

Notatki z Algebry II L2019, FUW

Jakub Korsak

29 czerwca 2019

1 Wykład (08.03.2019)

1.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

Definicja 1 V - przestrzeń wektorowa, $\dim V < \infty, \mathbb{F}(= \mathbb{R} \text{ lub } \mathbb{C})$
 $V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \rightarrow \mathbb{F}, \phi - \text{liniowe}\}.$
Terminologia: ϕ jest formą liniową

Przykład 1 $V = \mathbb{R}^3, \phi \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja 2 Odwzorowanie $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V , jeżeli:

- $\Omega(v, \lambda_1 \tilde{v}_1 + \lambda_2 \tilde{v}_2) = \lambda_1 \Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2 \Omega(v, \tilde{v}_2) \quad \forall_{v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in V} \quad \forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1 \Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2 \Omega(v_2, \tilde{v}) \quad \forall_{v_1, v_2, \tilde{v} \in V} \quad \forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$

Przykład 2 $V = \mathbb{R}^2$. Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci

$$\Omega \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = [x^1, x^2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3 Niech $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą przestrzeni V . Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j)]_{i,j \in 1, \dots, n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie \mathcal{E} i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$

Przykład 3

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \Omega - \text{ jak poprzednio } [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Uwaga: Jeśli $v \in V$ ma w bazie \mathcal{E} współrzędne $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

a $\tilde{v} \in V$ ma w bazie \mathcal{E} współrzędne $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, to

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega \left(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j \right) = \sum_{i,j} \lambda^i \tilde{\lambda}^j \Omega(e_i, e_j) = [\lambda^1, \dots, \lambda^n] [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

1.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V . Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_j a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \stackrel{\text{East}}{\underset{\text{conv.}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = [a_i^k]^T [\Omega]_{\mathcal{E}, k, l} [a_j^l] \quad (1)$$

Zauważmy $[a_i^j] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ i wzór 1 zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Przykład 4

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

$$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Rozważmy bazę } \mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$,

Zauważmy, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det [\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

Definicja 4 Mówimy, że Ω jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej) $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \dots, E \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk [\Omega]_{\mathcal{E}} = rk [\Omega]_{\mathcal{E}'}$,

Definicja 5 Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie \mathcal{E} przestrzeni wektorowej V .

Przykład 5 (a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że Ω jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$

(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^k w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odwzorowanie $T_{\Omega} : V \rightarrow V^*$ takie, że

$$\langle T_{\Omega}(v), \tilde{v} \rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E}, i, j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_{\Omega}(e_i), e_j \rangle = [T_{\Omega}]_{\mathcal{E}, i, j}^{\mathcal{E}*}.$$

w szczególności $rk \Omega = rk(T_{\Omega}) = n+1$

Definicja 6 Mówimy, że forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ jest

- symetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$
- antysymetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \quad \forall_{v, \tilde{v} \in V}$

Przykład 6 • $\Omega : \psi$ na $\mathbb{R}_n[.]$ jak wyżej są symetryczne.

- $\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ dla $\begin{matrix} - & \text{antysymetria} \\ + & \text{symetria} \end{matrix}$

Stwierdzenie 1 Dla każdego Ω istnieje Ω_a i Ω_s , gdzie Ω_s - symetryczna, Ω_a - antysymetryczna oraz

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

Ponadto Ω_a, Ω_s - jednoznacznie wyznaczone

Dowód 1 Sprawdzić, że $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v)); \Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) + \Omega(\tilde{v}, v))$

2 Wykład (15.03.2019)

2.1 Formy dwuliniowe (a) i formy kwadratowe (b)

$$(a) \quad \phi(w, \tilde{w}) = \int_0^1 w(t) \tilde{w}'(t) dt \in \mathbb{R}, \quad w, \tilde{w} \in \mathbb{R}_3[.], \phi : \mathbb{R}_5[.] \times \mathbb{R}_5[.] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \varphi(w) = \phi(w, w) = \int_0^1 w(t) w'(t) dt, \quad \varphi : \mathbb{R}_3[.] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definicja 7 Niech $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$ takie, że $\varphi(v) = \phi(v, v)$ nazywamy formą kwadratową związaną z ϕ

Przykład 7 Formy kwadratowe na $V = \mathbb{R}^2$. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\phi_A(x, \tilde{x}) = x^T A \tilde{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1 \tilde{x}_1 + bx_1 \tilde{x}_2 + cx_2 \tilde{x}_1 + dx_2 \tilde{x}_2$
 $\varphi_A(x) = \phi_A(x, x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$

Przypomnienie:

$$\phi = \phi_a + \phi_s, \phi_a(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) - \phi(\tilde{v}, v)), \phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v)).$$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v, v) + \phi_s(v, v) = \phi_s(v, v)$

Stwierdzenie 2 Jeżeli $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ - jak wyżej, to

$$\phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(v + \tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})) - \text{formuła polaryzacyjna!}.$$

Dowód 2 Obliczmy $\varphi(v + \tilde{v}) = \phi(v + \tilde{v}, v + \tilde{v}) = \phi(v, v) + \phi(\tilde{v}, \tilde{v}) + \phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v) = \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) + 2\phi_s(v, \tilde{v})$ □

Uwaga: Powyższe stwierdzenie zadaje 1 – 1 odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład 8 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}$ rozważmy $\phi_\lambda(x, \tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$. Zauważmy, że $\varphi(x) = \phi_\lambda(x, x)$, ϕ_0 jest symetryczną formą dwuliniową oraz $\varphi(x) = \phi_0(x, x)$

Przykład 9 φ - forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ . Macierzą formy φ w bazie \mathcal{E} definiujemy jako macierz ϕ w \mathcal{E} .

$$rk\varphi \stackrel{\text{def}}{=} rk\phi.$$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana. Wracając do przykładu: \mathcal{E} - baza standardowa \mathbb{R}^2 ,

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Definicja 8 Mówimy, że baza \mathcal{E} diagonalizuje formę kwadratową φ jeżeli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.

Przykład 10 $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Znaleźć bazę diagonalizującą.

