

końcówka dowodu:

Dla  $(x', y') \in \mathcal{V}$ ,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że  $a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $b : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  istnieją i są różniczkowalne, bo  $F^{-1}$  istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach  $a$  i  $b$ ?

Wiemy że

$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y')) = F(\underbrace{a(x', y')}_n, \underbrace{b(x', y')}_m).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli  $a(x', y')$  jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$

Czyli jeżeli  $y = b(x, 0)$ , to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

Czyli dla  $y = (x, 0)$  otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy  $b(x, 0) \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$ , to znaczy, że znaleźliśmy funkcję  $\varphi(x)$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0 \quad \square.$$

**Definicja 1** *Ekstrema związane*

przykład:

$$f(x, y) = x + y, \quad G(x, y) = (x - 1)^1 + (y - 1)^2 - 1, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\}.$$

Szukamy minimum lub maksimum  $f$  na  $M$

Rozważmy linię o stałej wartości  $x + y$

**Definicja 2** Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  i  $M \subset \mathbb{R}^n$  - zbiór.

Mówimy, że  $f$  ma minimum/maksimum związane na zbiorze  $M$ , w punkcie  $x_0 \in M$ , jeżeli

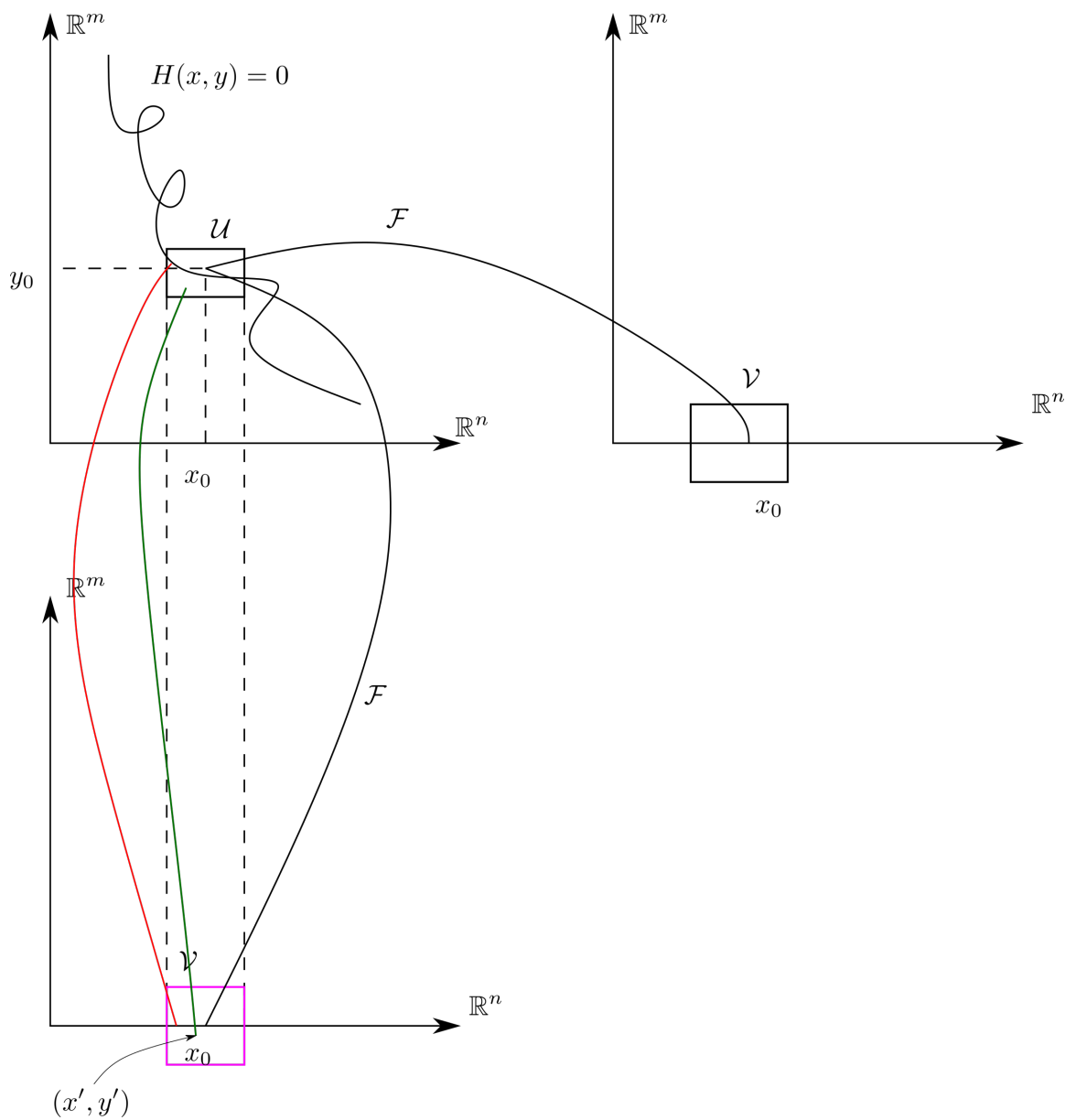
$$\exists_r \quad \forall_{\substack{h \\ \|h\| < r \\ (x_0+h) \in M}} \quad f(x_0 + h) \leq f(x_0).$$

