**Twierdzenie 1** *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, f \in \mathcal{C}^2(U), G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, G \in \mathcal{C}^2(U_2), \underset{x_0}{\exists} G(x_0) = 0, G'(x_0)$ *- ma rząd maksymalny* $(m)$ *oraz*

$$\underset{\Lambda}{\exists} \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

*to jeżeli*

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel) > 0, h_\parallel \stackrel{def}{=} \left\{G'(x_0)h_\parallel = 0\right\}.$$

*to* $f$ *posiada w* $x_0$ *minimum lokalne* ($< 0$, *to maksimum lokalne) na zbiorze* $M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$

**Twierdzenie 2** *Niech* $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- domknięty i* $f : [a, b] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *takie, że* $f$ *- ciągła na* $[a, b] \times \mathcal{O}$ *oraz* $f$ *spełnia warunek Lipschitza na* $\mathcal{O}$, *to znaczy:*

$$\underset{L>0}{\exists} . \underset{t\in[a,b]}{\forall} . \underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall} \|f(t, x) - f(t, x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

*Wówczas*

$$\underset{t_0\in[a,b]}{\forall} . \underset{x_0\in\mathcal{O}}{\forall} . \underset{\varepsilon>0}{\exists}, \text{ że dla } t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

*równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na* $x_0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

**Twierdzenie 3** *Jeżeli odwzorowania*

$$t \in [a, b] \to A(t)$$
$$t \in [a, b] \to b(t).$$

*Gdzie* $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \to X$ *są ciągłe, to równanie*

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

*Ma dla dowolnych* $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$ *jednoznacznie określone rozwiązanie na* $t \in ]a, b[$
*Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast* $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times\mathcal{O}$, *mamy* $]a, b[\times X$

**Twierdzenie 4** *(Liouville)*
*Jeżeli* $R(t, t_0)$ *- rezolwenta dla problemu*

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

*i* $x \in \mathbb{R}^n$, *to* $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}$, *gdzie* $w(t) = \det R(t, t_0)$ *i* $w(t)$ *nazywamy wrońskianem.*

**Twierdzenie 5** *(Lebesque) Niech $P$ - zbiór nieciągłości funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, $f$ - ograniczona na $D$, $D$ - ... jest zbiorem miary Lebesque'a zera $\iff$ $f$ - całkowalna na $D$.*

**Stwierdzenie 1** *($X$ - domknięty,ograniczony) $\iff$ ($X$-zbiór zwarty)*

**Twierdzenie 6** *(Lebesgue'a) niech $D$ - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f$ - ograniczona. Wówczas $f$ - (całkowalna na $D$ ) $\iff$ (zbiór nieciągłości funkcji $f$ jest miary Lebesgue'a zero)*

**Twierdzenie 7** *(Fubiniego)*
*Niech $f : A \times B \to \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$, $f$ - ograniczona i całkowalna na $A \times B$. Oznaczmy $x^l \in A, y^k \in B$, $A, B$ - kostki.*
*Niech*

$$\varphi(x) = \overline{\int_B} f(x^l, y^k) dy^k, \psi(x) = \underline{\int_B} f(x^l, y^k) dy^k.$$

*Wówczas*

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

***Uwaga 1*** *całkowalnośc na $A \times B$ nie oznacza całkowalności na np. $B$.*

**Twierdzenie 8** *(O zamianie zmiennych)*
*Niech $\Theta, \Omega$ - zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ i $\xi : \Omega \to \Theta$, $f : \Theta \to \mathbb{R}$, $f$ - ograniczona i całkowalna. $\xi$ - klasy $\mathcal{C}^1$ na $\Omega$, $\xi^{-1}$ klasy $\mathcal{C}^1$ na $\Theta$. Wtedy*

$$\int_\Theta f(x)dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'(t)|dt. \tag{2}$$

$x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \ldots, t^n) \in \Omega$

**Twierdzenie 9** *Jeżeli $f$ - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,*

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

**Twierdzenie 10** *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
*Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w $x_0$, wtedy $\underset{h \in \mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h)$, gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$*

**Twierdzenie 11** *Niech $G : U \to Y, U \subset X, U$ - otwarte , $X$ - przestrzeń wektorowa unormowana, $F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$*
*$G$ - różniczkowalna w $x_0 \in U$, $F$ - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.*

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1),\ gdy\ \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2),\ gdy\ \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

*Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w $x_0$*

*oraz $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)}\, G'(x_0)$*

**Twierdzenie 12** *Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, otwarty i $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, wówczas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i, j = 1, \dots, n$$

**Stwierdzenie 2** *jeżeli $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w $x_0$ minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

*(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)) )*

**Twierdzenie 13** *Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ - otwarty, a $f$ - klasy $C^{2p}(\mathcal{O})$ oraz $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ i*

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h \in K(x_0,\eta)}{\forall} : \quad \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$

*to $f$ ma w $x_0$ minimum (maksimum) lokalne.*

**Twierdzenie 14** *Twierdzenie ($L$ - ograniczone) $\iff$ ($L$ - ciągłe)*

**Stwierdzenie 3** *Niech $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, U$ - otwarte, wypukły $\underset{M}{\exists}.\underset{x \in U}{\forall} ||f'(x)|| \leqslant M$, to $\underset{a,b \in U}{\forall} ||f(b) - f(a)||_n \leqslant M||b - a||_m$* *(jakiekolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)*

**Twierdzenie 15** *Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i $P$ - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.*

**Twierdzenie 16** *(Zasada Banacha o lustrach)*
*Jeżeli* $P : X \to X, P$ *- zwężające, to*

$$1.\ \underset{x_0 \in X}{\forall} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}) \text{ - Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \tag{3}$$

$$2.\ \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \tag{4}$$

$$3.\ \underset{m}{\forall} \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \tag{5}$$

**Twierdzenie 17** *(o lokalnej odwracalności)*

*Niech* $f : E \to E, E$ *- otwarty,* $E \subset \mathbb{R}^N, f$ *- różniczkowalna w sposób ciągły na E.*
$(f$ *- klasy* $\mathcal{C}^1(E)),\ \underset{a,b \in E}{\exists} : f(a) = b \wedge f'(a)$ *- odwracalna* $(det(f'(a)) \neq 0)$*, to:*

1. $\underset{U,V \subset E}{\exists}, \underset{a \in U, b \in V}{\exists}, U, V$ *- otwarte,* $f$ *- bijekcja między* $U, V$
2. $\underset{g: V \to U}{\exists}. \underset{x \in V}{\forall}, f(g(x)) = x, g$ *- ciągła i różniczkowalna na* $V$

**Twierdzenie 18** *(o funkcji uwikłanej)*
*Niech* $H : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m, H \in \mathcal{C}^1$ *na* $E$. $(x_0, y_0) \in E, H(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m), H$ *- odwracalna.*
*Wówczas istnieje* $U \subset E$ *takie, że* $(x_0, y_0) \in U, \underset{W \subset \mathbb{R}^n}{\exists}$*, że* $x_0 \in W, \underset{x \in W}{\forall} \underset{y}{\exists!} H(x, y) = 0, (x, y) \in U$.
*Jeżeli* $y = \varphi(x)$*, to* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *i* $\varphi \in \mathcal{C}^1$ *na* $W$. $\varphi'(x) = -(H'_y)^{-1} H'_x$