

Rysunek 1: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 1. Niech $L : V \rightarrow W$, L - liniowe, $(V, ||\cdot||_v)$, $(W, ||\cdot||_w)$ - unormowane. Mówimy, że L jest ograniczone, jeżeli

$$\exists_{A>0} \quad \forall_{x \in V} ||L(x)||_w \leq A ||x||_v.$$

Przykład 1. dla $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists_A \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

ale

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

Twierdzenie 1. $(L - \text{ograniczone}) \iff (L - \text{ciągłe})$

Dowód. \Leftarrow

Wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0}, \exists_{\delta}, \forall_{x, x' \in V}, \quad ||x - x'||_v < \delta \implies ||L(x) - L(x')||_* < \varepsilon,$$

chcemy pokazać, że:

$$\exists_{A>0} \cdot \forall_{x, x' \in V} \quad ||L(x - x')|| \leq A ||x - x'||,$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.

Ale

$$\|L(x - x')\| = \underbrace{\left\| L\left(\frac{x - x'}{\|x - x'\|}\right) \frac{\delta}{2} \right\| \frac{\|x - x'\|}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leq \varepsilon \frac{\|x - x'\|}{\delta}$$

Co wiemy o $\left\| \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \frac{\delta}{2} \right\|_v < \delta$?

$$\forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\|_w \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x - x'\|_v$$

Szukane $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ istnieje!

□

Dowód. \implies

Wiemy, że

$$\exists_A \forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\| \leq A \|x - x'\| \quad (1)$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \rightarrow x_0$, to $L(x_n) \rightarrow L(x_0)$, ale

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w = \|L(x_n - x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\| \quad (\text{bo } (??))$$

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\| \quad (\text{wszystko dąży do } 0)$$

□

Definicja 2. *Wielkość*

$$\inf_A \{ \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A \|x\|_v \}$$

nazywamy normą odwzorowania L i oznaczamy $A \stackrel{\text{ozn}}{=} \|L\|$.

Definicja 3. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ - jest zbiorem wypukłym, jeżeli*

$$\forall_{a, b \in U} [a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{a(1 - t) + bt, t \in [0, 1]\} \subset U$$

Stwierdzenie 1. *Niech $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, U$ - wypukłe,*

$$\exists_M \forall_{x \in U} \|f'(x)\| \leq M,$$

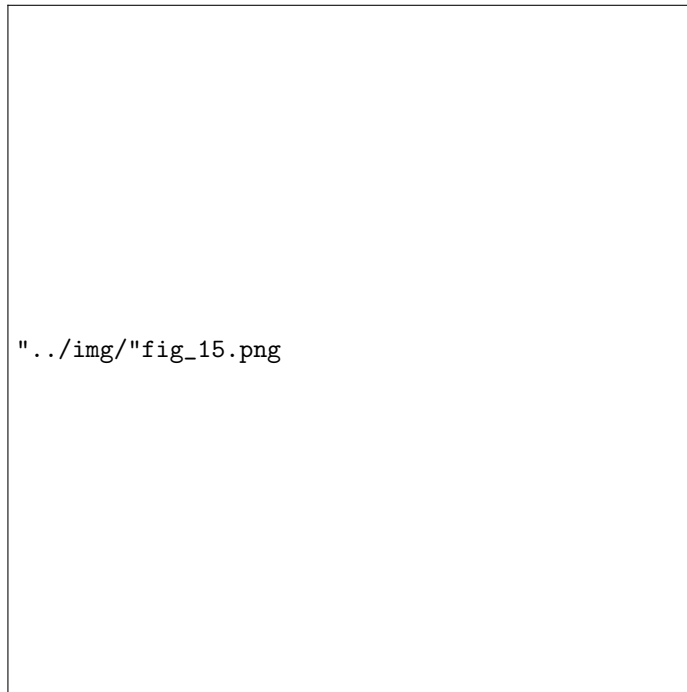
to

$$\forall_{a, b \in U} \|f(b) - f(a)\|_n \leq M \|b - a\|_m$$

(jakiegokolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)

Dowód. niech $\gamma(t) = a(1 - t) + bt, t \in [0, 1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, czyli

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$



Rysunek 2: zbiór wklęsły



Rysunek 3: zbiór wypukły

zatem

$$\begin{aligned}\|g(1) - g(0)\| &= \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \quad \text{Tw. Lagrange!} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1)(1-0) \\ g'_2(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g'_n(c_n)(1-0) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1) \\ g'_2(c_2) \\ \vdots \\ g'_n(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\| \\ &\quad \quad \quad 0 < c_i < 1\end{aligned}$$

$$\text{Ale } g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rightarrow \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leq \|f'(\gamma(t))\| \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leq} M$$

$$\text{Czyli } \forall_{t \in [0,1]} \|g'(t)\| \leq M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|$$

□

Definicja 4. Niech X - unormowana: $P : X \rightarrow X$, P - ciągła na X .
 Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}$, $x_0 \in X$
 $\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

"/img/"fig_17.png

Twierdzenie 2. Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.

Dowód. Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez \tilde{x} . Mamy:

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \quad \exists_{N_1} \quad \forall_{n > N_1} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \quad (2)$$

$$\forall_{\varepsilon_2 > 0} \quad \exists_{N_2} \quad \forall_{n > N_2} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \quad (3)$$

P - ciągle, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x'} : \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (??)$$

Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (4)$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leq d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (5)$$

$$\text{Ale z } (??) \text{ wynika, że } \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (6)$$

Zatem znając ε z $(??)$ przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z $(??)$ i dzięki temu mamy $(??)$ \square

Definicja 5. Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \rightarrow X$ nazywamy *zwężającym*, jeżeli:

$$\exists_{q \in [0, 1[} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d(P(x), P(y)) \leq qd(x, y) \quad (7)$$

Twierdzenie 3. (Zasada Banacha o lustrach)

Jeżeli $P : X \rightarrow X$, P - zwężające, to

$$1. \quad \forall_{x_0 \in X} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\} - \text{Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \quad (8)$$

$$2. \quad \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \quad (9)$$

$$3. \quad \forall_m \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (10)$$

Przykład 2. (Uwaga)

(P - nie musi być ciągłe) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*

- lustra w łazience koło sali 1.01 \rightarrow można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu

- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz

- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód. ad. 2

Założmy, że

$$\exists_{\tilde{x}_1, \tilde{x}} \quad P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$$

Wtedy

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leq q < 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{sprzeczność!}$$

\square

Dowód.

Obserwacja 1.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leq \\ &\leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq q^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$?

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leq \\ &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leq \\ &\leq \dots \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (q^{n+m-1} + \dots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq q^n \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leq q < 1}{\leq} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Czyli $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X . Czyli czy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Założmy, że $m > n$ i $m = n + k$. Wtedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n \rightarrow \tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow d(\tilde{x}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$. □