Mając $\sharp$ możemy zdefiniować operację odwrotną:

Definicja 1.
$$\flat : T_p^*M \to T_pM, \text{ taką, że } \alpha \in T_p^*M, \alpha = v_i dx^i$$
to wtedy
$$T_pM \ni v \stackrel{def}{=} \alpha^\flat = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g^{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$
Jeżeli wprowadzimy oznaczenie: $v^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} v_j$, *to mamy*
$$\alpha^\flat = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Przykład 1.
$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$
$$v = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{\partial}{\partial \theta} + c\frac{\partial}{\partial \varphi}, \alpha = v^\sharp = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} v^j dx^i =$$
$$= \frac{1}{2}\left(g_{11}v^1dx^1 + g_{12}v^2dx^1 + g_{13}v^3dx^1\right) + \left(g_{21}v^1dx^2 + g_{22}v^2dx^2 + g_{23}v^3dx^2\right) +$$
$$+ \left(g_{31}v^1dx^3 + g_{32}v^2dx^3 + g_{33}v^3dx^3\right).$$
czyli mamy
$$\alpha = v^\sharp = 1 \cdot adr + r^2 bd\theta + r^2\sin^2\theta c d\varphi.$$
Dostaliśmy z laboratorium wektor: $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ai_r + bi_\theta + ci_\varphi = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + c\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$
Chcemy ten wektorek podnieść.
$$\alpha = v^\sharp = (g)\,dr + \left(r^2\frac{b}{r}\right)d\theta + \left(r^2\sin^2\theta\frac{1}{r\sin\theta}c\right)d\varphi =$$
$$= adr + rbd\theta + r\sin\theta c d\varphi$$
.

Przykład 2. *Niech* $\alpha = adr + bd\theta + cd\varphi$. *Chcemy zrobić wektorek* v, *który jest dokładnie tyle:*
$$v = \alpha^\flat = (1\cdot a)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}b\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}c\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Czyli ta nasza $\alpha^\flat = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b}{r^2} \\ \frac{c}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}_{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}} = a\frac{\partial}{\partial r} + \frac{b}{r}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{c}{r\sin\theta}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$

Okazuje się, że $\alpha^\flat = \begin{bmatrix} b \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r\sin\theta} \end{bmatrix}_{i_r, i_\theta, i_\varphi}$

Definicja 2. *niech* $M = \mathbb{R}^3$,

$$\Lambda^0(M) \ni f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \xrightarrow{\flat} (df)^\flat \in T_pM$$

nazywamy gradientem funkcji f : $\nabla f \stackrel{def}{=} (df)^\flat$, *gdzie* $f : M \to \mathbb{R}^1$, f *- klasy* $\mathcal{C}^k(M)$

Przykład 3. $f(r,\theta,\varphi) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$,
$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi$

$$(df)^\flat = 1\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Siła tego polega na tym, że jak dostaniemy na ulicy tensor metryczny, to przez 3 minuty w cieniu możemy obliczyć np. gradient funkcji:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \end{bmatrix}.$$

Przykład 4. *Dostaliśmy tensor metryczny i chcemy obliczyć* $\nabla f(\xi,\eta,\delta)$, $\begin{bmatrix} \heartsuit & & \\ & \triangle & \\ & & \square \end{bmatrix}$.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\heartsuit}}\frac{\partial f}{\partial\xi} \\ \frac{1}{\sqrt{\triangle}}\frac{\partial f}{\partial\eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\square}}\frac{\partial f}{\partial\delta} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{rl} M = \mathbb{R}^3 & \\ f \to \Lambda^0(M) & \dim\Lambda^0(M) = 1 \downarrow d \\ T_pM \underset{\sharp}{\overset{\flat}{\rightleftarrows}} \Lambda^1(M) & \dim\Lambda^1(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^2(M) & \dim\Lambda^2(M) = 3 \downarrow d \\ \Lambda^3(M) & \dim\Lambda^3(M) = 1. \end{array}$$

