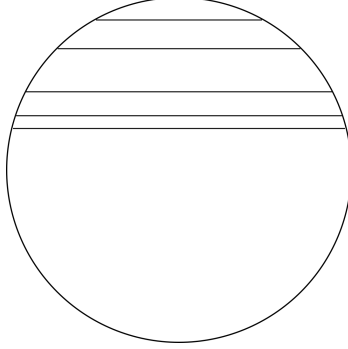


Ostatnio skończyliśmy na kroku $n - 1 \rightarrow n$ i wiemy, że dla $n - 1$ wymiarów możemy napisać $\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt$



Rysunek 1: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

Mając zbiór Θ , zdefiniujemy zbiór Θ_a , który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

(Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$).

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt^2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n.$$

Wówczas

$$\int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ = [a = t_i] = \\ = \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n \quad \square.$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

Przykład 1 Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I , to tym bardziej I^2 ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$ Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p \\ \frac{\pi}{2} \left[\lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{(0)^2} \right] \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{czyli } I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 2 (sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie) TODO: obrazki

Definicja 1 Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞), φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞) nazywamy mapą.

Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M .

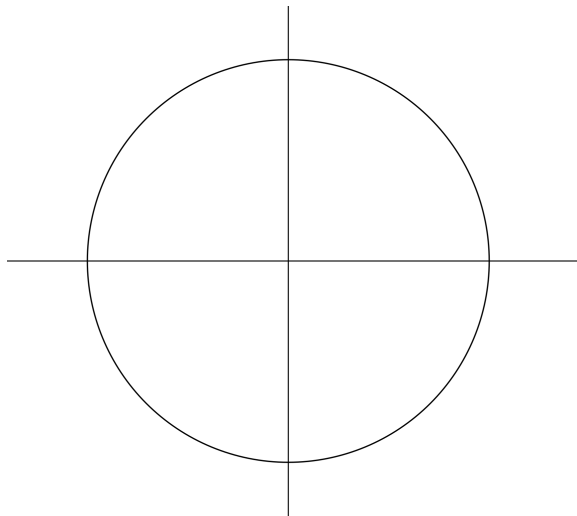
Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M . Połowa tego zbioru to niech będzie U_1 , i ono się przecina z U_2 . U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w \mathbb{R}^2 . Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U ?

Definicja 2 $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ - mapy na M .

U_1 i U_2 nazywamy zgodnymi jeżeli

a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ jest bijekcją (klasę powiedzmy sobie $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$)



Rysunek 2: $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2\}$

Przykład 3

$$U_1 = \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \rightarrow x$$

$$U_2 = \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \rightarrow y$$

$$U_3 = \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \rightarrow x$$

$$U_4 = \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \rightarrow y.$$

U_1 i U_3 oraz U_2 i U_4 są zgodne. Czy zgodne są U_1 i U_2 ? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, ale $\varphi_1(x, y) \in U_1 \rightarrow x$.

Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$,

czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.

Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ przerzuca $]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze $]0, 1[$ jest.

Definicja 3 Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór M wraz z atlasem, który pokrywa całą M nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).