

Rysunek 1: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

**Definicja 1** Niech  $L : V \rightarrow W, L$  - liniowe,  $(V, \|\cdot\|_v), (W, \|\cdot\|_w)$  - unormowane. Mówimy, że  $L$  jest ograniczone, jeżeli

$$\exists_{A>0}, \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A\|x\|_v$$

### Przykład 1

dla  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists_{?A}, \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

$$Ale : \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

**Twierdzenie 1** Twierdzenie ( $L$  - ograniczone)  $\iff$  ( $L$  - ciągle)

**Dowód 1**  $\Leftarrow$

Wiemy, że  $\forall_{\varepsilon>0}, \exists_{\delta}, \forall_{x, x' \in V}, \|x - x'\|_v < \delta \implies \|L(x) - L(x')\|_w < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że:

$$\exists_{A>0}, \forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\| \leq A\|x - x'\|$$

zatem wiemy, że para  $(\varepsilon, \delta)$  spełniająca warunek  $(*)$  istnieje.

$$\text{Ale } \|L(x - x')\| = \underbrace{\left\| L\left(\frac{x - x'}{\|x - x'\|}\right) \frac{\delta}{2} \right\|}_{\text{własność liniowości i normy}} \frac{\|x - x'\|2}{\delta} \leq \varepsilon \frac{\|x - x'\|2}{\delta}$$

Co wiemy o  $\left\| \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \frac{\delta}{2} \right\|_v < \delta$ ?

$$\forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\|_w \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x - x'\|_v$$

Szukane  $A = \frac{2\varepsilon}{\delta}$  istnieje!  $\square$

$\Rightarrow$

$$\text{Wiemy, że } \exists_A \forall_{x, x' \in V} \|L(x - x')\| \leq A \|x - x'\| \quad (1)$$

Chcemy pokazać, że jeżeli  $x_n \rightarrow x_0$ , to  $L(x_n) \rightarrow L(x_0)$ , ale  $0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w = \|L(x_n - x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\|_v$  (bo (??))

$$0 \leq \|L(x_n) - L(x_0)\|_w \leq A \|x_n - x_0\|_v \text{ (wszystko dąży do 0)} \quad \square$$

**Definicja 2** Wielkość  $\inf_A \{ \forall_{x \in V} \|L(x)\|_w \leq A \|x\|_v \}$  nazywamy normą odwzorowania  $L$  i oznaczamy  $A \stackrel{\text{ozn}}{=} \|L\|$ .

**Definicja 3** Niech  $U \subset \mathbb{R}^m$  - jest zbiorem wypukłym, jeżeli  $\forall_{a, b \in U} [a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{a(1-t) + bt, t \in [0, 1]\} \subset U$

**Stwierdzenie 1** Niech  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, U$  - otwarte, wypukły  $\exists_M \forall_{x \in U} \|f'(x)\| \leq M$ , to  $\forall_{a, b \in U} \|f(b) - f(a)\|_n \leq M \|b - a\|_m$  (jakieśkolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe \*wink\* \*wink\*)

## Dowód 2

niech  $\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0, 1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$

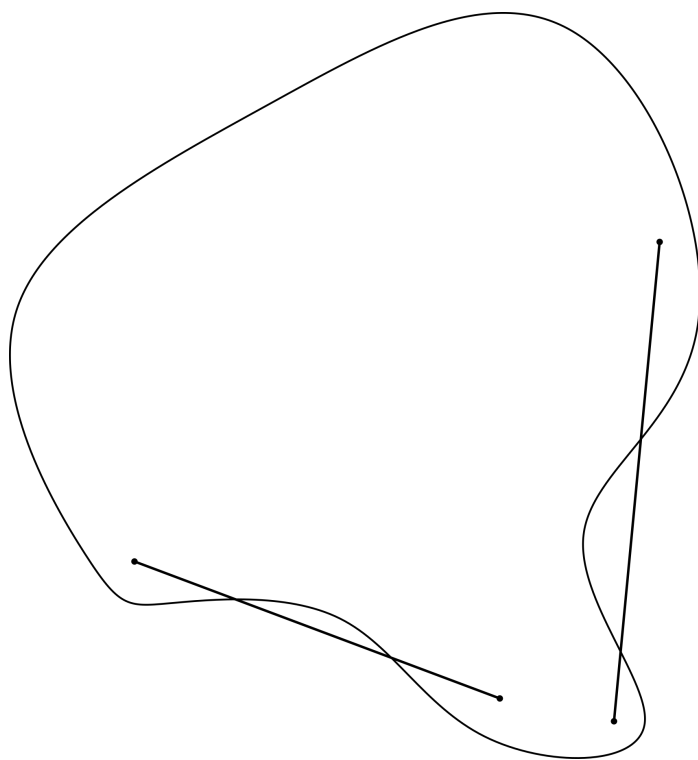
$$\begin{aligned} \text{Czyli } g(t) &= \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \text{ zatem } \|g(1) - g(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \quad \text{Tw. Lagrange!} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1)(1-0) \\ g'_2(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g'_n(c_n)(1-0) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g'_1(c_1) \\ g'_2(c_2) \\ \vdots \\ g'_n(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\| \end{aligned}$$

$$\text{Ale } g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rightarrow \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leq \|f'(\gamma(t))\| \|b-a\| \stackrel{\text{z zał. stw.}}{\leq} M$$

