Notatki z Analizy II L2019, FUW

Jakub Korsak

10 września 2019

1 Wykład (26.02.2019)

1.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1 \text{ - } \textit{Potencjał pola niestacjonarnego} \mathcal{V}(x,y,z,t)\\
&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ - } \textit{Natężenie pola } \mathcal{E}(x,y,z)\\
&\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4\\
&\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6\\
&\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1\\
&\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1\\
&.
\end{aligned}$$

Definicja 1. *(Ciągłość Heine)*
Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie x_0, jeżeli

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

Uwaga: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie 1. *Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłosc w $\mathbb{R}^1$?*

Przykład 2. *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0,0)$? dla trajektorii I:

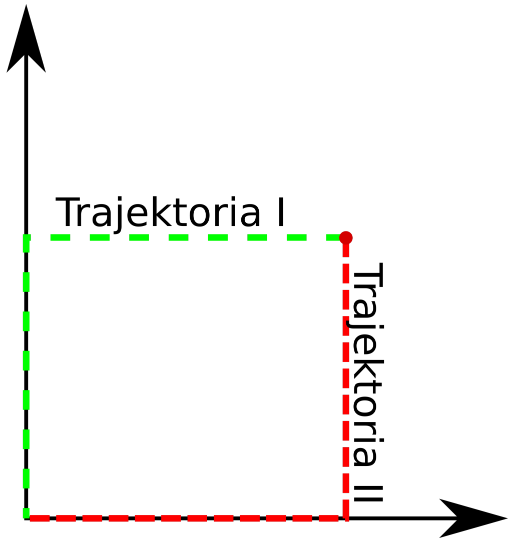
$$\lim_{y_n \to 0}(\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0}(0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \to 0}(\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0}(0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Definicja 2. *(Ciągłość Cauchy)*
(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y.
Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x\in X}{\forall} d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$$

Dowód. Heine $\iff$ Cauchy

$$\implies_{\text{(przez sprzeczność)}}$$

Zakładamy, że

$$\underset{x_n\to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0)$$

oraz

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}, \underset{\delta>0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n\to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (1), to dla $\varepsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$\delta = 1:$

$$\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\delta = \frac{1}{2}:$

$$\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\delta = \frac{1}{3}:$

$$\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \varepsilon$$

$\vdots \qquad \vdots$

$\delta = \frac{1}{n}:$

$$\underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0$, ale $T(x_n) \not\to T(x_0)$, więc mamy sprzeczność. $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{x}{\exists} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon, \tag{2}$$

czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall} \quad \underset{N}{\exists} \quad \underset{n > N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \tag{3}$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\varepsilon_1 > 0}{\forall} \underset{N_1}{\exists} \underset{n > N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1 (\text{dla } x_n \to x_0)$$

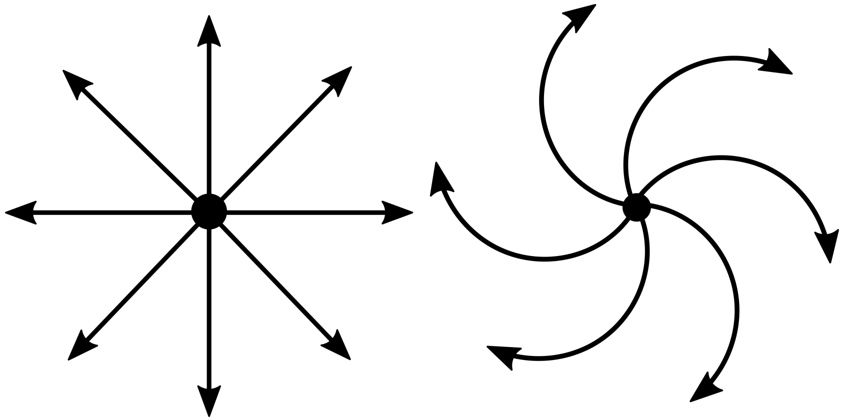
Przyjmijmy $\varepsilon = \varepsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (2) dla ε_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (3), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists} \underset{n > N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (2), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon_1$$

$\square$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

1.2 Różniczkowalność:

Definicja 3. *Pochodna cząstkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.
Mówimy, że f *ma w punkcie* x *pochodną cząstkową w kierunku* x^k*, jeżeli istnieje granica*

$$g \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{x = x_0}$$

Przykład 3. *Pochodna cząstkowa*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Uwaga: *do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych.*

$$\textit{biegunowy} \; \to f(r, \varphi).$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(r, \varphi+h) - f(r, \varphi)}{h}.$$

Definicja 4. *Pochodna kierunkowa:*
Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ *- otwarte,* $x_0 \in \mathcal{O}, e \in \mathcal{O}, T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że T *ma w* x_0 *pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica*

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

Obserwacja: Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $e_y = (0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

Przykład 4. *Problemy z pochodną kierunkową:*

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. *Wówczas* $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0, 0), e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{(0,0)}$$

Uwaga: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$. *Pochodna:* $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$

2 Wykład (01.03.2019)

Definicja 5. *Norma*
Niech X - przestrzeń wektorowa.
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| \geqslant 0 \tag{4}$$

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \forall_{x \in \mathbb{X}} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \tag{5}$$

$$\forall_{x,y \in X} \quad ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \tag{6}$$

$$\forall_{x \in X} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{7}$$

Przestrzeń X wraz z normą $||.||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (spoiler: przestrzenią Banacha).

Przykład 5. *Przykładowa norma:*

$$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X = \mathbb{R}^n.$$

$$X \ni v \implies ||v|| = sup(|x^1|, \dots).$$

Jeżeli $f \in \mathcal{C}([a,b])$, to norma wygląda tak:

$$||f|| = sup_{x \in [a,b]}(f(x)).$$

Przykład 6.

$$\mathbb{R}_2^2 \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = v$$

$$\|v\| = \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Uwaga: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\forall_{x,y \in X} d(x,y) = ||x - y||$, natomiast nie każdą metrykę da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 7. *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(ax, ay) = ||ax - ay|| = |a| ||x - y|| = ad(x, y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 6. *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x_0),\ \ dla\ x\in V\subset\mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h)-f(x)=f'(x_0)h+r(x_0,h),\ \text{gdzie}\ \frac{r(x_0,h)}{||h||}\to 0\ \text{przy}\ ||h||\to 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 7. *Niech $U\subset X, V\subset Y$*
U,V - otwarte, $\quad T:U\to V$
$x,h\in U$

Mówimy, że T - różniczkowalne w punkcie x_0, jeżeli prawdziwy jest wzór

$$\underset{h\in U}{\forall}\quad T(x_0+h)-T(x_0)=L_{x_0}(h)+r(x_0,h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||}\to 0$, a L_{x_0} - liniowe : $X\to Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0. Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h)=T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T.

Uwaga: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x)\sin x dx,$$

a tego nie da sie przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx\right)h(x).$$

Przykład 8. $T(x+h)-T(x)=T'(x_0)h+r(x_0,h)$

$$1.T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ czyli\ x_0\in\mathbb{R},h\in R\implies T(x)=\begin{bmatrix}-\\-\\-\end{bmatrix}T'(x)=\begin{bmatrix}-\\-\\-\end{bmatrix}\tag{8}$$

$$2.T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\quad x_0=\begin{bmatrix}-\\-\\-\end{bmatrix}h=\begin{bmatrix}-\\-\\-\end{bmatrix},T'(x)=[-,-,-]\tag{9}$$

$$3.T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\quad x_0\begin{bmatrix}-\\-\end{bmatrix}h=\begin{bmatrix}-\\-\end{bmatrix},T(x)=\begin{bmatrix}-\\-\\-\end{bmatrix},T'(x)=\begin{bmatrix}- & - & -\\- & - & -\end{bmatrix}\tag{10}$$

$$.\tag{11}$$

Przykład 9.

$$f(x,y) = xy^2, h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) = \\ & = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0 y_0^2 = \\ & = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y = \\ & = \left[y_0^2, 2x \cdot x_0\right] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y. \end{aligned}$$

Pytanie 2. *Czy* $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$*?*

Weźmy $\left\| \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$, wówczas

$$x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leqslant x_0 ||h||^2 + ||h||^3 + 2y_0 ||h||^2 = ||h||^2 (x_0 + 2y_0 + ||h||),$$

zatem

$$\frac{r(x_0,h)}{||h||} \leqslant \frac{||h||^2 (|x_0| + 2y_0 + ||h||)}{||h||} \to 0.$$

$$f(x,y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy].$$

zauważmy, że

$$y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Uwaga: skąd wiemy, że gdy $h \to 0$, to $||h|| \to 0$?
Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?
odpowiedź za tydzień

Twierdzenie 1. *Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,*

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0) e$$

Dowód. skoro f - różniczkowalna, to

$$\underset{h \in U}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + r(x_0, h), \frac{r(x,h)}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0 \tag{12}$$

$$\underset{h_x, h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x \cdot h_y}}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Niech $\|h\| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}, |h_x| > |h_y| \implies \|h\| = |h_x|$

$$\frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y|}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{|h_x \cdot h_y}}{h_x} \not\to 0.$$

□

Pytanie 3. *Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?*

Przykład 10.

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \binom{0}{0}$, dla $f(x,y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0$.

$h = \binom{h_x}{h_y}, x_0 = \binom{0}{0}, f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0,0)\binom{h_x}{h_y} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$.

Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\underset{h_x, h_y}{\forall} \quad \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \to 0$.

Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\to 0$ przy $h_x \to 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2. *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w x_0, wtedy

$$\underset{h \in \mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$

Dowód. (dla $O = \mathbb{R}^3$)

Niech $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
& f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\
& = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\
& + f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\
& + f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \underset{\text{tw. o w. średniej}}{=} \\
& \frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1) h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, c_3) h^3 = \\
& (\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^1 + \\
& + (\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^2 + \\
& + (\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)) h^3
\end{aligned}$$

.

gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, gdy $h \to 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci *coś* h^i, a $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{h^i}{||h||} = dla$ $normy\ np.\ ||h|| = max|h^i| \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \to 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x,h)}{||h||} \to 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\Big)h^1 \to 0$$

Czyli np. $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1}$ - ciągła) $\square$

3 Wykład (05.03.2019)

Przykład 11. ***Uwaga:*** *jeżeli np.* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, to znaczy, że*
$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *, wówczas*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 12.

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3 y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne cząkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = & \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x,y),h) = \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x,y),h) \\ &= \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2 y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x,y),h). \end{aligned}$$

Czyli

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*, to*

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

3.1 Uzupełnienie:

Stwierdzenie 1. *Niech* V *- przestrzeń wektorowa z normą* $||.||$ *i* $x_0 \in V$*, wówczas*

$$f(x) = ||x||, f : V \to \mathbb{R}^1 \text{ - ciągła w } x_0.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta}{\exists} \; \underset{x}{\forall} \; d_x(x,x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ale

$$d_x(x,y) = ||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y) = |x-y|.$$

Czyli pokażemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{\delta}{\exists}\,\underset{x}{\forall} \quad ||x-x_0||<\delta \implies \Big|||x||-||x_0||\Big|<\varepsilon.$$

Ale wiemy, że

$$||x||=||x-y+y||\leqslant||x-y||+||y||, ||x||-||y||\leqslant||x-y||,$$

$$||y||=||y-x+x||\leqslant||y-x||+||x||,$$

$$||y||-||x||\leqslant||x-y||,$$

czyli $|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|$. Niech $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy $\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2}>||x-y||\geqslant\Big|||x||-||y||\Big|\geqslant 0$

□

Pytanie 4. *Niech* $f(x,y)=7x+6y^2$ *i* $g(t)=\begin{bmatrix}cos(t)\\ sin(t)\end{bmatrix}$. *Wówczas* $h(t)=(f\circ g)(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Ile wynosi pochodna?*

$$f'=[7,12y], g'=\begin{bmatrix}-sin(t)\\ cos(t)\end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3. *Niech* $G:U\to Y, U\subset X, U$ *- otwarte,*
X *- przestrzeń wektorowa unormowana,*
$F:G(U)\to Z, G(U)\subset V$
G *- różniczkowalna w* $x_0\in U$*,*
F *- różniczkowalna w* $G(x_0)\in U$*.*
Wówczas: $(F\circ G)$ *- różniczkowalna w* x_0 *oraz*

$$(F\circ G)'(x_0)=\left.F'(x)\right|_{x=G(x_0)}G'(x_0).$$

Dowód.

$$G(x_0+h_1)-G(x_0)=G'(x_0)h_1+r_1(x_0,h_1),\text{ gdy }\frac{r(x_0,h_1)}{||h_1||_x}\to 0$$

$$F(y_0+h_2)-F(y_0)=F'(y_0)h_2+r_2(y_0,h_2),\text{ gdy }\frac{r(y_0,h_2)}{||h_2||_y}\to 0$$

$$\begin{aligned}F\left(G(x_0+h)\right)-F(G(x_0))=&\\ &=F(G(x_0)+G'(x_0)h_1+r_1(x_0,h_1))-F(G(x_0))=\\ &=F(G(x_0))+F'(G(x_0))\cdot(G'(x_0)h_1+r_1(x_0,h_1))+\\ &=r_2(G(x_0),G'(x_0)h_1+r_1(x_0,h_1))-F(G(x_0)).\end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned}F(G(x_0+h))-F(G(x_0))=&\\ &=F'(G(x_0))\cdot G'(x_0)h_1+F'(G(x_0))\cdot r_1(x_0,h_1)+\\ &=r_2\cdot(G(x_0),G'(x_0)h_1+r_1(x_0,h_1)).\end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\frac{r_3}{||h_1||} \to 0,$$

ale

$$\frac{r_3}{||h_1||} = F'(G(x_0))\frac{r_1(x_0,h_1)}{||h_1||} + \\ + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0,h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0,h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0} \cdot \underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0,h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}},$$

ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0,h_1)$, zatem $F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 □

Przykład 13. *$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.*

Policzmy H'. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}, \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn.

$$H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \cdot \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$$

Przykład 14. *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*
$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$\Psi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r,\varphi) \\ \Psi_2(r,\varphi) \end{bmatrix}$ $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Szukamy pochodnej H, ale

$$f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$H' = \Big[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje:

$$\Big[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\Big] = \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\Big]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_2(r,\varphi)}$$

4 Wykład (08.03.2019)

4.1 Konwencja z ćwiczeń z fizyki:

Przykład 15. *Mamy funkcję* $H(r, \varphi) = (f \circ \Psi)(r, \varphi)$

$$\begin{aligned}
\Psi_1(r, \varphi) &= x(r, \varphi) \\
\Psi_2(r, \varphi) &= y(r, \varphi) \\
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Przykład 16.

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

4.2 Interpretacja geometryczna f'

Przykład 17. *Rozważmy zbiór*

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \text{ np. } f(x, y) = x^2 + y^2 : P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}.$$

Załóżmy, że $f(x, y)$ - taka, że P_c można sparametryzować jako

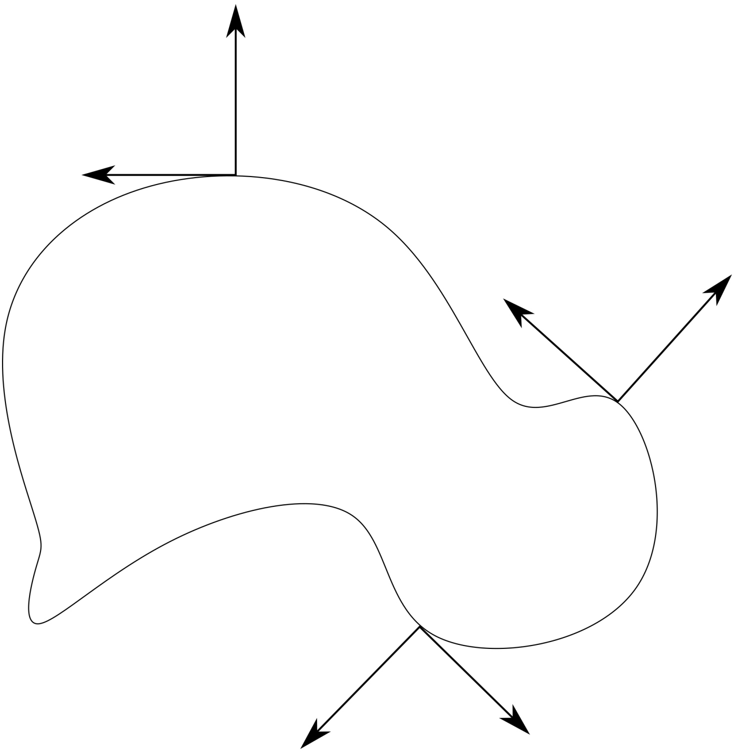
$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in D, \text{ to znaczy, że } P_c = \{(x(t), y(t)), t \in D\}$$

Przykład 18.

Niech $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$. Wtedy $P_c = \{(c \cdot \cos t, c \cdot \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$
$f(x(t), y(t)) = c \quad \underset{t \in D}{\forall}$ - powierzchnie ekwipotencjalne

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2x, 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \cdot \sin t \\ c \cdot \cos t \end{bmatrix} = 0.$$



Rysunek 3: Trajektoria kluki

Definicja 8. *Pochodna mieszana*

$$f(x,y) = x^2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 2y^3, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

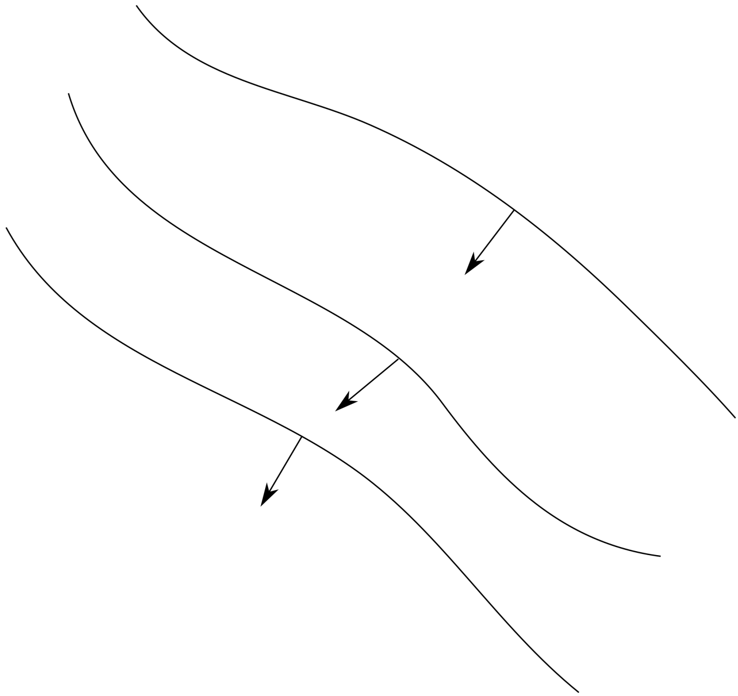
Przypadek???

Twierdzenie 4. *(Uogólnione twierdzenie Schwarza)*
Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, otwarty i $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, wówczas

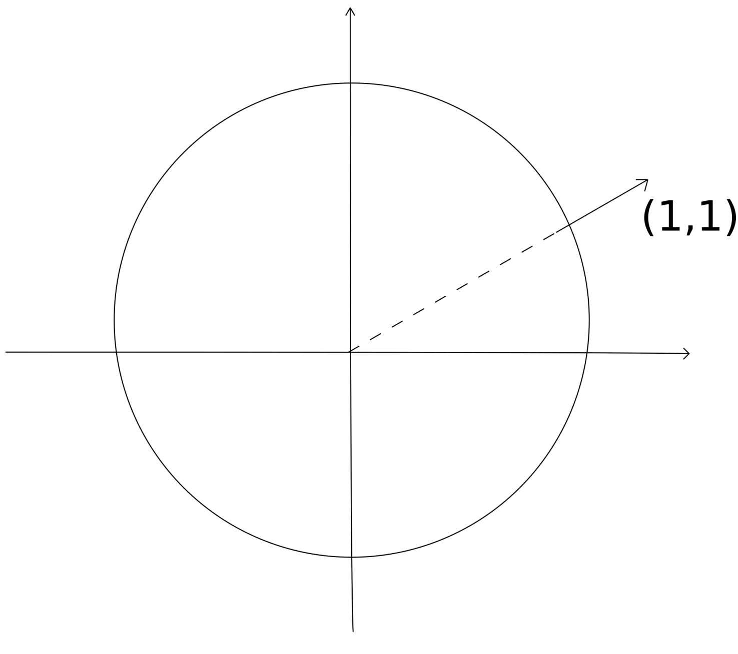
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i,j = 1,\ldots,n$$

Dowód. Dowód dla $n = 2$ Niech

$$w(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y),$$



Rysunek 4: Powierzchnia ekwipotencjalna I



Rysunek 5: Powierzchnia ekwipotencjalna II

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$$

wówczas

$$\begin{aligned} w = \varphi(x+h) - \varphi(x) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi)h = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right] h = \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)\Big) hk, \\ &\text{gdzie } x < \xi < x+h, \quad y < \eta < y+k \end{aligned}$$

Niech

$$\Psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned} w(x,y) = \Psi(y+k) - \Psi(y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\eta_1)k = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, \eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_1)\right] k = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)\Big) kh, \end{aligned}$$

czyli

$$\underset{\xi}{\exists} \quad \xi \in]x, x+h[, \quad \xi_1 \in]x, x+h[, \quad \eta \in]y, y+k[, \quad \eta_1 \in]y, y+k[.$$

Jeżeli $h \to 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \eta_1)\right),$$

to

$$\xi \to x, \xi_1 \to x, \eta \to y, \eta_1 \to y,$$

czyli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

jeżeli każda z tych wielkości jest ciągła. □

4.3 Wzór Taylora (konstrukcja)

Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty
$\varphi(t) = f(x_0 + th), h \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]$.
Dla

$$h = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}, \varphi(t) = f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + th^2, \dots, x_0^n + th^n),$$

mamy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\bigg|_{x=x_0+th} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_0+th} h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\bigg|_{x=x_0+th} h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0+th} h_i$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\Bigg|_{x_0+th} h_j h_i$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} = \sum_{i^1,\ldots,i^k}^{n} \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i}} h_{i_1}\ldots h_{i_k}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) = \varphi'(0)(t-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(t-0)^2 + \cdots + \frac{\varphi^k(0)}{k}(t-0)^k + r(\ldots),$$

czyli:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{\varphi^k(0)}{k!} + r(\ldots)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h_i h_j + \ldots\ldots$$

5 Wykład (12.03.2019)

Z poprzedniego wykładu:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{p!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h),$$

gdzie reszta wygląda tak:

$$R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \dots \\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}} \underset{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla}\\ \text{"}x_0<c<x_0+h\text{"}}}{(x_0+\theta h)} \; h^{i_1}\dots h^{i_{p+1}}.$$

Obserwacja 1. *(bardzo ważna zależność!)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0.$$

Przykład 19. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=x^2y^3, f'(x,y)=\begin{bmatrix}2xy^3, 3x^2y^2\end{bmatrix}.$

Jeżeli $h=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$, *to wtedy*

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}h^ih^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \begin{bmatrix}h_1, h_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

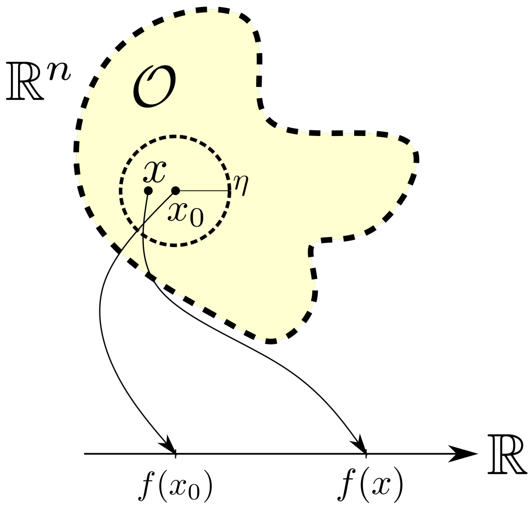
5.1 Minima i maksima

Przypomnienie: Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in K(x_0,\eta)\\ K(x_0,\eta)\subset\mathcal{O}\\ x\neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \underbrace{(f(x) < f(x_0))}_{\text{albo maksimum}}.$$

Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h}{\forall} \quad ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0 + h) > f(x_0).$$



Rysunek 6: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 2. *jeżeli $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \ldots, n$$

działa tylko w prawo, bo możliwe są punkty przegięcia (siodła)

Uwaga: jeżeli $f : U \to \mathbb{R}$ i U - domknięta, to należy zbadać zachowanie funkcji osobno na $int(U)$ oraz na $U - \{int(U)\}$

Dowód. Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} g_h(t)\bigg|_{t=0} = 0,$$

czyli dla $x_0 = \big(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\big), \quad h = \big(h^1, h^2, \dots, h^n\big)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g_h(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \dots, x_0^n + th^n)\bigg|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n)\bigg|_{t=0} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\underset{h}{\forall} : ||h|| < \eta,
\end{aligned}$$

to znaczy:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\square$

Uwaga: jest to warunek konieczny, a nie dostateczny!

Twierdzenie 5. *Niech*

$$
\begin{aligned}
&f : \mathcal{O} \to \mathbb{R},\\
&\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n,\\
&x_0 \in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \text{ - } \textit{otwarty},\\
&f \in C^{2p}(\mathcal{O}),\\
&f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

oraz spełniony jest warunek

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h \in K(x_0,\eta)}{\forall} : \quad \sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \ldots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$

to wtedy f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód. (wersja uproszczona dla minimum i dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$).
Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{(2p)!} \sum_{i_1=1 \ldots i_{2p}=1}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \ldots x^{i_{(2p)}}} h^{i_1} \ldots h^{i_{(2p)}}}_{(*)} + r_{2p+1}(x_0 + h) \tag{13}$$

Wiemy też , że

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underbrace{(13)(*)) \geqslant c||h||^{2p}}_{\substack{\text{Chodzi o to, żeby reszta}\\ \text{nie mogła tego przekroczyć}}} .$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\eta}{\exists} \quad \underset{||h||<\eta}{\forall} \left| r_{2p+1}(x, h) \right| \leqslant \underset{\substack{\text{albo 7,}\\ \text{albo 2019}}}{\frac{c}{2}} ||h||^{2p}.$$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{i_1=1 \ldots i_{2p+1}=1}^{n} \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0 + \theta h)}{\underset{0<\theta<1}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{(2p+1)}}}} h^{i_1} \ldots h^{i_{(2p+1)}} = \Big| \text{tu potrzebne założenie, że } f \in C^{2p+}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}} \to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall} \quad \underset{\eta}{\exists} \quad \underset{||h||<\eta}{\forall} \frac{r_{2p+1}(x_0 + h)}{||h||^{2p}} < M,$$

czyli

$$\left| \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{||h||^{2p}} \right| < M.$$

$$\underset{M}{\forall}\ \underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\quad \left|r_{2p+1}(x_0,h)\right| < M\left|\left|h\right|\right|^{2p}$$

czyli jak przyjmiemy $M = \frac{c}{2}$ to dostajemy

$$\underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\quad f(x_0+h) - f(x_0) \geqslant \frac{c}{2}||h||^{2p}$$

$\square$

Uwaga: dlaczego warunek $(-|-) > c||h||^{2p}$, a nie po prostu $(-|-) > 0$?

