końcówka dowodu:

Dla $(x', y') \in \mathcal{V}$,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że $a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ istnieją i są różniczkowalne, bo F^{-1} istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach a i b?
Wiemy że

$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y') = F(\underbrace{a(x', y')}_{n}, \underbrace{b(x', y')}_{m}).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli $a(x', y')$ jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$

Czyli jeżeli $y = b(x, 0)$, to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

Czyli dla $y = (x, 0)$ otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy $b(x, 0) \overset{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$, to znaczy, że znaleźliśmy funkcję $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0 \quad \square.$$

Definicja 1. *Ekstrema związane*

przykład:

$$f(x, y) = x + y, \quad G(x, y) = (x-1)^1 + (y-1)^2 - 1, \quad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\right\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum f na M

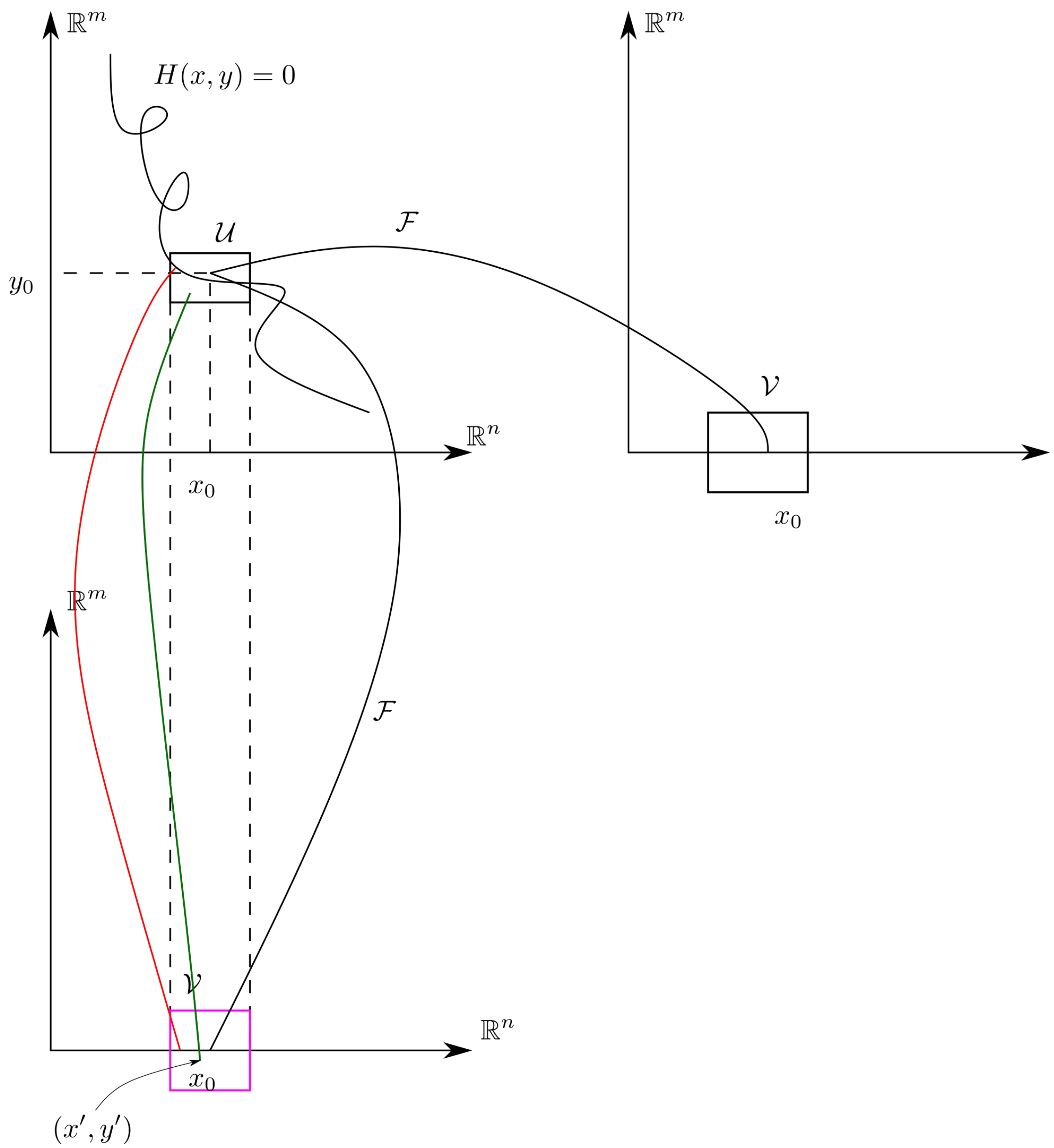
Rozważmy linię o stałej wartości $x + y$

