

## 0.1 Zbiory miary Lebesgue'a zero

**Definicja 1.** *Kostką w  $\mathbb{R}^n$  ( $a_k \leq b_k$ ) nazywamy zbiór*

$$P_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Definicja 2.** *Objętością kostki nazywamy*

$$|P_k| = |[a_1, b_1]| \cdot |[a_2, b_2]| \cdot \dots \cdot |[a_n, b_n]|,$$

gdzie  $|[a_k, b_k]| = |b_k - a_k|$ .

**Definicja 3.** *Niech  $X \in \mathbb{R}^n$ . Mówimy, że zbiór  $X$  jest miary Lebesgue'a zero, jeżeli*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{P=P_1 \cup \dots \cup P_k} : x \in P, \sum_{i=1}^k |P_i| < \varepsilon.$$

**Uwaga:**  $k$  nie musi być wielkością skończoną.

**Przykład 1.** *Niech  $\{1\} \subset [-10, 10]$ , wówczas*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{p=[1-\frac{\varepsilon}{4}, 1+\frac{\varepsilon}{4}]} : \{1\} \subset P, |P| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

**Przykład 2.** *zbiór Cantora*

Chcemy dojść do tw Lebesgue.

**Twierdzenie 1.** *(Lebesgue) Niech  $P$  - zbiór nieciągłości funkcji  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona na  $D$ ,  $D$  - ... jest zbiorem miary Lebesgue'a zera  $\iff f$  - całkowalna na  $D$ .*

Wiemy, że  $f$  - całkowalna  $\iff$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \cdot \exists_{\Pi} \cdot |\bar{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Ostatnio pokazaliśmy, że

$$A_\varepsilon = \{x \in A, O(f, x) \geq \varepsilon\}, \text{ to } A_\varepsilon \text{ jest zbiorem domkniętym.}$$

(PS funkcja  $f$  na zbiorze  $A$  powinna być ograniczona!!!)

**Obserwacja 1.** *Jeżeli weźmiemy stół o jakiejś długości to mogę wziąć ileś karetek (albo naleśników. Nie wiadomo czy działa dla czego innego) i go nimi przykryć. Co więcej, jeżeli będzie promocja, to mogę nawet rzucić ich przeliczalnie dużo. Pytanie: czy dla każdego zbioru mogę (niezależnie od kształtu karetek) przykryć go skończoną liczbą karetek?*

"/img/"fig\_33.png

Weźmy długi stół:

$$R = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]n-2, n+2[ \cup ]-n-2, -n+2[$$

$$]0, 1[ \subset [-2, 2]$$

$$]0, 1[ \subset [-2019, 2018] \cup [-2, 2]$$

$$]0, 1[ = \bigcup_{n=2}^{\infty} ]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$$

Ostatnie jest słabe, bo nie mogę wybrać pokrycia ze skończonej ilości elementów.

**Definicja 4.** Niech  $X$  - zbiór a  $F = \{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, A_i, i \in \mathbb{N}\}$  - rodzina zbiorów. Mówimy, że  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , jeżeli  $X \subset \bigcup_{i,\alpha} A_\alpha$ . Jeżeli zbiory  $A_\alpha$  są otwarte, to mówimy, że  $F$  jest pokryciem otwartym, jeżeli ilość zbiorów  $A_\alpha$  jest skończona, to mówimy, że pokrycie jest skończone. Dowolny podzbiór  $F$  taki, że jest też pokryciem zbioru  $X$  nazywamy podpokryciem.

**Definicja 5.** Zbiór  $X$  nazywamy zwartym, jeżeli z **każdego** pokrycia otwartego możemy wybrać skończone podpokrycie.

Jak sprawdzamy, czy zbiór jest zwarty, to nie szukamy skończonych pokryć, tylko takie które nie są skończone.

**Stwierdzenie 1.**  $(X - \text{domknięty, ograniczony}) \iff (X\text{-zbiór zwarty})$

**Dowód 1.** niech  $X \in \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  - przestrzeń metryczna

$\Leftarrow$  1 Pokażemy, że jeżeli  $X$  - zwarty, to  $X$  - ograniczony. (przypomnienie: zbiór  $A \subset \mathbb{X}$

"../img/"fig\_34.png

jest ograniczony jeżeli  $\exists_r \exists_{x_0 \in A}$ , że  $A \subset K(x_0, r)$  Skoro  $X$  - zwarty, to niech  $F$  będzie pokryciem złożonym z  $K(x, 1), x \in X$ .  $F = \left\{ K(x, 1), \forall_{x \in X} \right\}$ .  $F$  jest pokryciem zbioru  $X$ , ale ponieważ  $X$  - zwarty, to znaczy, że z pokrycia  $F$  możemy wybrać **skończone** podpokrycie, co oznacza, że zbiór  $X$  możemy ułożyć w kulę o skończonym promieniu. Zatem  $X$  - ograniczony.

