

**Twierdzenie 1** (o lokalnej odwracalności)

Niech  $f : E \rightarrow E, E - \text{otwarty}, E \subset \mathbb{R}^N, f - \text{różniczkowalna w sposób ciągły na } E$ .  
 $(f - \text{klasy } \mathcal{C}^1(E)), \exists_{a,b \in E} : f(a) = b \wedge f'(a) - \text{odwracalna } (\det(f'(a)) \neq 0), \text{ to:}$

1.  $\exists_{U,V \subset E}, \exists_{a \in U, b \in V}, U, V - \text{otwarte}, f - \text{bijekcja między } U, V$
2.  $\exists_{g:V \rightarrow U} \cdot \forall_{x \in V}, f(g(x)) = x, g - \text{ciągła i różniczkowalna na } V$

Uwaga: Dowód składa się z trzech części:

1. Pokażemy, że  $\exists_{U,V} : f - \text{bijekcja na } U, V$
2. Pokażemy, że  $U, V - \text{otwarte}$
3. Pokażemy, że  $\exists_{g:V \rightarrow U}, g - \text{różniczkowalna na } V \text{ i ciągła.}$

**Przykład 1**

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

$$\det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0, \text{ ale } f(x, y) = f(x, y + 2\pi) \quad (\text{czyli funkcja jest okresowa})$$

**Dowód 1**

Część I:

Szukamy  $U, V : f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V$  Skoro  $f'(a) - \text{odwracalne}$ , to znaczy, że  $\exists_{(f'(a))^{-1}}$ , zatem

$$\exists_{\lambda} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1$$

Wiemy, że  $f'(x) - \text{ciągła w } x = a$ , czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \cdot \exists_{\delta} \cdot \forall_x, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon \quad (1)$$

Położymy  $\varepsilon = \lambda$ .

Oznacza to, że

$$\exists_{\delta_\lambda} \cdot \forall_x x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda \quad (2)$$

Więc  $U = K(a, \delta_\lambda)$ , niech  $V = f(U)$ . Chcemy pokazać, że  $f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V$ .

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E \quad (3)$$

**Pytanie 1** Co by było gdyby  $\varphi_y(x)$  posiadała punkt stały? (jakie własności  $x$  by z tego faktu wynikały)

dla  $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$ ?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\forall_{y \in V} \cdot \exists_{x \in U} : f(x) = y$$

O  $f - \text{z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na } U$ . (iksa nie obchodzi sąsiedzi, f musi być ciągle to będzie bijekcja)

Policzmy  $\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x))$ , więc  $\|\varphi'_y(x)\| = \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \|f'(a) - f'(x)\| \leq \forall_{x \in U} \frac{1}{2\lambda} \lambda = \frac{1}{2}$

Pamiętamy, że jeżeli  $\exists_M \|\varphi'_y(x)\| \leq M$ , to  $\forall_{x,y} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$   
 Zatem skoro  $\|\varphi'_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$ , to

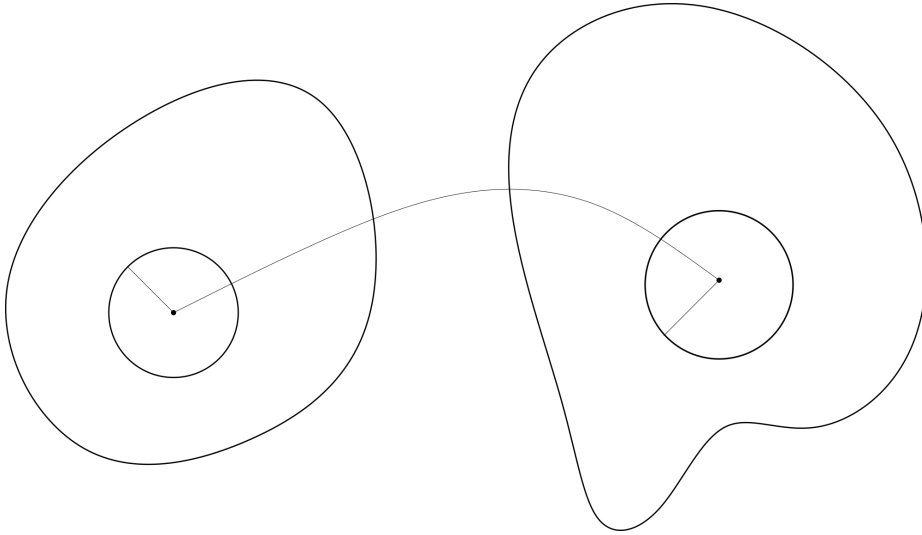
$$\forall_{x_1, x_2 \in U} \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

więc  $\varphi$  - zwężający na  $U$ , więc posiada dokładnie jeden punkt stały  $\forall_{y \in V}$ . Zatem  $f$  - bijekcja między  $U$  i  $V$ .

Część II - otwartość  $U$  i  $V$

1. Zbiór  $U$  - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) ( $U = K(a, \delta_1)$ ), więc  $\exists_{x_0 \in U} \exists_r K(x_0, r) \subset U$ , lub równoważnie  $\|x - x_0\| \leq r \wedge x \in U$ .

Chcemy pokazać, że dla  $y_0 = f(x_0) \exists_{K(y_0, \lambda r) \subset V}$ , czyli że  $V$  - otwarty.



