Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

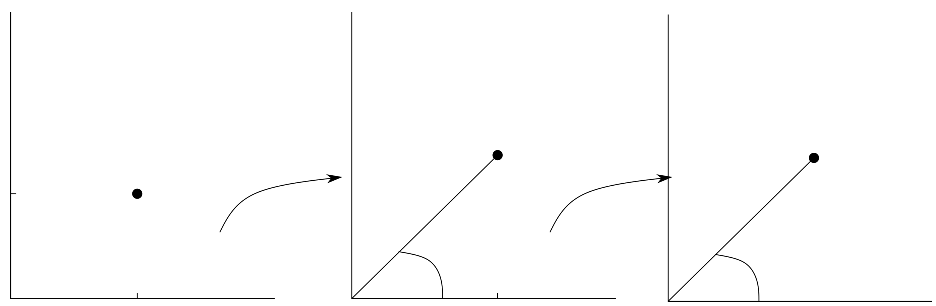
$$\int_2^4 2xe^{x^2}dx = | \, x^2 = t, 2xdx = dt \, | = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x,y)dxdy = \int dx \int f(x,y)dy = | \, r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = arctg(\frac{y}{x}) \, | = \int dr \int d\varphi f(r,\varphi)??.$$



Rysunek 1: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie $(x,y) \to (x,\varphi) \to (r,\varphi)$

$$\begin{aligned}
&\int dx \int dy f(x,y) = \|y = x \operatorname{tg}\varphi, dy = \frac{x}{\cos^2\varphi}d\varphi\| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2\varphi}\varphi f(x, y(x,\varphi)) = \\
&= \|x = r\cos\varphi, dx = dr\cos\varphi\| = \int d\varphi \int \frac{dr\cos\varphi r\cos\varphi}{\cos^2\varphi} f(x(r,\varphi), y(x(r,\varphi))) = \\
&= \int d\varphi \int dr f(r,\varphi)r, \text{ czyli } "??" = r.
\end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę. $(y \to r)$, ($x \to \varphi$)

$$\begin{aligned}
&\int\int f(x,y)dxdy = \|y = \sqrt{r^2-x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2-x^2}}\| = \\
&= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y(x,r)) = \|x = r\cos\varphi, dx = -r\sin\varphi d\varphi\| = \\
&= -\int dr \int \frac{r\sin\varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2-x^2}} f(x(r,\varphi), y(x(r,\varphi), r)) = \\
&= -\int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin\varphi f(r,\varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi}} = -\int dr \int d\varphi f(r,\varphi)r.
\end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba (r). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej φ, bo $x = r\cos\varphi$ a cos jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MK$^{\text{TM}}$)

Niech $\psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$.

$$\psi' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$
$$\|\psi'\| = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r.$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $\varphi : A \to A$, $A \subset \mathbb{R}^n$, φ - klasy $\mathcal{C}^1, \varphi^{-1}$ - klasy $\mathcal{C}^1$, to możemy przedstawić φ jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia $n-1$ zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogacające nazwy).

Dowód. (coś w rodzaju dowodu)
φ możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Pytanie 1. *Czy istnieje odwzorowanie $\Theta^{-1} : A \to A$ takie, że*

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

($t_{i\neq j}$) mogą zostać zamiast zamieniać je na x_i. Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = \left(\varphi \circ \Theta^{-1}\right) \circ \Theta.$$

Wiemy, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$ i φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$ i $\varphi : A \to A$. Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności! $det\varphi' \neq 0$, czyli w macierzy φ' istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np. $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$. Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i $\det \eta' \neq 0$, więc istnieje η^{-1}.
Czyli $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$ $\square$ $\square$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x,y) = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r,\varphi) \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *(O zamianie zmiennych)*
Niech Θ, Ω - zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ i $\xi : \Omega \to \Theta$, $f : \Theta \to \mathbb{R}$, f - ograniczona i całkowalna. ξ - klasy $\mathcal{C}^1$ na Ω, ξ^{-1} klasy $\mathcal{C}^1$ na Θ. Wtedy

$$\int_\Theta f(x)dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'(t)|dt. \tag{2}$$

$x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \ldots, t^n) \in \Omega$

Dowód. (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla $n = 1$ - zrobione w I semetrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcem pokazać, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A \subset \mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t))|det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartośc bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic: $\left(\int_a^b f\right)$ oznacza, że zakładamy, że $a \leqslant b$. Dowód przeprowadzamy dla $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że ξ nie zamienia jednej zmiennej.

