

Analiza II - pytania egzaminacyjne

Instrukcja obsługi:

- Na egzaminie ustnym losujemy po jednym pytaniu z każdej z trzech grup. Pełna odpowiedź na wszystkie pytania kończy się oceną bardzo dobrą, brak odpowiedzi na dane pytanie obniża ocenę o stopień. Odpowiedź pełna to taka, w której pojawiają się dowody twierdzeń, o ile pytanie tego dotyczy. Odpowiedź nie zawierająca dowodu traktowana jest jako połowa poprawnej - stąd na ocenę wyższą niż dostateczna plus należy znać dowody przedstawianych twierdzeń.
- Zrozumienie jest ważniejsze niż mechaniczne odtworzenie napisu, który pojawił się na wykładzie - umiejętność przedstawienia choćby idei (zarysu) dowodu pozwala na podniesienie oceny.
- W przypadku trudności związanych ze znalezieniem przykładów (lub dowodów), podajemy te, które pojawiły się na wykładzie. Jeżeli dowodu nie było, nie musimy go podawać.
- Punktem wyjścia do oceny końcowej jest średnia ocen z egzaminu pisemnego i ustnego. Egzaminator rezerwuje sobie prawo do podniesienia tejże o $\pm \epsilon$.

Grupa I

1. Ciągłość funkcji wielu zmiennych. Norma. Różniczkowalność, pochodna mocna, pochodna cząstkowa, pochodna kierunkowa - definicje, twierdzenia, przykłady.
- 2, 3. Warunek Lipschitza, zasada Banacha, zastosowania.
4. Pochodna funkcji złożonej, poziomice, równość pochodnych mieszanych a własności funkcji.
- 5, 6. Twierdzenie o funkcji uwikłanej.
7. Norma operatora liniowego. Własności. Twierdzenie o lokalnej odwracalności odwzorowań.
8. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych - dowód, przykłady.
9. Ekstrema funkcji wielu zmiennych, warunki konieczne i dostateczne, przykłady.
10. Ekstrema funkcji uwikłanej, warunki konieczne i dostateczne, przykłady.
- 11, 12. Ekstrema związane, metoda mnożników Lagrange'a, przykłady.

Grupa II

1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności zagadnienia Cauchy dla równań różniczkowych I rzędu.
2. Metoda kolejnych przybliżeń a równania różniczkowe I rzędu. Odwzorowania zwężające.
3. Rezolwenta a równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu (jednorodne i niejednorodne). Własności i zastosowania.
4. Rezolwenta a równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach (jednorodne i niejednorodne). Postać rezolwenty i rozwiązań.
5. Równania różniczkowe wyższego rzędu o stałych współczynnikach. Postać rezolwenty i rozwiązań.
6. Wyznacznik Wrońskiego. Wzory Liouville'a. Baza w przestrzeni rozwiązań dla równań liniowych pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach.

Grupa III

- 1, 2. Zbiory miary Lebesgue'a zero. Zwartość - definicja pokryciowa. Całka Riemanna funkcji wielu zmiennych. Twierdzenie o całkowalności dla funkcji wielu zmiennych.
3. Twierdzenie Fubiniego. Przykłady i kontrprzykłady.
4. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce Riemanna dla funkcji wielu zmiennych.
5. Rozmaitość różniczkowa. Definicje, przykłady. Krzywe na rozmaitości. Wektory styczne. Przestrzeń styczna jako przestrzeń wektorowa. Przestrzeń $T_p M$ a $D_p M$. Wiązka styczna, pole wektorowe. Forma różniczkowa, definicje, własności, przykłady. Związek między $T_p M$ a $T_p^* M$. Przestrzeń $\Lambda_p^n(M)$. Pochodna zewnętrzna. Iloczyn zewnętrzny. Operacje cofnięcia formy i funkcji, pchnięcia wektora i punktu. Definicje własności, przykłady.
6. Pochodna zewnętrzna. Iloczyn zewnętrzny. Równania Maxwella. Gwiazdka Hodge'a. Gradient, rotacja, dywergencja i laplasjan we współrzędnych krzywoliniowych (\mathbb{R}^3). Przykłady.