Notatki z Algebry II L2019, FUW

Jakub Korsak

12 kwietnia 2019

1 Wykład (08.03.2019)

1.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

Definicja 1 *V - przestrzeń wektorowa,* $\dim V < \infty, \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C})$
$V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \to \mathbb{F}, \phi$ *- liniowe* $\}$.
Terminologia: ϕ jest formą liniową

Przykład 1 $V = \mathbb{R}^3, \phi\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja 2 *Odwzorowanie $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V, jeżeli:*

- $\Omega(v, \lambda_1\tilde{v}_1 + \lambda_2\tilde{v}_2) = \lambda_1\Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2\Omega(v, \tilde{v}_2) \underset{v,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2 \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1\Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2\Omega(v_2, \tilde{v}) \underset{v_1,v_2,\tilde{v} \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$

Przykład 2 *$V = \mathbb{R}^2$. Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci*

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^1, x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3 *Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będziebazą przestrzeni V. Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j]_{i,j \in 1,\ldots,n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie $\mathcal{E}$ i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$*

Przykład 3

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \Omega \text{ - jak poprzednio} \, [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Uwaga: *Jeśli $v \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne* $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

a $\tilde{v} \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, *to*

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j) = \sum_{i,j} \lambda^i \Omega(e_i, e_j) \tilde{\lambda}^j = \left[\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right] [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

1.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V. Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_i a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \underset{\text{conv.}}{\overset{\text{East}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = \left[a_i^k\right]^T [\Omega]_{\mathcal{E},k,l} \left[a_j^l\right] \tag{1}$$

Zauważmy $\left[a_i^j\right] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ i wzór 1 zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Przykład 4

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Rozważmy bazę* $\mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$

Zauważmy, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det [\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

Definicja 4 *Mówimy, że Ω jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej)* $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \dots, E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}} = rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}'}$

Definicja 5 *Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie $\mathcal{E}$ przestrzeni wektorowej V.*

Przykład 5 *(a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że Ω jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$*
(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^k w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odzworowanie $T_\Omega : V \to V^*$ takie, że

$$\langle T_\Omega(v), \tilde{v}\rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E},i,j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_\Omega(e_i), e_j\rangle = [T_\Omega]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{E},i,j}.$$

w szczególności $rk\Omega = rk(T_\Omega) = n+1$

Definicja 6 *Mówimy, że forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ jest*

- *symetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$*
- *antysymetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \underset{v,\tilde{v}\in V}{\forall}$*

Przykład 6 • *$\Omega : \psi$ na $\mathbb{R}_n[.]$ jak wyżej sąsymetryczne.*

- *$\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ dla $\begin{matrix} - \text{ antysymetria} \\ + \text{ symetria}\end{matrix}$*

Stwierdzenie 1 *Dla każdego Ω istnieje Ω_a i Ω_s, gdzie Ω_s - symetryczna, Ω_a - antysymetryczna oraz*

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

Ponadto Ω_a, Ω_s - jednoznacznie wyznaczone

Dowód 1 *Sprawdzić, że $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v)); \Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}), \Omega(\tilde{v}, v))$*

2 Wykład (15.03.2019)

2.1 Formy dwuliniowe (a) i formy kwadratowe (b)

$$(a) \quad \phi(w, \tilde{w}) = \int_0^1 w(t)\tilde{w}'(t)dt \in \mathbb{R}, \quad w, \tilde{w} \in \mathbb{R}_3[.], \phi : \mathbb{R}_5[.] \times \mathbb{R}_5[.] \to \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \varphi(w) = \phi(w, w) = \int_0^1 w(t)w'(t)dt, \quad \varphi : \mathbb{R}_3[.] \to \mathbb{R}.$$

Definicja 7 *Niech $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie $\varphi : V \to \mathbb{F}$ takie, że $\varphi(v) = \phi(v, v)$ nazywamy formą kwadratową związaną z ϕ*

Przykład 7 *Formy kwadratowe na $V = \mathbb{R}^2$. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \phi_A(x, \tilde{x}) =$*
$x^T A\tilde{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1\tilde{x}_1 + bx_1\tilde{x}_2 + cx_2\tilde{x}_1 + dx_2\tilde{x}_2$
$\varphi_A(x) = \phi_A(x, x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b + c)x_1x_2 + dx_2^2$