Przykład 20.

$$f(x,y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Badamy: $f(0+h) - f(0) = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$ *Czyli* $f(0+h) - f(0) \star 2h_1^2$ *- minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.*
$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *- minimum,* $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ *- równo, coś takiego - punkt siodłowy.*
Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek

$$\underset{c}{\exists} \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c\left\|h\right\|^2,$$

bo dla

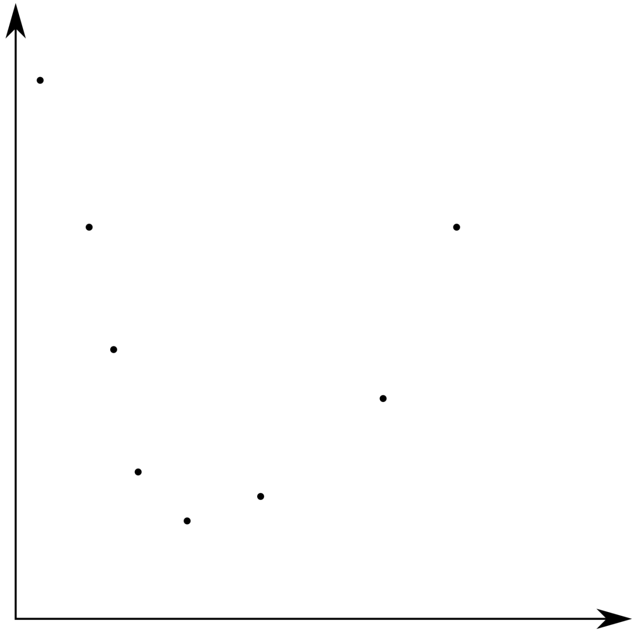
$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geqslant c\left\|\begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}\right\|$$

5.2 Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{2} & & \\ & \frac{I}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$

6 Wykład (15.03.2019)



Rysunek 7: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 9. *Niech* $L : V \to W, L$ *- liniowe,* $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ *- unormowane. Mówimy, że* L *jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists} \quad \underset{x \in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v.$$

Przykład 21. *dla* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\underset{A}{\exists} \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leqslant A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

ale

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

Twierdzenie 6. *(L - ograniczone)* $\iff$ *(L - ciągłe)*

Dowód. $\Longleftarrow$
Wiemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}, \underset{\delta}{\exists}, \underset{x,x' \in V}{\forall}, \quad ||x - x'||_v < \delta \implies ||L(x) - L(x')||(*) < \varepsilon,$$

chcemy pokazać, że:

$$\underset{A>0}{\exists} . \underset{x,x'\in V}{\forall} \quad ||L(x-x')|| \leqslant A||x-x'||,$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.
Ale

$$||L(x-x')|| = \underbrace{\left|\left|L\left(\frac{x-x'}{||x-x'||}\right)\frac{\delta}{2}\right|\right|\frac{||x-x'||2}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leqslant \varepsilon\frac{||x-x'||2}{\delta}$$

Co wiemy o $\left|\left|\frac{x-x'}{||x-x'||}\frac{\delta}{2}\right|\right|_v < \delta$?

$$\underset{x,x'\in V}{\forall} ||L(x-x')||_w \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}||x-x'||_v$$

Szukane $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ istnieje! $\square$

Dowód. $\Longrightarrow$
Wiemy, że

$$\underset{A}{\exists} \quad \underset{x,x'\in V}{\forall} \quad \|L(x-x')\| \leqslant A\,\|x-x'\| \tag{14}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \to x_0$, to $L(x_n) \to L(x_0)$, ale

$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w = ||L(x_n - x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{ bo } (14))$$

$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{ wszystko dąży do } 0)$$

$\square$

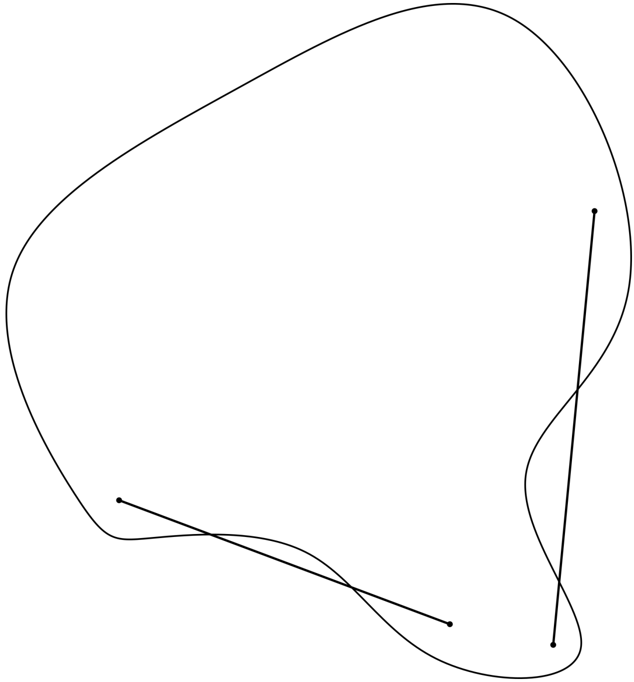
Definicja 10. *Wielkość*

$$\underset{A}{inf}\{\underset{x\in V}{\forall}||L(x)||_w \leqslant A||x||_v\}$$

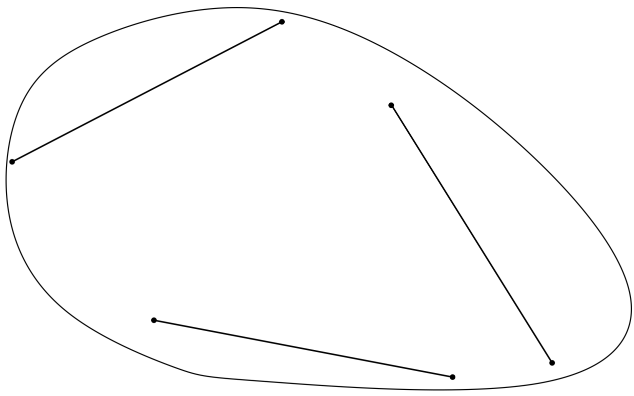
nazywamy normą odwzorowania L i oznaczamy $A \stackrel{ozn}{=} ||L||$.

Definicja 11. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ - jest zbiorem wypukłym, jeżeli*

$$\underset{a,b\in U}{\forall} \quad [a,b] \stackrel{def}{=} \{a(1-t)+bt, t\in[0,1]\} \subset U$$



Rysunek 8: zbiór wklęsły



Rysunek 9: zbiór wypukły

Stwierdzenie 3. *Niech $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, U$ - wypukłe,*

$$\underset{M}{\exists} \quad \underset{x \in U}{\forall} ||f'(x)|| \leqslant M,$$

to

$$\underset{a,b \in U}{\forall} ||f(b) - f(a)||_n \leqslant M||b-a||_m$$

*(jakiekolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)*

Dowód. niech $\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, czyli

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

zatem

$$\|g(1) - g(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{Tw. Lagrange!}}{=}$$

$$= \left\| \underset{0 < c_i < 1}{\begin{bmatrix} g_1'(c_1)(1-0) \\ g_2'(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g_n'(c_n)(1-0) \end{bmatrix}} \right\| \leqslant \left\| \begin{bmatrix} g_1'(c_1) \\ g_2'(c_2) \\ \vdots \\ g_n'(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\|$$

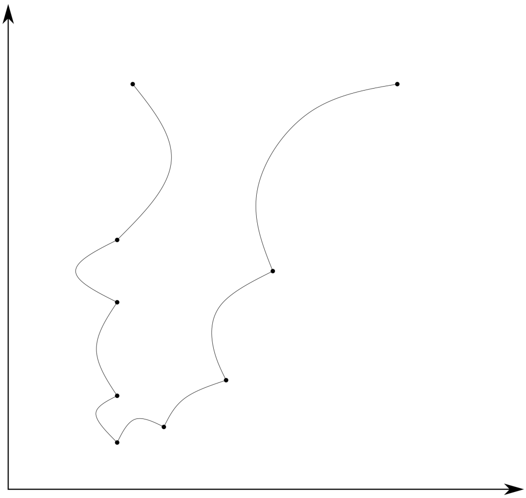
$$\text{Ale } g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \to \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leqslant \|f'(\gamma(t))\| \, \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leqslant} M$$

$$\text{Czyli } \underset{t \in [0,1]}{\forall} \|g'(t)\| \leqslant M \, \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \, \|b-a\|$$

□

Definicja 12. *Niech X - unormowana: $P : X \to X, P$ - ciągła na X.*
Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$
$\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Twierdzenie 7. *Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.*



Dowód. Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez $\tilde{x}$. Mamy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} \quad \underset{N_1}{\exists} \quad \underset{n>N_1}{\forall} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \tag{15}$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall} \quad \underset{N_2}{\exists} \quad \underset{n>N_2}{\forall} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \tag{16}$$

P - ciągłe, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad \underset{x'}{\forall}: \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo (15)}$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{17}$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leqslant d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{18}$$

$$\text{Ale z (15) wynika, że } \underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta}{\exists} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{19}$$

Zatem znając ε z (17) przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z (16) i dzięki temu mamy (18) □

Definicja 13. *Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \to X$ nazywamy zwężającym, jeżeli:*

$$\underset{q\in[0,1[}{\exists} \quad \underset{x,y\in X}{\forall} d(P(x), P(y)) \leqslant q d(x, y) \tag{20}$$

Twierdzenie 8. *(Zasada Banacha o lustrach)*
Jeżeli $P : X \to X, P$ - zwężające, to

$$1.\ \underset{x_0 \in X}{\forall} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\})\text{ - Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \tag{21}$$

$$2.\ \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \tag{22}$$

$$3.\ \underset{m}{\forall} \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \tag{23}$$

Przykład 22. ***(Uwaga)***
(P - nie musi być ciągłe) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi implicite
- lustra w łazience koło sali 1.01 $\to$ można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód. ad. 2
Załóżmy, że

$$\underset{\tilde{x}_1, \tilde{x}}{\exists} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$$

Wtedy

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leqslant q \leqslant 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{ sprzeczność!}$$

□

Dowód.

Obserwacja 2.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leqslant qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leqslant \\ \leqslant q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant q^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$?

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant \dots \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1} + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant (q^{n+m-1} + \dots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leqslant \\ &\leqslant q^n \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leqslant q < 1}{\leqslant} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Czyli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X. Czyli czy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n,m>N}{\forall} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Załóżmy, że $m > n$ i $m = n + k$. Wtedy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n>N}{\forall} \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q}d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n \to \tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}d(x_1, x_0) \to d(\tilde{x}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}d(x_1, x_0)$. $\square$

7 Wykład (19.03.2019)

Twierdzenie 9. *(o lokalnej odwracalności)*
Niech

$$f : E \to E, E \text{ - otwarty, } E \subset \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(E),$$
$$\underset{a,b\in E}{\exists} : f(a) = b \text{ i } f'(a) \text{ - odwracalna } (det(f'(a)) \neq 0),$$

to wtedy:

1. $\underset{U,V\subset E}{\exists} \quad \underset{a\in U, b\in V}{\exists} \quad U, V$ *- otwarte, f - bijekcja między U, V*
2. $\underset{g:V\to U}{\exists} \quad \underset{x\in V}{\forall} \quad f(g(x)) = x,$
3. $g \in \mathcal{C}^1(V).$

Uwaga: dowód składa się z trzech części:

- Pokażemy, że $\underset{U,V}{\exists} : f$ - bijekcja na U, V
- Pokażemy, że U, V - otwarte
- Pokażemy, że $\underset{g:V\to U}{\exists}, g$ - różniczkowalna na V i ciągła.

Przykład 23. $f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$

$det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0,$ *ale* $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ *(czyli funkcja jest okresowa)*

Dowód. **Część I**
Szukamy $U, V : f$ - bijekcja miedzy U i V.
Skoro $f'(a)$ - odwracalne, to znaczy, że $\underset{(f'(a))^{-1}}{\exists}$, zatem

$$\underset{\lambda}{\exists} : 2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1.$$

Wiemy, że $f'(x)$ - ciągła w $x = a$, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}.\underset{\delta}{\exists}.\underset{x}{\forall}, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Połóżmy $\varepsilon = \lambda$.
Oznacza to, że

$$\underset{\delta_\lambda}{\exists}.\underset{x}{\forall} x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że f - bijekcja między U i V.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E$$

Pytanie 5. *Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)*
dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli

$$\underset{y\in V}{\forall} \quad \underset{x\in U}{\exists} : f(x) = y$$

Uwaga: o f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U.
Policzmy $\varphi_y'(x)$

$$\varphi_y'(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x)),$$

więc

$$\begin{aligned} \|\varphi_y'(x)\| &= \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leqslant \\ &\leqslant \|(f'(a)^{-1})\|\|f'(a) - f'(x)\| \leqslant \\ &\leqslant \underset{x\in U}{\forall} \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pamiętamy, że jeżeli $\underset{M}{\exists}\|\varphi_y'(x)\| \leqslant M$, to $\underset{x,y}{\forall}\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$
Zatem skoro $\|\varphi_y'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$, to

$$\underset{x_1,x_2\in U}{\forall}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\underset{y\in V}{\forall}$. Zatem f - bijekcja między U i V. $\square$

Część II
Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) $U = K(a, \delta_1)$, więc

$$\underset{x_0\in U}{\exists} \quad \underset{r}{\exists} K(x_0, r) \subset U$$

lub równoważnie

$$\|x - x_0\| \leqslant r \wedge x \in U.$$

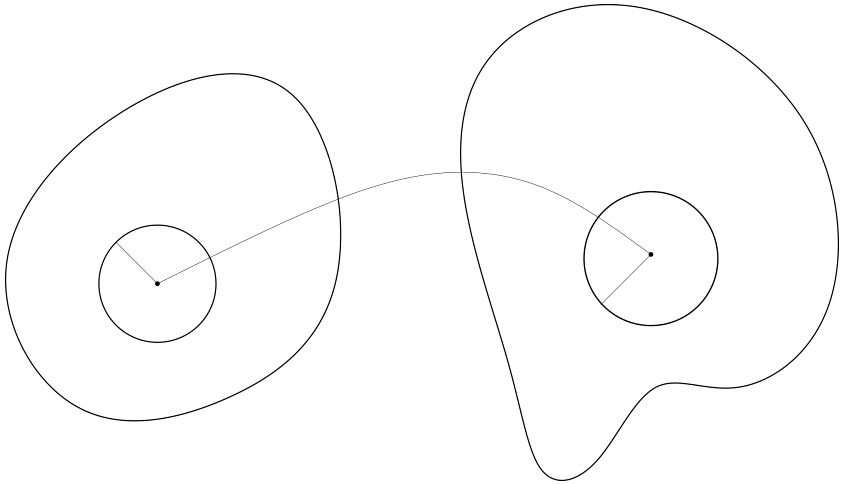
Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0) \quad \exists \quad K(y_0, \lambda r) \subset V$, czyli że V - otwarty.
Weźmy $y \in K(y_0, \lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$
Jeżeli pokażemy, że dla $\|y - y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0, r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y - y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężające na $K(x_0, r)$, zbadamy tę wielkośc dla $x \in K(x_0, r)$. $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leqslant r$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leqslant \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi y(x_0 - x_0)\|.$$

Ale

$$\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leqslant \|(f'(a))^{-1}\|\|y - y_0\| \leqslant \frac{1}{2\lambda}\lambda r = \frac{r}{2},$$



Rysunek 10: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

więc

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| \leqslant r,$$

jeżeli

$$\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leqslant r.$$

Stąd wiemy , że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$ należy do $K(x_0, r)$ i $\|y-y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.

Część III

Szukamy $g : V \to U$

Skoro f - bijekcja między U i V, to znaczy, że $\underset{g:V\to U}{\exists} f(g(x)) = x \underset{x\in V}{\forall}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w $x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\to} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \overset{k\to 0}{\to} 0 \tag{24}$$

to będziemy wiedzieli, że:

1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.

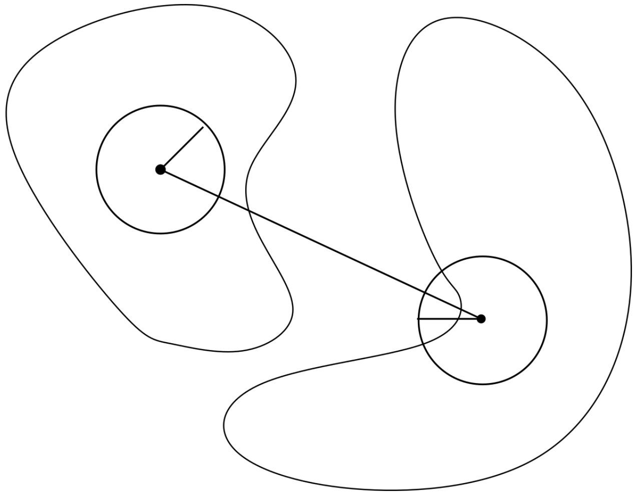
W tym celu pokażemy, że:

1. $(\|k\| \to 0) \implies (\|h\| \to 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) = x + h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) =$$

$$= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)),$$



Rysunek 11: Nie ok.

$$czyli \|\varphi_y(x+h)-\varphi_y(x)\| = \|h-(f'(a))^{-1}(k)\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h-(f'(a))^{-1}k\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geqslant \|h\|, k = f(x+h)-f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|k\|} \leqslant \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda}$
0, o ile $\underset{[f'(x)]^{-1}}{\exists}$

Pytanie 6. *skąd wiadomo, że* $(f'(x))^{-1}$*?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$ oraz U - taka, że

$$\underset{x\in U}{\forall} \|f'(x)-f'(a)\| < \lambda.$$

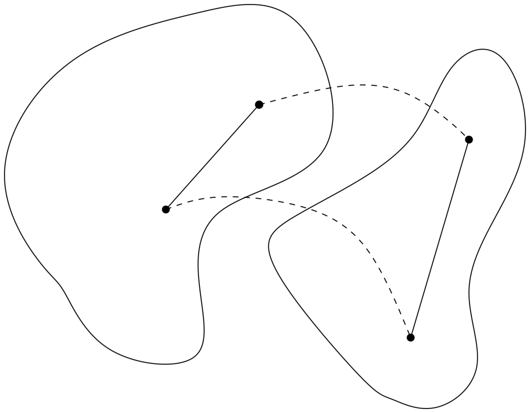
Zatem

$$0 \leqslant \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}\|y\| = \|(f'(x)+f'(a)-f'(x))y\| \leqslant \|f'(a)-f'(x)\|\|y\| + \|f'(x)\|\|y\|.$$

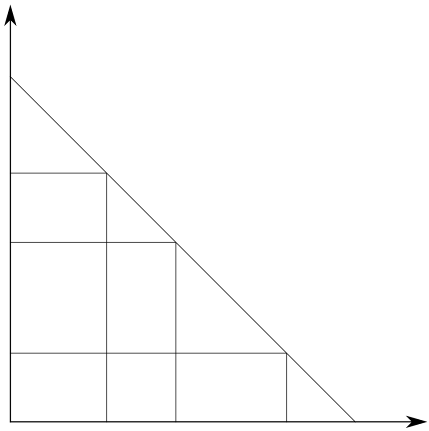
Dalej $2\lambda\|y\| \leqslant \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$ dla $x \in U$
$0 \leqslant \lambda\|y\| \leqslant \|f'(x)y\|$ dla $y = 0$
Czyli

$$\underset{x\in U}{\forall} \|f'(x)y\| > 0.$$

$\square$



Rysunek 12



Rysunek 13: (a)

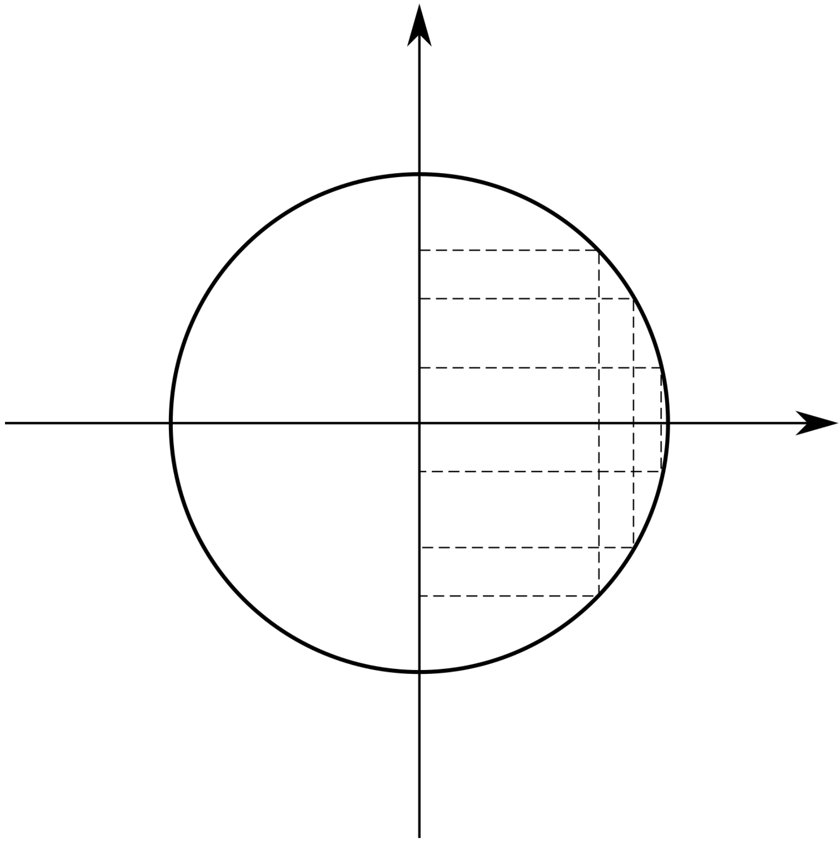
8 Wykład (22.03.2019)

8.1 Zabawki działające dzięki wnioskom z Tw. wyżej - funkcje uwikłane

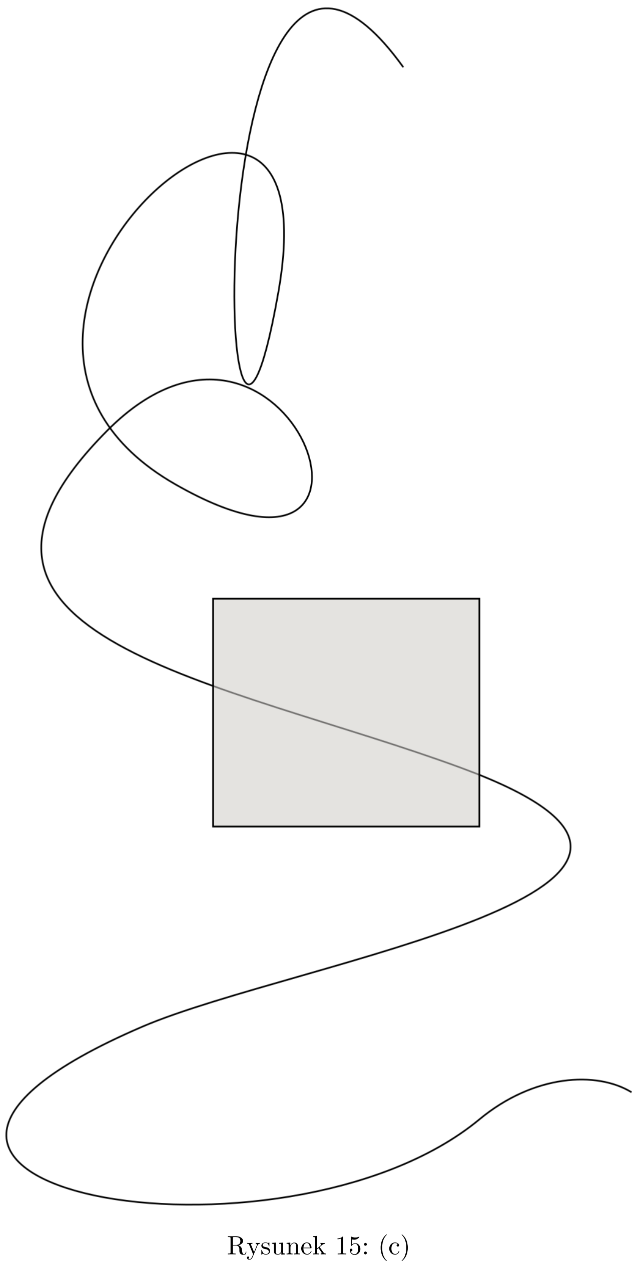
$$x + y = 1 \quad \text{(a)}.$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(b)}.$$

$$H(x, y) = \sin x e^{xy} + \operatorname{tg} y - x = 0.$$



Rysunek 14: (b)



Rysunek 15: (c)

Przykład 24. *Równanie gazowe*

$$H(p,V,T)=0, H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1.$$
$$p(V,T)=0, \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1.$$
$$V(p,T)=0, \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1.$$
$$T(p,V)=0, \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1.$$

istnienie przedziałów, w których funkcja uwikłana zadaje inne funkcje

Przykład 25.

$$H(x,y):U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1.$$

Pytanie 7. *Czy istnieje $y(x):H(x,y(x))=0$, dla $x\in V$?*

$$\frac{dH}{dx}(x,y(x))=\frac{d}{dx}(H(x,y)\circ g(x)).$$
$$H'=\left[\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y}\right].$$
$$g(x):\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2, g(x)=\begin{bmatrix}x\\ y(x)\end{bmatrix}, g'(x)=\begin{bmatrix}1\\ y'(x)\end{bmatrix}.$$
$$H'(x,y)g'(x)=0 \implies \frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}.$$

Więc

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-\cos y+ye^{xy}-1}{xe^y+\frac{1}{\cos^2 y}}.$$

Przykład 26.

$$H(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\begin{bmatrix}2e^{x_1}+x_2x_3-4x_3+3\\ x^2\cos x_1-6x_1+2x_3-x_5, H:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3\end{bmatrix}.$$
$$H(x_1,\ldots,x_5)=0 \text{ może zadać funkcję } g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2.$$
$$x_4(x_1,x_2,x_3), x_5(x_1,x_2,x_3).$$
$$g(x_1,g_2,g_3)=\begin{bmatrix}g_1(x_1,x_2,x_3)\\ g_2(x_1,x_2,x_3\end{bmatrix}.$$

Obserwacja 3. $H(0,1,3,2,7)=0$

$$H:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2, H(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=0.$$
$$H(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=\begin{bmatrix}H_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)\\ H_2(x_1,x_2,y_1,y_2,y_2)\end{bmatrix}.$$

Pytanie 8. *Czy* $H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0$ *zadaje nam*

$$g_1(y_1, y_2, y_3).$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3)?$$

czyli $g(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$H_1(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H_2(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Szukamy g'.

