

0.1 funkcje wielu zmiennych

Przykład 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Energia potencjalna } \mathcal{V}(x, y, z) \\ \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^1 - \text{Potencjał pola niestacjonarnego } \mathcal{V}(x, y, z, t) \\ \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 - \text{Natężenie pola } \mathcal{E}(x, y, z) \\ \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^6 \\ \mathbb{R}^6 &\rightarrow \mathbb{R}^1 \\ \mathbb{R}^8 &\rightarrow \mathbb{R}^1\end{aligned}$$

Definicja 1. (Ciągłość Heine)

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ jest ciągle w punkcie x_0 , jeżeli

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0}, T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

Uwaga: $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pytanie 1. Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłość w \mathbb{R}^1 ?

Przykład 2. Niech funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0, 0)$? dla trajektorii I:

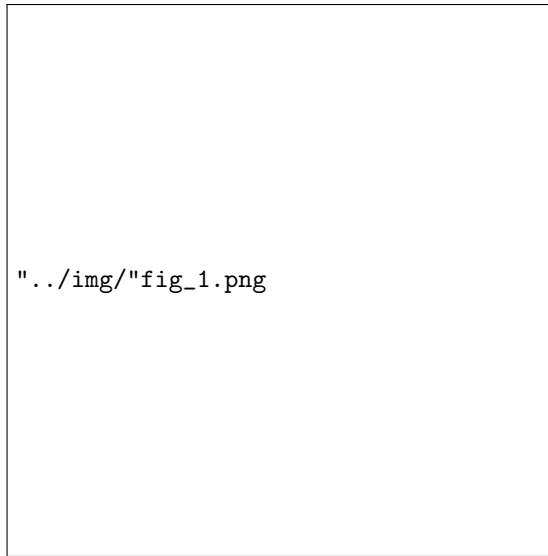
$$\lim_{y_n \rightarrow 0} (\lim_{x_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (\lim_{y_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \rightarrow 0} (0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0} f(0, 0)$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Definicja 2. (*Ciągłość Cauchy*)

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X ,

(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y .

Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \rightarrow Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta} \quad \forall_{x \in X} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Dowód. Heine \iff Cauchy

\implies (przez sprzeczność)

Zakładamy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$$

oraz

$$\exists_{\epsilon > 0}, \forall_{\delta > 0}, \exists_{x \in X} : d_X(x, x_0) < \delta \quad \wedge \quad d_Y(T(x), T(x_0)) \geq \epsilon \quad (1)$$

Skoro $T(x_n) \rightarrow T(x_0) \quad \forall_{x_n \rightarrow x_0}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

Skoro (1), to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\begin{array}{ll}
\delta = 1 : & \exists_{x_1} d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\delta = \frac{1}{2} : & \exists_{x_2} d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\delta = \frac{1}{3} : & \exists_{x_3} d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geq \epsilon \\
\vdots & \vdots \\
\delta = \frac{1}{n} : & \exists_{x_n} d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geq \epsilon.
\end{array}$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \rightarrow x_0$, ale $T(x_n) \not\rightarrow T(x_0)$, więc mamy sprzeczność. \square
 \Leftarrow Wiemy, że

$$\forall_{x_n \rightarrow x_0} \forall_{\epsilon > 0} \exists_x d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon, \quad (2)$$

czyli:

$$\forall_{\delta_1} \exists_N \forall_{n > N} d_X(x_n, x_0) < \delta_1 \quad (3)$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$, czyli, że

$$\forall_{\epsilon_1 > 0} \exists_{N_1} \forall_{n > N_1} d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \text{ (dla } x_n \rightarrow x_0 \text{)}$$

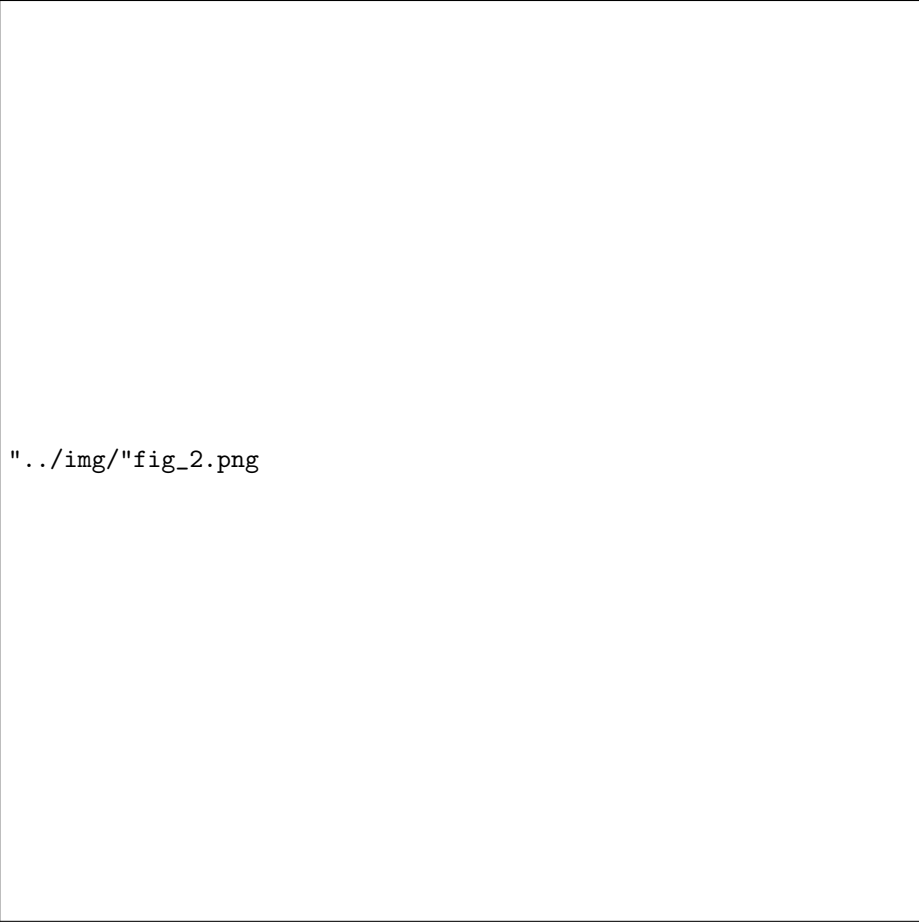
Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że \exists_δ spełniająca warunek (2) dla ϵ_1 . Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (3), czyli wiemy, że

$$\exists_{N > N} \forall_{n > N} d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (2), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1$$

\square



"../img/"fig_2.png

Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

0.2 Różniczkowalność:

Definicja 3. *Pochodna cząstkowa:*

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} - otwarty, $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $x \in \mathcal{O}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k , jeżeli istnieje granica

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x} f \right|_{x=x_0}$$

Przykład 3. *Pochodna cząstkowa*

Niech $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

Uwaga: do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych.

biegunowy $\rightarrow f(r, \varphi)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h, \varphi) - f(r, \varphi)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r, \varphi+h) - f(r, \varphi)}{h}.\end{aligned}$$

Definicja 4. *Pochodna kierunkowa:*

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O} - otwarte, $x_0 \in \mathcal{O}$, $e \in \mathcal{O}$, $T : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (spoiler: pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0).$$

Obserwacja: Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $e_x = (1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $e_y = (0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T.$$

Przykład 4. *Problemy z pochodną kierunkową:*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}. \text{ Wówczas } x_0 + te = (0 + t1, 0), x_0 = (0, 0), e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{e_x} f|_{x=(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

$$\textbf{Uwaga: } f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm \infty$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$$e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \text{ Pochodna: } \nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$