Notatki z Algebry II L2019, FUW

Jakub Korsak

26 czerwca 2019

1 Wykład (08.03.2019)

1.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

Definicja 1 *V - przestrzeń wektorowa,* $\dim V < \infty, \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C})$
$V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \to \mathbb{F}, \phi$ *- liniowe* $\}$.
Terminologia: ϕ jest formą liniową

Przykład 1 $V = \mathbb{R}^3, \phi\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja 2 *Odwzorowanie $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V, jeżeli:*

- $\Omega(v, \lambda_1 \tilde{v}_1 + \lambda_2 \tilde{v}_2) = \lambda_1 \Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2 \Omega(v, \tilde{v}_2) \underset{v,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2 \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1 \Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2 \Omega(v_2, \tilde{v}) \underset{v_1,v_2,\tilde{v} \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$

Przykład 2 $V = \mathbb{R}^2$. *Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci*

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^1, x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3 *Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będziebazą przestrzeni V. Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j]_{i,j \in 1,\ldots,n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie $\mathcal{E}$ i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$*

Przykład 3

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \Omega \text{ - jak poprzednio } [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Uwaga: Jeśli $v \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

a $\tilde{v} \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, *to*

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j) = \sum_{i,j} \lambda^i \Omega(e_i, e_j) \tilde{\lambda}^j = \begin{bmatrix} \lambda^1, \ldots, \lambda^n \end{bmatrix} [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

1.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V. Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_i a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \underset{\text{conv.}}{\overset{\text{East}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = \left[a_i^k\right]^T [\Omega]_{\mathcal{E},k,l} \left[a_j^l\right] \tag{1}$$

Zauważmy $\left[a_i^j\right] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ i wzór **??** zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Przykład 4

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega\left(\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y^1\\y^2\end{bmatrix}\right) = x^1y^1 + x^2y^2.$$

$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. *Rozważmy bazę* $\mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}.$$

1.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$

Zauważmy, że $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det[\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det[\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det[\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

Definicja 4 *Mówimy, że Ω jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej)* $\det[\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \ldots, E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}} = rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}'}$

Definicja 5 *Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie $\mathcal{E}$ przestrzeni wektorowej V.*

Przykład 5 *(a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że Ω jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$*
(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^k w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odzworowanie $T_\Omega : V \to V^*$ takie, że

$$\langle T_\Omega(v), \tilde{v}\rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E},i,j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_\Omega(e_i), e_j\rangle = [T_\Omega]_{\mathcal{E},i,j}^{\mathcal{E}^*}.$$

w szczególności $rk\Omega = rk(T_\Omega) = n+1$

Definicja 6 *Mówimy, że forma dwuliniowa* $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ *jest*

- *symetryczna, jeśli* $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$
- *antysymetryczna, jeśli* $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \underset{v, \tilde{v} \in V}{\forall}$

Przykład 6

- $\Omega : \psi$ *na* $\mathbb{R}_n[.]$ *jak wyżej sąsymetryczne.*
- $\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ *dla* $\begin{matrix} - \text{ antysymetria} \\ + \text{ symetria} \end{matrix}$

Stwierdzenie 1 *Dla każdego* Ω *istnieje* Ω_a *i* Ω_s*, gdzie* Ω_s *- symetryczna,* Ω_a *- antysymetryczna oraz*

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

Ponadto Ω_a, Ω_s *- jednoznacznie wyznaczone*

Dowód 1 *Sprawdzić, że* $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v)); \Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}), \Omega(\tilde{v}, v))$

2 Wykład (15.03.2019)

2.1 Formy dwuliniowe (a) i formy kwadratowe (b)

$$(a) \quad \phi(w,\tilde{w}) = \int_0^1 w(t)\tilde{w}'(t)dt \in \mathbb{R}, \quad w,\tilde{w} \in \mathbb{R}_3[.], \phi : \mathbb{R}_5[.] \times \mathbb{R}_5[.] \to \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \varphi(w) = \phi(w,w) = \int_0^1 w(t)w'(t)dt, \quad \varphi : \mathbb{R}_3[.] \to \mathbb{R}.$$

Definicja 7 *Niech $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie $\varphi : V \to \mathbb{F}$ takie, że $\varphi(v) = \phi(v,v)$ nazywamy formą kwadratową związaną z ϕ*

Przykład 7 *Formy kwadratowe na $V = \mathbb{R}^2$. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\phi_A(x,\tilde{x}) = x^T A\tilde{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$ $ax_1\tilde{x}_1 + bx_1\tilde{x}_2 + cx_2\tilde{x}_1 + dx_2\tilde{x}_2$*
$\varphi_A(x) = \phi_A(x,x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$

Przypomnienie:

$$\phi = \phi_a + \phi_s, \phi_a(v,\tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v,\tilde{v}) - \phi(\tilde{v},v)), \phi_s(v,\tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v,\tilde{v}) + \phi(\tilde{v},v)).$$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v,v) + \phi_s(v,v) = \phi_s(v,v)$

Stwierdzenie 2 *Jeżeli $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ - jak wyżej, to*

$$\phi_s(v,\tilde{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(v+\tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})) \text{ - formuła polaryzacyjna! }.$$

Dowód 2 *Obliczmy $\varphi(v+\tilde{v}) = \phi(v+\tilde{v}, v+\tilde{v}) = \phi(v,v) + \phi(\tilde{v},\tilde{v}) + \phi(v,\tilde{v}) + \phi(\tilde{v},v) = \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) +$ $2\phi_s(v,\tilde{v})$* $\square$

Uwaga: Powyższe stwierdzenie zadaje $1-1$ odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład 8 *$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.*

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$\underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\forall}$ rozważmy $\phi_\lambda(x,\tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$. Zauważmy, że $\varphi(x) = \phi_\lambda(x,x)$, ϕ_0 jest symetryczną formą dwuliniową oraz $\varphi(x) = \phi_0(x,x)$

Przykład 9 *φ - forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ. Macierzą formy φ w bazie $\mathcal{E}$ definiujemy jako macierz ϕ w $\mathcal{E}$.*

$$rk\varphi \overset{def}{=} rk\phi.$$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana. Wracając do przykładu: $\mathcal{E}$ - baza standardowa $\mathbb{R}^2$,

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Definicja 8 *Mówimy, że baza $\mathcal{E}$ diagonalizuje formę kwadratową φ jeżeli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.*

Przykład 10 $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. *Znaleźć bazę diagonalizującą.*

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{1}{3}x_1^1.$$

Rozważmy dwie formy liniowe na $\mathbb{R}^2$:

$$\psi_1(x) = x_1 + 2x_2$$
$$\psi_2(x) = x_2.$$

$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Wówczas* $\varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1 = [1, 2], \psi_2 = [0, 1]), \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Notacja: Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja $\varphi : v \in V \to \varphi_1(v)\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\phi(v, \tilde{v}) = \varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}), \frac{1}{2}(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})) = \phi_s(v, \tilde{v}).$$

Notacja: $\varphi \overset{\text{ozn}}{=} \varphi_1\varphi_2, \quad \phi = \varphi_1 \bigotimes \varphi_2$. W szczególności $\phi_s = \frac{1}{2}(\varphi_1 \bigotimes \varphi_2 + \varphi_2 \bigotimes \varphi_1$

Jeśli teraz $\varphi : V \to \mathbb{F}$ - dowolna forma kwadratowa oraz $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ - baza V, $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ - baza dualna,
Macierz φ w $\mathcal{E}$: $[\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}], \quad a_{ij} = a_{ji}$,
zachodzi $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} = \psi_i\psi_j$

Twierdzenie 1 *(Lagrange'a)*
Dla każdej formy kwadratowej itnieje (co najmniej jedna) baza diagonalizująca

Dowód 3 $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n), \varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j$, *gdzie* $a_{ij} = a_{ji}$.
Przypuśćmy, że $a_{ij} \neq 0$ dla pewnego i, np. $i = 1$.
Rozważmy formę liniową

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j}\psi_j.$$

Wówczas istnieje wsp. bij. $i, j = 2, \ldots, n$ taka, że

$$\sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j = a_{11}\tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\psi_i\psi_j.$$

np.

$$a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 = a_{11}(\psi_1 + \frac{q_{12}}{a_{11}}\psi_z)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\psi_2^2.$$

