

Notatki z Analizy II L2019, FUW

Jakub Korsak

10 września 2019

1 Wykład (26.02.2019)

1.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Potencjał pola niestacjonarnego } \mathcal{V}(x, y, z, t)$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 - \text{Natężenie pola } \mathcal{E}(x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

$$\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

.

Definicja 1. (Ciągłość Heine)

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T: X \rightarrow Y$ jest ciągle w punkcie x_0 , jeżeli

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0}, T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

Uwaga: $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pytanie 1. Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłość w \mathbb{R}^1 ?

Przykład 2. Niech funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0, 0)$? dla trajektorii I:

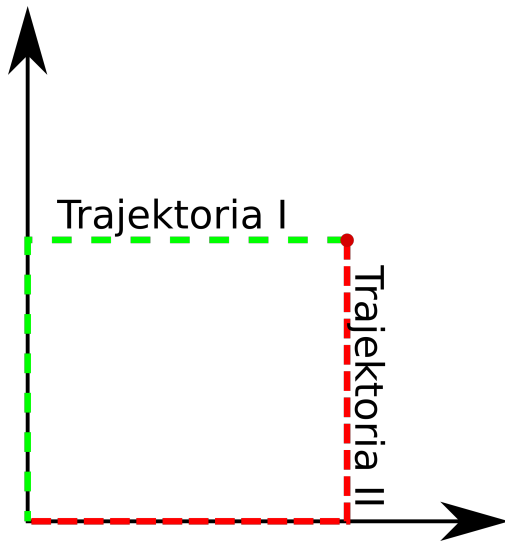
$$\lim_{y_n \rightarrow 0} (\lim_{x_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (\lim_{y_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0} f(0, 0)$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Definicja 2. (Ciągłość Cauchy)

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X ,

(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y .

Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \rightarrow Y$ - ciągle, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x \in X} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$$

Dowód. Heine \iff Cauchy

\implies (przez sprzeczność)

Zakładamy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} \quad T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$$

oraz

$$\exists_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{\delta > 0} \quad \exists_{x \in X} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geq \varepsilon \quad (1)$$

Skoro $T(x_n) \rightarrow T(x_0) \quad \forall_{x_n \rightarrow x_0}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (1), to dla $\varepsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\delta = 1 :$$

$$\exists_{x_1} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} :$$

$$\exists_{x_2} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{3} :$$

$$\exists_{x_3} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geq \varepsilon$$

\vdots

\vdots

$$\delta = \frac{1}{n} :$$

$$\exists_{x_n} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \rightarrow x_0$, ale $T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$, więc mamy sprzeczność. \square

\Leftarrow Wiemy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_x \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon, \quad (2)$$

czyli:

$$\forall_{\delta_1} \quad \exists_N \quad \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \quad (3)$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$, czyli, że

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \quad \exists_{N_1} \quad \forall_{n > N_1} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1 \text{ (dla } x_n \rightarrow x_0 \text{)}$$

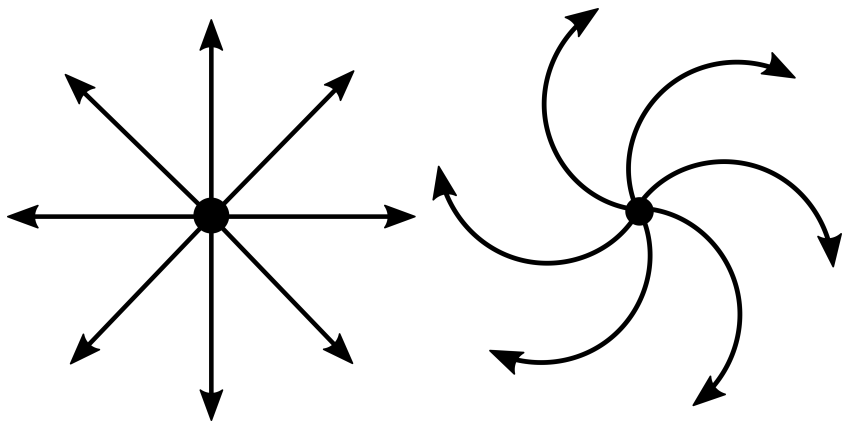
Przyjmijmy $\varepsilon = \varepsilon_1$. Oznacza to, że \exists spełniająca warunek (2) dla ε_1 . Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (3), czyli wiemy, że

$$\exists_{N > N} \quad \forall_{n > N} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (2), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1$$

\square



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej]

1.2 Różniczkowalność:

Definicja 3. Pochodna cząstkowa:

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} - otwarty, $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $x \in \mathcal{O}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k , jeżeli istnieje granica

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x} f \right|_{x=x_0}$$

Przykład 3. Pochodna cząstkowa

Niech $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

Uwaga: do policzenia pochodnej cząstkowej potrzebujemy układu współrzędnych.

biegunowy $\rightarrow f(r, \varphi)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r, \varphi+h) - f(r, \varphi)}{h}. \end{aligned}$$

Definicja 4. *Pochodna kierunkowa:*

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} - otwarte, $x_0 \in \mathcal{O}$, $e \in \mathcal{O}$, $T : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

Obserwacja: Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $e_x = (1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $e_y = (0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

Przykład 4. *Problemy z pochodną kierunkową:*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}. \text{ Wówczas } x_0 + te = (0 + t1, 0), \ x_0 = (0, 0), \ e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

$$\textbf{Uwaga: } f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \text{ Pochodna: } \nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$

2 Wykład (01.03.2019)

Definicja 5. Norma

Niech X - przestrzeń wektorowa.

Odwzorowanie $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\forall_{x \in X} \quad \|x\| \geq 0 \quad (4)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \forall_{x \in X} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (5)$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (6)$$

$$\forall_{x \in X} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (7)$$

Przestrzeń X wraz z normą $\|\cdot\|$ nazywamy przestrzenią unormowaną (spoiler: przestrzenią Banacha).

Przykład 5. Przykładowa norma:

$$\|v\| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X = \mathbb{R}^n.$$
$$X \ni v \implies \|v\| = \sup(|x^1|, \dots).$$

Jeżeli $f \in C([a, b])$, to norma wygląda tak:

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} (f(x)).$$

Przykład 6.

$$\mathbb{R}_2^2 \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = v$$

$$\|v\| = \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Uwaga: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\forall_{x, y \in X} d(x, y) = \|x - y\|$, natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 7. metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a| \|x - y\| = ad(x, y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 6. *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ przy } \|h\| \rightarrow 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 7. *Niech $U \subset X, V \subset Y$*

U, V - otwarte, $T : U \rightarrow V$

$x, h \in U$

Mówimy, że T - różniczkowalne w punkcie x_0 , jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\forall_{h \in U} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, a L_{x_0} - liniowe : $X \rightarrow Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0 . Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T .

Uwaga: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx,$$

a tego nie da się przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx \right) h(x).$$

Przykład 8. $T(x+h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$

$$1. T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ czyli } x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \implies T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} T'(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$2. T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = [-, -, -] \quad (9)$$

$$3. T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x_0 \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$. \quad (11)$$

Przykład 9.

$$f(x, y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) &= \\ &= (x_0 + h_x)(y_0 + h_y)^2 - x_0 y_0^2 = \\ &= x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = \\ &= [y_0^2, 2x_0 \cdot x_0] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y. \end{aligned}$$

Pytanie 2. Czy $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$?

Weźmy $\left\| \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, wówczas

$$x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leq x_0 \|h\|^2 + \|h\|^3 + 2y_0 \|h\|^2 = \|h\|^2 (x_0 + 2y_0 + \|h\|),$$

zatem

$$\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2 (|x_0| + 2y_0 + \|h\|)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

$$f(x, y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że

$$y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Uwaga: skąd wiemy, że gdy $h \rightarrow 0$, to $\|h\| \rightarrow 0$?

Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?

odpowiedź za tydzień

Twierdzenie 1. Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód. skoro f - różniczkowalna, to

$$\forall_{h \in U} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \frac{r(x, h)}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \quad (12)$$

$$\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x \cdot h_y}}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Niech $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, $|h_x| > |h_y| \implies \|h\| = |h_x|$

$$\frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{h_x} \not\rightarrow 0.$$

□

Pytanie 3. Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?

Przykład 10.

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dla $f(x, y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} f = 0$.

$h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0, 0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + \sqrt{h_x h_y}$,
gdzie $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$.

Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \rightarrow 0$.

Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\rightarrow 0$ przy $h_x \rightarrow 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2. Niech $O \subset \mathbb{R}^n$, O - otwarty. $f : O \rightarrow Y$, $x_0 \in O$.

Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $i = 1, \dots, n$ i są ciągłe w x_0 , wtedy

$$\forall_{h \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0, h)}{||h||} \rightarrow 0$

Dowód. (dla $O = \mathbb{R}^3$)

$$\text{Niech } x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\ & = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \end{aligned}$$

tw. o w. średniej

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1) h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) h^3 = \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^2 + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^3 \end{aligned}$$

gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[$, $c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[$, $c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci $\cos h^i$, a $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h^i}{\|h\|} = 0$ dla

normy np. $\|h\| = \max |h^i| \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \rightarrow 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 \rightarrow 0$$

Czyli np. $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} - \text{ciągła} \right)$

□

3 Wykład (05.03.2019)

Przykład 11. Uwaga: jeżeli np. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, to znaczy, że

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}, f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \text{ wówczas}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 12.

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x, y), h) = \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x, y), h) \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x, y), h). \end{aligned}$$

Czyli

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

3.1 Uzupełnienie:

Stwierdzenie 1. Niech V - przestrzeń wektorowa z normą $||\cdot||$ i $x_0 \in V$, wówczas

$$f(x) = ||x||, f : V \rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{ciągła w } x_0.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_x \quad d_x(x, x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ale

$$d_x(x, y) = ||x - y||, d_{\mathbb{R}^1}(x, y) = |x - y|.$$

Czyli pokażemy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \delta \forall x \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \varepsilon.$$

Ale wiemy, że

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

czyli $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} > \|x - y\| \geq \| \|x\| - \|y\| \| \geq 0$

□

Pytanie 4. Niech $f(x, y) = 7x + 6y^2$ i $g(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$. Wówczas $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ile wynosi pochodna?

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3. Niech $G : U \rightarrow Y, U \subset X, U$ - otwarte,

X - przestrzeń wektorowa unormowana,

$F : G(U) \rightarrow Z, G(U) \subset V$

G - różniczkowalna w $x_0 \in U$,

F - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.

Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w x_0 oraz

$$(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)} G'(x_0).$$

Dowód.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{\|h_1\|_x} \rightarrow 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{\|h_2\|_y} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\ &= F(G(x_0)) + F'(G(x_0)) \cdot (G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + \\ &= r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)). \end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned} F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) &= \\ &= F'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0)) \cdot r_1(x_0, h_1) + \\ &= r_2 \cdot (G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)). \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\frac{r_3}{\|h_1\|} \rightarrow 0,$$

ale

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{\|h_1\|} &= F'(G(x_0)) \frac{r_1(x_0, h_1)}{\|h_1\|} + \\ &+ \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}}_{\rightarrow 0 \text{ kiedy } h_1 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)\|}{\|h_1\|}}_{\text{jest ograniczony}}, \end{aligned}$$

ale jeżeli $h_1 \rightarrow 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem $F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 \square

Przykład 13. $f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$, $h(t) = (f \circ \varphi)(t)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Policzmy H' . $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}$, $\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn.

$$H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix} \Big|_{x=2t^2, y=t^3} \cdot \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3) 3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$$

Przykład 14. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) \end{bmatrix}$ $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Niech $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej H , ale

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right] \Big|_{x=\Psi_1(r, \varphi), y=\Psi_2(r, \varphi)}$$

4 Wykład (08.03.2019)

4.1 Konwencja z ćwiczeń z fizyki:

Przykład 15. Mamy funkcję $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$

$$\begin{aligned}\Psi_1(r, \varphi) &= x(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) &= y(r, \varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Przykład 16.

$$\begin{aligned}f(x, y) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ f(x, y) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

4.2 Interpretacja geometryczna f'

Przykład 17. Rozważmy zbiór

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \text{ np. } f(x, y) = x^2 + y^2 : P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}.$$

Załóżmy, że $f(x, y)$ - taka, że P_c można sparametryzować jako

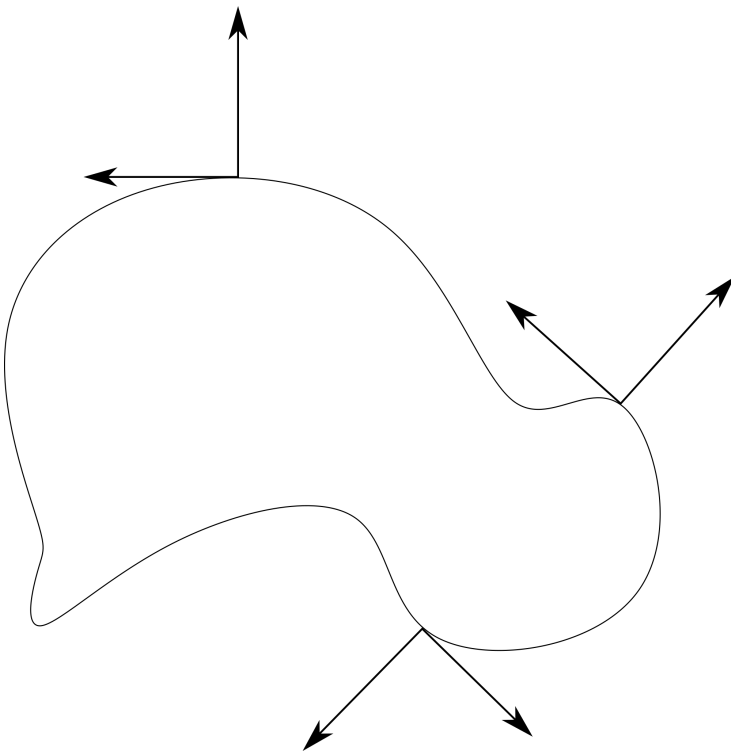
$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in D, \text{ to znaczy, że } P_c = \{(x(t), y(t)), t \in D\}$$

Przykład 18.

Niech $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$. Wtedy $P_c = \{(c \cdot \cos t, c \cdot \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$

$f(x(t), y(t)) = c \quad \forall_{t \in D}$ - powierzchnie ekwipotencjalne

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= 0, \\ \begin{bmatrix} 2x, 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \cdot \sin t \\ c \cdot \cos t \end{bmatrix} &= 0.\end{aligned}$$



Rysunek 3: Trajektoria kluki

Definicja 8. *Pochodna mieszana*

$$f(x, y) = x^2 y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y^3, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

Przypadek???

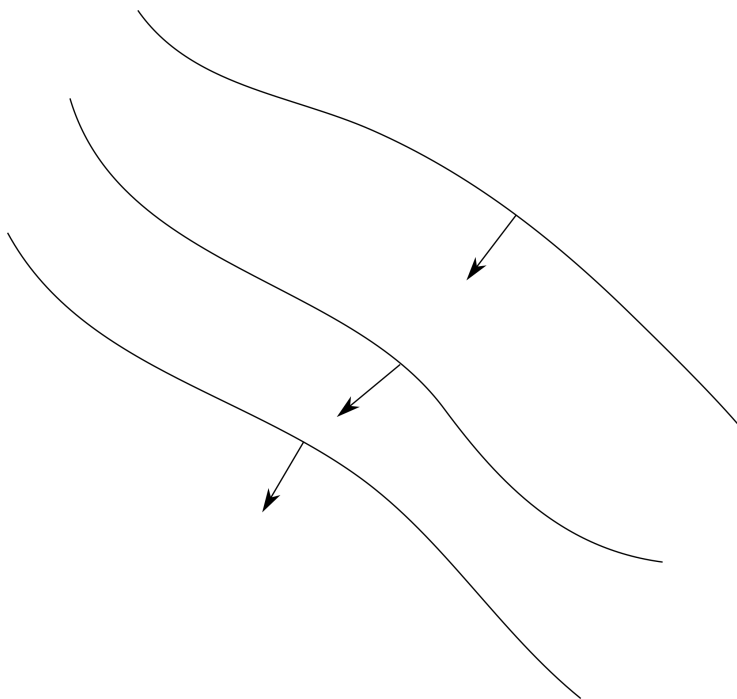
Twierdzenie 4. *(Uogólnione twierdzenie Schwarz)*

Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, otwarty i $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, wówczas

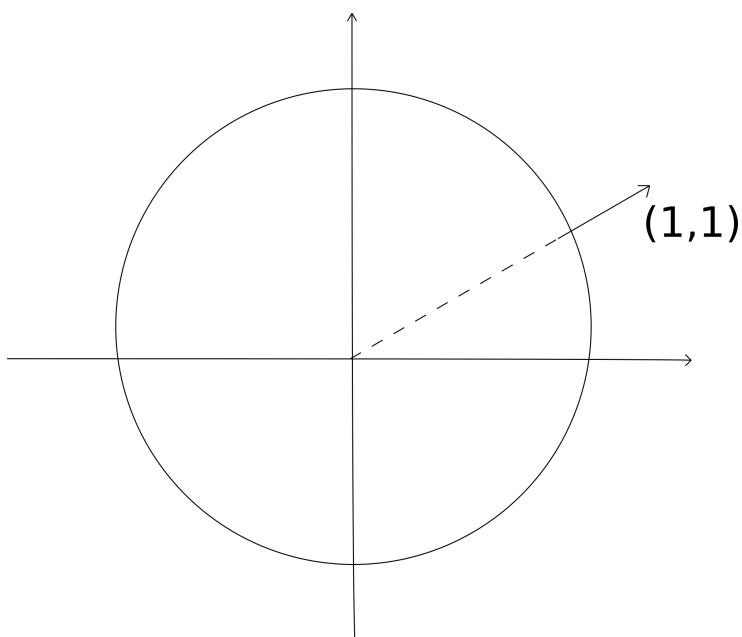
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i, j = 1, \dots, n$$

Dowód. Dowód dla $n = 2$ Niech

$$w(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y),$$



Rysunek 4: Powierzchnia ekwipotencjalna I



Rysunek 5: Powierzchnia ekwipotencjalna II

$$\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$$

wówczas

$$\begin{aligned} w &= \varphi(x + h) - \varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi)h = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \right] h = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \right) hk, \\ &\text{gdzie } x < \xi < x + h, \quad y < \eta < y + k \end{aligned}$$

Niech

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= f(x + h, y) - f(x, y) \\ w(x, y) &= \Psi(y + k) - \Psi(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\eta_1)k = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, \eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_1) \right] k = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \right) kh, \end{aligned}$$

czyli

$$\exists_{\xi} \quad \xi \in]x, x + h[, \quad \xi_1 \in]x, x + h[, \quad \eta \in]y, y + k[, \quad \eta_1 \in]y, y + k[.$$

Jeżeli $h \rightarrow 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \eta_1) \right),$$

to

$$\xi \rightarrow x, \xi_1 \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \eta_1 \rightarrow y,$$

czyli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

jeżeli każda z tych wielkości jest ciągła. □

4.3 Wzór Taylora (konstrukcja)

Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty

$\varphi(t) = f(x_0 + th)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$.

Dla

$$h = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}, \varphi(t) = f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + th^2, \dots, x_0^n + th^n),$$

mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x^1} \right|_{x=x_0+th} h_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x^2} \right|_{x=x_0+th} h_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x^n} \right|_{x=x_0+th} h_n = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{x_0+th} h_i \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{x_0+th} h_j h_i \\ &\vdots \\ \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} &= \sum_{i^1, \dots, i^k}^n \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{i^1} \dots \partial x^{i^k}} h_{i^1} \dots h_{i^k}\end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) = \varphi'(0)(t-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(t-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k}(t-0)^k + r(\dots),$$

czyli:

$$\begin{aligned}\varphi(1) - \varphi(0) &= \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k!} + r(\dots) \\ f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h_i h_j + \dots\end{aligned}$$

5 Wykład (12.03.2019)

Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + \dots +$$

$$+ \frac{1}{p!} \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0, h),$$

$$\vdots$$

$$i_{p+1}=1$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{p+1}=1}}^n \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}} (x_0 + \theta h) h^{i_1} \dots h^{i_{p+1}}.$$

$0 < \theta < 1$
wersja \mathbb{R}^n dla
" $x_0 < c < x_0 + h$ "

Obserwacja 1. (bardzo ważna zależność!)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{p+1}(x_0, h)}{\|h\|^p} \rightarrow 0.$$

Przykład 19. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$, $f'(x, y) = [2xy^3, 3x^2 y^2]$.

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, to wtedy

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} h^1 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} h^1 h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} h^2 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} h^2 h^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} h_1, h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

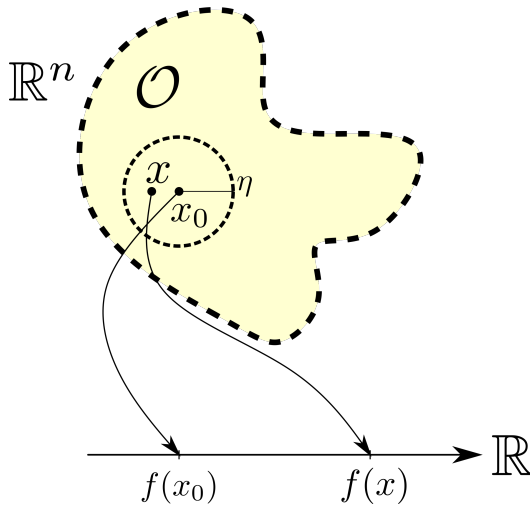
5.1 Minima i maksima

Przypomnienie: Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in K(x_0, \eta) \\ K(x_0, \eta) \subset \mathcal{O} \\ x \neq x_0}} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_h \quad ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0 + h) > f(x_0).$$



Rysunek 6: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 2. jeżeli $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

Uwaga: jeżeli $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ i U - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na $\text{int}(U)$ oraz na $U - \{\text{int}(U)\}$

Dowód. Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0 , to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_h(t) \right|_{t=0} = 0,$$

czyli dla $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, $h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} g_h(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \dots, x_0^n + th^n) \right|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\forall_h: ||h|| < \eta, \end{aligned}$$

to znaczy:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Uwaga: jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

Twierdzenie 5. *Niech*

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{O} &\subset \mathbb{R}^n, \\ x_0 &\in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} - \text{otwarty}, \\ f &\in C^{2p}(\mathcal{O}), \\ f'(x_0) &= 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

oraz spełniony jest warunek

$$\begin{array}{c} \exists \\ c > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists \\ \eta > 0 \end{array} \quad \forall_{h \in K(x_0, \eta)} : \quad \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^n \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geq c \|h\|^{2p} (\leq c \|h\|^{2p})$$

to wtedy f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. (wersja uproszczona dla minimum i dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$).

Jeżeli f spełnia założenia, to wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{(2p)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p}=1}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} + r_{2p+1}(x_0 + h)}_{(*)} \quad (13)$$

Wiemy też , że

$$\begin{array}{c} \exists \\ c > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists \\ \eta > 0 \end{array} \quad (13)(*) \geq c \|h\|^{2p} .$$

Chodzi o to, żeby reszta
nie mogła tego przekroczyć

Chcemy pokazać, że

$$\begin{array}{c} \exists \\ \eta \end{array} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \left| r_{2p+1}(x, h) \right| \leq \frac{c}{2} \|h\|^{2p} .$$

albo 7,
albo 2019

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{i_1=1 \dots i_{2p+1}=1}^n \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0 + \theta h)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p+1}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{tu potrzebne założenie, że } f \in C^{2p+1} \end{array} \right.$$

Zauważmy, że $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \rightarrow 0$, ale zatem

$$\forall_{M > 0} \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad \frac{r_{2p+1}(x_0 + h)}{\|h\|^{2p}} < M,$$

czyli

$$\left| \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{\|h\|^{2p}} \right| < M.$$

$$\forall_M \quad \exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad \left| r_{2p+1}(x_0, h) \right| < M \|h\|^{2p}$$

czyli jak przyjmiemy $M = \frac{c}{2}$ to dostajemy

$$\exists_{\eta} \quad \forall_{\|h\| < \eta} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{c}{2} \|h\|^{2p}$$

□

Uwaga: dlaczego warunek $(-|-) > c\|h\|^{2p}$, a nie po prostu $(-|-) > 0$?