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_3}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial y_3} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3} = 0.$$

napięcie rośnie (6 równań oho)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x)2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{H'_x}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}}_{g'} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial p_3} \end{bmatrix}}_{H'_y}.$$

$$H'_x g' = -H'_y \implies g' = -(H'_x)^{-1} H'_y.$$

Twierdzenie 10. *(o funkcji uwikłanej)*
Niech

$$
\begin{aligned}
&H : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,\\
&H \in \mathcal{C}^1 \ na\ E.(x_0, y_0) \in E,\\
&H(x_0, y_0) = 0,\\
&(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m),\\
&H\ \text{- odwracalna..}
\end{aligned}
$$

Wówczas istnieje $U \subset E$ *takie, że* $(x_0, y_0) \in U$, $\underset{W \subset \mathbb{R}^n}{\exists}$, *że*

$$x_0 \in W, \underset{x \in W}{\forall} \underset{y}{\exists!} H(x, y) = 0, (x, y) \in U.$$

Jeżeli $y = \varphi(x)$, *to*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ i\ \varphi \in \mathcal{C}^1(W),$$

$$\varphi'(x) = -(H'_y)^{-1} H'_x.$$

Dowód. Oznaczenia:

$$H(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = \begin{bmatrix} H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^2(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}.$$

$$H'_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial y^n} \end{bmatrix}, H'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy funkcję $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$

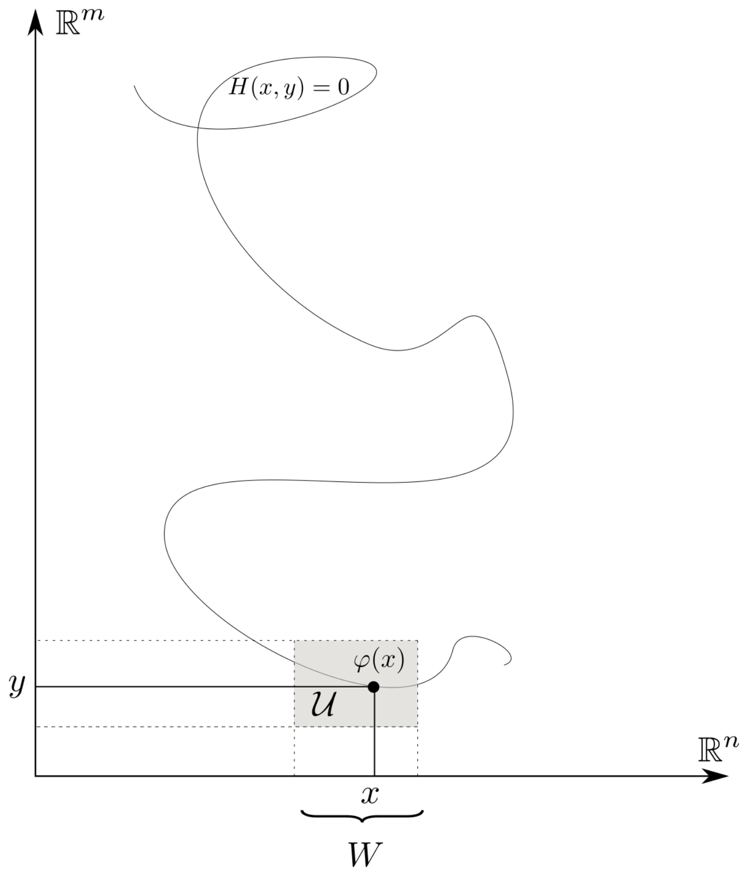
$$F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ H^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) \end{bmatrix}.$$

Jakie własności ma F?

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ale

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & H'_x & & H'_y \end{bmatrix}, \det F' = \det H'_y.$$



Rysunek 16

Jeżeli $H'_y(x_0, y_0)$ - odwracalna, to $F'(x_0, y_0)$ - też. Oznacza to (na podstawie tw. o lokalnej odwracalności), że

$$\underset{U \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, y_0) \in U, \underset{V \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, 0) \in V.,$$

że F jest bijekcją między U i V oraz $\exists F^{-1} : V \to U, F^{-1}$ - różniczkowalna taka, że

$$F^{-1}(x, \alpha) = (a(x, \alpha), b(x, \alpha)), x, \alpha \in V.,$$

gdzie $a(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, \quad b(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$

Dla $(x', y') \in \mathcal{V}$,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że $a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ istnieją i są różniczkowalne, bo F^{-1} istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach a i b?
Wiemy że

$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y') = F(\underbrace{a(x', y')}_{n}, \underbrace{b(x', y')}_{m}).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli $a(x', y')$ jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$

Czyli jeżeli $y = b(x, 0)$, to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

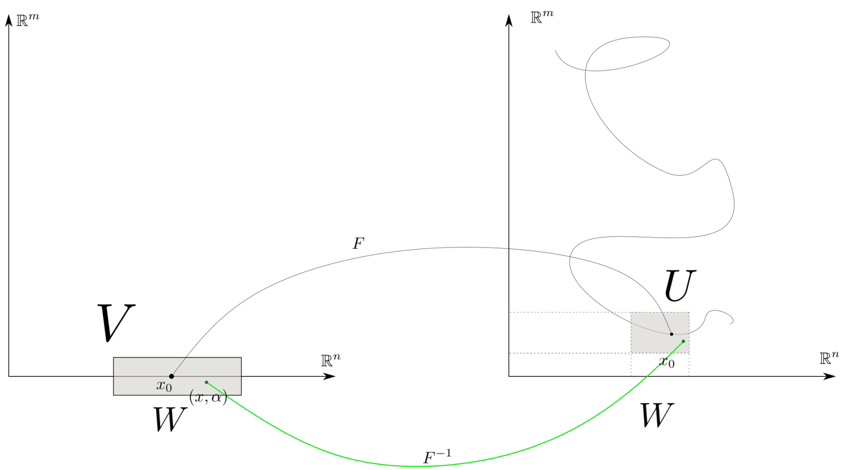
Czyli dla $y = (x, 0)$ otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy $b(x, 0) \overset{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$, to znaczy, że znaleźliśmy funkcję $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0.$$

$\square$



Rysunek 17

9 Wykład (26.03.2019)

9.1 Ekstrema związane

przykład:

$$f(x,y) = x + y, \quad G(x,y) = (x-1)^1 + (y-1)^2 - 1, \quad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, G(x,y) = 0\right\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum f na M
Rozważmy linię o stałej wartości $x + y$

Definicja 14. *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.*
Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

$$\underset{r}{\exists} \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$

Niech $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$G(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$M = \{(x,y), G(x,y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \underline{\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby $G(x,y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

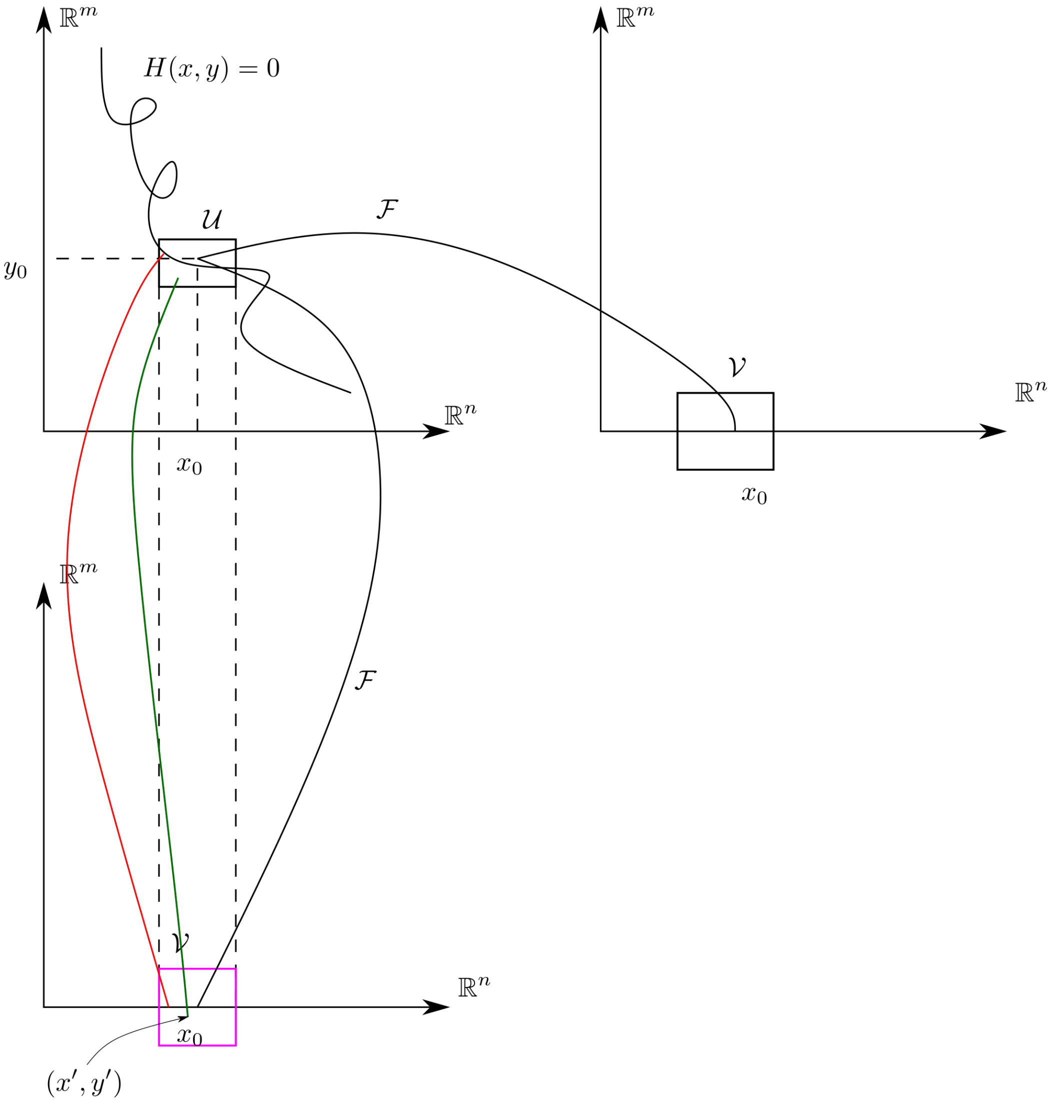
$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

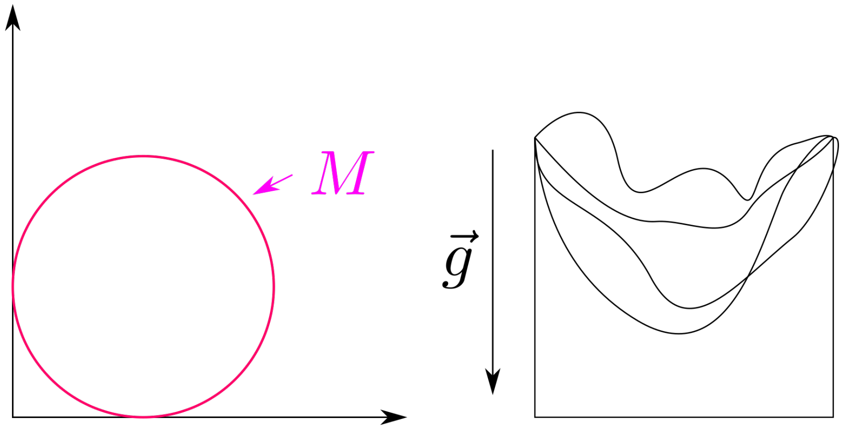
$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

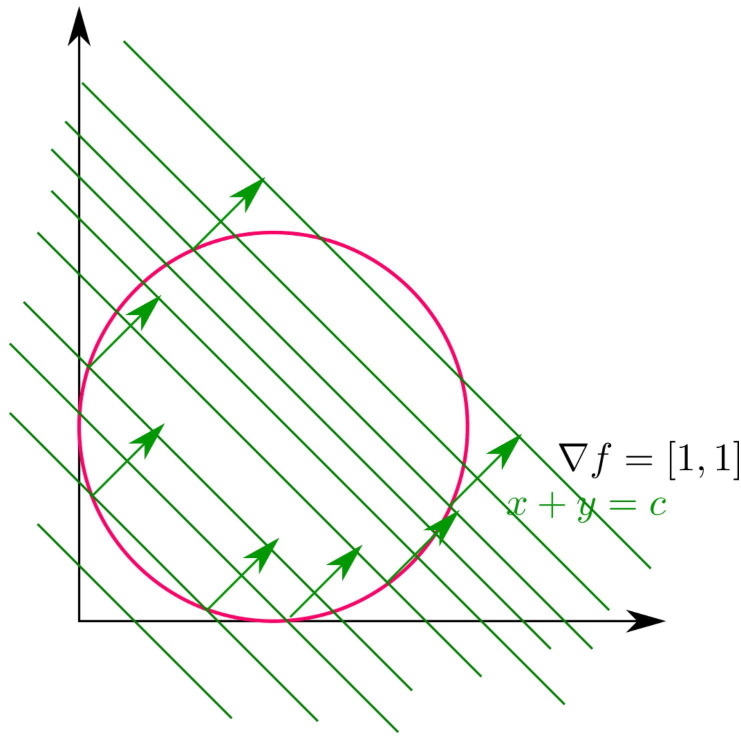
$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{25}$$



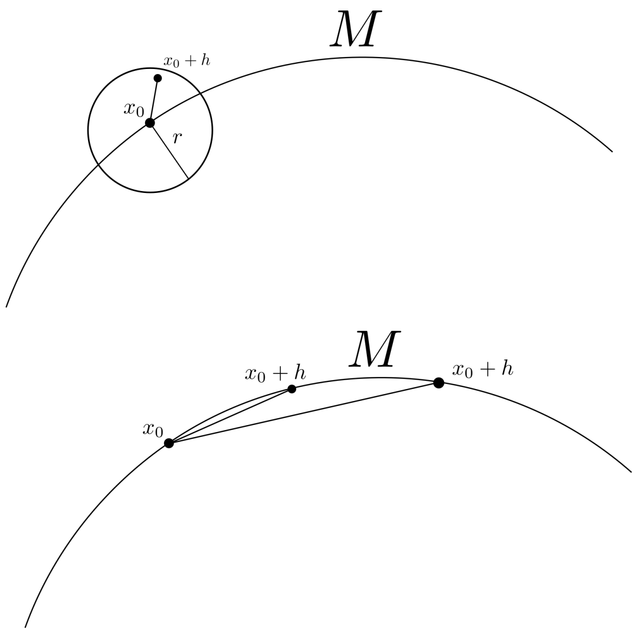
Rysunek 18: do poprzedniego wykładu



Rysunek 19: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 20: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 21

Co oznacza warunek 25?
Wiemy, że

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x) = 0$, albo $P'(y) = 0$ oznacza, że

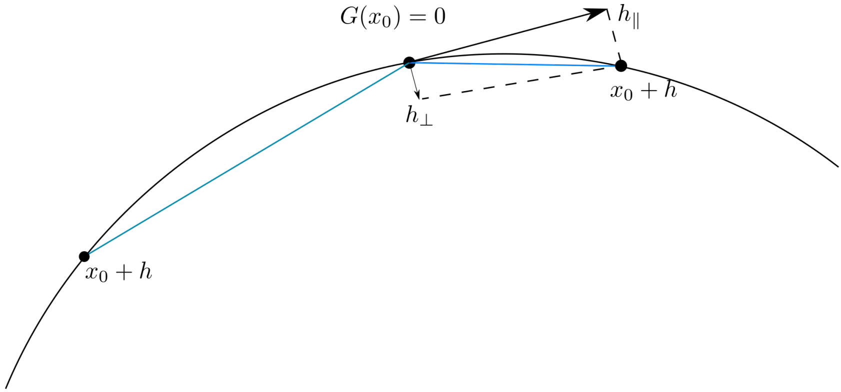
$$\mathop{\exists}_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{26}$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

Obserwacja 4. *Do warunku (26) można dojść na skróty przez funkcję $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$ i badanie $H(x, y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \left(+ \textit{ warunek } G(x, y) = 0\right).$$



Rysunek 22

Pytanie 9. *Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?*
Odpowiedź: lepiej inaczej... (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \tilde{=} f''(x_0)(h, h).$$

10 Wykład (29.03.2019)

Problem:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad M = \{x : G(x) = 0\}.$$

Badamy różnicę $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora) Próbujemy ożenić te języki. Zbadajmy $G'(x)$.

- $G'(x)$ - jest macierzą $[G']_{m,n}$

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} G^1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ G^m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Pytanie 10. *Jaki jest "wymiar" zbioru M?*

Albo, jeżeli $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, to wiąż $G(x) = 0$ zadaje funkcję

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m.$$

Taką, że $G(x^1, \ldots, x^{n-m}, \varphi^1(x^1, \ldots, x^{n-m}), \ldots, \varphi^m(x^1, \ldots, x^{n-m}))$, (jeżeli $\det G_y(x) \neq 0$)

Jeżeli $\det G'_y(x) \neq 0$, to znaczy, że w macierzy

$$G' = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \ldots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m} \end{bmatrix}.$$

Gdzie $x \overset{\text{ozn}}{=} (x^1, \ldots, x^{n-m}, y^1, \ldots, y^m)$. Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne $(y^1, \ldots, y^m$ można uzyskać z innych $(x^1, \ldots, x^{n-m})$ poprzez funkcję $\varphi : x = \varphi(y)$

Gdy założymy, że $\det G'_y \neq 0$, to znaczy, że m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim imG'(x) = m = \dim \mathbb{R}^m \text{ i } G'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim \ker G'(x) = n - m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy $X_1 = \ker G'(x)$ i $X_2 = imG'(x)$ $(\dim X_1 = n - m, \dim X_2 = m)$ Oznacza to, że każdy wektor $h \in \mathbb{R}^n$ da się przedstawić jako $h = h_1 + h_2, h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$ czyli $\mathbb{R}^n = X_1 \bigoplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\}, \quad x^1, \ldots, x^{n-m}, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \ldots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \ldots, x^{n-m}) \end{bmatrix}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach $G'(x)$? - jest ich m i są liniowo niezależne

Jeżeli $h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$, to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie ($r\frac{0,h_1}{\|h_1\|} \underset{\|h_1\|\to 0}{\to} 0$) (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że φ - różniczkowalna, co więcej $\varphi' = -(G'_y)^{-1}G'_x$ a $\varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)$ czyli $\varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0, h_1)}{\|h_1\|} \underset{h_1 \to 0}{\to} 0.$$

czyli h_2 maleje szybciej niż $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

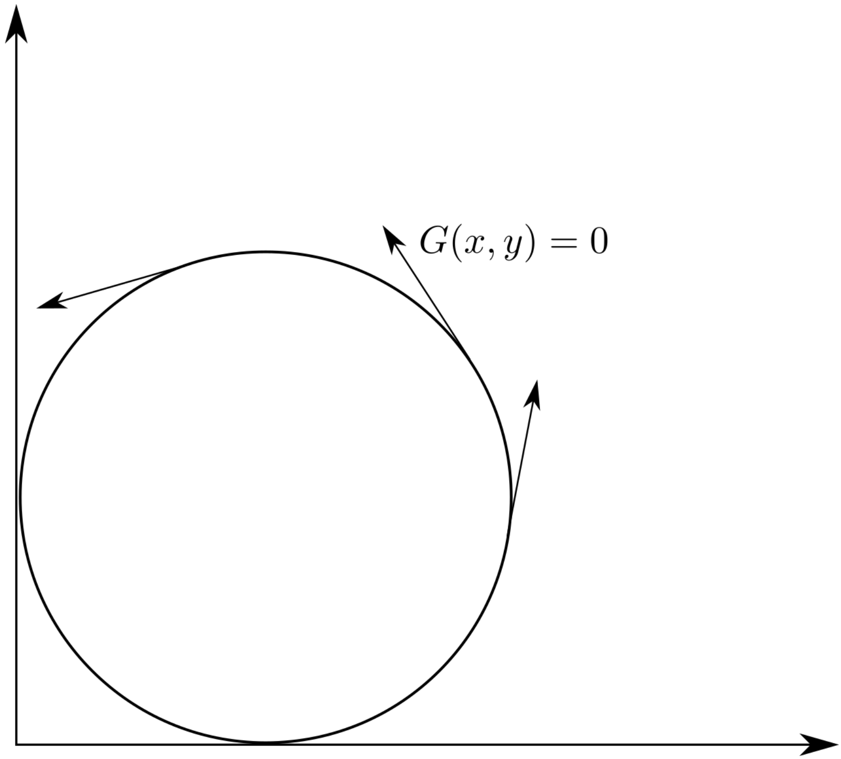
Skoro $h \in \mathbb{R}^n$, to możemy przedstawić h jako

$$h = h_\parallel + h_\perp, \quad h_\parallel \in X_1, h_\perp \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_\parallel = 0?.$$

Przykład 27. *niech* $G(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$, $G' = (2(x - 1), 2(y - 1))$



Rysunek 23: biedronka i szprycha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h_\perp + h_\parallel) - f(x_0).$$

W małym otoczeniu h będzie bardziej decydował $h_\parallel$, bo zawsze mogę zmniejszyć h i w efekcie $h_\perp$ się zmniejszy

Wiemy, że

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)(h, h) + r_1(x_0, h).$$

bo f - różniczkowalna

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x_0)h + \frac{1}{2!} G''(x_0)(h, h) + r_2(x_0, h).$$

bo G - różniczkowalna

niech

$$\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \Lambda(G(x_0 + h) - G(x_0)) = (f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h.$$

Dalej dostajemy

$$(f'(x_0) - \Lambda G'(x_0))h + \frac{1}{2!}(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h,h) + r_1(x_0,h) + r_2(x_0,h).$$

Ale dla minimum lub maksimum chcemy, aby

$$f'(x_0) = \Lambda G'(x_0).$$

więc dla minimum / maksimum $f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h)+r_1(x_0,h)+r_2(x_0,h)$

Zatem jako, że $\frac{r_1(0,h)}{\|h\|^2} \underset{\|h\|^2}{\to} 0$, $\frac{r_2(0,h)}{\|h\|^2} \underset{\|h\|^2}{\to} 0$, to o znaku $f(x_0+h)-f(x_0)$ decyduje znak

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h,h).$$

Wiemy, że $h \in \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^n = X_1 \bigoplus X_2$, czyli $h = h_\perp + h_\|$

$$f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h,h) = \underbrace{f''(x_0)\Lambda G''(x_0)}_{\Box}(h_\| + h_\perp, h_\perp + h_\|).$$

$$= (\Box)(h_\perp, h_\perp) + (\Box)(h_\perp, h_\|) + (\Box)(h_\|, h_\perp) + (\Box)(h_\|, h_\|).$$

Pytanie 11. *Króre z powyższych wyrażeń jest najmniejsze (które z powyższych wyrażeń są o rząd mniejsze od pozostałych dla* $\|h\| \to 0$

Wiemy, że

$$\|h_\perp\| \ \|h_\|\|.$$

Oznacza to, że dla małych $\|h_\|\|$ o znaku decyduje

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\|, h_\|).$$

Twierdzenie 11. *Niech*

$$\begin{aligned}
&f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad f \in \mathcal{C}^2(U),\\
&G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad G \in \mathcal{C}^2(U_2),\\
&\underset{x_0}{\exists} G(x_0) = 0, \quad G'(x_0) \text{ - ma rząd maksymalny } (m).
\end{aligned}$$

oraz

$$\underset{\Lambda}{\exists} \Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\|, h_\|) > 0, h_\| \overset{def}{=} \left\{G'(x_0)h_\| = 0\right\}.$$

to f posiada w x_0 minimum lokalne (< 0, to maksimum lokalne) na zbiorze

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$$

11 Wykład (02.04.2019)

11.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = f(t,x)\\
&x(t_0) = x_0\\
&x(t) : [a,b] \to \mathbb{R}\\
&f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Przykład 28.

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -kx(t)\\
&x(t) = ce^{-kt}.
\end{aligned}$$

Przykład 29.

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \omega^2 x = 0\\
&\dot{x} = p\\
&\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x\\
&\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x\\ p\end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ p\end{bmatrix}}_{f(x,t)}.
\end{aligned}$$

Definicja 15. *Niech $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$*
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ taka, że $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t,x) \to f(t,x')$
Mówimy, że f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in I}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}.\|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Uwaga 1. *Zmienne t, x nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach*

Pytanie 12. *Czy jeżeli*

$$f : \mathcal{O} \to \mathcal{O} \text{ takie, że } \underset{L>0}{\exists}.$$

że

$$\underset{x,x'}{\forall}\|f(x) - f(x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

to czy f jest ciągła?

