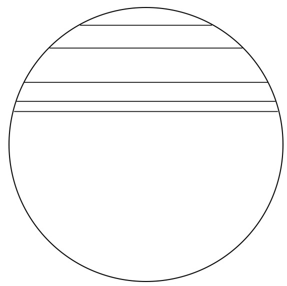
Ostatnio skończyliśmy na kroku $n-1 \to n$ i wiemy, że dla $n-1$ wymiarów możemy napisać $\int_{A\in\mathbb{R}^{n-1}} f(x)dx = \int_{B\in\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t))|\det \xi'|dt$



Rysunek 1: Kółko K składamy z kresek K_a i mamy $\int_K f = \int da \int_{K_a} f$

$$\int_\Theta f dx = \int_\Omega f(\xi(t))|\det \xi'|dt.$$

Mając zbiór Θ, zdefiniujmy zbiór Θ_a, który jest zbiorem takich $x \in \Theta$, że na miejsca x_i wstawimy wielkość a.

$$\Theta_a = \left\{x \in \mathbb{Q}, x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n\right)\right\}.$$

$$K = \left\{(x,y), x^2+y^2 = 1\right\}.$$

$$K_a = \{(x,y) \in K, (x,y) = (x,a)\}, \left\{(x,a), x^2+a^2 = 1\right\}.$$

Oznacza to, że

$$\int_\Theta f dx = \int da \int_{\Theta_a} f(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n.$$

Rozważmy $\xi : \Theta \to \Omega$ taką, że

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ t_1 \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

(Czyli ξ nie zmienia jednej współrzędnej np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}$).

Możemy więc zapisać transformację $\xi_a : \Theta_a \to \Omega_a$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \xi_1(t_1, \ldots, t_n) \\ \xi_2(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ \xi_{i-1}(\ldots) \\ \xi_{i+1}(\ldots) \\ \vdots \\ \xi_n(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix}.$$

Wówczas na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że

$$\int_{\Theta_a} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \ldots, x^n) dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n =$$
$$\int_{\Omega_a} f(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \ldots, t_n) |\det \xi'_a| dt^1 dt_2 \ldots dt^{i-1} dt^{i+1} \ldots dt^n.$$

Wówczas

$$\int_\Theta f(x^1, \ldots, x^n) dx^n = \int_a da \int_{\Omega_a} f(t_1, \ldots, t_{i-1}, a, t_{i+1}, \ldots, t_n) |\det \xi'_a| \cdot (\pm 1) dt^1 \ldots dt^{i-1} dt^{i+1} \ldots dt^n$$
$$= \big[a = t_i\big] =$$
$$= \int_\Omega f(t^1, t^2, \ldots, t^n) |\det \xi'| dt^1 \ldots dt^n \quad \Box.$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} & \ldots & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t_1} & \ldots & & & \frac{\partial \xi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

Przykład 1 *Policzmy całkę $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Nie umiemy. Ale skoro nie umiemy policzyć I, to tym bardziej I^2?*

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_\Box e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zamieńmy sobie zmienne: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$. $\psi : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $|\psi'| = r$

Mamy

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{-r^2} r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \to +\infty} \int_0^p dr \cdot e^{-r^2} \cdot r = \frac{\pi}{2} \lim_{p \to \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^p$$
$$\frac{\pi}{2} \left[\lim_{p \to \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{(0)^2} \right] \right] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

czyli $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

0.1 Formy różniczkowe

(czyli o uprawianiu analizy na powierzchni balonika albo kartki)

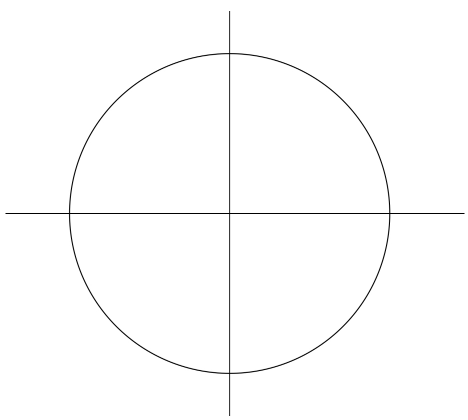
Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ - taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset M$

Przykład 2 *(sfera, obwarzanek, itd., okrąg), (stożek - nie ok!), (taka ósemka co się przecina - też nie) TODO: obrazki*

Definicja 1 *Niech U - zbiór otwarty $\subset M$ i niech odwzorowanie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ takie, że φ - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$), φ^{-1} - klasy $\mathcal{C}^1$, (czasami $\mathcal{C}^\infty$) nazywamy mapą.*
Uwaga: mapa nie musi pokrywać całego zbioru M.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakiś zbiór M. Połowa tego zbioru to niech będzie U_1, i ono się przecina z U_2. U_1 i U_2 możemy rozłożyć na prostokąty w $\mathbb{R}^2$. Co się stanie z punktami mapowanymi do obu U?

Definicja 2 *$(U^1, \varphi^1), (U^2, \varphi^2)$ - mapy na M.*
U_1 i U_2 nazywamy zgodnymi jeżeli
a) $U_1 \cap U_2 = \phi$
albo odwzorowanie $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ jest bijekcją (klasy powiedzmy sobie $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$)



Rysunek 2: $M = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2\right\}$

Przykład 3

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x, y) \in M, y > 0\}, \quad \varphi_1 : (x, y) \in U_1 \to x \\
U_2 &= \{(x, y) \in M, x > 0\}, \quad \varphi_2 : (x, y) \in U_2 \to y \\
U_3 &= \{(x, y) \in M, y < 0\}, \quad \varphi_3 : (x, y) \in U_3 \to x \\
U_4 &= \{(x, y) \in M, x < 0\}, \quad \varphi_4 : (x, y) \in U_4 \to y.
\end{aligned}$$

U_1 i U_3 oraz U_2 i U_4 są zgodne. Czy zgodne są U_1 i U_2? Czyli chcemy zbadać odwzorowanie $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, ale $\varphi_1(x, y) \in U_1 \to x$.
Czyli $\varphi_1^{-1}(x) \to \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$,
czyli $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2((x, \sqrt{1 - x^2})) = \sqrt{1 - x^2}$.
Zatem czy $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ przerzuca $]0, 1[\to]0, 1[$ jest różniczkowalne?
Odpowiedź: na zbiorze $]0, 1[$ jest.

Definicja 3 *Kolekcję zgodnych map nazywamy atlasem. Zbiór M wraz z atlasem, który pokrywa cały M nazywamy **rozmaitością** (ang. manifold).*