Przykład 20.

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Badamy: $f(0 + h) - f(0) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$ Czyli

$f(0 + h) - f(0) \star 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.

$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ - minimum, $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ - równo, coś takiego - punkt siodłowy.

Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\exists_c [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geq c \|h\|^2,$$

bo dla

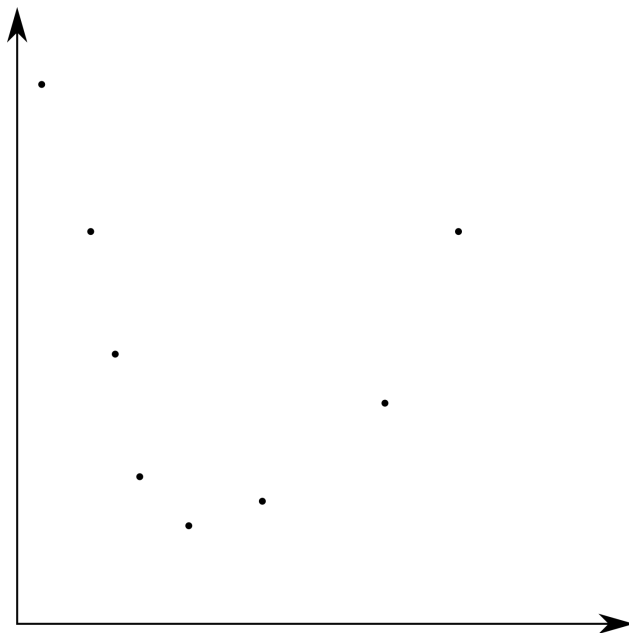
$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geq c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$$

5.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \end{bmatrix}$$

6 Wykład (15.03.2019)



Rysunek 7: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 9. Niech $L : V \rightarrow W, L$ - liniowe, $(V, \|\cdot\|_v), (W, \|\cdot\|_w)$ - unormowane. Mówimy, że L jest ograniczone, jeżeli

$$\exists_{A>0} \quad \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A \|x\|_v.$$

Przykład 21. dla $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists_A \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

ale

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

Twierdzenie 6. $(L - \text{ograniczone}) \iff (L - \text{ciągłe})$

Dowód. \Leftarrow

Wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0}, \exists_{\delta}, \forall_{x, x' \in V}, \quad \|x - x'\|_v < \delta \implies \|L(x) - L(x')\|_w < \varepsilon,$$

chcemy pokazać, że:

$$\exists_{A>0} \cdot \forall_{x,x' \in V} \quad \|L(x-x')\| \leq A\|x-x'\|,$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.

Ale

$$\|L(x-x')\| = \underbrace{\left\| L\left(\frac{x-x'}{\|x-x'\|}\right) \frac{\delta}{2} \right\| \left\| \frac{\|x-x'\|2}{\delta} \right\|}_{\text{własność liniowości i normy}} \leq \varepsilon \frac{\|x-x'\|2}{\delta}$$

Co wiemy o $\left\| \frac{x-x'}{\|x-x'\|} \frac{\delta}{2} \right\|_v < \delta$?

$$\forall_{x,x' \in V} \|L(x-x')\|_w \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x-x'\|_v$$

Szukane $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ istnieje! □

Dowód. \implies

Wiemy, że

$$\exists_A \cdot \forall_{x,x' \in V} \quad \|L(x-x')\| \leq A\|x-x'\| \quad (14)$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \rightarrow x_0$, to $L(x_n) \rightarrow L(x_0)$, ale

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w = \|L(x_n - x_0)\|_w \leq A\|x_n - x_0\| \text{ (bo (14))}$$

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w \leq A\|x_n - x_0\| \text{ (wszystko dąży do 0)}$$

□

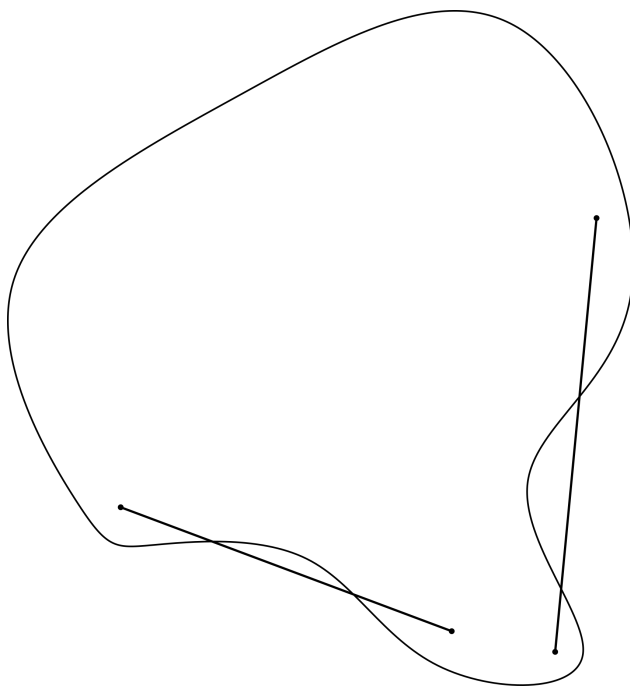
Definicja 10. *Wielkość*

$$\inf_A \{ \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A\|x\|_v \}$$

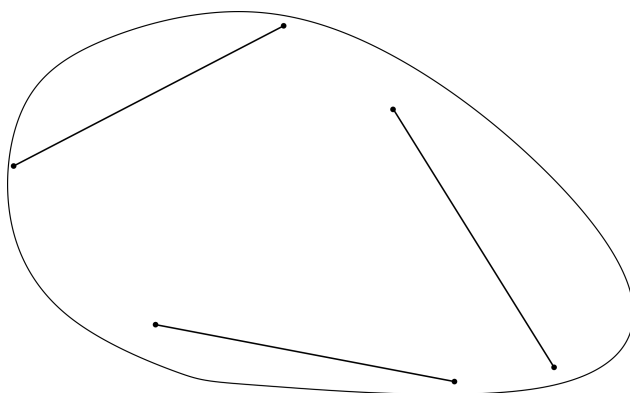
nazywamy normą odwzorowania L i oznaczamy $A \stackrel{ozn}{=} \|L\|$.

Definicja 11. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ - jest zbiorem wypukłym, jeżeli

$$\forall_{a,b \in U} \quad [a,b] \stackrel{def}{=} \{a(1-t) + bt, t \in [0,1]\} \subset U$$



Rysunek 8: zbiór wklęsły



Rysunek 9: zbiór wypukły

Stwierdzenie 3. Niech $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, U$ - wypukłe,

$$\exists_M \quad \forall_{x \in U} \|f'(x)\| \leq M,$$

to

$$\forall_{a, b \in U} \|f(b) - f(a)\|_n \leq M \|b - a\|_m$$

(jakiegokolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)

Dowód. niech $\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0, 1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, czyli

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

zatem

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0)\| &= \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \quad \text{Tw. Lagrange!} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1)(1-0) \\ g'_2(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g'_n(c_n)(1-0) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1) \\ g'_2(c_2) \\ \vdots \\ g'_n(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\| \end{aligned}$$

$0 < c_i < 1$

Ale $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rightarrow \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leq \|f'(\gamma(t))\| \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leq} M$

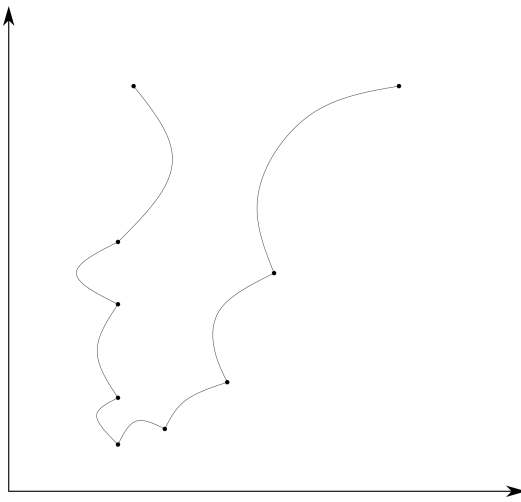
Czyli $\forall_{t \in [0,1]} \|g'(t)\| \leq M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|$

□

Definicja 12. Niech X - unormowana: $P : X \rightarrow X, P$ - ciągła na X .

Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$
 $\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Twierdzenie 7. Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.



Dowód. Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez \tilde{x} . Mamy:

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \quad \exists_{N_1} \quad \forall_{n > N_1} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \quad (15)$$

$$\forall_{\varepsilon_2 > 0} \quad \exists_{N_2} \quad \forall_{n > N_2} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \quad (16)$$

P - ciągle, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x'} : \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo (15)}$$

Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (17)$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leq d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (18)$$

$$\text{Ale z (15) wynika, że } \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (19)$$

Zatem znając ε z (17) przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z (16) i dzięki temu mamy (18) \square

Definicja 13. Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \rightarrow X$ nazywamy *związanym*, jeżeli:

$$\exists_{q \in [0, 1[} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d(P(x), P(y)) \leq qd(x, y) \quad (20)$$

Twierdzenie 8. (Zasada Banacha o lustrach)

Jeżeli $P : X \rightarrow X$, P - zwężające, to

$$1. \quad \forall_{x_0 \in X} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\} - \text{Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \quad (21)$$

$$2. \quad \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \quad (22)$$

$$3. \quad \forall_m \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (23)$$

Przykład 22. (Uwaga)

(P - nie musi być ciągle) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*
- lustra w łazience koło sali 1.01 \rightarrow można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód. ad. 2

Założmy, że

$$\exists_{\tilde{x}_1, \tilde{x}} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$$

Wtedy

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leq q \leq 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{sprzeczność!}$$

□

Dowód.

Obserwacja 2.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leq \\ &\leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq q^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$?

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leq \\ &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leq \\ &\leq \dots \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (q^{n+m-1} + \dots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq q^n \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leq q < 1}{\leq} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

$$\text{Czyli } d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X . Czyli czy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Założmy, że $m > n$ i $m = n + k$. Wtedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n \rightarrow \tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow d(\tilde{x}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$. \square

7 Wykład (19.03.2019)

Twierdzenie 9. (o lokalnej odwracalności)

Niech

$$f : E \rightarrow E, E - \text{otwarty}, E \subset \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(E), \\ \exists_{a,b \in E} : f(a) = b \text{ i } f'(a) - \text{odwracalna } (\det(f'(a)) \neq 0),$$

to wtedy:

1. $\exists_{U,V \subset E} \quad \exists_{a \in U, b \in V} \quad U, V - \text{otwarte}, f - \text{bijekcja między } U, V$
2. $\exists_{g: V \rightarrow U} \quad \forall_{x \in V} \quad f(g(x)) = x,$
3. $g \in \mathcal{C}^1(V).$

Uwaga: dowód składa się z trzech części:

- Pokażemy, że $\exists_{U,V} : f - \text{bijekcja na } U, V$
- Pokażemy, że $U, V - \text{otwarte}$
- Pokażemy, że $\exists_{g: V \rightarrow U}, g - \text{różniczkowalna na } V \text{ i ciągła}.$

Przykład 23. $f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
 $\det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, ale $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ (czyli funkcja jest okresowa)

Dowód. Część I

Szukamy $U, V : f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V$.

Skoro $f'(a) - \text{odwracalne}$, to znaczy, że $\exists_{(f'(a))^{-1}}$, zatem

$$\exists_{\lambda} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1.$$

Wiemy, że $f'(x) - \text{ciągła w } x = a$, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_x, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon$$

Położmy $\varepsilon = \lambda$.

Oznacza to, że

$$\exists_{\delta_\lambda} \forall_x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że $f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V$.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E$$

Pytanie 5. Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)

dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwięzające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\forall_{y \in V} \quad \exists_{x \in U} : f(x) = y$$

Uwaga: o f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U .
Policzmy $\varphi'_y(x)$

$$\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x)),$$

więc

$$\begin{aligned} \|\varphi'_y(x)\| &= \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leq \\ &\leq \|(f'(a)^{-1})\| \|f'(a) - f'(x)\| \leq \\ &\leq \forall_{x \in U} \frac{1}{2\lambda} \lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pamiętamy, że jeżeli $\exists_M \|\varphi'_y(x)\| \leq M$, to $\forall_{x,y} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$

Zatem skoro $\|\varphi'_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$, to

$$\forall_{x_1, x_2 \in U} \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

więc φ - zwięzający na U , więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\forall_{y \in V}$. Zatem f - bijekcja między U i V . \square

Część II

Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) $U = K(a, \delta_1)$, więc

$$\exists_{x_0 \in U} \quad \exists_r K(x_0, r) \subset U$$

lub równoważnie

$$\|x - x_0\| \leq r \wedge x \in U.$$

Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0) \quad \exists \quad K(y_0, \lambda r) \subset V$, czyli że V - otwarty.

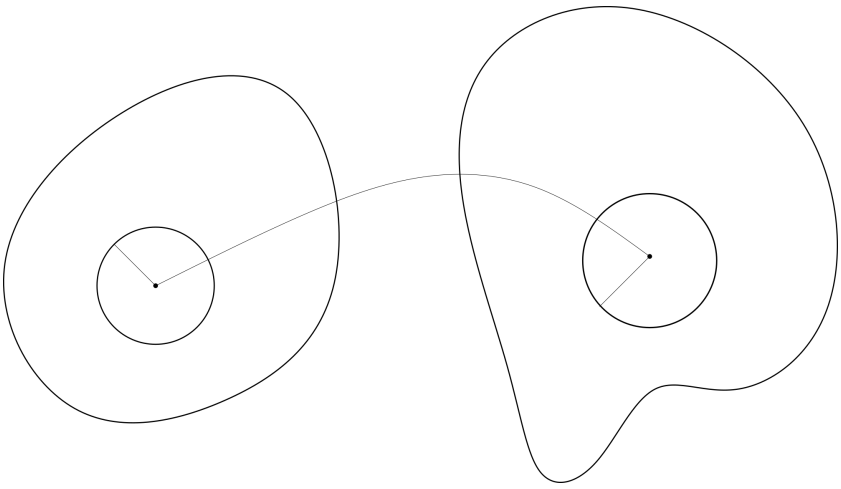
Weźmy $y \in K(y_0, \lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwięzające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$
Jeżeli pokażemy, że dla $\|y - y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwięzająca na $K(x_0, r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y - y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwięzające na $K(x_0, r)$, zbadamy tę wielkość dla $x \in K(x_0, r)$.
 $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\|.$$

Ale

$$\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \|y - y_0\| \leq \frac{1}{2\lambda} \lambda r = \frac{r}{2},$$



Rysunek 10: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

więc

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r,$$

jeżeli

$$\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leq r.$$

Stąd wiemy, że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$ należy do $K(x_0, r)$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.

Część III

Szukamy $g : V \rightarrow U$

Skoro f - bijekcja między U i V , to znaczy, że $\exists_{g:V \rightarrow U} f(g(x)) = x \quad \forall_{x \in V}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w $x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (24)$$

to będziemy wiedzieli, że:

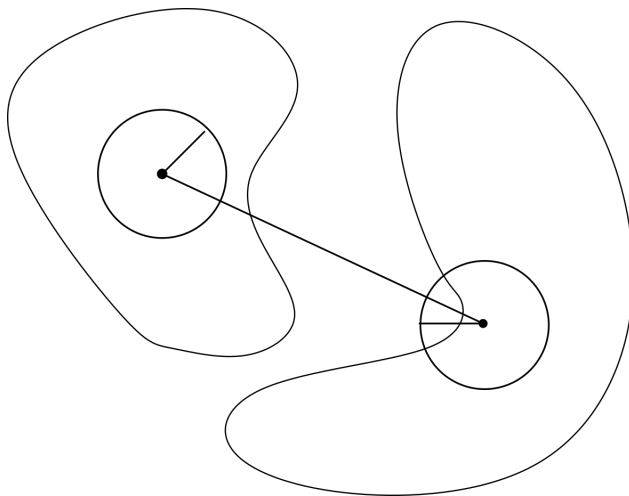
1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.

W tym celu pokażemy, że:

1. $(\|k\| \rightarrow 0) \implies (\|h\| \rightarrow 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= x+h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) = \\ &= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)), \end{aligned}$$



Rysunek 11: Nie ok.

$$\text{czyli } \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

$$\text{zatem } \|h - (f'(a))^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geq \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$$

$$\text{Stąd ostatecznie mamy: } \frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|k\|} \leq \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda} \frac{hf'(x)}{\|k\|}$$

0, o ile $\exists [f'(x)]^{-1}$

Pytanie 6. *skąd wiadomo, że $(f'(x))^{-1}$?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1$ oraz U - taka, że

$$\forall_{x \in U} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

Zatem

$$0 \leq \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leq \|f'(a) - f'(x)\| \|y\| + \|f'(x)\| \|y\|.$$

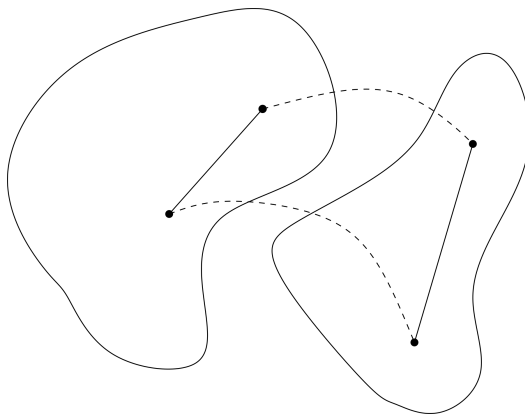
$$\text{Dalej } 2\lambda\|y\| \leq \lambda\|y\| + \|f'(x)y\| \text{ dla } x \in U$$

$$0 \leq \lambda\|y\| \leq \|f'(x)y\| \text{ dla } y = 0$$

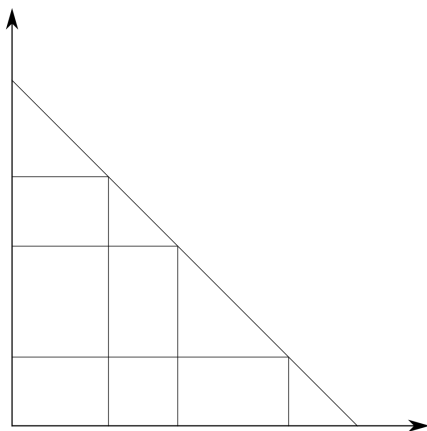
Czyli

$$\forall_{x \in U} \|f'(x)y\| > 0.$$

□



Rysunek 12



Rysunek 13: (a)

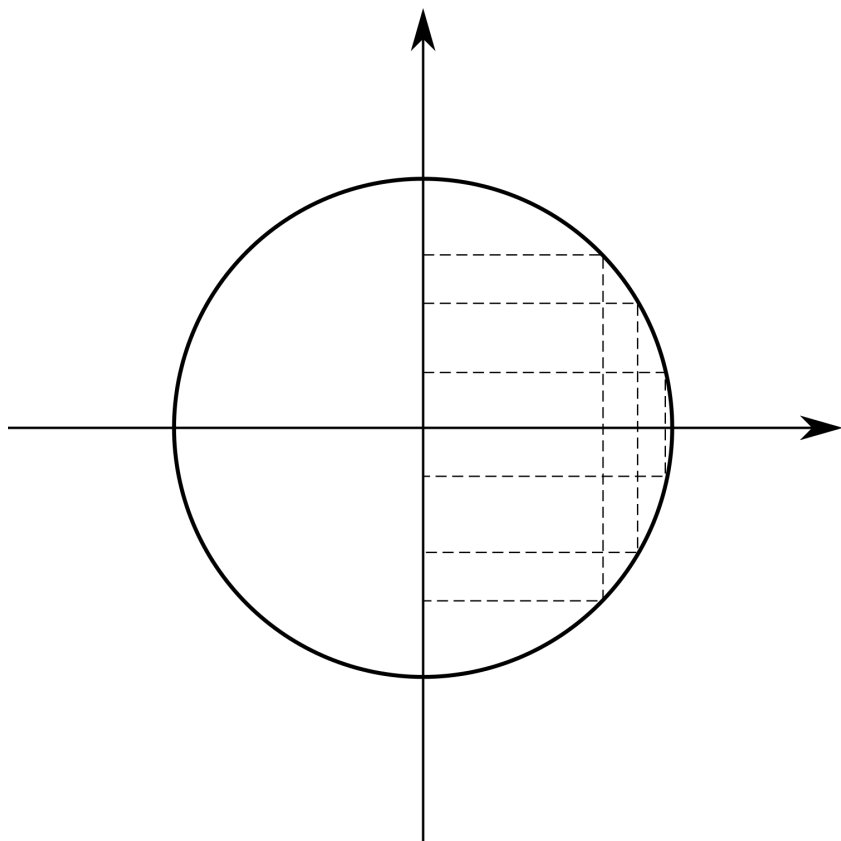
8 Wykład (22.03.2019)

8.1 Zabawki działające dzięki wnioskowi z Tw. wyżej - funkcje uwikłane

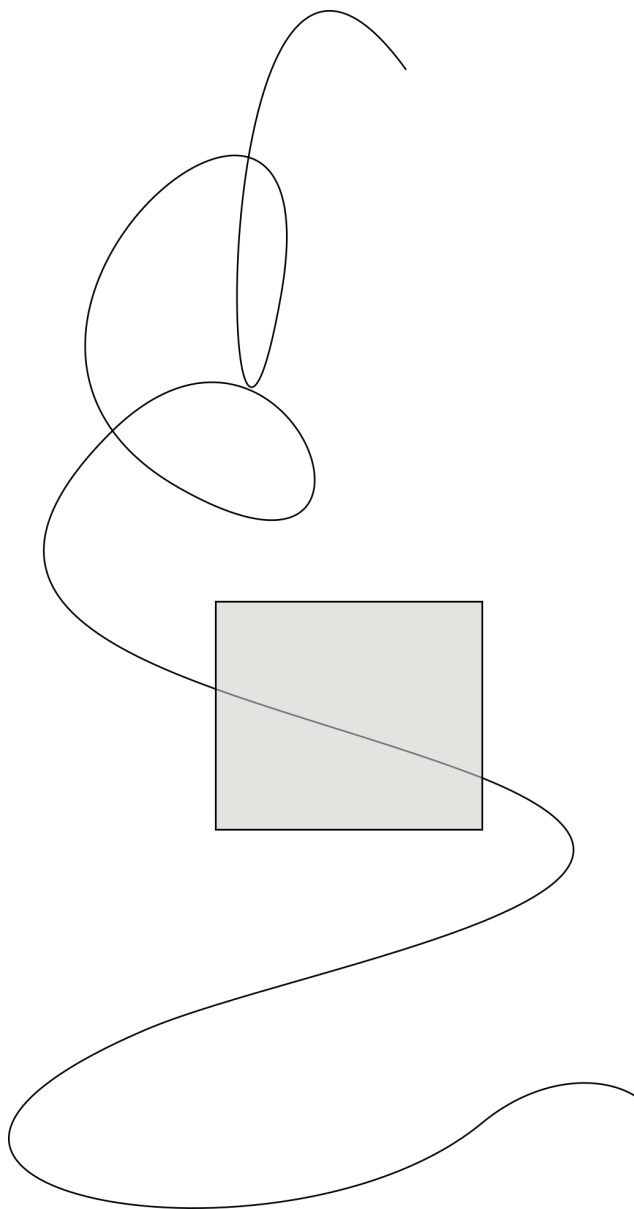
$$x + y = 1 \quad (\text{a}).$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{b}).$$

$$H(x, y) = \sin x e^{xy} + \operatorname{tg} y - x = 0.$$



Rysunek 14: (b)



Rysunek 15: (c)

Przykład 24. *Równanie gazowe*

$$H(p, V, T) = 0, H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$p(V, T) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$V(p, T) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

$$T(p, V) = 0, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

istnienie przedziałów, w których funkcja uwikłana zadaje inne funkcje

Przykład 25.

$$H(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Pytanie 7. *Czy istnieje $y(x) : H(x, y(x)) = 0$, dla $x \in V$?*

$$\frac{dH}{dx}(x, y(x)) = \frac{d}{dx}(H(x, y) \circ g(x)).$$

$$H' = \left[\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right].$$

$$g(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, g'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ y'(x) \end{bmatrix}.$$

$$H'(x, y)g'(x) = 0 \implies \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}.$$

Więc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\cos y + ye^{xy} - 1}{xe^y + \frac{1}{\cos^2 y}}.$$

Przykład 26.