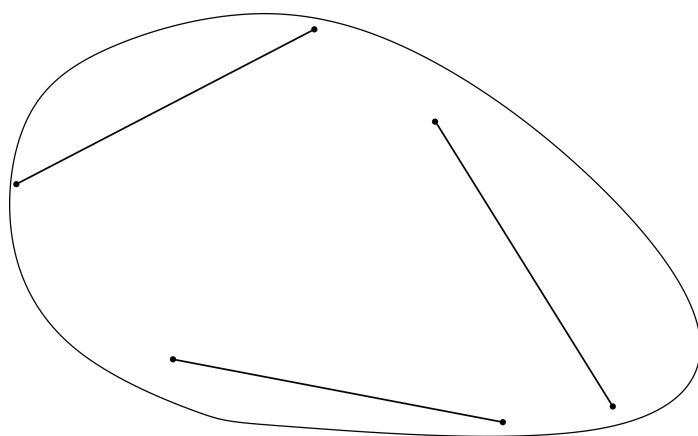
$$\text{Czyli } \forall_{t \in [0, 1]} \|g'(t)\| \leq M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\| \quad \square$$

Niech  $X$  - unormowana:  $P : X \rightarrow X, P$  - ciągła na  $X$ .

Interesuje nas zbieżność ciągów typu  $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$

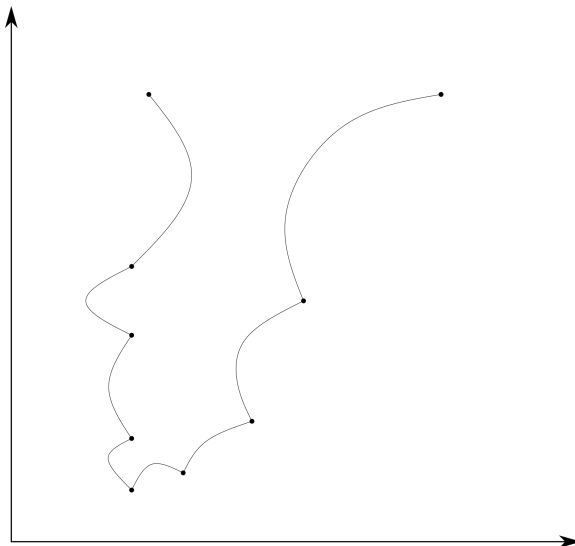


Rysunek 2: zbiór wklęsły



Rysunek 3: zbiór wypukły

**Definicja 4**  $\tilde{x} \in X$  nazywamy punktem stałym, jeżeli  $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$



**Twierdzenie 2** *Jeżeli ciąg  $\{x_0, P(x_0), \dots\}$  - zbieżny i  $P$  - ciągle, to jest on zbieżny do punktu stałego.*

### Dowód 3

Niech  $x_n = P^{(n)}(x_0)$ . Wiemy, że  $x_n$  - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez  $\tilde{x}$ . Mamy:

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \exists_{N_1} \forall_{n > N_1} d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \quad (2)$$

$$\forall_{\varepsilon_2 > 0} \exists_{N_2} \forall_{n > N_2} d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \quad (3)$$

$P$  - ciągłe, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \delta \forall x, x' : d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (??)$$

Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \quad (4)$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leq d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square \quad (5)$$

Ale z (??) wynika, że  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta} d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon$  (6)

Zatem znając  $\varepsilon$  z (??) przyjmujemy  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , oprócz tego znajdujemy  $\delta$  przyjmując  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , a potem położymy  $\varepsilon_2 = \delta$  z (??) i dzięki temu mamy (??)

Niech  $X$  - przestrzeń metryczna, odwzorowanie  $P : X \rightarrow X$  nazywamy zwięzającym, jeżeli:

$$\exists_{q \in [0,1[} . \forall_{x,y \in X} d(P(x), P(y)) \leq qd(x,y) \quad (7)$$

**Twierdzenie 3** (*Zasada Banacha o lustrach*)

Jeżeli  $P : X \rightarrow X$ ,  $P$  - zwężające, to

$$1. \quad \forall_{x_0 \in X} \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\} - \text{Zbieżny do punktu stałego } \tilde{x} \quad (8)$$

$$2. \quad \text{Istnieje tylko jedno } \tilde{x} \quad (9)$$

$$3. \quad \forall_m \quad d(x_m, \tilde{x}) < \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \quad (10)$$

**Przykład 2** (*uwaga*)

( $P$  - nie musi być ciągle) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*  
 - lustra w łazience koło sali 1.01  $\rightarrow$  można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu  
 - telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz  
 - mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

**Dowód 4** *ad. 2*

Założmy, że  $\exists_{\tilde{x}_1, \tilde{x}} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$

Wtedy  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leq q \leq 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{sprzeczność!} \quad \square$$

**Obserwacja 1**

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq q^n d(x_1, x_0)$$

$$\text{Co, jeżeli zamiast } n+1 \text{ weźmiemy } n+m? \quad d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m+1}, x_n) \leq \\ d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leq \dots \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ (q^{n+m-1} + \dots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leq q^n \left( \frac{1-q^{n+m}}{1-q} \right) d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad 0 \leq q < 1$$

$$\text{Czyli } d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

Skoro  $X$  - zupełna, to jeżeli  $x_n$  - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w  $X$ . Czyli czy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Założmy, że  $m > n$  i  $m = n + k$ . Wtedy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n > N \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla  $N$  takiego, że  $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ . Stąd wiadomo, że  $x_n$  - Cauchy, czyli jest zbieżny.  $x_n \rightarrow \tilde{x}$ , zatem jeżeli  $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow d(\tilde{x}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$   $\square$