Twierdzenie 12. *(problem Cauchy)*
Niech $[a,b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- domknięty i* $f : [a,b] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *takie, że* f *- ciągła na* $[a,b] \times \mathcal{O}$ *oraz* f *spełnia warunek Lipschitza na* $\mathcal{O}$*, to znaczy:*

$$\underset{L>0}{\exists} \quad \underset{t\in[a,b]}{\forall} \quad \underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall} \|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

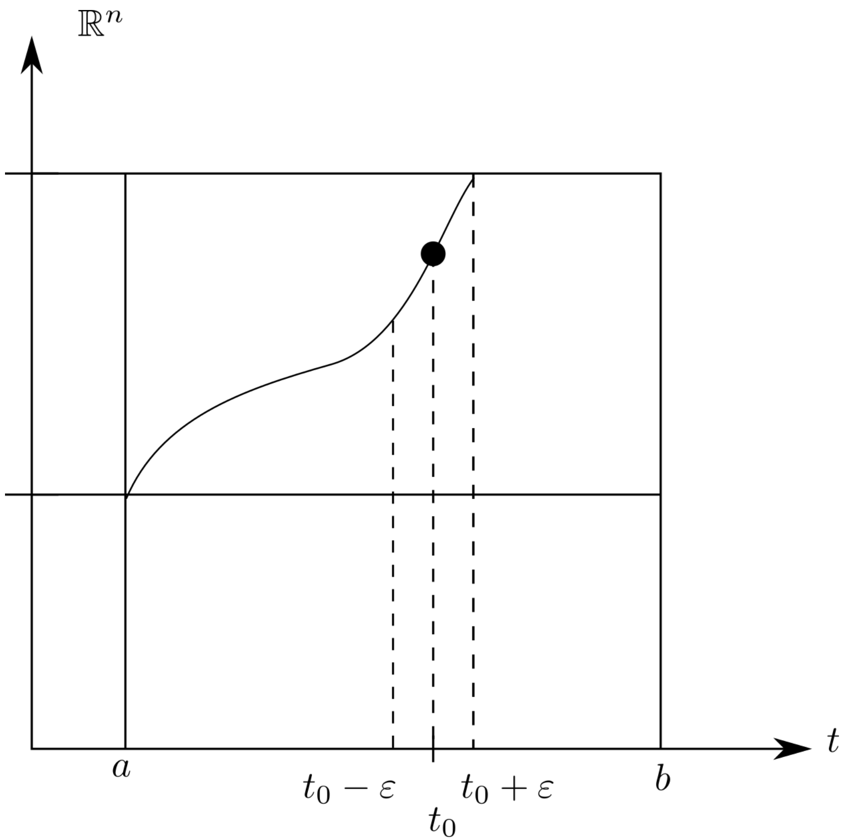
Wówczas

$$\underset{t_0\in[a,b]}{\forall} \quad \underset{x_0\in\mathcal{O}}{\forall} \quad \underset{\varepsilon>0}{\exists}, \text{ że dla } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{27}$$

Uwaga 2. *Ciągłość* f *na* $[a,b] \times \mathcal{O}$ *jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na* $\mathcal{O}$



Rysunek 24

Dowód. Skoro f - ciągła na $[a, b] \times \mathcal{O}$, to znaczy, że f jest ograniczona, czyli

$$\underset{M>0}{\exists} \quad \underset{r_1>0}{\exists} \quad \underset{r_2>0}{\exists} \quad \|f(t, x)\| \leqslant M.$$

$t \in K(t_0, r_1), x \in K(x_0, r_2)$.
Zauważmy, że problem (27) możemy zapisać jako

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{28}$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia (28), to rozwiążemy problem 27.
Rozważmy odwzorowanie

$$\underset{g \in a}{P(g)(t)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

$$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \to \mathbb{R}^n\} \text{ funkcja ciągła na kuli o wartościach w } \mathbb{R}^n.$$

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\underset{x(t) \in A}{\exists}$ takie, że $P(x(t)) = x(t)$
Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem (28)
Niech $E = \left\{ g \in A, \|g(t) - \overset{g_0(t)}{x_0}\| \underset{\text{ważne!}}{\leqslant} r_2 \right\}$, czyli

$$g \in E \iff \sup_{t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon} \|g(t) - x_0\| \leqslant r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.
(domknietość ze względu na zasdę Banacha ($x_0 \overset{\text{ozn}}{=} g_0(t)$))

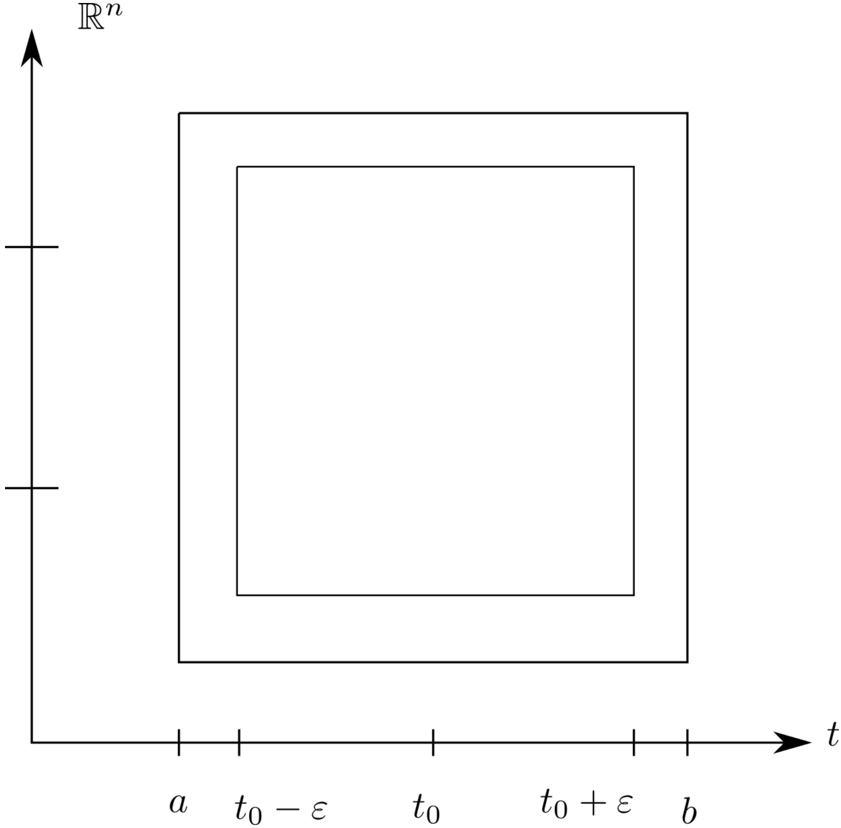
Szukamy takiego ε, żeby:

1. $P(g) \in E \quad g \in E$

2. P - zwężająca na E

bo jeżeli (2) jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.
Jeżeli (1) jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E
Warunek (1): $P(g) \in E$, czyli

$$\sup_{t_0 - \varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0 + \varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leqslant r_2.$$



Rysunek 25

czyli

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,g(s))ds-x_0\|\leqslant\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s,g(s))\|ds\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}|t-t_0|M=\varepsilon M.$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M\leqslant r_2$, to znaczy, że $\varepsilon\leqslant\frac{r_2}{M}$ i jednocześnie $\varepsilon\leqslant r_1$.
Czyli aby warunek (1) był spełniony to musi być:

$$\varepsilon<min\left\{\frac{r_2}{M},r_1\right\}.$$

Warunek (2). Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\underset{g_1,g_2\in E}{\forall}\|P(g_1)-P(g_2)\|\leqslant q\|q_1-q_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1)-P(g_2)\|=\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon}\|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,g_1(s))ds-(x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,g_2(s))ds\|=.$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \| \int_{t_0}^{t} f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))ds \| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon\leqslant t_0\leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^{t} L\|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \underset{\substack{\in E \\ \|g_1-g_2\|<2r_2}}{\|g_1 - g_2\|} .$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E, to $\varepsilon L < 1$, czyli $\varepsilon < \frac{1}{L}$ i $g \in E$
Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu 27

$$\varepsilon < min \left\{ \frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L} \right\}.$$

$\square$

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:
niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągłe ze względu na $a \in A$
Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\underset{a\in A}{\forall} . \underset{x,x'}{\forall} . \|P_a(x) - P_a(x')\| \leqslant q\|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A.

Uwaga 3. *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,g(s))ds.$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągłe ze względu na x_0 i t_0.

12 Wykład (05.04.2019)

Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator $P_a(x)$ i on miał być zwężający.

$$P_a(x) : X \to X \text{ - zwężający }.$$

$$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \to \tilde{x}(a)\}, \text{ gdzie } P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a).$$

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że P_a - ciągła ze względu na a:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} . \underset{\delta_1>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon \tag{29}$$

Wiemy, że $\underset{c' \in X}{\forall}$ ciąg $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \ldots\} \to \tilde{x}(a')$ Ale, jeżeli przyjmiemy za $c = \tilde{x}(a')$, to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \to \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli P_a - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leqslant \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wybierzmy $x_0 = \tilde{x}(a')$. Wówczas

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) &\leqslant \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) = \\ &= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))). \end{aligned}$$

Pytanie 13. *Jak ten obiekt ma się do $d(P_a, P_{a'})$?*

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} \quad d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$, to znaczy, że $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\text{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leqslant \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy ε_1, to biorąc ε_1 taki, że $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$ i znajdujemy δ_1 z zależności 29 i wiemy, że jeżeli

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

$\square$

Przykład 30. *(odwzorowanie zwężające)*

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że $x(t)$ jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0))\ldots \to x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$
$$f(t,x) = t + x.t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy f jest lipszycowalna?

$$\underset{t\in[a,b]}{\forall} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1\|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzymy kilka wyrazów ciągu

$$\underset{x^0(t)}{g_0}, \underset{x^1(t)}{P(g_0)}, \underset{x^2(t)}{P(P(g_0))}, \ldots.$$

$$\begin{aligned}
&x^0(t) = x_0(t) = 0\\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s))ds = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}\\
&x^2(t) = P(x^1(t)) = P(\frac{t^2}{2}) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s))ds = \int_0^t (s + \frac{s^2}{2})ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3}\\
&x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2\times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3} + \frac{t^4}{2\times 3\times 4}\\
&\vdots\\
&\vdots \to \infty\\
&e^t - t - 1.
\end{aligned}$$

Przykład 31. $\frac{dx}{dt} = 2tx, \quad x(0) = 1,$ *czyli* $f(t,x) = 2tx, \quad t_0 = 0$
dla $\underset{t\in[a,b]}{\forall}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |t|2\|x - x'\|.$$

Czyli f - lipszycowalna z $L = \sup_{t\in[a,b]} |t| \times 2$

$$\begin{aligned}
&x^0(t) = 1\\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2\\
&x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\\
&x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{t^4}{2}) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3}\\
&\vdots \to \infty\\
&e^{t^2}.
\end{aligned}$$

Przykład 32.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(t)\\-x_1(t)\end{bmatrix}, x_1(0)=0, x_2(0)=1.$$

$$f(t,x)=f(t,\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

$$x^0(t)=\begin{bmatrix}x_1^0(t)\\x_2^0(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

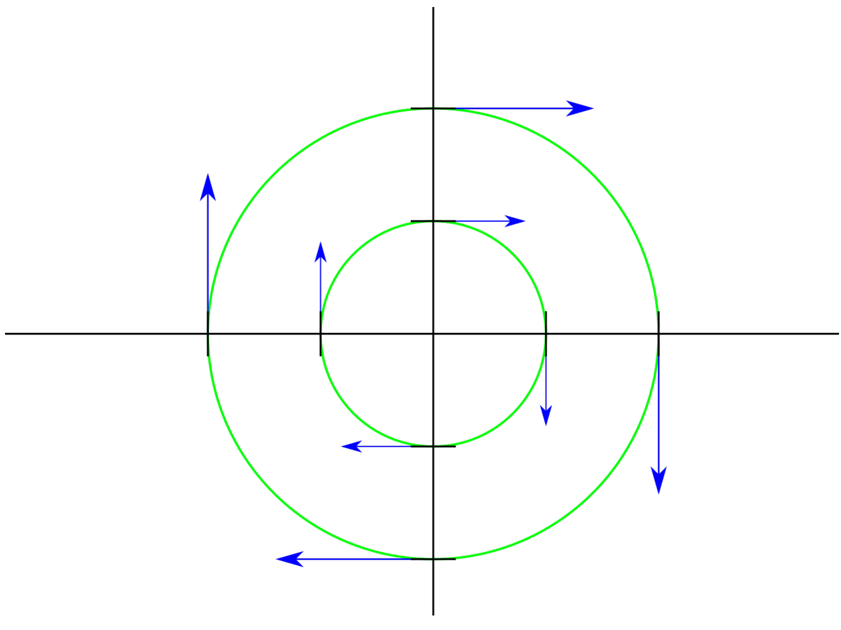
$$x^1(t)=P(x^0(t))=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1\\-0\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$$

$$x^2(t)=P\left(\begin{bmatrix}x_1^1\\x_1^2\end{bmatrix}\right)=P\left(\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^1\begin{bmatrix}1\\-s\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$x^3=P\left(\begin{bmatrix}x_1^2\\x_2^2\end{bmatrix}\right)=P\left(\begin{bmatrix}t\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1-\frac{s^2}{2}\\-s\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}t-\frac{t^3}{2\times3}\\1-\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\vdots\to\infty$$

$$\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}.$$



Rysunek 26

Twierdzenie 13. *Jeżeli odwzorowania*

$$t \in [a,b] \to A(t)$$
$$t \in [a,b] \to b(t).$$

Gdzie $A(t) \in L(x,x), b(t) : \mathbb{R}^1 \to X$ *są ciągłe, to równanie*

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych $t_0 \in [a,b], x_0 \in X$ *jednoznacznie określone rozwiązanie na* $t \in]a,b[$
Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu.
Zamiast $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times \mathcal{O}$, *mamy* $]a,b[\times X$

Dowód. Chcemy sprawdzić, czy $f(t,x) = A(t)x(t) + b(t)$ spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że $A(t)$ i $b(t)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[a,b]$. Zatem, istnieje $\sup\limits_{t \in [a,b]} \|b(t)\| = C$, a $A : X \to X$ i A jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania

$$\sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

$$\underset{t \in [a,b]}{\forall} \|A(t)x + b(t) - (A(t)x' + b(t)\| = \|A(t)(x - x')\| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\| \|x - x'\| = L\|x - x'\|.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ oraz $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$ takie, że dla

$$\varepsilon = min\left\{|a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L}\right\} \tag{30}$$

Gdzie r_1, r_2 były takie, że na zbiorze $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$ funkcja $f(t,x)$ była ograniczona.
Zależy nam na tym, aby w warunku 30 wyeliminować r_2
Ale $\|A(t)x + b(t)\| \leqslant \|A(t)x\| + \|b(t)\|$ dla $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned}
&= \|A(t)x\| + C \leqslant L\|x\| + C = \\
&= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leqslant \\
&\leqslant L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leqslant \\
&\leqslant Lr_2 + L\|x_0\| + C.
\end{aligned}$$

□

13 Wykład (09.04.2019)

$$\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M}\right\}$$

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$$

Chcielibyśmy, żeby ε nie zależał od punktu w którym zaczniemy.
Zauważmy, że

$$\|A(t)x(t) + b(t)\| \leqslant L(\|x_0\| + r_2) + c$$

zatem

$$\frac{r_2}{M} \geqslant \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} = \left|\text{Połóżmy } r_2 = \|x_0\| + c\right| =$$
$$= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} =$$
$$\frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} \geqslant \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} =$$
$$\frac{1}{2L+1},$$

zatem

$$\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L+1}\right\}$$

(r_1 - pomijamy, bo $A(t)$ - ciągła na $[a, b]$).
Oznacza to, że wartość ε nie zależy od x, zatem rozwiązanie początkowo określone na

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times K(x_0, r_2)$$

możemy przedłużyć do określonego na całym $[a, b] \times X$!

13.1 Rezolwenta

Rozwiązaniem problemu Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

jest funkcja $x(t, t_0, x_0)$

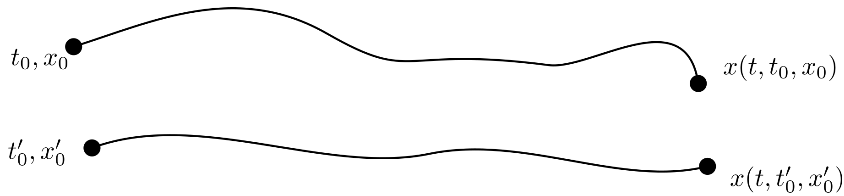
Pytanie 14. *Czy istnieje*

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

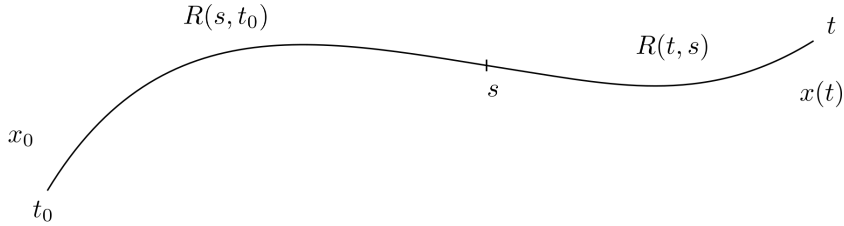
Takie, że

$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

(Jeżeli $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$)



Rysunek 27: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi



Rysunek 28: Jak pośpimy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)

Definicja 16. *Jakie własności $R(t, t_0)$ powinno posiadać?*

1. $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, R$ *- liniowy*
   Bo jeżeli $x_1(t), x_1(t_0) = x_0^1$ i $x_2(t), x_2(t_0) = x_0^2$ są rozwiązaniem, to chcielibyśmy, by $x_1(t) + x_2(t)$ też było rozwiązaniem z wartością początkową $x_0^1 + x_0^2$. Rys 28

2. *funkcja $R(t, t_0)$*

3. $R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0)$
   $\underset{t, t_0, s \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}}{\forall}$

4. $R(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, *bo* $x(t) = R(t, t_0)x_0 \underset{t_0 \in \mathcal{O}}{\forall}$
   Ad 3. Wstawiając t_0 do trzeciej kropki otrzymujemy

$$R(t_0, t_0) = R(t_0, s)R(s, t_0) \to \underset{t, s \in \mathcal{O}}{\forall} R(s, t) = R(t, s)^{-1}$$

5.

$$\frac{dR(t, to)}{dt} = A(t)R(t, t_0),$$
$$R(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

bo wtedy $x(t) = R(t, t_0)x_0$ jest rozwiązaniem problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

bo $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t,t_0)x_0) = A(t)R(t,t_0)x_0 = A(t)x(t)$ *i* $x(t_0) = R(t_0,t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie $x(t) = R(t,t_0)x_0$ da nam jednoznaczne rozwiązanie.

Pytanie 15. *A co z $b(t)$? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)*

Chcemy rozwiązać problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Załóżmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t) = R(t,t_0)C(t), C(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)c(t)\right) = \frac{dR(t,t_0)}{dt}c(t) + R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t,t_0)c(t) + R(t,t_0)\frac{dc}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t,to)c(t) + R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t,t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \qquad /R(t,t_0)^{-1}.$$
$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)^{-1}b(t).$$
$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)b(t).$$
$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale $c(t_0) = x_0$, więc $\alpha = x_0$.

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t,t_0)c(t) = R(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds\right) = .$$
$$R(t,t_0)x_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds = .$$
$$R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{R(t,t_0)R(t_0,s)}_{R(t,s)}b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds.$$

dygresja:
dają nam rozkład gęstości masy $\rho(x')$. Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x-x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to $\frac{1}{\|x-x'\|}$

Pytanie 16. *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$ spełnia warunki $1-5$ dla rezolwenty

- $R(t,t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $R(t,t_0)$ - jest ciągła względem t i t_0
- $R(t,\alpha)R(\alpha,t_0) = R(t,t_0)$, bo $e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^{\alpha} A(s)ds + \int_{\alpha}^{t} A(s)ds}$
  $R(t,t_0) = R(t,\alpha)R(\alpha,t_0)$
- $R(t_0,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$
- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t,t_0)$
  Dowód:

$$\frac{R(t+h,t_0) - R(t,t_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right) = .$$

$$= \frac{1}{h}\left[e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right] = .$$

$$\frac{1}{h}\left[e^{\int_{t}^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I}\right] e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - \frac{1}{h}\left[e^{hA(\beta)-\mathbb{I}}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\frac{1}{h}\left[\mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \ldots = \mathbb{I}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\underset{t<\beta<t+h}{A(\beta)R(t,t_0)} + h[...] \to A(t)R(t,t_0).$$

$((((\int_{t}^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta)))))$

Przykład 33.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^{t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

14 Wykład (12.04.2019)

Przykład 34.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t=0) \\ p(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{(t-0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda^2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + a\lambda + b.$$

$$f(-1) = -a + b, f(1) = a + b.$$

$$b = \frac{f(-1)+f(1)}{2} = \frac{e^{-t}+e^{t}}{2}, a = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{R(t,t_0)}\begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 17. *Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia $R(t, t_0)$?*

Obserwacja 5. *Załóżmy, że macierz $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych.*

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, \lambda_3, \ldots \\ v_1, & v_2, v_3, \ldots. \end{matrix}$$

Obserwacja 6. *Jeśli $v \in ker(A - \lambda\mathbb{I})$, to znaczy, że*

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^2 v &= \lambda^2 v \\ A^n v &= \lambda^n v \\ e^A v &= e^{\lambda t} v. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem przdstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\begin{aligned} &\overline{x_0} = x_0' + x_0^2 + \ldots + x_0^n \\ &e^{A(t-t_0)}\overline{x_0} = sum_{i=1}^n e^{A(t-t_0)} x_0^i = sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0^i \end{aligned}$$

.

Obserwacja 7. *najogólniesza postać λ_j (pierwiastki równania $w(\lambda) = 0$) to*

$$\lambda_j = a_j + ib_j.$$

Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy n różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt), \quad \sin(bt), \quad e^{at}, \quad ch(at), \quad sh(at), \quad e^{at}\sin(bt), \quad e^{at}\cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x} &= p \\ \dot{p} = \ddot{x} &= -a\dot{x} - \omega^2 x \\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Załóżmy, że macierz $A \in M_n^n$ ma k różnych wartości własnych i A nie zależy od czasu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\to n_1 \\ \lambda_2 &\to n_2 \\ &\vdots \\ \lambda_k \to n_k - V_k = ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}&. \end{aligned}$$

(gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$)

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus .. \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \ldots + x_0^k.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^{k} e^{A(t-t_0)}x_0^i = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda\mathbb{I}(t-t_0)}x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A-\lambda\mathbb{I})(t-t_0)}x_0^i = \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A-\lambda_j\mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right) \\ &\text{ale } x_0^i \in ker(A - \lambda_i \mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_\lambda = \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A-\lambda_i\mathbb{I})^j \right) x_0^i. \end{aligned}$$

Przykład 35. *Rozwiązać równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a+b+2c=0$$

$$-b+c=0$$

$$c=b$$

$$-a-b+2b=0$$

$$a=3b$$

$$v \in V_{\lambda_2} \iff v = \begin{bmatrix} 3b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_1} = ker(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c=0, v \in V_{\lambda_1} \iff v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0^1 \in V_{\lambda_1} + x_0^2 \in V_{\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i (t-to)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i =$$

$$= e^{\lambda_1 (t)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{2-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_1)^j \right) x_0^1 + e^{\lambda_2 t \mathbb{I}} (\mathbb{I}) x_0^2 =$$

14.1 Baza rozwiązań

Obserwacja 8. *Jeżeli* $x(t) = R(t,t_0)x_0$ *i* $R(t,t_0) \in M_n^n$*, to znaczy, że*

$$x(t) = [||||||||] \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \, [|] + x_0^2 \, [|] + \ldots + x_0^n \, [|] \, .$$

Pytanie 18. *Czy* $\det(R(t,t_0)) \neq 0$*?*

Jeżeli tak, to kolumny $R(t,t_0)$ możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i $\det R(t,t_0) \neq 0 \underset{t\in[a,b]}{\forall}$.

W bazie wektorów własnych macierz e^{At} wygląda tak (zakładamy n wartości własnych):

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{t*TrA} \neq 0.$$

15 Wykład (30.04.2019)

Pytanie 19. *Czy kolumny $R(t, t_0)$ są liniowo niezależne* $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$*?*

Wiemy, że $R(t, t_0) = \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Chcielibyśmy, żeby $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall} \det R(t, t_0) \neq 0$.

Przypomnienie z algebry:

Z macierzą $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_n \end{bmatrix}$ możemy związać macierz $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$.

Zatem $\det A$ uzyskamy mnożąc np. pierwszy wiersz A z pierwszą kolumną D^T.

Pytanie: Co się stanie, jeśli przemnożymy pierwszy wiersz A przez drugą kolumnę D^T?

Przykład 36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *i wtedy*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

zatem $AD^T = \sum_{i=1}^n D_{ik} a_{si} = \delta_{ks} \det A$

Twierdzenie 14. *(Liouville)*
Jeżeli $R(t, t_0)$ - rezolwenta dla problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

i $x \in \mathbb{R}^n$, to $w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}$, gdzie $w(t) = \det R(t, t_0)$ i $w(t)$ nazywamy wrońskianem.

Uwaga:

Zauważmy, że $w(t)$ nigdy nie będzie równa zero, bo

$$w(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

a $\left| \int_{t_0}^t trA(s)ds \right| < +\infty$ (bo $A(t) \to$ lipszycowalna).

Oznacza to, że kolumny $R(t, t_0)$ są $\underset{t,t_0\in[a,b]}{\forall}$ liniowo niezależne, więc możemy badać bazę rozwiązań złożoną z kolumn $R(t, t_0)$

Dowód 1. *Rezolwenta jest postaci:*

$$R(t,t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ u_{n1}(t) & \dots & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie $u_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$.
Wiemy, że $\frac{dR(t,t_0)}{dt} = A(t)R(t,t_0)$.
Obserwacja: policzmy $\det R(t,t_0)$ *względem pierwszego wiersza:*

$$w(t) = (-1)^{1+1} u_{11}(t) \begin{bmatrix} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{bmatrix} + (\text{ brak } u_{11}).$$

Zatem $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{11}} = D_{11}$ *i ogólnie* $\frac{\partial w(t)}{\partial u_{ij}} = D_{ij}$.
Zatem $w(t)$ *możemy potraktować jako funkcję od* $n \times n$ *zmiennych.*

$$w(t) = w(u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{nn}(t)),$$

zatem

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u_{11}} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u_{12}} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial u_{nn}} \frac{\partial u_{nn}}{\partial t}.$$

Skoro $\frac{dR(t,t_0)}{dt} = A(t)R(t,t_0)$ *to znaczy, że*

$$\frac{\partial u_{ki}}{\partial t} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} u_{si}.$$

Czyli

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{k,i} D_{ki} \sum_{s} a_{ks} u_{si} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} D_{ki} u_{si} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \delta_{ks} w(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} w(t)$$

.

Zatem $\frac{\partial w}{\partial t} = tr(A(t)) \cdot w(t)$. *Jak przyłożymy obustronnie całkę to otrzymamy:*

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \implies -\ln t_0 + \ln w = \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds \to w(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} e^{\ln \ln t_0}.$$

Czyli

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} \quad \square$$

15.1 Równania liniowe wyższych rzędów (na skróty)

Rozważmy równanie:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}(t) \tag{31}$$

(gdzie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$).
Chcemy znaleźć bazę rozwiązań.
Możemy zapisać (31) jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \sum_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \sum_j \frac{t-t_0}{j} (a - \lambda_i \mathbb{I})^{\ln_i -1} \underbrace{x_0^i}_{(*)}.$$

Chcemy znaleźć pierwiastki $w(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$

Przykład 37.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3-\lambda \end{bmatrix} = a_0(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+4}a_1\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}a_2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+4}(a_3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -a_0\cdot 1 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - a_3\lambda^3 + \lambda^4$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = a_0x + a_1x' + a_2x'' + a_3x''', \quad \lambda^4 = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = te^t$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} = a_0x + a_1x' + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Połóżmy $x = e^{\lambda t} \rightarrow$ skrót mnemotechniczny

$$e^{\lambda t}\lambda^n = e^{\lambda t}a_0 + a_1\lambda e^{\lambda t} + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}.$$

15.2 Warunek początkowy

czy można znaleźć współczynniki x_0^i we wzorze $(*)$ bez konieczności rozkładu warunku brzegowego w bazie wektorów własnych macierzy A?

Przykład 38. *Niech $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ i $x(0) = 0, x'(0) = 1$ i wiemy, że $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Oznacza to, że $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}(*)$,*

$$\lambda_1 = i\omega, \qquad n_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -i\omega, \qquad n_2 = 1.$$

gdzie A i B nieznane, ale wiemy, że $x(0) = 0$ i $x'(0) = 1$ i $x'(t) = Ai\omega e^{i\omega t} - Bi\omega e^{-i\omega t}$.