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + x_2x_3 - 4x_3 + 3 \\ x^2 \cos x_1 - 6x_1 + 2x_3 - x_5, H : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}.$$

$$H(x_1, \dots, x_5) = 0 \text{ może zadać funkcję } g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$x_4(x_1, x_2, x_3), x_5(x_1, x_2, x_3).$$

$$g(x_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}.$$

Obserwacja 3. $H(0, 1, 3, 2, 7) = 0$

$$H : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \\ H_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}.$$

Pytanie 8. Czy $H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0$ zadaje nam

$$g_1(y_1, y_2, y_3).$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3)?$$

$$\text{czyli } g(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H_1(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H_2(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Szukamy g' .

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial y_3} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3} = 0.$$

napięcie rośnie (6 równań oho)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{H'_x} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{g'} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{H'_y}.$$

$$H'_x g' = -H'_y \implies g' = -(H'_x)^{-1} H'_y.$$

Twierdzenie 10. (o funkcji uwikłanej)*Niech*

$$\begin{aligned}
H &: E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \\
H &\in \mathcal{C}^1 \text{ na } E, (x_0, y_0) \in E, \\
H(x_0, y_0) &= 0, \\
(x_0, y_0) &= (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m), \\
H &\text{ - odwracalna..}
\end{aligned}$$

Wówczas istnieje $U \subset E$ takie, że $(x_0, y_0) \in U$, $\exists_{W \subset \mathbb{R}^n}$, że

$$x_0 \in W, \quad \forall_{x \in W} \exists!_y H(x, y) = 0, \quad (x, y) \in U.$$

Jeżeli $y = \varphi(x)$, to

$$\begin{aligned}
\varphi &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ i } \varphi \in \mathcal{C}^1(W), \\
\varphi'(x) &= -(H'_y)^{-1} H'_x.
\end{aligned}$$

Dowód. Oznaczenia:

$$\begin{aligned}
H(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) &= \begin{bmatrix} H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}. \\
H'_y &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial y^m} \end{bmatrix}, \quad H'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Wprowadźmy funkcję $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$

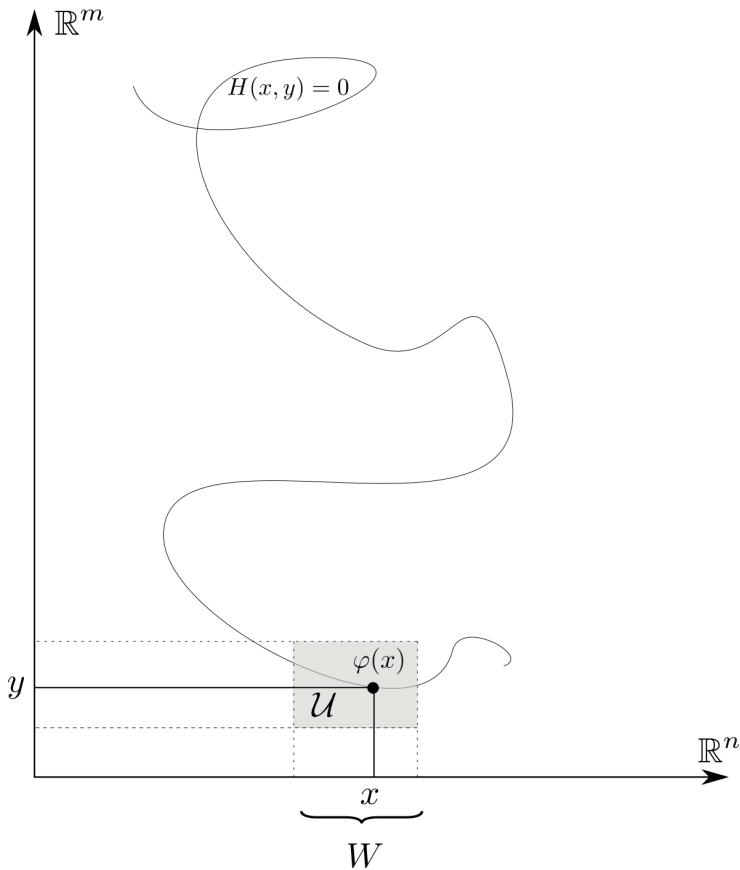
$$F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}.$$

Jakie własności ma F ?

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ale

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ H'_x & & H'_y \end{bmatrix}, \det F' = \det H'_y.$$



Rysunek 16

Jeżeli $H'_y(x_0, y_0)$ - odwracalna, to $F'(x_0, y_0)$ - też. Oznacza to (na podstawie tw. o lokalnej odwracalności), że

$$\exists U \subset \mathbb{R}^{n+m}, (x_0, y_0) \in U, \exists V \subset \mathbb{R}^{n+m}, (x_0, 0) \in V,$$

że F jest bijekcją między U i V oraz $\exists F^{-1} : V \rightarrow U, F^{-1}$ - różniczkowalna taka, że

$$F^{-1}(x, \alpha) = (a(x, \alpha), b(x, \alpha)), x, \alpha \in V,$$

gdzie $a(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Dla $(x', y') \in \mathcal{V}$,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że $a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ istnieją i są różniczkowalne, bo F^{-1} istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach a i b ?

Wiemy że

$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y')) = F(\underbrace{a(x', y')}_n, \underbrace{b(x', y')}_m).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli $a(x', y')$ jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$

Czyli jeżeli $y = b(x, 0)$, to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

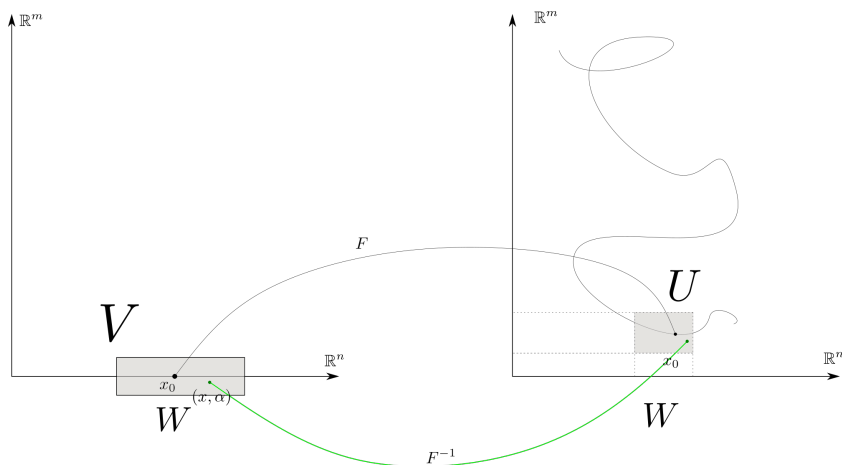
Czyli dla $y = (x, 0)$ otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy $b(x, 0) \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$, to znaczy, że znaleźliśmy funkcję $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0.$$

□



Rysunek 17

9 Wykład (26.03.2019)

9.1 Ekstrema związane

przykład:

$$f(x, y) = x + y, \quad G(x, y) = (x - 1)^1 + (y - 1)^2 - 1, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum f na M

Rozważmy linię o stałej wartości $x + y$

Definicja 14. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.

Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M , w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

$$\exists_r \quad \forall_{\substack{h \\ \|h\| < r \\ (x_0+h) \in M}} \quad f(x_0 + h) \leq f(x_0).$$

Niech $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$G(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$M = \{(x, y), G(x, y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f . Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} = 0.$$

A co by było, gdyby $G(x, y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

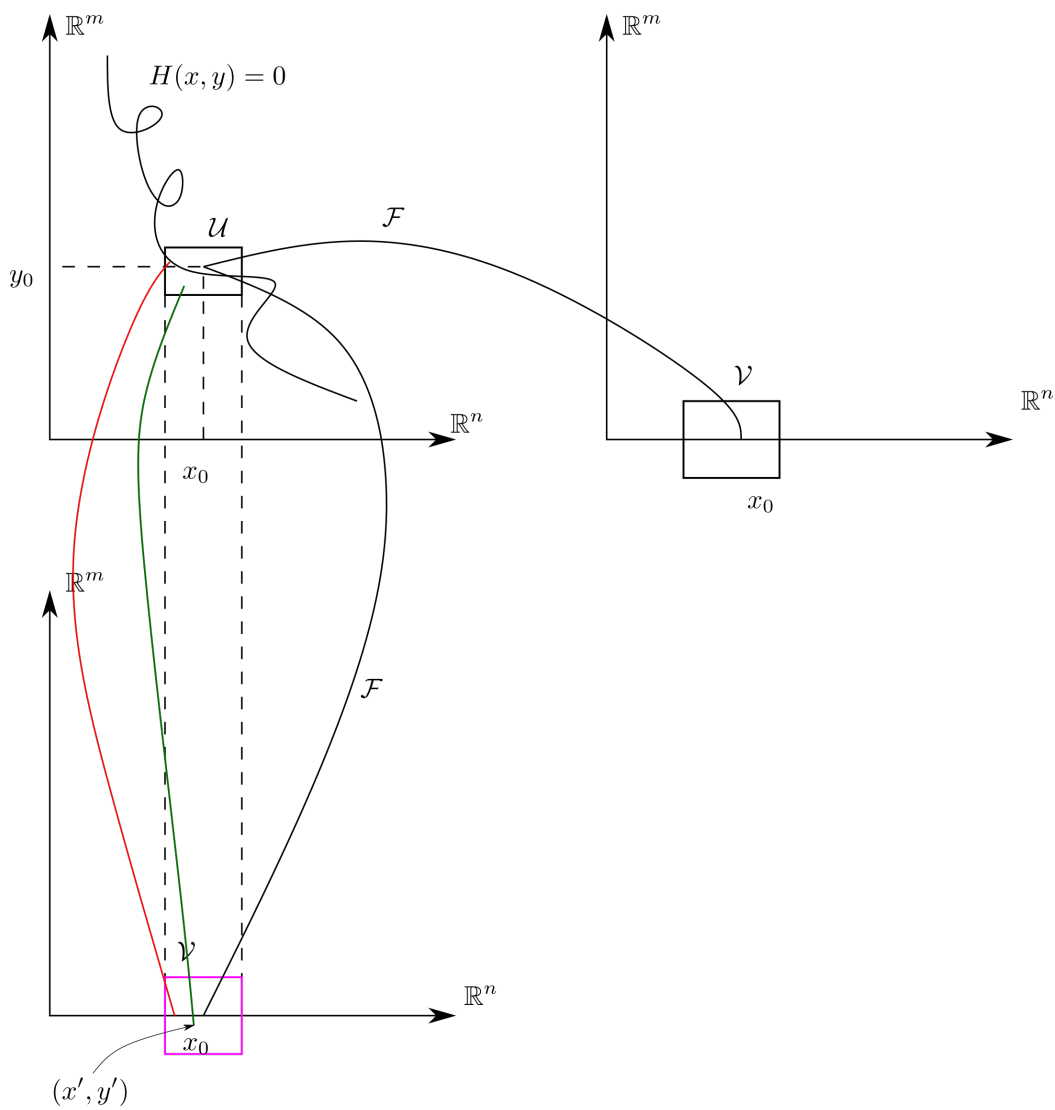
$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

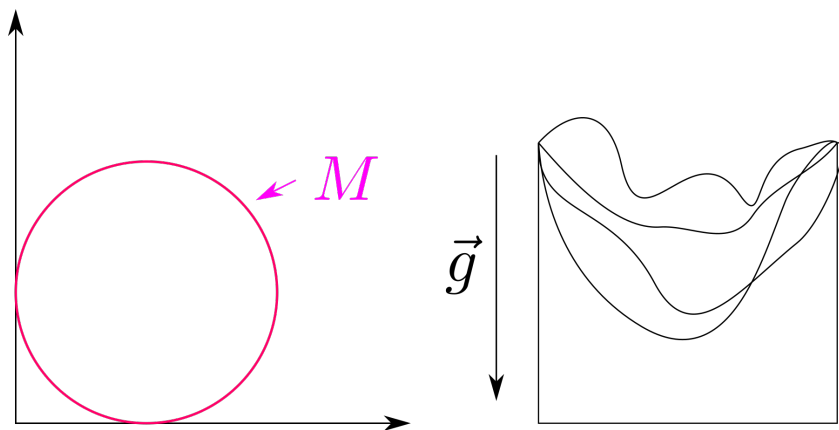
$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

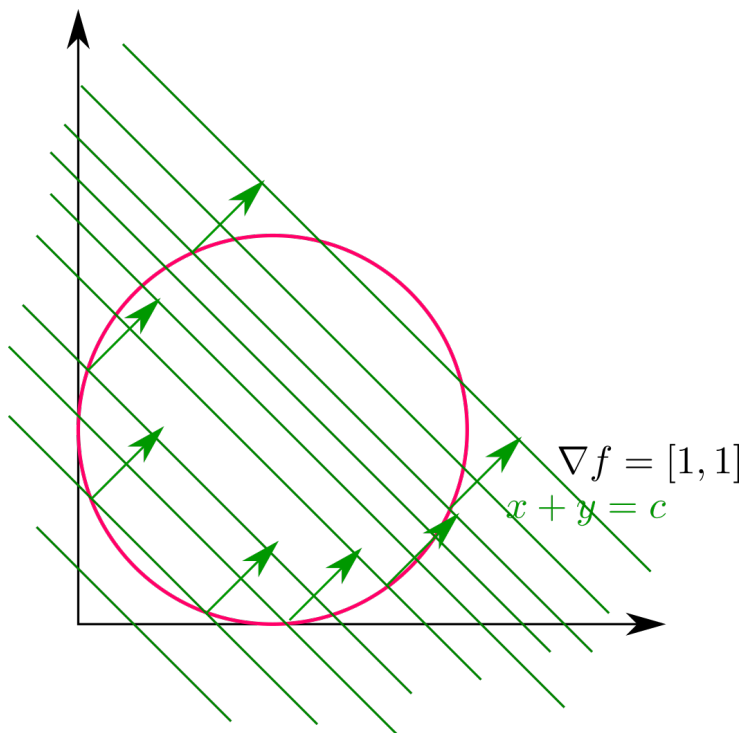
$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (25)$$



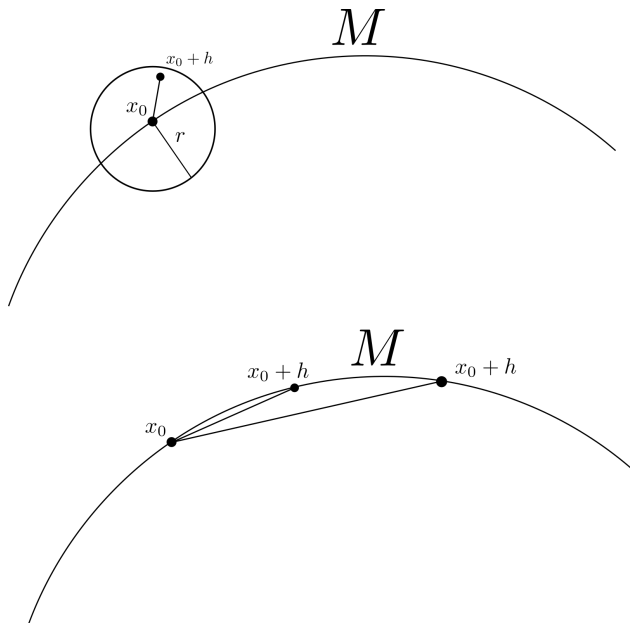
Rysunek 18: do poprzedniego wykładu



Rysunek 19: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 20: Biedronka łązi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 21

Co oznacza warunek 25?

Wiemy, że

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x) = 0$, albo $P'(y) = 0$ oznacza, że

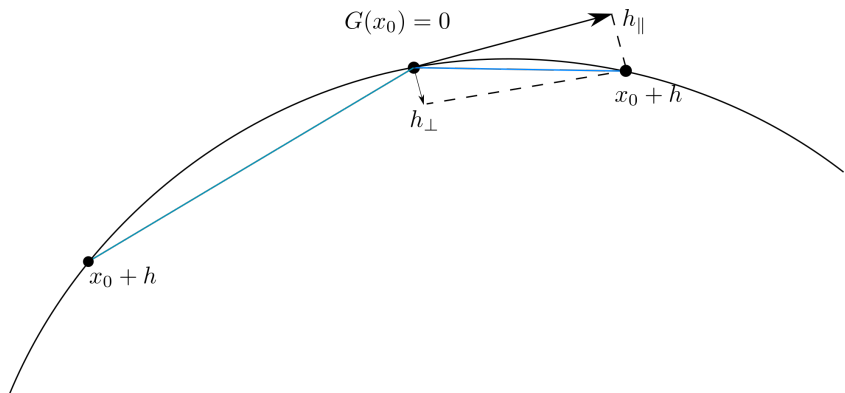
$$\exists_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

Obserwacja 4. Do warunku (26) można dojść na skróty przez funkcję $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$ i badanie $H(x, y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (+ \text{ warunek } G(x, y) = 0).$$



Rysunek 22

Pytanie 9. Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?

Odpowiedź: lepiej inaczej... (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f''(x_0)(h, h).$$

10 Wykład (29.03.2019)

Problem:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad M = \{x: G(x) = 0\}.$$

Badamy różnicę $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora)
Próbujemy ożenić te języki. Zbadajmy $G'(x)$.

- $G'(x)$ - jest macierzą $[G']_{m,n}$

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} G^1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ G^m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)]: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Pytanie 10. Jaki jest "wymiar" zbioru M ?

Albo, jeżeli $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, to wiąż $G(x) = 0$ zadaje funkcję

$$\varphi(x): \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Taką, że $G(x^1, \dots, x^{n-m}, \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}), \dots, \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}))$, (jeżeli $\det G_y(x) \neq 0$)

Jeżeli $\det G'_y(x) \neq 0$, to znaczy, że w macierzy

$$G' = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m} \end{bmatrix}.$$

Gdzie $x \stackrel{\text{ozn}}{=} (x^1, \dots, x^{n-m}, y^1, \dots, y^m)$. Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne (y^1, \dots, y^m) można uzyskać z innych (x^1, \dots, x^{n-m}) poprzez funkcję $\varphi: x = \varphi(y)$

Gdy założymy, że $\det G'_y \neq 0$, to znaczy, że
m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim \operatorname{im} G'(x) = m = \dim \mathbb{R}^m \text{ i } G'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim \ker G'(x) = n - m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy $X_1 = \ker G'(x)$ i $X_2 = \operatorname{im} G'(x)$ ($\dim X_1 = n - m$, $\dim X_2 = m$) Oznacza to, że każdy wektor $h \in \mathbb{R}^n$ da się przedstawić jako $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in X_1$, $h_2 \in X_2$ czyli $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\}, \quad x^1, \dots, x^{n-m}, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}) \end{bmatrix} \right\}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach $G'(x)$? - jest ich m i są liniowo niezależne

Jeżeli $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$, to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie $(r \frac{0, h_1}{\|h_1\|} \xrightarrow{\|h_1\| \rightarrow 0} 0)$ (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że φ - różniczkowalna, co więcej

$$\varphi' = -(G'_y)^{-1}G'_x \text{ a } \varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0) \text{ czyli } \varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0, h_1)}{\|h_1\|} \xrightarrow{\|h_1\| \rightarrow 0} 0.$$

czyli h_2 maleje szybciej niż $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

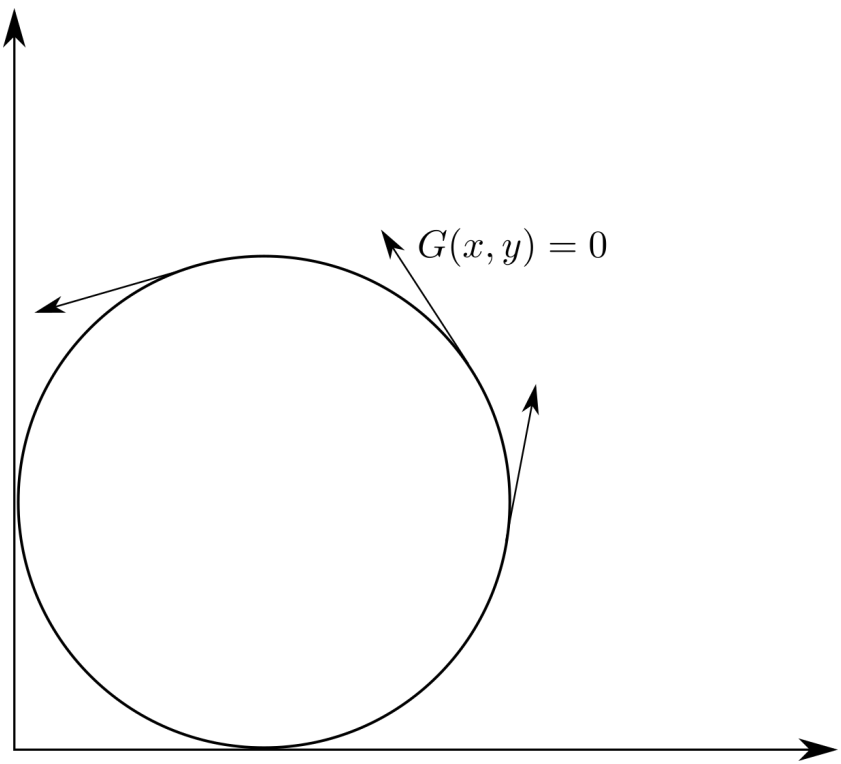
Skoro $h \in \mathbb{R}^n$, to możemy przedstawić h jako

$$h = h_{\parallel} + h_{\perp}, \quad h_{\parallel} \in X_1, h_{\perp} \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_{\parallel} = 0?.$$

Przykład 27. niech $G(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$, $G' = (2(x - 1), 2(y - 1))$



Rysunek 23: biedronka i szprycha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h_{\perp} + h_{\parallel}) - f(x_0).$$

W małym otoczeniu h będzie bardziej decydował h_{\parallel} , bo zawsze mogę zmniejszyć h i w efekcie h_{\perp} się zmniejszy

Wiemy, że

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)(h, h) + r_1(x_0, h).$$

bo f - różniczkowalna

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x_0)h + \frac{1}{2!}G''(x_0)(h, h) + r_2(x_0, h).$$

bo G - różniczkowalna

niech

$$\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \Lambda(G(x_0 + h) - G(x_0)) = (f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h.$$

Dalej dostajemy

$$(f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h + \frac{1}{2!}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) + r_1(x_0, h) + r_2(x_0, h).$$

Ale dla minimum lub maksimum chcemy, aby

$$f'(x_0) = \Lambda G'(x_0).$$

więc dla minimum / maksimum $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) + r_1(x_0, h) + r_2(x_0, h)$

Zatem jako, że $\frac{r_1(0, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{\|h\|^2} 0$, $\frac{r_2(0, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{\|h\|^2} 0$, to o znaku $f(x_0 + h) - f(x_0)$ decyduje znak

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h).$$

Wiemy, że $h \in \mathbb{R}^n \text{ i } \mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$, czyli $h = h_\perp + h_\parallel$

$$\begin{aligned} f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h, h) &= \underbrace{f''(x_0) \Lambda G''(x_0)}_{\square}(h_\parallel + h_\perp, h_\perp + h_\parallel). \\ &= (\square)(h_\perp, h_\perp) + (\square)(h_\perp, h_\parallel) + (\square)(h_\parallel, h_\perp) + (\square)(h_\parallel, h_\parallel). \end{aligned}$$

Pytanie 11. *Które z powyższych wyrażeń jest najmniejsze (które z powyższych wyrażeń są o rząd mniejsze od pozostałych dla $\|h\| \rightarrow 0$)*

Wiemy, że

$$\|h_\perp\| \quad \|h_\parallel\|.$$

Oznacza to, że dla małych $\|h_\parallel\|$ o znaku decyduje

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel).$$

Twierdzenie 11. *Niech*

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f \in \mathcal{C}^2(U),$$

$$G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G \in \mathcal{C}^2(U_2),$$

$$\exists_{x_0} G(x_0) = 0, \quad G'(x_0) \text{ - ma rząd maksymalny } (m).$$

oraz

$$\exists_{\Lambda} \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel) > 0, h_\parallel \stackrel{\text{def}}{=} \{G'(x_0)h_\parallel = 0\}.$$

to f posiada w x_0 minimum lokalne (< 0 , to maksimum lokalne) na zbiorze

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$$

11 Wykład (02.04.2019)

11.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t) &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f &: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Przykład 28.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kx(t) \\ x(t) &= ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Przykład 29.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x} &= p \\ \dot{p} = \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt} x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x, t)}.\end{aligned}$$

Definicja 15. Niech $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$

$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$ taka, że $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) \rightarrow f(t, x')$

Mówimy, że f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli

$$\exists_{L>0} \cdot \forall_{t \in I} \cdot \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \cdot \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

Uwaga 1. Zmienne t, x nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach

Pytanie 12. Czy jeżeli

$$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \text{ takie, że } \exists_{L>0}.$$

że

$$\forall_{x, x'} \|f(x) - f(x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

to czy f jest ciągła?