Przypomnienie:

$$\phi = \phi_a + \phi_s, \phi_a(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) - \phi(\tilde{v}, v)), \phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v)).$$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v, v) + \phi_s(v, v) = \phi_s(v, v)$

Stwierdzenie 2 *Jeżeli $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ - jak wyżej, to*

$$\phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(v + \tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})) \text{ - formuła polaryzacyjna! }.$$

Dowód 2 *Obliczmy $\varphi(v + \tilde{v}) = \phi(v + \tilde{v}, v + \tilde{v}) = \phi(v, v) + \phi(\tilde{v}, \tilde{v}) + \phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v) = \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) + 2\phi_s(v, \tilde{v})$* $\square$

Uwaga: Powyższe stwierdzenie zadaje $1 - 1$ odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład 8 *$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.*

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\forall}$ rozważmy $\phi_\lambda(x, \tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$. Zauważmy, że $\varphi(x) = \phi_\lambda(x, x)$, ϕ_0 jest symetryczną formą dwuliniową oraz $\varphi(x) = \phi_0(x, x)$

Przykład 9 *φ - forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ. Macierzą formy φ w bazie $\mathcal{E}$ definiujemy jako macierz ϕ w $\mathcal{E}$.*

$$rk\varphi \stackrel{def}{=} rk\phi.$$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana. Wracając do przykładu: $\mathcal{E}$ - baza standardowa $\mathbb{R}^2$,

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

> **Definicja 8** *Mówimy, że baza $\mathcal{E}$ diagonalizuje formę kwadratową φ jeżeli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.*

Przykład 10 *$\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Znaleźć bazę diagonalizującą.*

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{1}{3}x_1^1.$$

Rozważmy dwie formy liniowe na $\mathbb{R}^2$:

$$\psi_1(x) = x_1 + 2x_2$$
$$\psi_2(x) = x_2.$$

$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Wówczas $\varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$*

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1 = [1, 2], \psi_2 = [0, 1]), \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Notacja: Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja $\varphi : v \in V \to \varphi_1(v)\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\phi(v, \tilde{v}) = \varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}), \frac{1}{2}(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})) = \phi_s(v, \tilde{v}).$$

Notacja: $\varphi \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi_1\varphi_2, \quad \phi = \varphi_1 \bigotimes \varphi_2$. W szczególności $\phi_s = \frac{1}{2}(\varphi_1 \bigotimes \varphi_2 + \varphi_2 \bigotimes \varphi_1$

Jeśli teraz $\varphi : V \to \mathbb{F}$ - dowolna forma kwadratowa oraz $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ - baza V, $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ - baza dualna,
Macierz φ w $\mathcal{E} : [\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}], \quad a_{ij} = a_{ji}$,
zachodzi $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} = \psi_i\psi_j$

> **Twierdzenie 1** *(Lagrange'a)*
> *Dla każdej formy kwadratowej itnieje (co najmniej jedna) baza diagonalizująca*

Dowód 3 $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)\,, \varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j$, *gdzie* $a_{ij} = a_{ji}$.
Przypuśćmy, że $a_{ij} \neq 0$ *dla pewnego* i, *np.* $i = 1$.
Rozważmy formę liniową

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j}\psi_j.$$

Wówczas istnieje wsp. bij. $i, j = 2, \ldots, n$ *taka, że*

$$\sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j = a_{11}\tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\psi_i\psi_j.$$

np.

$$a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 = a_{11}(\psi_1 + \frac{q_{12}}{a_{11}}\psi_z)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\psi_2^2.$$

Przykład 11 $V = \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 = \left(\overset{y_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}}\right)^2 - \left(\overset{y_2}{\frac{x_1 - x_2}{2}}\right)^2 + x_2\overset{y_3}{x_3}.$$

$$x_2 = y_1 - y_2, \varphi(x) = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

$$\psi_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \psi_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \psi_3 = \ldots.$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}\,[1, 1, 1] \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}\,[1, -1, 1] \\ \psi_3 &\overset{np.}{=} [1, 0, -1]\,. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,, \mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3)\,, \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2, (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3 Wykład (22.03.2019)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, np. $\varphi(x_1, x_2) = \overset{\text{diagonalne}}{x_1^2} - \overset{\text{wyraz mieszany}}{3x_1x_2} + \overset{\text{diagonalne}}{x_2^2}$ Narysować zbiór

$$\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = p \right\}.$$

$$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiemy, że istnieją współrzędne na $\mathbb{R}^2$, w których macierz φ jest diagonalna. Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + 0\psi_1\psi_2$ w tych współrzędnych macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

$$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2, \psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}, \lambda_1 = 1, \psi_2 = x_2, \lambda_2 = -\frac{5}{4}.$$

$$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2, \quad \varphi^{-1}(1) = \left\{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \right\}.$$