Czyli

$$
\begin{aligned}
&Ae^0 + Be^{-0} = 0 \implies -A = +B \\
&Ai\omega e^0 - Bi\omega e^{-0} = 1 \\
&2Ai\omega = 1 \\
&A = \frac{1}{2i\omega} \\
&B = -\frac{1}{2i\omega}.
\end{aligned}
$$

Czyli

$$x(t) = \frac{1}{2i\omega}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Pytanie 20. *Czy możemy zmienić bazę w równaniu (*)?*

Odp: Możemy. Na przykład przyjmując $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\
&x(0) = A = 0 \\
&x'(0) = B\omega = 1 \to B = \frac{1}{\omega} \implies x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).
\end{aligned}
$$

Pytanie 21. *Co robić z niejednorością? (Dla równań wyższych rzędów)*

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + b, \frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}, \vec{x} = R(t, t_0)x_0.$$

Przykład 39.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = e^t (\Delta).$$

Wiemy, że rozwiązaniem problemu $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ jest $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Może uzmiennimy stałe:

$$
\begin{aligned}
&x(t) = A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t) \\
&\dot{x}(t) = \dot{A}(t)\cos(\omega t) - At\sin(\omega t) + \dot{B}\sin(\omega t) + B(t)t\cos(\omega t).
\end{aligned}
$$

W efekcie dostaniemy równanie drugiego rzędu na $A(t)$ i $B(t)$:(
Zapiszmy więc równanie (Δ) w postaci macierzowej.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} (\Delta\nabla).$$

Jak wygląda rezolwenta?

$$R(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ i } \frac{d}{dt}R(t, t_0) = AR(t, t_0), R(t_0, t_0) = 1.$$

$\left(\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = R(t,t_0)x_0\right)$.

Zauważmy, że skoro

$$
\begin{aligned}
&x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
&x'(t) = A\left(\cos(\omega t)\right)' + B\left(\sin(\omega t)\right)' \\
&\textit{to wtedy } \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

I możemy zbudować macierz

$$
\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{11}' & u_{12}' \end{bmatrix},
$$

która od rezolwenty różni się tym, że w $t = t_0$ nie zmienia się w macierz jednostkową.
Uzmienniamy stałe:

$$
(\approx)\ \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix}
$$

i wstawiamy do $(\Delta\nabla)$

$$
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = [\ldots] + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{B}(t) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\approx) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \ \textit{ale} \\
&\left(\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix}\right)' \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & -\omega^2\sin\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & -\omega^2\sin\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ (\cos\omega t)' & (\sin\omega t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Czyli mamy:

$$
\begin{aligned}
&A'(t)\cos\omega t + B'(t)\sin\omega t = 0 \\
&A'(t)\left(\cos\omega t\right)' + B'(t)\left(\sin\omega t\right)' = e^t \\
&x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\
&x(t) = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \\
&x'(t) = A'(t)\cos\omega t + B'(t)\sin\omega t + A(t)\left(\cos\omega t\right)' + B(t)\left(\sin\omega t\right)'.
\end{aligned}
$$

16 Wykład (07.05.2019)

16.1 Zbiory miary Lebesgue'a zero

Definicja 17. *Kostką w* $\mathbb{R}^n$ $(a_k \leqslant b_k)$ *nazywamy zbiór*

$$P_k = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Definicja 18. *Objętością kostki nazywamy*

$$|P_k| = \|[a_1, b_1]\| \cdot \|[a_2, b_2]\| \cdot \ldots \cdot \|[a_n, b_n]\|,$$

gdzie $\|[a_k, b_k]\| = |b_k - a_k|$.

Definicja 19. *Niech* $X \in \mathbb{R}^n$. *Mówimy, że zbiór* X *jest miary Lebesgue'a zero, jeżeli*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{P=P_1\cup\ldots\cup P_k}{\exists} : x \subset P, \sum_{i=1}^{k} |P_i| < \varepsilon.$$

Uwaga: *k nie musi być wielkością skończoną.*

Przykład 40. *Niech* $\{1\} \subset [-10, 10]$, *wówczas*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{p=\left[1-\frac{\varepsilon}{4}, 1+\frac{\varepsilon}{4}\right]}{\exists} : \{1\} \subset P, |P| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przykład 41. *zbiór Cantora*

Chcemy dojść do tw Lebesgue.

Twierdzenie 15. *(Lebesgue) Niech* P *- zbiór nieciągłości funkcji* $f : D \to \mathbb{R}$, f *- ograniczona na* D, D *-* $\ldots$*jest zbiorem miary Lebesgue'a zera* $\iff$ f *- całkowalna na* D.

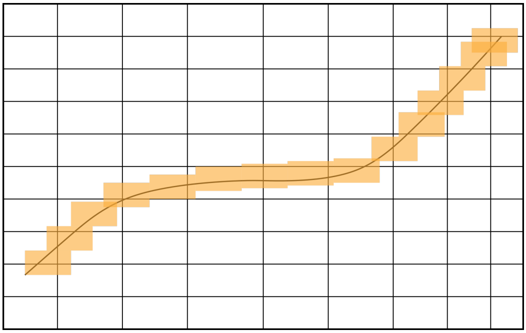
Wiemy, że f - całkowalna $\iff$

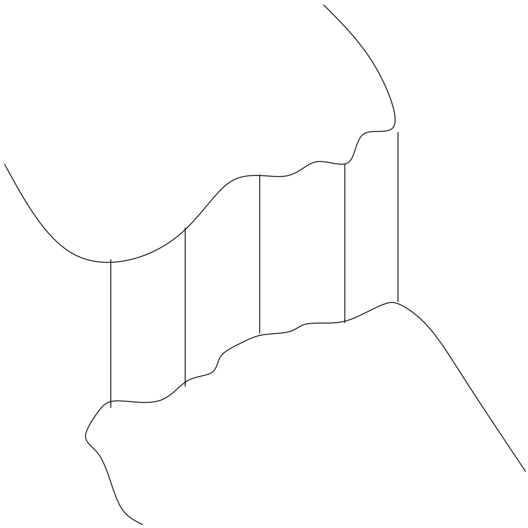
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\Pi}{\exists} . |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geqslant \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja f na zbiorze A powinna być ograniczona!!!)





Obserwacja 9. *Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogę wziąć ileś kartek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu kartek) przykryć go skończoną liczbą kartek?*

Weźmy długi stół:

$$
\begin{aligned}
&R = \bigcup_{n=0}^{\infty}]n-2, n+2[\cup]-n-2, -n+2[\\
&]0,1[\subset [-2,2] \\
&]0,1[\subset [-2019, 2018] \cup [-2,2] \\
&]0,1[= \bigcup_{n=2}^{\infty}]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[.
\end{aligned}
$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

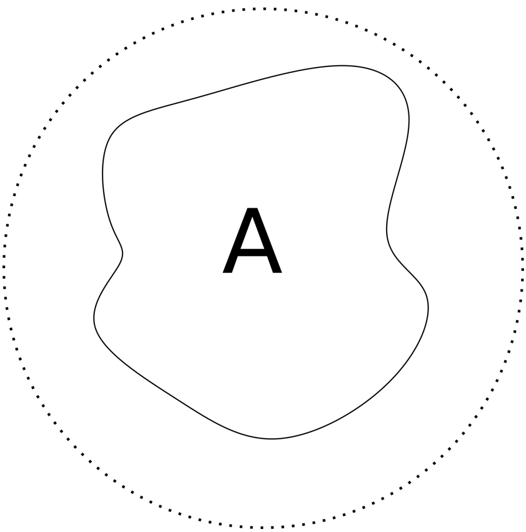
Definicja 20. *Niech X - zbiór a $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$ - rodzina zbiorów. Mówimy, że F jest pokryciem zbioru X, jeżeli $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$. Jeżeli zbiory A_α są otwarte, to mówimy, że F jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów A_α jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór F taki, że jest też pokryciem zbioru X nazywamy podpokryciem.*

Definicja 21. *Zbiór X nazywamy zwartym, jeżeli z* ***każdego*** *pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.*

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

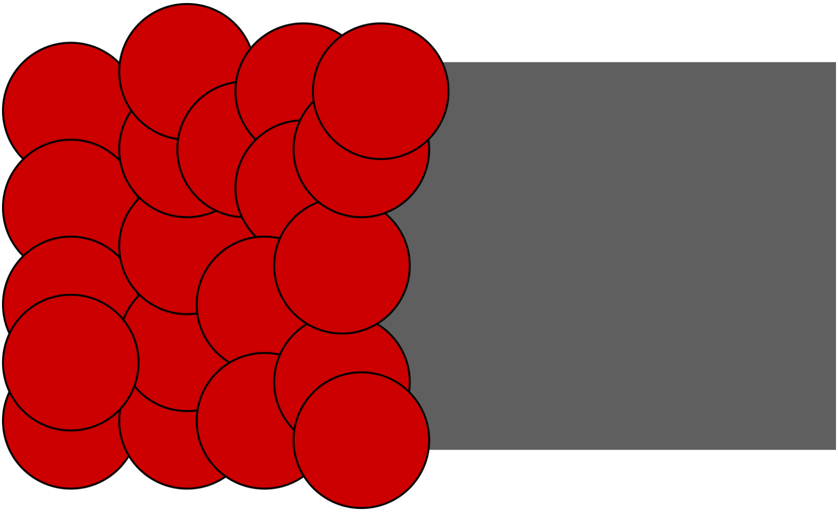
Stwierdzenie 4. *(X - domknięty,ograniczony) $\iff$ (X-zbiór zwarty)*

Dowód 2. *niech $X \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ - przestrzeń metryczna*
$\Longleftarrow_1$ *Pokażemy, że jeżeli X - zwarty, to X - ograniczony. (przypomnienie: zbiór $A \subset \mathbb{X}$ jest ograniczony jeżeli $\underset{r}{\exists}.\ \underset{x_0 \in A}{\exists}$, że $A \subset K(x_0, r)$ Skoro X - zwarty, to niech F będzie po-*



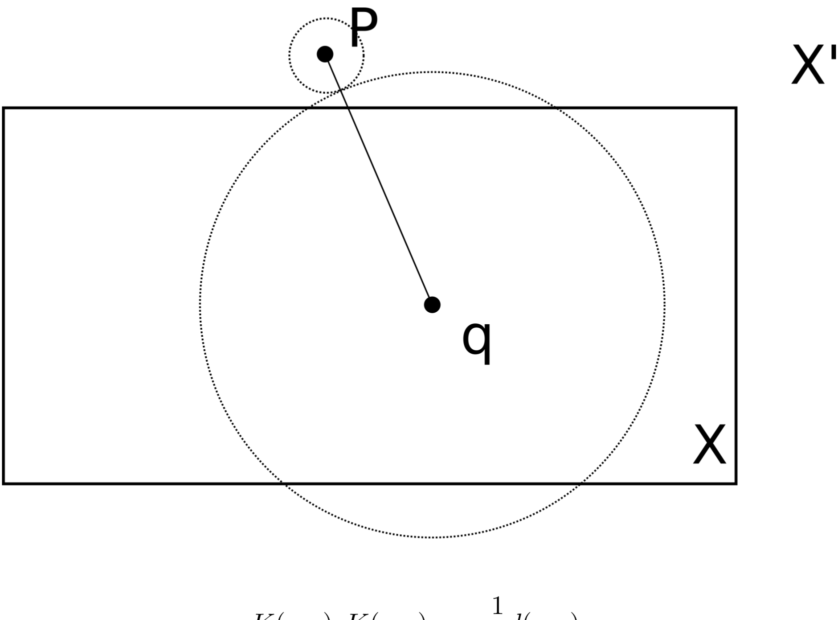
Rysunek 29: Nieważne, co A myśli o sobie, jeżeli otoczymy je kulą, to jest ograniczone i koniec

kryciem złożonym z $K(x,1), x\imath X$. $F = \left\{K(x,1), \underset{x \in X}{\forall}\right\}$. F jest pokryciem zbioru X, ale ponieważ X - zwarty, to znaczy, że z pokrycia F możemy wybrać ***skończone*** *podpokrycie, co oznacza, że zbiór X możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem X - ograniczony.*



Rysunek 30: Przykrywanie zbioru kulami

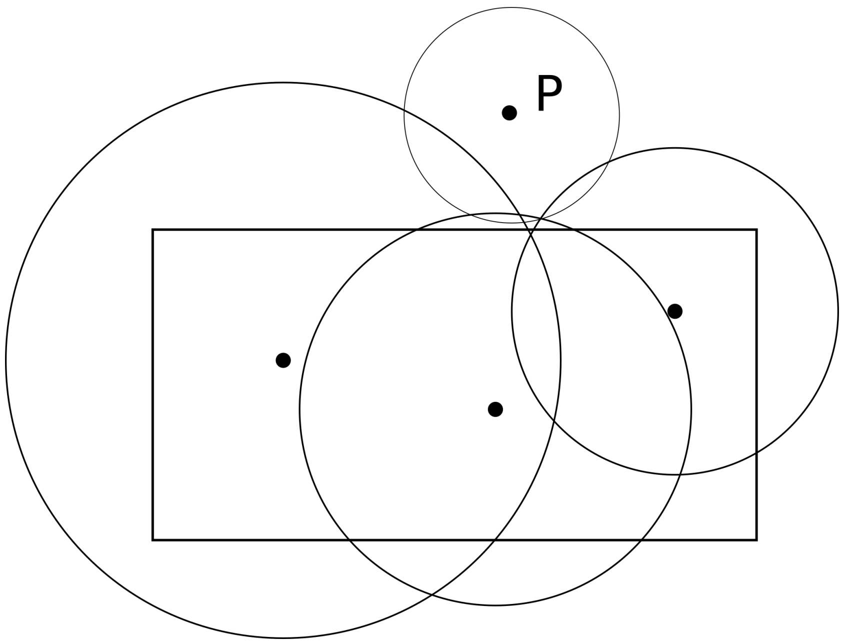
$\Longleftarrow_2$ *Pokażemy, że* X *- zwarty, to* X *- domknięty. Pokażemy, że* X' *- zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego* $p \in X' \underset{K(p,\tilde{r})}{\exists}$, *że* $K(p,\tilde{r}) \cap X = \phi$ *co będzie oznaczało, że* X' *składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy* $q \in X$, *utwórzmy dwa otoczenia:*



$$K(q,r), K(p,r); r = \frac{1}{2}d(p,q).$$

Widać, że $K(q,r) \cap K(p,r) = \phi$. *Powtarzamy taką procedurę dla każdego* $q \subset X$, *oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru* X *kulami* $K(q,r_q), q \in X$, *ale* X *jest zbiorem zwartym więc mogę wybrać* ***skończoną*** *ilość kul*

$K(q_1,r_1), K(q_2,r_2),\ldots,K(q_k,r_k)$ będącą pokryciem zbioru X. A to znaczy, że



$$\underbrace{(K(p,r_1)\cap K(p,r_2)\cap\ldots\cap K(p,r_k))}_{\textit{jest do zbiór niepusty i }\textbf{\textit{otwarty}}}\cap\underbrace{(K(q_1,r_1)\cup K(q_2,r_2)\cup\ldots\cup K(q_k,r_k))}_{\textit{Pokrywa cały } X}=\phi.$$

czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[=[0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu P : $K(p,r_k)\cap\ldots K(p,r_k)$, takie, że nie ma punktów wspólnych z X, więc p jest punktem wewnętrznym, czyli X' - otwarty, czyli X - domknięty.

X - domknięty i ograniczony $\implies$ X - zwarty. Niech P - kostka z $\mathbb{R}^n$, metryka d_2. Pokażemy, że P jest zwarta.

$$P=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n].$$

$$\neg(p\implies q)\iff p\wedge\neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:
Załóżmy, że P - domknięty i ograniczony i P nie jest zwarty. Co to znaczy, że P nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru P takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli P nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę $[a_1,c_1]\times[a_2,c_2]\times\ldots\times[a_n,c_n]$ gdzie $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}, c_2=\frac{a_2+b_2}{2},\ldots,c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$,
to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli $P_1\subset P$, kulę P_1 też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek $PP_1P_2P_3\ldots P_n\ldots$.

Weźmy ciąg elementów

$$\begin{gathered}x_0 \in P\\ x_1 \in P_1\\ \vdots\\ x_n \in P_n\\ \ddots\end{gathered}$$

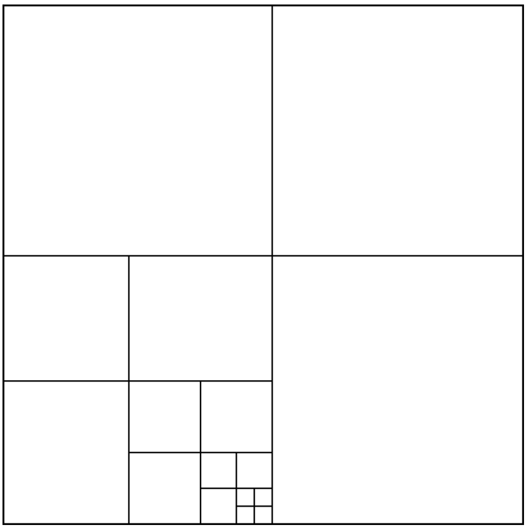
Znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ *jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg* $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$ *czyli* X_n *jest zbieżny. (bo* $\mathbb{R}^n$ *- zupełna). Niech* $\tilde{x}$ *będzie granicą* $\{x_n\}$ *a zbiór* $\{P, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *jest pokryciem* P *takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro* $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$*, to znaczy, że*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}.\underset{n}{\exists}.\underset{n>N}{\forall}.x_n \in K(\tilde{x}, \varepsilon).$$

Oznacza to, że mogę tak dobrać ε*, że w* $K(\tilde{x}, \varepsilon)$ *będą się zawierać wszystkie* $P_i, i > n$*. Mogę wtedy wybrać* ***skończone*** *podpokrycia kostki* P*.*

$$\{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

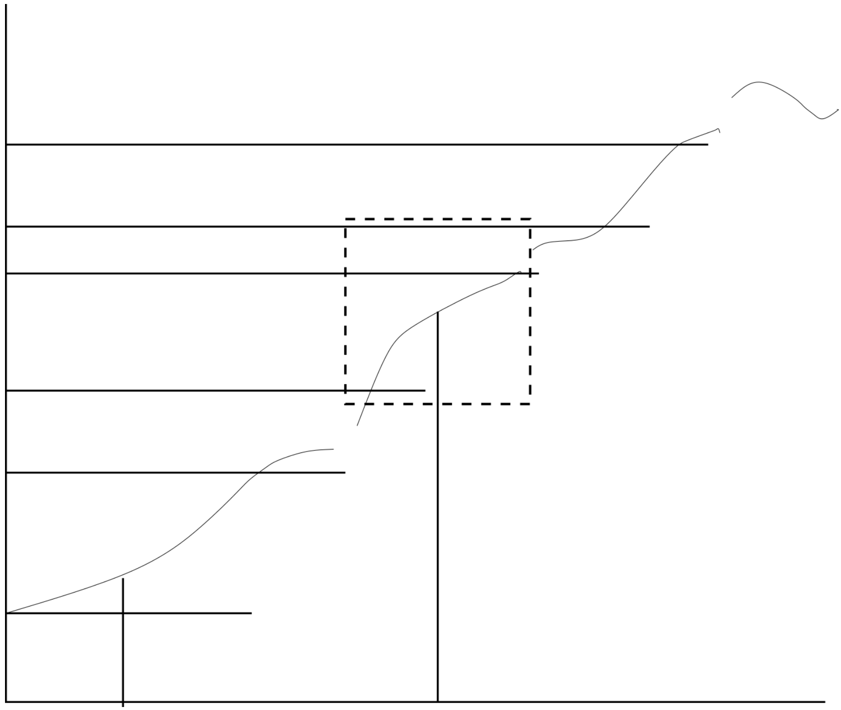
i sprzeczność



Rysunek 31: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszytkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

Wracamy do tw. Lebesgue'a. Obserwacja: Niech D - zwarty, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ - ograniczona i niech $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$. Wówczas:

$$\underset{\Pi}{\exists}.|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon|D|.$$



Dowód 3. *Skoro* $\underset{x \in A}{\forall} \lim_{r \to 0} |\underset{K(x',r)}{sup} f(x') - \underset{x' \in K(x',r)}{inf} f(x')| < \varepsilon$ *To znaczy, że* $\underset{r_\varepsilon}{\exists}$ *takie, że* $|sup f(x') - inf f(x')| < \varepsilon$. *Jeżeli zbadamy wszystkie kule* $K(x, r_\varepsilon) \underset{x \in D}{\forall}$ *to otrzymamy pokrycie* A. *Ale* A *jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że*

$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \ldots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

Możemy zatem wybrać podział Π *zbioru* D *zgodny z podziałem* $(*)$, *w wyniku czego,*

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

17 Wykład (10.05.2019)

Pytanie 22. *Jak pokazać, że zbiór Cantora jest niepusty?*

Stwierdzenie 5. *Przeliczalna ilość zbiorów miary Lebesgue'a zero jest też zbiorem miary Lebesgue'a zero.*

Dowód. Weźmy rodzinę zbioru $X_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}_+$, X_n - zbiór miary Lebesgue'a zero. Weźmy rodzinę kostek P_n, gdzie P_i - kostka z $\mathbb{R}^n$ taka, że

$$|P_i| < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(możemy tak zrobić, bo X - miary Lebesgue'a zero)
wówczas $X \subset P = P_1 \cup P_2 \cup \dots$

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup \dots| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

Pytanie 23. *Jak pociąć prostokąt?*

będzie trzeba wprowadzić język.
weźmy kostkę z $\mathbb{R}^n$. Wtedy

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

niech Π_i - podział przedziału $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$.
Zatem podział kostki P wyznaczy kolekcja podziałów

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}.$$

W takim razie P możemy przedstawić jako sumę

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \text{ gdzie } Q_i = \left[a_1^{i_1}, b_1^{i_1}\right] \times \dots \times \left[a_n^{i_n}, b_n^{i_n}\right].$$

$\left[a_j^{i_j}, b_j^{i_j}\right]$ - jeden z elementów podziału odcinka $[a_1, b_1]$ przy podziale $\Pi_1, \dots,$ itp.
Wówczas zauważmy, że jeżeli zdefiniujemy

$$int(Q_i) = \left]a_1^{i_1}, b_1^{i_1}\right[\times \dots,$$

to wtedy

$$int(Q_i) \wedge int(Q_j) = \phi.$$

Poza tym

$$|Q_i| \stackrel{\text{def}}{=} \left|b_1^{i_1} - a_1^{i_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|b_n^{i_n} - a_n^{i_n}\right|.$$

W związku z tym

$$|P| = \sum_i |Q_i|.$$

Uwaga: czasami zamiast pisać $\Pi = \{\Pi_1, \dots\}$, piszemy $\Pi = \{Q_1, \dots\}$

Definicja 22. *Rozważmy dwa podziały:*

$$\Pi_1 = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$$
$$\Pi_2 = \{R_1, \ldots, R_s\}.$$

Podział Π_2 nazywamy drobniejszym, jeżeli dla $\Pi_1 \neq \Pi_2$

$$\underset{a_j}{\forall}, j \in \{1, \ldots, k\} \qquad \underset{i \in \left\{R_{m_1}, \ldots, R_{m_j}\right\}}{\exists}, Q_j = R_{m_1} \cup \ldots \cup R_{m_j}.$$

Definicja 23. *Suma górna dla $f : P \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|,$$

oraz suma dolna

$$\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{Q_i \in \Pi} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot |Q_i|.$$

Definicja 24. *Całka górna:*

$$\overline{\int_p} f = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi),$$

oraz

$$\underline{\int_p} f = \sup_{\Pi} \underline{S}(f, \Pi).$$

Obserwacja 10. *Jeżeli Π_2 - podział drobniejszy, niż Π_1, to*

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leqslant \underline{S}(f, \Pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1).$$

Pytanie 24. *Czym to się właściwie różni od całki na $\mathbb{R}$?*

Pytanie 25. *Czy całkę na np. $\mathbb{R}^2$ możemy policzyć przy pomocy dwóch całek na $\mathbb{R}$?*

Przykład 42.

$$p = [0, 1] \times [0, 2], \quad f(x, y) = xy^2.$$

$$\int_p xy^2 \overset{??}{=} \int_0^1 dx \int_0^2 dy \cdot xy^2 \overset{??}{=} \int_0^2 dy \int_0^1 dx \cdot xy^2.$$

$$\int_0^1 dx \left[\frac{xy^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_0^2 dy \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{y^3}{2 \cdot 3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Pytanie 26. *Co robimy ze zbiorami, które nie są prostokątami?*

Przykład 43. *niech $A \subset P \subset \mathbb{R}^n$, wprowadźmy funkcję*

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

wówczas jeżeli

$$f : P \to \mathbb{R}, A \subset P,$$

to

$$\int_A f \stackrel{def}{=} \int_P f \cdot X_A.$$

Jeżeli f - takie, że $f : A \to \mathbb{R}$, to definiujemy funkcję

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

i wtedy

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}.$$

Konsekwencją takiego podejścia jest konieczność radzenia sobie z całkami z funkcji nieciągłych. Oznacza to, że warunek na całkowalność punktu musi być związany z nieciągłością. W tym celu wprowadzamy kilka nowych pojęć:

Definicja 25. *Wahanie funkcji:*
niech $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, niech $x_0 \in \int(A)$. Wahaniem funkcji w punkcie x_0 nazywamy wielkość

$$O(f, x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{r \to 0} \left| \sup_{K(x_0,r)} f(x) - \inf_{K(x_0,r)} f(x) \right|.$$

Stwierdzenie 6. *Niech A - domknięty, $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$.*

$$A_\varepsilon = \{x \in A : O(f, x) \geqslant \varepsilon\},$$

wówczas A_ε teże jest zbiorem domkniętym.

Dowód. Pokażemy, że zbiór A'_ε jest zbiorem otwartym.
Mamy dwa przypadki:

1. $x \in A'_\varepsilon$, $x \notin A$, czyli $x \in A'$ więc $\underset{r}{\exists} K(x, r) \in A'$ (bo A' jest otwarty)

2. $x \in A$, $x \in A'_\varepsilon$, czyli $O(f, x) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{r>0}{\exists} \quad \underset{y \in K(x,r)}{\forall} O(f, y) < \varepsilon.$$

czyli znajdziemy takie otoczenie $x \in A'_\varepsilon$, że wszystkie elementy z tego otoczenia też należą do A'_ε czyli A'_ε jest otwarty.
Wiemy, że

$$\lim_{r \to 0} \left| \sup_{x' \in K(x,r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x,r)} f(x') \right| = c < \varepsilon.$$

Z definicji granicy oraz warunku wyżej wiemy, że

$$\exists_{r} \left| \sup_{x' \in K(x,r)} f(x) - \inf_{x' \in K(x,r)} f(x) \right| < \varepsilon,$$

zatem dla dowolnego $y \in K(x,r)$ mamy

$$\exists_{r'} r' = r - \|x - y\| : \forall_{y' \in K(y,r)} |\sup f(y') - \inf f(y')| < \varepsilon,$$

czyli

$$O(f, y') < \varepsilon \to \forall_{y'} y' \in K(y, r') \subset K(x, r),$$

co oznacza, że punkt x jest punktem wewnętrznym A'_ε, czyli A'_ε jest otwarty, więc A_ε - domknięty. $\square$

18 Wykład (14.05.2019)

Ostatnio było:

$$A \subset D : \underset{x \in A}{\forall} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$
$$\underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

Twierdzenie 16. *(Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f - ograniczona.*
Wówczas f - (całkowalna na D) $\iff$ (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Dowód. $\Longleftarrow$
Chcemy pokazać, że

$$\underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłośći jest miary L. zero.