Twierdzenie 12. (*problem Cauchy*)

Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - domknięty i $f : [a, b] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ takie, że f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$ oraz f spełnia warunek Lipschitza na \mathcal{O} , to znaczy:

$$\exists_{L>0} \quad \forall_{t \in [a, b]} \quad \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L \|x - x'\|.$$

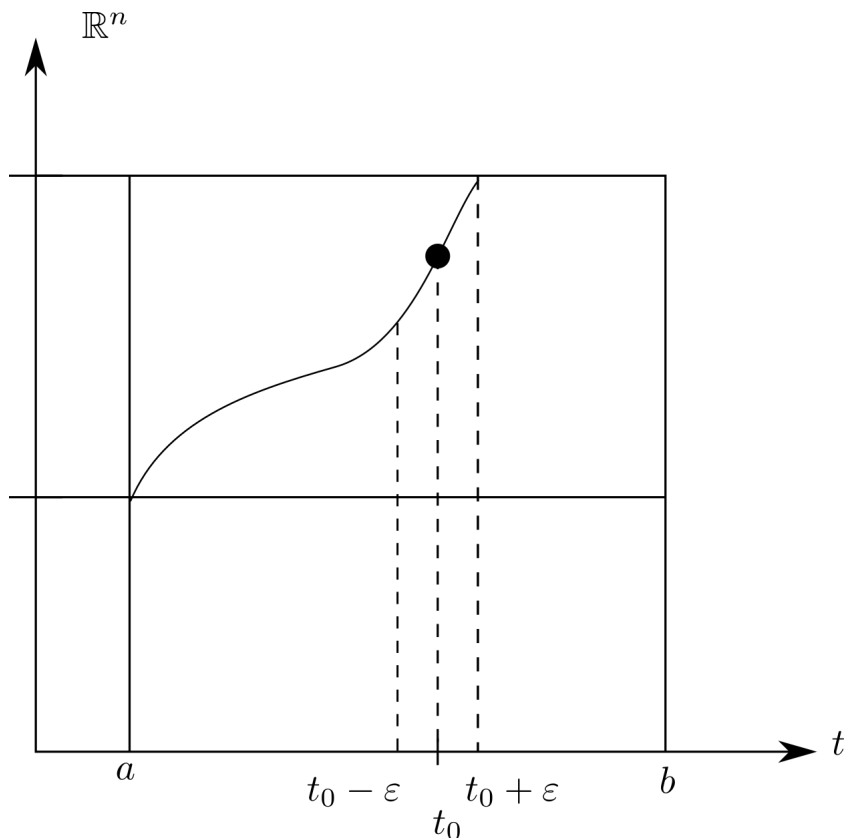
Wówczas

$$\forall_{t_0 \in [a, b]} \quad \forall_{x_0 \in \mathcal{O}} \quad \exists_{\varepsilon > 0}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (27)$$

Uwaga 2. Ciągłość f na $[a, b] \times \mathcal{O}$ jest mocniejszym warunkiem niż Lipschitzowalność na \mathcal{O}



Rysunek 24

Dowód. Skoro f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli

$$\exists_{M>0} \quad \exists_{r_1>0} \quad \exists_{r_2>0} \quad \|f(t, x)\| \leq M.$$

$$t \in K(t_0, r_1), x \in K(x_0, r_2).$$

Zauważmy, że problem (27) możemy zapisać jako

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (28)$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia (28), to rozwiążemy problem 27.

Rozważmy odwzorowanie

$$P(g)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

$$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \rightarrow \mathbb{R}^n\} \text{ funkcja ciągła na kuli o wartościach w } \mathbb{R}^n.$$

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\exists_{x(t) \in A}$ takie, że $P(x(t)) = x(t)$

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem (28)

Niech $E = \left\{ g \in A, \|g(t) - \underset{\text{ważne!}}{x_0^{g_0(t)}}\| \leq r_2 \right\}$, czyli

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leq r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.

(domkniętość ze względu na zasadę Banacha ($x_0 \overset{\text{ozn}}{=} g_0(t)$))

Szukamy takiego ε , żeby:

$$1. P(g) \in E \quad g \in E$$

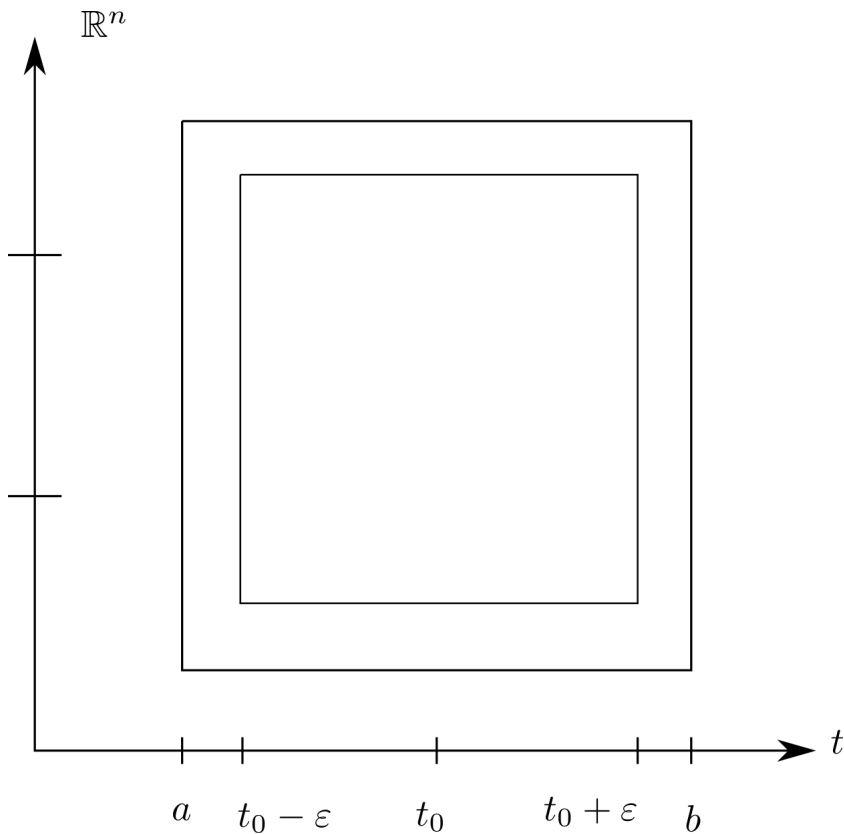
$$2. P - \text{zwężająca na } E$$

bo jeżeli (2) jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.

Jeżeli (1) jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E

Warunek (1): $P(g) \in E$, czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leq r_2.$$



Rysunek 25

czyli

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds - x_0\| &\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq \\ &\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} |t - t_0| M = \varepsilon M. \end{aligned}$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leq r_2$, to znaczy, że $\varepsilon \leq \frac{r_2}{M}$ i jednocześnie $\varepsilon \leq r_1$.
Czyli aby warunek (1) był spełniony to musi być:

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1 \right\}.$$

Warunek (2). Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\forall_{g_1, g_2 \in E} \|P(g_1) - P(g_2)\| \leq q \|g_1 - g_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1) - P(g_2)\| = \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_2(s)) ds)\| = .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s)) ds \right\| \leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\| ds \leq .$$

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leq t_0 \leq t_0 + \varepsilon} \int_{t_0}^t L \|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \sup_{\substack{g_1 - g_2 \in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2}} \|g_1 - g_2\| .$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E , to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$
 Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu 27

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\} .$$

□

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:

niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągle ze względu na $a \in A$

Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\forall_{a \in A} . \forall_{x, x'} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leq q \|x - x'\| .$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A .

Uwaga 3. *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds .$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągle ze względu na x_0 i t_0 .

12 Wykład (05.04.2019)

Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator $P_a(x)$ i on miał być zwężający.

$P_a(x) : X \rightarrow X$ - zwężający .

$$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \rightarrow \tilde{x}(a)\}, \text{ gdzie } P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a).$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \cdot \exists_{\delta > 0} \cdot \forall_{a'} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że P_a - ciągła ze względu na a :

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \cdot \exists_{\delta_1 > 0} \cdot \forall_{a'} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon_1 \quad (29)$$

Wiemy, że $\forall_{c' \in X}$ ciąg $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \dots\} \rightarrow \tilde{x}(a')$ Ale, jeżeli przyjmiemy za $c = \tilde{x}(a')$, to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \rightarrow \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli P_a - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leq \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wyberzmy $x_0 = \tilde{x}(a')$. Wówczas

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) &\leq \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) = \\ &= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))). \end{aligned}$$

Pytanie 13. Jak ten obiekt ma się do $d(P_a, P_{a'})$?

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$, to znaczy, że $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\text{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leq \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy ε_1 , to biorąc ε_1 taki, że $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$ i znajdujemy δ_1 z zależności 29 i wiemy, że jeżeli

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

□

Przykład 30. (odwzorowanie zwężające)

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że $x(t)$ jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0)) \dots \rightarrow x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$

$$f(t, x) = t + x, t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy f jest lipszycowalna?

$$\forall_{t \in [a, b]} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1 \|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzmy kilka wyrazów ciągu

$$g_0, P(g_0), P(P(g_0)), \dots$$

$$x^0(t), x^1(t), x^2(t)$$

$$x^0(t) = x_0(t) = 0$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s)) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = P\left(\frac{t^2}{2}\right) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s)) ds = \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3} + \frac{t^4}{2 \times 3 \times 4}$$

\vdots

$\vdots \rightarrow \infty$

$$e^t - t - 1.$$

Przykład 31. $\frac{dx}{dt} = 2tx$, $x(0) = 1$, czyli $f(t, x) = 2tx$, $t_0 = 0$

dla $\forall_{t \in [a, b]}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leq \sup_{t \in [a, b]} |t| 2 \|x - x'\|.$$

Czyli f - lipszycowalna z $L = \sup_{t \in [a, b]} |t| \times 2$

$$x^0(t) = 1$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s, 1) ds = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{t^4}{2}) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3}$$

$\vdots \rightarrow \infty$

$$e^{t^2}.$$

Przykład 32.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

$$f(t, x) = f(t, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

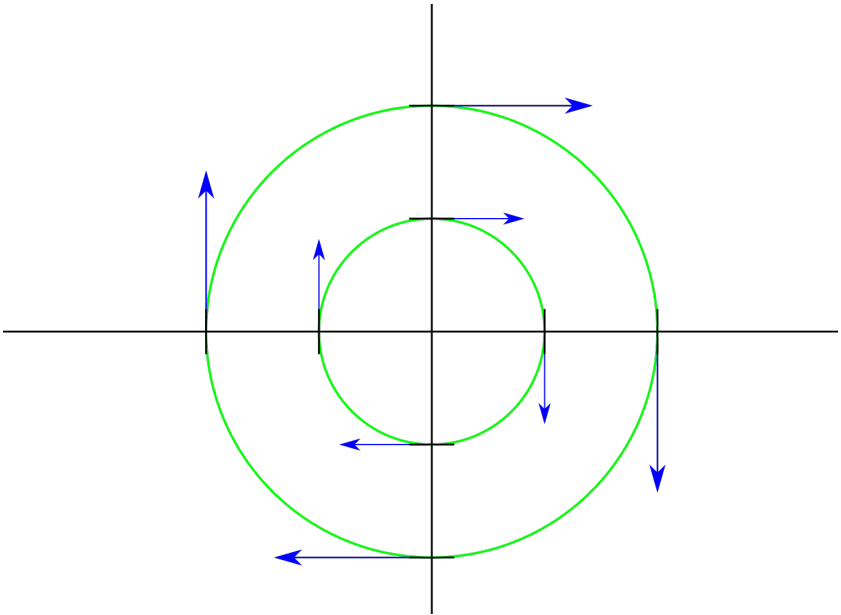
$$x^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2(t) = P\left(\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^3 = P\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \rightarrow \infty$$
$$\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$



Rysunek 26

Twierdzenie 13. *Jeżeli odwzorowania*

$$\begin{aligned}t &\in [a, b] \rightarrow A(t) \\ t &\in [a, b] \rightarrow b(t).\end{aligned}$$

Gdzie $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow X$ są ciągłe, to równanie

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$ jednoznacznie określone rozwiązanie na $t \in]a, b[$. Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu.

Zamiast $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times \mathcal{O}$, mamy $]a, b[\times X$

Dowód. Chcemy sprawdzić, czy $f(t, x) = A(t)x(t) + b(t)$ spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że $A(t)$ i $b(t)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[a, b]$. Zatem, istnieje $\sup_{t \in [a, b]} \|b(t)\| = C$, a $A : X \rightarrow X$ i A jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania

$$\sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

$$\forall_{t \in [a, b]} \|A(t)x + b(t) - (A(t)x' + b(t))\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| \|x - x'\| = L\|x - x'\|.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ oraz $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$ takie, że dla

$$\varepsilon = \min \left\{ |a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L} \right\} \quad (30)$$

Gdzie r_1, r_2 były takie, że na zbiorze $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$ funkcja $f(t, x)$ była ograniczona. Zależy nam na tym, aby w warunku 30 wyeliminować r_2 . Ale $\|A(t)x + b(t)\| \leq \|A(t)x\| + \|b(t)\|$ dla $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned}&= \|A(t)x\| + C \leq L\|x\| + C = \\&= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leq \\&\leq L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leq \\&\leq Lr_2 + L\|x_0\| + C.\end{aligned}$$

□

13 Wykład (09.04.2019)

$$\varepsilon = \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M} \right\} \\]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

Chcielibyśmy, żeby ε nie zależał od punktu w którym zaczniemy.
Zauważmy, że

$$\|A(t)x(t) + b(t)\| \leq L(\|x_0\| + r_2) + c$$

zatem

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{M} &\geq \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} = \left| \text{Położmy } r_2 = \|x_0\| + c \right| = \\ &= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} = \\ &= \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} \geq \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} = \\ &= \frac{1}{2L + 1}, \end{aligned}$$

zatem

$$\varepsilon = \min \left\{ |t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L + 1} \right\}$$

(r_1 - pomijamy, bo $A(t)$ - ciągła na $[a, b]$).

Oznacza to, że wartość ε nie zależy od x , zatem rozwiązanie początkowo określone na

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times K(x_0, r_2)$$

możemy przedłużyć do określonego na całym $[a, b] \times X$!

13.1 Rezolwenta

Rozwiązaniem problemu Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

jest funkcja $x(t, t_0, x_0)$

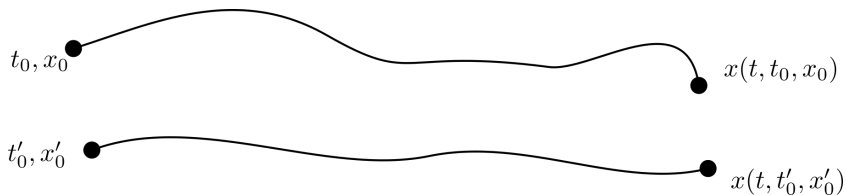
Pytanie 14. Czy istnieje

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

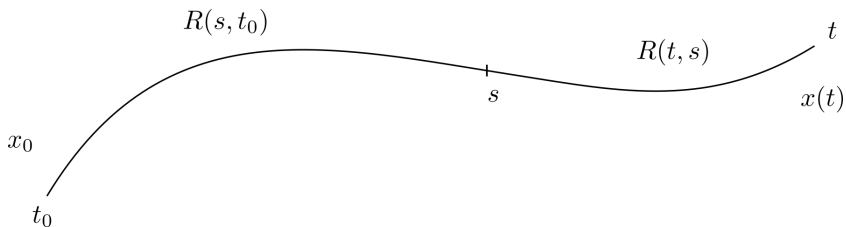
Takie, że

$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

(Jeżeli $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$)



Rysunek 27: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi



Rysunek 28: Jak pośpimy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)

Definicja 16. Jakie własności $R(t, t_0)$ powinno posiadać?

1. $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, R - liniowy

Bo jeżeli $x_1(t), x_1(t_0) = x_0^1$ i $x_2(t), x_2(t_0) = x_0^2$ są rozwiązaniami, to chcielibyśmy, by $x_1(t) + x_2(t)$ też było rozwiązaniem z wartością początkową $x_0^1 + x_0^2$. Rys 28

2. funkcja $R(t, t_0)$

3. $R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0)$

$$\forall t, t_0, s \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$$

4. $R(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, bo $x(t) = R(t, t_0)x_0 \quad \forall_{t_0 \in \mathcal{O}}$

Ad 3. Wstawiając t_0 do trzeciej kropki otrzymujemy

$$R(t_0, t_0) = R(t_0, s)R(s, t_0) \rightarrow \forall_{t, s \in \mathcal{O}} R(s, t) = R(t, s)^{-1}$$

5.

$$\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0),$$

$$R(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

bo wtedy $x(t) = R(t, t_0)x_0$ jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

$$\text{bo } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)x_0) = A(t)R(t, t_0)x_0 = A(t)x(t) \text{ i } x(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie $x(t) = R(t, t_0)x_0$ da nam jednoznaczne rozwiązanie.

Pytanie 15. *A co z $b(t)$? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)*

Chcemy rozwiązać problem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}$$

Założmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t) = R(t, t_0)C(t), C(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)c(t)) = \frac{dR(t, t_0)}{dt}c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \quad / R(t, t_0)^{-1}.$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)^{-1}b(t).$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t, t_0)b(t).$$

$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale $c(t_0) = x_0$, więc $\alpha = x_0$.

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t, t_0)c(t) = R(t, t_0) \left(x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds \right) = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s)b(s)ds = .$$

$$R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \underset{R(t, s)}{R(t, t_0)R(t_0, s)}b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds.$$

dygresja:

dają nam rozkład gęstości masy $\rho(x')$. Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x - x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to $\frac{1}{\|x - x'\|}$

Pytanie 16. *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ spełnia warunki 1 – 5 dla rezolwenty

- $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $R(t, t_0)$ - jest ciągła względem t i t_0
- $R(t, \alpha)R(\alpha, t_0) = R(t, t_0)$, bo $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^{\alpha} A(s)ds + \int_{\alpha}^t A(s)ds}$
 $R(t, t_0) = R(t, \alpha)R(\alpha, t_0)$
- $R(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$
- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t, t_0)$

Dowód:

$$\begin{aligned} \frac{R(t+h, t_0) - R(t, t_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left(e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right) = . \\ &= \frac{1}{h} \left[e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \right] = . \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h} \left[e^{\int_t^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I} \right] e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} - \frac{1}{h} \left[e^{hA(\beta)} - \mathbb{I} \right] R(t, t_0) = .$$

$$\frac{1}{h} \left[\mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \dots = \mathbb{I} \right] R(t, t_0) = .$$

$$A(\beta)R(t, t_0) + h[\dots] \rightarrow A(t)R(t, t_0).$$

$$t < \beta < t+h$$

$$((((\int_t^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta))))))$$

Przykład 33.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

14 Wykład (12.04.2019)

Przykład 34.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t=0) \\ p(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{(t-0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda^2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + a\lambda + b.$$

$$f(-1) = -a + b, f(1) = a + b.$$

$$b = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2}, a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)}_{R(t, t_0)} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 17. Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia $R(t, t_0)$?

Obserwacja 5. Załóżmy, że macierz $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych.

$$\lambda_1,$$

$$\lambda_2, \lambda_3, \dots$$

$$v_1,$$

$$v_2, v_3, \dots$$

Obserwacja 6. Jeśli $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{I})$, to znaczy, że

$$Av = \lambda v$$

$$A^2 v = \lambda^2 v$$

$$A^n v = \lambda^n v$$

$$e^{At} v = e^{\lambda t} v.$$

Jeżeli zatem przedstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\overline{x_0} = x'_0 + x_0^2 + \dots + x_0^n$$

$$e^{A(t-t_0)} \overline{x_0} = \sum_{i=1}^n e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0^i$$

.

Obserwacja 7. najogólniejsza postać λ_j (pierwiastki równania $w(\lambda) = 0$) to

$$\lambda_j = a_j + ib_j.$$

Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy n różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt), \quad \sin(bt), \quad e^{at}, \quad ch(at), \quad sh(at), \quad e^{at} \sin(bt), \quad e^{at} \cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x} &= p \\ \dot{p} = \ddot{x} &= -a\dot{x} - \omega^2 x \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Założmy, że macierz $A \in M_n^n$ ma k różnych wartości własnych i A nie zależy od czasu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow n_1 \\ \lambda_2 &\rightarrow n_2 \\ &\vdots \\ \lambda_k &\rightarrow n_k - V_k = \ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}. \end{aligned}$$

(gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \dots \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \dots + x_0^k.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^k e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda_i\mathbb{I}(t-t_0)} x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A - \lambda_i\mathbb{I})(t-t_0)} x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A - \lambda_i\mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right) \\ \text{ale } x_0^i &\in \ker(A - \lambda_i\mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_{\lambda} = \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i\mathbb{I})^j \right) x_0^i. \end{aligned}$$

Przykład 35. *Rozwiązać równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$\ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a+b+2c=0$$

$$-b+c=0$$

$$c=b$$

$$-a-b+2b=0$$

$$a=3b$$

$$v \in V_{\lambda_2} \iff v = \begin{bmatrix} 3b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_1} = ker(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c=0, v \in V_{\lambda_1} \iff v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0^1 \in V_{\lambda_1} + x_0^2 \in V_{\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A-\lambda_i\mathbb{I})^j \right) x_0^i =$$

$$= e^{\lambda_1(t)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{2-1} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda_1)^j \right) x_0^1 + e^{\lambda_2 t \mathbb{I}} (\mathbb{I}) x_0^2 =$$

14.1 Baza rozwiązań

Obserwacja 8. Jeżeli $x(t) = R(t, t_0)x_0$ i $R(t, t_0) \in M_n^n$, to znaczy, że

$$x(t) = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} + x_0^2 \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} + \dots + x_0^n \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix}.$$

Pytanie 18. Czy $\det(R(t, t_0)) \neq 0$?

Jeżeli tak, to kolumny $R(t, t_0)$ możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i $\det R(t, t_0) \neq 0 \quad \forall_{t \in [a, b]}$.

W bazie wektorów własnych macierz e^{At} wygląda tak (zakładamy n wartości własnych):

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{t \operatorname{Tr} A} \neq 0.$$

15 Wykład (30.04.2019)

Pytanie 19. Czy kolumny $R(t, t_0)$ są liniowo niezależne $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$?

Wiemy, że $R(t, t_0) = \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

Chcielibyśmy, żeby $\forall_{t, t_0 \in [a, b]} \det R(t, t_0) \neq 0.$

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ możemy związać macierz $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}.$

Zatem $\det A$ uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz A z pierwszą kolumną D^T .

Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz A przez drugą kolumnę D^T ?

Przykład 36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ i wtedy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

zatem $AD^T = \sum_{i=1}^n D_{ik} a_{si} = \delta_{ks} \det A$

Twierdzenie 14. (Liouville)

Jeżeli $R(t, t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

i $x \in \mathbb{R}^n$, to $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$, gdzie $w(t) = \det R(t, t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wrońskianem.

Uwaga:

Zauważmy, że $w(t)$ nigdy nie będzie równa zero, bo

$$w(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

a $\left| \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds \right| < +\infty$ (bo $A(t) \rightarrow$ lipszycowalna).

