Twierdzenie 1 *(o lokalnej odwracalności)*

Niech $f : E \to E, E$ *- otwarty,* $E \subset \mathbb{R}^N, f$ *- różniczkowalna w sposób ciągły na* E.
$(f$ *- klasy* $\mathcal{C}^1(E)), \underset{a,b\in E}{\exists} : f(a) = b \wedge f'(a)$ *- odwracalna* $(det(f'(a)) \neq 0)$*, to:*

1. $\underset{U,V \subset E}{\exists}, \underset{a\in U, b\in V}{\exists}, U, V$ *- otwarte,* f *- bijekcja między* U, V
2. $\underset{g:V\to U}{\exists}. \underset{x\in V}{\forall}, f(g(x)) = x, g$ *- ciągła i różniczkowalna na* V

Uwaga: Dowód składa się z trzech części:

1. Pokażemy, że $\underset{U,V}{\exists} : f$ - bijekcja na U, V
2. Pokażemy, że U, V - otwarte
3. Pokażemy, że $\underset{g:V\to U}{\exists}, g$ - różniczkowalna na V i ciągła.

Przykład 1

$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
$det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, ale $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ (czyli funkcja jest okresowa)

Dowód 1

Część I:
Szukamy $U, V : f$ - bijekcja miedzy U i V Skoro $f'(a)$ - odwracalne, to znaczy, że $\underset{(f'(a))^{-1}}{\exists}$, zatem $\underset{\lambda}{\exists} : 2\lambda \|(f'(a))^{-1}\| = 1$

Wiemy, że $f'(x)$ - ciągła w $x = a$, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}.\underset{\delta}{\exists}.\underset{x}{\forall}, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f(a)\| < \varepsilon \tag{1}$$

Połóżmy $\varepsilon = \lambda$.
Oznacza to, że

$$\underset{\delta_\lambda}{\exists}.\underset{x}{\forall} x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda \tag{2}$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że f - bijekcja między U i V.
Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E \tag{3}$$

Pytanie 1 *Co by było gdyby* $\varphi_y(x)$ *posiadała punkt stały? (jakie własności* x *by z tego faktu wynikały)*
dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$*?*

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli $\underset{y\in V}{\forall}. \underset{x\in U}{\exists} : f(x) = y$

O f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U. (iksa nie obchodzą sąsiedzi, f musi być ciągłe to będzie bijekcja)

Policzmy $\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x))$, więc $\|\varphi'_y(x)\| = \|f'(a)^{-1}(f'(a) - f'(x))\| \leqslant \|(f'(a)^{-1})\| \|f'(a) - f'(x)\| \leqslant \underset{x\in U}{\forall} \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}$

Pamiętamy, że jeżeli $\underset{M}{\exists}\|\varphi'_y(x)\| \leqslant M$, to $\underset{x,y}{\forall}\|\varphi(x)-\varphi(y)\| < M\|x-y\|$

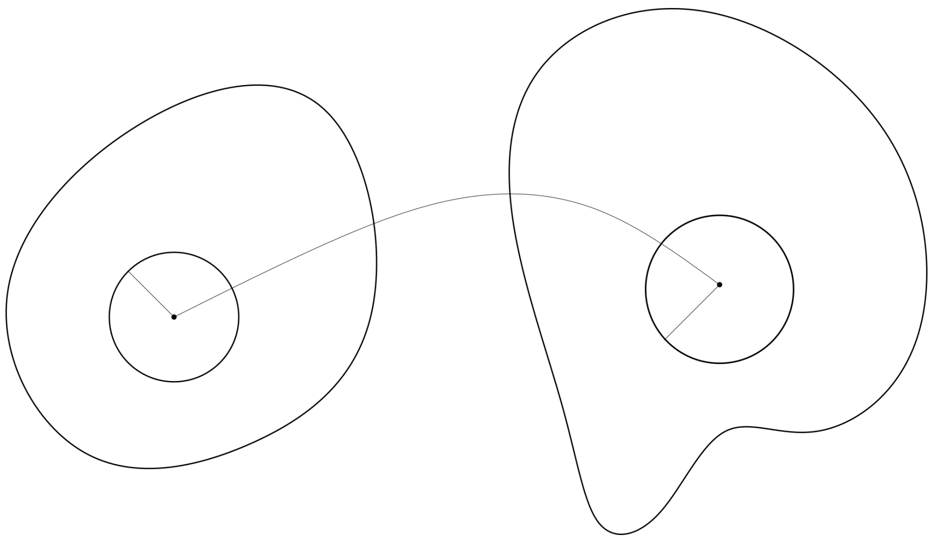
Zatem skoro $\|\varphi'_y(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$, to

$$\underset{x_1,x_2\in U}{\forall}\|\varphi_y(x_1)-\varphi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\underset{y\in V}{\forall}$. Zatem f - bijekcja między U i V.

