1 [-dx^1 \wedge dx^3 + 1 dx^3 \wedge dx^1] = \\ &= dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Więc  $*(dy) = dz \wedge dx$ .

$$\begin{aligned} *(dz) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{33} \in_{3k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{2} g^{33} [\in_{321} dx^2 \wedge dx^1 + \in_{312} dx^1 \wedge dx^2] = \\ &= \frac{1}{2} 1 [-dx^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^2]. \end{aligned}$$

Więc  $*(dz) = dx \wedge dy$

**Przykład 68.**  $M = \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi), [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} *(dr) &= r^2 \sin \varphi d\theta \wedge d\varphi \\ *(d\theta) &= r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} d\varphi \wedge dr \\ *(d\varphi) &= \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Pytanko jest takie: Chcemy zapytać co to jest  $*(dx \wedge dy)$ ?

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-2)!} g^{1j_1} g^{2j_2} \in_{j_1 j_2 k_1} dx^{k_1} = \\ &= \frac{1}{(3-2)!} g^{11} g^{22} \in_{123} dx^3. \end{aligned}$$

Więc  $*(dx \wedge dy) = dz$ .

A np.  $*(dx \wedge dz)$  :

$$*(dx \wedge dz) = \frac{1}{(3-2)!} \epsilon_{132} dx^2 = -dy$$

$$*(dr \wedge d\theta) = r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r^2} d\varphi$$

$$*(dr \wedge d\varphi) = -r^2 \sin \theta \frac{1}{1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{\sqrt{g}}{(3-3)!} g^{1j_1} g^{2j_2} g^{3j_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} \epsilon_{123} = 1$$

$$*(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) = r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}.$$

**Definicja 37.**  $M = \mathbb{R}^3$

niech  $v \in T_p M$ , operację

$$\text{rot}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (* (dv^\sharp))^\flat$$

nazywamy rotacją wektora  $v$  i oznaczamy  $\text{rot } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \times v$ .

Operację

$$\text{div } v \stackrel{\text{def}}{=} d(*v^\sharp)$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy  $\text{div } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \cdot v$ .

Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na  $M$  takim, że  $\dim M = 4$ , bo  $*(\Lambda^2(M)) \rightarrow \Lambda^2(M)$

Pozakonkursowo: chcemy zrobić z funkcji funkcję:

$$f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \longrightarrow \underset{\text{operator Laplace}}{*d*df}}.$$

## 26 Wykład (11.06.2019)

**Przykład 69.** Zastanówmy się jak wygląda rotacja wektora w układzie sferycznym.  $M = \mathbb{R}^3$ .

$$v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{*} \Lambda^1(M) \rightarrow T_p M \rightarrow \coprod_i$$

$$\text{rot} v = (*dv^\sharp)^\flat$$

$$\text{na początek dostajemy w smsie } \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix}_{i_r, i_\theta, i_\varphi} = v = A^r \frac{\partial}{\partial r} + A^\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + A^\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

chcemy sobie zrobić jednoformę, która jest podniesionym wektorkiem:  $\alpha = v^\sharp =$

$$= g_{rr} A^r dr + g_{\theta\theta} \frac{1}{r} A^\theta d\theta + g_{\varphi\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} A^\varphi d\varphi = A^r dr + r A^\theta d\theta + r \sin \theta A^\varphi d\varphi$$

$$d\alpha = (A^r_{,\theta} - (r A^\theta)_{,r}) d\theta \wedge dr + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) d\varphi \wedge dr + ((r A^\theta)_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta}) d\varphi \wedge d\theta$$

$$* (dr \wedge d\theta) = \sin \theta d\varphi, \quad *(d\theta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2} dr, \quad *(d\varphi \wedge dr) = \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

$$* d\alpha = ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \frac{1}{r^2 \sin \theta} dr + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \frac{1}{\sin \theta} d\theta +$$

$$+ ((r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}) \sin \theta d\varphi.$$

notacja:  $\square, \heartsuit = \frac{\partial \square}{\partial \heartsuit}$ . Zostały nam jeszcze tylko dwie operacje.

