

Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$\begin{aligned}
v &= [\sigma], v \in T_p M, v() \in D_p M \\
v(f) &= \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} \\
v() &= ? \cdot ? + ? \cdot ? + ? \cdot ? = \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t))|_{t=0} = \\
&= \frac{d}{dt} (\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\tilde{f}(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \dots, \varphi^n(\sigma(t))))|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Czyli jeżeli $v \in T_p M$ i $v \in [\sigma]$, to wiemy, że

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1 + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2 + \dots + \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n = \\
&= \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \\
&= \xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} = v(f).
\end{aligned}$$

Zatem

$$v() = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Przykład 1 Więc niech $v = 2e_x + 3e_y \rightarrow v() = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$.

Wniosek: mając izomorfizm między $T_p M$ i $D_p M$ możemy zapisać bazy:

$$T_p M = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

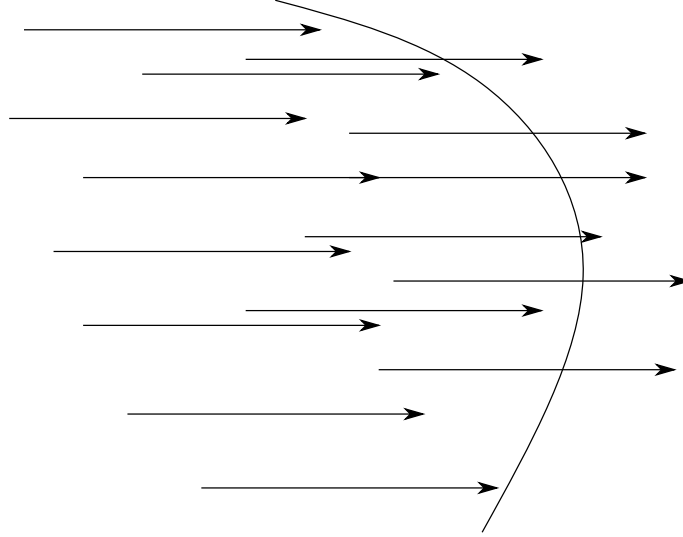
To wtedy

$$D_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle.$$

np. $v = 7e_r + 8e_\varphi \rightarrow v() = 7 \frac{\partial}{\partial r} + 8 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (często użyjemy bazy z $D_p M$ jako bazy $T_p M$).

Definicja 1 Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Zbiór jednoform ($p \in M$) oznaczamy przez $T_p^* M$ (lub $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$)

Skoro $T_p^* M$ jest dualna do $T_p M$, to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną. $T_p^* M = \langle dx^1, dx^2, \dots, dx^n \rangle$, gdzie $\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_j^i$



Rysunek 1: Strumień przez balonik

Przykład 2 Niech $\Lambda^1(M) \rightarrow \omega = 7dx + 3dy, v \in T_pM = 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$, wówczas

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, v \rangle &= \left\langle 7dx + 3dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= \left\langle 7dx, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \left\langle dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= 7 \cdot 2 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 7 \cdot 4 \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle + 3 \cdot 2 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + 3 \cdot 4 \left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
 &= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4.
 \end{aligned}$$

Przykład 3

$$\begin{aligned}
 v &= A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz = \\
 &= \langle \omega, v \rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.
 \end{aligned}$$

Definicja 2 Zbiór wszystkich odwzorowań $T_pM \times \dots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k -formami.

Wersja 1:

Niech $\alpha \in T_p^*M, \beta \in T_p^*M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$.

Odwzorowanie $\wedge : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \Lambda^2(\theta), \theta \in M$ nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Przykład 4 Niech $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial y}, w = 2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tzn. $\alpha \wedge \alpha = 0$. Ważny przykład:

Przykład 5

$$\begin{aligned} \alpha &= A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\ \alpha \wedge \beta &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\ &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\ &+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\ &+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y) dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z) dz \wedge dx \\ &. \end{aligned}$$

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

Definicja 3 Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \rightarrow \mathbb{R} \\ (\text{funkcje nazywamy zero-formami } f \in \Lambda^0(\theta)) \\ \omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) &\implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \\ dd\omega &= 0, \omega \in \Lambda^k(\theta). \end{aligned}$$

Przykład 6 $f(r, \theta, \varphi)$ - funkcja z \mathbb{R}^3 w \mathbb{R}^1 .

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\ \alpha &= 7x^2 y dx \\ d\alpha &= d(7x^2 y) \wedge dx = \left(\frac{\partial}{\partial x} (7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx. \end{aligned}$$

Przykład 7 Niech $F = -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

$$\begin{aligned}
dF &= \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} dy - \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dx + \\
&+ \left(-\frac{\partial E_y}{\partial x} dx - \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dy + \\
&+ \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} dx - \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) \wedge dt \wedge dz + \\
&+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) \wedge dz \wedge dx + \\
&+ \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \\
&= \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dy + \\
&+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dy \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)}_{\text{rot } E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt \wedge dx \wedge dz + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)}_{\nabla B} dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część) $dF = 0$