

Przykład 1

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t=0) \\ p(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{(t-0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda^2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + a\lambda + b.$$

$$f(-1) = -a + b, f(1) = a + b.$$

$$b = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{e^{-t} + e^t}{2}, a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)}_{R(t, t_0)} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 1 Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia $R(t, t_0)$?

Obserwacja 1 Załóżmy, że macierz $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych.

$$\begin{array}{ll} \lambda_1, & \lambda_2, \lambda_3, \dots \\ v_1, & v_2, v_3, \dots \end{array}$$

Obserwacja 2 Jeśli $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{I})$, to znaczy, że

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^2 v &= \lambda^2 v \\ A^n v &= \lambda^n v \\ e^A v &= e^{\lambda t} v. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem przedstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\begin{aligned} \overline{x_0} &= x'_0 + x_0^2 + \dots + x_0^n \\ e^{A(t-t_0)} \overline{x_0} &= \sum_{i=1}^n e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} x_0^i \end{aligned}$$

Obserwacja 3 najogólniejsza postać λ_j (pierwiastki równania $w(\lambda) = 0$) to

$$\lambda_j = a_j + ib_j.$$

Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy n różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt), \quad \sin(bt), \quad e^{at}, \quad \cosh(at), \quad \sinh(at), \quad e^{at} \sin(bt), \quad e^{at} \cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\
\dot{x} &= p \\
\dot{p} = \ddot{x} &= -a\dot{x} - \omega^2 x \\
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Założmy, że macierz $A \in M_n^n$ ma k różnych wartości własnych i A nie zależy od czasu

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\rightarrow n_1 \\
\lambda_2 &\rightarrow n_2 \\
&\vdots \\
\lambda_k &\rightarrow n_k - V_k = \ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}.
\end{aligned}$$

(gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \dots + x_0^k.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^k e^{A(t-t_0)} x_0^i = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} x_0^i = \\
&= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A - \lambda_i\mathbb{I})(t-t_0)} x_0^i = \\
&= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A - \lambda_i\mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right) \\
&\text{ale } x_0^i \in \ker(A - \lambda_i\mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_i = \\
&= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i\mathbb{I})^j \right) x_0^i.
\end{aligned}$$

Przykład 2 Rozwiązać równanie:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_2 + x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= 2x_3 \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$\ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$-a + b + 2c = 0$$

$$-b + c = 0$$

$$c = b$$

$$-a - b + 2b = 0$$

$$a = 3b$$

$$v \in V_{\lambda_2} \iff v = \begin{bmatrix} 3b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = 0, v \in V_{\lambda_1} \iff v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0^1 \in V_{\lambda_1} + x_0^2 \in V_{\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i =$$

$$= e^{\lambda_1(t)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{2-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_1)^j \right) x_0^1 + e^{\lambda_2 t \mathbb{I}} (\mathbb{I}) x_0^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t^1}{1!} \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t\mathbb{I}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^t(a + bt) + e^{2t} + C.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

0.1 Baza rozwiązań

Obserwacja 4 Jeżeli $x(t) = R(t, t_0)x_0$ i $R(t, t_0) \in M_n^n$, to znaczy, że

$$x(t) = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \begin{bmatrix} | \end{bmatrix} + x_0^2 \begin{bmatrix} | \end{bmatrix} + \dots + x_0^n \begin{bmatrix} | \end{bmatrix}.$$

Pytanie 2 Czy $\det(R(t, t_0)) \neq 0$?

Jeżeli tak, to kolumny $R(t, t_0)$ możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i $\det R(t, t_0) \neq 0 \quad \forall_{t \in [a, b]}$.

W bazie wektorów własnych macierz e^{At} wygląda tak (zakładamy n wartości własnych):

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = e^{t \operatorname{Tr} A} \neq 0.$$