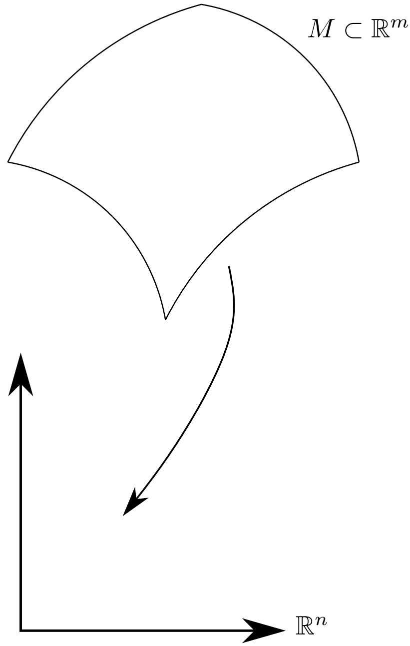


Rysunek 1: Wymiar pączka może być większy! $m > n$

Chcemy powiedzieć co to są wektory w takim świecie? Zaczniemy rysować krzywą po powierzchni.

Niech M - rozmaitość. Odwzorowanie $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R} \to \sigma(t) \in M$ nazywamy krzywą na M. σ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$

Przykład 1. *(spirala na walcu)*

$$\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

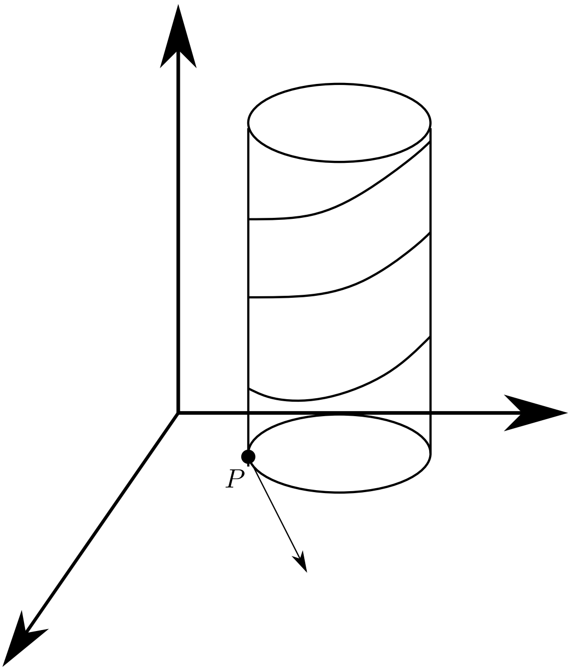
Definicja 1. *Niech $p \in M$, σ_1, σ_2 - krzywe na M takie, że $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = P$. Mówimy, że σ_1 i σ_2 są* <u>*styczne w punkcie P*</u>*, jeżeli*

$$\left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(\varphi_0 \cdot \sigma_2(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Rozważmy wszystkie krzywe przechodzące przez punkt $P \in M$. Na tym zbiorze wprowadzamy relację: $\sigma_1 \sim \sigma_2$ jeżeli σ_1 i σ_2 są styczne. Jeżeli σ krzywa przechodząca przez punkt P, to wektorem stycznym zaczepionym w punkcie P nazwiemy $v = \underset{\substack{\text{klasa}\\ \text{równoważności}}}{[\sigma]}$

Przykład 2. *Weźmy krzywą* $\sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$\sigma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Przykład 3. *Niech* $f(p) = C \underset{p \in M}{\forall}$. *Ile wynosi* $v(f)$*?*

$$\begin{aligned} &v(f) = v(c) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1) = \\ &= c \cdot v(1 \cdot 1) = c \cdot (1 \cdot v(1) + 1v(1)) = \\ &= c \cdot 2v(1) = 2v(c) = 2v(f). \end{aligned}$$

Czyli $v(f) = 2v(f)$, czyli $v(f) = 0$ (pochodna stałej $= 0$)

Każdy operator, który to umie to różniczkowanie.

