0.1 Zbiory miary Lebesgue'a zero

Definicja 1. *Kostką w* $\mathbb{R}^n$ $(a_k \leqslant b_k)$ *nazywamy zbiór*

$$P_k = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Definicja 2. *Objętością kostki nazywamy*

$$|P_k| = \|[a_1, b_1]\| \cdot \|[a_2, b_2]\| \cdot \ldots \cdot \|[a_n, b_n]\|,$$

gdzie $\|[a_k, b_k]\| = |b_k - a_k|$.

Definicja 3. *Niech* $X \in \mathbb{R}^n$. *Mówimy, że zbiór* X *jest miary Lebesgue'a zero, jeżeli*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{P=P_1\cup\ldots\cup P_k}{\exists} : x \subset P, \sum_{i=1}^{k} |P_i| < \varepsilon.$$

Uwaga: *k nie musi być wielkością skończoną.*

Przykład 1. *Niech* $\{1\} \subset [-10, 10]$, *wówczas*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{p=\left[1-\frac{\varepsilon}{4}, 1+\frac{\varepsilon}{4}\right]}{\exists} : \{1\} \subset P, |P| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przykład 2. *zbiór Cantora*

Chcemy dojść do tw Lebesgue.

Twierdzenie 1. *(Lebesgue) Niech* P *- zbiór nieciągłości funkcji* $f : D \to \mathbb{R}$, f *- ograniczona na* D, D *- . . . jest zbiorem miary Lebesgue'a zera* $\iff$ f *- całkowalna na* D.

Wiemy, że f - całkowalna $\iff$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\Pi}{\exists} . |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geqslant \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja f na zbiorze A powinna być ograniczona!!!)

Obserwacja 1. *Jeżeli weźmiemy stól o jakiejś długości to mogę wziąć ileś kartek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu kartek) przykryć go skończoną liczbą kartek?*

"../img/"fig_33.png

Weźmy długi stół:

$$
\begin{aligned}
&R = \bigcup_{n=0}^{\infty}]n-2, n+2[\cup]-n-2, -n+2[\\
&]0,1[\subset [-2,2] \\
&]0,1[\subset [-2019, 2018] \cup [-2,2] \\
&]0,1[= \bigcup_{n=2}^{\infty}]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[.
\end{aligned}
$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

Definicja 4. *Niech X - zbiór a $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ - rodzina zbiorów. Mówimy, że F jest pokryciem zbioru X, jeżeli $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$. Jeżeli zbiory A_α są otwarte, to mówimy, że F jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów A_α jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór F taki, że jest też pokryciem zbioru X nazywamy podpokryciem.*

Definicja 5. *Zbiór X nazywamy zwartym, jeżeli z* ***każdego*** *pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.*

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

Stwierdzenie 1. *(X - domknięty,ograniczony) $\iff$ (X-zbiór zwarty)*

Dowód 1. *niech $X \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ - przestrzeń metryczna*
$\Longleftarrow_1$ *Pokażemy, że jeżeli X - zwarty, to X - ograniczony. (przypomnienie: zbiór $A \subset \mathbb{X}$*

"../img/"fig_34.png

jest ograniczony jeżeli $\exists_{r}. \exists_{x_0 \in A}$, *że* $A \subset K(x_0, r)$ *Skoro* X *- zwarty, to niech* F *będzie pokryciem złożonym z* $K(x,1), x1X$. $F = \left\{ K(x,1), \forall_{x \in X} \right\}$. F *jest pokryciem zbioru* X*, ale ponieważ* X *- zwarty, to znaczy, że z pokrycia* F *możemy wybrać* ***skończone*** *podpokrycie, co oznacza, że zbiór* X *możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem* X *- ograniczony.*