Definicja 2. *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.*
Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

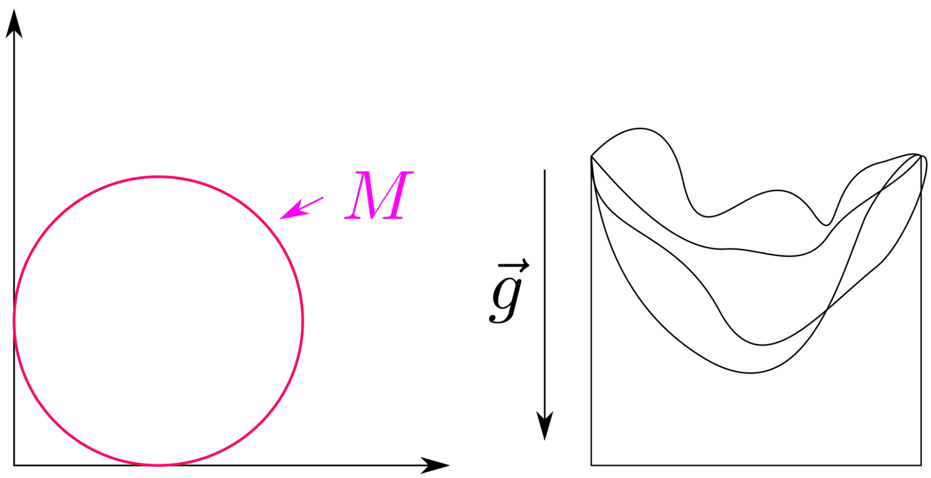
$$\underset{r}{\exists} \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} \quad f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$

Ekstrema związane podejście I

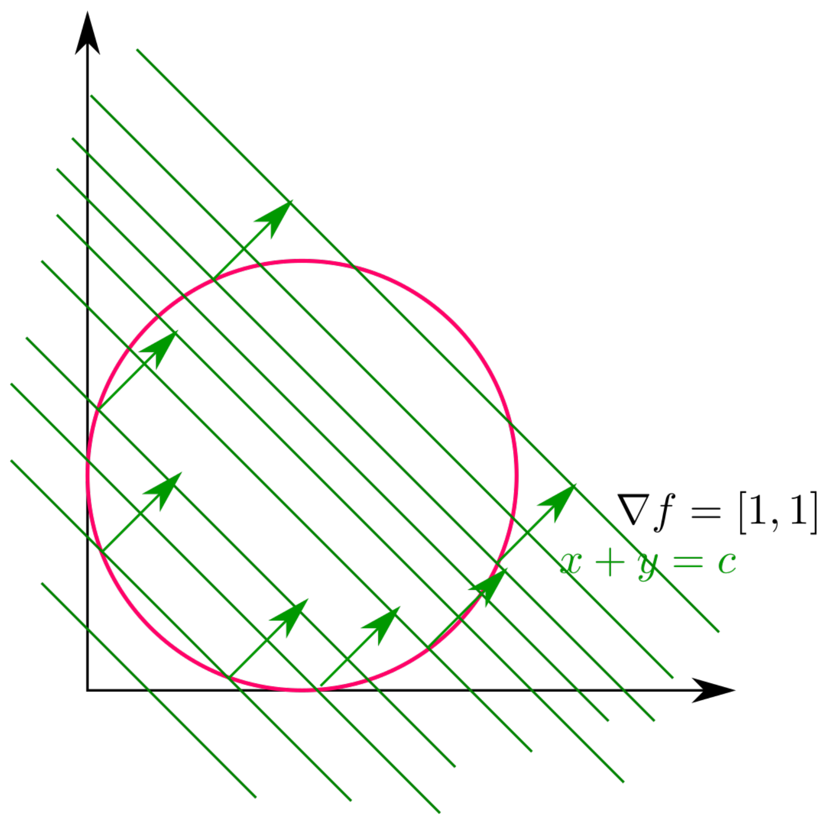
Niech $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$G(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$M = \{(x, y), G(x, y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić


