$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \dots + \frac{1}{p!}$$

$$\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h)$$

$$\text{gdzie } R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \dots \\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}} \underset{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla}\\ \text{"}x_0<c<x_0+h\text{"}}}{(x_0+\theta h)} h^{i_1}\dots h^{i_{p+1}}$$

Obserwacja 1 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0$

Przykład 1

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2y^3, f'(x,y) = \Big[2xy^3, 3x^2y^2\Big].$

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, to wtedy

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \Big[h_1, h_1\Big] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

Minima i maksima

Przypomnienie Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$

Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in K(x_0,\eta)\\ K(x_0,\eta)\subset\mathcal{O}\\ x\neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \{f(x) < f(x_0)\} \leftarrow \text{ maksimum}$$

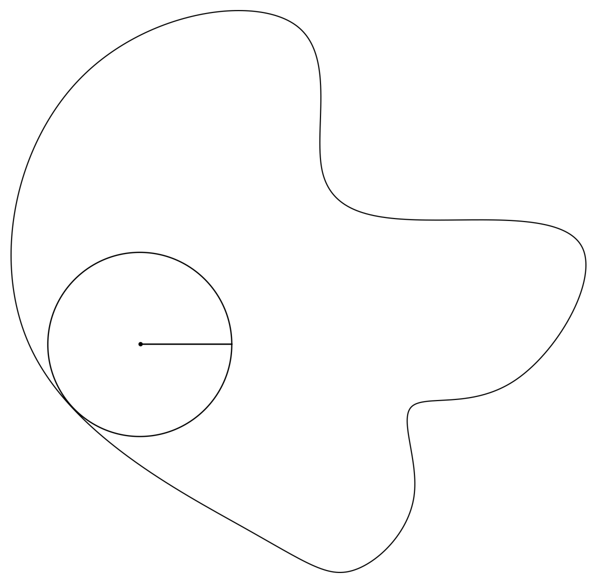
Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \ \underset{h}{\forall} \ ||h|| < \eta, \quad x_0+h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0+h) > f(x_0)$$

Stwierdzenie 1 *jeżeli $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1,\dots,n$$

(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)))



Rysunek 1: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Dowód 1

Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli $\frac{\partial}{\partial t} g_h(t)\Big|_{t=0}$

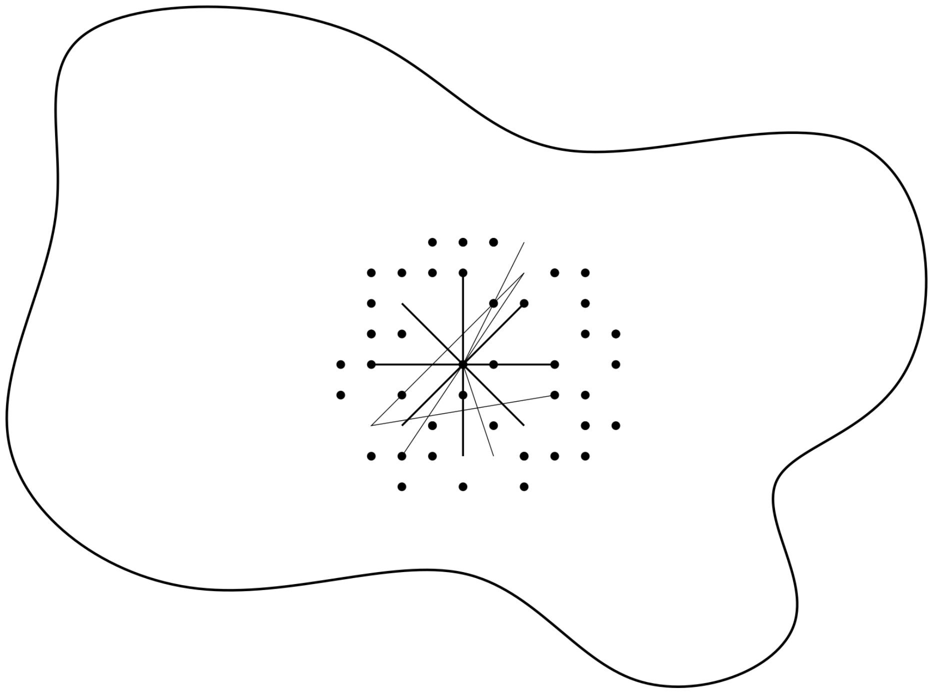
Czyli:

$$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$$
$$h = \left(h^1, h^2, \ldots, h^n\right)$$

$$\frac{d}{dt} g_h(t)\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \ldots, x_0^n + th^n)\Bigg|_{t=0} =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n)\Bigg|_{t=0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\underset{h}{\forall} : ||h|| < \eta, \text{ to znaczy: } \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0_{i=1,\ldots,n} \Box$$

Twierdzenie 1 *Niech* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}$ *- otwarty, a* f *- klasy* $C^{2p}(\mathcal{O})$ *oraz* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ *i*

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h \in K(x_0,\eta)}{\forall} : \quad \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \ldots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$



Rysunek 2

to f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód 2 *(dla minimum)*

(wersja uproszczona dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$)

Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{(2p)!}(\Delta)\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{2p}\frac{\partial^{(2p)}f(x_0)}{\partial x^{i_1}\dots x^{i_{(2p)}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p)}}+r_{2p+1}(x_0+h)$$

Wiemy też , że $\underset{c>0}{\exists}\ \underset{\eta>0}{\exists}\ \underset{\text{nie mogła tego przekroczyć}}{\underset{\text{Chodzi o to, żeby reszta}}{(\Delta)\geqslant c||h||^{2p}}}$

Chcemy pokazać, że $\underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\left|r_{2p+1}(x,h)\right|\leqslant \underset{\text{albo 2019}}{\underset{\text{albo 7,}}{\tfrac{c}{2}}}||h||^{2p}$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p+1}=1}}^{n}\frac{\partial^{(2p+1)}f(x_0+\theta h)}{\underset{0<\theta<1}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{(2p+1)}}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p+1)}}=\ /\text{*tu potrzebne założenie, że } f \text{ - klasy } C^{2p+1}(\mathcal{O})\text{*}/=r_{2p+1}(x,h)$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}} \to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall} \quad \underbrace{\underset{N}{\exists}, \underset{n>N}{\forall}}_{\substack{\text{bez sensu!} \\ \underset{\eta}{\exists}, \underset{||h||<\eta}{\forall}}} \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}} < M$$

$$\text{czyli: } \left| \frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}} \right| < M$$

$$\underset{M}{\forall} \quad \underset{\eta}{\exists} \underset{||h||<\eta}{\forall} \quad \left| r_{2p+1}(x_0,h) \right| < M \left| \left| h \right| \right|^{2p}$$

Kładziemy $M = \frac{c}{2}$ i mamy

$$\underset{\eta}{\exists}, \underset{||h||<\eta}{\forall} \quad f(x_0+h) - f(x_0) \geqslant \frac{c}{2} ||h||^{2p} \quad \square$$

Uwaga: Dlaczego warunek $(|||) > c||h||^{2p}$, a nie po prostu $() > 0$?

Przykład 2

$f(x,y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$
$f'() = 0 \iff (x,y) = (0,0)$
Badamy: $f(0+h) - f(0) = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$

Czyli $f(0+h) - f(0)\ 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.
$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ - minimum
$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ - równo.
Coś takiego - siodło.

Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek $\underset{c}{\exists} \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c \left| \left| h \right| \right|^2$, bo dla $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \ngeqslant c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$

Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$