Ogólniej: $\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa φ w pewnej bazie ma postać $\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \ldots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \ldots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$, gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, r+s, \tilde{\psi_i} = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Twierdzenie 2 *Niech* $\varphi : V \to \mathbb{R}, (\Psi_i), (\Phi_j)$ *bazy* V *takie, że* $\varphi = \psi_1^2 + \ldots + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \ldots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + \ldots + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}^2$. *Wówczas* $r = r' \quad \& \quad s = s'$

Dowód 4 $r + s = r' + s' = rk\varphi$

Dla uproszczenia załóżmy, że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0 \\ \phi_{r'+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}.$$

Mamy $r' + s < n$ równań na wektor v w przestrzeni wymiaru n. Istnieje wektor $V \neq 0$ spełniający ten układ równań. Zatem

$$\varphi(v) = \psi_1(v)^1 + \ldots + \psi_r(v)^2 = -\phi_{r'+1}(v)^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0.$$

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \ldots = \psi_n(v) \implies v = 0 \quad \square$

Definicja 9 *Sygnaturą $sgn\varphi$ formy kwadratowej $\varphi : V \to \mathbb{R}_-$ nazywamy parę liczb (r, s), gdzie r i s są liczbami dodatnich elementów macierzy φ w bazie diagonalizującej.*

Przykład 12

$$\begin{aligned} &sgn(x_1^1 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1) \\ &sgn(x_1^2) = (1, 0) \\ &sgn(-x_1^1) = (0, 1). \end{aligned}$$

3.1 Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa $[\varphi_{ij}]$ - macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.
$Q : V \times V \to \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$

$D_l = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l2} & \dots & \varphi_{ll} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$

Rozważmy wektory $f_1, \dots, f_n$, gdzie $f_1 = e_1$& dla $i > 1$, $\quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-n,1} & \dots & \varphi_{i-n,i} \\ e_1 & \dots & e_i \end{bmatrix}$

Przykład 13

$$f_2 = \frac{1}{D_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{11}}(\varphi_{11}e_2 - \varphi_{12}e_1) = e_2 - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}}e_1.$$

$$f_3 = \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}\varphi_{23} & \end{bmatrix} e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}, \ \textit{itd.}$$

Widać, że $f_i = e_i + x_i, x_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$. Zatem $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ jest bazą V.

Twierdzenie 3 *Baza $\mathcal{F}$ diagonalizuje φ oraz*

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Przykład 14 $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 1, D_2 = -\frac{5}{4}, \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód 5 *Naszym celem jest obliczenie $Q(f_i, f_j)$.*
Załóżmy, że $j < i$ i obliczmy

$$Q(f_i, e_j) = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1} & \dots & \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,i} \\ \varphi_{j_1} & \dots & \varphi_{ji} \end{bmatrix} \leftarrow j = 0.$$

Dla $j=1$ $\quad Q(f_i,e_i)=\frac{D_i}{D_{i-1}}$

Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i;j}=Q(f_i,f_j)=\begin{cases} Q(f_i,e_j+x_j)=0 & j<i \\ Q(f_i,e_i+x_i)=Q(f_i,e_i)=\frac{D_i}{D_{i-1}} & j=i \end{cases}$ $\square$

Zauważmy, że $\varphi|_{<e_1,\dots,e_i>}$ ma rząd $=i$ gdyż jest dodatnio określona $\iff$ niezdegenerowana. Stąd:

$$\det\left(\left[\varphi|_{<e_1,\dots,e_n>}\right]_{(e_1,\dots,e_i)}\right)=\det\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii}\end{bmatrix}=D_i.$$

$$sgn\varphi=(n,0),\quad [\varphi]_{\mathcal{F}}=diag\left(D_1,\frac{D_2}{D_1},\dots,\frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Zatem $D_1>0,\frac{D_2}{D_1}>0,\dots,\frac{D_n}{D_{n-1}}>0$, a to jest spełniony tylko gdy $D_1>0,D_2>0,\dots,D_n>0$ $\square$

