

Ostatnio było:

$$A \subset D : \forall_{x \in A} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

**Twierdzenie 1.** (Lebesgue'a) *niech  $D$  - kostka,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona.  
Wówczas  $f$  - (całkowalna na  $D$ )  $\iff$  (zbiór nieciągłości funkcji  $f$  jest miary Lebesgue'a zero)*

**Dowód 1.**  $\Leftarrow$

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłości jest miary  $L$ . zero.

"../img/"fig\_41.jpeg

Wprowadźmy zbiór  $A_n = \{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

**Obserwacja 1.**  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$  na  $D$ .

*Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego  $A_n$ , bo przeliczalna suma zbiorów miary  $L$ . zero też jest zbiorem miary  $L$ . zero.*

**Uwaga 1.** Zbiór  $A_n$  jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero gdy istnieje  $P_i \subset D$ , ( $P_i$  - kostki), że  $A_n \subset \bigcup P_i$ ,  $\sum |P_i|$  - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech  $\varepsilon > 0$ . Wiemy, że

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N. \forall n > N. \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wyberzmy zatem taki indeks  $n$  dla zbioru  $A_n$ , że  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Wiemy, że  $A_n$  - domknięty i ograniczony (bo  $A_n \subset D$ , a  $D$  - kostka w  $\mathbb{R}^n$ ), to znaczy, że  $A_n$  jest zbiorem zwartym, a  $\{P_i\}$  jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie  $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$

$$\sum_{j=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę  $\{P_i\}$ , że  $\sum |P_i|$  - dowolnie mała. Wybierzmy podział  $\Pi$  zbioru  $D$  taki, że  $\Pi$  jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie  $A_n$  zbioru  $\bigcup P_j$ . Oznacza to, że podział  $\Pi$  możemy podzielić na dwa podziały

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}$$

$$\Delta$$

$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \emptyset$$

$$\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \emptyset.$$

$\Delta$  : każda kostka z  $\{P_j\}$  składa się z kostek należących do  $\Pi_1$

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = |\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) + \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2)|, \text{ ale}$$

$$\overline{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_1} \left( \sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_i} f \right) |Q_i| \quad (1)$$

Gdzie wiemy, że  $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$ , a  $f$  - ograniczona na  $D$  czyli

$$\exists M. \forall x \in D. |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

"../img/"fig\_42.png

Zatem

$$(\text{??}) \leq M \cdot \sum |Q_i| \leq M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) &= \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|. \end{aligned}$$

Zatem

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |D| = \frac{1}{n} \cdot \text{const}.$$

czyli możemy tak zwiększyć  $n$ , że  $\forall_{\varepsilon > 0} \frac{1}{n} \cdot \text{const} < \varepsilon \quad \square$

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego  $A$ ?

np. dla  $A_{2019}$  działa, ale co dalej. Bo  $A_k$  dla  $k > n$  też spełniają warunek, że  $\frac{1}{k} \cdot \text{const} < \varepsilon$ , a  $A_j$  dla  $j < n$  jest takie, że  $A_j \subset A_n$

$\implies$

Wiemy, że  $f$  - całkowalne, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi \overset{S}{|} (f, \Pi) - \int_S f < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero)

$$\begin{aligned}\Pi &= \{T_i\} \\ \frac{\varepsilon}{n} &> |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = \\ &= \sum |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f| |T_i| (*).\end{aligned}$$

z podziału  $T_i$  wybieram takie kostki  $P_i$ , że  $|\sup_{x \in P_i} f - \inf_{x \in P_i} f| \geq \frac{1}{n}$ .

Wówczas

$$\begin{aligned} (*) &\geq \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum |P_i| \\ &\text{czyli } \forall_{\varepsilon > 0} \frac{\varepsilon}{n} > \frac{1}{n} \sum |P_i|, \text{ gdzie } P_i \text{ jest pokryciem } A_n.\end{aligned}$$

Czyli  $A_n$  jest zbiorem miary  $L$ . zero  $\square$

**Przykład 1.**  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ,  $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy,$$

$$\text{gdzie } \varphi_1(x) = \int_0^1 x \sin(xy) dy, \varphi_2(y) = \int_0^1 x \sin(xy) dx$$

"../img/"fig\_43.png

Rysunek 1: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y).$$

**Twierdzenie 2.** (Fubini)

Niech  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ .  $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  - ograniczona i całkowalna na  $A \times B$ .  
Oznaczmy  $x^l \in A, y^k \in B$ ,  $A, B$  - kostki.

Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}, \psi(x) = \int_{\underline{B}} f(x^l, y^k) dy^k.$$

Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

**Uwaga 2.** całkowalność na  $A \times B$  nie oznacza całkowalności na np.  $B$ .

**Dowód 2.** Niech  $\{Q_i\} = \Pi_1$  - podział zbioru  $A$ ,  $\{R_j\} = \Pi_2$  - podział zbioru  $B$ .  
Wówczas  $\Pi_1 \times \Pi_2$  - podział  $A \times B$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) &= \\ &= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leq \\ &= \sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leq \\ &\leq \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |R_j| |Q_i| \leq \\ &\quad \text{suma dolna dla } \psi(x) \\ &\leq \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| = \underbrace{(\psi, \Pi_1)}_S. \\ &\quad \text{bo suma dolna } \leq \text{całki dolnej} \end{aligned}$$

Ale  $\int_A \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|$ .

Czyli  $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{S}(\psi, \Pi_1)$ . Analogicznie możemy pokazać, że

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro  $f$  - całkowalna na  $A \times B$ , to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi \quad |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że  $\int_A \psi$  i  $\int_B \varphi$  - istnieją i wynoszą  $\int_{A \times B} f$   $\square$