$$(*d\alpha)^\flat = ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \cdot 1 \cdot \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} +$$

$$+ \left( (r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta} \right) \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Czyli

$$\text{rot} \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \\ \frac{1}{r \sin \theta} (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \\ \frac{1}{r} ((r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}) \end{bmatrix}.$$

**Przykład 70.** To może teraz dywergencja rzutem na taśmę.

$$\coprod = v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{\flat} \Lambda^0(M)$$

$$\text{div}(v) = *(d(*v^\sharp))$$

$$\begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = v, \alpha = v^\sharp$$

$$\alpha = A^r dr + r A^\theta d\theta + A^\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$* dr = r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

$$* d\theta = \sin \theta d\varphi \wedge dr$$

$$* d\varphi = \frac{1}{\sin \theta} dr \wedge d\theta$$

$$* \alpha = (A^r r^2 \sin \theta) d\theta \wedge d\varphi + (r \sin \theta A^\theta) d\varphi \wedge dr + (r A^\varphi) dr \wedge d\theta$$

$$d(*\alpha) = ((A^r r^2 \sin \theta)_{,r} + (r \sin \theta A^\theta)_{,\theta} + (r A^\varphi)_{,\varphi}) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( (A^r r^2 \sin \theta)_{,r} + (r \sin \theta A^\theta)_{,\theta} + (r A^\varphi)_{,\varphi} \right).$$

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \varphi) &\xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{*} \Lambda^0(M) \\ \alpha = df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\ *\alpha &= \left( \frac{\partial f}{\partial r} r^2 \sin \theta \right) d\theta \wedge d\varphi + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\varphi \wedge dr + \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right) dr \wedge d\theta \\ d(*\alpha) &= \left( \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{,r} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{,\varphi} \right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ *(d(*\alpha)) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{,r} + \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{,\theta} + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{,\varphi} \right). \end{aligned}$$

**Przykład 71.**  $M = \mathbb{R}^3, f \in \Lambda^0(M)$ .

$$\begin{aligned} ddf &= 0 \\ ddf &= d \left( \left( (df)^\flat \right)^\sharp \right) \implies \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0. \end{aligned}$$

Niech teraz  $v \in \Lambda^1(M)$ .

$$\begin{aligned} d \left( * \left( (dV^\sharp)^\flat \right)^\sharp \right) &= d(*(*(*d(v^\sharp)))) = d(*(*(*d(v^\sharp)))) = dd(v^\sharp) = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) &= 0. \end{aligned}$$

Weźmy sobie jakąś funkcję:  $f : (t, x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}$ .



Zobaczmy jak  $*d(*df)$  wygląda w  $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ .

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_L}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_L j_L} \in_{j_1 \dots j_k k_1 \dots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-L}}$$

$$*(dx^0) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!} g^{00} \in_{0k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}, i, k = 0, \dots, 3$$

$$*(dx^0) = -\frac{1}{3!} 3! dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$*(dt) = -dx \wedge dy \wedge dz$$

$$*(dx^1) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!} g^{11} \in_{1k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}$$

$$*(dx) = 3! \frac{1}{3!} dy \wedge dt \wedge dz$$

$$*(dy) = dt \wedge dx \wedge dz$$

$$*(dz) = dx \wedge dt \wedge dy$$

$$*df = -\frac{\partial f}{\partial t} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dt \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dt \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dt \wedge dy$$

$$d*df = \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Na koniec:

Mamy dwuformę pola elektromagnetycznego:

$$F = -E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dy + B_z dy \wedge dx.$$

$dF = 0$  to jest pierwsza część równań Maxwella

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ j^x \\ j^y \\ j^z \end{bmatrix}$$

$$j = -gdt + j^x dx + j^y dy + j^z dz$$

$$d(*F) = *j \text{ a to druga.}$$