V - przestrzeń z iloczynem skalarnym nad $\mathbb{F}$. ($\mathbb{R}$ - przestrzeń euklidesowa, $\mathbb{C}$ - przestrzeń unitarna)

0.1 Ortogonalizacja G-S

uwaga: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna, $A \in L(V)$, $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$.

$$a^i_j = \langle e_i | A e_j \rangle .$$

$$Ae_j = \sum_l a^l_j e_l$$
$$\langle e_i | A e_j \rangle = \sum_l \langle e_i | e_l \rangle a^l_j = a^i_j.$$

0.2 Funkcjonały liniowe $\underset{1-d}{\leftrightarrow}$ wektory

$\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle$

Stwierdzenie 1 *(Tożsamość polaryzacyjna)*
$\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $\frac{v}{\mathbb{C}} = \|v + i^k w\|^2$

$$\underset{v,w \in V}{\forall}, \langle w | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle v + i^k w | v + i^k w \right\rangle .$$

Dowód 1

$$\begin{aligned}
&k = 0 \qquad && \langle v + w | v + w \rangle = \langle v|v \rangle + \langle w|w \rangle + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle \\
&k = 1 && i \langle v + iw | v + iw \rangle = i \left(\langle v|v \rangle + \langle w|w \rangle + i \langle v|w \rangle - i \langle w|v \rangle \right) \\
&k = 2 && - \langle v - w | v - w \rangle = - \langle v|v \rangle - \langle w|w \rangle + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle \\
&k = 3 && - i \langle v - iw | v - iw \rangle = -i \left(\langle v|v \rangle + \langle w|w \rangle - i \langle v|w \rangle + i \langle w|v \rangle \right).
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle v + i^k w | v + i^k w \right\rangle = 4 \langle w|v \rangle \quad \square$$

Uwaga: w ten sam sposób pokazujemy, że $\underset{A \in L(V)}{\forall} \langle w | Av \rangle = \frac{1}{4} \sum i^k \left\langle v + i^k w | A(v + i^k w) \right\rangle (*)$

Wniosek: Jeżeli $A \in L(V)$ spełnia $\langle x | Ax \rangle = 0$ dla wszystkich $x \in V$, to $A \equiv 0$.
Rzeczywiście z $(*) \implies \langle w | Av \rangle = 0$, kładziemy $w = Av$ i $\langle Av | Av \rangle = \|Av\|^2 = 0 \implies Av = 0 \underset{v \in V}{\forall}$

0.3 Sprzężenie hermitowskie operatora

V, W - przestrzenie z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Niech $A \in L(V, W)$.
Ustalmy wektor $w \in W$ i rozważmy funkcjonał liniowy

$$V \ni v \to \langle w | Av \rangle \in \mathbb{F} \text{ (na p-ni } V) .$$

$$\underset{\tilde{w} \in V}{\exists} : \langle w | Av \rangle = \langle \tilde{w} | v \rangle = \langle A^* w | v \rangle .$$

Zauważmy, że $w_1, w_2 \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, to

$$\begin{aligned} &\langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | v \rangle = \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | Av \rangle = \overline{\lambda}_1 \langle w_1 | Av \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle w_2 | Av \rangle = \\ &= \overline{\lambda}_1 \langle \tilde{w}_1 | v \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle \tilde{w}_2 | v \rangle = \langle \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 | v \rangle . \underset{v \in V}{\forall} \\ &\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2. \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $W \ni w \to \tilde{w} \in V$ jest liniowe. Oznaczenie $\tilde{w} = A^* w$.
A^* nazywamy sprzężeniem hermitowskim A.
Wyrażenie w bazie ortonormalnej $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza V, $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ - baza W. $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$.
$b_{ji} \in [A^*]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

$$b_{ji} = \langle e_j | A^* f_i \rangle = \langle A e_j | f_i \rangle = \overline{\langle f_i | A e_j \rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

0.4 Notacja Diraca

$$\underset{\text{bracket}}{\langle v | w \rangle} \to \underset{\text{bra}}{\langle v |}, \underset{\text{ket}}{| w \rangle}, | v \rangle \langle w | \leftarrow \text{ ket bra (XD).}$$

$\langle v |$ - z definicji oznacza funkcjonał liniowy.
$v \ni | w \rangle \xrightarrow{\langle v |} \langle v | w \rangle \in \mathbb{C}$.
$| v \rangle \langle w | : v \to v$ - liniowe odwzorowanie takie, że

$$| v \rangle \langle w | (u) = | v \rangle \langle w | u \rangle : \underset{\text{stara notacja}}{\to} \langle w | u \rangle v.$$

$$(| v \rangle \langle w |)^* = | w \rangle \langle v | .$$

Niech $A = | v \rangle \langle w |$, $B = | w \rangle \langle v |$.

$$\begin{aligned} &\langle u_1 | A u_2 \rangle = \langle u_1 | v \rangle \langle w | u_2 \rangle = \left\langle \overline{\langle u_1 | v \rangle} w | u_2 \right\rangle = \\ &= \langle \langle v | u_1 \rangle w | u_2 \rangle = \langle | w \rangle \langle v | u_1 \rangle | u_2 \rangle \rangle = \langle B u_1 | u_2 \rangle . \end{aligned}$$

Zatem $A^* = B, | v \rangle \langle w |^* = | w \rangle \langle v |$. Dalsze reguły:
$| v \rangle^* = \langle v | , \langle v |^* = | v \rangle$.

Uwaga: rozkład jedności: $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza ortonormalna taka, że $\mathbb{I}_V = \sum_{i=1}^n | e_i \rangle \langle e_i |$.

$$\sum_{i=1}^n | e_i \rangle \langle e_i | v \rangle = v.$$

0.5 Własności hermitowskeigo sprzężenia

$\langle A^* w | v \rangle = \langle w | A v \rangle$.

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$
3. $(DC)^* = C^* D^*, C : V \to W, D : W \to U.$

$\langle u | DCv \rangle = \langle D^* u | Cv \rangle = \langle C^* D^* u | v \rangle$

Definicja 1 *Niech $A \in L(V)$. Mówimy (1), że A jest samosprzężona jeżeli $A^* = A$, (2), że A jest unitarna, jeżeli $A^* = A^{-1}$, (3) że A jest normalna jeżeli $A^*A = AA^*$.*

Uwaga: $1 \to 3, 2 \to 3$

Przykład 1 $\mathbb{C}^2$ *z iloczynem kawniczym* $\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \overline{v}_1 w_1 + \overline{v}_2 w_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = A^*,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^* = A \iff A = \begin{bmatrix} x & u \\ \overline{u} & y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$.

Unitarność: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = A^*$, *w szczególności gdy* $\det A = 1$, *to unitarność*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C}.$$