$\Longleftarrow_2$ *Pokażemy, że* X *- zwarty, to* X *- domknięty. Pokażemy, że* X' *- zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego* $p \in X'$ $\exists_{K(p,\tilde{r})}$, *że* $K(p,\tilde{r}) \cap X = \phi$ *co będzie oznaczało, że* X' *składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy* $q \in X$*, utwórzmy dwa otoczenia:*

$$K(q,r), K(p,r); r = \frac{1}{2} d(p,q).$$

Widać, że $K(q,r) \cap K(p,r) = \phi$. *Powtarzamy taką procedurę dla każdego* $q \subset X$*, oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru* X *kulami* $K(q, r_q), q \in X$*, ale* X *jest zbiorem zwartym więc mogę wybrać* ***skończoną*** *ilość kul*
$K(q_1,r_1), K(q_2,r_2), \ldots, K(q_k,r_k)$ *będącą pokryciem zbioru* X. *A to znaczy, że*

$$\underbrace{(K(p,r_1) \cap K(p,r_2) \cap \ldots \cap K(p,r_k))}_{\textit{jest do zbiór niepusty i } \boldsymbol{otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1,r_1) \cup K(q_2,r_2) \cup \ldots \cup K(q_k,r_k))}_{\textit{Pokrywa cały } X} = \phi.$$

czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu $P : K(p,r_k) \cap \ldots K(p,r_k)$*, takie, że nie ma punktów wspólnych z* X*, więc p jest punktem wewnętrznym, czyli* X' *- otwarty, czyli* X *- domknięty.*

X *- domknięty i ograniczony* $\Longrightarrow$ X *- zwarty. Niech* P *- kostka z* $\mathbb{R}^n$*, metryka* d_2. *Pokażemy, że* P *jest zwarta.*

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

"../img/"fig_35.png

Rysunek 1: Nieważne, co A myśli o sobie, jeżeli otoczymy je kulą, to jest ograniczone i koniec

$$\neg(p \implies q) \iff p \land \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:
Załóżmy, że P - domknięty i ograniczony i P nie jest zwarty. Co to znaczy, że P nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru P takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli P nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \ldots \times [a_n, c_n]$ gdzie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$,
to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli $P_1 \subset P$, kulę P_1 też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek $PP_1P_2P_3 \ldots P_n \ldots$. Weźmy ciąg elementów

$$\begin{aligned} &x_0 \in P \\ &x_1 \in P_1 \\ &\vdots \\ &x_n \in P_n \\ &\vdots. \end{aligned}$$

Znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ czyli X_n jest zbieżny. (bo $\mathbb{R}^n$ - zupełna). Niech $\tilde{x}$ będzie granicą $\{x_n\}$ a zbiór $\{P, P_1, P_2, \ldots, P_n, .$ jest pokryciem P takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$, to znaczy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{n}{\exists} . \underset{n>N}{\forall} . x_n \in K(\tilde{x}, \varepsilon).$$

*Oznacza to, że mogę tak dobrać ε, że w $K(\tilde{x}, \varepsilon)$ będą się zawierać wszystkie $P_i, i > n$. Mogę wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki P.*

"../img/"fig_36.png

Rysunek 2: Przykrywanie zbioru kulami

$$\{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}\,.$$

i sprzeczność

Wracamy do tw. Lebesgue'a. Obserwacja: Niech D - zwarty, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ - ograniczona i niech $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$. Wówczas:

$$\underset{\Pi}{\exists}.|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon|D|.$$

Dowód 2. *Skoro* $\underset{x\in A}{\forall} \lim_{r\to 0} |\underset{K(x',r)}{sup} f(x') - \underset{x'\in K(x',r)}{inf} f(x')| < \varepsilon$ *To znaczy, że* $\underset{r_\varepsilon}{\exists}$ *takie, że* $|supf(x') - inff(x')| < \varepsilon$*. Jeżeli zbadamy wszystkie kule* $K(x, r_\varepsilon)\underset{x\in D}{\forall}$ *to otrzymamy pokrycie* A*. Ale* A *jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że*

$$(*)A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \ldots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

"../img/"fig_37.png

Możemy zatem wybrać podział Π *zbioru* D *zgodny z podziałem* $(*)$*, w wyniku czego,*

$$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| < \varepsilon |D|.$$

"../img/"fig_38.png

"../img/"fig_39.png

Rysunek 3: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszytkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

"../img/"fig_40.png