Wprowadźmy zbiór $A_n = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Obserwacja 11. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$
a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D.

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n, bo przeliczalna suma zbiorów miary L. zero też jest zbiorem miary L. zero.

Uwaga 4. *Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).*
Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L. zero gdy itnieje $P_i \subset D$, (P_i - kostki), że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$. Wiemy, że

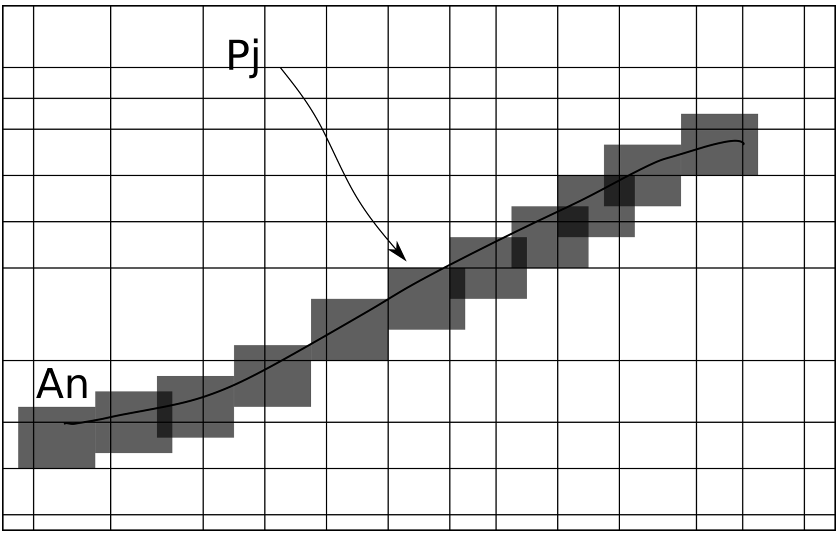
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{N}{\exists} . \underset{n>N}{\forall} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wybierzmy zatem taki indeks n dla zbioru A_n, że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wiemy, że A_n - domknięty i ograniczony (bo $A_n \subset D$, a D - kostka w $\mathbb{R}^n$), to znaczy, że A_n jest zbiorem zwartym, a $\{P_i\}$ jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{k} P_j$$

$$\sum_{j=1}^{k} |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$, że $\sum |P_i|$ - dowolnie mała. Wybierzmy podział Π zbioru D taki, że Π jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie



A_n zbioru $\bigcup P_j$. Oznacza to, że podział Π możemy podzielić na dwa podziały

$$\begin{aligned}
&\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}\\
&\Delta\\
&\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi\\
&\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.
\end{aligned}$$

Δ : każda kostka z $\{P_j\}$ składa się z kostek należących do Π_1
$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| = |\overline{S}(f,\Pi_1) - \underline{(}f,\Pi_1) + \overline{S}(f,\Pi_2) - \underline{S}(f,\Pi_2)|$, ale

$$\overline{S}(f,\Pi_1) - \underline{S}(f,\Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_i} (\underset{x\in Q_i}{sup}\, f - \underset{x\in Q_I}{inf}\, f)Q_i| \tag{32}$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, a f - ograniczona na D czyli

$$\underset{M}{\exists}.\underset{x\in D}{\forall} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x\in D} f - \inf_{x\in D} f| < M.$$

Zatem

$$(\mathbf{??}) \leqslant M \cdot \sum |Q_i| \leqslant M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(f,\Pi_2) - \underline{S}(f,\Pi_2) = \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x\in R_j} f - \inf_{x\in R_j} f)|R_j|\\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum |R_j| \leqslant \frac{1}{n}|D|.
\end{aligned}$$

Zatem

$$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \leqslant M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}|D| = \frac{1}{n} \cdot const.$$

czyli możemy tak zwiększyć n, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \frac{1}{n} \cdot const < \varepsilon \quad \square$
Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A?
np. dla A_{2019} działa, ale co dalej. Bo A_k dla $k > n$ też spełniają warunek, że $\frac{1}{k} \cdot const < \varepsilon$, a A_j dla $j < n$ jest takie, że $A_j \subset A_n$

$\Longrightarrow$

Wiemy, że f - całkowalne, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}.\underset{\Pi}{\exists} |\overset{S}{(}f,\Pi) - \underset{S}{(}f,\Pi)| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n jest zbiorem miary L. zero)

$$\Pi = \{T_i\}$$
$$\frac{\varepsilon}{n} > |\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| =$$
$$\sum |\sup_{x\in T_i} f - \inf_{x\in T_i} f||T_i|(*).$$

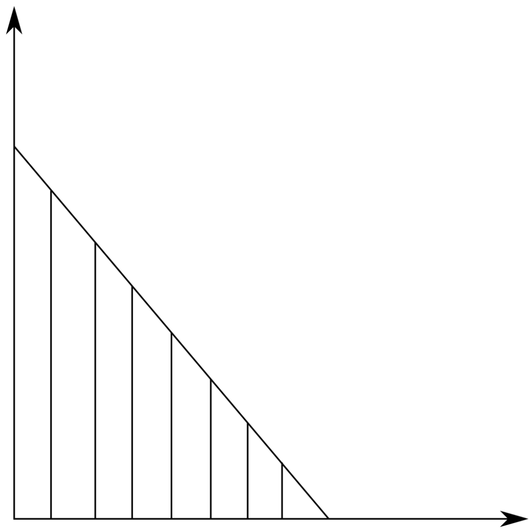
z podziału T_i wybieram takie kostki P_i, że $|\sup_{x\in P_i} f - \inf_{x\in P_i} f \geqslant \frac{1}{n}$.

Wówczas

$$(*) \geqslant \sum_{P_i} \frac{1}{n}|P_i| = \frac{1}{n}\sum |P_i|$$
$$\text{czyli } \forall_{\varepsilon>0} \frac{\varepsilon}{n} > \frac{1}{n}\sum |P_i|, \text{ gdzie } P_i \text{ jest pokryciem } A_n.$$

Czyli A_n jest zbiorem miary L. zero $\square$ $\square$

Przykład 44. $f(x,y) = x\sin(xy)$, $A = [0,1]\times[0,1]$
$\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x)dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y)dy$,
gdzie $\varphi_1(x) = \int_0^1 x\sin(xy)dy$, $\varphi_2(y) = \int_0^1 x\sin(xy)dx$



Rysunek 32: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y).$$

Twierdzenie 17. *(Fubiniego)*
Niech $f : A \times B \to \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$, f *- ograniczona i całkowalna na* $A \times B$. *Oznaczmy* $x^l \in A, y^k \in B$, A, B *- kostki.*
Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B} f(x^l, y^k) dy^k, \psi(x) = \underline{\int_B} f(x^l, y^k) dy^k.$$

Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

Uwaga 5. *całkowalnośc na* $A \times B$ *nie oznacza całkowalności na np.* B.

Dowód. Niech $\{Q_i\} = \Pi_1$ - podział zbioru A, $\{R_j\} = \Pi_2$ - podział zbioru B.
Wówczas $\Pi_1 \times \Pi_2$ - podział $A \times B$.

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) = \\
&= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{\substack{x \in Q_i \\ y \in R_j}} f(x, y) |Q_i||R_j| \leqslant \\
&\sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i||R_j| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \underbrace{\sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |R_j|}_{\text{suma dolna dla } \psi(x)} |Q_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{Q_i} \underbrace{\inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i|}_{\text{bo suma dolna} \leqslant \text{całki dolnej}} = \underset{S}{(}\psi, \Pi_1).
\end{aligned}$$

Ale $\underline{\int_A} \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|$.
Czyli $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{S}(\psi, \Pi_1)$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{\underline{S}(\psi, \Pi_1)} \leqslant \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \underline{\overline{S}(\varphi, \Pi_1)} \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro f - całkowalna na $A \times B$, to

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} . \underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że $\int_A \psi$ i $\int_B \varphi$ - istnieją i wynoszą $\int_{A \times B} f$ $\square$

$\square$

19 Wykład (17.05.2019)

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

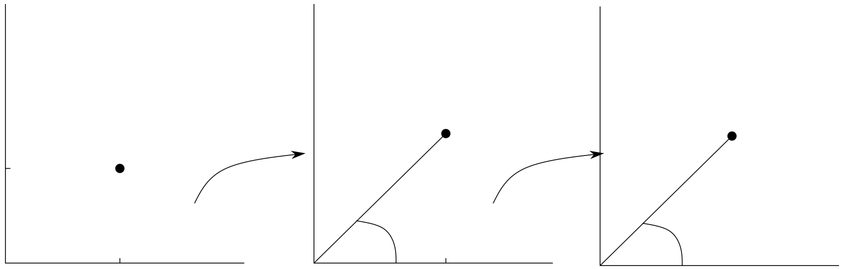
$$\int_2^4 2xe^{x^2}dx = | \, x^2 = t, 2xdx = dt \, | = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x,y)dxdy = \int dx \int f(x,y)dy = | \, r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = arctg(\frac{y}{x}) \, | = \int dr \int d\varphi f(r,\varphi)??.$$



Rysunek 33: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie $(x,y) \to (x,\varphi) \to (r,\varphi)$

$$\begin{aligned}
&\int dx \int dy f(x,y) = \|y = x \operatorname{tg}\varphi, dy = \frac{x}{\cos^2\varphi}d\varphi\| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2\varphi}\varphi f(x, y(x,\varphi)) = \\
&= \|x = r\cos\varphi, dx = dr\cos\varphi\| = \int d\varphi \int \frac{dr\cos\varphi r\cos\varphi}{\cos^2\varphi} f(x(r,\varphi), y(x(r,\varphi))) = \\
&= \int d\varphi \int dr f(r,\varphi)r, \text{ czyli "??"} = r.
\end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. $(y \to r)$, $(\ x \to \varphi\ )$

$$\begin{aligned}
&\int\int f(x,y)dxdy = \|y = \sqrt{r^2-x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2-x^2}}\| = \\
&= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y(x,r)) = \|x = r\cos\varphi, dx = -r\sin\varphi d\varphi\| = \\
&= -\int dr \int \frac{r\sin\varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2-x^2}} f(x(r,\varphi), y(x(r,\varphi), r)) = \\
&= -\int drr^2 \int d\varphi \frac{\sin\varphi f(r,\varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi}} = -\int dr \int d\varphi f(r,\varphi)r.
\end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba $(r\ )$. Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej φ, bo $x = r\cos\varphi$ a cos jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MK$^{\text{TM}}$)

Niech $\psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$.

$$\psi' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$
$$\|\psi'\| = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r.$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $\varphi : A \to A$, $A \subset \mathbb{R}^n$, φ - klasy $\mathcal{C}^1, \varphi^{-1}$ - klasy $\mathcal{C}^1$, to możemy przedstawić φ jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia $n-1$ zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogacające nazwy).

Dowód. (coś w rodzaju dowodu)
φ możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pytanie 27. *Czy istnieje odwzorowanie $\Theta^{-1} : A \to A$ takie, że*

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

($t_{i\neq j}$) mogą zostać zamiast zamieniać je na x_i. Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = \left(\varphi \circ \Theta^{-1}\right) \circ \Theta.$$

Wiemy, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$ i φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$ i $\varphi : A \to A$. Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!
$det\varphi' \neq 0$, czyli w macierzy φ' istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np. $\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$. Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^i} & \ldots & \ldots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i $\det \eta' \neq 0$, więc istnieje η^{-1}.
Czyli $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$ □ □

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x,y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r,\varphi) \tag{33}$$

Twierdzenie 18. *(O zamianie zmiennych)*
Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ i $\xi : \Omega \to \Theta$, $f : \Theta \to \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowalna. ξ - klasy $\mathcal{C}^1$ na Ω, ξ^{-1} klasy $\mathcal{C}^1$ na Θ. Wtedy

$$\int_\Theta f(x)dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'(t)|dt. \tag{34}$$

$x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \ldots, t^n) \in \Omega$

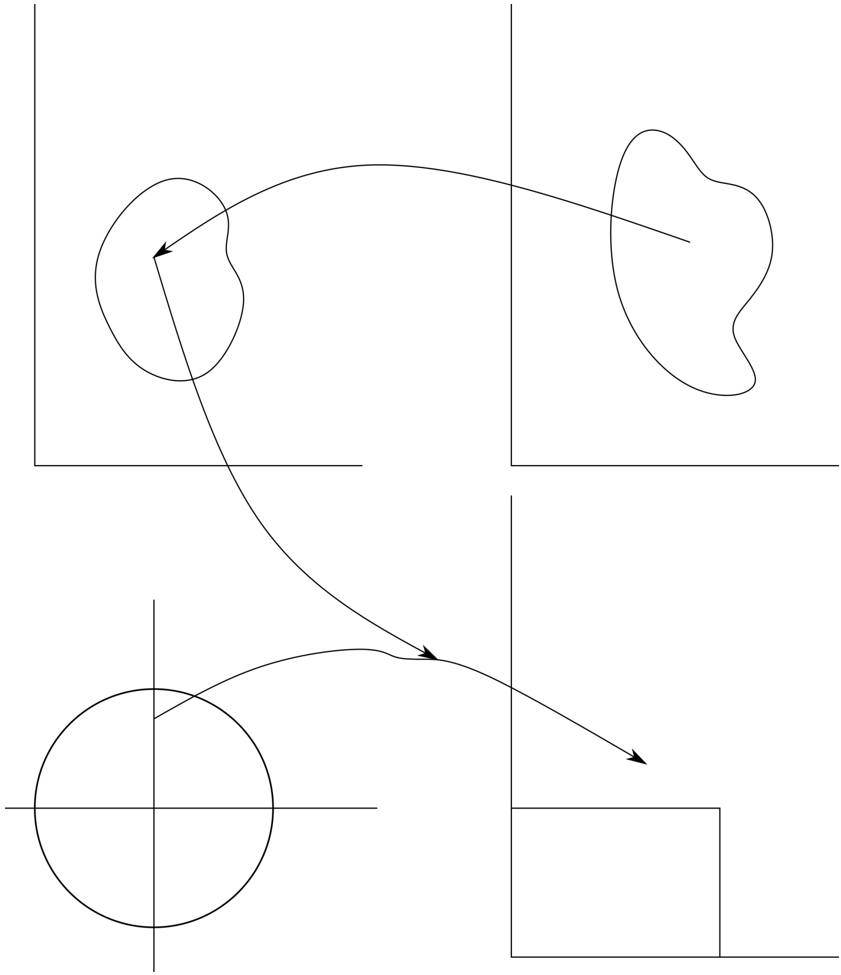
Dowód. (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla $n = 1$ - zrobione w I semetrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcem pokazać, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A \subset \mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t))|det(\xi'(t))|.$$



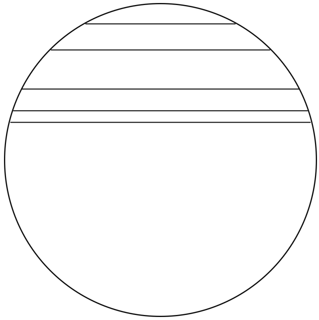
Rysunek 34: $\Omega \to \Theta - f - \mathbb{R}$

Uwaga: wartośc bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic: $\left(\int_a^b f\right)$ oznacza, że zakładamy, że $a \leqslant b$. Dowód przeprowadzamy dla $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że ξ nie zamienia jednej zmiennej.

Obserwacja 12. *Niech* $K = \left\{(x, y), x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$*, niech* $K_a = \left\{(x, a), x^2 + a^2 \leqslant 1\right\}$. *Wówczas* $K = \bigcup_{a \in [-1,1]} K_a$*, zatem* $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku $n - 1 \to n$ i wiemy, że dla $n - 1$ wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|\det \xi'|dt.$$



Rysunek 35: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_\Theta f dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'|dt.$$

Mając zbiór Θ, zdefiniujmy zbiór Θ_a, który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a.

$$\Theta_a = \left\{x \in \mathbb{Q}, x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n\right)\right\}.$$

$$K = \left\{(x, y), x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \left\{(x, a), x^2 + a^2 = 1\right\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_\Theta f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \to \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$.

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \to \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1,\dots,t_n) \\ \xi_2(t_1,\dots,t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1,\dots,t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1,\dots,x^{i-1},a,x^{i+1},\dots,x^n)dx^1\dots dx^{i-1}dx^{i+1}\dots dx^n =$$
$$\int_{\Omega_a} f(t_1,t_2,\dots,t_{i-1},a,t_{i+1},\dots,t_n)|\det\xi_a'|dt^1dt_2\dots dt^{i-1}dt^{i+1}\dots dt^n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
&\int_\Theta f(x^1,\dots,x^n)dx^n = \\
&= \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1,\dots,t_{i-1},a,t_{i+1},\dots,t_n)|\det\xi_a'|\cdot(\pm1)dt^1\dots dt^{i-1}dt^{i+1}\dots dt^n \\
&= \big[a = t_i\big] = \\
&= \int_\Omega f(t^1,t^2,\dots,t^n)|\det\xi'|dt^1\dots dt^n.
\end{aligned}$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\xi_2}{\partial t_2} & \dots & & \frac{\partial\xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\xi_n}{\partial t_1} & \dots & & & \frac{\partial\xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

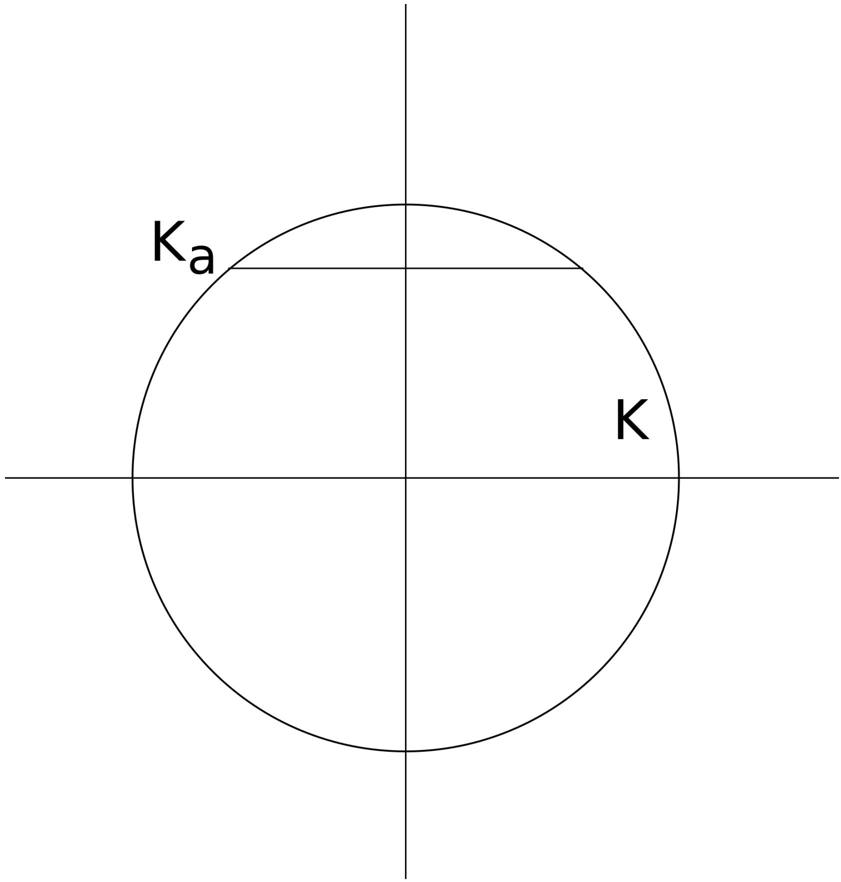
Przykład 45. *Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I, to tym bardziej I^2?*

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_\square e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$ Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2}r = \frac{\pi}{2}\lim_{p\to+\infty}\int_0^p dr\cdot e^{-r^2}\cdot r = \frac{\pi}{2}\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^p$$
$$\frac{\pi}{2}\left[\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-p^2}\right] - \left[-\frac{1}{2}e^{(0)^2}\right]\right] = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

czyli $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



20 Wykład (21.05.2019)

20.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

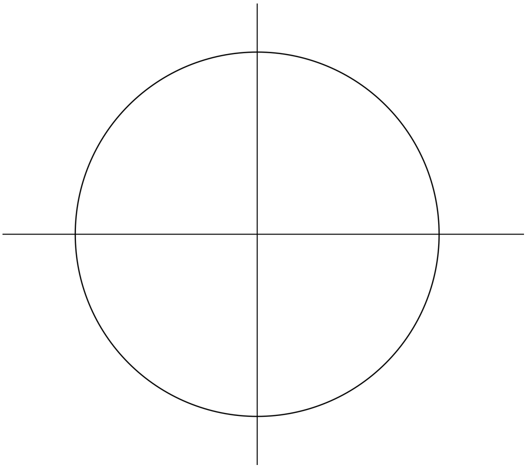
Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 46. *(sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie)*

Definicja 26. *Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$), φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$) nazywamy mapą.*
Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M. Połowa tego zbioru to niech będzie U_1, i ono się przecina z U_2. U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w $\mathbb{R}^2$. Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U?

Definicja 27. $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ *- mapy na* M.
U_1 *i* U_2 *nazywamy zgodnymi jeżeli*
a) $U_1 \cap U_2 = \phi$
albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ *jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie* $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ *)*



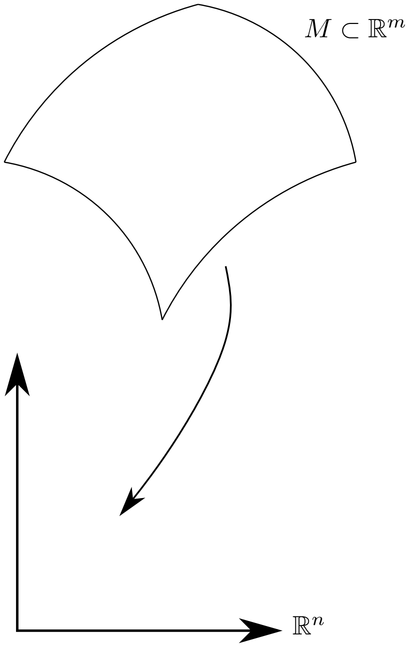
Rysunek 36: $M = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2\right\}$

Przykład 47.

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \to x \\
U_2 &= \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \to y \\
U_3 &= \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \to x \\
U_4 &= \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \to y.
\end{aligned}
$$

U_1 *i* U_3 *oraz* U_2 *i* U_4 *są zgodne. Czy zgodne są* U_1 *i* U_2*? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie* $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, *ale* $\varphi_1(x, y) \in U_1 \to x$.
Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \to \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$,
czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2((x, \sqrt{1 - x^2})) = \sqrt{1 - x^2}$.
Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *przerzuca* $]0, 1[\to]0, 1[$ *jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze* $]0, 1[$ *jest.*

Definicja 28. *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór* M *wraz z atlasem, który pokrywa cały* M *nazywamy* ***rozmaitością*** *(ang. manifold).*



Rysunek 37: Wymiar pączka może być większy! $m > n$

21 Wykład (24.05.2019)

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech M - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \to \sigma(t) \in M$ nazywamy krzywą na M. σ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$

Przykład 48. *(spirala na walcu)*

$$\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

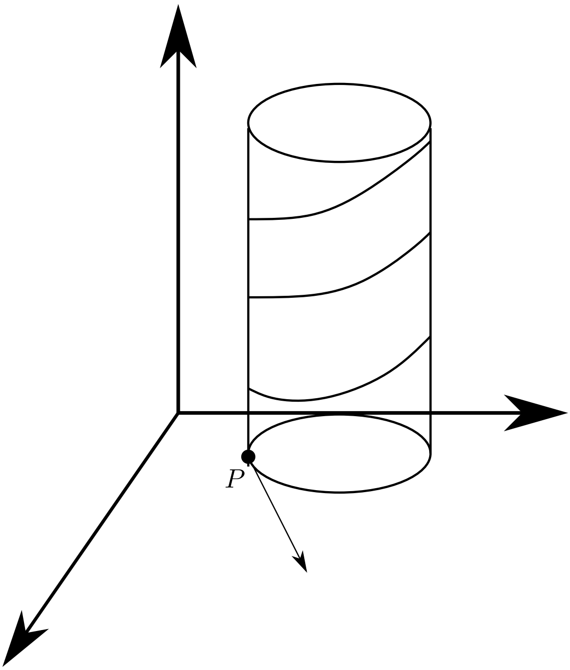
Definicja 29. *Niech $p \in M$, σ_1, σ_2 - krzywe na M takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że σ_1 i σ_2 są styczne w punkcie P, jeżeli*

$$\left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt $P \in M$. Na tym zbiorze wprowadzamy relację: $\sigma_1 \sim \sigma_2$ jeżeli σ_1 i σ_2 są styczne. Jeżeli σ krzywa przechodząca przez punkt P, to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie P nazwiemy $v = \underset{\substack{\text{klasa}\\ \text{równoważności}}}{[\sigma]}$

Przykład 49. *Weźmy krzywą* $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Przykład 50. *Niech $f(p) = C \underset{p \in M}{\forall}$. Ile wynosi $v(f)$?*

$$\begin{aligned} &v(f) = v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli $v(f) = 2v(f)$, czyli $v(f) = 0$ (pochodna stałej $= 0$)

Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.

Pytanie 28. *Jak można w praktyce zrealizować taki operator?*
Niech $v \in T_pM, v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

Definicja 30. *Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie $p \in M$ oznaczamy przez T_pM i nazywamy przestrzenią styczną.*

Chcemy wyposażyć T_pM w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań. Niech $v_1, v_2 \in T_pM$ i $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$. Wówczas

$$v_1 \diamond v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)\right]$$
$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall} \alpha \cdot v_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1)\right].$$

T_pM wraz z działaniami $(\diamond, \cdot\ )$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M, T_pM\}$$

nazywamy wiązką styczną.

