Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{p!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\ldots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h),$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \cdots \\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p+1}} \underset{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla}\\ \text{"}x_0<c<x_0+h\text{"}}}{(x_0+\theta h)}\; h^{i_1}\ldots h^{i_{p+1}}.$$

Obserwacja 1. *(bardzo ważna zależność!)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0.$$

Przykład 1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=x^2y^3, f'(x,y) = \left[2xy^3, 3x^2y^2\right].$

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, *to wtedy*

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \left[h_1, h_1\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

0.1 Minima i maksima

Przypomnienie: Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x \in K(x_0,\eta) \\ K(x_0,\eta) \subset \mathcal{O} \\ x \neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h}{\forall} \quad ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0+h) > f(x_0).$$

"../img/"fig_12.png

Rysunek 1: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1. *jeżeli $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \ldots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

Uwaga: jeżeli $f : U \to \mathbb{R}$ i U - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na $int(U)$ oraz na $U - \{int(U)\}$

Dowód. Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} g_h(t) \bigg|_{t=0} = 0,$$

czyli dla $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right), \quad h = \left(h^1, h^2, \ldots, h^n\right)$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g_h(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \ldots, x_0^n + th^n)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n)\Big|_{t=0} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\underset{h}{\forall} : ||h|| < \eta,
\end{aligned}
$$

to znaczy:

$$
\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.
$$

$\square$

Uwaga: jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

Twierdzenie 1. *Niech*

$$\begin{aligned}
&f : \mathcal{O} \to \mathbb{R},\\
&\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n,\\
&x_0 \in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \text{ - otwarty},\\
&f \in C^{2p}(\mathcal{O}),\\
&f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

oraz spełniony jest warunek

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h\in K(x_0,\eta)}{\forall} : \quad \sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \ldots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$

to wtedy f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. (wersja uproszczona dla minimum i dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$).
Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{(2p)!} \sum_{i_1=1 \ldots i_{2p}=1}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \ldots x^{i_{(2p)}}} h^{i_1} \ldots h^{i_{(2p)}}}_{(*)} + r_{2p+1}(x_0+h) \tag{1}$$

Wiemy też , że

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underbrace{(1)(*)) \geqslant c||h||^{2p}}_{\substack{\text{Chodzi o to, żeby reszta}\\ \text{nie mogła tego przekroczyć}}} .$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\eta}{\exists} \quad \underset{||h||<\eta}{\forall} \left| r_{2p+1}(x,h) \right| \leqslant \underset{\substack{\text{albo 7,}\\ \text{albo 2019}}}{\frac{c}{2}} ||h||^{2p}.$$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{i_1=1 \ldots i_{2p+1}=1}^{n} \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0+\theta h)}{\underset{0<\theta<1}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{(2p+1)}}}} h^{i_1} \ldots h^{i_{(2p+1)}} = \Big| \text{tu potrzebne założenie, że } f \in C^{2p+}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}} \to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall} \quad \underset{\eta}{\exists} \quad \underset{||h||<\eta}{\forall} \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}} < M,$$

czyli

$$\left| \frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}} \right| < M.$$

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\ \left|r_{2p+1}(x_0,h)\right| < M\left|\left|h\right|\right|^{2p}$$

czyli jak przyjmiemy $M = \frac{c}{2}$ to dostajemy

$$\underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\ f(x_0+h)-f(x_0) \geqslant \frac{c}{2}||h||^{2p}$$

$\square$

Uwaga: dlaczego warunek $(-|-) > c||h||^{2p}$, a nie po prostu $(-|-) > 0$?

Przykład 2.

$$f(x,y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Badamy: $f(0+h)-f(0) = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$ *Czyli* $f(0+h)-f(0) \star 2h_1^2$ *- minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.*
$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *- minimum,* $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ *- równo, coś takiego - punkt siodłowy.*
Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\underset{c}{\exists} \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c\,\|h\|^2,$$

bo dla

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geqslant c\left\|\begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}\right\|$$

0.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$