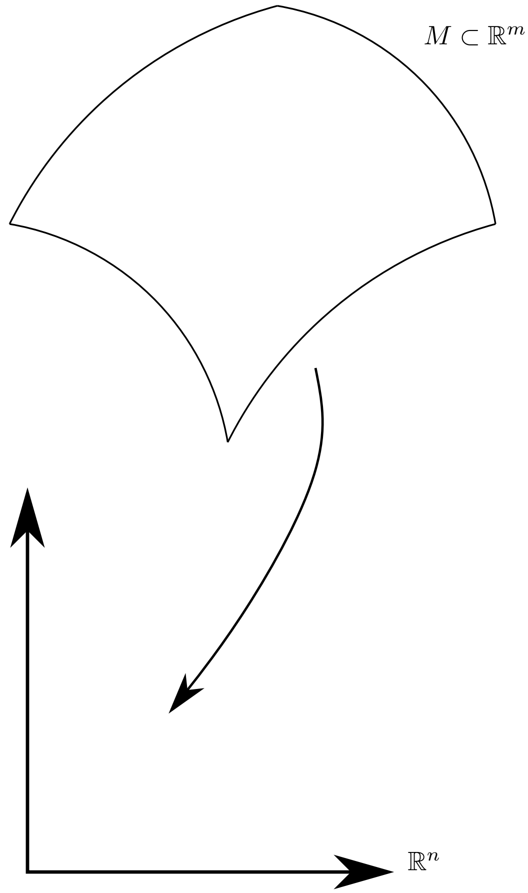



Rysunek 1: Wymiar pączka może być większy! $m > n$

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech $M$ - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma :] - \varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \to \sigma(t) \in M$ nazywamy krzywą na $M$. $\sigma$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$

**Przykład 1.** *(spirala na walcu)*

$$\sigma :] - \varepsilon, \varepsilon[ \to \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

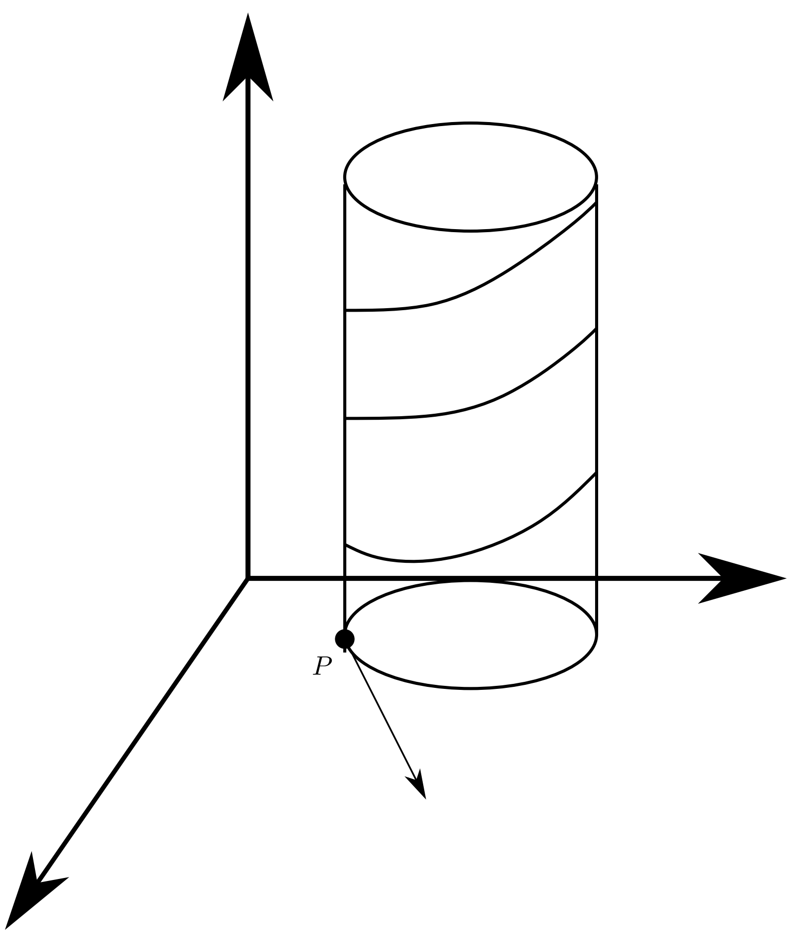
**Definicja 1.** *Niech $p \in M$, $\sigma_1, \sigma_2$ - krzywe na $M$ takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że $\sigma_1$ i $\sigma_2$ są <u>styczne w punkcie $P$</u>, jeżeli*

$$\left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt $P \in M$. Na tym zbiorze wprowadzamy relację: $\sigma_1 \sim \sigma_2$ jeżeli $\sigma_1$ i $\sigma_2$ są styczne. Jeżeli $\sigma$ krzywa przechodząca przez punkt $P$, to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie $P$ nazwiemy $v = \underbrace{[\sigma]}_{\substack{\text{klasa}\\\text{równoważności}}}$

**Przykład 2.** *Weźmy krzywą* $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



**Przykład 3.** *Niech* $f(p) = C \underset{p\in M}{\forall}$. *Ile wynosi* $v(f)$?

$$\begin{aligned} v(f) &= v(c) = v(c\cdot 1) = c\cdot v(1) = \\ &= c\cdot v(1\cdot 1) = c\cdot(1\cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c\cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

*Czyli* $v(f) = 2v(f)$, *czyli* $v(f) = 0$ *(pochodna stałej* $= 0$ *)*

**Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.**

**Pytanie 1.** *Jak można w praktyce zrealizować taki operator?*
*Niech* $v \in T_pM, v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

> **Definicja 2.** *Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie* $p \in M$ *oznaczamy przez* $T_pM$ *i nazywamy przestrzenią styczną.*

Chcemy wyposażyć $T_pM$ w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań.
Niech $v_1, v_2 \in T_pM$ i $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$. Wówczas

$$\begin{aligned} v_1 \diamond v_2 &\overset{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)\right] \\ \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} \alpha\cdot v_1 &\overset{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\alpha\cdot\varphi(\sigma_1)\right]. \end{aligned}$$

$T_pM$ wraz z działaniami $(\diamond, \cdot\ )$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \overset{\text{def}}{=} \{p \in M, T_pM\}$$

nazywamy wiązką styczną.