Przykład 11 $V = \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 = \Bigg(\overset{y_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}}\Bigg)^2 - \Bigg(\overset{y_2}{\frac{x_1 - x_2}{2}}\Bigg)^2 + x_2\overset{y_3}{x_3}.$$

$$x_2 = y_1 - y_2, \varphi(x) = y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

$$\psi_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \psi_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \psi_3 = \dots.$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}\left[1, 1, 1\right] \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}\left[1, -1, 1\right] \\ \psi_3 &\overset{np.}{=} \left[1, 0, -1\right]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^* = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right), \mathcal{E} = \left(f_1, f_2, f_3\right), \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2, (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3 Wykład (22.03.2019)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, np. $\varphi(x_1, x_2) = \overset{\text{diagonalne}}{x_1^2} - \overset{\text{wyraz mieszany}}{3x_1x_2} + \overset{\text{diagonalne}}{x_2^2}$ Narysować zbiór

$$\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = p \right\}.$$

$$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiemy, że istnieją współrzędne na $\mathbb{R}^2$, w których macierz φ jest diagonalna. Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + 0\psi_1\psi_2$ w tych współrzędnych macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

$$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2, \psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}, \lambda_1 = 1, \psi_2 = x_2, \lambda_2 = -\frac{5}{4}.$$

$$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2, \quad \varphi^{-1}(1) = \left\{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \right\}.$$

Ogólniej: $\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa φ w pewnej bazie ma postać $\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \ldots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \ldots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$, gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, r+s, \tilde{\psi}_i = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Twierdzenie 2 *Niech $\varphi : V \to \mathbb{R}, (\Psi_i), (\Phi_j)$ bazy V takie, że $\varphi = \psi_1^2 + \ldots + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \ldots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + \ldots + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}^2$. Wówczas $r = r' \quad \& \quad s = s'$*

Dowód 4 $r + s = r' + s' = rk\varphi$

Dla uproszczenia załóżmy, że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0 \\ \phi_{r'+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}.$$

Mamy $r' + s < n$ równań na wektor v w przestrzeni wymiaru n. Istnieje wektor $V \neq 0$ spełniający ten układ równań. Zatem

$$\varphi(v) = \psi_1(v)^1 + \ldots + \psi_r(v)^2 = -\phi_{r'+1}(v)^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0.$$

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \ldots = \psi_n(v) \implies v = 0 \quad \square$

Definicja 9 *Sygnaturą $sgn\varphi$ formy kwadratowej $\varphi : V \to \mathbb{R}_-$ nazywamy parę liczb (r, s), gdzie r i s są liczbami dodatnich elementów macierzy φ w bazie diagonalizującej.*

Przykład 12

$$sgn(x_1^1 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1)$$
$$sgn(x_1^2) = (1, 0)$$
$$sgn(-x_1^1) = (0, 1).$$

3.1 Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa $[\varphi_{ij}]$ - macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.
$Q : V \times V \to \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$

$$D_l = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l2} & \dots & \varphi_{ll} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$$

Rozważmy wektory $f_1, \dots, f_n$, gdzie $f_1 = e_1$& dla $i > 1$, $\quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-n,1} & \dots & \varphi_{i-n,i} \\ e_1 & \dots & e_i \end{bmatrix}$

Przykład 13

$$f_2 = \frac{1}{D_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{11}}(\varphi_{11}e_2 - \varphi_{12}e_1) = e_2 - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}}e_1.$$

$$f_3 = \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}\varphi_{23} & \end{bmatrix} e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}, \ \textit{itd.}$$

Widać, że $f_i = e_i + x_i, x_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$. Zatem $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ jest bazą V.

Twierdzenie 3 *Baza $\mathcal{F}$ diagonalizuje φ oraz*

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Przykład 14 $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 1, D_2 = -\frac{5}{4}, \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód 5 *Naszym celem jest obliczenie $Q(f_i, f_j)$.*
Załóżmy, że $j < i$ i obliczmy

$$Q(f_i, e_j) = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1} & \dots & \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,i} \\ \varphi_{j_1} & \dots & \varphi_{ji} \end{bmatrix} \leftarrow j = 0.$$

Dla $j = 1 \qquad Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}}$

Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i;j} = Q(f_i, f_j) = \begin{cases} Q(f_i, e_j + x_j) = 0 & j < i \\ Q(f_i, e_i + x_i) = Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}} & j = i \end{cases} \quad \square$

Zauważmy, że $\varphi|_{<e_1,\dots,e_i>}$ ma rząd $= i$ gdyż jest dodatnio określona $\iff$ niezdegenerowana. Stąd:

$$\det\left(\left[\varphi|_{<e_1,\dots,e_n>}\right]_{(e_1,\dots,e_i)}\right) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} = D_i.$$

$$sgn\varphi = (n, 0), \quad [\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Zatem $D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$, a to jest spełniony tylko gdy $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0 \quad \square$

4 Wykład (29.03.2019)

Niech $\varphi : V \to \mathbb{F}$. mamy bazy $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$. $\underbrace{([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}})[\varphi]_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\substack{\text{reguła transformacyjna dla} \\ \text{macierzy form kwadratowych}}}$

4.1 Reguła transformacyjna macierzy odwzorowania liniowego

$$A : V \to V \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}, \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: następnych kilka wykładów.
Kończymy wątek o twierdzeniu Sylwestra:
niech φ - dodatnio określona $D_i > 0$.

Definicja 10 *φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dodatnio określona.*

Wniosek: Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^2 D_i > 0$, gdzie $D_i = det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$

Definicja 11 *Odwzorowanie liniowe $A : V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. $(L(V,V) \overset{ozn}{=} L(V))$*

4.2 Rzuty na podprzestrzenie

Przykład 15 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1, \quad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$. *Zauważmy, że* $P_1^2 = P_1$. $\left([P_1]_{st} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)$

Przykład 16 *Inny rozkład:* $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle \bigoplus \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix}.$$

$$P_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix}, \quad P_2^2 = P_2. ([P_2])_{st} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ogólniej: Jeżeli przestrzeń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$, to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem:

$$Pu = v.$$

gdzie $u = v + w, v \in V, w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P, W = \ker P, imP = V$

Definicja 12 *Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$*

Stwierdzenie 3 *$P \in L(U), P^2 = P, W = imP, V = imP$. Wtedy $U = V \bigoplus W$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W.*

Dowód 6 *Weźmy $u \in U : u = Pu + (1-P)u \& Pu \in imP \& (1-P)u \in \ker P$, gdyż $P(1-P)u = (P - P^2)u = 0$. Czy $imP \cap \ker P = \{0\}$?*
Jeśli $u \in imP \& u \in \ker P$, to $\underset{x \in V}{\exists} u = Px = PPx = Pu = 0$

Definicja 13 *Jeżeli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią taką, że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A - niezmiennicza.*

Uwaga: Niech V będzię niezmiennicze dla $A : U \to U, \mathcal{E}_0 = \{e_1, ..., e_k\}$ dla bazy V, $\mathcal{E}_1 = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - baza $U \implies [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \\ \vdots & & & * \\ a_{k_1} & \dots & a_{kk} & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & ** \\ 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}$,
$* \in M_{k,n-k}(\mathbb{F}), ** \in M_{n-k,n-k}(\mathbb{F})$
Uwaga 2: Przypuśćmy, że $U = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \dots \bigoplus V_l \quad \& AV_i \subset V_i, i \in 1, \dots, l$. Wtedy istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni U taka, że gdzie $B_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F}) \quad \& \quad n_i = \dim V_i$

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_l \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, \dots, \dots, e_{n_1+n_2+\dots+n_l}\}.$$

Definicja 14 *Mówimy, że $0 \neq u \in U$ jest wektorem własnym $A \in L(U)$, jeśli $Au = \lambda u$ dla pewnego skalara $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Mówimy wówczas, że jest wartością własną A. Zbiór wartości własnych A nazywamy spektrum A i oznaczamy $sp(A) \subset \mathbb{F}$. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{F}$, to $V_\lambda = \ker(A - \lambda 1)$ nazywamy podprzestrzenią własną dla $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Zauważmy $\lambda \in sp(A) \iff \ker(A - \lambda 1) \neq \{0\} \iff det(A - \lambda 1) = 0 \iff A - \lambda 1$ jest operatorem nieodwracalnym.
Uwaga: Jeśli $A \in L(V)$, to $\det([A]_\mathcal{E}) = \det([A]_\mathcal{F}) = \det(A)$, gdyż $\det[A]_\mathcal{E} = \det\left(\left([id]_\mathcal{E}^\mathcal{F}\right)^{-1} [A]_\mathcal{F} [id]_\mathcal{E}^\mathcal{F}\right) = \det([A]_\mathcal{F})$.
Operator A jest odwracalny $\iff [A]_\mathcal{E}$ - odwracalna $\iff \det A \neq 0$

Definicja 15 *Wielomian $\lambda \in \mathbb{F} \to \det(A - \lambda 1) \in \mathbb{F}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora A, oznaczamy $w_A(\lambda)$*

Wniosek: $spA = \{\lambda \in \mathbb{F} : w_A(\lambda) = 0\}$.

