

Twierdzenie 1. (o lokalnej odwracalności)

Niech

$$f : E \rightarrow E, E - \text{otwarty}, E \subset \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(E),$$

$$\exists_{a,b \in E} : f(a) = b \text{ i } f'(a) - \text{odwracalna } (\det(f'(a)) \neq 0),$$

to wtedy:

1. $\exists_{U,V \subset E} \quad \exists_{a \in U, b \in V} \quad U, V - \text{otwarte}, f - \text{bijekcja między } U, V$
2. $\exists_{g: V \rightarrow U} \quad \forall_{x \in V} \quad f(g(x)) = x,$
3. $g \in \mathcal{C}^1(V).$

Uwaga: dowód składa się z trzech części:

- Pokażemy, że $\exists_{U,V} : f - \text{bijekcja na } U, V$
- Pokażemy, że $U, V - \text{otwarte}$
- Pokażemy, że $\exists_{g: V \rightarrow U}, g - \text{różniczkowalna na } V \text{ i ciągła}.$

Przykład 1. $f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
 $\det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, ale $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ (czyli funkcja jest okresowa)

Dowód. Część ISzukamy $U, V : f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V.$ Skoro $f'(a) - \text{odwracalne}$, to znaczy, że $\exists_{(f'(a))^{-1}}$, zatem

$$\exists_{\lambda} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1.$$

Wiemy, że $f'(x) - \text{ciągła w } x = a$, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} \forall_x, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon$$

Położmy $\varepsilon = \lambda$.

Oznacza to, że

$$\exists_{\delta_\lambda} \forall_x x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że $f - \text{bijekcja między } U \text{ i } V.$

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E$$

Pytanie 1. Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)

dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))?$

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\forall_{y \in V} \quad \exists_{x \in U} : f(x) = y$$

Uwaga: o f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U .
Policzmy $\varphi'_y(x)$

$$\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x)),$$

więc

$$\begin{aligned} \|\varphi'_y(x)\| &= \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leq \\ &\leq \|(f'(a))^{-1}\| \|f'(a) - f'(x)\| \leq \\ &\leq \forall_{x \in U} \frac{1}{2\lambda} \lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pamiętamy, że jeżeli $\exists_M \|\varphi'_y(x)\| \leq M$, to $\forall_{x,y} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$

Zatem skoro $\|\varphi'_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$, to

$$\forall_{x_1, x_2 \in U} \|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U , więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\forall_{y \in V}$. Zatem f - bijekcja między U i V . \square

Część II

Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) $U = K(a, \delta_1)$, więc

$$\exists_{x_0 \in U} \quad \exists_r K(x_0, r) \subset U$$

lub równoważnie

$$\|x - x_0\| \leq r \wedge x \in U.$$

Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0)$ $\exists \quad K(y_0, \lambda r) \subset V$, czyli że V - otwarty.

Weźmy $y \in K(y_0, \lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$. Jeżeli pokażemy, że dla $\|y - y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0, r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y - y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0, r)$, zbadamy tę wielkość dla $x \in K(x_0, r)$. $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi_y(x_0) - x_0\|.$$

Ale

$$\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \|y - y_0\| \leq \frac{1}{2\lambda} \lambda r = \frac{r}{2},$$

więc

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leq r,$$

jeżeli

$$\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leq r.$$

"../img/"fig_18.png

Rysunek 1: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Stąd wiemy, że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$ należy do $K(x_0, r)$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.

Część III

Szukamy $g : V \rightarrow U$

Skoro f - bijekcja między U i V , to znaczy, że $\exists_{g:V \rightarrow U} f(g(x)) = x \quad \forall_{x \in V}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w $x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (1)$$

to będziemy wiedzieli, że:

1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.

W tym celu pokażemy, że:

"../img/"fig_19.png

Rysunek 2: Nie ok.

1. $(\|k\| \rightarrow 0) \implies (\|h\| \rightarrow 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= x+h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) = \\ &= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)),\end{aligned}$$

$$\text{czyli } \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geq \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1} \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{\|k\|} \leq \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda} \frac{hf'(x)}{\|k\|}$
 0, o ile $\exists [f'(x)]^{-1}$

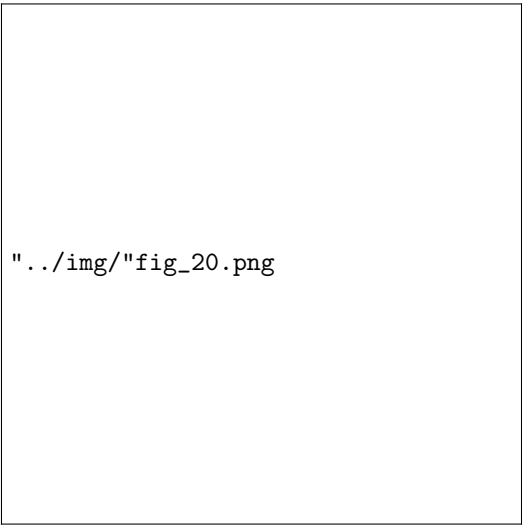
Pytanie 2. skąd wiadomo, że $(f'(x))^{-1}$?

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
 Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1$ oraz U - taka, że

$$\forall_{x \in U} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$



Rysunek 3

Zatem

$$0 \leq \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leq \|f'(a) - f'(x)\| \|y\| + \|f'(x)\| \|y\|.$$

$$\text{Dalej } 2\lambda \|y\| \leq \lambda \|y\| + \|f'(x)y\| \text{ dla } x \in U$$
$$0 \leq \lambda \|y\| \leq \|f'(x)y\| \text{ dla } y = 0$$

Czyli

$$\forall_{x \in U} \|f'(x)y\| > 0.$$

□