Ekstrema związane podejście I

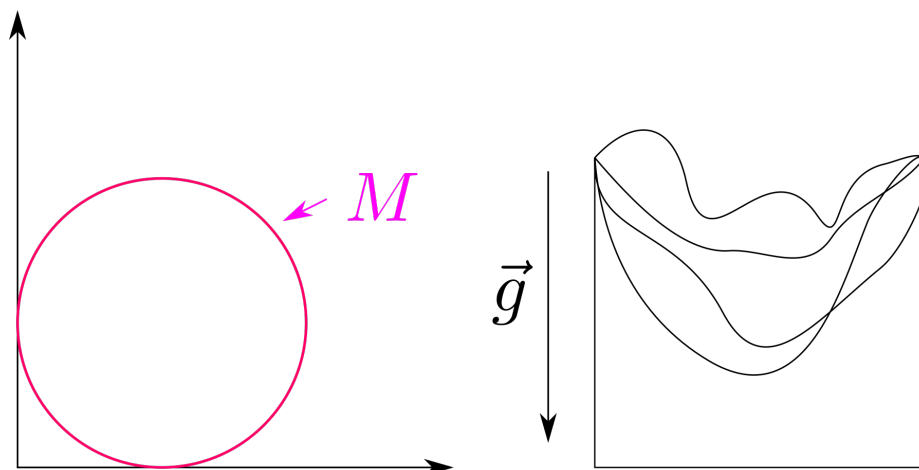
Niech  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$G(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

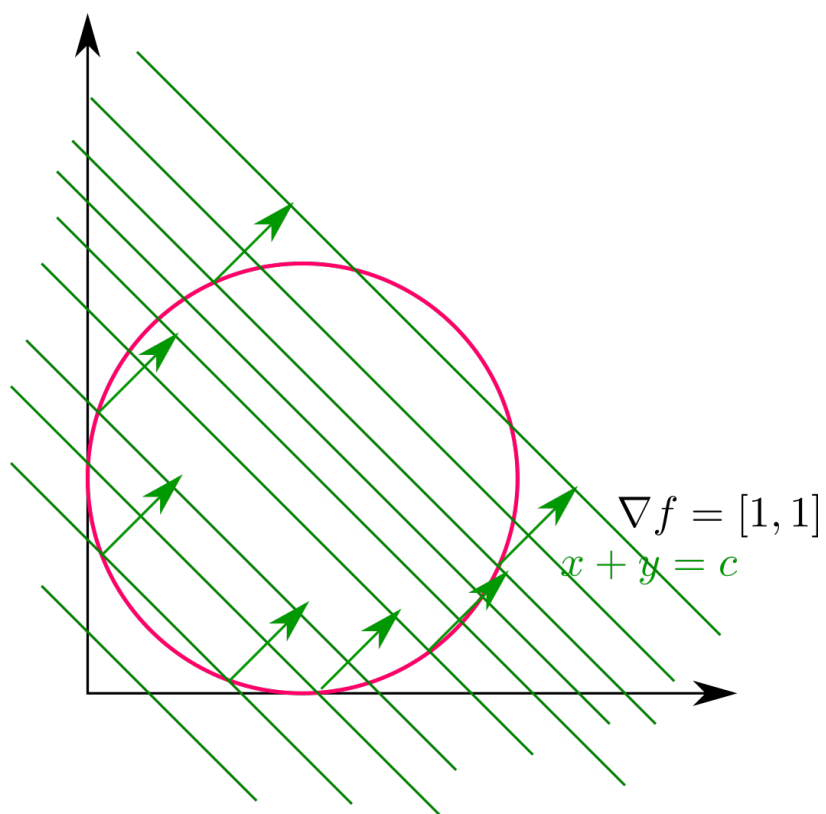
$M = \{(x, y), G(x, y) = 0\}$  Szukamy minimum/maksimum  $f$ . Można wyliczyć  $y(x)$  z więzów, wstawić