$\Leftarrow$  Pokażemy, że  $X$  - zwarty, to  $X$  - domknięty. Pokażemy, że  $X'$  - zbiór otwarty. Czyli, że dla dowolnego  $p \in X'$   $\exists_{K(p, \tilde{r})}$ , że  $K(p, \tilde{r}) \cap X = \emptyset$  co będzie oznaczało, że  $X'$  składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych. Weźmy  $q \in X$ , utwórzmy dwa otoczenia:

$$K(q, r), K(p, r); r = \frac{1}{2}d(p, q).$$

Widać, że  $K(q, r) \cap K(p, r) = \emptyset$ . Powtarzamy taką procedurę dla każdego  $q \in X$ , oznacza to, że dostaniemy pokrycie zbioru  $X$  kulami  $K(q, r_q), q \in X$ , ale  $X$  jest zbiorem zwartym więc mogą wybrać **skończoną** ilość kul

$K(q_1, r_1), K(q_2, r_2), \dots, K(q_k, r_k)$  będącą pokryciem zbioru  $X$ . A to znaczy, że

$$\underbrace{(K(p, r_1) \cap K(p, r_2) \cap \dots \cap K(p, r_k))}_{\text{jest do zbiór niepty i otwarty}} \cap \underbrace{(K(q_1, r_1) \cup K(q_2, r_2) \cup \dots \cup K(q_k, r_k))}_{\text{Pokrywa cały } X} = \emptyset.$$

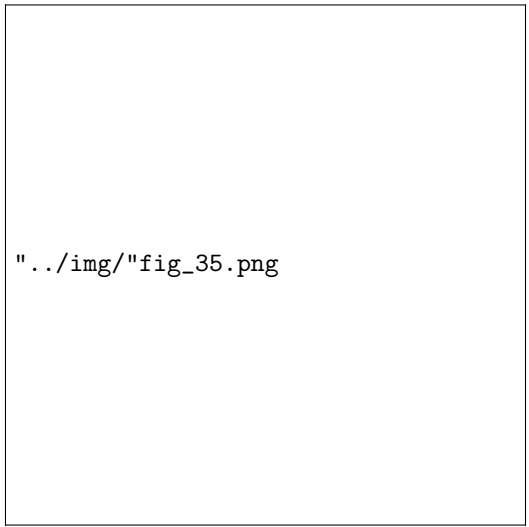
czyli np.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = [0].$$

Znaleźliśmy otoczenie otwarte punktu  $P : K(p, r_k) \cap \dots K(p, r_k)$ , takie, że nie ma punktów wspólnych z  $X$ , więc  $p$  jest punktem wewnętrznym, czyli  $X'$  - otwarty, czyli  $X$  - domknięty.

$X$  - domknięty i ograniczony  $\implies X$  - zwarty. Niech  $P$  - kostka z  $\mathbb{R}^n$ , metryka  $d_2$ . Pokażemy, że  $P$  jest zwarta.

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$



Rysunek 1: Nieważne, co  $A$  myśli o sobie, jeżeli otoczymy je kulą, to jest ograniczone i koniec

$$\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q.$$

Dowód przez sprzeczność:  
Załóżmy, że  $P$  - domknięty i ograniczony i  $P$  nie jest zwarty. Co to znaczy, że  $P$  nie jest zwarte? Oznacza to, że istnieje pokrycie zbioru  $P$  takie, że nie da się wyciągnąć z niego skończonego podpokrycia.

Jeżeli  $P$  nie da się pokryć skończoną ilością zbiorów, to znaczy, że jeżeli weźmiemy kostkę  $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2] \times \dots \times [a_n, c_n]$  gdzie  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ , to jej też nie możemy podzielić na skończoną ilość elementów. Czyli  $P_1 \subset P$ , kulę  $P_1$  też możemy podzielić na cztery części itd... W efekcie dostaniemy ciąg kostek  $PP_1P_2P_3 \dots P_n \dots$ . Weźmy ciąg elementów

$$\begin{aligned} x_0 &\in P \\ x_1 &\in P_1 \\ &\vdots \\ x_n &\in P_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Znaczy, że ciąg  $\{x_n\}$  jest ciągiem Cauchy (bo każdy element ciągu asdasd). Ciąg  $\{x_n\} \in \mathbb{R}^n$  czyli  $X_n$  jest zbieżny. (bo  $\mathbb{R}^n$  - zupełna). Niech  $\tilde{x}$  będzie granicą  $\{x_n\}$  a zbiór  $\{P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$  jest pokryciem  $P$  takim, z którego nie możemy wyciągnąć skończonego podpokrycia. Ale skoro  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ , to znaczy, że

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \forall n > N . x_n \in K(\tilde{x}, \epsilon).$$

Oznacza to, że mogę tak dobrać  $\epsilon$ , że w  $K(\tilde{x}, \epsilon)$  będą się zawierać wszystkie  $P_i, i > n$ . Mogę wtedy wybrać **skończone** podpokrycia kostki  $P$ .