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{1}{3}x_1^2.$$

Rozważmy dwie formy liniowe na \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= x_1 + 2x_2 \\ \psi_2(x) &= x_2.\end{aligned}$$

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Wówczas } \varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1 = [1, 2], \psi_2 = [0, 1]), \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Notacja: Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja $\varphi : v \in V \rightarrow \varphi_1(v)\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\phi(v, \tilde{v}) = \varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}), \frac{1}{2}(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})) = \phi_s(v, \tilde{v}).$$

Notacja: $\varphi \equiv^{\text{ozn}} \varphi_1\varphi_2$, $\phi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$. W szczególności $\phi_s = \frac{1}{2}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_2 \otimes \varphi_1)$

Jeśli teraz $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$ - dowolna forma kwadratowa oraz $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - baza V , $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ - baza dualna,
Macierz φ w $\mathcal{E} : [\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$,
zachodzi $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} = \psi_i\psi_j$

Twierdzenie 1 (Lagrange'a)

Dla każdej formy kwadratowej istnieje (co najmniej jedna) baza diagonalizująca

Dowód 3 $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j$, gdzie $a_{ij} = a_{ji}$.

Przypuśćmy, że $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego i , np. $i = 1$.

Rozważmy formę liniową

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j}\psi_j.$$

Wówczas istnieje współczynnik b_{ij} $i, j = 2, \dots, n$ taki, że

$$\sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j = a_{11}\tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij}\psi_i\psi_j.$$

np.

$$a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 = a_{11}(\psi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_2)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\psi_2^2.$$

Przykład 11 $V = \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + x_2x_3.$$

$$x_2 = y_1 - y_2, \varphi(x) = y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

$$\psi_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \psi_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \psi_3 = \dots.$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2} [1, 1, 1]$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} [1, -1, 1]$$

$$\psi_3 \stackrel{np.}{=} [1, 0, -1].$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), \mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3), \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2, (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3 Wykład (22.03.2019)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, np. $\varphi(x_1, x_2) = \overset{\text{diagonalne}}{x_1^2} - \overset{\text{wyraz mieszany}}{3x_1x_2} + \overset{\text{diagonalne}}{x_2^2}$ Narysować zbiór

$$\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = p \right\}.$$

$$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiemy, że istnieją współrzędne na \mathbb{R}^2 , w których macierz φ jest diagonalna. Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + 0\psi_1\psi_2$ w tych współrzędnych macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

$$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2, \psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}, \lambda_1 = 1, \psi_2 = x_2, \lambda_2 = -\frac{5}{4}.$$

$$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2, \quad \varphi^{-1}(1) = \left\{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \right\}.$$

Ogólniej: $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa φ w pewnej bazie ma postać $\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \dots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \dots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$, gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r+s, \psi_i = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Twierdzenie 2 Niech $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, (\Psi_i), (\Phi_j)$ bazy V takie, że $\varphi = \psi_1^2 + \dots + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \dots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + \dots + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 - \dots - \phi_{r'+s'}^2$. Wówczas $r = r'$ & $s = s'$

Dowód 4 $r + s = r' + s' = rk\varphi$

Dla uproszczenia założmy, że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0 \\ \psi_{r+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \psi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}.$$

Mamy $r' + s < n$ równań na wektor v w przestrzeni wymiaru n . Istnieje wektor $v \neq 0$ spełniający ten układ równań. Zatem

$$\varphi(v) = \psi_1(v)^2 + \dots + \psi_r(v)^2 - \phi_{r'+1}(v)^2 - \dots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0.$$

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \dots = \psi_n(v) \implies v = 0 \quad \square$

Definicja 9 Sygnaturę $\text{sgn}\varphi$ formy kwadratowej $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}_-$ nazywamy parę liczb (r, s) , gdzie r i s są liczbami dodatnich elementów macierzy φ w bazie diagonalizującej.

Przykład 12

$$\text{sgn}(x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1)$$

$$\text{sgn}(x_1^2) = (1, 0)$$

$$\text{sgn}(-x_1^2) = (0, 1).$$

3.1 Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego

$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa $[\varphi_{ij}]$ - macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

$Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$

$$D_l = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l2} & \dots & \varphi_{ll} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$$

$$\text{Rozważmy wektory } f_1, \dots, f_n, \text{ gdzie } f_1 = e_1 \text{ \& dla } i > 1, \quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,i} \\ e_1 & \dots & e_i \end{bmatrix}$$

Przykład 13

$$f_2 = \frac{1}{D_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{11}} (\varphi_{11} e_2 - \varphi_{12} e_1) = e_2 - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}} e_1.$$

$$f_3 = \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{23} \end{bmatrix} e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}, \text{ itd.}$$

Widać, że $f_i = e_i + x_i, x_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$. Zatem $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ jest bazą V .

Twierdzenie 3 Baza \mathcal{F} diagonalizuje φ oraz

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = \text{diag} \left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} \right).$$

Przykład 14 $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 1, D_2 = -\frac{5}{4}, \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód 5 Naszym celem jest obliczenie $Q(f_i, f_j)$.

Założmy, że $j < i$ i obliczmy

$$Q(f_i, e_j) = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1} & \dots & \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \leftarrow j = 0.$$

Dla $j = 1 \quad Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}}$

Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i,j} = Q(f_i, f_j) = \begin{cases} Q(f_i, e_j + x_j) = 0 & j < i \\ Q(f_i, e_i + x_i) = Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}} & j = i \end{cases} \quad \square$

Zauważmy, że $\varphi|_{\langle e_1, \dots, e_i \rangle}$ ma rząd $= i$ gdyż jest dodatnio określona \iff niezdegenerowana. Stąd:

$$\det \left([\varphi|_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}]_{(e_1, \dots, e_i)} \right) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} = D_i.$$

$$\text{sgn} \varphi = (n, 0), \quad [\varphi]_{\mathcal{F}} = \text{diag} \left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} \right).$$

Zatem $D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$, a to jest spełniony tylko gdy $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0 \quad \square$

4 Wykład (29.03.2019)

Niech $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$. mamy bazy \mathcal{E} i \mathcal{F} . $\underbrace{([id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}})[\varphi]_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\text{reguła transformacyjna dla macierzy form kwadratowych}}$

4.1 Reguła transformacyjna macierzy odwzorowania liniowego

$$A : V \rightarrow V \quad [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}, \quad [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = ([id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}})^{-1}.$$

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: następnych kilka wykładów.

Kończymy wątek o twierdzeniu Sylwestra:
niech φ - dodatnio określona $D_i > 0$.

Definicja 10 φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dodatnio określona.