Pytanie 29. *Czy w TM możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?*
Odpowiedź: NIE DA SIĘ

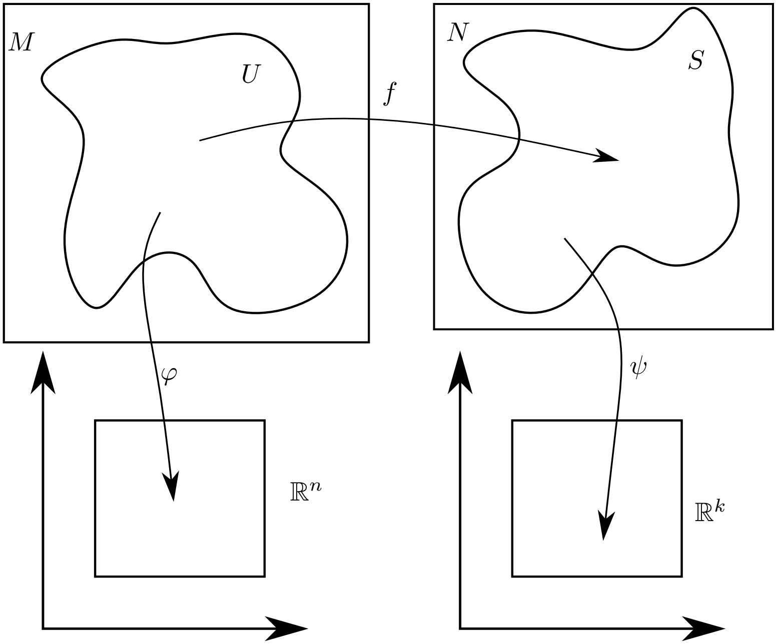
Definicja 31. *Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie P oznaczamy przez D_pM*

Chcemy nadać D_pM strukturę przestrzeni wektorowej.

$$v_1, v_2 \in D_pM, f \in \mathcal{C}^\infty(M) \implies (v_1 \diamond v_2)f \stackrel{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f)$$
$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall} (\alpha \bowtie v_1)f = \alpha \cdot v_1(f)$$
$$.$$

Pytanie 30. *Co to znaczy, że f - klasy $C^\infty(M)$?*

Jeżeli $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ - jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.
Związek między T_pM, a D_pM :
Niech $v = 5e_x + 6e_y \in T_pM$. Czy znajdziemy odwzorowanie z T_pM do D_pM, (które dokładnie jednemu v przyporządkowałoby jeden element).$\rightarrow$ izomorfizm między T_pM i D_pM.



Rysunek 38: f nie musi być bijekcją jakby co

21.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech $f : M \to \mathbb{R}$, f - klasy $\mathcal{C}^\infty(M)$
niech $v\,() : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, takie, że

$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f\cdot g) = v(f) + v(g)$$
$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}\underset{f\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(\alpha f) = \alpha v(f)$$
$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f\cdot g) = f(p)\cdot v(g) + g(p)v(f).$$

$v\,()$ spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie p.

22 Wykład (28.05.2019)

Widzimy, że ten obrazek, który nam się jawi jest w miarę rozbudowany. Ostatnio wprowadziliśmy na baloniku układ współrzędnych.

$$
\begin{aligned}
& v=[\sigma], v \in T_pM, v\left(\right) \in D_pM \\
& v(f)=\frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0} \\
& v\left(\right)=?\cdot?+?\cdot?+?\cdot?=\frac{d}{dt}\left(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma(t)\right)|_{t=0}= \\
& =\frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \varphi(\sigma(t)))|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\tilde{f}\left(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \ldots, \varphi^n(\sigma(t))\right)\right)|_{t=0}= \\
& =\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Czyli jeżeli $v \in T_pM$ i $v \in [\sigma]$, to wiemy, że

$$
\begin{aligned}
v & =\frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_1+\frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_2+\ldots+\frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0} e_n= \\
& =\xi^1 e_1+\xi^2 e_2+\ldots+\xi^n e_n= \\
& =\xi_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1}+\xi_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^2}+\ldots+\xi_n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n}=v(f).
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
v\left(\right)=\xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1}+\xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2}+\ldots+\xi_n \frac{\partial}{\partial x^n}.
$$

Przykład 51. *Więc niech* $v=2e_x+3e_y \rightarrow v\left(\right)=2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}+3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}$.

Wniosek: mając izomorfizm między T_pM i D_pM możemy zapisać bazy:

$$
T_pM=\left\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\right\rangle .
$$

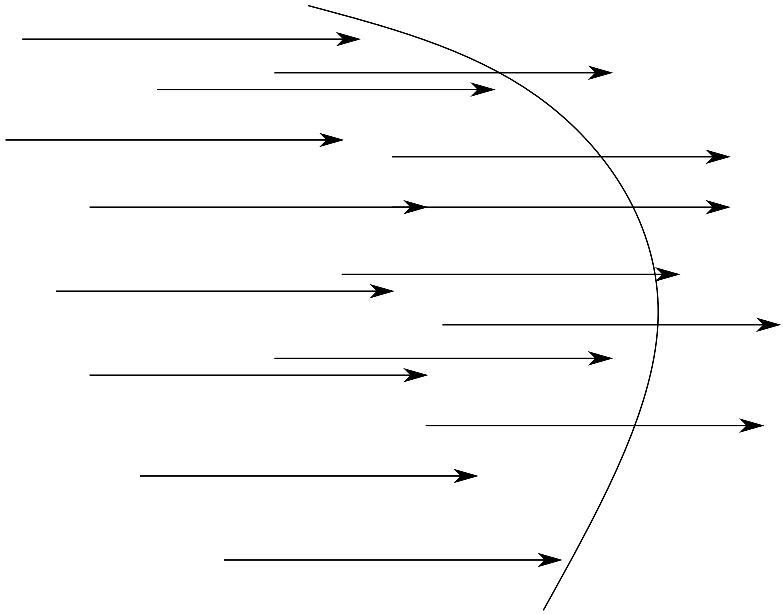
To wtedy

$$
D_pM=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle .
$$

np. $v=7e_r+8e_\varphi \rightarrow v\left(\right)=7 \frac{\partial}{\partial r}+8 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (często użyjemy bazy z D_pM jako bazy T_pM).

Definicja 32. *Wektorem kostycznym (albo jednoformą) nazywamy odwzorowanie liniowe $\omega: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Zbiór jednoform ($p \in M$) oznaczamy przez T_p^*M (lub $\Lambda^1(M)$, $\Lambda^1(\theta), \theta \in M$)*

Skoro T_p^*M jest dualna do T_pM, to ma ten sam wymiar i możemy wprowadzić bazę dualną. $T_p^*M=\left\langle dx^1, dx^2, \ldots, dx^n\right\rangle$, gdzie $\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle=\delta_j^i$



Rysunek 39: Strumień przez balonik

Przykład 52. *Niech* $\Lambda^1(M) \to \omega = 7dx + 3dy, v \in T_pM = 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$, *wówczas*

$$\begin{aligned}
\langle \omega, v\rangle &= \left\langle 7dx + 3dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = \\
&= \left\langle 7dx, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle + 3\left\langle dy, 2\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = \\
&= 7\cdot 2\left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle + 7\cdot 4\left\langle dx, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle + 3\cdot 2\left\langle dy, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle + 3\cdot 4\left\langle dy, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle \\
&= 7\cdot 2 + 3\cdot 4.
\end{aligned}$$

Przykład 53.

$$\begin{aligned}
&v = A^x\frac{\partial}{\partial x} + A^y\frac{\partial}{\partial y} + A^z\frac{\partial}{\partial z}, \omega = B_x dx + B_y dy + B_z dz = \\
&= \langle \omega, v\rangle = A^x B_x + A^y B_y + A^z B_z.
\end{aligned}$$

Definicja 33. *Zbiór wszystkich odwzorowań* $T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ *k - liniowych w każdej zmiennej i antysymetrycznych oznaczamy przez* $\Lambda^k(M)$ *i nazywamy k-formami.*

Definicja 34. *Niech* $\alpha \in T_p^*M, \beta \in T_p^*M (\alpha \in \Lambda_p^1 M, \beta \in \Lambda_p^1 M)$.
Odwzorowanie $\wedge : T_p^*M \times T_p^*M \to \Lambda^2(\theta), \theta \in M$ *nazywamy iloczynem zewnętrznym i definiujemy tak:*

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Przykład 54. *Niech* $\alpha = 7dx + 4dy, \beta = 2dx + 3dy, v = 1\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}, w = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
Wtedy

$$\langle \alpha \wedge \beta; v, w \rangle = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \beta(v) \\ \alpha(w) & \beta(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 + 4 & 2 \cdot 2 + 3 \end{vmatrix}.$$

Obserwacja: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Tzn. $\alpha \wedge \alpha = 0$. Ważny przykład:

Przykład 55.

$$\begin{aligned}
&\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz, \beta = B_x dx + B_y dy + B_z dz \\
&\alpha \wedge \beta = (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge (B_x dx + B_y dy + B_z dz) = \\
&= (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_x dx + (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_y dy + \\
&+ (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \wedge B_z dz = A_y B_x dy \wedge dx + A_z B_x dz \wedge dx + \\
&+ A_x B_y dx \wedge dy + A_z B_y dz \wedge dy + A_x B_z dx \wedge dz + A_y B_z dy \wedge dz = \\
&= (A_x B_y - A_y B_x)\, dx \wedge dy + (A_y B_z - A_z B_y)\, dy \wedge dz + (A_z B_x - A_x B_z)\, dz \wedge dx
\end{aligned}$$

.

Potrzebujemy jeszcze jednego klocka, żeby zobaczyć gdzie tu siedzi fizyka.

Definicja 35. *Odwzorowanie* $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ *nazywamy różniczką zewnętrzną (ewentualnie pochodną zewnętrzną) i definiujemy następująco:*

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, f : \theta \to \mathbb{R} \\
&(\textit{funkcje nazywamy zero-formami } f \in \Lambda^0(\theta)) \\
&\omega \in \Lambda^p(\theta), \eta \in \Lambda^L(\theta) \implies d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \\
&dd\omega = 0, \omega \in \Lambda^k(\theta).
\end{aligned}$$

Przykład 56. $f(r, \theta, \varphi)$ *- funkcja z* $\mathbb{R}^3$ *w* $\mathbb{R}^1$.

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \\
&\alpha = 7x^2 y dx \\
&d\alpha = d(7x^2 y) \wedge dx = \left(\frac{\partial}{\partial x}(7x^2 y) dx + \frac{\partial}{\partial y}(7x^2 y) dy \right) \wedge dx = 7x^2 dy \wedge dx.
\end{aligned}$$

Przykład 57. *Niech* $F = -E_x dt\wedge dx - E_x dt\wedge dy - E_z dt\wedge dz + B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy$

$$
\begin{aligned}
dF = &\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}dy - \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right)\wedge dt\wedge dx +\\
+&\left(-\frac{\partial E_y}{\partial x}dx - \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\right)\wedge dt\wedge dy +\\
+&\left(-\frac{\partial E_z}{\partial x}dx - \frac{\partial E_z}{\partial y}dy\right)\wedge dt\wedge dz +\\
+&\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}dt + \frac{\partial B_x}{\partial x}dx\right)\wedge dy\wedge dz +\\
+&\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}dt + \frac{\partial B_y}{\partial y}dy\right)\wedge dz\wedge dx +\\
+&\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}dt + \frac{\partial B_z}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy =\\
=&\underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\right)} dt\wedge dx\wedge dy +\\
+&\underbrace{\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right)} dt\wedge dy\wedge dz +\\
+&\underbrace{\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\right)}_{rot E - \frac{\partial B}{\partial t}} dt\wedge dx\wedge dz +\\
+&\underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)}_{\nabla B} dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}
$$

I to są równania Maxwella (przynajmniej pierwsza ich część) $dF = 0$

23 Wykład (31.05.2019)

Definicja 36. *Niech* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T_p^* M \in \Lambda'(M)$, *wówczas* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(M)$ *i dla* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_p^* M$,

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k ; v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_1)\ldots\alpha_k(v_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(v_k)\alpha_2(v_k)\ldots\alpha_k(v_k) \end{bmatrix}.$$

Uwagi do operatora d ($dd = 0$):
Niech $M = \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \in \Lambda^0(M)$

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\
&ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dz\right) \wedge dx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy\right) \wedge dy \\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) dz \wedge dy + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dz \wedge dx = 0.
\end{aligned}$$

Niech $\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$

$$\begin{aligned}
&d\alpha = \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) dz \wedge dy + \\
&+ \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) dz \wedge dx \\
&dd\alpha = \left(\pm\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}\right)\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
&\beta = A_x dy \wedge dz + A_y dx \wedge dz + A_z dy \wedge dz \\
&d\beta = ()\, dx \wedge dy \wedge dz \\
&dd\beta = 0.
\end{aligned}$$

Niech $M = \mathbb{R}^4$, $A = \phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$.

$$dA = \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x}\right) dx \wedge dt + \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}}_{E_y}\right) dy \wedge dt + \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}}_{E_z}\right) dz \wedge dt +$$

$$\left(\underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}_{B_z}\right) dx \wedge dy + \left(\underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}}_{B_x}\right) dy \wedge dz + \left(\underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}}_{B_y}\right) dz \wedge dx$$

$ddA = 0.$

niech $dA = F$

$$dF = 0.$$

Pytanie: niech M - rozmaitość wymiaru 3 (bo mamy bijekcję między $\theta \in M$ i $\mathbb{R}^3$). Czy istnieje $\Lambda^4(M)$?

niech $M = \mathbb{R}^3$

$\Lambda^0(M)$	$f : \mathbb{R}^3 \to M$	$\dim \Lambda^0(M) = 1$
$\Lambda^1(M)$	$\alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz$	$\Lambda^1(\eta) = \underbrace{\langle dx, dy, dz \rangle}_{3}$
$\Lambda^2(M)$	$\beta = A_z dx \wedge dy + A_y dz \wedge dx + A_z dy \wedge dz$	$\Lambda^2(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz \rangle}_{3}$
$\Lambda^3(\eta)$	$\gamma = f dx \wedge dy \wedge dz$	$\Lambda^3(M) = \underbrace{\langle dx \wedge dy \wedge dz \rangle}_{1}$

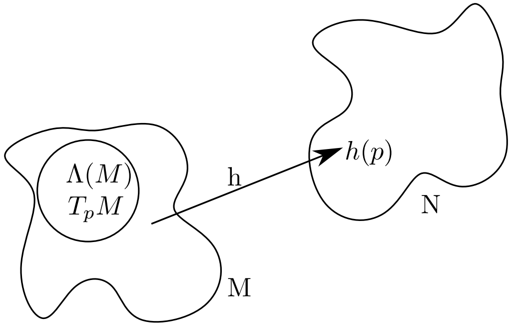
Niech $M = \mathbb{R}^4$.

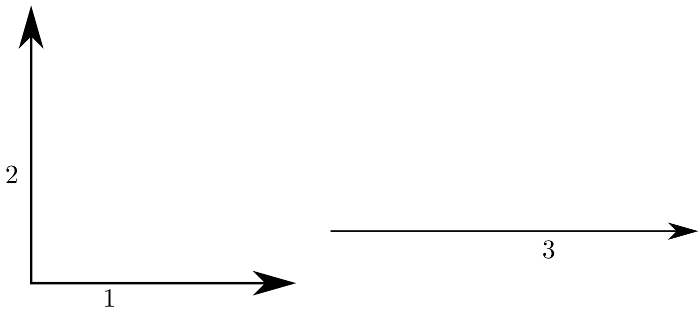
$\Lambda^0(M)$	$f(t, x, y, z) \to \mathbb{R}$	di
$\Lambda^1(M)$	$\alpha = A_t dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$	di
$\Lambda^2(M)$	$\beta = A_1 dt \wedge dx + A_2 dt \wedge dy + A_3 dt \wedge dz + B_1 dy \wedge dx + B_2 dz \wedge dx + C_1 dz \wedge dy$	di
$\Lambda^3(M)$:	$\gamma = C_1 dy \wedge dt \wedge dx + C_2 dz \wedge dt \wedge dx + D_1 dz \wedge dt \wedge dy + E_1 dx \wedge dy \wedge dz$	di
$\Lambda^4(M)$	$\delta = g dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$	di

23.1 Pchnięcia i cofnięcia

Definicja 37. *Niech* M, N *- rozmaitości* $\dim M = n, \dim N = k$ *i niech* $h : M \to N$. *(h nie musi być bijekcją !!!)*

Niech $p \in M$. *Pchnięciem punktu* p *w odwzorowaniu* h *nazywamy punkt* $h_*(p) \overset{def}{=} h(p)$





Przykład 58. *Niech* $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, h_*(p) = 3$

$M = \mathbb{R}^1$, $N = \mathbb{R}^3$, $h(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, p = \frac{\pi}{2}$.

$h_x(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$

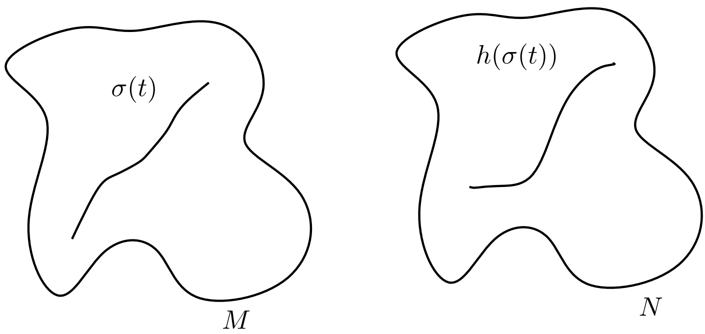
Niech $\sigma(t)$ - krzywa na M. Pchnięciem krzywej σ w odwzorowaniu h nazywamy krzywą $h_*(\sigma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} h(\sigma(t))$

Niech $f : N \to \mathbb{R}^2$. Cofnięciem funkcji f w odwzorowaniu h nazywamy funkcję

$$h^* f(p) = f(h(p)).$$

Przykład 59. $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, f : N \to \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}, h(x, y) = x + y.$

$$h^* f(x, y) = f(h(x, y)) = \begin{bmatrix} 2(x + y) \\ x + y \end{bmatrix}.$$



Definicja 38. *Pchnięciem wektora* V *w odwzorowaniu* h *nazywamy wektor*

$$h_*V = [h(\sigma)], h_*v \in T_{h(p)}N.$$

Przykład 60. *Niech* $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, h(x,y) = x + 2y, v = 2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}$. *Co to jest* h_*v*?*
$p = (1,2) = (\varphi^1(p), \varphi^1(p))$

$$\sigma(t) : \frac{d}{dt}(\varphi(\sigma(t)))|_{t=0}$$
$$\varphi(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 3t+2 \end{bmatrix}$$
$$h[\sigma(t)] = 2t + 1 + 2(3t+2)$$
$$h[\sigma(t)] = 8t + 5$$
$$[h[\sigma(t)]] = 8\frac{\partial}{\partial t} \in t_s N.$$

$\dim M = n$, $\varphi(\sigma(t)) = \left(\varphi^1(\sigma(t)), \varphi^2(\sigma(t)), \ldots, \varphi^n(\sigma(t))\right), v \in T_pM$.

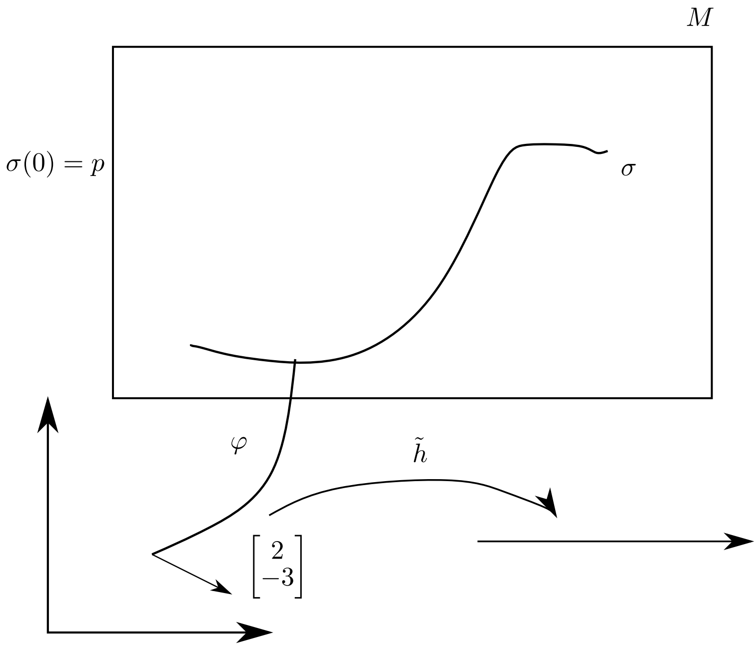
$$v = \frac{\partial \varphi^1(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial \varphi^2(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial \varphi^n(\sigma(t))}{\partial t}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^n}.$$
$$\frac{d(\varphi \circ h(\sigma(t)))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\psi \circ h \circ \varphi^{-1}\sigma\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{h} \circ \tilde{\sigma}(t)\right).$$

$$= \frac{d}{dt}\tilde{h}\left(\tilde{\sigma}_1(t), \tilde{\sigma}_2(t), \ldots, \tilde{\sigma}^n(t)\right)_{t=0} = \tilde{h}'_{\tilde{\sigma}(0)} \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}_{t=0} = \tilde{h}' \cdot v.$$

Czyli ostatecznie $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, \tilde{h}(x, y) = x + 2y \rightarrow \tilde{h}(x, y) = [1, 2].$

$$h_* v = [1, 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 6 = 8\frac{\partial}{\partial t}.$$

Niech $\alpha \in \Lambda^1(?)$ - pytanie: czy formy się pcha, czy cofa?



Rysunek 40: $\tilde{h} = \psi h \varphi^{-1}$

24 Wykład (04.06.2019)

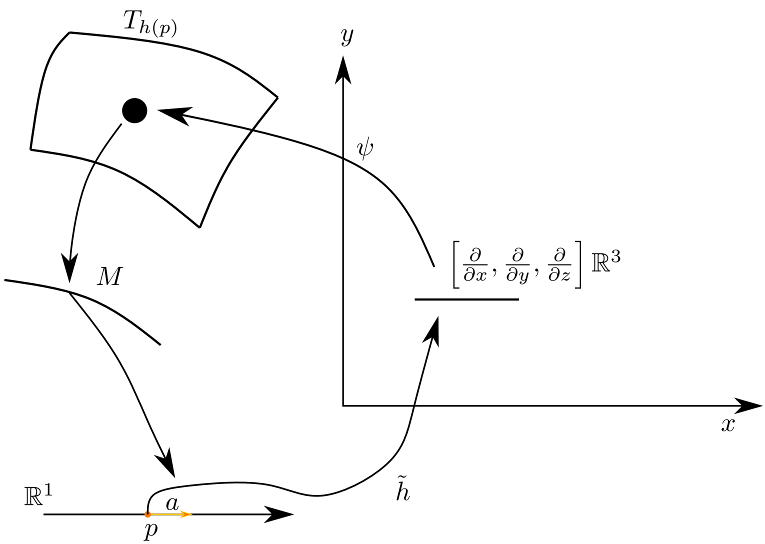
Przykład 61. *(na pchnięcie wektora)*

Niech $M = \mathbb{R}^1, N = \mathbb{R}^3, h(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$

Niech $p \in \mathbb{R}^1$, *niech* $v \in T_pM, v = a\frac{\partial}{\partial t}$. $v = [\sigma], \tilde{\sigma}(t) = at + p$, $\sigma(c) = p$, $\frac{d\tilde{\sigma}(t)}{dt}|_{t=0} = a$.

$$h_x\sigma = \begin{bmatrix} f(at+p) \\ g(at+p) \\ r(at+p) \end{bmatrix}, h_xv = [h_x\sigma], \frac{d}{dt}(\tilde{h}_x\sigma)|_{t=0}.$$

$$h_xv = \begin{bmatrix} af'(p) \\ ag'(p) \\ ar'(p) \end{bmatrix} = af'(p)\frac{\partial}{\partial x} + ag'(p)\frac{\partial}{\partial y} + ar'(p)\frac{\partial}{\partial z}.$$

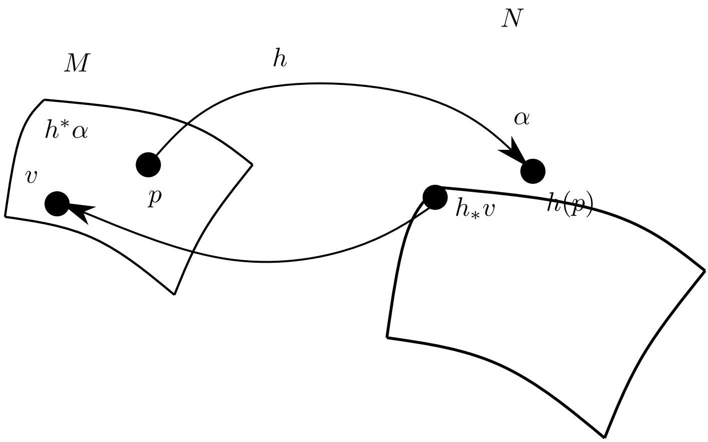


Definicja 39. *Niech M, N - rozmaitości, $h : M \to N$ i niech $p \in M, \alpha \in T^*_{h(p)}N$. Cofnięciem formy α w odwzorowaniu h nazywamy formę $h^*\alpha \in T_pM$, taką, że $\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, hv\rangle \underset{v\in T_pM}{\forall}$ i ciągła. Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$ i $v_1, \ldots, v_k \in T_p(M)$, to*

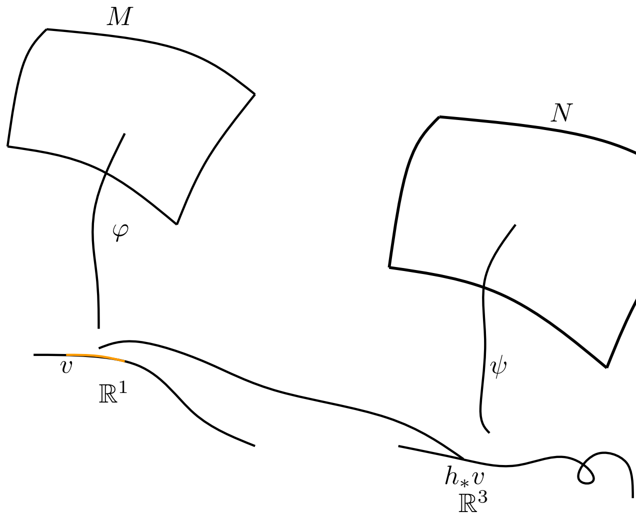
$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), v_1, \ldots, v_k \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \langle h^*\alpha_1, v_1\rangle & \langle h^*\alpha_2, v_1\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle & \ldots & \langle h^*\alpha_k, v_k\rangle \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = (h^*\alpha_1) \wedge (h^*\alpha_2) \wedge \ldots \wedge h^*(\alpha_k).$$



Rysunek 41: $\langle h^*\alpha, v\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \alpha, h_*v\rangle$



Przykład 62. *(wstępny)*
Niech $\alpha = 3(x^2+y^2)dx - 2xdy + 2z^2dz, \alpha \in \Lambda^1(N)$ *(jednoformy nad* N*,* $\dim N = 3$*, chociaż można dać więcej jak się chce).*

$h(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{bmatrix}$*. Czym jest* $h^*\alpha$*?*

$$\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, h_x v\rangle .$$

Niech $v \in T_pM$ *i* $v = a\frac{\partial}{\partial t}$*. Zatem* $h_x v = a\cos(p)\frac{\partial}{\partial x} - a\sin(p)\frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\langle \alpha, h_* v\rangle = \left\langle 3\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)dx - 2\left(\sin(t)\right)dy + 2\left(t^2\right)dz, h_x v\right\rangle =$$

$$= \left\langle 3dx - 2\sin(t)dy + 2t'dz, a\cos(t)\frac{\partial}{\partial x} - a\sin(t)\frac{\partial}{\partial y} + a \cdot 1\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle_{t=p}$$

$$= 3a\cos(t) + 2a\sin^2(t) + at^2|_{t=p} =$$

$$= \left\langle \left(3\cos(t)dt + 2a\sin^2(t) + at^2\right)|_{t=p}, a\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle =$$

czyli $h^*\alpha = \left(3\cos(t) + 2\sin^2(t) + t^2\right)dt$

.