"../img/"fig\_36.png

Rysunek 2: Przykrywanie zbioru kulami

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n_i}, K(\tilde{x}, \varepsilon)\}.$$

*i sprzeczność*

Wracamy do tw. Lebesgue'a. Obserwacja: Niech  $D$  - zwarty,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  - ograniczona i niech  $A = \{x \in D, o(f, x) < \varepsilon\}$ . Wówczas:

$$\exists_{\Pi} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$

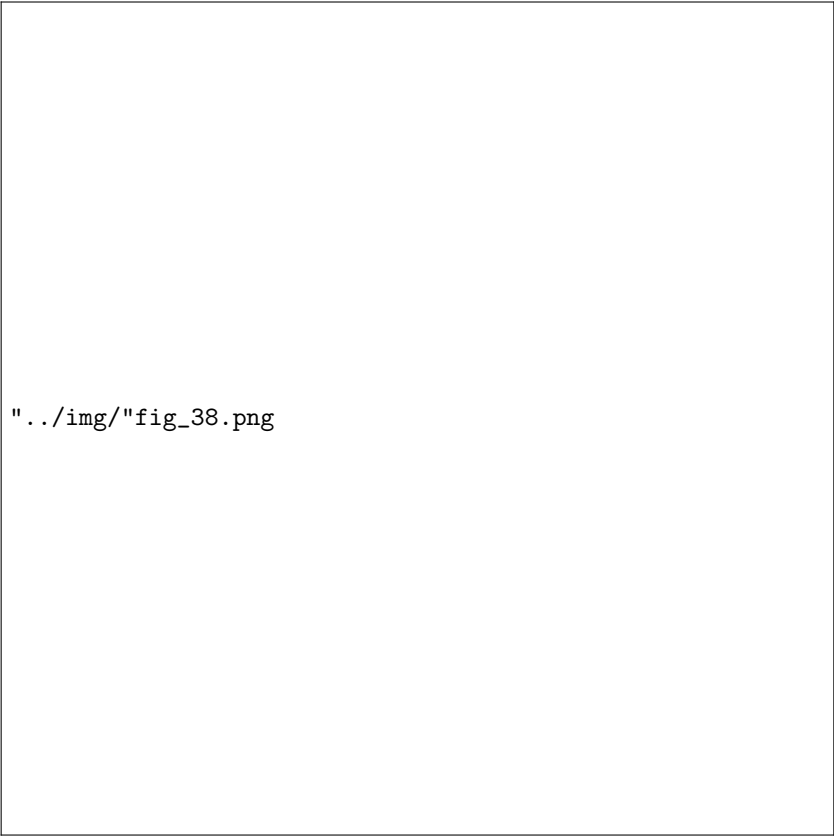
**Dowód 2.** Skoro  $\forall_{x \in A} \lim_{r \rightarrow 0} | \sup_{K(x', r)} f(x') - \inf_{x' \in K(x', r)} f(x') | < \varepsilon$  To znaczy, że  $\exists_{r_\varepsilon}$  takie, że  $| \sup f(x') - \inf f(x') | < \varepsilon$ . Jeżeli zbadamy wszystkie kule  $K(x, r_\varepsilon)$   $\forall_{x \in D}$  to otrzymamy pokrycie  $A$ . Ale  $A$  jest zbiorem zwartym, więc możemy wybrać skończone podpokrycie, czyli skończoną ilość kul takich, że

$$(*) A \subset K(x_1, r_\varepsilon^1) \cup K(x_2, r_\varepsilon^2) \cup \dots \cup K(x_n, r_\varepsilon^n).$$

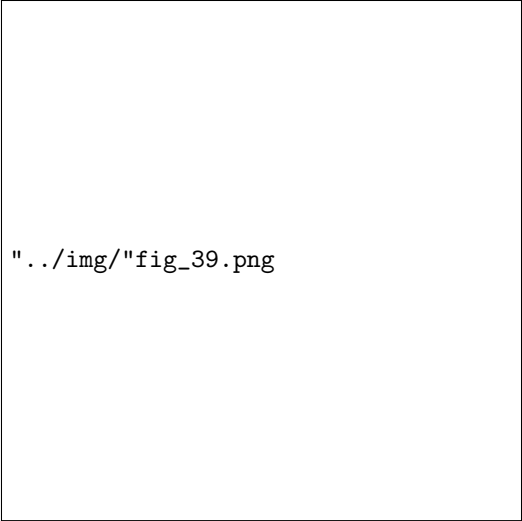
"../img/"fig\_37.png

*Możemy zatem wybrać podział  $\Pi$  zbioru  $D$  zgodny z podziałem  $(*)$ , w wyniku czego,*

$$|\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |D|.$$



`"../img/"fig_38.png`



`"../img/"fig_39.png`

Rysunek 3: mogę wybrać sobie takie kółko, że wszystkie następne kwadraty będą już leżały w tym kółku!

"../img/"fig\_40.png