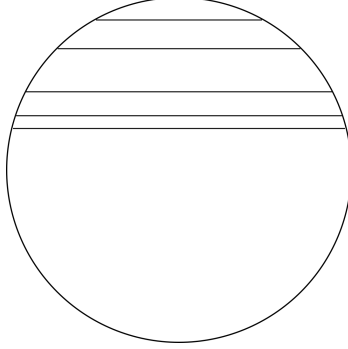


Ostatnio skończyliśmy na kroku  $n - 1 \rightarrow n$  i wiemy, że dla  $n - 1$  wymiarów możemy napisać  $\int_{A \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{B \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt$



Rysunek 1: Kółko  $K$  składamy z kresek  $K_a$  i mamy  $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_{\Theta} f dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'| dt.$$

Mając zbiór  $\Theta$ , zdefiniujemy zbiór  $\Theta_a$ , który jest zbiorem takich  $x \in \Theta$ , że na miejsca  $x_i$  wstawimy wielkość  $a$ .

$$\Theta_a = \{x \in \mathbb{Q}, x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

$$K = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$K_a = \{(x, y) \in K, (x, y) = (x, a)\}, \{(x, a), x^2 + a^2 = 1\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_{\Theta} f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n.$$

Rozważmy  $\xi : \Theta \rightarrow \Omega$  taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

(Czyli  $\xi$  nie zmienia jednej współrzędnej np.  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$ ).

Możemy więc zapisać transformację  $\xi_a : \Theta_a \rightarrow \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\dots) \\ \xi_{i+1}(\dots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n = \\ \int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt^2 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n.$$

Wówczas

$$\int_{\Theta} f(x^1, \dots, x^n) dx^n = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \dots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n \\ = [a = t_i] = \\ = \int_{\Omega} f(t^1, t^2, \dots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \dots dt^n \quad \square.$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

**Przykład 1** Policzmy całkę  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć  $I$ , to tym bardziej  $I^2$ ?

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{\square} e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .  $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $|\psi'| = r$  Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p \\ \frac{\pi}{2} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[ -\frac{1}{2} e^{(0)^2} \right] \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{czyli } I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## 0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  - taki, że dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje otoczenie otwarte  $U \subset M$

**Przykład 2** (sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie) TODO: obrazki

**Definicja 1** Niech  $U$  - zbiór otwarty  $\subset M$  i niech odwzorowanie  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  takie, że  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , (czasami  $\mathcal{C}^\infty$ ),  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , (czasami  $\mathcal{C}^\infty$ ) nazywamy mapą.

Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru  $M$ .

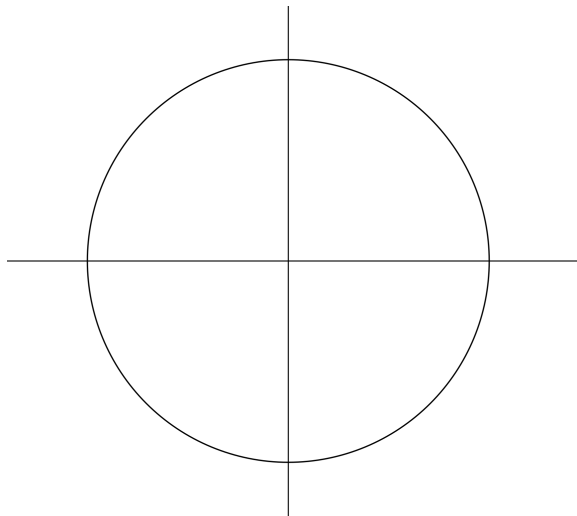
Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór  $M$ . Połowa tego zbioru to niech będzie  $U_1$ , i ono się przecina z  $U_2$ .  $U_1$  i  $U_2$  możemy rozłożyć na prostokąty w  $\mathbb{R}^2$ . Co się stanie z punktami mapowanymi do obu  $U$ ?

**Definicja 2**  $(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$  - mapy na  $M$ .

$U_1$  i  $U_2$  nazywamy zgodnymi jeżeli

a)  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

albo odwzorowanie  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_1)$  jest bijekcją (klasę powiedzmy sobie  $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$ )



Rysunek 2:  $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

### Przykład 3

$$U_1 = \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \rightarrow x$$

$$U_2 = \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \rightarrow y$$

$$U_3 = \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \rightarrow x$$

$$U_4 = \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \rightarrow y.$$

$U_1$  i  $U_3$  oraz  $U_2$  i  $U_4$  są zgodne. Czy zgodne są  $U_1$  i  $U_2$ ? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie  $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ , ale  $\varphi_1(x, y) \in U_1 \rightarrow x$ .

Czyli  $\varphi_1^{-1}(x) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2})$ ,

czyli  $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2((x, \sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$ .

Zatem czy  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$  przerzuca  $]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  jest różniczkowalne? Odpowiedź: na zbiorze  $]0, 1[$  jest.

**Definicja 3** Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór  $M$  wraz z atlasem, który pokrywa całą  $M$  nazywamy **rozmaiłością** (ang. manifold).