**Definicja 1** *Niech* $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ *taka, że* $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t,x) \to f(t,x)$
*Mówimy, że* $f$ *spełnia warunek Lipschitza, jeżeli*

$$\underset{L>0}{\exists} . \underset{t\in I}{\forall} . \underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall} . \|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

**Definicja 2** *Rezolwenta*

**Definicja 3** *Niech* $X$ *- zbiór a* $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ *- rodzina zbiorów. Mówimy, że* $F$ *jest pokryciem zbioru* $X$*, jeżeli* $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$*. Jeżeli zbiory* $A_\alpha$ *są otwarte, to mówimy, że* $F$ *jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów* $A_\alpha$ *jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór* $F$ *taki, że jest też pokryciem zbioru* $X$ *nazywamy podpokryciem.*

**Definicja 4** *Zbiór* $X$ *nazywamy zwartym, jeżeli z* ***każdego*** *pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.*

**Definicja 5** *Niech* $U$ *- zbiór otwarty* $\subset M$ *i niech odwzorowanie* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *takie, że* $\varphi$ *- klasy* $\mathcal{C}^1$*, (czasami* $\mathcal{C}^\infty$ *),* $\varphi^{-1}$ *- klasy* $\mathcal{C}^1$*, (czasami* $\mathcal{C}^\infty$ *) nazywamy mapą.*
*Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru* $M$*.*

**Definicja 6** $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ *- mapy na* $M$*.*
$U_1$ *i* $U_2$ *nazywamy zgodnymi jeżeli*
*a)* $U_1 \cap U_2 = \phi$
*albo odwzorowanie* $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ *jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie* $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ *)*

**Definicja 7** *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór* $M$ *wraz z atlasem, który pokrywa cały* $M$ *nazywamy* ***rozmaitością*** *(ang. manifold).*

**Definicja 8** *(Ciągłość Heine)*
*Niech* $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$*. Mówimy, że odwzorowanie* $T : X \to Y$ *jest ciągłe, jeżeli*

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

*UWAGA:* $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

**Definicja 9** *(Ciągłość Cauchy)*
*Niech* $x_0 \in X$*. Mówimy, że* $T : X \to Y$ *- ciągłe, jeżeli*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x\in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

**Definicja 10** *Niech $p \in M$, $\sigma_1, \sigma_2$ - krzywe na $M$ takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że $\sigma_1$ i $\sigma_2$ są styczne w punkcie $P$, jeżeli*

$$\left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

**Definicja 11** *Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie $P$ oznaczamy przez $D_pM$*

**Definicja 12** *Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$. Zbiór jednoform ($p \in M$) oznaczamy przez $T_p^*M$ (lub $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$)*

**Definicja 13** *Zbiór wszystkich odwzorowań $T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ $k$ - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez $\Lambda^k(M)$ i nazywamy k-formami.*

**Definicja 14** *Odwzorowanie $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n, f : \theta \to \mathbb{R}$$
*(funkcje nazywamy zero-formami $f \in Lambda^0(\theta)$)*
$$\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$
$$dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).$$

**Definicja 15** *Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T_p^*M \in \Lambda'(M)$, wówczas $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(M)$ i dla $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_p^*M$,*

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k ; v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_1)\ldots\alpha_k(v_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(v_k)\alpha_2(v_k)\ldots\alpha_k(v_k) \end{bmatrix}.$$

**Definicja 16** *Niech $M, N$ - rozmaitości, $h : M \to N$ i niech $p \in M, \alpha \in T_{h(p)}^*N$.*
*Cofnięciem formy $\alpha$ w odwzorowaniu $h$ nazywamy formę $h^*\alpha \in T_pM$, taką, że $\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, hv\rangle \underset{v \in T_pM}{\forall}$ i caaa. Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$ i $v_1, \ldots, v_k \in T_p(M)$, to*

$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), v_1, \ldots, v_k \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \langle h^*\alpha_1, v_1\rangle & \langle h^*\alpha_2, v_1\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle \end{bmatrix}.$$