Definicja 3. *Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $[g_{ij}]$ - tensor metryczny. Operację $\Lambda^L(M) \to \Lambda^{n-L}(M)$ nazywamy gwiazdką "$*$" Hodge'a i definiujemy następująco:*

$$* \left(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_L}\right) = \frac{\sqrt{g}}{(n-L)!} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_L j_L} \in_{j_1 j_2 \ldots j_L k_1 k_2 \ldots k_{n-L}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \ldots \wedge$$

gdzie $\in_{i_1,\ldots,i_n} = \{sgn(i_1, \ldots, i_n)$ *jeżeli* $i_m \neq i_p, \quad 0$ *w.p.p*$\}$

Przykład 5. $M = \mathbb{R}^3$, $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} *(dx) &= \frac{1}{(3-1)!} g^{1 j_1} \in_{j_1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \in_{1 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \\ &= \frac{1}{(3-1)!} g^{11} \left[\in_{123} dx^2 \wedge dx^3 + \in_{132} dx^3 \wedge dx^2\right] = \frac{1}{2}\left[1 \cdot dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^2\right] \\ &= dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Czyli $*(dx) = dy \wedge dz$.

$$* \, (dy) = *(dx^2) = \frac{1}{(3-1)!} g^{22} \in_{2 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot$$

$$g^{22} \left[\in_{213} dx^1 \wedge dx^3 + \in_{231} dx^3 \wedge dx^1\right] = \frac{1}{(3-1)!} 1 \left[-dx^1 \wedge dx^2 + 1 dx^3 \wedge dx^1\right] =$$

$$= dx^3 \wedge dx^1.$$

Więc $*(dy) = dz \wedge dx$.

$$* \, (dz) = \frac{1}{(3-1)!} g^{33} \in_{3 k_1 k_2} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} = \frac{1}{2} g^{33} \left[\in_{321} dx^2 \wedge dx^1 + \in_{312} dx^1 \wedge dx^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} 1 \left[-dx^2 \wedge dx^1 + dx^1 \wedge dx^2\right].$$

Więc $*(dz) = dx \wedge dy$

Przykład 6. $M = \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi), [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} * \, (dr) &= \overset{\sqrt{g}}{r^2 \sin\varphi} d\theta \wedge d\varphi \\ * \, (d\theta) &= r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2} d\varphi \wedge dr \\ * \, (d\varphi) &= \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \sin^2\theta} dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

.

Pytanko jest takie: Chcemy zapytać co to jest $*(dx \wedge dy)$?

$$
\begin{aligned}
*\left(dx^1 \wedge dx^2\right) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-2)!} g^{1j_1} g^{2j_2} \in_{j_1 j_2 k_1} dx^{k_1} = \\
&= \frac{1}{(3-2)!} g^{11} g^{22} \in_{123} dx^3 .
\end{aligned}
$$

Więc $*(dx \wedge dy) = dz$.
A np. $*(dx \wedge dz)$:

$$
\begin{aligned}
*\left(dx \wedge dz\right) &= \frac{1}{(3-2)!} \in_{132} dx^2 = -dy \\
*\left(dr \wedge d\theta\right) &= r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r^2} d\varphi \\
*\left(dr \wedge d\varphi\right) &= -r^2 \sin\theta \frac{1}{1} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} d\theta \\
*\left(dx \wedge dy \wedge dz\right) &= \frac{\sqrt{g}}{(3-3)!} g^{1j_1} g^{2j_2} g^{3j_3} \in_{j_1 j_2 j_3} = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} \in_{123} = 1 \\
*\left(dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\right) &= r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} .
\end{aligned}
$$

Definicja 4. $M = \mathbb{R}^3$
niech $v \in T_p M$, operację

$$rot(v) \overset{def}{=} \left(*\left(dv^\sharp\right)\right)^\flat$$

nazywamy rotacją wektora v i oznaczamy rot $v \overset{ozn}{=} \nabla \times v$.
Operację

$$div\ v \overset{def}{=} d\left(*v^\sharp\right)$$

nazywamy dywergencją i oznaczamy div $v \overset{ozn}{=} \nabla \cdot v$.
Uwaga: rotacji nie możemy wprowadzić np. na M takim, że $\dim M = 4$, bo $*(\Lambda^2(M)) \to \Lambda^2(M)$

Pozakonkursowo: chcemy zrobić z funkcji funkcję:

$$f \xrightarrow{d} df \in \Lambda^1(M) \longrightarrow \underbrace{*d*df}_{\text{operator Laplace}} .$$