

0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 1. (sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie)

Definicja 1. Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞), φ^{-1} - klasy \mathcal{C}^1 , (czasami \mathcal{C}^∞) nazywamy mapą.
Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M .

Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M . Połowa tego zbioru to niech będzie U_1 , i ono się przecina z U_2 . U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w \mathbb{R}^2 . Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U ?

Definicja 2. $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ - mapy na M .

U_1 i U_2 nazywamy zgodnymi jeżeli

a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$)

../img/"fig_49.png

Rysunek 1: $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Przykład 2.

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(x, y) \in M, y > 0\}, & \varphi_1 : (x, y) \in U_1 &\rightarrow x \\U_2 &= \{(x, y) \in M, x > 0\}, & \varphi_2 : (x, y) \in U_2 &\rightarrow y \\U_3 &= \{(x, y) \in M, y < 0\}, & \varphi_3 : (x, y) \in U_3 &\rightarrow x \\U_4 &= \{(x, y) \in M, x < 0\}, & \varphi_4 : (x, y) \in U_4 &\rightarrow y.\end{aligned}$$

U_1 i U_3 oraz U_2 i U_4 są zgodne. Czy zgodne są U_1 i U_2 ? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, ale $\varphi_1(x, y) \in U_1 \rightarrow x$.

Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$,

czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$.

Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ przerzuca $]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze $]0, 1[$ jest.

Definicja 3. Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór M wraz z atlasem, który pokrywa cały M nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).