Wniosek: Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^2 D_i > 0$, gdzie $D_i = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \stackrel{\text{ożn}}{=}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$$

Definicja 11 Odwzorowanie liniowe $A : V \rightarrow V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V .
($L(V, V) \stackrel{\text{ożn}}{=} L(V)$)

4.2 Rzuty na podprzestrzenie

Przykład 15 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1$, $V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \text{Zauważmy, że } P_1^2 = P_1. \quad \left([P_1]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Przykład 16 Inny rozkład: $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

$$P_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2^2 = P_2. \quad ([P_2]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

Ogólniej: Jeżeli przestrzeń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$, to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem:

$$Pu = v.$$

gdzie $u = v + w, v \in V, w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P, W = \ker P, \text{im} P = V$

Definicja 12 Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$

Stwierdzenie 3 $P \in L(U), P^2 = P, W = \text{im} P, V = \text{im} P^\perp$. Wtedy $U = V \oplus W$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W .

Dowód 6 Weźmy $u \in U : u = Pu + (1 - P)u$ & $Pu \in \text{im} P$ & $(1 - P)u \in \ker P$, gdyż $P(1 - P)u = (P - P^2)u = 0$. Czy $\text{im} P \cap \ker P = \{0\}$?
Jeśli $u \in \text{im} P$ & $u \in \ker P$, to $\exists_{x \in V} u = Px = PPx = Pu = 0$

Definicja 13 Jeżeli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią taką, że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A - niezmiennicza.

Uwaga: Niech V będzie niezmiennicze dla $A : U \rightarrow U, \mathcal{E}_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ dla bazy $V, \mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$

$$\text{- baza } U \implies [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & & \\ \vdots & & & & * \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & ** \\ 0 & \dots & 0 & & \end{bmatrix},$$

$* \in M_{k, n-k}(\mathbb{F}), ** \in M_{n-k, n-k}(\mathbb{F})$

Uwaga 2: Przypuśćmy, że $U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_l$ & $AV_i \subset V_i, i \in 1, \dots, l$. Wtedy istnieje baza \mathcal{E} przestrzeni U taka, że gdzie $B_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F})$ & $n_i = \dim V_i$

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_l \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, \dots, e_{n_1+n_2+\dots+n_l}\}.$$

Definicja 14 Mówimy, że $0 \neq u \in U$ jest wektorem własnym $A \in L(U)$, jeśli $Au = \lambda u$ dla pewnego skalaru $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Mówimy wówczas, że jest wartością własną A . Zbiór wartości własnych A nazywamy spektrum A i oznaczamy $\text{sp}(A) \subset \mathbb{F}$. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{F}$, to $V_\lambda = \ker(A - \lambda 1)$ nazywamy podprzestrzenią własną dla $\lambda \in \mathbb{F}$.

Zauważmy $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \ker(A - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda 1) = 0 \iff A - \lambda 1$ jest operatorem nieodwracalnym.

Uwaga: Jeśli $A \in L(V)$, to $\det([A]_{\mathcal{E}}) = \det([A]_{\mathcal{F}}) = \det(A)$, gdyż $\det[A]_{\mathcal{E}} = \det\left(\left([id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1} [A]_{\mathcal{F}} [id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\right) = \det([A]_{\mathcal{F}})$.

Operator A jest odwracalny $\iff [A]_{\mathcal{E}}$ - odwracalna $\iff \det A \neq 0$

Definicja 15 Wielomian $\lambda \in \mathbb{F} \rightarrow \det(A - \lambda 1) \in \mathbb{F}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora A , oznaczamy $w_A(\lambda)$

Wniosek: $\text{sp} A = \{\lambda \in \mathbb{F} : w_A(\lambda) = 0\}$.

Przykład 17 $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $spA : w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

Pierwiastki $w_A : \Delta = 1 + 4$, $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Wektory własne: $V_{\lambda_1} = \ker \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \ker \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$.

$V_{\lambda_2} = \ker \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ciąg Fibonacciego: $x_0 = 1 = x_1, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$ $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Znaleźć ogólny wyraz $x_n = ?$

Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 - \lambda - 1$. Zauważmy, że $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \dots = A^{n+1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$

5 Wykład (05.04.2019)

$$A \in \text{End}(V) : V \rightarrow V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 $u(t)$ - wielomian stopnia n , $u(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$
 Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \in \text{End}(V)$ oznaczać będziemy $u(A)$. Własności

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \quad (2)$$

$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \quad (3)$$

Przykład 18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 4 (Cayleya - Hamiltona)

$$\forall_{A \in \text{End}(V)} w_A(A) = 0.$$

Dowód 7 Niech \mathcal{E} - baza $\mathcal{V} : \mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w\left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right)_{w \in \mathbb{F}_k[x]}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy \mathcal{A}

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \dots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \dots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \quad (4)$$

Na przykład (notacje: $\det [a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n$ 4 oraz (123)

$$(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \dots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0 \mathcal{A} &= c_0 1 & |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1 \mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 & |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1} \mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 & |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 & |\mathcal{A}^n \\ +b_0 \mathcal{A} + (b_1 \mathcal{A}^2 - b_0 \mathcal{A}) + \dots + b_{n-1} \mathcal{A}^n - b_{n-2} \mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

Przykład 19 x_n - ciąg Fibonacciego. $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n}_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b :

wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right), b = \dots$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad \mathbb{C} .

Ustalmy $A \in \text{End}(V)$, $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:

a) $j_1 \neq j_2$, to $\exists_{u \in \mathbb{C}_m[\cdot]} w_{j_1}(\lambda)w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)w_A(\lambda)$

b) $NWD(w_1, \dots, w_r) = 1 \implies \exists_{v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}[\cdot]} 1 = v_1 w_1 + \dots + v_r w_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A)w_j(A), \quad j = 1, \dots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \dots, P_r\}$

(i) $\sum_{j=1}^r P_j = 1$,

(ii) $j_1 \neq j_2 : P_{j_1} P_{j_2} = v_{j_1}(A) v_{j_2}(A) w_{j_1}(A) w_{j_2}(A)$

(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^r P_j = P_i$

(iv) niech $V_i = \text{im} P_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$

$$v = P_1 v + \dots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \cap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A , gdyż $AP_j = Av_j(A)w_j(A) = v_j(A)w_j(A)A = P_i A$

a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_j v = P_j Av \in V_j$

(vi) $v_j = \ker((A - \lambda_j 1)^{n_j})$. $v \in v_j(A)w_j(A)v \implies (A - \lambda_1 1)^{n_j} v = v_j(A)w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_r 1)^{n_j}$

$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \dots + P_j v + \dots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$
dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[\cdot]$

(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 16 Przy powyższych oznaczeniach $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową A

Twierdzenie 5 O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe

6 Wykład (12.04.2019)

Definicja 17 Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$ jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje baza \mathcal{E} przestrzeni \mathbb{F}^n taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$. Jeżeli $G = [id]_{\mathcal{E}}^{st}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A jest diagonalizowalna jeżeli \mathbb{F}^n ma bazę złożoną z wektorów własnych A .