Oznacza to, że kolumny $R(t, t_0)$ są $\forall_{t, t_0 \in [a, b]}$ liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn $R(t, t_0)$

Dowód 1. *Rezolwenta jest postaci:*

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie $u_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$.

Wiemy, że $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$.

Obserwacja: policzmy $\det R(t, t_0)$ względem pierwszego wiersza:

$$w(t) = (-1)^{1+1}u_{11}(t) \begin{bmatrix} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix} + (\text{brak } u_{11}).$$

Zatem $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$ i ogólnie $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$.

Zatem $w(t)$ możemy potraktować jako funkcję od $n \times n$ zmiennych.

$$w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{nn}(t)),$$

zatem

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}} \frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro $\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t)R(t, t_0)$ to znaczy, że

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^n a_{ks} u_{si}.$$

Czyli

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \sum_{k,i} D_{ki} \sum_s a_{ks} u_{si} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} D_{ki} u_{si} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ks} \delta_{ks} w(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk} w(t) \end{aligned}$$

Zatem $\frac{\partial w}{\partial t} = \text{tr}(A(t)) \cdot w(t)$. Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:

$$\int_{t_0}^t \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \rightarrow w(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} e^{\ln \ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds} \quad \square$$

15.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \dots + a_{n-1} x^{n-1}(t) \quad (31)$$

(gdzie $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$).

Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.

Możemy zapisać (31) jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \sum_j \frac{t-t_0}{j} (a - \lambda_i \mathbb{I})^{\ln_i - 1} \underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki $w(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$

Przykład 37.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + \\
&+ (-1)^{2+4} a_1 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} a_2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\
&(-1)^{4+4} (a_3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0 \cdot 1 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \lambda^4 \\
\frac{d^4 x}{dt^4} &= a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' + a_3 x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = t e^t$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^n x}{dt^n} &= a_0 x + a_1 x' + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \\
\lambda^n &= a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1}.
\end{aligned}$$

Połóżmy $x = e^{\lambda t} \rightarrow$ skrót mnemotechniczny

$$e^{\lambda t} \lambda^n = e^{\lambda t} a_0 + a_1 \lambda e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t}.$$

15.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki x_0^i we wzorze (*) bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy A ?

Przykład 38. Niech $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ i $x(0) = 0, x'(0) = 1$ i wiemy, że $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Oznacza to, że $x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} (*)$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= i\omega, & n_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= -i\omega, & n_2 &= 1.
\end{aligned}$$

gdzie A i B nieznane, ale wiemy, że $x(0) = 0$ i $x'(0) = 1$ i $x'(t) = A i \omega e^{i\omega t} - B i \omega e^{-i\omega t}$.

Czyli

$$Ae^0 + Be^{-0} = 0 \implies -A = +B$$

$$Ai\omega e^0 - Bi\omega e^{-0} = 1$$

$$2Ai\omega = 1$$

$$A = \frac{1}{2i\omega}$$

$$B = -\frac{1}{2i\omega}.$$

Czyli

$$x(t) = \frac{1}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Pytanie 20. Czy możemy zmienić bazę w równaniu (*)?

Odp: Możemy. Na przykład przyjmując $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Wówczas

$$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$x(0) = A = 0$$

$$x'(0) = B\omega = 1 \rightarrow B = \frac{1}{\omega} \implies x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Pytanie 21. Co robić z niejednorodnością? (Dla równań wyższych rzędów)

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + b, \frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x}, \vec{x} = R(t, t_0)x_0.$$

Przykład 39.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = e^t(\Delta).$$

Wiemy, że rozwiązaniem problemu $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ jest $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

Może uzmiennimy stałe:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{A}(t) \cos(\omega t) - At \sin(\omega t) + \dot{B} \sin(\omega t) + B(t)t \cos(\omega t).$$

W efekcie dostaniemy równanie drugiego rzędu na $A(t)$ i $B(t)$:

Zapiszmy więc równanie (Δ) w postaci macierzowej.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} (\Delta \nabla).$$

Jak wygląda rezolwenta?

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ i } \frac{d}{dt} R(t, t_0) = AR(t, t_0), R(t_0, t_0) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = R(t, t_0) x_0.$$

Zauważmy, że skoro

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$x'(t) = A (\cos(\omega t))' + B (\sin(\omega t))'$$

$$\text{to wtedy } \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

I możemy zbudować macierz

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u'_{11} & u'_{12} \end{bmatrix},$$

która od rezolwenty różni się tym, że w $t = t_0$ nie zmienia się w macierz jednostkową.

Uzmienniamy stałe:

$$(\simeq) \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

i wstawiamy do $(\Delta \nabla)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = [\dots] + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{B}(t) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\simeq) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \text{ ale}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ (\cos \omega t)' & (\sin \omega t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Czyli mamy:

$$A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t = 0$$

$$A'(t) (\cos \omega t)' + B'(t) (\sin \omega t)' = e^t$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$x(t) = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t$$

$$x'(t) = A'(t) \cos \omega t + B'(t) \sin \omega t + A(t) (\cos \omega t)' + B(t) (\sin \omega t)'.$$

16 Wykład (07.05.2019)

Pytanie 22. Jak pokazać, że zbiór Cantora jest niepusty?

Stwierdzenie 4. Przeliczalna ilość zbiorów miary Lebesgue'a zero jest też zbiorem miary Lebesgue'a zero.

Dowód. Weźmy rodzinę zbioru $X_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}_+, X_n$ - zbiór miary Lebesgue'a zero. Weźmy rodzinę kostek P_n , gdzie P_i - kostka z \mathbb{R}^n taka, że

$$|P_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(możemy tak zrobić, bo X - miary Lebesgue'a zero)

wówczas $X \subset P = P_1 \cup P_2 \cup \dots$

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup \dots| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

Pytanie 23. Jak pociąć prostokąt?

będzie trzeba wprowadzić język.

weźmy kostkę z \mathbb{R}^n . Wtedy

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

niech Π_i - podział przedziału $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$.

Zatem podział kostki P wyznaczy kolekcja podziałów

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}.$$

W takim razie P możemy przedstawić jako sumę

$$P = \bigcup_{i=1}^k Q_i, \text{ gdzie } Q_i = [a_1^{i_1}, b_1^{i_1}] \times \dots \times [a_n^{i_n}, b_n^{i_n}].$$

$[a_j^{i_j}, b_j^{i_j}]$ - jeden z elementów podziału odcinka $[a_1, b_1]$ przy podziale Π_1, \dots , itp.

Wówczas zauważmy, że jeżeli zdefiniujemy

$$\text{int}(Q_i) =]a_1^{i_1}, b_1^{i_1}[\times \dots,$$

to wtedy

$$\text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset.$$

Poza tym

$$|Q_i| \stackrel{\text{def}}{=} |b_1^{i_1} - a_1^{i_1}| \cdot \dots \cdot |b_n^{i_n} - a_n^{i_n}|.$$

W związku z tym

$$|P| = \sum_i |Q_i|.$$

Uwaga: czasami zamiast pisać $\Pi = \{\Pi_1, \dots\}$, piszemy $\Pi = \{Q_1, \dots\}$

Definicja 17. Rozważmy dwa podziały:

$$\Pi_1 = \{Q_1, \dots, Q_k\}$$

$$\Pi_2 = \{R_1, \dots, R_s\}.$$

Podział Π_2 nazywamy drobniejszym, jeżeli dla $\Pi_1 \neq \Pi_2$

$$\forall_{a_j, j \in \{1, \dots, k\}} \exists_{i \in \{R_{m_1}, \dots, R_{m_j}\}}, Q_j = R_{m_1} \cup \dots \cup R_{m_j}.$$

Definicja 18. Suma górna dla $f : P \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|,$$

oraz suma dolna

$$\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|.$$

Definicja 19. Całka górna:

$$\overline{\int}_p f = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi),$$

oraz

$$\underline{\int}_p f = \sup_{\Pi} \underline{S}(f, \Pi).$$

Obserwacja 9. Jeżeli Π_2 - podział drobniejszy, niż Π_1 , to

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_1).$$

Pytanie 24. Czym to się właściwie różni od całki na \mathbb{R} ?

Pytanie 25. Czy całkę na np. \mathbb{R}^2 możemy policzyć przy pomocy dwóch całek na \mathbb{R} ?

Przykład 40.

$$p = [0, 1] \times [0, 2], \quad f(x, y) = xy^2.$$

$$\int_p xy^2 \stackrel{??}{=} \int_0^1 dx \int_0^2 dy \cdot xy^2 \stackrel{??}{=} \int_0^2 dy \int_0^1 dx \cdot xy^2.$$

$$\int_0^1 dx \left[\frac{xy^3}{3} \right]_0^2 = \left[\frac{x^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_0^2 dy \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{y^3}{2 \cdot 3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Pytanie 26. Co robimy ze zbiorami, które nie są prostokątami?

Przykład 41. niech $A \subset P \subset \mathbb{R}^n$, wprowadźmy funkcję

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

wówczas jeżeli

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}, A \subset P,$$

to

$$\int_A f \stackrel{\text{def}}{=} \int_P f \cdot X_A.$$

Jeżeli f - takie, że $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, to definiujemy funkcję

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

i wtedy

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}.$$

Konsekwencją takiego podejścia jest konieczność radzenia sobie z całkami z funkcji nieciągłych. Oznacza to, że warunek na całkowalność punktu musi być związany z nieciągłością. W tym celu wprowadzamy kilka nowych pojęć:

Definicja 20. *Wahanie funkcji:*

niech $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, niech $x_0 \in \int(A)$. Wahaniem funkcji w punkcie x_0 nazywamy wielkość

$$O(f, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \left| \sup_{K(x_0, r)} f(x) - \inf_{K(x_0, r)} f(x) \right|.$$

Stwierdzenie 5. Niech A - domknięty, $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

$$A_\varepsilon = \{x \in A : O(f, x) \geq \varepsilon\},$$

wówczas A_ε też jest zbiorem domkniętym.

Dowód. Pokażemy, że zbiór A'_ε jest zbiorem otwartym.

Mamy dwa przypadki:

1. $x \in A'_\varepsilon$, $x \notin A$, czyli $x \in A'$ więc $\exists K(x, r) \in A'$ (bo A' jest otwarty)
2. $x \in A$, $x \in A'_\varepsilon$, czyli $O(f, x) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{y \in K(x, r)} \quad O(f, y) < \varepsilon.$$

czyli znajdziemy takie otoczenie $x \in A'_\varepsilon$, że wszystkie elementy z tego otoczenia też należą do A'_ε czyli A'_ε jest otwarty.

Wiemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \sup_{x' \in K(x, r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x, r)} f(x') \right| = c < \varepsilon.$$

Z definicji granicy oraz warunku wyżej wiemy, że

$$\exists_r \left| \sup_{x' \in K(x, r)} f(x) - \inf_{x' \in K(x, r)} f(x) \right| < \varepsilon,$$

zatem dla dowolnego $y \in K(x, r)$ mamy

$$\exists_{r'} r' = r - \|x - y\| : \forall_{y' \in K(y, r)} |\sup f(y') - \inf f(y')| < \varepsilon,$$

czyli

$$O(f, y') < \varepsilon \rightarrow \forall_{y'} y' \in K(y, r') \subset K(x, r),$$

co oznacza, że punkt x jest punktem wewnętrznym A'_ε , czyli A'_ε jest otwarty, więc A_ε - domknięty. □

17 Wykład (10.05.2019)

17.1 Zbiory miary Lebesgue'a zero

Definicja 21. *Kostkę w \mathbb{R}^n ($a_k \leq b_k$) nazywamy zbiór*

$$P_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Definicja 22. *Objętością kostki nazywamy*

$$|P_k| = |[a_1, b_1]| \cdot |[a_2, b_2]| \cdot \dots \cdot |[a_n, b_n]|,$$

gdzie $|[a_k, b_k]| = |b_k - a_k|$.

Definicja 23. *Niech $X \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że zbiór X jest miary Lebesgue'a zero, jeżeli*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{P = P_1 \cup \dots \cup P_k} : x \in P, \sum_{i=1}^k |P_i| < \varepsilon.$$

Uwaga: k nie musi być wielkością skończoną.

Przykład 42. *Niech $\{1\} \subset [-10, 10]$, wówczas*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{p = [1 - \frac{\varepsilon}{4}, 1 + \frac{\varepsilon}{4}]} : \{1\} \subset P, |P| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przykład 43. *zbiór Cantora*

Chcemy dojść do tw Lebesgue.

Twierdzenie 15. (Lebesgue) *Niech P - zbiór nieciągłości funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona na D , D - ... jest zbiorem miary Lebesgue'a zera $\iff f$ - całkowalna na D .*

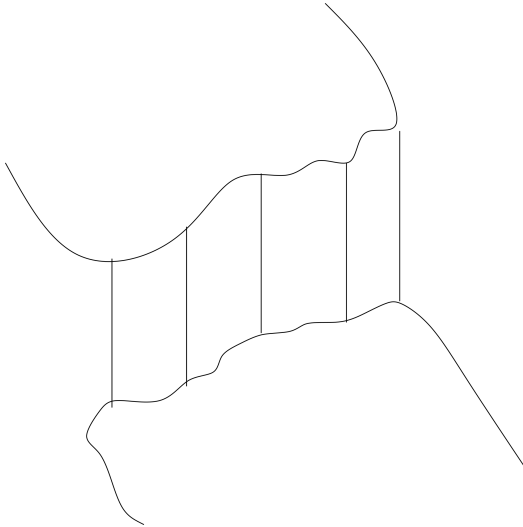
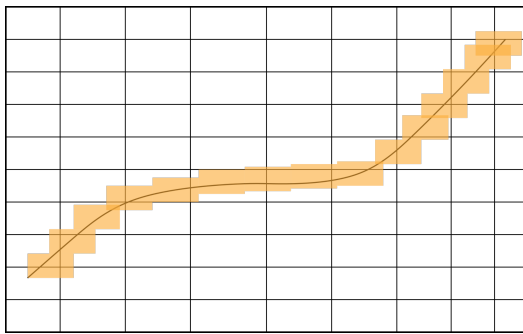
Wiemy, że f - całkowalna \iff

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geq \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja f na zbiorze A powinna być ograniczona!!!)



Obserwacja 10. *Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogę wziąć ileś kartek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu kartek) przykryć go skończoną liczbą kartek?*

Weźmy długi stół:

$$\begin{aligned}
 R &= \bigcup_{n=0}^{\infty}]n-2, n+2[\cup]-n-2, -n+2[\\
 &]0, 1[\subset [-2, 2] \\
 &]0, 1[\subset [-2019, 2018] \cup [-2, 2] \\
 &]0, 1[= \bigcup_{n=2}^{\infty}]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[.
 \end{aligned}$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

Definicja 24. Niech X - zbiór a $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ - rodzina zbiorów. Mówimy, że F jest pokryciem zbioru X , jeżeli $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$. Jeżeli zbiory A_α są otwarte, to mówimy, że F jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów A_α jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór F taki, że jest też pokryciem zbioru X nazywamy podpokryciem.

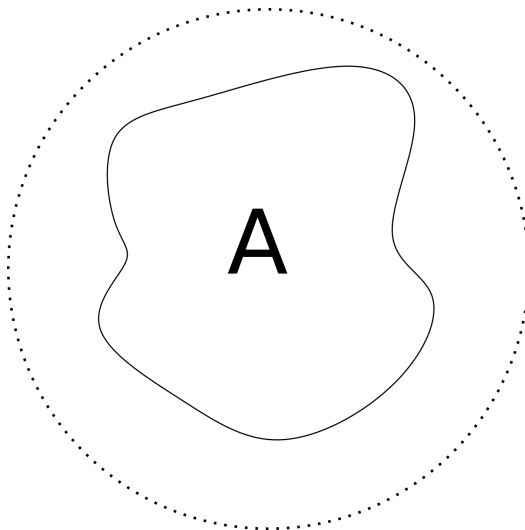
Definicja 25. Zbiór X nazywamy zwartym, jeżeli z **każdego** pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

Stwierdzenie 6. $(X - \text{domknięty, ograniczony}) \iff (X\text{-zbiór zwarty})$

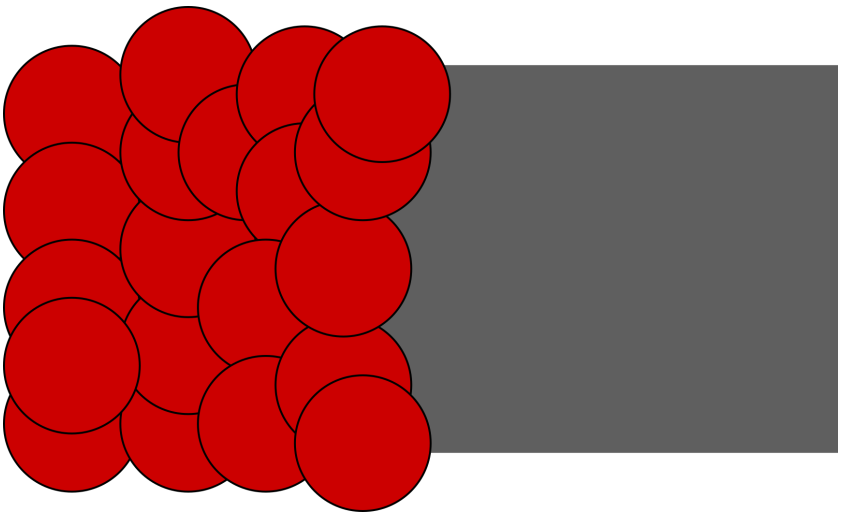
Dowód 2. niech $X \in \mathbb{X}$, \mathbb{X} - przestrzeń metryczna

\Leftarrow 1 Pokażemy, że jeżeli X - zwarty, to X - ograniczony. (przypomnienie: zbiór $A \subset \mathbb{X}$ jest ograniczony jeżeli $\exists. \exists_r$, że $A \subset K(x_0, r)$) Skoro X - zwarty, to niech F będzie po-



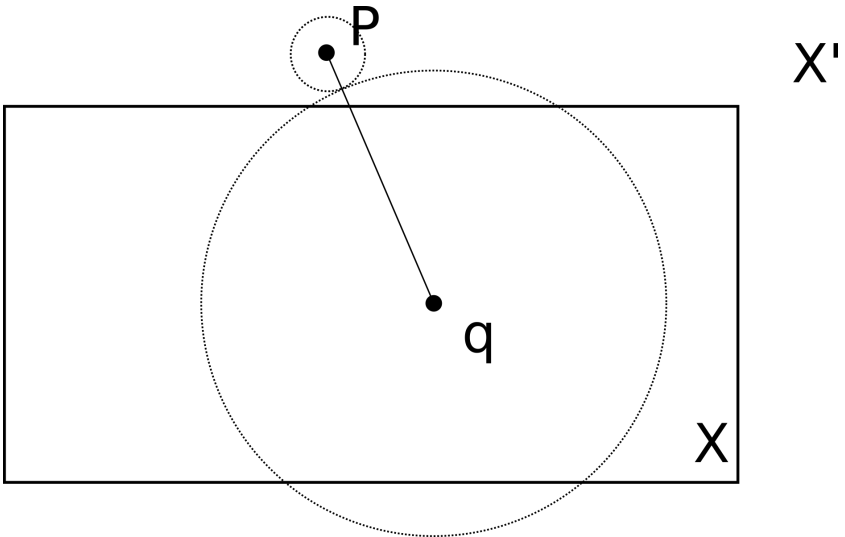
Rysunek 29: Nieważne, co A myśli o sobie, jeżeli otoczmy je kulą, to jest ograniczone i koniec

kryciem złożonym z $K(x, 1), x \in X$. $F = \left\{ K(x, 1), \forall_{x \in X} \right\}$. F jest pokryciem zbioru X , ale ponieważ X - zwarty, to znaczy, że z pokrycia F możemy wybrać **skończone** podpokrycie, co oznacza, że zbiór X możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem X - ograniczony.



Rysunek 30: Przykrywanie zbioru kulami

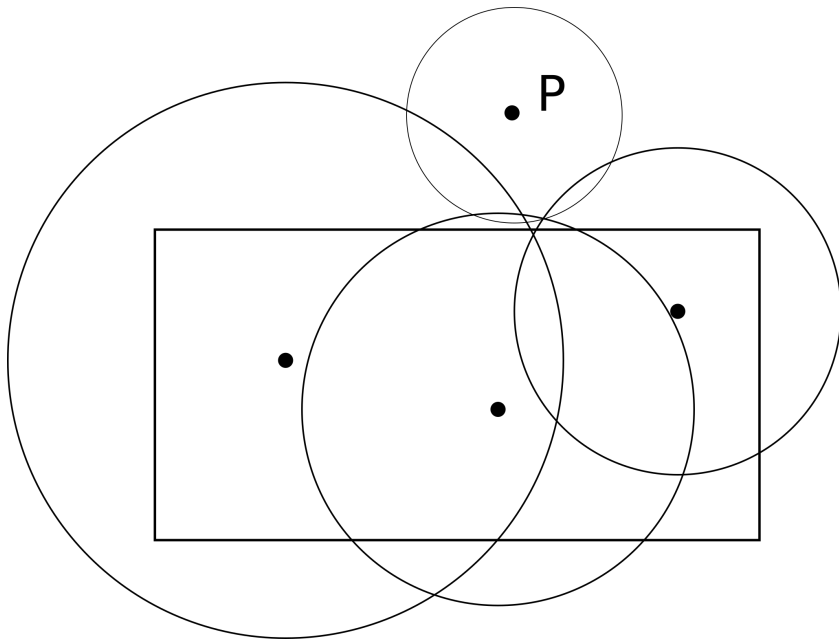
\Leftarrow ₂ Pokażemy, że X - zwarty, to X - domknięty. Pokażemy, że X' - zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego $p \in X' \setminus X$, $\exists K(p, \tilde{r})$, że $K(p, \tilde{r}) \cap X = \emptyset$ co będzie oznaczało, że X' składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy $q \in X$, utwórzmy dwa otoczenia:



$$K(q, r), K(p, r); r = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Widać, że $K(q, r) \cap K(p, r) = \emptyset$. Powtarzamy taką procedurę dla każdego $q \in X$, oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru X kulami $K(q, r_q)$, $q \in X$, ale X jest zbiorem zwartym więc mogę wybrać **skończoną** ilość kul

$K(q_1, r_1), K(q_2, r_2), \dots, K(q_k, r_k)$ będącą pokryciem zbioru X . A to znaczy, że



$$\underbrace{(K(p, r_1) \cap K(p, r_2) \cap \dots \cap K(p, r_k))}_{\text{jest do zbioru niepusty i otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1, r_1) \cup K(q_2, r_2) \cup \dots \cup K(q_k, r_k))}_{\text{Pokrywa cały } X} = \phi.$$

czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu $P : K(p, r_k) \cap \dots K(p, r_k)$, takie, że nie ma punktów wspólnych z X , więc p jest punktem wewnętrznym, czyli X' - otwarty, czyli X - domknięty.

X - domknięty i ograniczony $\implies X$ - zwarty. Niech P - kostka z \mathbb{R}^n , metryka d_2 . Pokażemy, że P jest zwarta.

