

**Pytanie 1.** Jak pokazać, że zbiór Cantora jest niepusty?

**Stwierdzenie 1.** *Przeliczalna ilość zbiorów miary Lebesgue'a zero jest też zbiorem miary Lebesgue'a zero.*

*Dowód.* Weźmy rodzinę zbioru  $X_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}_+, X_n$  - zbiór miary Lebesgue'a zero. Weźmy rodzinę kostek  $P_n$ , gdzie  $P_i$  - kostka z  $\mathbb{R}^n$  taka, że

$$|P_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(możemy tak zrobić, bo  $X$  - miary Lebesgue'a zero)  
wówczas  $X \subset P = P_1 \cup P_2 \cup \dots$

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup \dots| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

**Pytanie 2.** Jak pociąć prostokąt?

będzie trzeba wprowadzić język.

weźmy kostkę z  $\mathbb{R}^n$ . Wtedy

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

niech  $\Pi_i$  - podział przedziału  $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$ .

Zatem podział kostki  $P$  wyznaczy kolekcja podziałów

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}.$$

W takim razie  $P$  możemy przedstawić jako sumę

$$P = \bigcup_{i=1}^k Q_i, \text{ gdzie } Q_i = [a_1^{i_1}, b_1^{i_1}] \times \dots \times [a_n^{i_n}, b_n^{i_n}].$$

$[a_j^{i_j}, b_j^{i_j}]$  - jeden z elementów podziału odcinka  $[a_1, b_1]$  przy podziale  $\Pi_1, \dots$ , itp.

Wówczas zauważmy, że jeżeli zdefiniujemy

$$int(Q_i) = ]a_1^{i_1}, b_1^{i_1}[ \times \dots,$$

to wtedy

$$int(Q_i) \cap int(Q_j) = \emptyset.$$

Poza tym

$$|Q_i| \stackrel{\text{def}}{=} |b_1^{i_1} - a_1^{i_1}| \cdot \dots \cdot |b_n^{i_n} - a_n^{i_n}|.$$

W związku z tym

$$|P| = \sum_i |Q_i|.$$

**Uwaga:** czasami zamiast pisać  $\Pi = \{\Pi_1, \dots\}$ , piszemy  $\Pi = \{Q_1, \dots\}$

**Definicja 1.** Rozważmy dwa podziały:

$$\Pi_1 = \{Q_1, \dots, Q_k\}$$

$$\Pi_2 = \{R_1, \dots, R_s\}.$$

Podział  $\Pi_2$  nazywamy drobniejszym, jeżeli dla  $\Pi_1 \neq \Pi_2$

$$\forall_{a_j, j \in \{1, \dots, k\}} \exists_{i \in \{R_{m_1}, \dots, R_{m_j}\}}, Q_j = R_{m_1} \cup \dots \cup R_{m_j}.$$

**Definicja 2.** Suma górna dla  $f : P \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|,$$

oraz suma dolna

$$\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|.$$

**Definicja 3.** Całka górna:

$$\overline{\int}_p f = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi),$$

oraz

$$\underline{\int}_p f = \sup_{\Pi} \underline{S}(f, \Pi).$$

**Obserwacja 1.** Jeżeli  $\Pi_2$  - podział drobniejszy, niż  $\Pi_1$ , to

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_1).$$

**Pytanie 3.** Czym to się właściwie różni od całki na  $\mathbb{R}$ ?

**Pytanie 4.** Czy całkę na np.  $\mathbb{R}^2$  możemy policzyć przy pomocy dwóch całek na  $\mathbb{R}$ ?

**Przykład 1.**

$$p = [0, 1] \times [0, 2], \quad f(x, y) = xy^2.$$

$$\int_p xy^2 \stackrel{??}{=} \int_0^1 dx \int_0^2 dy \cdot xy^2 \stackrel{??}{=} \int_0^2 dy \int_0^1 dx \cdot xy^2.$$

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{xy^3}{3} \right]_0^2 = \left[ \frac{x^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_0^2 dy \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^1 = \left[ \frac{y^3}{2 \cdot 3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

**Pytanie 5.** Co robimy ze zbiorami, które nie są prostokątami?

**Przykład 2.** niech  $A \subset P \subset \mathbb{R}^n$ , wprowadźmy funkcję

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

wówczas jeżeli

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}, A \subset P,$$

to

$$\int_A f \stackrel{\text{def}}{=} \int_P f \cdot X_A.$$

Jeżeli  $f$  - takie, że  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , to definiujemy funkcję

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

i wtedy

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}.$$

Konsekwencją takiego podejścia jest konieczność radzenia sobie z całkami z funkcji nieciągłych. Oznacza to, że warunek na całkowalność punktu musi być związany z nieciągłością. W tym celu wprowadzamy kilka nowych pojęć:

**Definicja 4.** *Wahanie funkcji:*

niech  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , niech  $x_0 \in \int(A)$ . Wahaniem funkcji w punkcie  $x_0$  nazywamy wielkość

$$O(f, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \left| \sup_{K(x_0, r)} f(x) - \inf_{K(x_0, r)} f(x) \right|.$$

**Stwierdzenie 2.** Niech  $A$  - domknięty,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$A_\varepsilon = \{x \in A : O(f, x) \geq \varepsilon\},$$

wówczas  $A_\varepsilon$  też jest zbiorem domkniętym.

*Dowód.* Pokażemy, że zbiór  $A'_\varepsilon$  jest zbiorem otwartym.

Mamy dwa przypadki:

1.  $x \in A'_\varepsilon$ ,  $x \notin A$ , czyli  $x \in A'$  więc  $\exists K(x, r) \in A'$  (bo  $A'$  jest otwarty)
2.  $x \in A$ ,  $x \in A'_\varepsilon$ , czyli  $O(f, x) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{y \in K(x, r)} \quad O(f, y) < \varepsilon.$$

czyli znajdziemy takie otoczenie  $x \in A'_\varepsilon$ , że wszystkie elementy z tego otoczenia też należą do  $A'_\varepsilon$  czyli  $A'_\varepsilon$  jest otwarty.

Wiemy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \sup_{x' \in K(x, r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x, r)} f(x') \right| = c < \varepsilon.$$

Z definicji granicy oraz warunku wyżej wiemy, że

$$\exists_r \left| \sup_{x' \in K(x, r)} f(x) - \inf_{x' \in K(x, r)} f(x) \right| < \varepsilon,$$

zatem dla dowolnego  $y \in K(x, r)$  mamy

$$\exists_{r'} r' = r - \|x - y\| : \forall_{y' \in K(y, r)} |\sup f(y') - \inf f(y')| < \varepsilon,$$

czyli

$$O(f, y') < \varepsilon \rightarrow \forall_{y'} y' \in K(y, r') \subset K(x, r),$$

co oznacza, że punkt  $x$  jest punktem wewnętrznym  $A'_\varepsilon$ , czyli  $A'_\varepsilon$  jest otwarty, więc  $A_\varepsilon$  - domknięty. □