Przykład 20 (antyprzykład)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nie jest macierzą diagonalizowalną.

$$w_a = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$\ker(A - 1) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli \mathbb{C}^2 nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A .

$$\lambda = 1, n_1 = 2. V_{\lambda} = \ker(A - \lambda 1)^{n_1} = \ker(A - 1)^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$$

Twierdzenie 6 V - przestrzeń wektorowa nad \mathbb{C} . Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, \dim V_i = n_i$

Wniosek: Niech \mathcal{E} będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i , kolejne n_2 jest bazą V_2 , itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 8 (równość $n_i = \dim V_i$)

Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.

Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^k w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$, to znaczy, że

$$\bigcup_{\lambda_j \in Sp(A)} \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, zatem $i = j$. Czyli $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i}$. Zatem

$$\prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i} \implies n_i = \dim V_i \quad \square.$$

Przykład 21 Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \\ & A & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \nabla(t) \end{bmatrix}.$$

$$v(t) = e^{At}v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 4 Niech f - funkcja analityczna oraz $w \in \mathbb{C}_n[.]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz wielomian $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ taki, że $f = wq + r$

Dowód 9 Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków w .

$$k = 1 : \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_q + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k}_r.$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje \tilde{q} - analityczna

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1+\dots+n_{k-1}}[.]$ oraz istnieje \tilde{q}, \tilde{r} takie, że $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{q} + \tilde{r}, \tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$. Po wstawieniu $\tilde{q} : f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{q} + r$, gdzie $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ \square

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 22 Obliczyć e^{At} : rozważmy funkcję

$$f : \lambda \rightarrow e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$, gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

$$f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A)w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$?

$$\lambda = 1$$

$$e^t = a + b + c$$

$$\lambda = -1$$

$$e^{-t} = a - b + c$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} =$$

$$q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) + 2a\lambda + b \implies$$

$$\lambda = -1$$

$$te^{-t} = -2a + b.$$

7 Wykład (12.04.2019)

Przykład 23

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}, \quad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{4} \left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t}\mathbb{I} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1 = \ker(A - 1\mathbb{I}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{wektor własny} \\ \text{o wartości własnej} = 1}} \right\rangle$$

$$V_{-1} = \ker(A + 1\mathbb{I})^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 1\mathbb{I}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Rozważmy bazę } \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ - postać jordanowska macierzy.}$$

$$A \in \text{End}(V), \quad Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, \quad n_i \text{ - krotności } \lambda_i$$

$$V = \bigoplus V_{\lambda_i}, \quad V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i}$$

$$A = \bigoplus A_i, \text{ gdzie } A_i \in \text{End}(V_{\lambda_i}) \text{ taki, że } A_i = A|_{V_{\lambda_i}}.$$

Zauważmy, że

$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$

gdzie

$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 18 Jeżeli $N \in \text{End}(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N .

Przykład 24

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} - \text{nilpotent st. } n+1.$$

$$\left\{ n!, n!x, \binom{n}{2}x^2, \dots, \binom{n}{n-1}x^{n-1}, \binom{n}{n}x^n \right\}$$

$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 19 Klatkę jordanowską nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7 Niech $A \in \text{End}(W)$, gdzie W jest nad \mathbb{C} , $\dim V < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W , w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonalu.

Dowód 10 Skoro $A = \bigoplus A_i$, $A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_i$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i , to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \rightarrow W$ - nilpotentny stopnia q i $N^q = 0$.

$\forall_{i \in \{0, \dots, q\}}$ niech $W_i = \ker N^i$.

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. Mówimy, że w ma wysokość i , jeżeli $N^i w = 0$ oraz $N^{i-1} w \neq 0$.

Zauważmy, że jeżeli x ma wysokość równą i , to układ wektorów

$$\{x, Nx, \dots, N^{i-1}x\}.$$

jest liniowo niezależny.

Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \mid_{\text{działamy}} N^{i-1} \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$\alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \mid_{\text{działamy}} N^{i-2} \Rightarrow \alpha_1 = 0$ itd.

Rozważmy tym razem podprzestrzeń $\ker N \cap \text{Im } N^{j-1} \subset W$ i zauważmy, że $\dim \ker N \cap \text{Im } N^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.

W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \rightarrow \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ wzorem $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $\operatorname{Im} F = \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ oraz $\ker F = W_{j-1}$, to
 $\dim W_j = \dim \operatorname{Im} F + \dim \ker F = \dim(\ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}) + \dim W_{j-1}$

$$\ker F = W_{j-1} - \text{oczywiste.}$$

$$\operatorname{Im} F = \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} : y \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} \implies \exists_{x \in \operatorname{Im} N^{j-1}} : y = N^{j-1}x \text{ oraz } Ny = 0$$

$$\text{to w takim razie } N^j x = 0 \implies x \in W_j \text{ oraz } y = N^{j-1}x = Fx$$

$$\ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-1} \subset \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-2} \subset \dots \subset \ker N$$

.

Niech $\{f_1, \dots, f_m\}$ $m = \dim \ker N$ będzie bazą $\ker N$ zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni.
Wektor $f_1 \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-1}$ jest końcówką serii wektorów długości q .
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ i niech $h(i)$ oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że

$$\{e_{ij} : i \in 1, \dots, m, j \in \{1, \dots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \square.$$

8 Wykład (12.04.2019)

8.1 Klatki Jordanowskie

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \lambda & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \in M_h(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$

Przykład 25 np. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 8 Niech $A \in \text{End}(W)$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Istnieje baza (Jordanowska) \mathcal{E} przestrzeni W , to znaczy, że baza taka, że $[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest sumą klatek Jordanowskich z λ_i na diagonalu.