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

$$\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:

Załóżmy, że P - domknięty i ograniczony i P nie jest zwarty. Co to znaczy, że P nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru P takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli P nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \dots \times [a_n, c_n]$ gdzie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli $P_1 \subset P$, kulę P_1 też możemy podzielić na cztery części itd. W efekcie dostaniemy ciąg kostek $PP_1P_2P_3 \dots P_n \dots$

Weźmy ciąg elementów

$$\begin{aligned}x_0 &\in P \\ x_1 &\in P_1 \\ &\vdots \\ x_n &\in P_n \\ &\vdots\end{aligned}$$

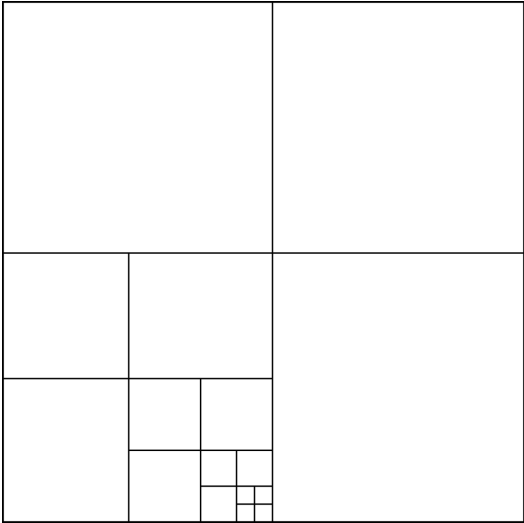
Znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ czyli X_n jest zbieżny. (bo \mathbb{R}^n - zupełna). Niech \tilde{x} będzie granicą $\{x_n\}$ a zbiór $\{P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ jest pokryciem P takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$, to znaczy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall n > N . x_n \in K(\tilde{x}, \varepsilon).$$

Oznacza to, że mogę tak dobrać ε , że w $K(\tilde{x}, \varepsilon)$ będą się zawierać wszystkie $P_i, i > n$. Mogę wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki P .

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

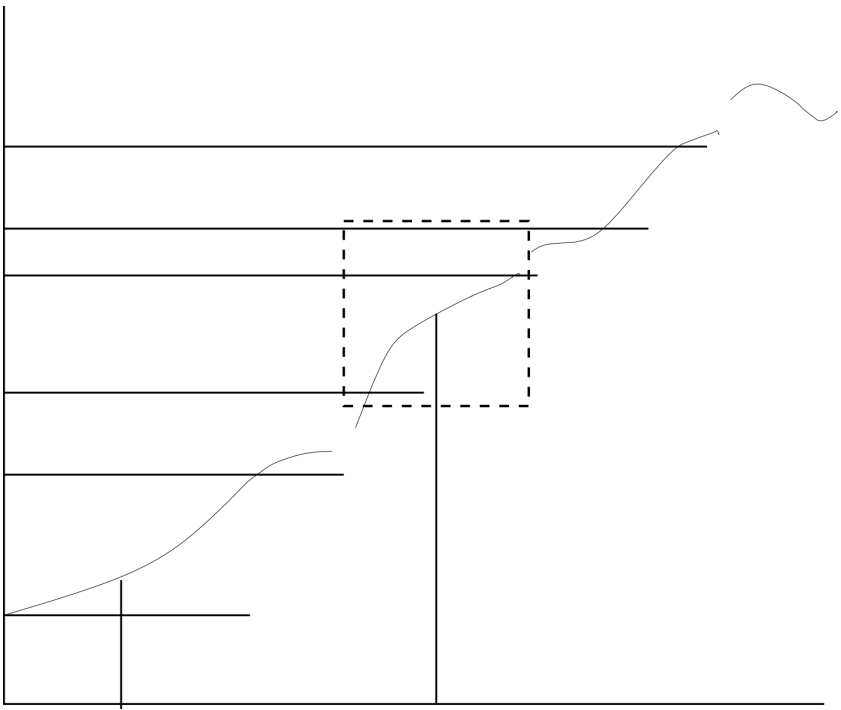
i sprzeczność



Rysunek 31: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszystkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

Wracamy do tw. Lebesgue’a. Obserwacja: Niech D - zwarty, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ - ograniczona i niech $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$. Wówczas:

$$\exists_{\Pi} . |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$



Dowód 3. Skoro $\forall_{x \in A} \lim_{r \rightarrow 0} | \sup_{K(x',r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x',r)} f(x') | < \varepsilon$ To znaczy, że \exists takie, że $| \sup f(x') - \inf f(x') | < \varepsilon$. Jeżeli zbadamy wszystkie kule $K(x, r_\varepsilon)$ $\forall_{x \in D}$ to otrzymamy pokrycie A . Ale A jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że

$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \dots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

Możemy zatem wybrać podział Π zbioru D zgodny z podziałem $(*)$, w wyniku czego,

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

18 Wykład (14.05.2019)

Ostatnio było:

$$A \subset D : \forall_{x \in A} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$
$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

Twierdzenie 16. (Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona.

Wówczas f - (całkowalna na D) \iff (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Dowód. \Leftarrow

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłości jest miary L. zero.



Wprowadźmy zbiór $A_n = \{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Obserwacja 11. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D .

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n , bo przeliczalna suma zbiorów miary L. zero też jest zbiorem miary L. zero.

Uwaga 4. Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L . zero gdy itnieje $P_i \subset D$, (P_i - kostki), że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$. Wiemy, że

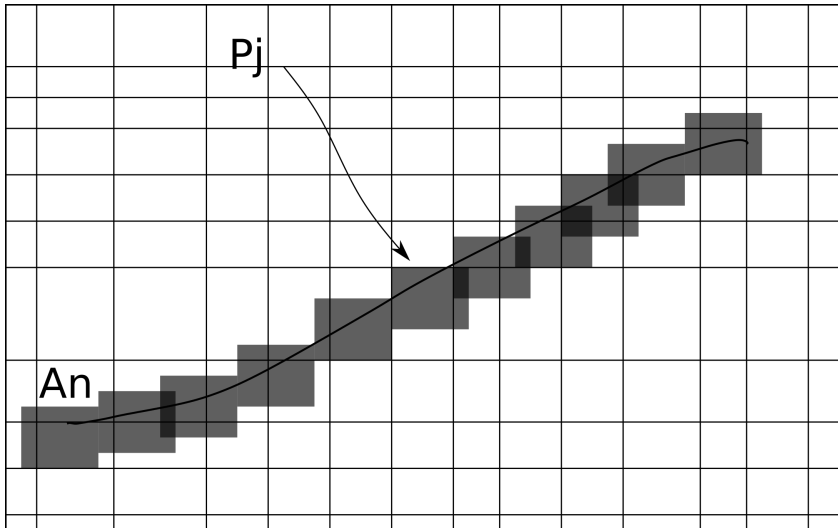
$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wyberzmy zatem taki indeks n dla zbioru A_n , że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wiemy, że A_n - domknięty i ograniczony (bo $A_n \subset D$, a D - kostka w \mathbb{R}^n), to znaczy, że A_n jest zbiorem zwartym, a $\{P_i\}$ jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$

$$\sum_{j=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$, że $\sum |P_i|$ - dowolnie mała. Wybierzmy podział Π zbioru D taki, że Π jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie



A_n zbioru $\bigcup P_j$. Oznacza to, że podział Π możemy podzielić na dwa podziały

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}$$

$$\Delta$$

$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$

$$\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.$$

Δ : każda kostka z $\{P_j\}$ składa się z kostek należących do Π_1

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = |\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) + \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2)|, \text{ ale}$$

$$\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_1} (\sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_i} f) |Q_i| \quad (32)$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, a f - ograniczona na D czyli

$$\exists M \forall x \in D |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$(32) \leq M \cdot \sum |Q_i| \leq M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) &= \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|. \end{aligned}$$

Zatem

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |D| = \frac{1}{n} \cdot \text{const.}$$

czyli możemy tak zwiększyć n , że $\forall_{\varepsilon > 0} \frac{1}{n} \cdot \text{const} < \varepsilon$ \square

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A ?

np. dla A_{2019} działa, ale co dalej. Bo A_k dla $k > n$ też spełniają warunek, że $\frac{1}{k} \cdot \text{const} < \varepsilon$, a A_j dla $j < n$ jest takie, że $A_j \subset A_n$

\implies

Wiemy, że f - całkowalne, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi^S |(f, \Pi) - \int_S f| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n jest zbiorem miary L. zero)

$$\Pi = \{T_i\}$$

$$\frac{\varepsilon}{n} > |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| =$$

$$\sum |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f| |T_i| (*).$$

z podziału T_i wybieram takie kostki P_i , że $|\sup_{x \in P_i} f - \inf_{x \in P_i} f| \geq \frac{1}{n}$.

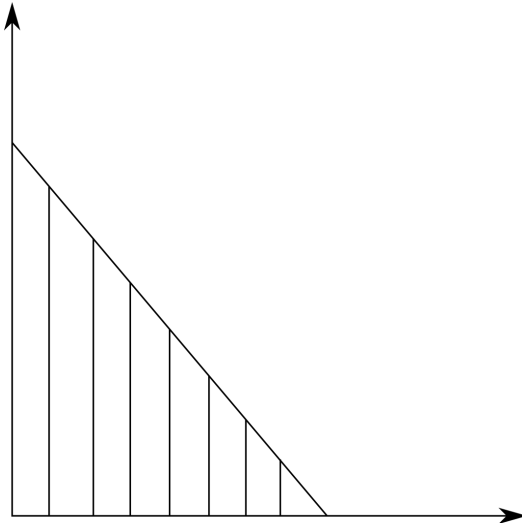
Wówczas

$$(*) \geq \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum |P_i|$$

czyli $\forall \frac{\varepsilon}{n} > \frac{1}{n} \sum |P_i|$, gdzie P_i jest pokryciem A_n .

Czyli A_n jest zbiorem miary L. zero □

Przykład 44. $f(x, y) = x \sin(xy)$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$
 $\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy$,
gdzie $\varphi_1(x) = \int_0^1 x \sin(xy) dy$, $\varphi_2(y) = \int_0^1 x \sin(xy) dx$



Rysunek 32: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y).$$

Twierdzenie 17. (*Fubinięgo*)

Niech $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$, f - ograniczona i całkowna na $A \times B$. Oznaczmy $x^l \in A, y^k \in B$, A, B - kostki.

Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}, \psi(x) = \underline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}.$$

Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

Uwaga 5. całkowność na $A \times B$ nie oznacza całkowności na np. B .

Dowód. Niech $\{Q_i\} = \Pi_1$ - podział zbioru A , $\{R_j\} = \Pi_2$ - podział zbioru B .
Wówczas $\Pi_1 \times \Pi_2$ - podział $A \times B$.

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) &= \\ &= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{\substack{x \in Q_i \\ y \in R_j}} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |R_j| |Q_i| \leqslant \\ &\quad \text{suma dolna dla } \psi(x) \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| = \underset{S}{(\psi, \Pi_1)}. \end{aligned}$$

bo suma dolna \leqslant całki dolnej

Ale $\underline{\int_A} \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|$.

Czyli $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{S}(\psi, \Pi_1)$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro f - całkowna na $A \times B$, to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi \overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi) < \varepsilon.$$

Co oznacza, że $\int_A \psi$ i $\int_B \varphi$ - istnieją i wynoszą $\int_{A \times B} f$ \square

\square

19 Wykład (17.05.2019)

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

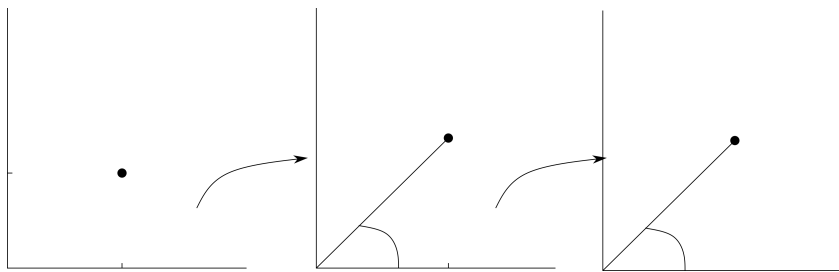
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = | x^2 = t, 2xdx = dt | = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy = | r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(\frac{y}{x}) | = \int dr \int d\varphi f(r, \varphi)??.$$



Rysunek 33: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie $(x, y) \rightarrow (x, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} \int dx \int dy f(x, y) &= \| y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi \| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\ &= \| x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi \| = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\ &= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli } "??" = r. \end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. ($y \rightarrow r$), ($x \rightarrow \varphi$)

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dx dy &= \| y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \| = \\ &= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = \| x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi \| = \\ &= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\ &= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r. \end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba (r). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej φ , bo $x = r \cos \varphi$ a \cos jest

malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MKTM)

$$\text{Niech } \psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\psi' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\|\psi'\| = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r.$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $\varphi : A \rightarrow A$, $A \subset \mathbb{R}^n$, φ - klasy \mathcal{C}^1 , φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , to możemy przedstawić φ jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia $n - 1$ zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

Dowód. (coś w rodzaju dowodu)
 φ możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pytanie 27. Czy istnieje odwzorowanie $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$ takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$(t_{i \neq j})$ mogą zostać zamiast zamieniać je na x_i . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że φ - klasy \mathcal{C}^1 i φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 i $\varphi : A \rightarrow A$. Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!

$\det \varphi' \neq 0$, czyli w macierzy φ' istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np. $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$. Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i $\det \eta' \neq 0$, więc istnieje η^{-1} .

Czyli $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$ \square

\square

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (33)$$

Twierdzenie 18. (O zamianie zmiennych)

Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w \mathbb{R}^n i $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$, $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowalna. ξ - klasy C^1 na Ω , ξ^{-1} klasy C^1 na Θ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (34)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

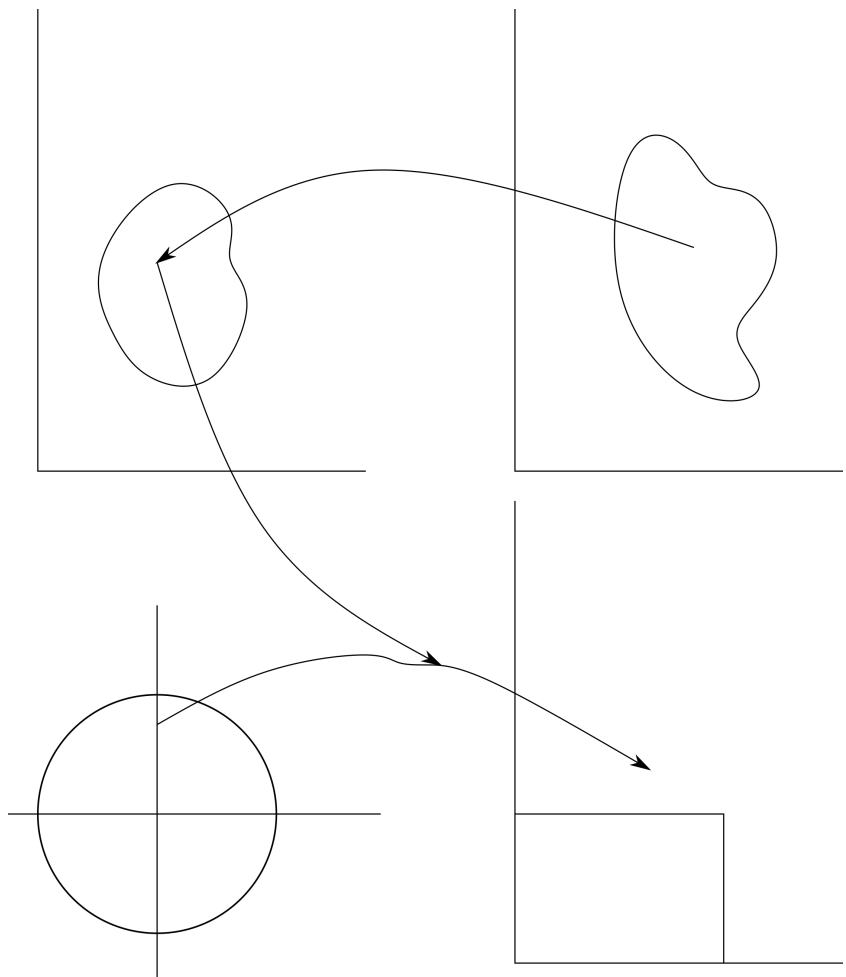
Dowód. (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla $n = 1$ - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|.$$



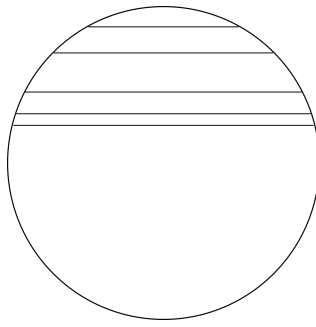
Rysunek 34: $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic: $\left(\int_a^b f\right)$ oznacza, że zakładamy, że $a \leq b$. Dowód przeprowadzamy dla $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że ξ nie zamienia jednej zmiennej.

Obserwacja 12. Niech $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$, niech $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$. Wówczas $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$, zatem $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku $n - 1 \rightarrow n$ i wiemy, że dla $n - 1$ wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$



Rysunek 35: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

Mając zbiór Θ , zdefiniujemy zbiór Θ_a , który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$.

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt_2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n = \\ = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ = [a = t_i] = \\ = \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n. \end{aligned}$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

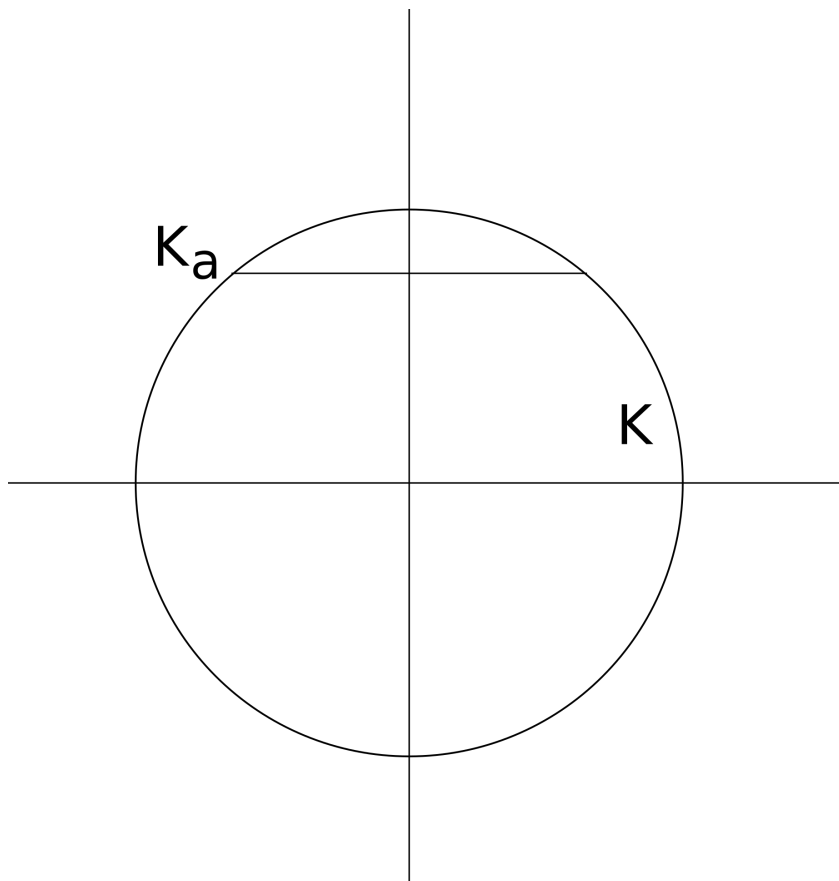
Przykład 45. Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I , to tym bardziej I^2 ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$ Mamy

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p \\ \frac{\pi}{2} \left[\lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{-(0)^2} \right] \right] &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

czyli $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



20 Wykład (21.05.2019)

20.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 46. (sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie)

Definicja 26. Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞), φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞) nazywamy mapą.

Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M .

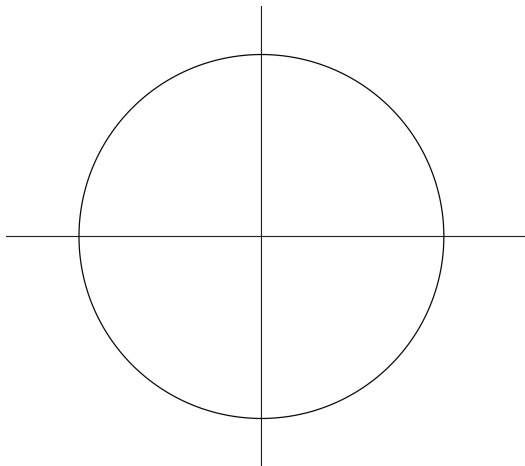
Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M . Połowa tego zbioru to niech będzie U_1 , i ono się przecina z U_2 . U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w \mathbb{R}^2 . Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U ?

Definicja 27. $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ - mapy na M .

U_1 i U_2 nazywamy zgodnymi jeżeli

a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$)



Rysunek 36: $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Przykład 47.

$$U_1 = \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \rightarrow x$$

$$U_2 = \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \rightarrow y$$

$$U_3 = \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \rightarrow x$$

$$U_4 = \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \rightarrow y.$$

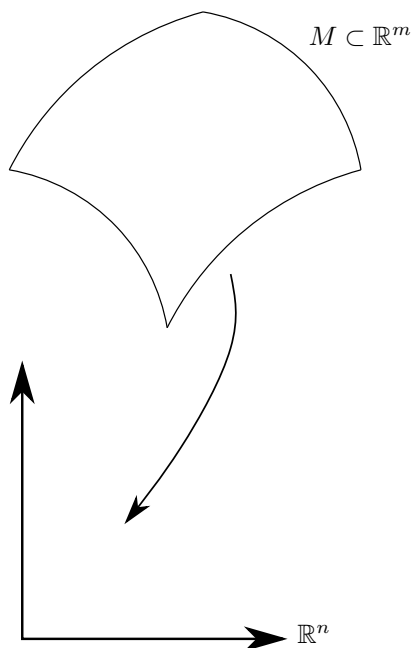
U_1 i U_3 oraz U_2 i U_4 są zgodne. Czy zgodne są U_1 i U_2 ? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, ale $\varphi_1(x, y) \in U_1 \rightarrow x$.

Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$,

czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.

Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ przerzuca $]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze $]0, 1[$ jest.

Definicja 28. Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór M wraz z atlasem, który pokrywa cały M nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).



Rysunek 37: Wymiar pęczka może być większy! $m > n$

21 Wykład (24.05.2019)

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech M - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma(t) \in M$ nazywamy krzywą na M . σ jest klasy \mathcal{C}^∞

Przykład 48. (*spirala na walcu*)

$$\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

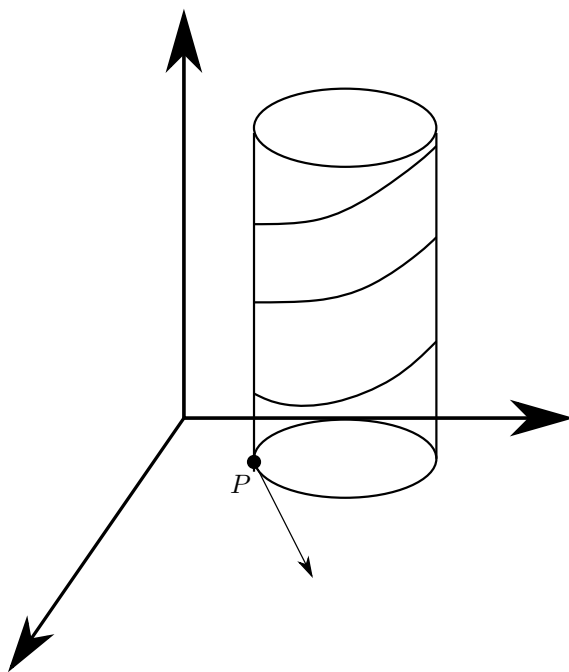
Definicja 29. Niech $p \in M$, σ_1, σ_2 - krzywe na M takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że σ_1 i σ_2 są styczne w punkcie P , jeżeli

$$\left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt $P \in M$. Na tym zbiorze wprowadzamy relację: $\sigma_1 \sim \sigma_2$ jeżeli σ_1 i σ_2 są styczne. Jeżeli σ krzywa przechodząca przez punkt P , to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie P nazwiemy $v =$

$\begin{matrix} [\sigma] \\ \text{klasa} \\ \text{równoważności} \end{matrix}$

Przykład 49. Weźmy krzywą $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


Przykład 50. Niech $f(p) = C \quad \forall_{p \in M}$. Ile wynosi $v(f)$?

$$\begin{aligned} v(f) &= v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli $v(f) = 2v(f)$, czyli $v(f) = 0$ (pochodna stałej = 0)

Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.

Pytanie 28. Jak można w praktyce zrealizować taki operator?

Niech $v \in T_p M, v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

Definicja 30. Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie $p \in M$ oznaczamy przez $T_p M$ i nazywamy przestrzenią styczną.