**Pytanie 2.** *Czy w* $TM$ *możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?*
*Odpowiedź: NIE DA SIĘ*

> **Definicja 3.** *Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie* $P$ *oznaczamy przez* $D_pM$

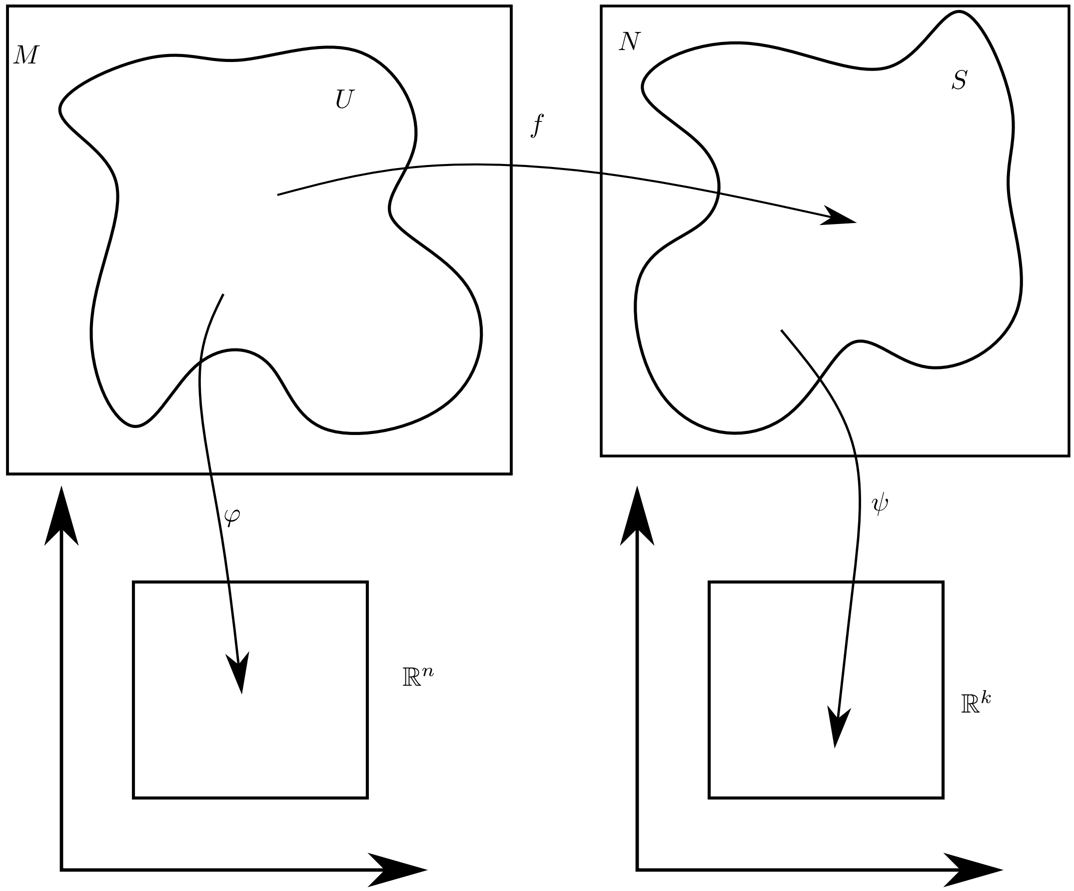
Chcemy nadać $D_pM$ strukturę przestrzeni wektorowej.

$$\begin{aligned} &v_1, v_2 \in D_pM, f \in \mathcal{C}^\infty(M) \implies (v_1 \diamond v_2)f \overset{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f) \\ &\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}(\alpha \bowtie v_1)f = \alpha\cdot v_1(f) \end{aligned}$$

.

**Pytanie 3.** *Co to znaczy, że* $f$ *- klasy* $C^\infty(M)$*?*

Jeżeli $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ - jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.
Związek między $T_pM$, a $D_pM$ :
Niech $v = 5e_x + 6e_y \in T_pM$. Czy znajdziemy odwzorowanie z $T_pM$ do $D_pM$, (które dokładnie jednemu $v$ przyporządkowałoby jeden element).$\rightarrow$ izomorfizm między $T_pM$ i $D_pM$.




Rysunek 2: $f$ nie musi być bijekcją jakby co

## 0.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech $f : M \to \mathbb{R}$, $f$ - klasy $\mathcal{C}^\infty(M)$
niech $v\left(\right) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, takie, że

$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f\cdot g) = v(f) + v(g)$$
$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}\underset{f\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(\alpha f) = \alpha v(f)$$
$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f\cdot g) = f(p)\cdot v(g) + g(p)v(f).$$

$v\left(\right)$ spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie $p$.