Operator nilpotentny. $N^q = 0$ - q - stopień nilpotentności ($N^{q-1} \neq 0$)

Przykład 26

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies q = 3.$$

$$A \rightarrow W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i} \subset W \quad A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \rightarrow W_{\lambda_i}. \quad A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}.$$

$$A_{\lambda_i} = \underbrace{\lambda_i 1_{W_{\lambda_i}}}_{D_{\lambda_i}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i 1_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}}.$$

$$N_{\lambda_i}^{n_i} = 0.$$

Dowód 11 (dla operatorów nilpotentnych). Niech $N \in \text{End}(W)$ - nilpotentny.

$$W_i = \ker N^i, \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_q = W \rightarrow$$

$$\rightarrow \ker N \cap \text{im} N^{q-1} \subset \ker N \cap \text{im} N^{q-2} \subset \dots \subset \ker N_i (*)$$

$$\dim \ker N \cap \text{im} N^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}.$$

Niech $\{f_1, \dots, f_m\}$ będzie bazą $\ker N$ zgodna z zawieraniem (*). Wtedy $\{e_{11}, \dots, e_{m,1}\}_{e_{i,1}}$ jest końcówką serii długości $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów:

$$\begin{array}{ccccccc} & & e_{1,h(1)} & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & & e_{2,h(2)} & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & & & & e_{i,h(i)} & & \\ & \vdots & & & & & \\ & & e_{11} & e_{21} & \dots & e_{m,1} & \end{array}$$

Dlaczego $\{e_{i,j} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, h(i)\}\}$ jest bazą W ?

Liniowa niezależność: $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0 (**)$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$

Działając N^{q-1} nie zeruje się e_{ij} , które wchodzi do serii krótszej niż q . Zatem $\alpha_{iq} = 0 \quad \forall_{i \in \{1, \dots, m\}}$.

Dalej, działając $N^{q-2} \rightarrow \alpha_{i,q-1} = 0$ itd.
 Czy wektorów e_{ij} jest tyle co wymiar W ?

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim W_q \cdot \dim W_{q-1} + \dim W_{q-1} - \dim W_{q-2} + \dots + \dim W_1 \cdot W_0 = \\ &= \underbrace{\dim \ker N \cap \operatorname{im} N^{q-1}}_{\text{końcówki serii dl. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap \operatorname{im} N^{q-2}}_{\text{końcówki serii dl. } q-1} + \dots \\ &= \text{liczba wektorów } \{e_{ij} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, h(i)\}\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że macierz N w bazie $\mathcal{E} = \{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1,h(1)}, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2,h(2)}, \dots\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} & & 0 \\ & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

8.2 Iloczyny skalarne

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, W - przestrzeń wektorowa nad \mathbb{F}

Definicja 20 Odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{F}$ takie, że

$$\forall_{u_1, u_2, v \in W} \quad \langle v | u_1 + u_2 \rangle = \langle v | u_1 \rangle + \langle v | u_2 \rangle \quad (5)$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} \quad \langle v | \lambda u \rangle = \lambda \langle v | u \rangle \quad (6)$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle} \quad (7)$$

$$\forall_{u \in W - \{0\}} \quad \langle u | u \rangle > 0. \quad (8)$$

nazywamy iloczynem skalarnym na przestrzeni W .

Uwaga: (a) $\langle 0 | 0 \rangle = 0$, $\langle 0 | 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle 0 | 0 \rangle$

(b) $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle = \overline{\langle v | u_1 + u_2 \rangle} = \overline{\langle v | u_1 \rangle} + \overline{\langle v | u_2 \rangle}$

(c) $\langle \lambda u | v \rangle = \overline{\lambda} \langle u | v \rangle = \overline{\langle v | \lambda u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v | u \rangle}$

Przykład 27 $W = \mathbb{C}^n$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. Def: $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$.

Notacja Diraca: $\langle u | v \rangle, |u\rangle, \langle v|, |u\rangle \langle v|$

Przykład 28 $u, v \in \mathbb{C}_n[\times]$, $\langle u | v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \overline{u(t)} v(t) dt$

Definicja 21 Mówimy, że wektory $u, w \in W$ są ortogonalne (względem $\langle \cdot | \cdot \rangle$), jeżeli $\langle u | v \rangle = 0$.

8.3 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą W . Mówimy, że \mathcal{E} jest bazą ortogonalną jeżeli $\langle e_i | e_j \rangle = 0, i \neq j$. Jeżeli dodatkowo $\langle e_i | e_i \rangle = 1$, to mówimy, że \mathcal{E} jest bazą ortonormalną.

Niech $\{f_1, \dots, f_n\}$ będzie dowolną bazą. Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory $\{e_1, \dots, e_n\}$: $e_1 = f_1, e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k | f_i \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} \cdot e_k$

9 Wykład (12.04.2019)

V - wektorowa nad \mathbb{R} lub \mathbb{C} . Na tej przestrzeni mamy iloczyn skalarny $\langle v_1 | v_2 \rangle \in \mathbb{F}$. Wektory ortogonalne: $v_1 \perp v_2$, jeśli $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$

Przykład 29 na przestrzeni \mathbb{C}^n wprowadzamy iloczyn skalarny $\langle u | w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i w_i$, gdzie \bar{u} - sprzężenie zespolone.

Mówimy, że baza $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_n\}$ przestrzeni V jest ortonormalna, gdy $\langle v_i | v_j \rangle = 0, i \neq j$.

Notacja $\|v\| = \langle v | v \rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v .

Stwierdzenie 5 Jeśli \mathcal{E} jest bazą ortonormalną oraz $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, to $\alpha_i = \langle v_i | v \rangle$.

Dowód 12 $\langle v_i | v \rangle = \left\langle v_i \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right. \right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_i$

Uwaga: Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.

f_1, \dots, f_k - układ ortonormalny: $\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j = 0$, to $\alpha_i = \left\langle f_i \left| \sum_{j=1}^k \alpha_j f_j \right. \right\rangle = 0$

9.1 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą V .

Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:

$f_1 = e_1$; f_1, \dots, f_k - mamy to

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle f_j | e_{k+1} \rangle}{\|f_j\|^2} f_j.$$

Uwaga: (1)

$$\langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

Dowód 13 (indukcyjny)

Dla $k = 1$ - oczywiste.

$k \implies k+1$:

$$\langle f_1, \dots, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_k, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle.$$

W szczególności $\forall_{k=1, \dots, n} f_k \neq 0$

Uwaga (2)

$f_i \perp f_j$ dla $i \neq j$.

Dowód 14 (indukcyjny)

Przypuśćmy, że $i < j$.

$$\begin{aligned} \langle f_i | f_j \rangle &= \left\langle f_i \left| e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle}{\|f_l\|^2} f_l \right. \right\rangle = \\ &= \langle f_i | e_j \rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle}{\|f_l\|^2} \langle f_i | f_l \rangle = \\ &= \langle f_i | e_j \rangle - \frac{\langle f_i | e_j \rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i | f_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Kładąc $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$, dostaję bazę ortonormalną $\{h_1, \dots, h_n\}$ \square

Przykład 30 Rozważamy przestrzeń wielomianów $V = \mathbb{R}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{F} = \{1, x\}$, $\langle v_1 | v_2 \rangle = \int_0^1 v_1(x) v_2(x) dx$. $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x$, $v_2 = \beta_1 + \beta_2 x$.

$$\langle 1 | x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2}$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{\langle 1 | x \rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2} \implies f_1 \perp f_2.$$

Czy h_1 jest unormowane? $h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1$.

$$h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right). \quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{12}$$

9.2 Rzut ortogonalny

Ustalmy podprzestrzeń E przestrzeni V . Niech $E^\perp = \left\{ v \in V : \forall_{e \in E} v \perp e \right\}$, E^\perp - jest poprzeczną

wektorową. Zauważmy, że $E \cap E^\perp = \{0\} : v \in E \cap E^\perp$, to $v \perp v : \langle v | v \rangle = 0$.