Chcemy wyposażyć $T_p M$ w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań. Niech $v_1, v_2 \in T_p M$ i $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$. Wówczas

$$\begin{aligned} v_1 \diamond v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)] \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot v_1 &\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1))]. \end{aligned}$$

$T_p M$ wraz z działaniami (\diamond, \cdot) ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M, T_p M\}$$

nazywamy wiązką styczną.

Pytanie 29. Czy w TM możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?

Odpowiedź: NIE DA SIĘ

Definicja 31. Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie P oznaczamy przez $D_p M$

Chcemy nadać $D_p M$ strukturę przestrzeni wektorowej.

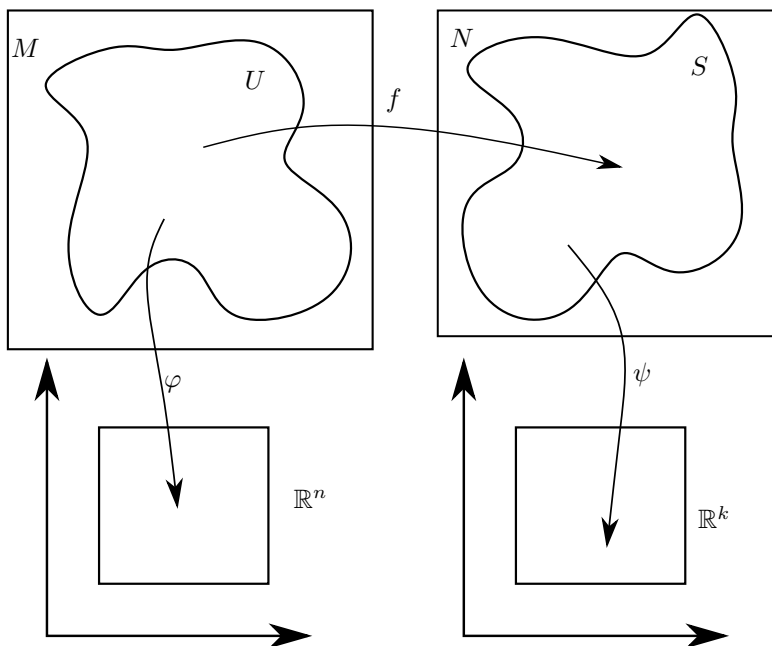
$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in D_p M, f \in C^\infty(M) &\implies (v_1 \diamond v_2)f \stackrel{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f) \\ \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha \bowtie v_1)f &= \alpha \cdot v_1(f) \end{aligned}$$

Pytanie 30. Co to znaczy, że f - klasy $C^\infty(M)$?

Jeżeli $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ - jest klasy C^∞ .

Związek między $T_p M$, a $D_p M$:

Niech $v = 5e_x + 6e_y \in T_p M$. Czy znajdziemy odwzorowanie z $T_p M$ do $D_p M$, (które dokładnie jednemu v przyporządkowałoby jeden element). \rightarrow izomorfizm między $T_p M$ i $D_p M$.



Rysunek 38: f nie musi być bijekcją jakby co

21.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, f - klasy $\mathcal{C}^\infty(M)$

niech $v(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, takie, że

$$\forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{f \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(\alpha f) = \alpha v(f)$$

$$\forall_{f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)} v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p)v(f).$$

$v(\cdot)$ spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie p .

22 Wykład (28.05.2019)

Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$v = [\sigma], v \in T_p M, v() \in D_p M$$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} v() &= ? \cdot ? + ? \cdot ? + ? \cdot ? = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}. \end{aligned}$$

Czyli jeżeli $v \in T_p M$ i $v \in [\sigma]$, to wiemy, że

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1 + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2 + \dots + \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n = \\ &= \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \\ &= \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} = v(f). \end{aligned}$$

Zatem

$$v() = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Przykład 51. Więc niech $v = 2e_x + 3e_y \rightarrow v() = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$.

Wniosek: mając izomorfizm między $T_p M$ i $D_p M$ możemy zapisać bazy:

$$T_p M = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

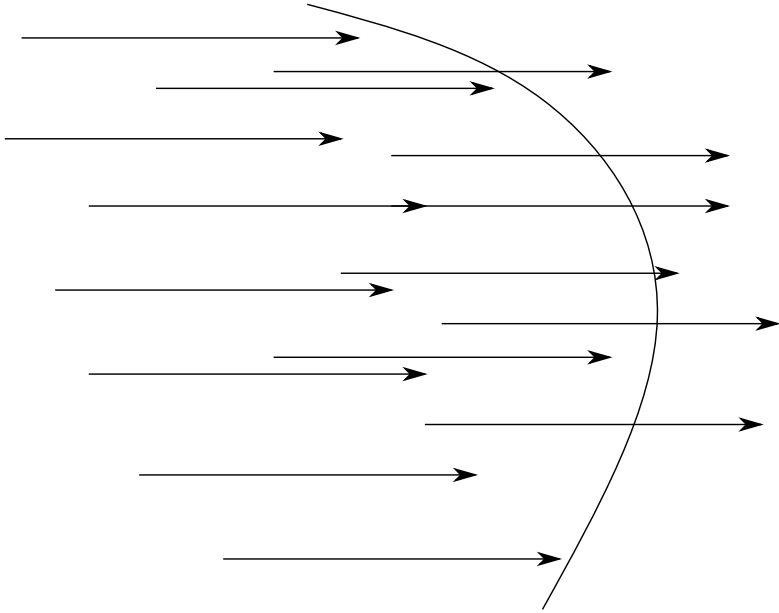
To wtedy

$$D_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle.$$

np. $v = 7e_r + 8e_\varphi \rightarrow v() = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (często użyjemy bazy z $D_p M$ jako bazy $T_p M$).

Definicja 32. Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Zbiór jednoform ($p \in M$) oznaczamy przez $T_p^* M$ (lub $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$)

Skoro $T_p^* M$ jest dualna do $T_p M$, to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną. $T_p^* M = \langle dx^1, dx^2, \dots, dx^n \rangle$, gdzie $\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_j^i$



Rysunek 39: Strumień przez balonik

Przykład 52. Niech $\Lambda^1(M) \rightarrow \omega = 7dx + 3dy, v \in T_p M = 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$, wówczas

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, v \rangle &= \left\langle 7dx + 3dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= \left\langle 7dx, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \left\langle dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= 7 \cdot 2 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 7 \cdot 4 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \cdot 2 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 3 \cdot 4 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
 &= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4.
 \end{aligned}$$

Przykład 53.

$$\begin{aligned}
 v &= A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz = \\
 &= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.
 \end{aligned}$$

Definicja 33. Zbiór wszystkich odwzorowań $T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k -formami.

Definicja 34. Niech $\alpha \in T_p^* M, \beta \in T_p^* M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$.

Odwzorowanie $\wedge : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \Lambda^2(\theta), \theta \in M$ nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Przykład 54. Niech $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y}, w = 2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tzn. $\alpha \wedge \alpha = 0$. Ważny przykład:

Przykład 55.

$$\begin{aligned} \alpha &= A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\ \alpha \wedge \beta &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\ &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\ &+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\ &+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y) dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

Definicja 35. Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \rightarrow \mathbb{R}$$

(funkcje nazywamy zero-formami $f \in \Lambda^0(\theta)$)

$$\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

$$dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).$$

Przykład 56. $f(r, \theta, \varphi)$ - funkcja z \mathbb{R}^3 w \mathbb{R}^1 .

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\alpha = 7x^2 y dx$$

$$d\alpha = d(7x^2 y) \wedge dx = \left(\frac{\partial}{\partial x} (7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx.$$

Przykład 57. Niech $F = -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

$$\begin{aligned}
 dF &= \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} dy - \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dx + \\
 &+ \left(-\frac{\partial E_y}{\partial x} dx - \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dy + \\
 &+ \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} dx - \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) \wedge dt \wedge dz + \\
 &+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) \wedge dy \wedge dz + \\
 &+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) \wedge dz \wedge dx + \\
 &+ \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \\
 &= \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dy + \\
 &+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dy \wedge dz + \\
 &+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dz + \\
 &+ \underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)}_{\nabla B} dx \wedge dy \wedge dz.
 \end{aligned}$$

I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część) $dF = 0$

23 Wykład (31.05.2019)

Definicja 36. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T_p^*M \in \Lambda'(M)$, wówczas $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(M)$ i dla $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p^*M$,

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k; v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_1) \dots \alpha_k(v_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(v_k)\alpha_2(v_k) \dots \alpha_k(v_k) \end{bmatrix}.$$

Uwagi do operatora d ($dd = 0$):

Niech $M = \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \in \Lambda^0(M)$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ ddf &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy\right) \wedge dy \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) dz \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dz \wedge dx = 0. \end{aligned}$$

Niech $\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dz \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) dz \wedge dx \\ d d\alpha &= \left(\pm \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}\right)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\beta = A_x dy \wedge dz + A_y dx \wedge dz + A_z dy \wedge dz$$

$$d\beta = 0$$

$$dd\beta = 0.$$

Niech $M = \mathbb{R}^4$, $A = \phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$.

$$dA = \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x} \right) dx \wedge dt + \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}}_{E_y} \right) dy \wedge dt + \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}}_{E_z} \right) dz \wedge dt +$$

$$\left(\underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}_{B_z} \right) dx \wedge dy + \left(\underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}}_{B_x} \right) dy \wedge dz + \left(\underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}}_{B_y} \right) dz \wedge dx$$

$$ddA = 0.$$

niech $dA = F$

$$dF = 0.$$

Pytanie: niech M - rozmaitość wymiaru 3 (bo mamy bijekcję między $\theta \in M$ i \mathbb{R}^3). Czy istnieje $\Lambda^4(M)$?

niech $M = \mathbb{R}^3$

$$\Lambda^0(M) \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$$

$$\dim \Lambda^0(M) = 1$$

$$\Lambda^1(M) \quad \alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$\Lambda^1(\eta) = \underbrace{\langle dx, dy, dz \rangle}_3$$

$$\Lambda^2(M) \quad \beta = A_z dx \wedge dy + A_y dz \wedge dx + A_x dy \wedge dz \quad \Lambda^2(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz \rangle}_3$$

$$\Lambda^3(\eta) \quad \gamma = f dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\Lambda^3(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy \wedge dz \rangle}_1$$

Niech $M = \mathbb{R}^4$.

$$\Lambda^0(M) \quad f(t, x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Lambda^1(M) \quad \alpha = A_t dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

$$\Lambda^2(M) \quad \beta = A_1 dt \wedge dx + A_2 dt \wedge dy + A_3 dt \wedge dz + B_1 dy \wedge dx + B_2 dz \wedge dx + C_1 dz \wedge dy$$

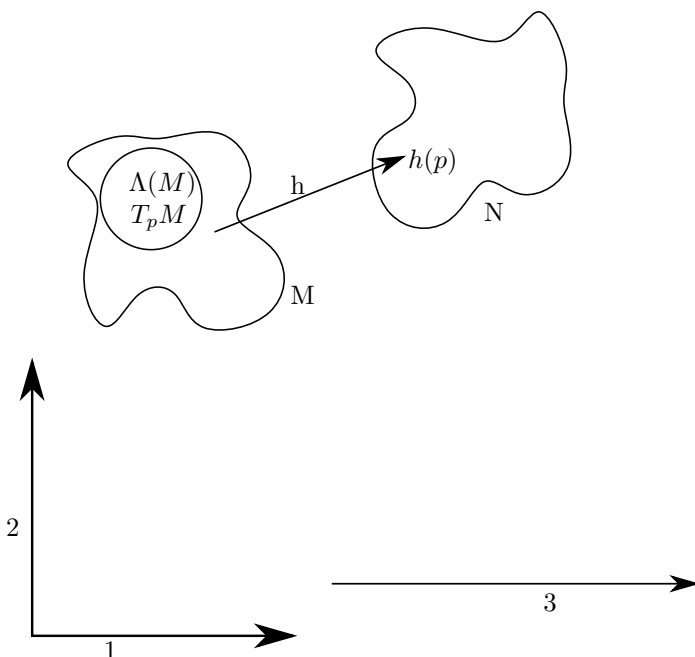
$$\Lambda^3(M) : \quad \gamma = C_1 dy \wedge dt \wedge dx + C_2 dz \wedge dt \wedge dx + D_1 dz \wedge dt \wedge dy + E_1 dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\Lambda^4(M) \quad \delta = g dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

23.1 Pchnięcia i cofnięcia

Definicja 37. Niech M, N - rozmaitości $\dim M = n, \dim N = k$ i niech $h : M \rightarrow N$. (h nie musi być bijekcją !!!)

Niech $p \in M$. Pchnięciem punktu p w odwzorowaniu h nazywamy punkt $h_*(p) \stackrel{\text{def}}{=} h(p)$



Przykład 58. Niech $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_*(p) = 3$$

$$M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, p = \frac{\pi}{2}.$$

$$h_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

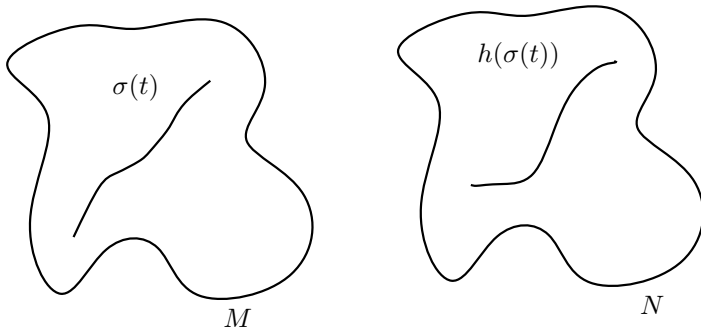
Niech $\sigma(t)$ - krzywa na M . Pchnięciem krzywej σ w odwzorowaniu h nazywamy krzywą $h_*(\sigma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} h(\sigma(t))$

Niech $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$. Cofnięciem funkcji f w odwzorowaniu h nazywamy funkcję

$$h^* f(p) = f(h(p)).$$

Przykład 59. $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$, $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$, $h(x, y) = x + y$.

$$h^* f(x, y) = f(h(x, y)) = \begin{bmatrix} 2(x + y) \\ x + y \end{bmatrix}.$$



Definicja 38. *Pchnięciem wektora V w odwzorowaniu h nazywamy wektor*

$$h_*V = [h(\sigma)], h_*v \in T_{h(p)}N.$$

Przykład 60. *Niech $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, h(x, y) = x + 2y, v = 2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}$. Co to jest h_*v ?*
 $p = (1, 2) = (\varphi^1(p), \varphi^1(p))$

$$\sigma(t) : \frac{d}{dt}(\varphi(\sigma(t)))|_{t=0}$$

$$\varphi(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 3t+2 \end{bmatrix}$$

$$h[\sigma(t)] = 2t+1+2(3t+2)$$

$$h[\sigma(t)] = 8t+5$$

$$[h[\sigma(t)]] = 8\frac{\partial}{\partial t} \in t_s N.$$

$\dim M = n, \varphi(\sigma(t)) = (\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t))) , v \in T_p M.$

$$v = \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

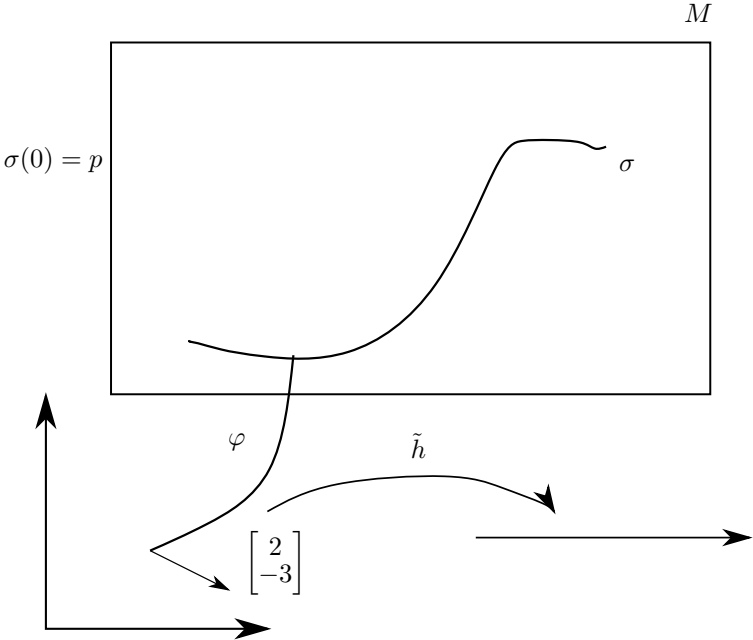
$$\frac{d(\varphi \circ h(\sigma(t)))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\psi \circ h \circ \varphi^{-1} \sigma)_{t=0} = \frac{d}{dt} (\tilde{h} \circ \tilde{\sigma}(t)).$$

$$= \frac{d}{dt} \tilde{h}(\tilde{\sigma}_1(t), \tilde{\sigma}_2(t), \dots, \tilde{\sigma}^n(t))_{t=0} = \tilde{h}'_{\tilde{\sigma}(0)} \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}_{t=0} = \tilde{h}' \cdot v.$$

Czyli ostatecznie $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, \tilde{h}(x, y) = x + 2y \rightarrow \tilde{h}(x, y) = [1, 2].$

$$h_*v = [1, 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 6 = 8 \frac{\partial}{\partial t}.$$

Niech $\alpha \in \Lambda^1(?)$ - pytanie: czy formy się pcha, czy cofa?



Rysunek 40: $\tilde{h} = \psi h \varphi^{-1}$

24 Wykład (04.06.2019)

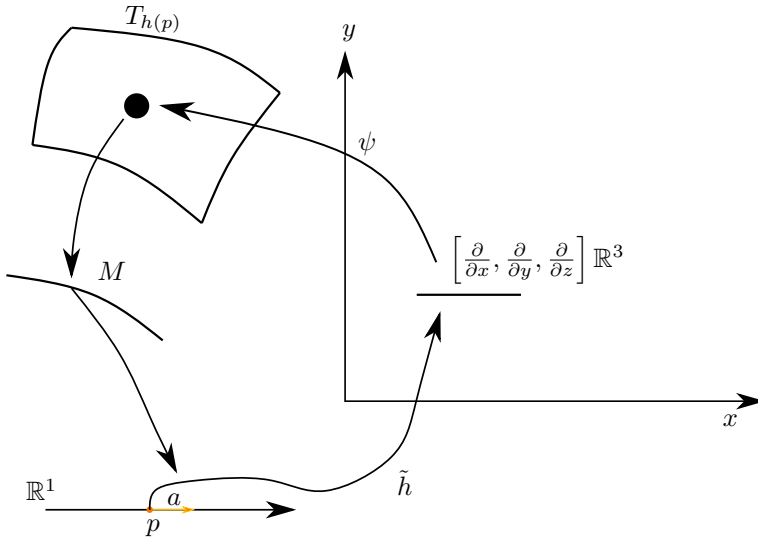
Przykład 61. (na pchnięcie wektora)

Niech $M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$

Niech $p \in \mathbb{R}^1$, niech $v \in T_p M, v = a \frac{\partial}{\partial t}$. $v = [\sigma], \tilde{\sigma}(t) = at + p, \sigma(c) = p, \frac{d\tilde{\sigma}(t)}{dt}|_{t=0} = a$.

$$h_x \sigma = \begin{bmatrix} f(at + p) \\ g(at + p) \\ r(at + p) \end{bmatrix}, h_x v = [h_x \sigma], \frac{d}{dt}(\tilde{h}_x \sigma)|_{t=0}.$$

$$h_x v = \begin{bmatrix} af'(p) \\ ag'(p) \\ ar'(p) \end{bmatrix} = af'(p) \frac{\partial}{\partial x} + ag'(p) \frac{\partial}{\partial y} + ar'(p) \frac{\partial}{\partial z}.$$

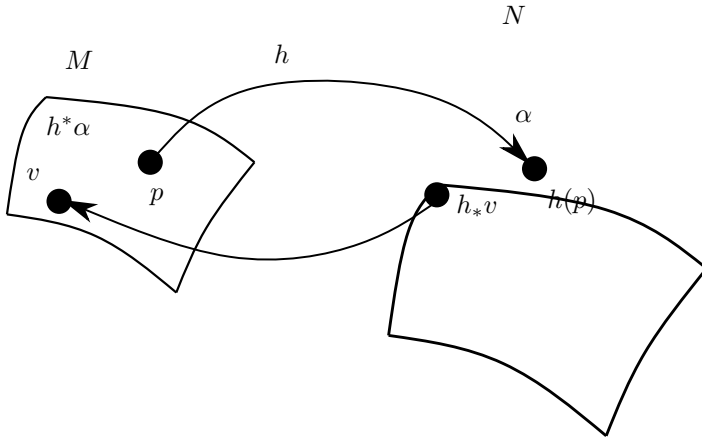


Definicja 39. Niech M, N - rozmaitości, $h : M \rightarrow N$ i niech $p \in M, \alpha \in T_{h(p)}^*N$.
Cofnięciem formy α w odwzorowaniu h nazywamy formę $h^*\alpha \in T_p^*M$, taką, że $\langle h^*\alpha, v \rangle = \langle \alpha, h_*v \rangle \quad \forall_{v \in T_pM}$ i ciągła. Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$ i $v_1, \dots, v_k \in T_p(M)$, to

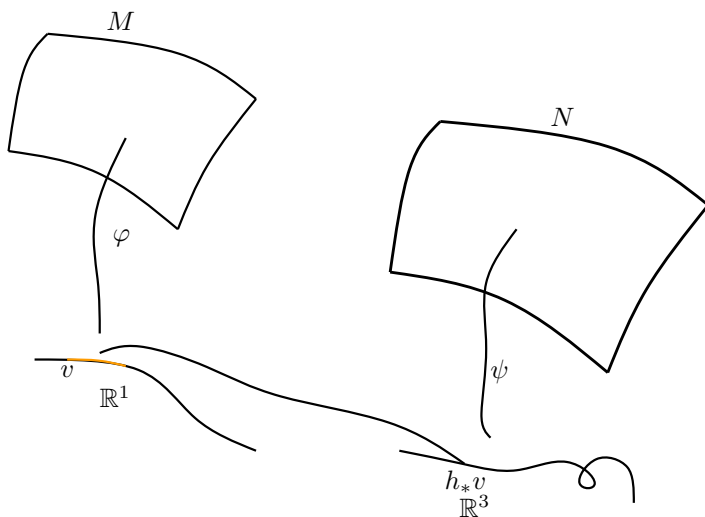
$$h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k), v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \langle h^*\alpha_1, v_1 \rangle & \langle h^*\alpha_2, v_1 \rangle & \dots & \langle h^*\alpha_k, v_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h^*\alpha_k, v_k \rangle & \langle h^*\alpha_k, v_k \rangle & \dots & \langle h^*\alpha_k, v_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = (h^*\alpha_1) \wedge (h^*\alpha_2) \wedge \dots \wedge h^*(\alpha_k).$$



Rysunek 41: $\langle h^*\alpha, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha, h_*v \rangle$



Przykład 62. (wstępny)

Niech $\alpha = 3(x^2 + y^2)dx - 2xdy + 2z^2dz$, $\alpha \in \Lambda^1(N)$ (jednoformy nad N , $\dim N = 3$, chociaż można dać więcej jak się chce).