Rysunek 1: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Weźmy  $y \in K(y_0, \lambda r)$ . Zauważmy, że  $\varphi_{y_1}(x_1)$  - zwężające, jeżeli  $y_1 \in V, x_1 \in U$   
 Jeżeli pokażemy, że dla  $\|y - y_0\| < \lambda r$ ,  $\varphi_y(x)$  - zwężająca na  $K(x_0, r) \subset U$ , to będziemy wiedzieli, że  $\|y - y_0\| < \lambda r$  oraz  $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że  $\varphi_y(x)$  - zwężające na  $K(x_0, r)$ , zbadamy tę wielkość dla  $x \in K(x_0, r)$ .  $\|\varphi_y(x) - x_0\|$ , chcielibyśmy, aby  $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r$  i  $\|y - y_0\| < \lambda r$ , ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\|$$

Ale  $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \|y - y_0\| \leq \frac{1}{2\lambda} \lambda r = \frac{r}{2}$ , więc  $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r$ , jeżeli  $\|y - y_0\| < \lambda r$ ,  $\|x - x_0\| \leq r$ .

Stąd wiemy, że punkt stały dla  $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$  należy do  $K(x_0, r)$  i  $\|y - y_0\| < \lambda r$ , zatem  $y = f(x)$ , czyli  $V$  - otwarty.

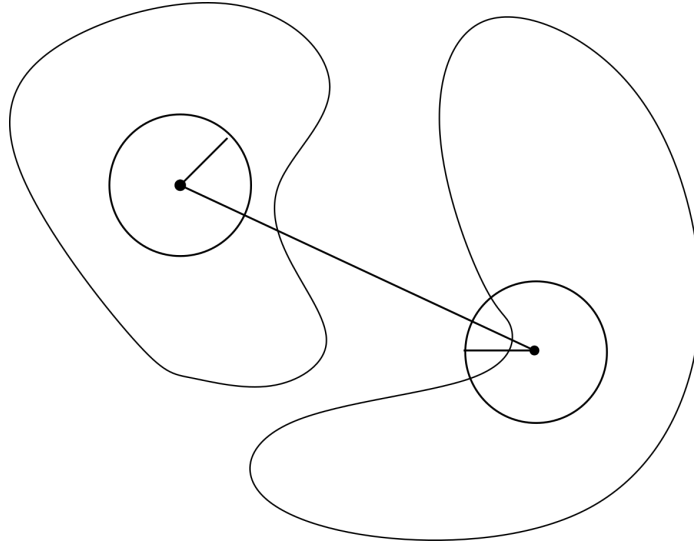
Część III:

Szukamy  $g : V \rightarrow U$

Skoro  $f$  - bijekcja między  $U$  i  $V$ , to znaczy, że  $\exists_{g: V \rightarrow U} f(g(x)) = x \forall_{x \in V}$ .

Chcemy pokazać, że  $g(x)$  - różniczkowalne. Wiemy, że  $f$  - różniczkowalna w  $x \in U$ , czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, x, x+h \in V$$



Rysunek 2: Nie ok.

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (4)$$

to będziemy wiedzieli, że:

1.  $g$  - różniczkowalne dla  $y \in V$
2.  $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$ .

W tym celu pokażemy, że:

1.  $(\|k\| \rightarrow 0) \implies (\|h\| \rightarrow 0)$
2.  $[f'(x)]^{-1}$  istnieje dla  $x \in U$ . (na razie wiemy, że  $(f'(a))^{-1}$  istnieje)

*Ad 1.* Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= x+h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) = \\ &= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)), \\ \text{czyli } \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| &= \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|, \end{aligned}$$

zatem  $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geq \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy:  $\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|k\|} \leq \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|h\|} \rightarrow 0$ , o ile  $\exists_{[f'(x)]^{-1}}$

**Pytanie 2** skąd wiadomo, że  $(f'(x))^{-1}$ ?

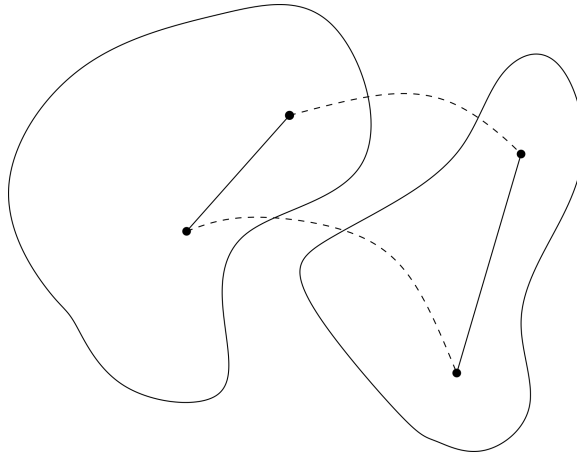
Wiemy, że  $f'(a)$  jest odwracalna, więc  $(f'(a))^{-1}$  istnieje,  $a \in U$ .

Chcemy pokazać, że  $f'(x)$  jest odwracalna dla  $x \in U$ . Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że  $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$  oraz  $U$  - taka, że

$$\forall_{x \in U} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$



Rysunek 3

Zatem

$$0 \leq \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leq \|f'(a) - f'(x)\| \|y\| + \|f'(x)\| \|y\|.$$

Dalej  $2\lambda\|y\| \leq \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$  dla  $x \in U$

$0 \leq \lambda\|y\| \leq \|f'(x)y\|$  dla  $y = 0$

Czyli

$$\forall_{x \in U} \|f'(x)y\| > 0 \quad \square.$$