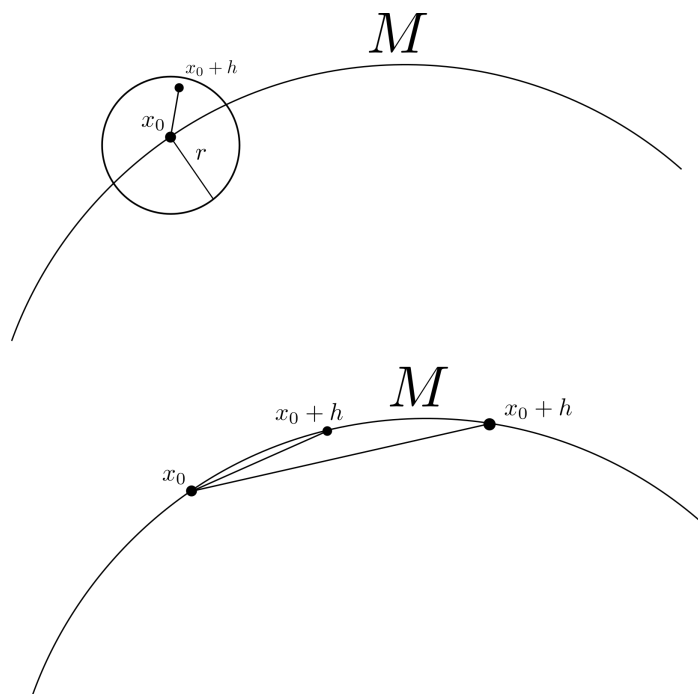
Rysunek 1



Rysunek 2:  $G(x, y)$  i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 3: Biedronka łązi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 4

do  $f$  i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej  $g(x) = f(x, y(x))$ . Kiedy nie umiemy wyliczyć  $y(x)$  z więzów, możemy założyć, że  $y(x)$  jednak istnieje i  $G(x, y(x)) = 0$ . Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \frac{\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby  $G(x, y) = 0$  zadawał funkcję  $x(y)$ ?

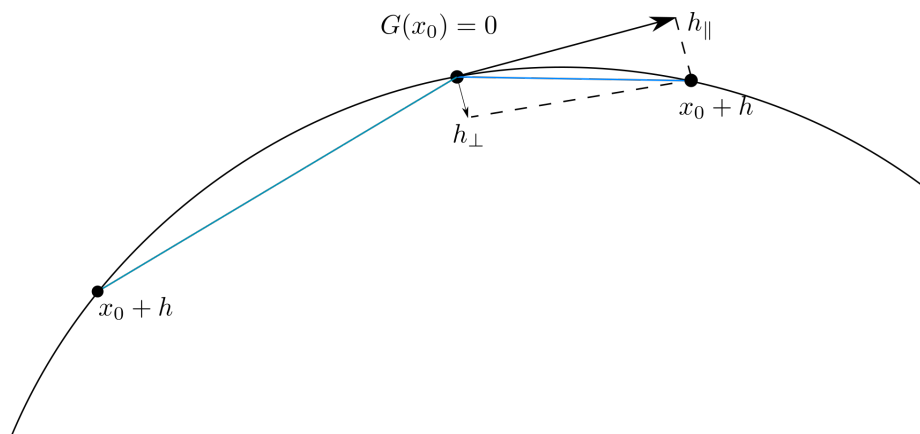
$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}}}{\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial x}}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}} \quad (1)$$



Rysunek 5

Co oznacza warunek ???

Wiemy, że

$$f' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] G' = \left[ \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby  $G'(x) = 0$ , albo  $P'(y) = 0$  oznacza, że

$$\exists_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Wielkość  $\lambda$  często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

**Obserwacja 1** Do warunku (??) można dojść na skróty przez funkcję  $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$  i badanie  $H(x, y)$  tak, jakby była to funkcja  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  bez żadnych więzów.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (+ \text{ warunek } G(x, y) = 0).$$

**Pytanie 1** Co ze zbadaniem  $G''(x)$  lub  $P''(y)$ ?

Odpowiedź: lepiej inaczej. . . (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \cong f''(x_0)(h, h).$$