Ponadto, $E + E^\perp = V$. Ustalmy bazę ortonormalną podprzestrzeni $E = \{e_1, \dots, e_k\}$.

$$\text{Wtedy } v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i}_{\in E} + \left(v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right).$$

Zauważmy $\left\langle e_l | v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right\rangle = \langle e_l | v \rangle - \langle e_l | v \rangle = 0$. W takim razie

$$v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \in E^\perp.$$

Wniosek: $V = E \oplus E^\perp$. Rzut na E wzdłuż E^\perp nazywamy rzutem ortogonalnym na E i oznaczamy P_E .

Działa tak: $P_E v = \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i$. E^\perp nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni $E^{l=1}$

Stwierdzenie 6 (Nierówność Cauchy-Schwartz)

$$|\langle v_1 | v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Dowód 15 Niech $\alpha \in [0, 2\pi] : \langle v_1 | v_2 \rangle = e^{i\alpha} |\langle v_1 | v_2 \rangle|$.

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : f(t) = \langle te^{i\alpha} v_1 - v_2 | te^{i\alpha} v_1 - v_2 \rangle$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle te^{i\alpha} v_1 | te^{i\alpha} v_1 \rangle - \langle te^{i\alpha} v_1 | v_2 \rangle - \langle v_2 | te^{i\alpha} v_1 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle = \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - te^{-i\alpha} \langle v_1 | v_2 \rangle - te^{i\alpha} \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - 2t |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \langle v_2 | v_2 \rangle \implies \\ &\implies \Delta = 4 |\langle v_1 | v_2 \rangle|^2 - 4 \langle v_1 | v_1 \rangle \langle v_2 | v_2 \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek (nierówność trójkąta)

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Dowód 16

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_2 \rangle + \\ &= \|v_1\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v_1 | v_2 \rangle + \|v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + 2 |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \|v_2\|^2 \leq \\ &\leq_{C.S.} \|v_1\|^2 + 2 \|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2. \end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni V z iloczynem skalarnym.

- Niech $u \in V$. Wówczas $v \in V \rightarrow \langle u|v \rangle \in \mathbb{F}$ jest elementem V^* , który oznaczamy ϕ_u .

$$\langle \phi_u, v \rangle = \langle u|v \rangle.$$

Przykład 31 $V = \mathbb{R}_3[\times], \phi_u(w) = \int_0^1 u(t)w(t)dt$

Na odwrót:

Twierdzenie 9 $\forall_{\phi \in V^*} \exists_{u \in V} !: \phi = \phi_u$

Dowód 17 Jeżeli $\phi = 0$, to $u = 0$.

jeżeli $\phi \neq 0$, to $\ker \phi := E \not\subseteq V$. Wiemy, że $V = E \oplus E^\perp$.

Niech $u \in E^\perp - \{0\} : \langle \phi, u \rangle = 1$.

Obliczmy $\langle u|v \rangle = \langle u|v - \langle \phi, v \rangle \cdot u + \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle u| \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle \phi, v \rangle \|u\|^2$

Podsumowując, $\left\langle \frac{u}{\|u\|^2} | v \right\rangle = \langle \phi, v \rangle \implies \phi = \phi_{\frac{u}{\|u\|^2}}$, co daje istnienie. Jedyność: jeśli $\phi_{u_1} = \phi_{u_2}$, to $\phi_{u_1 - u_2} = 0$. Ale to oznacza, że $0 = \phi_{u_1 - u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2 | u_1 - u_2 \rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \implies u_1 = u_2$ \square

10 Wykład (12.04.2019)

V - przestrzeń z iloczynem skalarnym nad \mathbb{F} . (\mathbb{R} - przestrzeń euklidesowa, \mathbb{C} - przestrzeń unitarna)

10.1 Ortogonalizacja G-S

uwaga: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna, $A \in L(V)$, $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$.

$$a_j^i = \langle e_i | Ae_j \rangle.$$

$$Ae_j = \sum_l a_j^l e_l$$

$$\langle e_i | Ae_j \rangle = \sum_l \langle e_i | e_l \rangle a_j^l = a_j^i.$$

10.2 Funkcjonały liniowe $\xleftrightarrow{1-d}$ wektory

$$\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle$$

Stwierdzenie 7 (*Tożsamość polaryzacyjna*)

$$\mathbb{F} = \mathbb{C}. \quad \frac{v}{\mathbb{C}} = \|v + i^k w\|^2$$

$$\forall_{v,w \in V}, \langle w | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle.$$

Dowód 18

$$\begin{aligned} k=0 & \quad \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\ k=1 & \quad i \langle v + iw | v + iw \rangle = i (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + i \langle v | w \rangle - i \langle w | v \rangle) \\ k=2 & \quad - \langle v - w | v - w \rangle = - \langle v | v \rangle - \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\ k=3 & \quad -i \langle v - iw | v - iw \rangle = -i (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle - i \langle v | w \rangle + i \langle w | v \rangle). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^3 i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle = 4 \langle w | v \rangle \quad \square$$

Uwaga: w ten sam sposób pokazujemy, że $\forall_{A \in L(V)} \langle w | Av \rangle = \frac{1}{4} \sum i^k \langle v + i^k w | A(v + i^k w) \rangle (*)$

Wniosek: Jeżeli $A \in L(V)$ spełnia $\langle x | Ax \rangle = 0$ dla wszystkich $x \in V$, to $A \equiv 0$.

Rzeczywiście z $(*) \implies \langle w | Av \rangle = 0$, kładziemy $w = Av$ i $\langle Av | Av \rangle = \|Av\|^2 = 0 \implies Av = 0 \quad \forall_{v \in V}$

10.3 Sprzężenie hermitowskie operatora

V, W - przestrzenie z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C} . Niech $A \in L(V, W)$.

