W ostatnim odcinku:
M, N - rozmaitości, $\dim M = n, \dim N = k, h : M \to N$, $\langle h^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, h_x v\rangle$ i ogólnie, jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(N)$ to $\langle h^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, h_x v_1, \ldots, h_x v_n\rangle$.

Przykład 1 *Niech* $N = \mathbb{R}^2$ *i* $M = \mathbb{R}^1$, $\alpha = 7dx \wedge dy \in \Lambda^2(N)$,

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \end{bmatrix} \to (x = 2t, y = 3t \implies dx = 2dt, dy = 3dt).$$

$$h^*\alpha = 7 \cdot 2dt \wedge 3dt = h^*\alpha = 0.$$

Ostatino chcieliśmy pokazać, że $d(h^*f) = h^*(df)$. To jest istotne w kontekście tej dwuformy przekształcenia transormacji Lorentza co była ostatnio. $(d(h^*F) = 0 \implies dF = 0, h^*F \xrightarrow{h} F)$.
Wzięliśmy sobie $f : N \to \mathbb{R} : f(x_1, \ldots, x_k)$. Potem mieliśmy $h : M \to N : h(t_1, \ldots, t_n) = \begin{bmatrix} h^1(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ h^k(t_1, \ldots, t_n) \end{bmatrix}$ i chcieliśmy pokazać, że $h^*(df) = d(h^*f)$.
Wiemy, że $\langle h^*(df), v\rangle = \langle df, h_* v\rangle$ $(v \in T_pM : v = a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n})$. Przepchnięcie wektorka $h_*v = \left([h'] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial h^k}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \left(a_1 \frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial h^1}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \left(a_1 \frac{\partial h^k}{\partial t^1} + \ldots + a_n \frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

$$\begin{aligned}
\langle df, h_x v\rangle &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^2} a_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n} a_n + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^k}{\partial t^1} a_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n} a_n = \\
&= a_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) + \ldots + a_n \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) = \\
&= \left\langle ?, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h^2}{\partial t^1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^1} \right) dt^1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h^1}{\partial t^n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial h^k}{\partial t^n} \right) dt^n, a_1 \frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, a_n \frac{\partial}{\partial t^n} \right\rangle = \\
&= \left\langle \underbrace{f\left(h^1(t^1, \ldots, t^n), h^2(t^1, \ldots, t^n), \ldots, h^k(t^1, \ldots, t^n)\right)}_{h^*f}, \right. \\
&\left. \frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, a_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right\rangle = \langle d\left(h^*f\right), v\rangle
\end{aligned}$$

co daje

$$d\left(h^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)\right) = h^*\left(d\left(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k\right)\right) \quad \square.$$

0.1 Bazy w T_pM

Obserwacja: Niech M - rozmaitość i $\langle | \rangle$ - iloczyn skalarny. Niech $e_1, \ldots, e_n$ - baza T_pM. Wówczas, jeżeli $v = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ i $w = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned}
&\langle v|w \rangle = \langle a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n, b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n \rangle = \\
&= a_1 b_1 \langle e_1|e_1 \rangle + a_1 b_2 \langle e_1|e_2 \rangle + \ldots + a_1 b_n \langle e_1|e_n \rangle + \ldots + a_n b_n \langle e_n|e_n \rangle = \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle e_1|e_1 \rangle & \langle e_1|e_2 \rangle & \ldots & \langle e_1|e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & & \\ \langle e_n|e_1 \rangle & \ldots & & \langle e_n|e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Macierz $[g_{ij}]$ nazywamy tensorem metrycznym $\det [g_{ij}] \overset{\text{ozn}}{=} g$. $[g_{ij}]^{-1} \overset{\text{ozn}}{=} \left[g^{ij}\right]$ - macierz odwrotna.

W zwykłym $\mathbb{R}^4 : [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, p. Minkowskiego: $g_{\mu v} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $\mu, v = 0, \ldots, 3$

Bazy w $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc}
M = \mathbb{R}^2, & & N = \mathbb{R}^2 \\
\begin{bmatrix} x, y \\ e_x, e_y \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} & \overset{x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi}{\longrightarrow} & \begin{bmatrix} r, \varphi \\ e_r, e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\
g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & [?].
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&h^*(e_r) = \left([h'] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}}, h^*(e_\varphi) \\
&h(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}, h' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \\
&h^*(e_r) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}_{e_x, e_y}, e_r = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y \\
&z = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y \\
&h^*(e_\varphi) = [h'] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{bmatrix}, e_\varphi = -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\varphi \frac{\partial}{\partial y} \\
&g_{ij} = \begin{bmatrix} \langle e_1|e_1 \rangle & \langle e_1|e_2 \rangle \\ \langle e_2|e_1 \rangle & \langle e_2|e_2 \rangle \end{bmatrix}, [g_{ij}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \langle e_x|e_x \rangle = 1, \langle e_x|e_y \rangle = 0 \\
&\langle e_r|e_r \rangle = \langle \cos\varphi e_x + \cos\varphi e_y | \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y \rangle = \cos^2\varphi \langle e_x|e_x \rangle + \sin^2\varphi \langle e_y|e_y \rangle \\
&\langle e_r|e_\varphi \rangle = \langle \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y | -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y \rangle = 0 \\
&\left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|^2 = \langle e_\varphi|e_\varphi \rangle = \langle -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y | -r\sin\varphi e_x + r\cos\varphi e_y \rangle = r^2.
\end{aligned}$$

$\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \| = r, [g_{ij}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$.

baza $\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle$ nie jest bazą ortonormalną!!!

$$e_x, e_y, e_z \to g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ - jest fajnie.}$$

$$e_r, e_\theta, e_\varphi \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & r^2 & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \|e_\theta\| = r, \|e_\varphi\| = r\sin\theta$$

Przykład 2 *Dostałem wektorek* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *w sferycznych. Ale w jakiej konkretnie bazie?*

W fizyce mierzone wielkości np. wektorowe podajemy zawsze we współrzędnych ortonormalnych.
We współrzędnych sferycznych mamy dwie bazy: - ortogonalną: $e_r, e_\theta, e_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$
- ortonormalną: $i_r, i_\theta, i_\varphi : \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$. Więc jeżeli ktoś powiedział, że dostał $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ to znaczy, że ma $2\frac{\partial}{\partial r} + 3\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + 4\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Obserwacja: niech $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ i niech $w = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ i niech $g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ - tensor metryczny. Wówczas wiemy, że $\langle v|w\rangle = [v]^T [g_{ij}] [w] = \underbrace{\left[a_1g_{11} + a_2g_{21} + a_3g_{31}, \sum_{i=1}^3 a_ig_{i2}, \sum_{i=1}^3 a_ig_{i3}\right.}_{\langle v|}$

Ale w sumie to mogę wziąć coś takiego $\langle v|$.

$$\left(\sum_{i=1}^3 a^ig_{i1}\right)dx^1 + \left(\sum_{i=1}^3 a^ig_{i2}\right)dx^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a^ig_{i3}\right)dx^3 = .$$

$$= \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 a^ig_{ij}dx^j = a^ig_{ij}dx^j.$$

Zapomniałem o sumach, bo $a^ib_i \overset{\text{ozn}}{=} a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$, w odróżnieniu od $a^\mu b_\mu = a^0b_0 + a^1b_1 + \ldots$ (Konwencja sumacyjna Einsteina).
Ozn. $\sum_{i=1}^3 a^ig_{ik} \overset{\text{ozn}}{=} a^ig_{ik} = a_k$

Definicja 1 *niech M - rozmaitość wymiaru n, g_{ij} - tensor metryczny na M, operacją $\#$: $T_pM \to T_p^*M$ taką, że dla $v = a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + a^n\frac{\partial}{\partial x^n}$,*

$$v^\# = a^ig_{i1}dx^1 + a^ig_{i2}dx^2 + \ldots + a^ig_{in}dx^n, i = 1, \ldots, n.$$

zadaje izomorfizm między T_pM a T_p^*M.

Przykład 3 $v = 7\frac{\partial}{\partial r} + 8\frac{\partial}{\partial \theta} + 9\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

$$\alpha \in T_p^*M = v^\# = 7q_{11}dr + 8q_{22}d\theta + 9q_{33}d\varphi = 7dr + 8r^2d\theta + 9r^2\sin^2\theta d\varphi.$$