Ostatnio było:

$$\begin{split} A \subset D : \underset{x \in A}{\forall} \mathcal{O}(f,x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to} \\ & \exists_{\Pi} |\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| < \varepsilon |A|. \end{split}$$

Twierdzenie 1. (Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, f - ograniczona. Wówczas f - (całkowalna na D) \iff (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesque'a zero)

 $Dow \acute{o}d. \iff$

Chcemy pokazać, że

$$\exists |\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłośći jest miary L. zero.

"../img/"fig_41.jpeg

Wprowadźmy zbiór $A_n = \left\{ x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$

np.
$$A_2 = \left\{ x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Obserwacja 1. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D.

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n , bo przeliczalna suma zbiórów miary L. zero też jest zbiorem miary L. zero.

Uwaga 1. Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).

Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L. zero gdy itnieje $P_i \subset D$, $(P_i - kostki)$, że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$. Wiemy, że

$$\forall . \exists . \forall \frac{1}{n > N} < \varepsilon.$$

Wybierzmy zatem taki indeks n dla zbioru A_n , że $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wiemy, że A_n - domknięty i ograniczony (bo $A_n \subset D$, a D - kostka w \mathbb{R}^n), to znaczy, że A_n jest zbiorem zwartym, a $\{P_i\}$ jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ takie, że

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^k P_j$$
$$\sum_{i=1}^k |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$, że $\sum |P_i|$ - dowolnie mała. Wybierzmy podział Π zbioru D taki, że Π jest na tyle drobny, że odtwarza pokrycie A_n zbioru $\bigcup P_j$. Oznacza to, że podział Π możemy podzielić na dwa podziały

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$$
, takie że Δ
$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$
 oraz $\Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi$.

 Δ : każda kostka z $\{P_j\}$ składa się z kostek należących do Π_1 $|\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)|=|\overline{S}(f,\Pi_1)-(f,\Pi_1)+\overline{S}(f,\Pi_2)-\underline{S}(f,\Pi_2)|, \text{ ale}$

$$\overline{S}(f,\Pi_1) - \underline{S}(f,\Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_i} (\sup_{x \in Q_i} f - \inf_{x \in Q_I} f) Q_i |$$

$$\tag{1}$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, a f - ograniczona na D czyli

$$\exists . \forall_{x \in D} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

"../img/"fig_42.png

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$(??) \leqslant M \cdot \sum |Q_i| \leqslant M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\overline{S}(f, \Pi_2) - \underline{S}(f, \Pi_2) = \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f) |R_j|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |R_j| \leq \frac{1}{n} |D|.$$

Zatem

$$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \leqslant M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}|D| = \frac{1}{n} \cdot const.$$

czyli możemy tak zwiększyć n,że $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\frac{1}{n}\cdot const<\varepsilon\quad\Box$

Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A? np. dla A_{2019} działa, ale co dalej. Bo A_k dla k>n też spełniają warunek, że $\frac{1}{k}\cdot const<\varepsilon$, a A_j dla j< n jest takie, że $A_j\subset A_n$

 \Longrightarrow

Wiemy, że f - całkowalne, czyli

$$\label{eq:continuous_signal} \bigvee_{\varepsilon>0}. \exists \big| (f,\Pi) - (f,\Pi) \big| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n jest zbiorem miary L. zero)

$$\Pi = \{T_i\}$$

$$\frac{\varepsilon}{n} > |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| = \sum_{x \in T_i} |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f ||T_i|(*).$$

z podziału T_i wybieram takie kostki P_i , że $|\sup_{x\in P_i} f - \inf_{x\in P_i} f \geqslant \frac{1}{n}$.

Wówczas

$$(*) \geqslant \sum_{P_i} \frac{1}{n} |P_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |P_i|$$
czyli $\forall \frac{\varepsilon}{\varepsilon > 0} > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |P_i|$, gdzie P_i jest pokryciem A_n .

П

Czyli A_n jest zbiorem miary L. zero

Przykład 1.
$$f(x,y) = x\sin(xy)$$
, $A = [0,1] \times [0,1]$
 $\int_A f \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y) dy$,
 $gdzie \ \varphi_1(x) = \int_0^1 x\sin(xy) dy$, $\varphi_2(y) = \int_0^1 x\sin(xy) dx$

"../img/"fig_43.png

Rysunek 1: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

$$\int_{A} f = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} dx f(x, y).$$

Twierdzenie 2. (Fubiniego)

Niech $f: A \times B \to \mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}^l, B \subset \mathbb{R}^k, A \times B \subset \mathbb{R}^n$, f - ograniczona i całkowalna na $A \times B$. Oznaczmy $x^l \in A, y^k \in B$, A, B - kostki. Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B} f(x^l, y^k) dy^k, \\ \psi(x) = \int_B f(x^l, y^k) dy^k.$$

W'owczas

$$\int_{A\times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

Uwaga 2. całkowalności na $A \times B$ nie oznacza całkowalności na np. B.

 $Dow \acute{o}d.$ Niech $\{Q_i\}=\Pi_1$ - podział zbioru $A,\,\{R_j\}=\Pi_2$ - podział zbioru B. Wówczas $\Pi_1\times\Pi_2$ - podział $A\times B.$

$$\begin{split} &\underline{S}(f,\Pi_1\times\Pi_2) = \\ &= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{y\in R_j} f(x,y)|Q_i||R_j| \leqslant \\ &\sum_{\substack{Q_i \\ Q_i}} \sum_{\substack{R_j \\ x\in Q_i}} \inf_{y\in R_j} f(x,y)|Q_i||R_j| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\substack{Q_i \\ x\in Q_i}} \inf_{x\in Q_i} \sum_{\substack{R_j \\ y\in R_j}} f(x,y)|R_j||Q_i| \leqslant \\ &\sup_{\substack{Q_i \text{ bo suma dolna} \leqslant \text{calki dolnei}}} (\psi, \Pi_1). \end{split}$$

Ale $\underline{\int_{A}} \psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x) |Q_i| \right|.$

Czyli $\underline{S}(f,\Pi_1\times\Pi_2)\leqslant\underline{S}(\psi,\Pi_1)$. Analogicznie możemy pokazać, że

$$S(\psi, \Pi_1) \leqslant S(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f,\Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{S}(\psi,\Pi_1) \leqslant \overline{S}(\psi,\Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi,\Pi_1) \leqslant \overline{S}(f,\Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro f - całkowalna na $A \times B$, to

$$\forall .\exists |\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że $\int_A \psi$ i $\int_B \varphi$ - istnieją i wynoszą $\int_{A \times B} f \quad \Box$

П