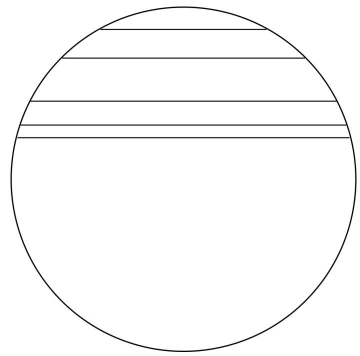
Ostatnio skończyliśmy na kroku $n-1 \to n$ i wiemy, że dla $n-1$ wymiarów możemy napisać $\int_{A\in\mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{B\in\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|\det\xi'|dt$



Rysunek 1: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_\Theta f dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det\xi'|dt.$$

Mając zbiór Θ, zdefiniujmy zbiór Θ_a, który jest zbiorem takich $x\in\Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a.

$$\Theta_a = \left\{x\in\mathbb{Q}, x = \left(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n\right)\right\}.$$
$$K = \left\{(x,y), x^2+y^2=1\right\}.$$
$$K_a = \{(x,y)\in K, (x,y)=(x,a)\}, \left\{(x,a), x^2+a^2=1\right\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_\Theta f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \to \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1,\dots,t_n) \\ \xi_2(t_1,\dots,t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1,\dots,t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

(Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$).

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \to \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1,\dots,t_n) \\ \xi_2(t_1,\dots,t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1,\dots,t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1,\dots,x^{i-1},a,x^{i+1},\dots,x^n)dx^1\dots dx^{i-1}dx^{i+1}\dots dx^n =$$
$$\int_{\Omega_a} f(t_1,t_2,\dots,t_{i-1},a,t_{i+1},\dots,t_n)|\det\xi'_a|dt^1dt_2\dots dt^{i-1}dt^{i+1}\dots dt^n.$$

Wówczas

$$\int_\Theta f(x^1,\dots,x^n)dx^n = \int_a da\int_{\Omega_a} f(t_1,\dots,t_{i-1},a,t_{i+1},\dots,t_n)|\det\xi'_a|\cdot(\pm1)dt^1\dots dt^{i-1}dt^{i+1}\dots dt^n$$
$$= \big[a=t_i\big] =$$
$$= \int_\Omega f(t^1,t^2,\dots,t^n)|\det\xi'|dt^1\dots dt^n \quad \square.$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\xi_2}{\partial t_2} & \dots & & \frac{\partial\xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\xi_n}{\partial t_1} & \dots & & & \frac{\partial\xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

Przykład 1 *Policzmy całkę $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I, to tym bardziej I^2?*

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_\square e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$. $\psi:\begin{bmatrix}r\\\varphi\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $|\psi'|=r$ Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2}r = \frac{\pi}{2}\lim_{p\to+\infty}\int_0^p dr\cdot e^{-r^2}\cdot r = \frac{\pi}{2}\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^p$$
$$\frac{\pi}{2}\left[\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-p^2}\right]-\left[-\frac{1}{2}e^{(0)^2}\right]\right] = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

czyli $I^2=\frac{\pi}{4} \implies I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

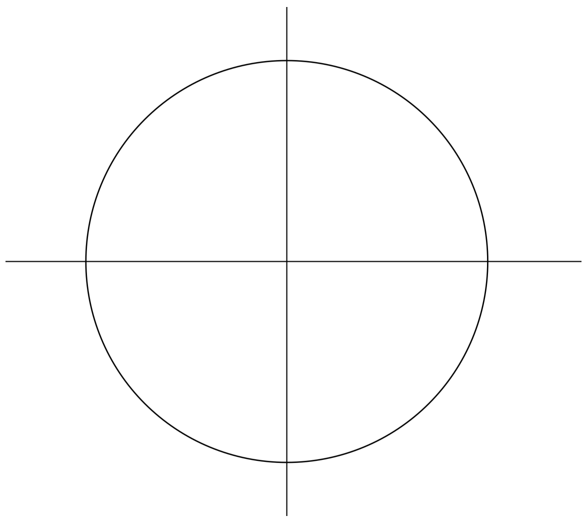
Niech $M\subset\mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p\in M$ istnieje otoczenie otwarte $U\subset M$

Przykład 2 *(sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie) TODO: obrazki*

Definicja 1 *Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$), φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$) nazywamy mapą.*
Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M. Połowa tego zbioru to niech będzie U_1, i ono się przecina z U_2. U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w $\mathbb{R}^2$. Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U?

Definicja 2 $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ *- mapy na* M.
U_1 *i* U_2 *nazywamy zgodnymi jeżeli*
a) $U_1 \cap U_2 = \phi$
albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ *jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie* $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ *)*



Rysunek 2: $M = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2\right\}$

Przykład 3

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x,y) \in U_1 \to x \\
U_2 &= \{(x,y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x,y) \in U_2 \to y \\
U_3 &= \{(x,y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x,y) \in U_3 \to x \\
U_4 &= \{(x,y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x,y) \in U_4 \to y.
\end{aligned}
$$

U_1 *i* U_3 *oraz* U_2 *i* U_4 *są zgodne. Czy zgodne są* U_1 *i* U_2*? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie* $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$*, ale* $\varphi_1(x,y) \in U_1 \to x$.
Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \to \left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$,
czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.
Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ *przerzuca* $]0,1[\to]0,1[$ *jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze* $]0,1[$ *jest.*

Definicja 3 *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór* M *wraz z atlasem, który pokrywa cały* M *nazywamy* ***rozmaitością*** *(ang. manifold).*