4 Wykład (29.03.2019)

$$A \in \mathrm{End}(V) : V \to V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 *$u(t)$ - wielomian stopnia n, $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \in End(V)$ oznaczać będziemy $u(A)$. Własności*

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \tag{2}$$

$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \tag{3}$$

Przykład 15

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 4 *(Cayleya - Hamiltona)*

$$\underset{A \in End(V)}{\forall} w_A(A) = 0.$$

Dowód 6 *Niech $\mathcal{E}$ - baza $\mathcal{V}$: $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$*

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w\left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) \underset{w \in \mathbb{F}_k[x]}{\forall}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy $\mathcal{A}$

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \ldots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \tag{4}$$

Na przykład (notacje: $\det[a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{22} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n$ *4 oraz (123)*

$$(b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \ldots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0\mathcal{A} &= c_0 1 && |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1\mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 && |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1}\mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 && |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 && |\mathcal{A}^n \\ +b_0\mathcal{A} + (b_1\mathcal{A}^2 - b_0\mathcal{A}) + \ldots + b_{n-1}\mathcal{A}^n - b_{n-2}\mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

Przykład 16 x_n *- ciąg Fibonacciego.* $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b:
wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right), b = \ldots.$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad $\mathbb{C}$.
Ustalmy $A \in \mathrm{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:
a) $j_1 \neq j_2$, to $\underset{u \in \mathbb{C}_m[.]}{\exists}, \quad w_{j_1}(\lambda) w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda) w_A(\lambda)$
b) $NWD(w_1, \ldots, w_r) = 1 \implies \underset{v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{C}[.]}{\exists} 1 = v_1 w_1 + \ldots + v_r w_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A) w_j(A), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \ldots, P_r\}$
(i) $\sum_{j=1}^{r} P_j = 1$,
$(ii) j_1 \neq j_2 : \quad P_{j_1} P_{j_2} = v_{j_1}(A) v_{j_2}(A) w_{j_1}(A) w_{j_2}(A)$
(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^{r} P_j = P_i$
(iv) niech $V_i = imP_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$

$$v = P_1 v + \ldots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \bigcap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A, gdyż $AP_j = Av_j(A) w_j(A) = v_j(A) w_j(A) A = P_i A$
a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_j v = P_j A v \in V_j$
(vi) $v_j = \ker\left((A - \lambda_j 1)^{n_j}\right)$. $v \in v_j(a) w_j(A) v \implies (A - \lambda_1 1)^{n_j} v = v_j(A) w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_r 1)^{n_j}$
$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \ldots + P_j v + \ldots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$ dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[.]$
(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 10 *Przy powyższych oznaczeniach* $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ *nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową* A

Twierdzenie 5 *O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe*

5 Wykład (05.04.2019)

Definicja 11 *Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$est diagonalizowalna,eżeli istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{F}^n$ taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$.*
Jeżeli $G = [id]^{st}_{\mathcal{E}}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A est diagonalizowalna jeżeli $\mathbb{F}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych A.

Przykład 17 *(antyprzykład)*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *nie jest macierzą diagonalizowalną.*

$$w_a = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & \\ 1-\lambda & \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$ker(A-1) = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli $\mathbb{C}^2$ nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A.
$\lambda = 1, n_1 = 2. V_\lambda = ker(A - \lambda 1)^{n_1} = ker(A-1)^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

Twierdzenie 6 *V - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$. Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech*

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, dimV_i = n_i$

Wniosek: Niech $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i, kolejne n_2 jest bazą V_2, itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \ldots \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 7 *(równość $n_i = dimV_i$)*
Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.
Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. *Zauważmy, że wówczas* $\lambda \in Sp(A)$, *to znaczy, że*

$$\underset{\lambda_j \in Sp(A)}{\exists} . \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \phi$, *zatem* $i = j$. *Czyli* $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i}$. *Zatem*

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i} \implies n_i = dimV_i \quad \Box.$$

Przykład 18 *Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:*

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\nabla(t)}.$$

$$v(t) = e^{At} v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 3 *Niech f - funkcja analityczna oraz $w \in \mathbb{C}_n[.]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz wielomian $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ taki, że $f = wq + r$*

Dowód 8 *Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków w.*

$$k = 1: \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_{q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda -}_{r}$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje $\tilde{q}$ - analityczna