Ustalmy wektor $w \in W$ i rozważmy funkcjonal liniowy

$$V \ni v \rightarrow \langle w | Av \rangle \in \mathbb{F} \text{ (na p-ni } V \text{)}.$$

$$\exists_{\tilde{w} \in V} : \langle w | Av \rangle = \langle \tilde{w} | v \rangle = \langle A^* w | v \rangle.$$

Zauważmy, że $w_1, w_2 \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, to

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | v \rangle &= \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | Av \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle w_1 | Av \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle w_2 | Av \rangle = \\ &= \bar{\lambda}_1 \langle \tilde{w}_1 | v \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \tilde{w}_2 | v \rangle = \langle \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 | v \rangle. \quad \forall_{v \in V} \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2.\end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $W \ni w \rightarrow \tilde{w} \in V$ jest liniowe. Oznaczenie $\tilde{w} = A^* w$.

A^* nazywamy sprzężeniem hermitowskim A .

Wyrażenie w bazie ortonormalnej $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza V , $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ - baza W . $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$. $b_{ji} \in [A^*]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

$$b_{ji} = \langle e_j | A^* f_i \rangle = \langle Ae_j | f_i \rangle = \overline{\langle f_i | Ae_j \rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

10.4 Notacja Diraca

$$\underset{\text{bracket}}{\langle v | w \rangle} \rightarrow \underset{\text{bra}}{\langle v |}, \underset{\text{ket}}{| w \rangle}, | v \rangle \langle w | \leftarrow \text{ket bra (XD)}.$$

$\langle v |$ - z definicji oznacza funkcjonał liniowy.

$$v \ni |w\rangle \xrightarrow{\langle v|} \langle v|w\rangle \in \mathbb{C}.$$

$|v\rangle \langle w| : v \rightarrow v$ - liniowe odwzorowanie takie, że

$$|v\rangle \langle w| (u) = |v\rangle \langle w|u\rangle : \xrightarrow{\text{stara notacja}} \langle w|u\rangle v.$$

$$(|v\rangle \langle w|)^* = |w\rangle \langle v|.$$

Niech $A = |v\rangle \langle w|$, $B = |w\rangle \langle v|$.

$$\begin{aligned}\langle u_1 | Au_2 \rangle &= \langle u_1 | v \rangle \langle w | u_2 \rangle = \left\langle \overline{\langle u_1 | v \rangle} w | u_2 \right\rangle = \\ &= \langle \langle v | u_1 \rangle w | u_2 \rangle = \langle |w\rangle \langle v | u_1 \rangle | u_2 \rangle = \langle Bu_1 | u_2 \rangle.\end{aligned}$$

Zatem $A^* = B$, $|v\rangle \langle w|^* = |w\rangle \langle v|$. Dalsze reguły:

$$|v\rangle^* = \langle v|, \langle v|^* = |v\rangle.$$

Uwaga: rozkład jedności: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna taka, że $\mathbb{I}_V = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|$.

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| v \rangle = v.$$

10.5 Własności hermitowskiego sprzężenia

$$\langle A^* w | v \rangle = \langle w | Av \rangle.$$

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$
3. $(DC)^* = C^* D^*, C : V \rightarrow W, D : W \rightarrow U.$

$$\langle u | DCv \rangle = \langle D^* u | Cv \rangle = \langle C^* D^* u | v \rangle$$

Definicja 22 Niech $A \in L(V)$. Mówimy (1), że A jest samosprężona jeżeli $A^* = A$, (2), że A jest unitarna, jeżeli $A^* = A^{-1}$, (3) że A jest normalna jeżeli $A^*A = AA^*$.

Uwaga: $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3$

Przykład 32 \mathbb{C}^2 z iloczynem kawniczym $\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = A^*,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^* = A \iff A = \begin{bmatrix} x & u \\ \bar{u} & y \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$.

Unitarność: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = A^*$, w szczególności gdy $\det A = 1$, to unitarność

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C}.$$

11 Wykład (12.04.2019)

V, W - przestrzenie nad \mathbb{C} .

$\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ - iloczyn skalarny na V

$\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ - iloczyn skalarny na W ,

$A \in L(V, W) \rightarrow A^* \in L(W, V) \rightarrow \langle w | Av \rangle_W = \langle A^* w | v \rangle_V$.

W dalszych rozważaniach $V = W$ & $A \in L(V)$. A - normalny, jeśli $A^* A = A A^*$.

Przykład 33 np.

i) $A^* = A$ - samosprężoność.

ii) $A^* = A^{-1}$ - unitarność.

Jeżeli \mathcal{E} - baza ortonormalna V , $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $[b_{ij}] = [A^*]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Przypomnienie: jak mamy $X \subset V$ to zapisujemy to $V = X \oplus X^\perp$, $P : V \rightarrow V$ - nazywamy rzutem X wzdłuż X^\perp , czyli rzutem ortogonalnym na X .

$\{e_1, \dots, e_k\}$ - baza ortonormalna X , $P = \sum_{i=1}^k |e_i\rangle\langle e_i|$

Stwierdzenie 8 Niech $V = X \oplus Y$. Wówczas rzut $P : V \rightarrow V$ na X wzdłuż Y jest ortogonalny
 $\iff P^* = P$.

Dowód 19 \implies

$Y = X^\perp$. Weźmy $v = v_1 + v_2, u = u_1 + u_2, v_1, u_1 \in X, v_2, u_2 \in Y$.

$$\langle u | Pv \rangle = \langle u_1 + u_2 | v_1 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle.$$

$$\langle Pu | v \rangle = \langle u_1 | v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle.$$

$$\langle u | Pv \rangle = \langle Pu | v \rangle \implies P = P^*.$$

\Longleftarrow
 $P = P^*$. Czy $\forall_{y \in Y, x \in X} \langle y | x \rangle = 0$?

$$\langle y | x \rangle = \langle y | Px \rangle = \langle Py | x \rangle = 0 \quad \square$$

Stwierdzenie 9 Niech $A \in L(V)$. Następujące warunki są równoważne: (1) A jest normalne
 (2) $\forall_{v \in V} \|Av\| = \|A^*v\|$

W szczególności jeśli A - normalny, to

$$\ker(A - \lambda \mathbb{I}) = \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I}).$$

Ponadto, jeśli $\lambda \neq \mu$, to $\ker(A - \lambda \mathbb{I}) \perp \ker(A - \mu \mathbb{I})$.