*Czyli*
$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = (h^*\alpha_1) \wedge (h^*\alpha_2) \wedge \ldots \wedge h^*(\alpha_k).$$

**Definicja 17** *niech $M$ - rozmaitość wymiaru $n$, $g_{ij}$ - tensor metryczny na $M$, operacją $\sharp$ : $T_pM \to T_p^*M$ taką, że dla $v = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}$,*

$$v^\sharp = a^i g_{i1} dx^1 + a^i g_{i2} dx^2 + \ldots + a^i g_{in} dx^n, i = 1, \ldots, n.$$

*zadaje izomorfizm między $T_pM$ a $T_p^*M$.*

**Definicja 18** *niech $M = \mathbb{R}^3$,*

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{\flat} (df)^\flat \in T_pM$$

*nazywamy gradientem funkcji $f$ : $\nabla f \stackrel{def}{=} (df)^\flat$, gdzie $f : M \to \mathbb{R}^1$, $f$ - klasy $\mathcal{C}^k(M)$*

**Definicja 19** *Niech $M$ - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \to \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "$*$" Hodge'a i definiujemy następująco:*

$$*\left(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_L}\right) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_L j_L} \in_{j_1 j_2 \ldots j_L k_1 k_2 \ldots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{n-1}},$$

*gdzie $\in_{i_1,\ldots,i_n} = \{sgn(i_1, \ldots, i_n)$ jeżeli $i_m \neq i_p, \quad 0$ w.p.p$\}$*

**Definicja 20** $M = \mathbb{R}^3$
*niech $v \in T_pM$, operację*

$$rot(v) \stackrel{def}{=} \left(*\left(dv^\sharp\right)\right)^\flat$$

*nazywamy rotacją wektora $v$ i oznaczamy rot $v \stackrel{ozn}{=} \nabla \times v$.*
*Operację*

$$div\ v \stackrel{def}{=} d\left(*v^\sharp\right)$$

*nazywamy dywergencją i oznaczamy div $v \stackrel{ozn}{=} \nabla \cdot v$.*
*Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na $M$ takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \to \Lambda^2(M)$*

**Definicja 21** *Norma: niech $X$ - przestrzeń wektorowa.*
*Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:*

**Definicja 22** *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

*- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).*

**Definicja 23** *Niech* $U \subset X, V \subset Y$
$U, V$ *- otwarte,* $T : U \to V; x, h \in U$
*Mówimy, że* $T$ *- różniczkowalne w punkcie* $x_0$*, jeżeli prawdziwy jest wzór*

$$\underset{h \in U}{\forall} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

*gdzie* $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$*, a* $L_{x_0}$ *- liniowe* $: X \to Y$.

**Definicja 24** *Pochodna mieszana*

**Definicja 25** *Niech* $L : V \to W, L$ *- liniowe,* $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ *- unormowane. Mówimy, że* $L$ *jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists}, \underset{x \in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v$$

**Definicja 26** *Wielkość* $\inf_A \{ \underset{x \in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v \}$ *nazywamy normą odwzorowania* $L$ *i oznaczamy* $A \stackrel{ozn}{=} ||L||$.

**Definicja 27** *Niech* $U \subset \mathbb{R}^m$ *- jest zbiorem wypukłym, jeżeli* $\underset{a,b \in U}{\forall}. \quad [a, b] \stackrel{def}{=} \{a(1 - t) + bt, t \in [0, 1]\} \subset U$

**Definicja 28** $\tilde{x} \in X$ *nazywamy punktem stałym, jeżeli* $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

**Definicja 29** *Funkcje uwikłane*

**Definicja 30** *Ekstrema związane*

**Definicja 31** *Niech* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *i* $M \subset \mathbb{R}^n$ *- zbiór.*
*Mówimy, że* $f$ *ma minimum/maksimum związane na zbiorze* $M$*, w punkcie* $x_0 \in M$*, jeżeli*

$$\underset{r}{\exists} \quad \underset{\substack{h \\ \|h\| < r \\ (x_0 + h) \in M}}{\forall} \quad f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$