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1 + \ldots + n_{k-1}}[.]$ *oraz istnieje* $\tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{r}}$ *takie, że* $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{r}} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$ *Po wstawieniu* $\tilde{q}$: $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + r$, *gdzie* $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{\tilde{r}}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad \Box$

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 19 *Obliczyć* e^{At} *: rozważmy funkcję*

$$f : \lambda \to e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$, gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

$$f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A)w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1 && e^t = a + b + c \\
&\lambda = -1 && e^{-t} = a - b + c \\
&\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = && q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) + 2a\lambda + b \implies \\
&\lambda = -1 && te^{-t} = -2a + b.
\end{aligned}$$

6 Wykład (12.04.2019)

Przykład 20

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}, \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{4}\left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t}\mathbb{I} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1 = ker(A - 1\mathbb{I}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{wektor własny} \\ \textit{o wartości własnej} = 1}} \right\rangle$$

$$V_{-1} = ker(A + 1\mathbb{I})^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 1\mathbb{I}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\textit{Rozważmy bazę } \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ - \textit{postać jordanowska macierzy.}}$$

$$A \in End(V), \quad Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \quad n_i \text{ - krotności } \lambda_i$$
$$V = \bigoplus V_{\lambda_i}, \quad V_{\lambda_i} = ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i}$$
$$A = \bigoplus A_i, \text{ gdzie } A_i \in End(V_{\lambda_i}) \text{ taki, że } \quad A_i = A|_{V_{\lambda_i}}.$$

Zauważmy,że
$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$
gdzie
$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 12 *Jeżeli $N \in End(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N.*

Przykład 21

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} \text{ - nilpotent st. n+1.}$$

$$\left\{ n!, n!x, \binom{n}{2} x^2, \ldots, \binom{n}{n-1} x^{n-1}, \binom{n}{n} x^n \right\}$$
$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 13 *Klatką jordanowską nazywamy macierz postaci*
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7 *Niech $A \in End(W)$, gdzie w jest nad $\mathbb{C}$, $dimV < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W, w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonali.*

Dowód 9 *Skoro $A = \bigoplus A_i$, $\quad A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_I$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i, to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \to W$ - nilpotentny stopdnia q i $N^q = 0$.*
$\underset{i \in \{0,\ldots,q\}}{\forall}$ *niech $W_i = kerN^i$.*
$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. *Mówimy, że* w *ma wysokość* i, *jeżeli* $N^i x = 0$ *oraz* $N^{i-1}x \neq 0$.
Zauważmy, że jeżeli x *ma wysokość równą* i, *to układ wektorów*

$$\left\{x, Nx, \ldots, N^{i-1}x\right\}.$$

jest liniowo niezależny.
Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\underset{dzialamy}{N^{i-1}} \implies x_0}$
$\alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\underset{dzialamy}{N^{i-2}} \implies \alpha_1 = 0}$ *itd.*
Rozważmy tym razem podprzestrzeń $kerN \cap ImN^{j-1} \subset W$ *i zauważmy, że* $dimkerN_1 ImN^{j-1} = dimW_j - dimW_{j-1}$.
W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \to kerN \cap ImN^{j-1}$ *wzorem* $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $imF = kerN \cap ImN^{j-1}$ *oraz* $kerF = W_{j-1}$, *to*
$dimW_j = dimimF + dimkerF = dim(kerN \cap ImN^{j-1}) + dimW_{j-1}$

$$kerF = W_{j-1} \text{ - oczywiste. }.$$

$ImF = kerN \cap ImN^{j-1} : y \in kerN \cap ImN^{j-1} \implies \underset{x \in ImN^{j-1}}{\exists} : y = N^{j-1}x$ *oraz* $Ny = 0$

to w takim razie $N^j x = 0 \implies x \in W_j$ *oraz* $y = N^{j-1}x = Fx$

$kerN \cap ImN^{q-1} \subset kerN \cap ImN^{q-2} \subset \ldots \subset kerN$

.

Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $m = dimkerN$ *będzie bazą* $kerN$ *zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni. Wektor* $f_1 \in kerN \cap ImN^{q-1}$ *jest końcówką serii wektorów długości* q.
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ *i niech* $h(i)$ *oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że*

$$\{e_{ij} : i \in 1, .., m, j \in \{1, \ldots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \square.$$