Na skróty!

$$
\begin{aligned}
x &= \sin(t) & dx &= \cos(t)dt \\
y &= \cos(t) & dy &= -\sin(t)dt \\
z &= t & dz &= dt.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
h^*\alpha &= 3\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)\cos(t)dt - 2\sin(t)\left(-\sin t dt\right) + 2t^2 dt \\
&= \left(3\cos(t) + 2\sin^2(t) + 2t^2\right) dt.
\end{aligned}
$$

Przykład 63. *Niech* $M = \mathbb{R}^4, N = \mathbb{R}^4$.

$$
\begin{aligned}
&\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\
&c = 1 \\
h:\quad &t = \gamma(t' - vx') \\
&x = \gamma(x' - vt') \\
&y = y' \\
&z = z'.
\end{aligned}
$$

Czyli

$$
\begin{aligned}
dt &= \gamma(dt' - vdx') \\
dx &= \gamma(dx' - vdt') \\
dy &= dy' \\
dz &= dz'.
\end{aligned}
$$

Chcemy cofnąć naszą formę. Na fizyce nie używamy słowa cofnięte.

$$
\begin{aligned}
F' &= -E_x\left(\gamma\left(dt' - vdx'\right)\right)\wedge\gamma\left(dx' - vdt'\right) - E_y\gamma\left(dt' - vdx'\right)\wedge dy' = \\
&= -E_x\gamma^2\left(1-v^2\right)dt'\wedge dx' - E_y\gamma dt'\wedge dy' + E_y\gamma v dx'\wedge dy' = \\
&= -E_x\frac{1}{1-v^2}\left(1-v^2\right)dt'\wedge dx' - E_y\gamma dt'\wedge dy' + \gamma v E_x dx'\wedge dy' \\
F' &= -E'_x dt'\wedge dx' - E'_y dt'\wedge dy' + B'_z dx'\wedge dy'
\end{aligned}
$$

.

Czyli

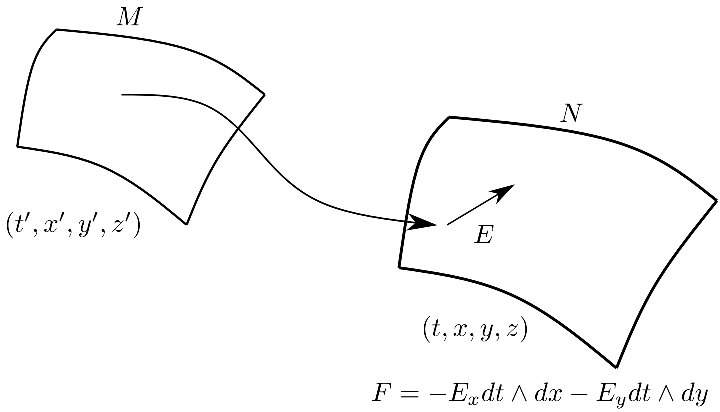
$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \gamma E_y \\
B'_z &= \gamma v E_y.
\end{aligned}
$$

Obserwacja: Niech $\alpha \in \Lambda^1(N)$, $\dim N = k$, niech M - rozmaitość, $\dim M = n$ i $h : M \to N$. Wówczas

$$h^* f \in \Lambda^0(M).$$

Oraz

$$d(h^* f) = h^*(df).$$



Dowód. Skoro $f \in \Lambda^0(N)$, to $f(x^1, x^2, \ldots, x^k)$,
$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k} x^k$.

$$\langle h^*(df), v\rangle = \langle df, h_x v\rangle, v \in T^p M.$$

Niech $V \in T_p M$.

$$\tilde{h}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{bmatrix} h_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ h_k(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial t_n}$, to $h_* v = \left(\begin{bmatrix} h' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}}$.

$$h_x v = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial t^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial t^1} a_1 + \ldots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^1} +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\partial h_k}{\partial t^1} a_1 + \ldots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n} a_n \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dalej

$$\langle df, h_* v\rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x^1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t^1}a_1 + \ldots + \frac{\partial h_1}{\partial t^n}a_n\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(\frac{\partial h_k}{\partial t^1}a_n + \ldots + \frac{\partial h_k}{\partial t^n}a_n\right) =$$

$$= \left\langle df(h_1(t_1, \ldots, t_n), h_2(t_1, \ldots, t_n), \ldots, h_k(t_1, \ldots, t_n)), a_1\frac{\partial}{\partial t^1} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial t^n}\right\rangle$$

.

$\square$

25 Wykład (07.06.2019)

W ostatnim odcinku:
M, N - rozmaitości, $\dim M = n, \dim N = k, h : M \to N$, $\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, h_x v\rangle$ i ogólnie, jeżeli

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(N),$$

to

$$\langle h^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, h_x v_1, \ldots, h_x v_n\rangle.$$

Przykład 64. *Niech $N = \mathbb{R}^2$ i $M = \mathbb{R}^1$, $\alpha = 7dx \wedge dy \in \Lambda^2(N)$,*

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \end{bmatrix} \to (x = 2t, y = 3t \implies dx = 2dt, dy = 3dt).$$

$$h^*\alpha = 7 \cdot 2dt \wedge 3dt = h^*\alpha = 0.$$

Ostatino chcieliśmy pokazać, że $d(h^*f) = h^*(df)$. To jest istotne w kontekście tej dwuformy przekształcenia transormacji Lorentza co była ostatnio.

$$d(h^*F) = 0 \implies dF = 0, h^*F \xrightarrow{h} F.$$

Wzięliśmy sobie $f : N \to \mathbb{R} : f(x_1, \ldots, x_k)$. Potem mieliśmy

$$h : M \to N : h(t_1, \ldots, t_n) = \begin{bmatrix} h^1(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ h^k(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix}$$

i chcieliśmy pokazać, że $h^*(df) = d(h^*f)$.
Wiemy, że

$$\langle h^*(df), v\rangle = \langle df, h_* v\rangle \; (v \in T_pM : v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n}).$$

Przepchnięcie wektorka

$$h_* v = \left([h'] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial h^k}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(a_1 \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial h^1}{\partial t^n}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \left(a_1 \frac{\partial h^k}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial h^k}{\partial t^n}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

$$
\begin{aligned}
\langle df, h_x v\rangle &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1}a_1 + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^2}a_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n}a_n + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^k}{\partial t^1}a_1 + \\
&+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n}a_n = a_1\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^1}\right) + \\
&+ \ldots + a_n\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n}\right) = \\
&= \left\langle ?, a_1\frac{\partial}{\partial t^1} + a_2\frac{\partial}{\partial t^2} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial t^n}\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^1}\right)dt^1 + \ldots + \right. \\
&+ \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n}\right)dt^n, a_1\frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, a_n\frac{\partial}{\partial t^n}\right\rangle = \\
&= \left\langle \underbrace{f\left(h^1(t^1,\ldots,t^n), h^2(t^1,\ldots,t^n),\ldots,h^k(t^1,\ldots,t^n)\right)}_{h^*f}, \right. \\
&\left. \frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, a_n\frac{\partial}{\partial t_n}\right\rangle = \langle d\left(h^* f\right), v\rangle
\end{aligned}
$$

co daje

$$
d\left(h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)\right) = h^*\left(d\left(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k\right)\right) \quad \square.
$$

25.1 Bazy w T_pM

Obserwacja: Niech M - rozmaitość i $\langle | \rangle$ - iloczyn skalarny. Niech $e_1, \ldots, e_n$ - baza T_pM. Wówczas, jeżeli $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ i $w = b_1e_1 + \ldots + b_ne_n$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n)$.

$$
\begin{aligned}
&\langle v|w\rangle = \langle a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, b_1e_1 + \ldots + b_ne_n\rangle = \\
&= a_1b_1\langle e_1|e_1\rangle + a_1b_2\langle e_1|e_2\rangle + \ldots + a_1b_n\langle e_1|e_n\rangle + \ldots + a_nb_n\langle e_n|e_n\rangle = \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle e_1|e_1\rangle & \langle e_1|e_2\rangle & \ldots & \langle e_1|e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & & \\ \langle e_n|e_1\rangle & \ldots & & \langle e_n|e_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Macierz $[g_{ij}]$ nazywamy tensorem metrycznym $\det[g_{ij}] \overset{\text{ozn}}{=} g$. $[g_{ij}]^{-1} \overset{\text{ozn}}{=} \left[g^{ij}\right]$ - macierz odwrotna.

W zwykłym $\mathbb{R}^4 : [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, p. Minkowskiego:

$$
g_{\mu v} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \mu, v = 0, \ldots, 3
$$

Bazy w $\mathbb{R}$

$$M = \mathbb{R}^2, \qquad N = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x, y \\ e_x, e_y \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \xrightarrow{x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi} \begin{bmatrix} r, \varphi \\ e_r, e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [?].$$

$$h^*(e_r) = \left([h'] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, h^*(e_\varphi)$$

$$h(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}, h' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$h^*(e_r) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}_{e_x, e_y}, e_r = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y$$

$$z = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y$$

$$h^*(e_\varphi) = [h'] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{bmatrix}, e_\varphi = -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \langle e_1|e_1\rangle & \langle e_1|e_2\rangle \\ \langle e_2|e_1\rangle & \langle e_2|e_2\rangle \end{bmatrix}, [g_{ij}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \langle e_x|e_x\rangle = 1, \langle e_x|e_y\rangle = 0$$

$$\langle e_r|e_r\rangle = \langle \cos\varphi e_x + \cos\varphi e_y | \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y\rangle = \cos^2\varphi \langle e_x|e_x\rangle + \sin^2\varphi \langle e_y|e_y\rangle$$

$$\langle e_r|e_\varphi\rangle = \langle \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y | -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y\rangle = 0$$

$$\|\frac{\partial}{\partial\varphi}\|^2 = \langle e_\varphi|e_\varphi\rangle = \langle -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y | -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y\rangle = r^2.$$

$\|\frac{\partial}{\partial\varphi}\| = r, [g_{ij}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$

baza $\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\rangle$ nie jest bazą ortonormalną!!!

$$e_x, e_y, e_z \to g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ - jest fajnie.}$$

$$e_r, e_\theta, e_\varphi \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & r^2 & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \|e_\theta\| = r, \|e_\varphi\| = r\sin\theta$$

Przykład 65. *Dostałem wektorek* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *w sferycznych. Ale w jakiej konkretnie bazie? W fizyce mierzone wielkości np. wektorowe podajemy zawsze we współrzędnych ortonormalnych. We współrzędnych sferycznych mamy dwie bazy: - ortogonalną:* $e_r, e_\theta, e_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$

- *ortonormalną:* $i_r, i_\theta, i_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$. *Więc jeżeli ktoś powiedział, że dostał* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *to znaczy, że ma* $2\frac{\partial}{\partial r} + 3\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + 4\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Obserwacja 13. *niech* $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ *i niech* $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ *i niech* $g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ *- tensor metryczny. Wówczas wiemy, że*

$$\langle v|w\rangle = [v]^T [g_{ij}] [w] = \underbrace{\left[a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + a_3 g_{31}, \sum_{i=1}^{3} a_i g_{i2}, \sum_{i=1}^{3} a_i g_{i3}\right]}_{\langle v|} [w] .$$

Ale w sumie to mogę wziąć coś takiego $\langle v|$.

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a^i g_{i1}\right) dx^1 + \left(\sum_{i=1}^{3} a^i g_{i2}\right) dx^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} a^i g_{i3}\right) dx^3 = .$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a^i g_{ij} dx^j = a^i g_{ij} dx^j .$$

Zapomniałem o sumach, bo

$$a^i b_i \overset{ozn}{=} a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3,$$

w odróżnieniu od

$$a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + \ldots$$

(Konwencja sumacyjna Einsteina).
Ozn. $\sum_{i=1}^{3} a^i g_{ik} \overset{ozn}{=} a^i g_{ik} = a_k$

Definicja 40. *niech* M *- rozmaitość wymiaru* n, g_{ij} *- tensor metryczny na* M, *operacją* $\sharp : T_pM \to T_p^*M$ *taką, że dla* $v = a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + a^n\frac{\partial}{\partial x^n}$,

$$v^\sharp = a^i g_{i1} dx^1 + a^i g_{i2} dx^2 + \ldots + a^i g_{in} dx^n, i = 1, \ldots, n.$$

zadaje izomorfizm między T_pM *a* T_p^*M.

Przykład 66. $v = 7\frac{\partial}{\partial r} + 8\frac{\partial}{\partial \theta} + 9\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

$$\alpha \in T_p^*M = v^\sharp = 7q_{11} dr + 8q_{22} d\theta + 9q_{33} d\varphi = 7dr + 8r^2 d\theta + 9r^2 \sin^2\theta d\varphi.$$

26 Wykład (11.06.2019)

Mając $\sharp$ możemy zdefiniować operację odwrotną:

Definicja 41.

$$\flat : T_p^*M \to T_pM, \text{ taką, że } \alpha \in T_p^*M, \alpha = v_i dx^i$$

to wtedy

$$T_pM \ni v \overset{def}{=} \alpha^\flat = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie: $v^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} v_j$*, to mamy*

$$\alpha^\flat = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Przykład 67.

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$v = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{\partial}{\partial \theta} + c\frac{\partial}{\partial \varphi}, \alpha = v^\sharp = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} v^j dx^i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{11}v^1dx^1 + g_{12}v^2dx^1 + g_{13}v^3dx^1\right) + \left(g_{21}v^1dx^2 + g_{22}v^2dx^2 + g_{23}v^3dx^2\right) +$$

$$+ \left(g_{31}v^1dx^3 + g_{32}v^2dx^3 + g_{33}v^3dx^3\right).$$

czyli mamy

$$\alpha = v^\sharp = 1 \cdot adr + r^2 bd\theta + r^2\sin^2\theta cd\varphi.$$

Dostaliśmy z laboratorium wektor: $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ai_r + bi_\theta + ci_\varphi = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + c\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$

Chcemy ten wektorek podnieść.

$$\alpha = v^\sharp = (g)\, dr + \left(r^2\frac{b}{r}\right) d\theta + \left(r^2\sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}c\right) d\varphi =$$

$$= adr + rbd\theta + r\sin\theta cd\varphi$$

.

Przykład 68. *Niech* $\alpha = adr + bd\theta + cd\varphi$*. Chcemy zrobić wektorek* v*, który jest dokładnie tyle:*

$$v = \alpha^\flat = (1\cdot a)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}b\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}c\right)\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Czyli ta nasza $\alpha^\flat = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{r^2} \\ \frac{c}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}_{\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}} = a\frac{\partial}{\partial r} + \frac{b}{r}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{c}{r\sin\theta}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$

Okazuje się, że $\alpha^\flat = \begin{bmatrix} b \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r\sin\theta} \end{bmatrix}_{i_r,i_\theta,i_\varphi}$

Definicja 42. *niech* $M = \mathbb{R}^3$,

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{\flat} (df)^\flat \in T_pM$$

nazywamy gradientem funkcji f : $\nabla f \overset{def}{=} (df)^\flat$, *gdzie* $f : M \to \mathbb{R}^1$, f *- klasy* $\mathcal{C}^k(M)$

Przykład 69. $f(r,\theta,\varphi) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$,
$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi$

$$(df)^\flat = 1\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Siła tego polega na tym, że jak dostaniemy na ulicy tensor metryczny, to przez 3 minuty w cieniu możemy obliczyć np. gradient funkcji:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \end{bmatrix}.$$

Przykład 70. *Dostaliśmy tensor metryczny i chcemy obliczyć* $\nabla f(\xi,\eta,\delta)$, $\begin{bmatrix} \heartsuit & & \\ & \triangle & \\ & & \square \end{bmatrix}$.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\heartsuit}}\frac{\partial f}{\partial\xi} \\ \frac{1}{\sqrt{\triangle}}\frac{\partial f}{\partial\eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\square}}\frac{\partial f}{\partial\delta} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{rlr} & M = \mathbb{R}^3 & \\ f \to & \Lambda^0(M) & \dim\Lambda^0(M) = 1 \downarrow d \\ T_pM \underset{\sharp}{\overset{\flat}{\longleftrightarrow}} & \Lambda^1(M) & \dim\Lambda^1(M) = 3 \downarrow d \\ & \Lambda^2(M) & \dim\Lambda^2(M) = 3 \downarrow d \\ & \Lambda^3(M) & \dim\Lambda^3(M) = 1. \end{array}$$

Definicja 43. *Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \to \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "$*$" Hodge'a i definiujemy następująco:*

$$* \left(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_L}\right) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_L j_L} \in_{j_1 j_2 \ldots j_L k_1 k_2 \ldots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \ldots \wedge$$

gdzie $\in_{i_1,\ldots,i_n} = \{sgn(i_1, \ldots, i_n) \text{ jeżeli } i_m \neq i_p, \quad 0 \text{ w.p.p}\}$

Przykład 71. $M = \mathbb{R}^3$, $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} *(dx) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{1j_1} \in_{j_1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \in_{1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \\ &= \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \left[\in_{123} dx^2 \wedge dx^3 + \in_{132} dx^3 \wedge dx^2\right] = \frac{1}{2}\left[1 \cdot dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^2\right] \\ &= dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Czyli $*(dx) = dy \wedge dz$.

$$* \,(dy) = *(dx^2) = \frac{1}{(3-1)!} g^{22} \in_{2 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot$$

$$g^{22} \left[\in_{213} dx^1 \wedge dx^3 + \in_{231} dx^3 \wedge dx^1\right] = \frac{1}{(3-1)!} 1 \left[-dx^1 \wedge dx^2 + 1 dx^3 \wedge dx^1\right] =$$

$$= dx^3 \wedge dx^1.$$

Więc $*(dy) = dz \wedge dx$.

$$* \,(dz) = \frac{1}{(3-1)!} g^{33} \in_{3 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{2} g^{33} \left[\in_{321} dx^2 \wedge dx^1 + \in_{312} dx^1 \wedge dx^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} 1 \left[-dx^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^2\right].$$

Więc $*(dz) = dx \wedge dy$

Przykład 72. $M = \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi), [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} * \,(dr) &= \overset{\sqrt{g}}{r^2 \sin\varphi} d\theta \wedge d\varphi \\ * \,(d\theta) &= r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2} d\varphi \wedge dr \\ * \,(d\varphi) &= \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \sin^2\theta} dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

.

Pytanko jest takie: Chcemy zapytać co to jest $*(dx \wedge dy)$?

$$
\begin{aligned}
*\left(dx^1 \wedge dx^2\right) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-2)!} g^{1j_1} g^{2j_2} \in_{j_1 j_2 k_1} dx^{k_1} = \\
&= \frac{1}{(3-2)!} g^{11} g^{22} \in_{123} dx^3.
\end{aligned}
$$

Więc $*(dx \wedge dy) = dz$.
A np. $*(dx \wedge dz)$:

$$
\begin{aligned}
*\left(dx \wedge dz\right) &= \frac{1}{(3-2)!} \in_{132} dx^2 = -dy \\
*\left(dr \wedge d\theta\right) &= r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r^2} d\varphi \\
*\left(dr \wedge d\varphi\right) &= -r^2 \sin\theta \frac{1}{1} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} d\theta \\
*\left(dx \wedge dy \wedge dz\right) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-3)!} g^{1j_1} g^{2j_2} g^{3j_3} \in_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} \in_{123} = 1 \\
*\left(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\right) &= r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}.
\end{aligned}
$$

Definicja 44. $M = \mathbb{R}^3$
niech $v \in T_pM$, operację

$$
rot(v) \stackrel{def}{=} \left(*\left(dv^\sharp\right)\right)^\flat
$$

nazywamy rotacją wektora v i oznaczamy rot $v \stackrel{ozn}{=} \nabla \times v$.
Operację

$$
div\ v \stackrel{def}{=} d\left(*v^\sharp\right)
$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy div $v \stackrel{ozn}{=} \nabla \cdot v$.
Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na M takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \to \Lambda^2(M)$

Pozakonkursowo: chcemy zrobić z funkcji funkcję:

$$
f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \longrightarrow \underbrace{*d*df}_{\text{operator Laplace}}.
$$

27 Wykład (11.06.2019)

Przykład 73. *Zastanówmy się jak wygląda rotacja wektora w układzie sferycznym.* $M = \mathbb{R}^3$.

$$v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{*} \Lambda^1(M) \to \overset{\flat}{T_pM} \to \Big[\Big]_i$$

$rotv = \left(*(dv^\sharp)\right)^\flat$
na początek dostajemy w smsie

$$\begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix}_{i_r, i_\theta, i_\varphi} = v = A^r \frac{\partial}{\partial r} + A^\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + A^\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

chcemy sobie zrobić jednoformę, która jest podniesionym wektorkiem:

$$\alpha = v^\sharp = g_{rr}A^r dr + g_{\theta\theta}\frac{1}{r}A^\theta d\theta + g_{\varphi\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}A^\varphi d\varphi = A^r dr + rA^\theta d\theta + r\sin\theta A^\varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \left(A^r_{,\theta} - (rA^\theta)_{,r}\right) d\theta \wedge dr + \left(A^r_{,\varphi} - (r\sin\theta A^\varphi)_{,r}\right) d\varphi \wedge dr + \\
&\quad + \left((rA^\theta)_{,\varphi} - (r\sin\theta A^\varphi)_{,\theta}\right) d\varphi \wedge d\theta \\
*(dr \wedge d\theta) &= \sin\theta d\varphi, \quad *(d\theta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2}dr, \quad *(d\varphi \wedge dr) = \frac{1}{\sin\theta}d\theta \\
*d\alpha &= \left((r\sin\theta A^\varphi)_{,\theta} - (rA^\theta)_{,\varphi}\right)\frac{1}{r^2\sin\theta}dr + \left(A^r_{,\varphi} - (r\sin\theta A^\varphi)_{,r}\right)\frac{1}{\sin\theta}d\theta + \\
&\quad + \left((rA^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}\right)\sin\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

notacja: $\Box_{,\heartsuit} = \frac{\partial \Box}{\partial \heartsuit}$. *Zostały nam jeszcze tylko dwie operacje.*

$$(*d\alpha)^\flat = \left((r\sin\theta A^\varphi)_{,\theta} - (rA^\theta)_{,\varphi}\right)\cdot 1 \cdot \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \left(A^r_{,\varphi} - (r\sin\theta A^\varphi)_{,r}\right)\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \\
+ \left((rA^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta})\sin\theta\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Czyli

$$rot\begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\left((r\sin\theta A^\varphi)_{,\theta} - (rA^\theta)_{,\varphi})\right) \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left(A^r_{,\varphi} - (r\sin\theta A^\varphi)_{,r}\right) \\ \frac{1}{r}\left((rA^\theta)_{,r} - A^r_{,\theta}\right) \end{bmatrix}.$$

Przykład 74. *To może teraz dywergencja rzutem na taśmę.*

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = v \xrightarrow{\sharp} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{\flat} \Lambda^0(M)\\
&div(v) = *\left(d(*v^\sharp)\right)\\
&\begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = v, \alpha = v^\sharp\\
&\alpha = A^r dr + rA^\theta d\theta + A^\varphi r\sin\theta d\varphi\\
&* \, dr = r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi\\
&* \, d\theta = \sin\theta d\varphi \wedge dr\\
&* \, d\varphi = \frac{1}{\sin\theta} dr \wedge d\theta\\
&* \, \alpha = \left(A^r r^2 \sin\theta\right) d\theta \wedge d\varphi + \left(r\sin\theta A^\theta\right) d\varphi \wedge dr + \left(rA^\varphi\right) dr \wedge d\theta\\
&d(*\alpha) = \left((A^r r^2 \sin\theta)_{,r} + (r\sin\theta A^\theta)_{,\theta} + (rA^\varphi)_{,\varphi}\right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

.

$$div \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \\ A^\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left((A^r r^2 \sin\theta)_{,r} + (r\sin\theta A^\theta)_{,\theta} + (rA^\varphi)_{,\varphi}\right).$$

$$\begin{aligned}
&f(r,\theta,\varphi) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{*} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \Lambda^3(M) \xrightarrow{*} \Lambda^0(M)\\
&\alpha = df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi\\
&* \, \alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial r} r^2 \sin\theta\right) d\theta \wedge d\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right) d\varphi \wedge dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{\sin\theta}\right) dr \wedge d\theta\\
&d(*\alpha) = \left(\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{,r} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}_{,\theta} + \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}_{,\varphi}\right)\right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\\
&* \, (d(*\alpha)) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{,r} + \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{,\theta} + \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{,\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Przykład 75. $M = \mathbb{R}^3, f \in \Lambda^0(M)$.

$$\begin{aligned}
&ddf = 0\\
&ddf = d\left(\left((df)^\flat\right)^\sharp\right) \implies rot(grad(f)) = 0.
\end{aligned}$$

Niech teraz $v \in \Lambda^1(M)$.

$$\begin{aligned}
&d\left(*\left(\left(*(dV^\sharp)\right)^\flat\right)^\sharp\right) = d(*(\overset{**=\mathbb{I}?}{*(d(v^\sharp)}))) = dd(v^\sharp) = 0\\
&div(rot(V)) = 0.
\end{aligned}$$

Weźmy sobie jakąś funkcję: $f : (t, x, y, z) \to \mathbb{R}$.

Zobaczmy jak $*d(*df)$ wygląda w $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

$$*\left(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_L}\right) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!}g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_L j_L} \in_{j_1 \ldots j_k k_1 \ldots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{n-L}}$$

$$*\left(dx^0\right) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!}g^{00} \in_{0 k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}, i, k = 0, \ldots, 3$$

$$*\left(dx^0\right) = -\frac{1}{3!}3! dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$*\left(dt\right) = -dx \wedge dy \wedge dz$$

$$*\left(dx^1\right) = \frac{\sqrt{-(-1)}}{(4-1)!}g^{11} \in_{1 k_1 k_2 k_3} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge dx^{k_3}$$

$$*\left(dx\right) = 3!\frac{1}{3!}dy \wedge dt \wedge dz$$

$$*\left(dy\right) = dt \wedge dx \wedge dz$$

$$*\left(dz\right) = dx \wedge dt \wedge dy$$

$$*df = -\frac{\partial f}{\partial t}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dt \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dt \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z}dx \wedge dt \wedge dy$$

$$d * df = \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Na koniec:
Mamy dwuformę pola elektromagnetycznego:

$$F = -E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy - E_2 dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dy + B_z dy \wedge dx.$$

$dF = 0$ to jest pierwsza część równań Maxwella

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ j^x \\ j^y \\ j^z \end{bmatrix}$$

$$j = -g dt + j^x dx + j^y dy + j^z dz$$

$d(*F) = *j$ a to druga.