Obserwacja 1. *Niech $K = \left\{(x,y), x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, niech $K_a = \left\{(x,a), x^2 + a^2 \leqslant 1\right\}$.*
Wówczas $K = \bigcup_{a \in [-1,1]} K_a$, zatem $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$

Ostatnio skończyliśmy na kroku $n-1 \to n$ i wiemy, że dla $n-1$ wymiarów możemy napisać

$$\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|\det \xi'|dt.$$

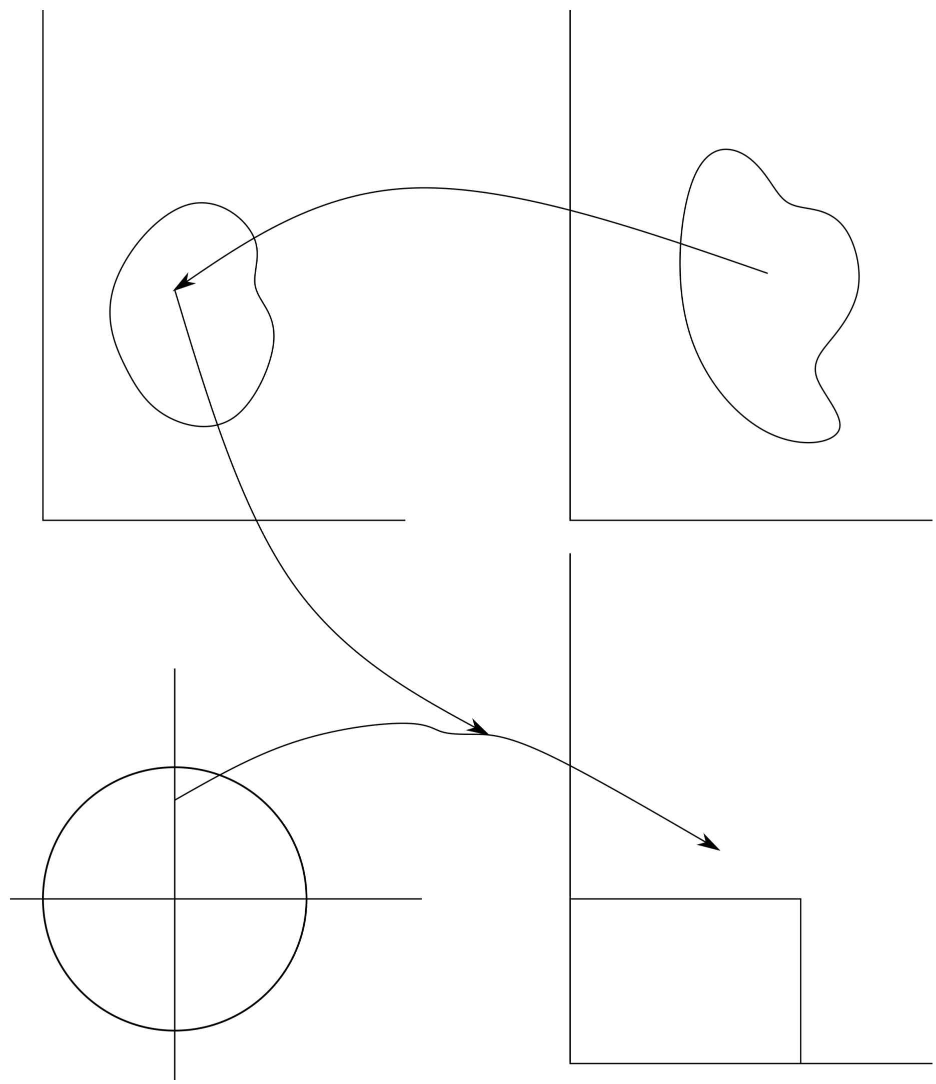
$$\int_\Theta f dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'|dt.$$

Mając zbiór Θ, zdefiniujmy zbiór Θ_a, który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a.