Przykład 17 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $spA : w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

Pierwiastki $w_A : \Delta = 1 + 4, \quad \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Wektory własne: $V_{\lambda_1} = \ker \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \ker \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$.

$V_{\lambda_2} = \ker \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ciąg Fibonacciego: $x_0 = 1 = x_1, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Znaleźć ogólny wyraz $x_n = ?$

Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 - \lambda - 1$. Zauważmy, że $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \ldots = A^{n+1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$

5 Wykład (05.04.2019)

$$A \in \mathrm{End}(V) : V \to V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 *$u(t)$ - wielomian stopnia n, $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$*
Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \in End(V)$ oznaczać będziemy $u(A)$. Własności

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \tag{2}$$

$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \tag{3}$$

Przykład 18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 4 *(Cayleya - Hamiltona)*

$$\underset{A \in End(V)}{\forall} w_A(A) = 0.$$

Dowód 7 *Niech $\mathcal{E}$ - baza $\mathcal{V}$: $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$*

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w\left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) \underset{w \in \mathbb{F}_k[x]}{\forall}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy $\mathcal{A}$

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \ldots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \tag{4}$$

Na przykład (notacje: $\det[a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & +\left| \quad \right| \\ -\left| \quad \right| & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\left| \quad \right| \\ \left| \quad \right| & -\left| \quad \right| & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n$ **??** *oraz (123)*

$$(b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \ldots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0 \mathcal{A} &= c_0 1 && |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1 \mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 && |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1}\mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 && |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 && |\mathcal{A}^n \\ +b_0\mathcal{A} + (b_1\mathcal{A}^2 - b_0\mathcal{A}) + \ldots + b_{n-1}\mathcal{A}^n - b_{n-2}\mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

Przykład 19 x_n *- ciąg Fibonacciego.* $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b:
wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right), b = \ldots.$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad $\mathbb{C}$.
Ustalmy $A \in \mathrm{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:
a) $j_1 \neq j_2$, to $\underset{u \in \mathbb{C}_m[.]}{\exists}, \quad w_{j_1}(\lambda)w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)w_A(\lambda)$
b) $NWD(w_1, \ldots, w_r) = 1 \implies \underset{v_1,\ldots,v_r \in \mathbb{C}[.]}{\exists} 1 = v_1w_1 + \ldots + v_rw_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A)w_j(A), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \ldots, P_r\}$
(i) $\sum_{j=1}^r P_j = 1,$

$(ii) j_1 \neq j_2 : \quad P_{j_1} P_{j_2} = v_{j_1}(A) v_{j_2}(A) w_{j_1}(A) w_{j_2}(A)$
(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^{r} P_j = P_i$
(iv) niech $V_i = imP_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$

$$v = P_1 v + \ldots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \bigcap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A, gdyż $AP_j = Av_j(A)w_j(A) = v_j(A)w_j(A)A = P_i A$
a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_j v = P_j Av \in V_j$
(vi) $v_j = \ker\left((A - \lambda_j 1)^{n_j}\right)$. $v \in v_j(a)w_j(A)v \implies (A - \lambda_1 1)^{n_j} v = v_j(A)w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_r 1)^{n_j}$
$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \ldots + P_j v + \ldots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$
dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[.]$
(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 16 *Przy powyższych oznaczeniach* $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ *nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową* A

Twierdzenie 5 *O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe*

6 Wykład (12.04.2019)

Definicja 17 *Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$est diagonalizowalna,eżeli istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{F}^n$ taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,*
gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$.
Jeżeli $G = [id]^{st}_{\mathcal{E}}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A est diagonalizowalna jeżeli $\mathbb{F}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych A.

Przykład 20 *(antyprzykład)*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *nie jest macierzą diagonalizowalną.*

$$w_a = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & \\ 1-\lambda & \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$ker(A-1) = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli $\mathbb{C}^2$ nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A.
$\lambda = 1, n_1 = 2. V_\lambda = ker(A - \lambda 1)^{n_1} = ker(A-1)^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

Twierdzenie 6 *V - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$. Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech*

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, dimV_i = n_i$

Wniosek: Niech $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i, kolejne n_2 jest bazą V_2, itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 8 *(równość $n_i = dimV_i$)*
Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.
Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$, to znaczy, że

$$\underset{\lambda_j \in Sp(A)}{\exists} . \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \phi$, zatem $i = j$. Czyli $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i}$. Zatem

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i} \implies n_i = dimV_i \quad \square.$$

Przykład 21 *Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:*

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\nabla(t)}.$$

$$v(t) = e^{At} v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 4 *Niech f - funkcja analityczna oraz $w \in \mathbb{C}_n[.]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz wielomian $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ taki, że $f = wq + r$*

Dowód 9 *Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków w.*

$$k = 1: \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_{q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k}_{r}.$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje $\tilde{q}$ - analityczna

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1 + \ldots + n_{k-1}}[.]$ oraz istnieje $\tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{r}}$ takie, że $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{r}} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$ Po wstawieniu $\tilde{q}: f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + r$, gdzie $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{\tilde{r}}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ $\square$

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 22 *Obliczyć e^{At} : rozważmy funkcję*

$$f : \lambda \to e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$, gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

$$f(\lambda) = q(\lambda) w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A)w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$*?*

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1 && e^t = a + b + c \\
&\lambda = -1 && e^{-t} = a - b + c \\
&\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} = && q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) + 2a\lambda + b \implies \\
&\lambda = -1 && te^{-t} = -2a + b.
\end{aligned}$$

7 Wykład (12.04.2019)

Przykład 23

$$A=\begin{bmatrix}0&2&3\\1&3&5\\-1&-2&-4\end{bmatrix}, t\in\mathbb{R},\quad e^{tA}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA}=aA^2+bA+c\mathbb{I},\qquad \begin{bmatrix}e^t\\e^{-t}\\te^{-t}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&-1&0\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}e^t\\e^{-t}\\te^{-t}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&0\\1&3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\e^{-t}\\te^{-t}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^t+(2t)e^{-t}\\2(e^t-e^{-t})\\e^t+(3-2t)e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\-2&1&-2\\2&0&3\end{bmatrix}$$

$$e^{tA}=\frac{1}{4}\left((e^t+(2t-1)e^{-t})\begin{bmatrix}-1&0&-2\\-2&1&-2\\2&0&3\end{bmatrix}+2(e^t-e^{-t})\begin{bmatrix}0&2&3\\1&3&5\\-1&-2&-4\end{bmatrix}+e^t+(3-2t)e^{-t}\mathbb{I}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}.$$

$$w_A(\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1=ker(A-1\mathbb{I})=\left\langle \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{wektor własny}\\ \text{o wartości własnej}=1}}\right\rangle$$

$$V_{-1}=ker(A+1\mathbb{I})^2=ker\begin{bmatrix}0&4&4\\0&8&8\\0&-4&-4\end{bmatrix}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$(A+1\mathbb{I})\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\textit{Rozważmy bazę } \mathcal{E}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\text{ - \textit{postać jordanowska macierzy.}}$$

$A\in End(V),\quad Sp(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\},\quad n_i$ - krotności λ_i

$V=\bigoplus V_{\lambda_i},\quad V_{\lambda_i}=ker(A-\lambda_i\mathbb{I})^{n_i}$

$A=\bigoplus A_i$, gdzie $A_i\in End(V_{\lambda_i})$ taki, że $\quad A_i=A|_{V_{\lambda_i}}$.

