Uwaga: Jeżeli np. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, to znaczy, że
$f(x,y)=\begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$, $f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x}f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y}f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 1

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe: $\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$
$f(x+h)-f(x)=\frac{\partial f}{\partial x}h^x+\frac{\partial f}{\partial y}h^y+r((x,y),h)=\begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2y \end{bmatrix}h^x+\begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}h^y+r((x,y),h)=\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix}+r((x,y),h)$

$$\text{Czyli } f'=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, to

$$f'=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

0.1 Uzupełnienie:

Niech V - przestrzeń wektorowa z normą $||.||$ i $x_0\in V$,
wówczas $f(x)=||x||, f:V\to\mathbb{R}^1$ - ciągła w x_0.

Dowód 1

Chccemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall}\underset{\delta}{\exists}\underset{x}{\forall}\quad d_x(x,x_0)<\delta\implies d_{\mathbb{R}}(f(x),f(x_0))<\epsilon$
ale $d_x(x,y)=||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y)=|x-y|$.

Chcemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall}\underset{\delta}{\exists}\underset{x}{\forall}\quad ||x-x_0||<\delta\implies \big|||x||-||x_0||\big|<\epsilon$
ale $||x||=||x-y+y||\leqslant||x-y||+||y||, ||x||-||y||\leqslant||x-y||$,
$||y||=||y-x+x||\leqslant||y-x||+||x||$,
$||y||-||x||\leqslant||x-y||$, czyli $\big|||x||-||y||\big|\leqslant||x-y||$. Niech $\delta=\frac{\epsilon}{2}$, otrzymujemy $\epsilon>\frac{\epsilon}{2}>||x-y||\geqslant\big|||x||-||y||\big|\geqslant0\Box$

Pytanie 1 *Niech* $f(x,y)=7x+6y^2$ *i* $g(t)=\begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$. *Wówczas* $h(t)=(f\circ g)(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Ile wynosi pochodna?*

$f'=[7,12y], g'=\begin{bmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$

Twierdzenie 1 *Niech $G : U \to Y, U \subset X, U$ - otwarte , X - przestrzeń wektorowa unormowana, $F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$*
G - różniczkowalna w $x_0 \in U$, F - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1),\ gdy\ \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2),\ gdy\ \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w x_0

oraz $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)}\, G'(x_0)$

Dowód 2

$$\begin{aligned}
&F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0)) + F'(G(x_0))(G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + r_2(G(x_0)) \\
&G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0))
\end{aligned}$$

zatem:
$F(G(x_0)) + F(G(x_0+h)) = F'(G(x_0))G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0))r_1(x_0, h_1) + r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r_3}{||h_1||} \to 0$, ale $\frac{r_3}{||h_1||} = F'(G(x_0))\frac{r_1(x_0,h_1)}{||h_1||} + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0}$

$\underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}}$, ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem $F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 $\square$

Przykład 2

$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$

Policzmy h'. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}, \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn. $H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$

Weźmy przykład: Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r, \varphi) \\ \Psi_2(r, \varphi) \end{bmatrix}$

$\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej H, ale $f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$\text{Czyli } H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi),y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$\text{Co daje: } \left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\right]\bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi),y=\Psi_2(r,\varphi)}$$