0.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Potencjał pola niestacjonarnego} \mathcal{V}(x,y,z,t)\\
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ - } \textit{Natężenie pola } \mathcal{E}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6\\
&\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1\\
&\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1\\
&.
\end{aligned}$$

Definicja 1. *(Ciągłość Heine)*
Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. *Mówimy, że odwzorowanie* $T : X \to Y$ *jest ciągłe w punkcie* x_0*, jeżeli*

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

Uwaga: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie 1. *Czy ciągłość w* $\mathbb{R}^n \iff$ *ciągłośc w* $\mathbb{R}^1$*?*

Przykład 2. *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f *- ciągła w* $(0,0)$*? dla trajektorii I:*

$$\lim_{y_n \to 0} (\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \to 0} (\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0} (0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$

"../img/"fig_1.png

Rysunek 1: trajektoria I i II

Definicja 2. *(Ciągłość Cauchy)*
(X, d_X) *- przestrzeń wektorowa z metryką* d_X*,*
(Y, d_Y) *- p.w. z metryką* d_Y*.*
Niech $x_0 \in X$*. Mówimy, że* $T : X \to Y$ *- ciągłe, jeżeli*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta}{\exists} \ \underset{x\in X}{\forall} d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$$

Dowód. Heine $\iff$ Cauchy

$$\implies_{\text{(przez sprzeczność)}}$$

Zakładamy, że

$$\underset{x_n\to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0)$$

oraz

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}, \underset{\delta>0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n\to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (**??**), to dla $\varepsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$\delta = 1:$

$$\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\delta = \frac{1}{2}:$

$$\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\delta = \frac{1}{3}:$

$$\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$\delta = \frac{1}{n}:$

$$\underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0$, ale $T(x_n) \not\to T(x_0)$, więc mamy sprzeczność. $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{x}{\exists} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon, \tag{2}$$

czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall} \quad \underset{N}{\exists} \quad \underset{n > N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \tag{3}$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\varepsilon_1 > 0}{\forall} \underset{N_1}{\exists} \underset{n > N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1 (\text{dla } x_n \to x_0)$$

Przyjmijmy $\varepsilon = \varepsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (**??**) dla ε_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (**??**), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists} \underset{n > N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (**??**), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1$$

$\square$

"../img/"fig_2.png

Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

0.2 Różniczkowalność:

Definicja 3. *Pochodna cząstkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.
Mówimy, że f *ma w punkcie* x *pochodną cząstkową w kierunku* x^k*, jeżeli istnieje granica*

$$g \stackrel{def}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{x=x_0}$$

Przykład 3. *Pochodna cząstkowa*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Uwaga: *do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych.*

$$\textit{biegunowy} \ \rightarrow f(r, \varphi).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(r, \varphi + h) - f(r, \varphi)}{h}.\end{aligned}$$

Definicja 4. *Pochodna kierunkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ *- otwarte,* $x_0 \in \mathcal{O}, e \in \mathcal{O}, T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że T *ma w* x_0 *pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica*

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

Obserwacja: Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $e_y = (0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

Przykład 4. *Problemy z pochodną kierunkową:*

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. *Wówczas* $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0,0), e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{(0,0)}$$

Uwaga: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$. *Pochodna:* $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$