$$\Theta_a = \left\{x \in \mathbb{Q}, x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n\right)\right\}.$$

$$K = \left\{(x,y), x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

$$K_a = \{(x,y) \in K, (x,y) = (x,a)\}, \left\{(x,a), x^2 + a^2 = 1\right\}.$$



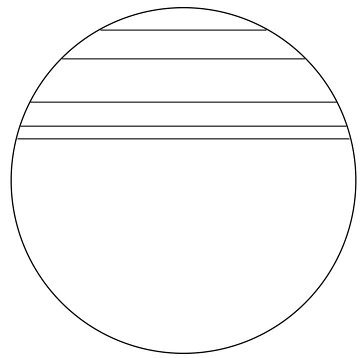
Rysunek 2: $\Omega \to \Theta - f - \mathbb{R}$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \to \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$



Rysunek 3: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$.
Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \to \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n =$$
$$\int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi_a'| dt^1 dt_2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n.$$

Wówczas

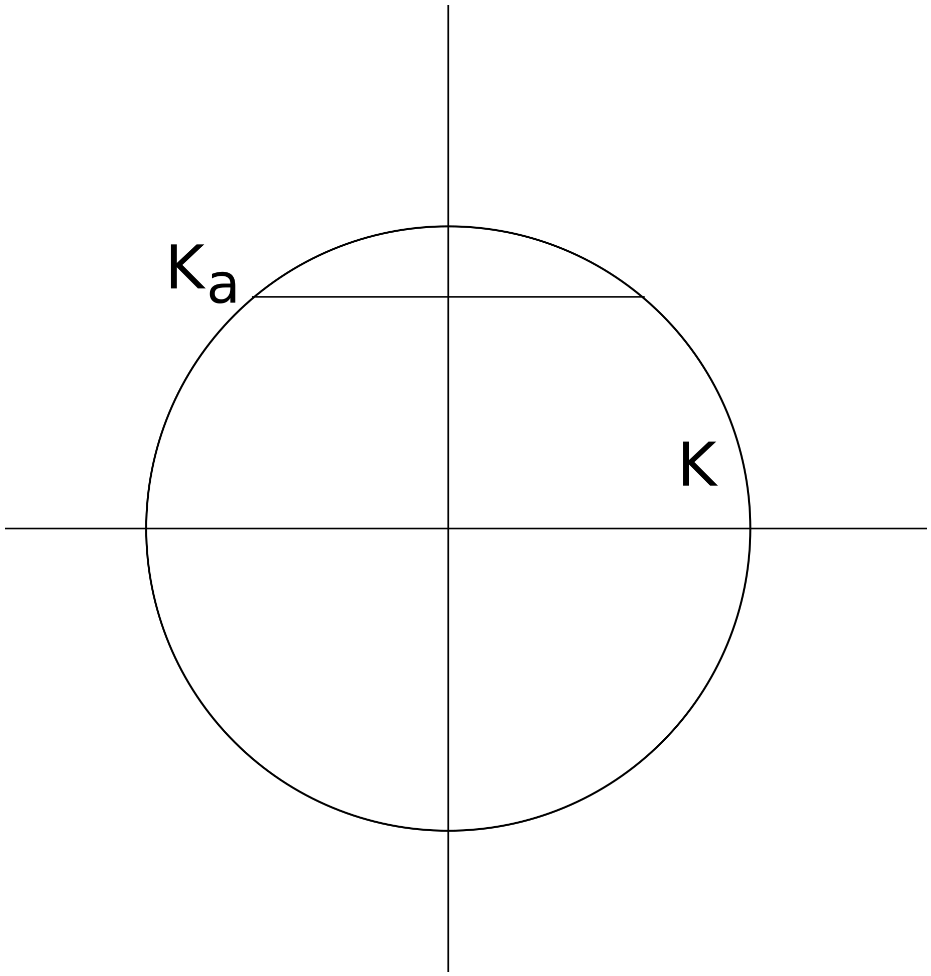
$$\int_\Theta f(x^1, \dots, x^n) dx^n = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi_a'| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n$$
$$= \big[a = t_i\big] =$$
$$= \int_\Omega f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n.$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \dots & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

□

Przykład 1. *Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I, to tym bardziej I^2?*

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_\square e^{-(x^2+y^2)}.$$



Zamieńmy sobie zmienne: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$ *Mamy*

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p\to+\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p$$
$$\frac{\pi}{2} \left[\lim_{p\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{(0)^2} \right] \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

czyli $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$