Pytanie 1. *Jak można w praktyce zrealizować taki operator?*
Niech $v \in T_pM, v = [\sigma]$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))|_{t=0}.$$

Definicja 2. *Zbiór wszystkich wektorów stycznych zaczepionych w punkcie $p \in M$ oznaczamy przez T_pM i nazywamy przestrzenią styczną.*

Chcemy wyposażyć T_pM w strukturę przestrzeni wektorowej. Potrzebujemy działań. Niech $v_1, v_2 \in T_pM$ i $v_1 = [\sigma_1], v_2 = [\sigma_2]$. Wówczas

$$v_1 \diamond v_2 \overset{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1)) + \varphi(\sigma_2)\right]$$
$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall} \alpha \cdot v_1 \overset{\text{def}}{=} \left[\varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(\sigma_1)\right].$$

T_pM wraz z działaniami $(\diamond, \cdot\ )$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Zbiór

$$TM \overset{\text{def}}{=} \{p \in M, T_pM\}$$

nazywamy wiązką styczną.

Pytanie 2. *Czy w TM możemy zadać strukturę przestrzeni wektorowej?*
Odpowiedź: NIE DA SIĘ

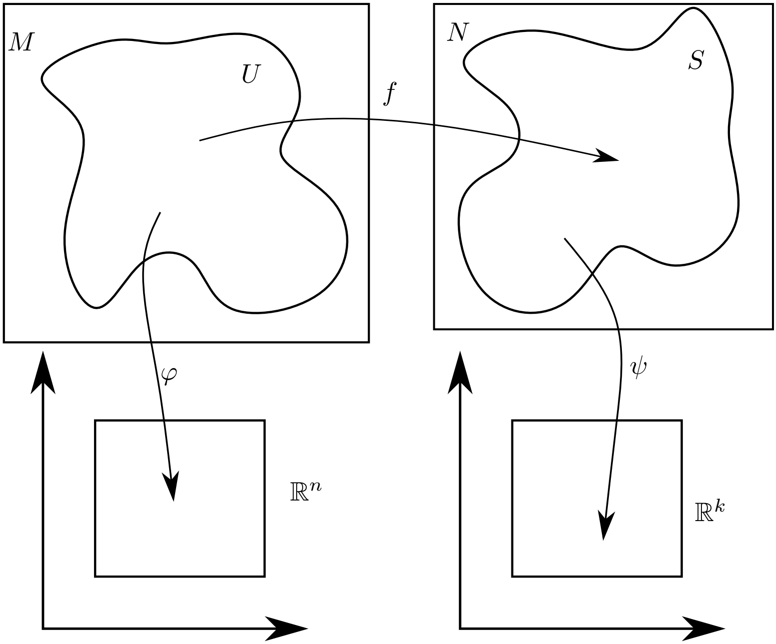
Definicja 3. *Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie P oznaczamy przez D_pM*

Chcemy nadać D_pM strukturę przestrzeni wektorowej.

$$v_1, v_2 \in D_pM, f \in \mathcal{C}^\infty(M) \implies (v_1 \diamond v_2)f \overset{\text{def}}{=} v_1(f) + v_2(f)$$
$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall} (\alpha \bowtie v_1)f = \alpha \cdot v_1(f)$$
.

Pytanie 3. *Co to znaczy, że f - klasy $C^\infty(M)$?*

Jeżeli $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ - jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.
Związek między T_pM, a D_pM :
Niech $v = 5e_x + 6e_y \in T_pM$. Czy znajdziemy odwzorowanie z T_pM do D_pM, (które dokładnie jednemu v przyporządkowałoby jeden element).$\rightarrow$ izomorfizm między T_pM i D_pM.



Rysunek 2: f nie musi być bijekcją jakby co

0.1 Przestrzeń różniczkowa

Niech $f : M \to \mathbb{R}$, f - klasy $\mathcal{C}^\infty(M)$
niech $v\left(\right) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, takie, że

$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$$
$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{f\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(\alpha f) = \alpha v(f)$$
$$\underset{f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)}{\forall} v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p)v(f).$$

$v\left(\right)$ spełniający te warunki nazywamy różniczkowaniem w punkcie p.