Część II - otwartość U i V

1. Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) ($U = K(a,\delta_1)$), więc $\underset{x_0\in U}{\exists}, \underset{r}{\exists} K(x_0,r) \subset U$, lub równoważnie $\|x-x_0\| \leqslant r \wedge x \in U$.
Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0) \underset{K(y_0,\lambda r)\subset V}{\exists}$, czyli że V - otwarty.



Rysunek 1: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Weźmy $y \in K(y_0,\lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$
Jeżeli pokażemy, że dla $\|y-y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0,r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y-y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0,\lambda r) \subset V$

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężające na $K(x_0,r)$, zbadamy tę wielkośc dla $x \in K(x_0,r)$. $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x)-x_0\| \leqslant r$ i $\|y-y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x)-x_0\| = \|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)+\varphi_y(x_0)-x_0\| \leqslant \|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)\| + \|\varphi y(x_0-x_0)\|$$

Ale $\|\varphi_y(x_0)-x_0\| \leqslant \|(f'(a))^{-1}\|\|y-y_0\| \leqslant \frac{1}{2\lambda}\lambda r = \frac{r}{2}$, więc $\|\varphi_y(x)-x_0\| \leqslant r$, jeżeli $\|y-y_0\| < \lambda r, \|x-x_0\| \leqslant r$.

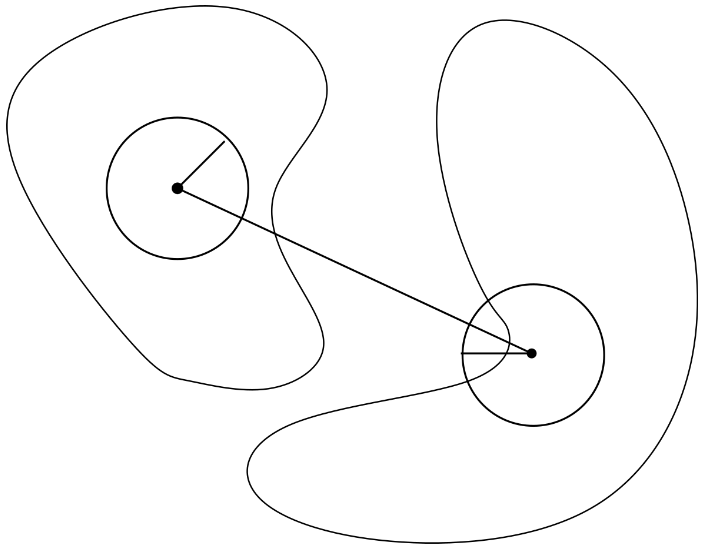
Stąd wiemy , że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0,r)$ należy do $K(x_0,r)$ i $\|y-y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.

Część III:

Szukamy $g : V \to U$

Skoro f - bijekcja między U i V, to znaczy, że $\underset{g:V\to U}{\exists} f(g(x)) = x \underset{x\in V}{\forall}$.
Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w $x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\to} 0, x, x+h \in V$$



Rysunek 2: Nie ok.

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \stackrel{k\to 0}{\to} 0 \tag{4}$$

to będziemy wiedzieli, że:
1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.
W tym celu pokażemy, że:
1. $(\|k\| \to 0) \implies (\|h\| \to 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) = x + h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) =$$

$$= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)),$$

$$czyli \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geqslant \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|k\|} \leqslant \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|h\|} \to 0$, o ile $\underset{[f'(x)]^{-1}}{\exists}$

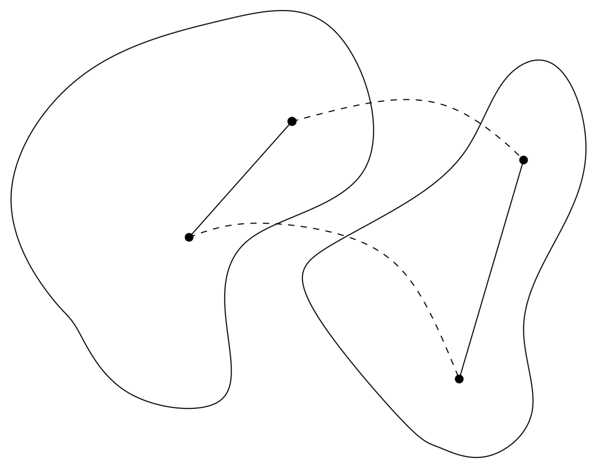
Pytanie 2 *skąd wiadomo, że $(f'(x))^{-1}$?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$ oraz U - taka, że

$$\underset{x\in U}{\forall} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$



Rysunek 3

Zatem

$$0 \leqslant \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}\|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leqslant \|f'(a) - f'(x)\|\|y\| + \|f'(x)\|\|y\|.$$

Dalej $2\lambda\|y\| \leqslant \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$ dla $x \in U$
$0 \leqslant \lambda\|y\| \leqslant \|f'(x)y\|$ dla $y = 0$
Czyli

$$\underset{x \in U}{\forall} \|f'(x)y\| > 0 \quad \square.$$