

Ostatnio było:

$$A \subset D : \forall_{x \in A} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

Twierdzenie 1 (Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona.
Wówczas f - (całkowalna na D) \iff (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Dowód 1 \Leftarrow

Chcemy pokazać, że

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłości jest miary L . zero.



Wprowadźmy zbiór $A_n = \{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$

$$\text{np. } A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Obserwacja 1 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D .

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n , bo przeliczalna suma zbiorów miary L . zero też jest zbiorem miary L . zero.

Uwaga 1 Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L . zero gdy istnieje $P_i \subset D$, (P_i - kostki), że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$. Wiemy, że

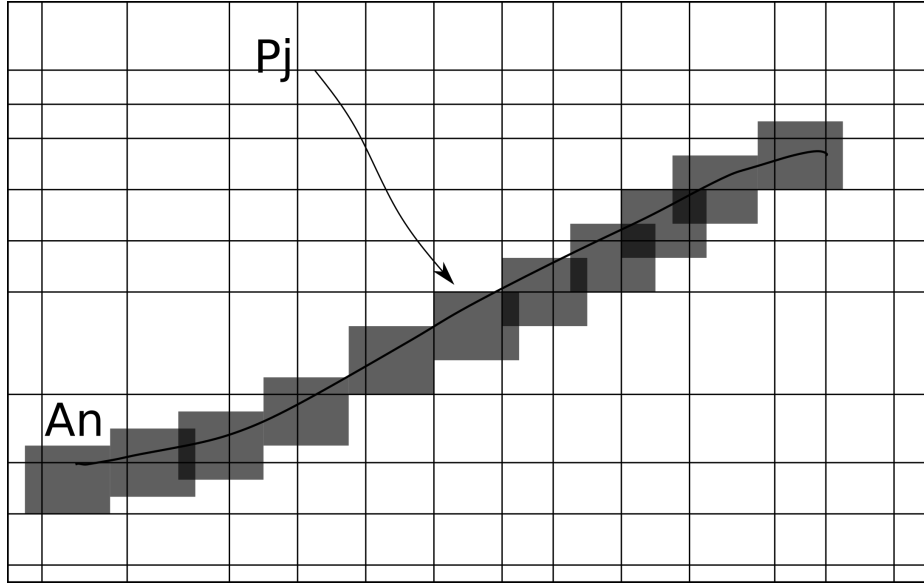
$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wyberzmy zatem taki indeks n dla zbioru A_n , że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wiemy, że A_n - domknięty i ograniczony (bo $A_n \subset D$, a D - kostka w \mathbb{R}^n), to znaczy, że A_n jest zbiorem zwartym, a $\{P_i\}$ jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$

$$\sum_{j=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$, że $\sum |P_i|$ - dowolnie mała. Wy-



berzmy podział Π zbioru D taki, że Π jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie A_n zbioru $\bigcup P_j$. Oznacza to, że podział Π możemy podzielić na dwa podziały

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \text{ takie że}$$

$$\Delta$$

$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$

$$\text{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.$$

Δ : każda kostka z $\{P_j\}$ składa się z kostek należących do Π_1

$$|\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = |\bar{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) + \bar{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2)|, \text{ ale}$$

$$\bar{S}(f, \Pi_1) - \underline{S}(f, \Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_1} \left(\sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_i} f \right) |Q_i| \quad (1)$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, a f - ograniczona na D czyli

$$\exists_M \forall_{x \in D} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$(\text{??}) \leq M \cdot \sum |Q_i| \leq M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) &= \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|. \end{aligned}$$

Zatem

$$|\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |D| = \frac{1}{n} \cdot \text{const}.$$

czyli możemy tak zwiększyć n , że $\forall_{\varepsilon > 0} \frac{1}{n} \cdot \text{const} < \varepsilon \quad \square$

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A ?

np. dla A_{2019} działa, ale co dalej. Bo A_k dla $k > n$ też spełniają warunek, że $\frac{1}{k} \cdot \text{const} < \varepsilon$, a A_j dla $j < n$ jest takie, że $A_j \subset A_n$

\implies

Wiemy, że f - całkowalne, czyli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi^S |(f, \Pi) - \int_S f| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n jest zbiorem miary L . zero)

$$\begin{aligned} \Pi &= \{T_i\} \\ \frac{\varepsilon}{n} &> |\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = \\ &= \sum |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f| |T_i|. \end{aligned}$$

z podziału T_i wybieram takie kostki P_i , że $|\sup_{x \in P_i} f - \inf_{x \in P_i} f| \geq \frac{1}{n}$.

Wówczas

$$(*) \geq \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum |P_i|$$

$$\text{czyli } \forall_{\varepsilon > 0} \frac{\varepsilon}{n} > \frac{1}{n} \sum |P_i|, \text{ gdzie } P_i \text{ jest pokryciem } A_n.$$

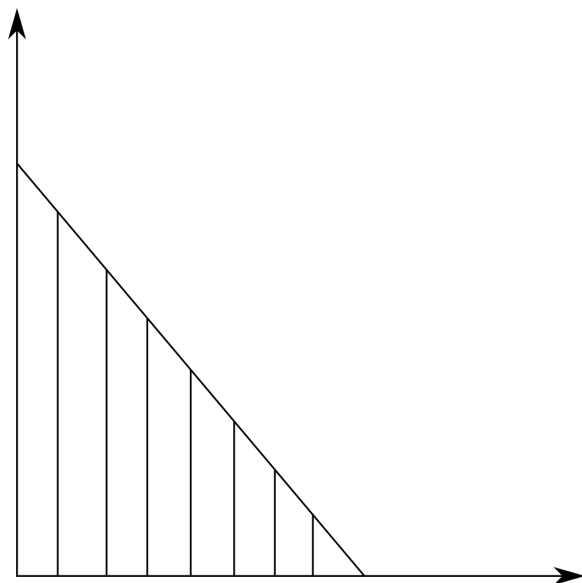
Czyli A_n jest zbiorem miary L . zero \square

Przykład 1 $f(x, y) = x \sin(xy)$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy,$$

gdzie $\varphi_1(x) = \int_0^1 x \sin(xy) dy$, $\varphi_2(y) = \int_0^1 x \sin(xy) dx$

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y).$$



Rysunek 1: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

Twierdzenie 2 (Fubiniiego)

Niech $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$, f - ograniczona i całkowna na $A \times B$.
Oznaczmy $x^l \in A, y^k \in B$, A, B - kostki.

Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}, \psi(x) = \underline{\int_B f(x^l, y^k) dy^k}.$$

Wówczas

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

Uwaga 2 całkowność na $A \times B$ nie oznacza całkowności na np. B .

Dowód 2 Niech $\{Q_i\} = \Pi_1$ - podział zbioru A , $\{R_j\} = \Pi_2$ - podział zbioru B .
Wówczas $\Pi_1 \times \Pi_2$ - podział $A \times B$.

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) &= \\ &= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |Q_i| |R_j| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x, y) |R_j| |Q_i| \leqslant \\ &\quad \text{suma dolna dla } \psi(x) \\ &\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \quad \text{bo suma dolna } \leqslant \text{całki dolnej} \quad \underset{S}{=} (\psi, \Pi_1). \end{aligned}$$

$$\text{Ale } \underline{\int_A} \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|.$$

Czyli $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{S}(\psi, \Pi_1)$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leq \underline{\underline{S}}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leq \overline{\underline{S}}(\varphi, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro f - całkowalna na $A \times B$, to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists \Pi \quad |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że $\int_A \psi$ i $\int_B \varphi$ - istnieją i wynoszą $\int_{A \times B} f$ \square