$h(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{bmatrix}$. Czym jest $h^*\alpha$?

$$\langle h^*\alpha, v \rangle = \langle \alpha, h_*v \rangle.$$

Niech $v \in T_pM$ i $v = a \frac{\partial}{\partial t}$. Zatem $h_*v = a \cos(p) \frac{\partial}{\partial x} - a \sin(p) \frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1 \frac{\partial}{\partial z}$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, h_*v \rangle &= \langle 3(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dx - 2(\sin(t)) dy + 2(t^2) dz, h_*v \rangle = \\ &= \left\langle 3dx - 2\sin(t)dy + 2t'dz, a \cos(t) \frac{\partial}{\partial x} - a \sin(t) \frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1 \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{t=p} \\ &= 3a \cos(t) + 2a \sin^2(t) + at^2|_{t=p} = \\ &= \left\langle (3 \cos(t)dt + 2a \sin^2(t) + at^2) |_{t=p}, a \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \\ &\text{czyli } h^*\alpha = (3 \cos(t) + 2 \sin^2(t) + t^2) dt \end{aligned}$$

Na skróty!

$$\begin{array}{ll}
 x = \sin(t) & dx = \cos(t)dt \\
 y = \cos(t) & dy = -\sin(t)dt \\
 z = t & dz = dt.
 \end{array}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 h^*\alpha &= 3(\sin^2(t) + \cos^2(t))\cos(t)dt - 2\sin(t)(-\sin t dt) + 2t^2 dt \\
 &= (3\cos(t) + 2\sin^2(t) + 2t^2) dt.
 \end{aligned}$$

Przykład 63. Niech $M = \mathbb{R}^4, N = \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\
 c &= 1 \\
 h: \quad t &= \gamma(t' - vx') \\
 x &= \gamma(x' - vt') \\
 y &= y' \\
 z &= z'.
 \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned}
 dt &= \gamma(dt' - vdx') \\
 dx &= \gamma(dx' - vdt') \\
 dy &= dy' \\
 dz &= dz'.
 \end{aligned}$$

Chcemy cofnąć naszą formę. Na fizyce nie używamy słowa cofnięte.

$$\begin{aligned}
 F' &= -E_x(\gamma(dt' - vdx')) \wedge \gamma(dx' - vdt') - E_y\gamma(dt' - vdx') \wedge dy' = \\
 &= -E_x\gamma^2(1-v^2)dt' \wedge dx' - E_y\gamma dt' \wedge dy' + E_y\gamma v dx' \wedge dy' = \\
 &= -E_x \frac{1}{1-v^2}(1-v^2)dt' \wedge dx' - E_y\gamma dt' \wedge dy' + \gamma v E_x dx' \wedge dy' \\
 F' &= -E'_x dt' \wedge dx' - E'_y dt' \wedge dy' + B'_z dx' \wedge dy'
 \end{aligned}$$

Czyli

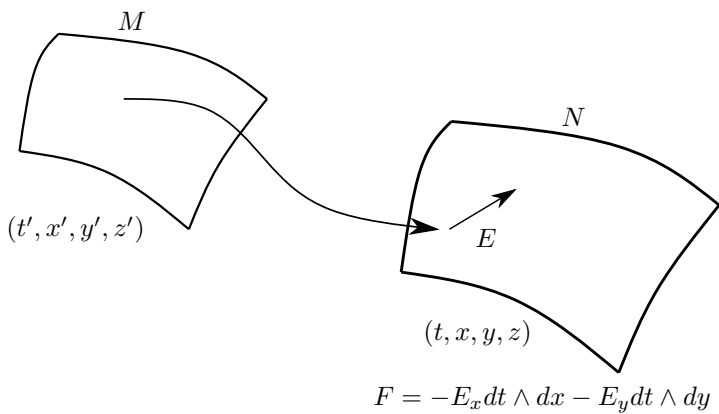
$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x \\
 E'_y &= \gamma E_y \\
 B'_z &= \gamma v E_y.
 \end{aligned}$$

Obserwacja: Niech $\alpha \in \Lambda^1(N)$, $\dim N = k$, niech M - rozmaitość, $\dim M = n$ i $h: M \rightarrow N$. Wówczas

$$h^*f \in \Lambda^0(M).$$

Oraz

$$d(h^*f) = h^*(df).$$



Dowód. Skoro $f \in \Lambda^0(N)$, to $f(x^1, x^2, \dots, x^k)$,
 $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} x^k$.

$$\langle h^*(df), v \rangle = \langle df, h_x v \rangle, v \in T^p M.$$

Niech $V \in T_p M$.

$$\tilde{h}(t_1, \dots, t_n) = \begin{bmatrix} h_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ h_k(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n}$, to $h_* v = \left(\begin{bmatrix} h' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}}.$

$$\begin{aligned} h_x v &= \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial h_k}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned} \langle df, h_*v \rangle &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial t^1} a_1 + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n} a_n \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \left(\frac{\partial h_k}{\partial t^1} a_n + \dots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n} a_n \right) = \\ &= \left\langle df(h_1(t_1, \dots, t_n), h_2(t_1, \dots, t_n), \dots, h_k(t_1, \dots, t_n)), a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle \end{aligned}$$

.

□

25 Wykład (07.06.2019)

W ostatnim odcinku:

M, N - rozmaitości, $\dim M = n, \dim N = k, h : M \rightarrow N, \langle h^* \alpha, v \rangle = \langle \alpha, h_* v \rangle$ i ogólnie, jeżeli

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(N),$$

to

$$\langle h^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k), v_1, \dots, v_n \rangle = \langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, h_* v_1, \dots, h_* v_n \rangle.$$

Przykład 64. Niech $N = \mathbb{R}^2$ i $M = \mathbb{R}^1, \alpha = 7dx \wedge dy \in \Lambda^2(N)$,

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \end{bmatrix} \rightarrow (x = 2t, y = 3t \implies dx = 2dt, dy = 3dt).$$

$$h^* \alpha = 7 \cdot 2dt \wedge 3dt = h^* \alpha = 0.$$

Ostatnio chcieliśmy pokazać, że $d(h^* f) = h^*(df)$. To jest istotne w kontekście tej dwumorfizmu przekształcenia transformacji Lorentza co była ostatnio.

$$d(h^* F) = 0 \implies dF = 0, h^* F \xrightarrow{h} F.$$

Wzięliśmy sobie $f : N \rightarrow \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_k)$. Potem mieliśmy

$$h : M \rightarrow N : h(t_1, \dots, t_n) = \begin{bmatrix} h^1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ h^k(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}$$

i chcieliśmy pokazać, że $h^*(df) = d(h^* f)$.

Wiemy, że

$$\langle h^*(df), v \rangle = \langle df, h_* v \rangle \quad (v \in T_p M : v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n}).$$

Przepchnięcie wektorka

$$\begin{aligned} h_* v &= \left([h'] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h^k}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \\ &= \left(a_1 \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \left(a_1 \frac{\partial h^k}{\partial t^1} + \dots + a_n \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

$$\begin{aligned}
\langle df, h_x v \rangle &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^2} a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} a_n + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} a_1 + \\
&+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} a_n = a_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) + \\
&+ \dots + a_n \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) = \\
&= \left\langle ?, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) dt^1 + \dots + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) dt^n, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle = \\
&= \left\langle \underbrace{f(h^1(t^1, \dots, t^n), h^2(t^1, \dots, t^n), \dots, h^k(t^1, \dots, t^n))}_{h^* f}, \right. \\
&\left. \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle = \langle d(h^* f), v \rangle
\end{aligned}$$

co daje

$$d(h^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)) = h^*(d(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)) \quad \square.$$

25.1 Bazy w $T_p M$

Obserwacja: Niech M - rozmaitość i $\langle | \rangle$ - iloczyn skalarny. Niech e_1, \dots, e_n - baza $T_p M$. Wówczas, jeżeli $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ i $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$).

$$\begin{aligned}
\langle v | w \rangle &= \langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \rangle = \\
&= a_1 b_1 \langle e_1 | e_1 \rangle + a_1 b_2 \langle e_1 | e_2 \rangle + \dots + a_1 b_n \langle e_1 | e_n \rangle + \dots + a_n b_n \langle e_n | e_n \rangle = \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \langle e_1 | e_2 \rangle & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & & \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_n | e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Macierz $[g_{ij}]$ nazywamy tensorem metrycznym $\det [g_{ij}] \stackrel{\text{ożn}}{=} g$. $[g_{ij}]^{-1} \stackrel{\text{ożn}}{=} [g^{ij}]$ - macierz odwrotna.

W zwykłym $\mathbb{R}^4 : [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, p. Minkowskiego:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \mu, \nu = 0, \dots, 3$$

Bazy w \mathbb{R}

$$M = \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{bmatrix} x, y \\ e_x, e_y \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} r, \varphi \\ e_r, e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$[?] .$$

$$x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi$$

$$h^*(e_r) = \left([h'] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, h^*(e_\varphi)$$

$$h(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}, h' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$h^*(e_r) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}_{e_x, e_y}, e_r = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y$$

$$z = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y$$

$$h^*(e_\varphi) = [h'] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{bmatrix}, e_\varphi = -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \langle e_1 | e_1 \rangle & \langle e_1 | e_2 \rangle \\ \langle e_2 | e_1 \rangle & \langle e_2 | e_2 \rangle \end{bmatrix}, [g_{ij}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \langle e_x | e_x \rangle = 1, \langle e_x | e_y \rangle = 0$$

$$\langle e_r | e_r \rangle = \langle \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y | \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y \rangle = \cos^2 \varphi \langle e_x | e_x \rangle + \sin^2 \varphi \langle e_y | e_y \rangle$$

$$\langle e_r | e_\varphi \rangle = \langle \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y | -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y \rangle = 0$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|^2 = \langle e_\varphi | e_\varphi \rangle = \langle -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y | -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y \rangle = r^2.$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| = r, [g_{ij}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

baza $\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle$ nie jest bazą ortonormalną!!!

$$e_x, e_y, e_z \rightarrow g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \text{jest fajnie.}$$

$$e_r, e_\theta, e_\varphi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ r^2 & & \\ r^2 & \sin^2 \theta & \end{bmatrix}, \|e_\theta\| = r, \|e_\varphi\| = r \sin \theta$$

Przykład 65. Dostałem wektorek $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ w sferycznych. Ale w jakiej konkretnie bazie? W fizyce mierzone wielkości np. wektorowe podajemy zawsze we współrzędnych ortonormalnych. We współrzędnych sferycznych mamy dwie bazy: - ortogonalną: $e_r, e_\theta, e_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$

- ortonormalną: $i_r, i_\theta, i_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$. Więc jeżeli ktoś powiedział, że dostał $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

to znaczy, że ma $2 \frac{\partial}{\partial r} + 3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 4 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Obserwacja 13. niech $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ i niech $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ i niech

$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ - tensor metryczny. Wówczas wiemy, że

$$\langle v | w \rangle = [v]^T [g_{ij}] [w] = \underbrace{\left[a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + a_3 g_{31}, \sum_{i=1}^3 a_i g_{i2}, \sum_{i=1}^3 a_i g_{i3} \right]}_{\langle v |}$$

Ale w sumie to mogę wziąć coś takiego $\langle v |$.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i g_{i1} \right) dx^1 + \left(\sum_{i=1}^3 a^i g_{i2} \right) dx^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a^i g_{i3} \right) dx^3 = . \\ & = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i g_{ij} dx^j = a^i g_{ij} dx^j . \end{aligned}$$

Zapomniałem o sumach, bo

$$a^i b_i \stackrel{\text{ozn}}{=} a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3,$$

w odróżnieniu od

$$a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + \dots$$

(Konwencja sumacyjna Einsteina).

Ozn. $\sum_{i=1}^3 a^i g_{ik} \stackrel{\text{ozn}}{=} a^i g_{ik} = a_k$

Definicja 40. niech M - rozmaitość wymiaru n , g_{ij} - tensor metryczny na M , operację $\sharp : T_p M \rightarrow T_p^* M$ taką, że dla $v = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}$,

$$v^\sharp = a^i g_{i1} dx^1 + a^i g_{i2} dx^2 + \dots + a^i g_{in} dx^n, i = 1, \dots, n.$$

zadaje izomorfizm między $T_p M$ a $T_p^* M$.

Przykład 66. $v = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \theta} + 9 \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

$$\alpha \in T_p^* M = v^\sharp = 7 q_{11} dr + 8 q_{22} d\theta + 9 q_{33} d\varphi = 7 dr + 8 r^2 d\theta + 9 r^2 \sin^2 \theta d\varphi.$$

26 Wykład (11.06.2019)

Mając \sharp możemy zdefiniować operację odwrotną:

Definicja 41.

$$\flat : T_p^*M \rightarrow T_pM, \text{ tak, że } \alpha \in T_p^*M, \alpha = v_i dx^i$$

to wtedy

$$T_pM \ni v \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^\flat = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie: $v^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j$, to mamy

$$\alpha^\flat = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Przykład 67.

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v &= a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{\partial}{\partial \varphi}, \alpha = v^\sharp = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} v^j dx^i = \\ &= \frac{1}{2} (g_{11} v^1 dx^1 + g_{12} v^2 dx^1 + g_{13} v^3 dx^1) + (g_{21} v^1 dx^2 + g_{22} v^2 dx^2 + g_{23} v^3 dx^2) + \\ &+ (g_{31} v^1 dx^3 + g_{32} v^2 dx^3 + g_{33} v^3 dx^3). \end{aligned}$$

czyli mamy

$$\alpha = v^\sharp = 1 \cdot a dr + r^2 b d\theta + r^2 \sin^2 \theta c d\varphi.$$

$$\text{Dostaliśmy z laboratorium wektor: } v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a i_r + b i_\theta + c i_\varphi = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + c \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Chcemy ten wektorek podnieść.

$$\begin{aligned} \alpha = v^\sharp &= (g) dr + \left(r^2 \frac{b}{r} \right) d\theta + \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r \sin \theta} c \right) d\varphi = \\ &= a dr + r b d\theta + r \sin \theta c d\varphi \end{aligned}$$

Przykład 68. Niech $\alpha = a dr + b d\theta + c d\varphi$. Chcemy zrobić wektorek v , który jest dokładnie tyle:

$$v = \alpha^\flat = (1 \cdot a) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} b \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} c \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Czyli ta nasza } \alpha^{\flat} = \left[\begin{array}{c} a \\ \frac{b}{r^2} \\ \frac{c}{r^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right]_{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}} = a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b}{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{c}{r \sin \theta} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Okazuje się, że } \alpha^{\flat} = \left[\begin{array}{c} b \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r \sin \theta} \end{array} \right]_{i_r, i_{\theta}, i_{\varphi}}$$

Definicja 42. *niech $M = \mathbb{R}^3$,*

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{\flat} (df)^{\flat} \in T_p M$$
nazywamy gradientem funkcji $f : \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (df)^{\flat}$, gdzie $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$, f - klasy $\mathcal{C}^k(M)$

Przykład 69. $f(r, \theta, \varphi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$,
 $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} (df)^{\flat} &= 1 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Siła tego polega na tym, że jak dostaniemy na ulicy tensor metryczny, to przez 3 minuty w cieniu możemy obliczyć np. gradient funkcji:

$$\nabla f = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right].$$

Przykład 70. *Dostaliśmy tensor metryczny i chcemy obliczyć $\nabla f(\xi, \eta, \delta)$,* $\left[\begin{array}{ccc} \heartsuit & & \\ & \triangle & \\ & & \square \end{array} \right].$

$$\nabla f = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{\heartsuit}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\sqrt{\triangle}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\square}} \frac{\partial f}{\partial \delta} \end{array} \right].$$

$M = \mathbb{R}^3$	
$f \rightarrow \Lambda^0(M)$	$\dim \Lambda^0(M) = 1 \downarrow d$
$T_p M \overset{\flat}{\longleftrightarrow} \overset{\sharp}{\Lambda^1(M)}$	$\dim \Lambda^1(M) = 3 \downarrow d$
$\Lambda^2(M)$	$\dim \Lambda^2(M) = 3 \downarrow d$
$\Lambda^3(M)$	$\dim \Lambda^3(M) = 1.$

Definicja 43. Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \rightarrow \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "Hodge'a" i definiujemy następująco:

$$*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_L}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_L j_L} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_L k_1 k_2 \dots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-L}}$$

gdzie $\epsilon_{i_1, \dots, i_n} = \{sgn(i_1, \dots, i_n) \text{ jeżeli } i_m \neq i_p, \quad 0 \text{ w.p.p}\}$

Przykład 71. $M = \mathbb{R}^3$, $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} *(dx) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{1j_1} \epsilon_{j_1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \epsilon_{1k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \\ &= \frac{1}{(3-1)!} g^{11} [\epsilon_{123} dx^2 \wedge dx^3 + \epsilon_{132} dx^3 \wedge dx^2] = \frac{1}{2} [1 \cdot dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^2] \\ &= dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Czyli $*(dx) = dy \wedge dz$.

$$\begin{aligned} *(dy) &= *(dx^2) = \frac{1}{(3-1)!} g^{22} \epsilon_{2k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \\ g^{22} [\epsilon_{213} dx^1 \wedge dx^3 + \epsilon_{231} dx^3 \wedge dx^1] &= \frac{1}{(3-1)!} 1 [-dx^1 \wedge dx^3 + dx^3 \wedge dx^1] = \\ &= dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Więc $*(dy) = dz \wedge dx$.

$$\begin{aligned} *(dz) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{33} \epsilon_{3k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{2} g^{33} [\epsilon_{321} dx^2 \wedge dx^1 + \epsilon_{312} dx^1 \wedge dx^2] = \\ &= \frac{1}{2} 1 [-dx^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^2]. \end{aligned}$$

Więc $*(dz) = dx \wedge dy$

Przykład 72. $M = \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi), [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$.

$$*(dr) = r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

$$*(d\theta) = r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} d\varphi \wedge dr$$

$$*(d\varphi) = \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} dr \wedge d\theta$$

Pytanko jest takie: Chcemy zapytać co to jest $*(dx \wedge dy)$?

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-2)!} g^{1j_1} g^{2j_2} \epsilon_{j_1 j_2 k_1} dx^{k_1} = \\ &= \frac{1}{(3-2)!} g^{11} g^{22} \epsilon_{123} dx^3. \end{aligned}$$

Więc $*(dx \wedge dy) = dz$.

A np. $*(dx \wedge dz)$:

$$\begin{aligned} *(dx \wedge dz) &= \frac{1}{(3-2)!} \epsilon_{132} dx^2 = -dy \\ *(dr \wedge d\theta) &= r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r^2} d\varphi \\ *(dr \wedge d\varphi) &= -r^2 \sin \theta \frac{1}{1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ *(dx \wedge dy \wedge dz) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-3)!} g^{1j_1} g^{2j_2} g^{3j_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} \epsilon_{123} = 1 \\ *(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) &= r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}. \end{aligned}$$

Definicja 44. $M = \mathbb{R}^3$

niech $v \in T_p M$, operacje

$$\text{rot}(v) \stackrel{\text{def}}{=} (* (dv^\sharp))^\flat$$

nazywamy rotacją wektora v i oznaczamy $\text{rot } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \times v$.

Operacje

$$\text{div } v \stackrel{\text{def}}{=} d(*v^\sharp)$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy $\text{div } v \stackrel{\text{ozn}}{=} \nabla \cdot v$.

Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na M takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \rightarrow \Lambda^2(M)$

Pozakonkursowo: chcemy zrobić z funkcji funkcję:

$$f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \longrightarrow \underset{\text{operator Laplace}}{*d*df}.$$

27 Wykład (11.06.2019)

Przykład 73. Zastanówmy się jak wygląda rotacja wektora w układzie sferycznym. $M = \mathbb{R}^3$.

$$v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{*} \Lambda^1(M) \rightarrow T_p^b M \rightarrow \left[\right]_i$$

$$\text{rot} v = (* (dv^\sharp))^\flat$$

na początek dostajemy w smsie

$$\left[\begin{matrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{matrix} \right]_{i_r, i_\theta, i_\varphi} = v = A^r \frac{\partial}{\partial r} + A^\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + A^\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

chcemy sobie zrobić jednoformę, która jest podniesionym wektorkiem:

$$\alpha = v^\sharp = g_{rr} A^r dr + g_{\theta\theta} \frac{1}{r} A^\theta d\theta + g_{\varphi\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} A^\varphi d\varphi = A^r dr + r A^\theta d\theta + r \sin \theta A^\varphi d\varphi$$

$$d\alpha = (A^r_{,\theta} - (r A^\theta)_{,r}) d\theta \wedge dr + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) d\varphi \wedge dr + \\ + ((r A^\theta)_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta}) d\varphi \wedge d\theta$$

$$*(dr \wedge d\theta) = \sin \theta d\varphi, \quad *(d\theta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2} dr, \quad *(d\varphi \wedge dr) = \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

$$*d\alpha = ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \frac{1}{r^2 \sin \theta} dr + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \frac{1}{\sin \theta} d\theta + \\ + ((r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}) \sin \theta d\varphi.$$

notacja: $\square_{,\heartsuit} = \frac{\partial \square}{\partial \heartsuit}$. Zostały nam jeszcze tylko dwie operacje.

$$(*d\alpha)^\flat = ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \cdot 1 \cdot \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ + \left((r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta} \right) \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Czyli

$$\text{rot} \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} ((r \sin \theta A^\varphi)_{,\theta} - (r A^\theta)_{,\varphi}) \\ \frac{1}{r \sin \theta} (A^r_{,\varphi} - (r \sin \theta A^\varphi)_{,r}) \\ \frac{1}{r} ((r A^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}) \end{bmatrix}.$$

Przykład 74. *To może teraz dywergencja rzutem na taśmę.*

$$\begin{aligned}
 \left[\right] &= v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{\flat} \Lambda^0(M) \\
 \operatorname{div}(v) &= * (d(*v^{\sharp})) \\
 \begin{bmatrix} A^r \\ A^{\theta} \\ A^{\varphi} \end{bmatrix} &= v, \alpha = v^{\sharp} \\
 \alpha &= A^r dr + r A^{\theta} d\theta + A^{\varphi} r \sin \theta d\varphi \\
 * dr &= r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \\
 * d\theta &= \sin \theta d\varphi \wedge dr \\
 * d\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} dr \wedge d\theta \\
 * \alpha &= (A^r r^2 \sin \theta) d\theta \wedge d\varphi + (r \sin \theta A^{\theta}) d\varphi \wedge dr + (r A^{\varphi}) dr \wedge d\theta \\
 d(*\alpha) &= ((A^r r^2 \sin \theta)_{,r} + (r \sin \theta A^{\theta})_{,\theta} + (r A^{\varphi})_{,\varphi}) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} A^r \\ A^{\theta} \\ A^{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} ((A^r r^2 \sin \theta)_{,r} + (r \sin \theta A^{\theta})_{,\theta} + (r A^{\varphi})_{,\varphi}).$$

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta, \varphi) &\xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{*} \Lambda^0(M) \\
 \alpha = df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\
 * \alpha &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} r^2 \sin \theta \right) d\theta \wedge d\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\varphi \wedge dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right) dr \wedge d\theta \\
 d(*\alpha) &= \left(\left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{,r} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{,\theta} + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{,\varphi} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
 (d(\alpha)) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{,r} + \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{,\theta} + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{,\varphi} \right).
 \end{aligned}$$

Przykład 75. $M = \mathbb{R}^3, f \in \Lambda^0(M)$.

$$\begin{aligned}
 ddf &= 0 \\
 ddf &= d \left(\left((df)^{\flat} \right)^{\sharp} \right) \implies \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0.
 \end{aligned}$$

Niech teraz $v \in \Lambda^1(M)$.

$$\begin{aligned}
 d \left(* \left((* (dV^{\sharp}))^{\flat} \right)^{\sharp} \right) &= d(*(* (d(v^{\sharp})))) = dd(v^{\sharp}) = 0 \\
 \operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) &= 0.
 \end{aligned}$$

Weźmy sobie jakąś funkcję: $f : (t, x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}$.

Zobaczmy jak $*d(*df)$ wygląda w $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_L}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_L j_L} \in_{j_1 \dots j_k k_1 \dots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{n-L}}$$

$$*(dx^0) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!} g^{00} \in_{0k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}, i, k = 0, \dots, 3$$

$$*(dx^0) = -\frac{1}{3!} 3! dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$*(dt) = -dx \wedge dy \wedge dz$$

$$*(dx^1) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!} g^{11} \in_{1k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}$$

$$*(dx) = 3! \frac{1}{3!} dy \wedge dt \wedge dz$$

$$*(dy) = dt \wedge dx \wedge dz$$

$$*(dz) = dx \wedge dt \wedge dy$$

$$*df = -\frac{\partial f}{\partial t} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dt \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dt \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dt \wedge dy$$

$$d*df = \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Na koniec:

Mamy dwuformę pola elektromagnetycznego:

$$F = -E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dy + B_z dy \wedge dx.$$

$dF = 0$ to jest pierwsza część równań Maxwella

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ j^x \\ j^y \\ j^z \end{bmatrix}$$

$$j = -gdt + j^x dx + j^y dy + j^z dz$$

$d(*F) = *j$ a to druga.