

Chcemy wygenerować wzór na zamianę zmiennych. Dawno dawno temu mogliśmy zrobić tak:

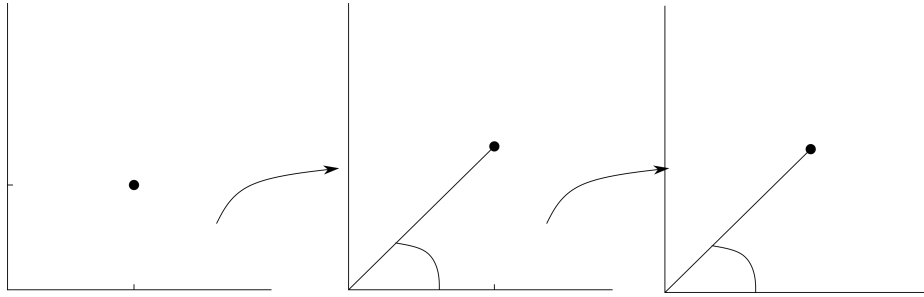
$$\int_2^4 2xe^{x^2} dx = |x^2 = t, 2xdx = dt| = \int_4^{16} e^t dt.$$

Czyli w ogólności

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Jak weźmiemy całkę

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy = |r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(\frac{y}{x})| = \int dr \int d\varphi f(r, \varphi)??.$$



Rysunek 1: zmieniamy zmienne pojedynczo a nie jednocześnie  $(x, y) \rightarrow (x, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} \int dx \int dy f(x, y) &= ||y = x \operatorname{tg} \varphi, dy = \frac{x}{\cos^2 \varphi} d\varphi|| = \int dx \int \frac{x}{\cos^2 \varphi} \varphi f(x, y(x, \varphi)) = \\ &= ||x = r \cos \varphi, dx = dr \cos \varphi|| = \int d\varphi \int \frac{dr \cos \varphi r \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi))) = \\ &= \int d\varphi \int dr f(r, \varphi) r, \text{ czyli } "??" = r. \end{aligned}$$

To teraz w drugą stronę.  $(y \rightarrow r), (x \rightarrow \varphi)$

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dx dy &= ||y = \sqrt{r^2 - x^2}, dy = \frac{2rdr}{2\sqrt{r^2 - x^2}}|| = \\ &= \int dx \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y(x, r)) = ||x = r \cos \varphi, dx = -r \sin \varphi d\varphi|| = \\ &= - \int dr \int \frac{r \sin \varphi d\varphi r}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x(r, \varphi), y(x(r, \varphi), r)) = \\ &= - \int dr r^2 \int d\varphi \frac{\sin \varphi f(r, \varphi)}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} = - \int dr \int d\varphi f(r, \varphi) r. \end{aligned}$$

Dostaliśmy prawie to co trzeba ( $r$ ). Tylko wpadł jakiś dziwny minus. Podobno minus zniknie gdy doprowadzimy do porządku granice zmiennej  $\varphi$ , bo  $x = r \cos \varphi$  a  $\cos$  jest malejący w tym przedziale. (tablica dalej nie działa - minęły 3 miesiące - z marsa by już doszła więc wysyłają pewnie z Saturna - MK<sup>TM</sup>)

Niech  $\psi \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$ .

$$\psi' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\|\psi'\| = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r.$$

Chcemy pokazać, że jeżeli  $\varphi : A \rightarrow A$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$ , to możemy przedstawić  $\varphi$  jako złożenie dwóch transformacji, z których pierwsza nie zmienia  $n - 1$  zmiennych a druga nie zmienia 1 zmiennej (transformacje pierwotne/prymitywne albo inne ubogające nazwy).

**Dowód 1** (coś w rodzaju dowodu)  
 $\varphi$  możemy przedstawić jako

$$\varphi \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Pytanie 1** Czy istnieje odwzorowanie  $\Theta^{-1} : A \rightarrow A$  takie, że

$$\Theta = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ \varphi_j(t_1, \dots, t_n) \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

( $t_{i \neq j}$ ) mogą zostać zamiast zamieniać je na  $x_i$ . Dlaczego interesuje nas czy istnieje funkcja odwrotna? Bo jeżeli istnieje, to możemy zapisać

$$\varphi = \varphi \circ \Theta^{-1} \circ \Theta = (\varphi \circ \Theta^{-1}) \circ \Theta.$$

Wiemy, że  $\varphi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi^{-1}$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  i  $\varphi : A \rightarrow A$ . Mamy twierdzenie o lokalnej odwracalności!  $\det \varphi' \neq 0$ , czyli w macierzy  $\varphi'$  istnieje przynajmniej 1 element niezerowy. (w rzeczywistości to zawsze będzie trochę więcej - nieśmiały warunek)

np.  $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^i} \neq 0$ . Oznacza to, że odwzorowanie

$$\eta : \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j = \varphi^i(t_1, \dots, t_n) \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\eta' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

i  $\det \eta' \neq 0$ , więc istnieje  $\eta^{-1}$ .

