

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

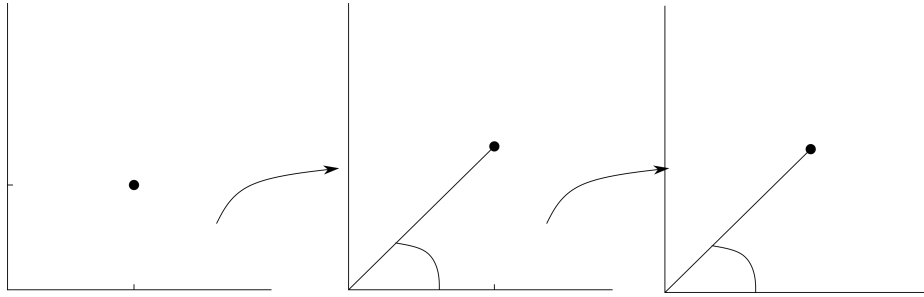
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = |x^2 = t, 2xdx = dt| = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy = |r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(\frac{y}{x})| = \int dr \int d\varphi f(r, \varphi)??.$$



Rysunek 1: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie $(x, y) \rightarrow (x, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} \int dx \int dy f(x, y) &= ||y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi|| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\ &= ||x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi|| = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\ &= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli } "??" = r. \end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. $(y \rightarrow r), (x \rightarrow \varphi)$

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dx dy &= ||y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2 - x^2}}|| = \\ &= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = ||x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi|| = \\ &= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\ &= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r. \end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba (r). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej φ , bo $x = r \cos \varphi$ a \cos jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MKTM)

Niech $\psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$.

$$\psi' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\|\psi'\| = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r.$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $\varphi : A \rightarrow A$, $A \subset \mathbb{R}^n$, φ - klasy \mathcal{C}^1 , φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , to możemy przedstawić φ jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia $n - 1$ zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

Dowód 1 (coś w rodzaju dowodu)
 φ możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pytanie 1 Czy istnieje odwzorowanie $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$ takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

($t_{i \neq j}$) mogą zostać zamiast zamieniać je na x_i . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że φ - klasy \mathcal{C}^1 i φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 i $\varphi : A \rightarrow A$. Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności! $\det \varphi' \neq 0$, czyli w macierzy φ' istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np. $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$. Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i $\det \eta' \neq 0$, więc istnieje η^{-1} .

Czyli $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$ \square

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (1)$$

Twierdzenie 1 (O zamianie zmiennych)

Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w \mathbb{R}^n i $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$, $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowalna. ξ - klasy \mathcal{C}^1 na Ω , ξ^{-1} klasy \mathcal{C}^1 na Θ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (2)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

Dowód 2 (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla $n = 1$ - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

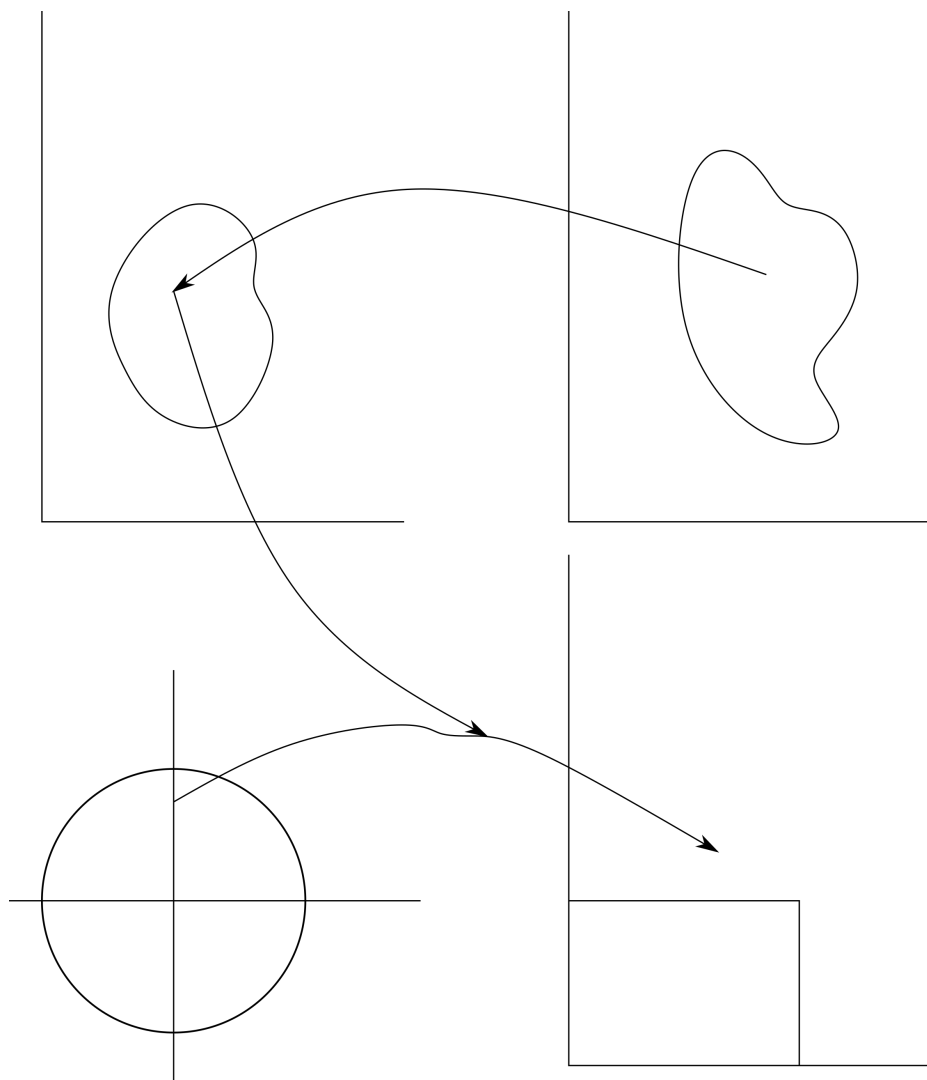
$$\int_{A \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic:

$\left(\int_a^b f\right)$ oznacza, że zakładamy, że $a \leq b$. Dowód przeprowadzamy dla $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że ξ nie zamienia jednej zmiennej.

Obserwacja 1 Niech $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$, niech $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$.

Wówczas $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$, zatem $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$



Rysunek 2: $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

