

Definicja 1. Norma

Niech X - przestrzeń wektorowa.

Odwzorowanie $||\cdot|| : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \forall_{x \in X} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \quad (2)$$

$$\forall_{x, y \in X} \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad (3)$$

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \quad (4)$$

Przestrzeń X wraz z normą $||\cdot||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (spoiler: przestrzenią Banacha).

Przykład 1. Przykładowa norma:

$$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X = \mathbb{R}^n.$$

$$X \ni v \implies ||v|| = \sup(|x^1|, \dots).$$

Jeżeli $f \in C([a, b])$, to norma wygląda tak:

$$||f|| = \sup_{x \in [a, b]} (f(x)).$$

Przykład 2.

$$\mathbb{R}_2^2 \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = v$$

$$||v|| = \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Uwaga: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\forall_{x, y \in X} d(x, y) = ||x - y||$, natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 3. metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:

$$d(ax, ay) = ||ax - ay|| = |a| ||x - y|| = ad(x, y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 2. Pochodna mocna (trzecie podejście)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ przy } \|h\| \rightarrow 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 3. Niech $U \subset X, V \subset Y$

U, V - otwarte, $T : U \rightarrow V$

$x, h \in U$

Mówimy, że T - różniczkowalne w punkcie x_0 , jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\forall_{h \in U} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, a L_{x_0} - liniowe : $X \rightarrow Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0 . Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T .

Uwaga: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx,$$

a tego nie da się przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx \right) h(x).$$

Przykład 4. $T(x+h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$

$$1. T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ czyli } x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \implies T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} T'(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$2. T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = [-, -, -] \quad (6)$$

$$3. T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x_0 \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, T'(x) = \begin{bmatrix} - & - & - \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\cdot \quad (8)$$

Przykład 5.

$$f(x, y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) = \\
& = (x_0 + h_x)(y_0 + h_y)^2 - x_0 y_0^2 = \\
& = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = \\
& = [y_0^2, 2x_0 \cdot x_0] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y.
\end{aligned}$$

Pytanie 1. Czy $\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$?

Weźmy $\left\| \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, wówczas

$$x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leq x_0 \|h\|^2 + \|h\|^3 + 2y_0 \|h\|^2 = \|h\|^2 (x_0 + 2y_0 + \|h\|),$$

zatem

$$\frac{r(x_0, h)}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2 (|x_0| + 2y_0 + \|h\|)}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

$$f(x, y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że

$$y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Uwaga: skąd wiemy, że gdy $h \rightarrow 0$, to $\|h\| \rightarrow 0$?

Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?

odpowiedź za tydzień

Twierdzenie 1. Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód. skoro f - różniczkowalna, to

$$\forall_{h \in U} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \frac{r(x, h)}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \quad (9)$$

$$\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x \cdot h_y}}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Niech $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, $|h_x| > |h_y| \implies \|h\| = |h_x|$

$$\frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{h_x} \not\rightarrow 0.$$

□

Pytanie 2. Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?

Przykład 6.

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dla $f(x, y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} f = 0$.

$h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0, 0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$.

Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\forall_{h_x, h_y} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \rightarrow 0$.

Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\rightarrow 0$ przy $h_x \rightarrow 0$, $\sqrt{\frac{h_y}{h_x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2. Niech $O \subset \mathbb{R}^n$, O - otwarty. $f : O \rightarrow Y$, $x_0 \in O$.

Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $i = 1, \dots, n$ i są ciągłe w x_0 , wtedy

$$\forall_{h \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0, h)}{||h||} \rightarrow 0$

Dowód. (dla $O = \mathbb{R}^3$)

$$\text{Niech } x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\ & = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\ & + f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad \text{tw. o w. średniej} \\ & = \frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1) h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) h^3 = \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^2 + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^3 \end{aligned}$$

gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[$, $c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[$, $c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0, h)}{||h||} \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci $\cos h^i$, a $\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{h^i}{||h||} = 0$ dla normy np.

$||h|| = \max |h^i| \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \rightarrow 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x, h)}{||h||} \rightarrow 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) h^1 \rightarrow 0$$

Czyli np. $\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^i} - \text{ciągła})$ □