Zauważmy,że

$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$

gdzie

$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 18 *Jeżeli $N \in End(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N.*

Przykład 24

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} \text{ - nilpotent st. n+1.}$$

$$\left\{n!, n!x, \binom{n}{2}x^2, \ldots, \binom{n}{n-1}x^{n-1}, \binom{n}{n}x^n\right\}$$

$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 19 *Klatką jordanowską nazywamy macierz postaci*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7 *Niech $A \in End(W)$, gdzie w jest nad $\mathbb{C}$, $dimV < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W, w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonali.*

Dowód 10 *Skoro $A = \bigoplus A_i$, $\quad A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_I$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i, to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \to W$ - nilpotentny stopdnia q i $N^q = 0$.*
$\underset{i \in \{0,\ldots,q\}}{\forall}$ *niech $W_i = kerN^i$.*

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. Mówimy, że w ma wysokość i, jeżeli $N^i x = 0$ oraz $N^{i-1}x \neq 0$.
Zauważmy, że jeżeli x ma wysokość równą i, to układ wektorów

$$\left\{x, Nx, \ldots, N^{i-1}x\right\}.$$

jest liniowo niezależny.
Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\underset{dzialamy}{N^{i-1}} \Longrightarrow x_0}$
$\alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\underset{dzialamy}{N^{i-2}} \Longrightarrow \alpha_1 = 0}$ *itd.*
Rozważmy tym razem podprzestrzeń $kerN \cap ImN^{j-1} \subset W$ i zauważmy, że $dimkerN_1 ImN^{j-1} = dimW_j - dimW_{j-1}$.

W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \to kerN \cap ImN^{j-1}$ *wzorem* $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $imF = kerN \cap ImN^{j-1}$ *oraz* $kerF = W_{j-1}$, *to*
$dimW_j = dimimF + dimkerF = dim(kerN \cap ImN^{j-1}) + dimW_{j-1}$

$$kerF = W_{j-1} \text{ - oczywiste. .}$$

$$ImF = kerN \cap ImN^{j-1} : y \in kerN \cap ImN^{j-1} \implies \underset{x \in ImN^{j-1}}{\exists} : y = N^{j-1}x \text{ oraz } Ny = 0$$

$$\text{to w takim razie } N^j x = 0 \implies x \in W_j \text{ oraz } y = N^{j-1}x = Fx$$

$$kerN \cap ImN^{q-1} \subset kerN \cap ImN^{q-2} \subset \ldots \subset kerN$$

.

Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $m = dimkerN$ *będzie bazą* $kerN$ *zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni.*
Wektor $f_1 \in kerN \cap ImN^{q-1}$ *jest końcówką serii wektorów długości* q.
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ *i niech* $h(i)$ *oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że*

$$\{e_{ij} : i \in 1, .., m, j \in \{1, \ldots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \Box.$$

8 Wykład (12.04.2019)

8.1 Klatki Jordanowskie

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \lambda & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \in M_h(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon_k \in \{0,1\}.$$

Przykład 25 *np.* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 8 *Niech $A \in End(W), Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Istnieje baza (Jordanowska) $\mathcal{E}$ przestrzeni W, to znaczy, że baza taka, że $[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ jest sumą klatek Jordanowskich z λ_i na diagonali.*

Operator nilpotentny. $N^q = 0$ - q - stopień nilpotentności ($N^{q-1} \neq 0$)

Przykład 26

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies q = 3.$$

$$A \to W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i} \subset W \quad A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}. \quad A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}.$$

$$A_{\lambda_i} = \underbrace{\lambda_i 1_{W_{\lambda_i}}}_{D_{\lambda_i}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i 1_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}}.$$

$$N^{n_i}_{\lambda_i} = 0.$$

Dowód 11 *(dla operatorów nilpotentnych). Niech $N \in End(W)$ - nilpotentny.*
$W_i = \ker N^i, \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_q = W \to$
$\to \ker N \cap imN^{q-1} \subset \ker N \cap imN^{q-2} \subset \ldots \subset \ker N_i (*)$
$\dim \ker N \cap imN^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.
Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ będzie bazą $\ker N$ zgodna z zawieraniami (*). Wtedy $\{e_{11}, \ldots, e_{m,1}\} \underset{e_{i,1}}{\forall}$ jest końcówką serii długości $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów:

$$\begin{array}{cccc} e_{1,h(1)} & & & \\ \vdots & e_{2,h(2)} & & \\ \vdots & & e_{i,h(i)} & \\ \vdots & & & \\ e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{m,1} \end{array}$$

Dlaczego $\{e_{i,j} : i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, .., h(i)\}\}$ jest bazą W?
Liniowa niezależność: $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0 (**), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$
Działając N^{q-1} nie zeruje się e_{ij}, które wchodzą do serii krótkszej niż q. Zatem $\alpha_{iq} = 0 \quad \underset{i \in \{1,\ldots,m\}}{\forall}$.

Dalej, działając $N^{q-2} \to \alpha_{i,q-1} = 0$ itd.
Czy wektorów e_{ij} jest tyle co wymiar W?

$$\begin{aligned}
&\dim W = \dim W_q \cdot \dim W_{q-1} + \dim W_{q-1} - \dim W_{q-2} + \ldots + \dim W_1 \cdot W_0 = \\
&= \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-1}}_{\text{końcówki serii dł. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-2}}_{\text{końcówki serii dł. } q-1} + \ldots\ldots \\
&= \text{liczba wektorów} \left\{e_{ij} : i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, h(i)\}\right\}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że macierz N w bazie $\mathcal{E} = \left\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1,h(1)}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2,h(2)}, \ldots\right\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} & 0 & \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

8.2 Iloczyny skalarne

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, W - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Definicja 20 *Odwzorowanie* $\langle . | . \rangle : W \times W \to \mathbb{F}$ *takie, że*

$$\underset{u_1,u_2,v\in W}{\forall} \quad \langle v|u_1 + u_2\rangle = \langle v|v_1\rangle + \langle v|v_2\rangle \tag{5}$$
$$\underset{u,v\in W}{\forall} \quad \underset{\lambda\in\mathbb{F}}{\forall} \langle v|\lambda u\rangle = \lambda \langle v|u\rangle \tag{6}$$
$$\underset{u,v\in W}{\forall} \quad \langle v|u\rangle = \overline{\langle u|v\rangle} \tag{7}$$
$$\underset{u\in W-\{0\}}{\forall} \quad \langle u|u\rangle > 0. \tag{8}$$

nazywamy iloczynem skalarnym na przestrzeni W*.*

Uwaga: (a) $\langle 0|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\cdot 0\rangle = 0\,\langle 0|0\rangle$
(b) $\langle u_1 + u_2|v\rangle = \langle u_1|v\rangle + \langle u_2|v\rangle = \overline{\langle v|u_1 + u_2\rangle} = \overline{\langle v|u_1\rangle} + \overline{\langle v|u_2\rangle}$
(c) $\langle \lambda u|v\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|\lambda u\rangle} = \overline{\lambda \langle v|u\rangle}$

Przykład 27 $W = \mathbb{C}^n, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. *Def:* $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i v_i$.
Notacja Diraca: $\langle u|v\rangle, |u>, <v|, |u><v|$

Przykład 28 $u, v \in \mathbb{C}_n[\times]$, $\langle u|v\rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\overline{u(t)}w(t)dt$

Definicja 21 *Mówimy, że wektory* $u, w \in W$ *są ortogonalne (względem* $\langle | \rangle$ *), jeżeli* $\langle u|v\rangle = 0$.

8.3 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą W. Mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortogonalną jeżeli $\langle e_i|e_j\rangle = 0, i \neq j$. Jeżeli dodatkowo $\langle e_i|e_i\rangle = 1$, to mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną.
Niech $\{f_1, \ldots, f_n\}$ będzie dowolną bazą. Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory $\{e_1, \ldots, e_n\} : e_1 = f_1, e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k|f_i\rangle}{\langle e_k|e_k\rangle} \cdot e_k$

9 Wykład (12.04.2019)

V - wektorowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na tej przestrzeni mamy iloczyn skalarny $\langle v_1|v_2\rangle \in \mathbb{F}$. Wektory ortogonalne: $v_1 \perp v_2$, jeśli $\langle v_1|v_2\rangle = 0$

Przykład 29 *na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wprowadzamy iloczyn skalarny $\langle u|w\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i w_i$, gdzie $\overline{u}$ - sprzężenie zespolone.*

Mówimy, że baza $\mathcal{E} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V jest ortonormalna, gdy $\langle v_i|v_j\rangle = 0, i \neq j$.
Notacja $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v.