Dowód 20 (1) \implies (2).

$$\forall_{v \in V} \langle v | A^* Av \rangle = \langle v | AA^* v \rangle \implies \|Av\|^2 = \|A^*v\|^2.$$

(2) \implies (1).

$$\|Av\| = \|A^*v\| \implies \langle v | (A^*A - AA^*)v \rangle = 0 \quad \forall_{v \in V}.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej $A^*A - AA^* = 0$. W szczególności $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{I}) \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})v\| = 0 \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})^*v\| = 0 = \|(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})v\| \iff v \in \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})$. $\lambda \langle u | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle A^*u | v \rangle = \langle \bar{\mu}u | v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$, czyli $\langle u | v \rangle = 0 \quad \square$

11.1 Twierdzenie spektralne

Twierdzenie 10 Niech $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $A \in L(V)$ będzie operatorem normalnym. Wówczas A posiada diagonalizującą, ortonormalną bazę złożoną z wektorów własnych A .

Dowód 21 (indukcja ze względu na wymiar przestrzeni V).

Pierwszy krok indukcji $\dim V = 1$ - oczywiste. (Każdy operator w przestrzeni jednowymiarowej jest diagonalny bo to mnożenie przez skalar).

$n \implies n+1$. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim W = n$ i dla wszystkich operatorów normalnych na W . Niech $A \in L(V)$, $\dim V = n+1$, A - normalny. Skoro V jest nad \mathbb{C} , to w_A ma pierwiastek $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Niech $e_0 \in V$ będzie wektorem własnym A o wartości własnej λ_0 taki, że $\|e_0\| = 1$.

Niech $X = \langle e_0 \rangle^\perp$. Wtedy $\dim X = n$.

Uwaga: $\forall_{x \in X} Ax \in X$ oraz $A^*x \in X$.

$$\begin{aligned} LHS : \quad & \langle e_0 | a_x \rangle = \langle A^* e_0 | x \rangle = \langle \overline{\lambda_0} e_0 | x \rangle = \lambda_0 \langle e_0 | x \rangle = 0 \\ RHS : \quad & \langle e_0 | A^* x \rangle = \langle A e_0 | x \rangle = \overline{\lambda_0} \langle e_0 | x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Niech $\tilde{A} = A|_X \in L(X)$. Jeżeli \tilde{A} jest operatorem normalnym na X ($\dim X = n$), Normalność \tilde{A} . udowodnimy, że $\tilde{A}^* = A^*|_X$.

$$\begin{aligned} \forall_{x_1, x_2 \in X} : \langle x_1 | \tilde{A} x_2 \rangle &= \langle x_1 | A x_2 \rangle = \langle A^* x_1 | x_2 \rangle = \\ &= \langle A^*|_X x_1 | x_2 \rangle \implies \tilde{A}^* = A^*|_X. \end{aligned}$$

i w końcu $\tilde{A}^* \tilde{A} = A^*|_X A|_X = A^* A|_X = A A^*|_X = A|_X A^*|_X = \tilde{A} \tilde{A}^* \quad \square$

11.2 A teraz coś z zupełnie innej beczki

Ustalmy $u \in V$ i $X \subset V$ (podprzestrzeń wektorowa).

Zdefiniujmy $\inf_{x \in X} \|u - x\| = \text{dist}(u, X)$

Stwierdzenie 10 Niech $P : V \rightarrow V$ będzie rzutem ortogonalnym na X . Wówczas $\text{dist}(u, X) = \|u - Pu\|$

Dowód 22 $\text{dist}(u, X) \leq \|u - Pu\|$, gdyż $Pu \in X$. Z drugiej strony,

$$\forall_{x \in X} \|u - x\|^2 = \left\| \underbrace{u - Pu}_{\in X^\perp} + \underbrace{Pu - x}_{\in X} \right\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu - x\|^2 \geq \|u - Pu\|^2 \quad \square$$

Odległość przestrzeni afinicznych

$X_1 \subset V, X_2 \subset V, v_1, v_2 \in V$ - $\text{dist}(v_1 + X_1, v_2 + X_2) = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 + x_1 - (v_2 + x_2)\| = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 - v_2 - (x_2 - x_1)\|$
 $= \inf_{y \in X_1 + X_2} \|v_1 - v_2 - y\| = \|v_1 - v_2 - P_{X_1 + X_2}(v_1 - v_2)\|$, gdzie $P_{X_1 + X_2}$ - rzut ortogonalny na $X_1 + X_2$.

12 Wykład (07.06.2019)

V - przestrzeń nad \mathbb{C} z iloczynem skalarnym - tak było.

$A : V \rightarrow V$ takie, że $A^*A = AA^*$. Zachodzi tw. spektralne dla A .

Istnieje baza ortonormalna V złożona z wektorów własnych A .

Drugie sformułowanie: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Sp(A)$, $V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})$, \mathcal{P}_i - rzuty ortogonalne na V_i .
Wtedy $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ & $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{P}_i$.

Twierdzenie 11 (spektralne dla operatorów samosprężonych na przestrzeni Euklidesowej, tzn. V nad \mathbb{R} , $A : V \rightarrow V$, $A^* = A$)

Lemat: W - przestrzeń zespolona z iloczynem skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Niech $B : W \rightarrow W$, $B^* = B$. Wówczas $sp(B) \subset \mathbb{R}$

Dowód 23 $\lambda \in \mathbb{C}, w \in W - \{0\}, Bw = \lambda w \xrightarrow{?} \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle w | Bw \rangle = \langle w | \lambda w \rangle = \lambda \langle w | w \rangle$$

$$\langle Bw | w \rangle = \langle \lambda w | w \rangle = \bar{\lambda} \langle w | w \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}.$$

Wniosek $w_B(z)$ - wielomian charakterystyczny B . Pierwiastki w_B są rzeczywiste.

$V, A : V \rightarrow V$ - jak wyżej, V nad \mathbb{R}^* , $A^* = A$.

Istnieje baza ortonormalna V wektorów własnych operatora A .

Dowód 24 (indukcja ze względu na $\dim V$)

1 krok indukcyjny - oczywiste.

$n \implies n + 1$. Przypuśćmy, że A posiada wektor własny e_0 o wartości własnej $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Niech $X = \mathbb{R} \cdot e_0$. Wówczas $AX \subset X$ - oczywiste. Mniej oczywiste jest to, że $AX^\perp \subset X^\perp$ - bo jeżeli $y \in X^\perp$, to $\langle Ay | e_0 \rangle = \langle y | Ae_0 \rangle = \lambda_0 \langle y | e_0 \rangle = 0 \implies y \in X^\perp$.

Rozważmy operator $D = A|_{X^\perp}$ - obcięcie do X . