0.1 Macierz Grama układu wektorów

Weźmy V - nad $\mathbb{R}$. Mamy tutaj iloczyn skalarny $\langle .|. \rangle$. Ustalamy wektory $v_1, \ldots, v_k$ - liniowo niezależne.
niech

$$x = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i, \quad \langle x|x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i|v_j \rangle x^j.$$

Definicja 1 *Macierzą Grama układu wektorów* $v_1, \ldots, v_k$ *nazywamy macierz*

$$[\langle v_i|v_j \rangle] \stackrel{ozn}{=} G(v_1, \ldots, v_k).$$

Ustalmy wektor $v \in V$, odległość wynosi $dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle) = \|(1-P)v\|$, gdzie P - rzut ortogonalny na $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
Niech $Pv = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i|v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle + \langle v_i|(1-P)v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle = \sum x^j \langle v_i|v_j \rangle .$$

Oznaczmy $\delta = dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$.

$$\delta^2 = \langle (1-P)v|(1-P)v \rangle = \langle v|(1-P)v \rangle - \langle Pv|(1-P)v \rangle = \langle v|v \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v|v_j \rangle x^j.$$

Macierzowy zapis:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1|v_1 \rangle & \langle v_1|v_2 \rangle & \ldots & \langle v_1|v_k \rangle & \langle v_1|v \rangle \\ \langle v_2|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v_2|v_k \rangle & \langle v_2|v \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle v|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v|v_k \rangle & \langle v|v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy zero. Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny mamy:

$$0 = \det G(v_1, \ldots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \ldots, v_k)).$$

Zatem

$$\delta = \left(\frac{\det G(v_1, \ldots, v_k, v)}{\det G(v_1, \ldots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja 2 *Niech* $(v_1, \ldots, v_k) \in V$ *jw. Objętością równoległościanu rozpiętego przez* $(v_1, \ldots, v_k)$ *definiujemy indukcyjnie:*

$$vol(v_1, \ldots, v_k) \stackrel{def}{=} vol(v_1, \ldots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle).$$

$$vol(v_1) = \|v_1\|.$$

Stwierdzenie 1 *Zachodzi równość*

$$vol(v_1,\ldots,v_k)=\det(G(v_1,\ldots,v_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód 1 *(indukcyjny)*
Jeden wektor: $vol(v_1)=\|v_1\|=\det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}$, $\det\langle v_1|v_1\rangle^{\frac{1}{2}}$ *- długość wektora* v_1.
Krok indukcyjny: $k\implies k+1$

$$\begin{aligned}vol(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1})&=vol(v_1,\ldots,v_k)\cdot dist(v_{k+1},\langle v_1,\ldots,v_k\rangle)=\\&=\det(G(v_1,\ldots,v_k))^{\frac{1}{2}}\cdot dist(\ldots)=\det G(v_1,\ldots,v_{k+1})^{\frac{1}{2}}\quad\square.\end{aligned}$$

0.2 Powierzchnie kwadratowe

Klasyfikacja powierzchni kwadratowych.

Przykład 1 $\left\{x\in\mathbb{R}^3:x_1^2-x_2^2+x_3^2-4x_1x_3+6x_1x_2+10x_2x_3=1\right\}$, $Q=\begin{bmatrix}1&3&-2\\3&-1&5\\-2&5&1\end{bmatrix}$.

$$S=\{x\in\mathbb{R}:Q(x)=1\}.$$

Definicja 3 *Niech* V *- przestrzeń,* $\langle .|.\rangle$ *- iloczyn skalarny oraz* $Q:V\to\mathbb{R}$ *- forma kwadratowa,* $c\in\mathbb{R}$.
Powierzchnie S *postaci* $S=\{x\in V:Q(x)=c\}$ *nazywamy powierzchnią kwadratową typu*

- *I jeśli* $c\neq 0$
- *II jeśli* $c=0$

Uwaga: jeśli $c\neq 0$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $c=1$.

Definicja 4 *Mówimy, że dwie powierzchnie* S_1,S_2 *kwadratowe mają taki sam kształt, jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne* $T:V\to V$ *takie, że* $S_2=TS_1$.

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q=\sum_{i=1}^{p}\frac{\phi_i^2}{a_i^2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\phi_{i+p}^2}{a_{i+p}^2},\quad (p,q)=sgn(Q).$$

$(\phi_1,\ldots,\phi_{p+q})$ - współrzędne ortonormalne na V.
Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to istnieje $T:V\to V$ takie, że $Q_2=Q_1\cdot T$. Wówczas $S_1=\{x\in V:Q_1(x)=c\}$, $\quad S_2=\{x\in V:Q_2(x)=c\}$ mają ten sam kształt: $S_2=\{x\in V:Q_1(Tx)=c\}=\{x\in V:Tx\in S_1\}=T^{-1}S_1\implies S_1=TS_2$

Twierdzenie 1 $Q_1,Q_2:V\to\mathbb{R},S_i=\{x\in V:Q_i(x)=1\}\ i=1,2$. *Jeżeli* $S_1=S_2$, *to* $Q_1=Q_2$

Dowód 2 *Ustalmy* $i=1$ *oraz rozważmy* $\{x\in V:Q_1(x)>0\}$. *Zauważmy, że* $\underset{x\in S_1}{\forall}$ *oraz* $t>0$, $t\cdot x\in\mathcal{O}$, *gdyż* $Q_1(tx)=t^2Q_1(x)=t^2>0$.
Na odwrót, jeżeli $y\in\mathcal{O}$, *to* $\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}}\in S_1$. *(*$Q(\frac{y}{\sqrt{Q(y)}})=\frac{Q(y)}{Q(y)}=1$*).*

Widzimy zatem, że:

$$1.\mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} S_1,$$

2. Wartość Q_1 na $\mathcal{O}$ jest wyznaczona przez wartości na S_1, gdyż $Q_1(tx) = t^2 \underset{x \in S_1}{\forall}$.
Skoro $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym a funkcja $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = Q_1(x)$ jest różniczkowalna oraz $f''(x) = Q_1(x) \underset{x \in V}{\forall}$, to widzimy, że znajomość S_1 pozwala odtworzyć Q_1 $\square$

Uwaga: można pokazać, że powierzchnia kwadratowa typu II (generycznie) odtwarza Q z dokładnością do stałej multiplikatywnej.
Terminologia: niech $\dim V = 3$.
powierzchnia typu I:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - elipsoida}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida jednopowłokowa}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida dwupowłokowa}(1,2)$$
.

powierzchnia typu II:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - stożek eliptyczny}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(1,2)$$
.