Stwierdzenie 5 *Jeśli $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną oraz $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, to $\alpha_i = \langle v_i|v\rangle$.*

Dowód 12 $\langle v_i|v\rangle = \left\langle v_i|\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_i$

Uwaga: Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.
$f_1, \ldots, f_k$ - układ ortonormalny: $\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j = 0$, to $\alpha_i = \left\langle f_i|\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j\right\rangle = 0$

9.1 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą V.
Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:
$f_1 = e_1$; $f_1, \ldots, f_k$ - mamy to

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle f_j|e_{k+1}\rangle f_j}{\|f_j\|^2}.$$

Uwaga: (1)
$\langle f_1, \ldots, f_k\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$

Dowód 13 *(indukcyjny)*
Dla $k = 1$ - oczywiste.
$k \implies k+1:$

$$\langle f_1, \ldots, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k+1}\rangle.$$

W szczególności $\underset{k=1,\ldots,n}{\forall} f_k \neq 0$

Uwaga (2)
$f_i \perp f_j$ dla $i \neq j$.

Dowód 14 *(indukcyjny)*
Przypuśćmy, że $i < j$.

$$\langle f_i|f_j\rangle = \left\langle f_i|e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle f_l}{\|f_l\|^2}\right\rangle =$$

$$= \langle f_i|e_j\rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle}{\|f_l\|^2} \langle f_i|f_l\rangle =$$

$$= \langle f_i|e_j\rangle - \frac{\langle f_i|e_j\rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i|f_i\rangle = 0.$$

Kładąc $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$, dostaję bazę ortonormalną $\{h_1, \ldots, h_n\}$ $\square$

Przykład 30 *Rozważamy przestrzeń wielomianów* $V = \mathbb{R}[\times] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{F} = \{1, x\}$, $\langle v_1|v_2\rangle = \int_0^1 v_1(x)v_2(x)dx$. $\quad v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x, v_2 = \beta_1 + \beta_2 x$.
$\langle 1|x\rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2}$
$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{\langle 1|x\rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2} \implies f_1 \perp f_2$.
Czy h_1 *jest unormowane?* $h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1$.
$h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$. $\quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{12}$

9.2 Rzut ortogonalny

Ustalmy podprzestrzeń E przestrzeni V. Niech $E^\perp = \left\{ v \in V : \underset{e \in E}{\forall} v \perp e \right\}$, $E^\perp$ - jest poprzestrzenią wektorową. Zauważmy, że $E \cap E^\perp = \{0\} : v \in E \cap E^\perp$, to $v \perp v : \langle v|v\rangle = 0$.
Ponadto, $E + E^\perp = V$. Ustalmy bazę ortonormalną podprzestrzeni $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$.
Wtedy $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle\, e_i}_{\in E} + \left(v - \sum_{i=1}^k \langle e_i|v\rangle\, e_i\right)$.
Zauważmy $\left\langle e_l|v - \sum_{i=1}^k \langle e_i|v\rangle\, e_i \right\rangle = \langle e_l|v\rangle - \langle e_l|v\rangle = 0$. W takim razie

$$v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle\, e_i \in E^\perp.$$

Wniosek: $V = E \bigoplus E^\perp$. Rzut na E wzdłuż $E^\perp$ nazywamy rzutem ortogonalnym na E i oznaczamy P_E.
Działa tak: $P_E v = \sum_{i=1}^k \langle e_i|v\rangle\, e_i$.. $E^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni $E^{l=1}$

Stwierdzenie 6 *(Nierówność Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle v_1|v_2\rangle| \leqslant \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Dowód 15 *Niech* $\alpha \in [0, 2\pi] : \langle v_1|v_2\rangle = e^{i\alpha} |\langle v_1|v_2\rangle|$.
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : f(t) = \left\langle te^{i\alpha}v_1 - v_2|te^{i\alpha}v_1 - v_2\right\rangle$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\langle te^{i\alpha}v_1|te^{i\alpha}v_1\right\rangle - \left\langle te^{i\alpha}v_1|v_2\right\rangle - \left\langle v_2|te^{i\alpha}v_1\right\rangle + \langle v_2|v_2\rangle = \\ &= t^2 \langle v_1|v_1\rangle - te^{-i\alpha} \langle v_1|v_2\rangle - te^{i\alpha} \langle v_2|v_2\rangle + \langle v_2|v_2\rangle \\ &= t^2 \langle v_1|v_1\rangle - 2t\,|\langle v_1|v_2\rangle| + \langle v_2|v_2\rangle \implies \\ &\implies \Delta = 4\,|\langle v_1|v_2\rangle|^2 - 4\,\langle v_1|v_1\rangle \langle v_2|v_2\rangle \leqslant 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek (nierówność trójkąta)

$$\underset{v_1, v_2 \in V}{\forall} \|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Dowód 16

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2|v_1 + v_2\rangle = \langle v_1|v_1\rangle + \langle v_2|v_1\rangle + \langle v_1|v_2\rangle = \\ &= \|v_1\|^2 + 2Re\,\langle v_1|v_2\rangle + \|v_2\|^2 \leqslant \|v_1\|^2 + 2\,|\langle v_1|v_2\rangle| + \|v_2\|^2 \leqslant \\ &\underset{C.S.}{\leqslant} \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2. \end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni V z iloczynem skalarnym.

- Niech $u \in V$. Wówczas $v \in V \to \langle u|v\rangle \in \mathbb{F}$ jest elementem V^*, który oznaczamy ϕ_u.

$$\langle \phi_u, v\rangle = \langle u|v\rangle .$$

Przykład 31 $V = \mathbb{R}_3[\times], \phi_u(w) = \int_0^1 u(t)w(t)dt$

Na odwrót:

Twierdzenie 9 $\underset{\phi\in V^*}{\forall}\underset{u\in V}{\exists}! : \phi = \phi_u$

Dowód 17 *Jeżeli* $\phi = 0$, *to* $u = 0$.
jeżeli $\phi \neq 0$, *to* $\ker \phi := E \not\subseteq V$. *Wiemy, że* $V = E \bigoplus E^\perp$.
Niech $u \in E^\perp - \{0\} : \langle \phi, u\rangle = 1$.
Obliczmy $\langle u|v\rangle = \langle u|v - \langle \phi, v\rangle \cdot u + \langle \phi, v\rangle \cdot u\rangle = \langle u| \langle \phi, v\rangle \cdot u\rangle = \langle \phi, v\rangle \|u\|^2$

Podsumowując, $\left\langle \frac{u}{\|u\|^2}|v\right\rangle = \langle \phi, v\rangle \implies \phi = \phi_{\frac{u}{\|u\|^2}}$, co daje istnienie. Jedyność: jeśli $\phi_{u_1} = \phi_{u_2}$, to $\phi_{u_1-u_2} = 0$. Ale to oznacza, że $0 = \phi_{u_1-u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2|u_1 - u_2\rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \implies u_1 = u_2$ $\square$

10 Wykład (12.04.2019)

V - przestrzeń z iloczynem skalarnym nad $\mathbb{F}$. ($\mathbb{R}$ - przestrzeń euklidesowa, $\mathbb{C}$ - przestrzeń unitarna)

10.1 Ortogonalizacja G-S

uwaga: $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza ortonormalna, $A \in L(V)$, $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$.

$$a^i_j = \langle e_i | A e_j \rangle .$$

$$Ae_j = \sum_l a^l_j e_l$$
$$\langle e_i | A e_j \rangle = \sum_l \langle e_i | e_l \rangle a^l_j = a^i_j .$$

10.2 Funkcjonały liniowe $\underset{1-d}{\leftrightarrow}$ wektory

$\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle$

Stwierdzenie 7 *(Tożsamość polaryzacyjna)*
$\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $\frac{v}{\mathbb{C}} = \|v + i^k w\|^2$

$$\underset{v,w \in V}{\forall}, \langle w | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle v + i^k w | v + i^k w \right\rangle .$$

Dowód 18

$$\begin{aligned}
&k = 0 && \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\
&k = 1 && i \langle v + iw | v + iw \rangle = i \left(\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + i \langle v | w \rangle - i \langle w | v \rangle \right) \\
&k = 2 && - \langle v - w | v - w \rangle = - \langle v | v \rangle - \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\
&k = 3 && - i \langle v - iw | v - iw \rangle = -i \left(\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle - i \langle v | w \rangle + i \langle w | v \rangle \right) .
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle v + i^k w | v + i^k w \right\rangle = 4 \langle w | v \rangle \quad \square$$

Uwaga: w ten sam sposób pokazujemy, że $\underset{A \in L(V)}{\forall} \langle w | Av \rangle = \frac{1}{4} \sum i^k \left\langle v + i^k w | A(v + i^k w) \right\rangle (*)$