Czyli  $\varphi = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} = (\varphi \circ \eta) \circ \eta^{-1}$   $\square$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) \quad (1)$$

**Twierdzenie 1** (O zamianie zmiennych)

Niech  $\Theta, \Omega$  - zbiory otwarte w  $\mathbb{R}^n$  i  $\xi : \Omega \rightarrow \Theta$ ,  $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - ograniczona i całkowna.  $\xi$  - klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Omega$ ,  $\xi^{-1}$  klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\Theta$ . Wtedy

$$\int_{\Theta} f(x) dx = \int_{\Omega} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (2)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \Theta, t = (t^1, \dots, t^n) \in \Omega$$

**Dowód 2** (przez indukcję względem wymiaru przestrzeni)

- dla  $n = 1$  - zrobione w I semestrze.
- zakładamy, że prawdziwy jest napis

$$\int_{A' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = \int_{\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|, (\xi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}).$$

Chcemy pokazać, że prawdziwy jest napis

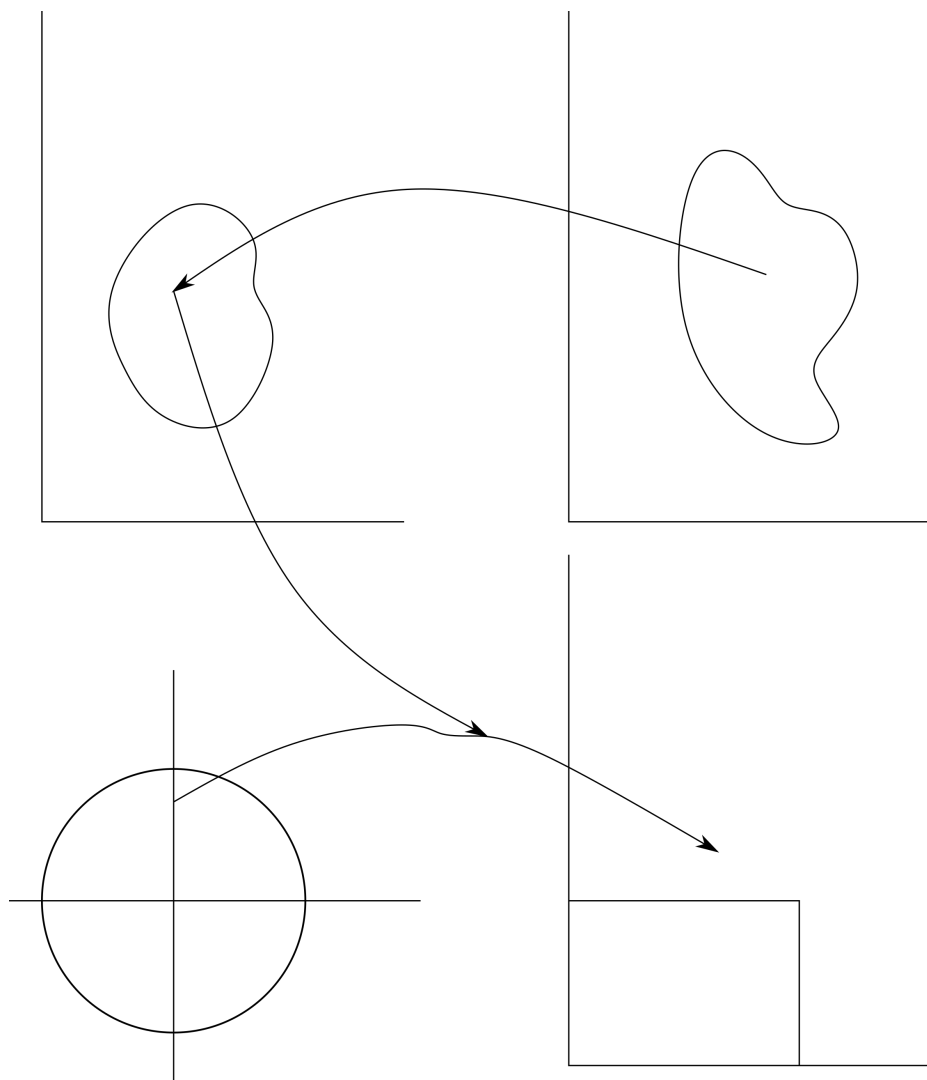
$$\int_{A \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} f(\xi(t)) |\det(\xi'(t))|.$$

Uwaga: wartość bezwzględna oznacza, że musimy uważać przy rozstawianiu granic:

$\left(\int_a^b f\right)$  oznacza, że zakładamy, że  $a \leq b$ . Dowód przeprowadzamy dla  $\xi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  takiego, że  $\xi$  nie zamienia jednej zmiennej.

**Obserwacja 1** Niech  $K = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$ , niech  $K_a = \{(x, a), x^2 + a^2 \leq 1\}$ .

Wówczas  $K = \bigcup_{a \in [-1, 1]} K_a$ , zatem  $\int_K f = \int_{-1}^1 da \int_{K_a} f$



Rysunek 2:  $\Omega \rightarrow \Theta - f - \mathbb{R}$

