

Ostatnio było:

$$A \subset D : \forall_{x \in A} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

Twierdzenie 1. (Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona. Wówczas f - (całkowalna na D) \iff (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Dowód. \Leftarrow

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłości jest miary L. zero.

"/img/"fig_41.jpeg

Wprowadźmy zbiór $A_n = \left\{ x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n} \right\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{ x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Obserwacja 1. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D .

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n , bo przeliczalna suma zbiorów miary L. zero też jest zbiorem miary L. zero.

Uwaga 1. Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L. zero gdy istnieje $P_i \subset D$, (P_i - kostki), że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$. Wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wyberzmy zatem taki indeks n dla zbioru A_n , że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wiemy, że A_n - domknięty i ograniczony (bo $A_n \subset D$, a D - kostka w \mathbb{R}^n), to znaczy, że A_n jest zbiorem zwartym, a $\{P_i\}$ jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$

$$\sum_{j=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$, że $\sum |P_i|$ - dowolnie mała. Wyberzmy podział Π zbioru D taki, że Π jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie A_n zbioru $\bigcup P_j$. Oznacza to, że podział Π możemy podzielić na dwa podziały

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}$$

$$\Delta$$

$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$

$$\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.$$

Δ : każda kostka z $\{P_j\}$ składa się z kostek należących do Π_1

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = |\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) + \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2)|, \text{ ale}$$

$$\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_1} \left(\sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_i} f \right) |Q_i| \quad (1)$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, a f - ograniczona na D czyli

$$\exists_M \forall_{x \in D} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

"../img/"fig_42.png

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$(??) \leq M \cdot \sum |Q_i| \leq M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) &= \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|. \end{aligned}$$

Zatem

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |D| = \frac{1}{n} \cdot \text{const.}$$

czyli możemy tak zwiększyć n , że $\forall_{\varepsilon > 0} \frac{1}{n} \cdot \text{const} < \varepsilon$ \square

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A ?

np. dla A_{2019} działa, ale co dalej. Bo A_k dla $k > n$ też spełniają warunek, że $\frac{1}{k} \cdot \text{const} < \varepsilon$, a A_j dla $j < n$ jest takie, że $A_j \subset A_n$

\implies

Wiemy, że f - całkowalne, czyli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists \Pi^S |(f, \Pi) - \int_S (f, \Pi)| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n jest zbiorem miary L. zero)

$$\begin{aligned} \Pi &= \{T_i\} \\ \frac{\varepsilon}{n} &> |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = \\ &= \sum |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f| |T_i| (*). \end{aligned}$$

z podziału T_i wybieram takie kostki P_i , że $|\sup_{x \in P_i} f - \inf_{x \in P_i} f| \geq \frac{1}{n}$.

Wówczas

$$\begin{aligned} (*) &\geq \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum |P_i| \\ \text{czyli } \forall_{\varepsilon>0} \frac{\varepsilon}{n} &> \frac{1}{n} \sum |P_i|, \text{ gdzie } P_i \text{ jest pokryciem } A_n. \end{aligned}$$

Czyli A_n jest zbiorem miary L. zero □

Przykład 1. $f(x,y) = x \sin(xy), \quad A = [0,1] \times [0,1]$
 $\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy,$
 gdzie $\varphi_1(x) = \int_0^1 x \sin(xy) dy, \varphi_2(y) = \int_0^1 x \sin(xy) dx$

"/img/"fig_43.png

Rysunek 1: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