Wniosek: Jeżeli $A \in L(V)$ spełnia $\langle x | Ax \rangle = 0$ dla wszystkich $x \in V$, to $A \equiv 0$.
Rzeczywiście z $(*) \implies \langle w | Av \rangle = 0$, kładziemy $w = Av$ i $\langle Av | Av \rangle = \|Av\|^2 = 0 \implies Av = 0 \underset{v \in V}{\forall}$

10.3 Sprzężenie hermitowskie operatora

V, W - przestrzenie z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Niech $A \in L(V, W)$.
Ustalmy wektor $w \in W$ i rozważmy funkcjonał liniowy

$$V \ni v \to \langle w | Av \rangle \in \mathbb{F} \text{ (na p-ni } V) .$$

$$\underset{\tilde{w} \in V}{\exists} : \langle w | Av \rangle = \langle \tilde{w} | v \rangle = \langle A^* w | v \rangle .$$

Zauważmy, że $w_1, w_2 \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, to

$$\begin{aligned}&\langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | v\rangle = \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | Av\rangle = \overline{\lambda}_1 \langle w_1 | Av\rangle + \overline{\lambda}_2 \langle w_2 | Av\rangle = \\ &= \overline{\lambda}_1 \langle \tilde{w}_1 | v\rangle + \overline{\lambda}_2 \langle \tilde{w}_2 | v\rangle = \langle \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 | v\rangle . \underset{v\in V}{\forall} \\ &\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2.\end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $W \ni w \to \tilde{w} \in V$ jest liniowe. Oznaczenie $\tilde{w} = A^* w$.
A^* nazywamy sprzężeniem hermitowskim A.
Wyrażenie w bazie ortonormalnej $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza V, $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ - baza W. $[a_{ij}] = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$.
$b_{ji} \in [A^*]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$.

$$b_{ji} = \langle e_j | A^* f_i\rangle = \langle Ae_j | f_i\rangle = \overline{\langle f_i | Ae_j\rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

10.4 Notacja Diraca

$$\underset{\text{bracket}}{\langle v|w\rangle} \to \underset{\text{bra}}{\langle v|}, \underset{\text{ket}}{|w\rangle}, |v\rangle \langle w| \leftarrow \text{ ket bra (XD)}.$$

$\langle v|$ - z definicji oznacza funkcjonał liniowy.
$v \ni |w\rangle \overset{\langle v|}{\to} \langle v|w\rangle \in \mathbb{C}$.
$|v\rangle \langle w| : v \to v$ - liniowe odwzorowanie takie, że

$$|v\rangle \langle w| (u) = |v\rangle \langle w|u\rangle : \underset{\text{stara notacja}}{\to} \langle w|u\rangle v.$$

$$(|v\rangle \langle w|)^* = |w\rangle \langle v| .$$

Niech $A = |v\rangle \langle w|$, $B = |w\rangle \langle v|$.

$$\begin{aligned}&\langle u_1 | Au_2\rangle = \langle u_1 | v\rangle \langle w | u_2\rangle = \left\langle \overline{\langle u_1 | v\rangle} w | u_2 \right\rangle = \\ &= \langle \langle v | u_1\rangle w | u_2\rangle = \langle |w\rangle \langle v | u_1\rangle | u_2\rangle\rangle = \langle Bu_1 | u_2\rangle .\end{aligned}$$

Zatem $A^* = B, |v\rangle \langle w|^* = |w\rangle \langle v|$. Dalsze reguły:
$|v\rangle^* = \langle v| , \langle v|^* = |v\rangle$.

Uwaga: rozkład jedności: $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza ortonormalna taka, że $\mathbb{I}_V = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|$.

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i | v\rangle = v.$$

10.5 Własności hermitowskeigo sprzężenia

$\langle A^* w | v\rangle = \langle w | Av\rangle$.

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$
3. $(DC)^* = C^* D^*, C : V \to W, D : W \to U$.

$\langle u | DCv\rangle = \langle D^* u | Cv\rangle = \langle C^* D^* u | v\rangle$

Definicja 22 *Niech $A \in L(V)$. Mówimy (1), że A jest samosprzężona jeżeli $A^* = A$, (2), że A jest unitarna, jeżeli $A^* = A^{-1}$, (3) że A jest normalna jeżeli $A^*A = AA^*$.*

Uwaga: $1 \to 3, 2 \to 3$

Przykład 32 $\mathbb{C}^2$ *z iloczynem kawniczym* $\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \overline{v}_1 w_1 + \overline{v}_2 w_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = A^*,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^* = A \iff A = \begin{bmatrix} x & u \\ \overline{u} & y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$.

Unitarność: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = A^*$, *w szczególności gdy* $\det A = 1$, *to unitarność*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C}.$$

11 Wykład (12.04.2019)

V, W - przestrzenie nad $\mathbb{C}$.
$\langle . | . \rangle_V$ - iloczyn skalarny na V
$\langle . | . \rangle_W$ - iloczyn skalarny na W,
$A \in L(V, W) \to A^* \in L(W, V) \to \langle w | Av \rangle_W = \langle A^* w | v \rangle_V$.
W dalszych rozważaniach $V = W \& A \in L(V)$. A - normalny, jeśli $A^* A = AA^*$.

Przykład 33 *np.*
i) $A^* = A$ *- samosprzężoność.*
ii) $A^* = A^{-1}$ *- unitarność.*

Jeżeli $\mathcal{E}$ - baza ortnonormalna V, $[a_{ij}] = [A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$, $[b_{ij}] = [A^*]_{\mathcal{E}}$. $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Przypomnienie: jak mamy $X \subset V$ to zapisujemy to $V = X \bigoplus X^{\perp}$, $P : V \to V$ - nazywamy rzutem X wzdłuż $X^{\perp}$, czyli rzutem ortogonalnym na X.
$\{e_1, \ldots, e_k\}$ - baza ortonormalna X, $P = \sum_{i=1}^{k} |e_i >< e_i|$

Stwierdzenie 8 *Niech* $V = X \bigoplus Y$*. Wówczas rzut* $P : V \to V$ *na* X *wzdłuż* Y *jest ortogonalny* $\iff P^* = P$.

Dowód 19 $\implies$
$Y = X^{\perp}$*. Weźmy* $v = v_1 + v_2, u = u_1 + u_2, v_1, u_1 \in X, v_2, u_2 \in Y$.

$$\langle u | Pv \rangle = \langle u_1 + u_2 | v_1 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle .$$

$$\langle Pu | v \rangle = \langle u_1 | v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle .$$

$$\langle u | Pv \rangle = \langle Pu | v \rangle \implies P = P^*.$$

$\Longleftarrow$
$P = P^*$*. Czy* $\underset{y \in Y, x \in X}{\forall} \langle y | x \rangle = 0$*?*

$$\langle y | x \rangle = \langle y | Px \rangle = \langle Py | x \rangle = 0 \quad \square$$

Stwierdzenie 9 *Niech* $A \in L(V)$*. Następujące warunki są równoważne: (1)* A *jest normalne (2)* $\underset{v \in V}{\forall} \|Av\| = \|A^* v\|$
W szczególności jeśli A *- normalny, to*

$$ker(A - \lambda \mathbb{I}) = ker(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I}).$$

Ponadto, jeśli $\lambda \neq \mu$*, to* $ker(A - \lambda \mathbb{I}) \perp ker(A - \mu \mathbb{I})$.