$\mathbb{R}^m$
$H(x,y)=0$
$\mathcal{U}$
$\mathcal{F}$
y_0
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
(x', y')

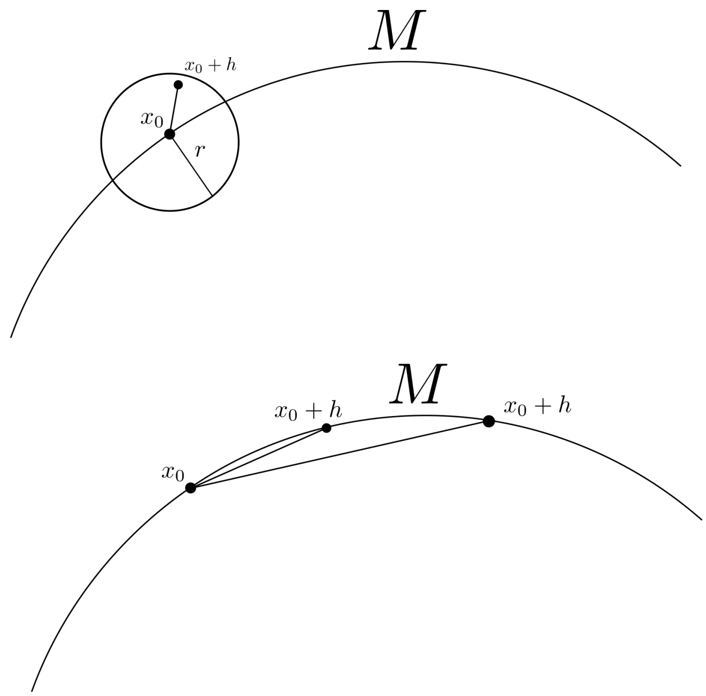
Rysunek 1



Rysunek 2: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 3: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 4

do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \underline{\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby $G(x, y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

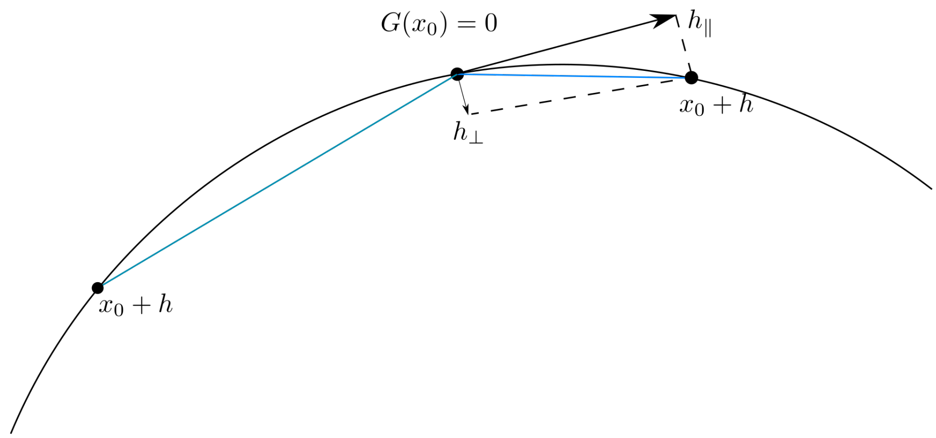
$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{1}$$



Rysunek 5

Co oznacza warunek 1?
Wiemy, że

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x) = 0$, albo $P'(y) = 0$ oznacza, że

$$\underset{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}}{\exists} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

Obserwacja 1. *Do warunku (2) można dojść na sktóry przez funkcję $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$ i badanie $H(x, y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0\,(\ + \textit{warunek } G(x, y) = 0)\,.$$

Pytanie 1. *Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?*
Odpowiedź: lepiej inaczej... (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \tilde{=} f''(x_0)(h, h).$$