0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 1. *(sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie)*

Definicja 1. *Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$), φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$) nazywamy mapą.*
Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M. Połowa tego zbioru to niech będzie U_1, i ono się przecina z U_2. U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w $\mathbb{R}^2$. Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U?

Definicja 2. $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ *- mapy na M.*
U_1 i U_2 nazywamy zgodnymi jeżeli
a) $U_1 \cap U_2 = \phi$
albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$)

"../img/"fig_49.png

Rysunek 1: $M = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2\right\}$

Przykład 2.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y) \in M, y > 0\}, \quad & \varphi_1 &: (x,y) \in U_1 \to x \\
U_2 &= \{(x,y) \in M, x > 0\}, \quad & \varphi_2 &: (x,y) \in U_2 \to y \\
U_3 &= \{(x,y) \in M, y < 0\}, \quad & \varphi_3 &: (x,y) \in U_3 \to x \\
U_4 &= \{(x,y) \in M, x < 0\}, \quad & \varphi_4 &: (x,y) \in U_4 \to y.
\end{aligned}$$

U_1 i U_3 oraz U_2 i U_4 są zgodne. Czy zgodne są U_1 i U_2? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, ale $\varphi_1(x, y) \in U_1 \to x$.
Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \to \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$,
czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.
Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ przerzuca $]0, 1[\to]0, 1[$ jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze $]0, 1[$ jest.

Definicja 3. *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór M wraz z atlasem, który pokrywa cały M nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).*