Dowód 20 *(1)* $\implies$ *(2).*

$$\underset{v \in V}{\forall} \langle v | A^* A v \rangle = \langle v | AA^* v \rangle \implies \|Av\|^2 = \|A^* v\|^2.$$

(2) $\implies$ *(1).*

$$\|Av\| = \|A^* v\| \implies \langle v | (A^* A - AA^*) v \rangle = 0 \underset{v \in V}{\forall}.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej $A^* A - AA^* = 0$*. W szczególności* $v \in ker(A - \lambda \mathbb{I}) \iff \|(A - \lambda \mathbb{I}) v\| = 0 \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})^* v\| = 0 = \|(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I}) v\| \iff v \in ker(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I})$. $\lambda \langle u | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle A^* u | v \rangle = \langle \overline{\mu} u | v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$*, czyli* $\langle u | v \rangle = 0 \quad \square$

11.1 Twierdzenie spektralne

Twierdzenie 10 *Niech $(V, \langle .|. \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $A \in L(V)$ będzie operatorem normalnym. Wówczas A posiada diagonalizującą, ortonormalną bazę złożoną z wektorów własnych A.*

Dowód 21 *(indukcja ze względu na wymiar przestrzeni V).*
Pierwszy krok indukcji $\dim V = 1$ - oczywiste. (Każdy operator w przestrzeni jednowymiarowej jest diagonalny bo to mnożenie przez skalar).
$n \implies n+1$. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim W = n$ i dla wszystkich operatorów normalnych na W. Niech $A \in L(V), \dim V = n+1$, A - normalny. Skoro V jest nad $\mathbb{C}$, to w_A ma pierwiastek $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.
Niech $e_0 \in V$ będzie wektorem własnym A o wartości własnej λ_0 taki, że $\|e_0\| = 1$.
Niech $X = \langle e_0 \rangle^{\perp}$. Wtedy $\dim X = n$.
Uwaga: $\underset{x \in X}{\forall} Ax \in X$ oraz $A^* x \in X$.

$$\begin{aligned}
&LHS: && \langle e_0 | a_x \rangle = \langle A^* e_0 | x \rangle = \left\langle \overline{\lambda_0} e_0 | x \right\rangle = \lambda_0 \langle e_0 | x \rangle = 0 \\
&RHS: && \langle e_0 | A^* x \rangle = \langle A e_0 | x \rangle = \overline{\lambda_0} \langle e_0 | v \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Niech $\tilde{A} = A|_X \in L(X)$. Jeżeli $\tilde{A}$ jest operatorem normalnym na X $(\dim X = n$ $)$,
Normalność $\tilde{A}$. udowodnimy, że $\tilde{A}^* = A^*|_x$.

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1, x_2 \in X}{\forall} : \left\langle x_1 | \tilde{A} x_2 \right\rangle = \langle x_1 | A x_2 \rangle = \langle A^* x_1 | x_2 \rangle = \\
&= \langle A^*|_x x_1 | x_2 \rangle \implies \tilde{A}^* = A^*|_x.
\end{aligned}$$

i w końcu $\tilde{A}^* \tilde{A} = A^*|_x A|_x = A^* A|_x = A A^*|_x = A|_x A^*|_x = \tilde{A} \tilde{A}^*$ $\square$

11.2 A teraz coś z zupełnie innej beczki

Ustalmy $u \in V$ i $X \subset V$ (podprzestrzeń wektorowa).
Zdefiniujmy $\inf\limits_{x \in X} \|u - x\| = dist(u, X)$

Stwierdzenie 10 *Niech $P : V \to V$ będzie rzutem ortogonalnym na X. Wówczas $dist(u, X) = \|u - Pu\|$*

Dowód 22 *$dist(u, X) \leqslant \|u - Pu\|$, gdyż $Pu \in X$. Z drugiej strony,*

$$\underset{x \in X}{\forall} \|u - x\|^2 = \| \underbrace{u - Pu}_{\in X^{\perp}} + \underbrace{Pu - x}_{\in X} \|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu - x\|^2 \geqslant \|u - Pu\|^2 \quad \square$$

Odległość przestrzeni afinicznych

$X_1 \subset V, X_2 \subset V$, $v_1, v_2 \in V$ - $dist(v_1 + X_1, v_2 + X_2) = \inf\limits_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 + x_1 - (v_2 + x_2)\| = \inf\limits_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 - v_2 + (x_2 + x_1)\| = \inf\limits_{y \in X_1 + X_2} \|v_1 - v_2 - y\| = \|v_1 - v_2 - P_{X_1 + X_2}(v_1 - v_2)\|$, gdzie $P_{X_1 + X_2}$ - rzut ortogonalny na $X_1 + X_2$.

12 Wykład (07.06.2019)

V - przestrzeń nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym - tak było.
$A : V \to V$ takie, że $A^*A = AA^*$. Zachodzi tw. spektralne dla A.
Istnieje baza ortonormalna V złożona z wektorów własnych A.

Drugie sformułowanie: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = Sp(A)$, $V_i = \ker(A - \lambda\mathbb{I})$, $\mathcal{P}_i$ - rzuty ortogonalne na V_i. Wtedy $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{i_k} \mathcal{P}_i \quad \& \quad A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$.

Twierdzenie 11 *(spektralne dla operatorów samosprzężonych na przestrzeni Euklidesowej, tzn. V nad $\mathbb{R}, A : V \to V, A^* = A$)*
Lemat: *W - przestrzeń zespolona z iloczynem skalarnym $\langle .|. \rangle$. Niech $B : W \to W, B^* = B$. Wówczas $sp(B) \subset \mathbb{R}$*

Dowód 23 $\lambda \in \mathbb{C}, w \in W - \{0\}, Bw = \lambda w \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle w|Bw \rangle = \langle w|\lambda w \rangle = \lambda \langle w|w \rangle$$
$$\langle Bw|w \rangle = \langle \lambda w|w \rangle = \overline{\lambda} \langle w|w \rangle \implies \lambda = \overline{\lambda}.$$

Wniosek $w_B(z)$ - wielomian charakterystyczny B. Pierwiastki w_B są rzeczywiste.

$V, A : V \to V$ - jak wyżej, V nad $\mathbb{R}^*, A^* = A$.
Istnieje baza ortonormalna V wektorów własnych operatora A.

Dowód 24 *(indukcja ze względu na* $\dim V$ *)*
1 krok indukcyjny - oczywiste.
$n \implies n+1$. Przypuśćmy, że A posiada wektor własny e_0 o wartości własnej $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Niech $X = \mathbb{R} \cdot e_0$. Wówczas $AX \subset X$ - oczywiste. Mniej oczywiste jest to, że $AX^\perp \subset X^\perp$ - bo jeżeli $y \in X^\perp$, to $\langle Ay|e_0 \rangle = \langle y|Ae_0 \rangle = \lambda_0 \langle y|e_0 \rangle = 0 \implies y \in X^\perp$.
Rozważmy operator $D = A|_{X^\perp}$ - obcięcie do X. Wówczas $D^* = D$. Zatem, skoro $\dim X^\perp = n$, *to na mocy założenia indukcyjnego $X^\perp$ posiada ortonormalną bazę $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wektorów własnych operatora B. Wówczas $\{e_0, \ldots, e_n\}$ jest ortonormalną bazą wektorów własnych operatora A.*
Istnienie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $e_0 \in V$ - takiego jak wyżej:
Niech $\mathcal{F} = \{f_0, \ldots, f_n\}$ będzie dowolną bazą ortonormalną przestrzeni V. Rozważmy macierz $\mathcal{A} = [A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Macierz $\mathcal{A}$ jest rzeczywista i symetryczna. Operator $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ taki, że $Tx = \mathcal{A}x \underset{x \in \mathbb{C}}{\forall}$. Operator T na $\mathbb{C}^n$, (gdzie iloczyn skalarny na $\mathbb{C}$ jest kanoniczny) jest samo sprzężony!
Wielomian charakterystyczny T ma tylko rzeczywiste pierwiastki. Zauważmy, że $w_T(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{I}) = w_A(\lambda)$ a zatem w_A ma rzeczywiste pierwiastki. Stąd wynika, że istnieje λ_0, e_0 j.w. $\square$

12.1 Kwadryki

Klasyfikacja (czyli co nam daje tw. spektralne w kontekście form np. kwadratowych) form kwadratowych na przestrzeni euklidesowej (rzeczywista z il. skalarnym).
$V, \dim V < \infty, Q : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.
$\langle .|. \rangle$ - iloczyn skalarny w przestrzeni V. Z Q związana jest symetryczna forma 2 liniowa $b : V \times V \to \mathbb{R}$, gdzie $Q(v) = b(v, v)$ (albo inaczej $b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) = \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$).
Funkcjonały liniowe na V są postaci: ustalamy $\tilde{v} \in V$ i definiujemy funkcjonał $\langle \tilde{v}| \in V^*$, gdzie $\langle \tilde{v}| (v) \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{v}|v \rangle$.
Ustalmy $w' \in V$ i rozważmy funkcjonał $b(w, \cdot)$. Istnieje $\tilde{w} \in W$ taki, że $b(w, v) = \langle \tilde{w}|v \rangle \underset{v \in V}{\forall}$.

Powyższe definiuje operator $F : V \to V$, gdzie $Fw = \tilde{w}$.
Czyli $b(w,v) = \langle Fw|v\rangle \underset{w,v\in V}{\forall}$.

Lemat: F - samosprzężony.

Dowód 25 *$\langle Fw|v\rangle = b(w,v) = b(v,w) = \langle Fv|w\rangle$, zatem $F = F^*$* $\square$

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Zauważmy, że $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \langle e_j|Fe_i\rangle_{i,j=1,\dots,n} = b(e_i, e_j)_{i,j=1,\dots,n}$.
Jeśli w szczególności $\mathcal{E}$ - ortonormalna baza złożona z wektorów własnych F, to w tej bazie $[b]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalne. Niech $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ - współrzędne ortogonalne związane z bazą $\mathcal{E}$. Wtedy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i^2 = Q$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ są niezerowymi wartościami własnymi F. Niech $sgnQ = (p,q)$. Wtedy istnieją $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_p$ & $a_{p+1} \geqslant \dots \geqslant a_{p+q}$ takie, że

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} (**).$$

Definicja 23 *Mówimy, że (**) jest postacią kanoniczną formy kwadratowej Q.*

Definicja 24 *$Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}$ mają tę samą postać kanoniczną, jeżeli istnieją współrzędne ortonormalne $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}, \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ takie, że*

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2} \quad \& \quad Q_2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\psi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\psi_{p+i}^2}{a_{p+1}^2}.$$

Definicja 25 *V nad $\mathbb{R}, T : V \to V$ - operator taki, że $T^* = T^{-1}$. Wówczas mówimy, że T jest operatorem ortogonalnym.*

Uwaga: T jest ortogonalny jeżeli mamy:
$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna $\implies$ $\{Te_1, \dots, Te_n\}$ - baza ortonormalna.

$$\langle Te_i|Te_j\rangle = \langle e_i|T^*Te_j\rangle = \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Stwierdzenie 11 *Formy kwadratowe Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną $\iff$ istnieje operator ortogonalny $T : V \to V$ taki, że $Q_2(v) = Q_1(Tv)$*

Dowód 26 *Jeśli Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to definiujemy $T : V \to V$ następująco: niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna związana z $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ i $\{f_1, \dots, f_n\}$ z $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Niech $Te_i = f_i$ - daje $Q_2(v) = Q_1(Tv)$.*
Na odwrót: jeśli $Q_2(v) = Q_1(Tv)$ i w bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$, Q_1 ma postać kanoniczną to definiując $f_i : e_i := Tf_i$ dostajemy bazę $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortonormalną i postac kanoniczna Q_2 w bazie $\{f_1, \dots, f_n\}$ jest taka Q_1 w $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\square$

13 Wykład (07.06.2019)

13.1 Macierz Grama układu wektorów

Weźmy V - nad $\mathbb{R}$. Mamy tutaj iloczyn skalarny $\langle .|. \rangle$. Ustalamy wektory $v_1, \ldots, v_k$ - liniowo niezależne.
niech

$$x = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i, \quad \langle x|x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i|v_j \rangle x^j.$$

Definicja 26 *Macierzą Grama układu wektorów $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy macierz*

$$[\langle v_i|v_j \rangle] \overset{ozn}{=} G(v_1, \ldots, v_k).$$

Ustalmy wektor $v \in V$, odległość wynosi $dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle) = \|(1-P)v\|$, gdzie P - rzut ortogonalny na $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
Niech $Pv = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i|v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle + \langle v_i|(1-P)v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle = \sum x^j \langle v_i|v_j \rangle .$$

Oznaczmy $\delta = dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$.

$$\delta^2 = \langle (1-P)v|(1-P)v \rangle = \langle v|(1-P)v \rangle - \langle Pv|(1-P)v \rangle = \langle v|v \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v|v_j \rangle x^j.$$

Macierzowy zapis:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1|v_1 \rangle & \langle v_1|v_2 \rangle & \ldots & \langle v_1|v_k \rangle & \langle v_1|v \rangle \\ \langle v_2|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v_2|v_k \rangle & \langle v_2|v \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle v|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v|v_k \rangle & \langle v|v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 1 \end{bmatrix} = [0] .$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy zero. Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny mamy:

$$0 = \det G(v_1, \ldots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \ldots, v_k)).$$

Zatem

$$\delta = \left(\frac{\det G(v_1, \ldots, v_k, v)}{\det G(v_1, \ldots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Definicja 27 *Niech $(v_1, \ldots, v_k) \in V$ jw. Objętością równoległościanu rozpiętego przez $(v_1, \ldots, v_k)$ definiujemy indukcyjnie:*

$$vol(v_1, \ldots, v_k) \overset{def}{=} vol(v_1, \ldots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle).$$

$$vol(v_1) = \|v_1\|.$$

Stwierdzenie 12 *Zachodzi równość*

$$vol(v_1, \dots, v_k) = \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód 27 *(indukcyjny)*
Jeden wektor: $vol(v_1) = \|v_1\| = \det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}$, $\det \langle v_1 | v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ *- długość wektora* v_1.
Krok indukcyjny: $k \implies k+1$

$$vol(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = vol(v_1, \dots, v_k) \cdot dist(v_{k+1}, \langle v_1, \dots, v_k \rangle) =$$
$$= \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}} \cdot dist(\dots) = \det G(v_1, \dots, v_{k+1})^{\frac{1}{2}} \quad \square.$$

13.2 Powierzchnie kwadratowe

Klasyfikacja powierzchni kwadratowych.

Przykład 34 $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3 = 1\right\}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1\}.$$

Definicja 28 *Niech* V *- przestrzeń,* $\langle . | . \rangle$ *- iloczyn skalarny oraz* $Q : V \to \mathbb{R}$ *- forma kwadratowa,* $c \in \mathbb{R}$.
Powierzchnie S *postaci* $S = \{x \in V : Q(x) = c\}$ *nazywamy powierzchnią kwadratową typu*

- *I jeśli* $c \neq 0$
- *II jeśli* $c = 0$

Uwaga: jeśli $c \neq 0$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $c = 1$.

Definicja 29 *Mówimy, że dwie powierzchnie* S_1, S_2 *kwadratowe mają taki sam kształt, jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne* $T : V \to V$ *takie, że* $S_2 = TS_1$.

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{i+p}^2}{a_{i+p}^2}, \quad (p, q) = sgn(Q).$$

$(\phi_1, \dots, \phi_{p+q})$ - współrzędne ortonormalne na V.
Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to istnieje $T : V \to V$ takie, że $Q_2 = Q_1 \cdot T$. Wówczas $S_1 = \{x \in V : Q_1(x) = c\}$, $\quad S_2 = \{x \in V : Q_2(x) = c\}$ mają ten sam kształt: $S_2 = \{x \in V : Q_1(Tx) = c\} = \{x \in V : Tx \in S_1\} = T^{-1}S_1 \implies S_1 = TS_2$

Twierdzenie 12 $Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}, S_i = \{x \in V : Q_i(x) = 1\}\, i = 1, 2$. *Jeżeli* $S_1 = S_2$, *to* $Q_1 = Q_2$

Dowód 28 *Ustalmy* $i = 1$ *oraz rozważmy* $\{x \in V : Q_1(x) > 0\}$. *Zauważmy, że* $\underset{x \in S_1}{\forall}$ *oraz* $t > 0$, $t \cdot x \in \mathcal{O}$, *gdyż* $Q_1(tx) = t^2 Q_1(x) = t^2 > 0$.
Na odwrót, jeżeli $y \in \mathcal{O}$, *to* $\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}} \in S_1$. *(*$Q(\frac{y}{\sqrt{Q(y)}}) = \frac{Q(y)}{Q(y)} = 1$*).*

Widzimy zatem, że:

$$1.\mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0}S_1,$$

2. Wartość Q_1 na $\mathcal{O}$ jest wyznaczona przez wartości na S_1, gdyż $Q_1(tx) = t^2 \underset{x\in S_1}{\forall}$.
Skoro $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym a funkcja $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = Q_1(x)$ jest różniczkowalna oraz $f''(x) = Q_1(x) \underset{x\in V}{\forall}$, to widzimy, że znajomość S_1 pozwala odtworzyć Q_1 $\square$

Uwaga: można pokazać, że powierzchnia kwadratowa typu II (generycznie) odtwarza Q z dokładnością do stałej multiplikatywnej.
Terminologia: niech $\dim V = 3$.
powierzchnia typu I:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - elipsoida}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida jednopowłokowa}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida dwupowłokowa}(1,2)$$
.

powierzchnia typu II:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - stożek eliptyczny}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(1,2)$$
.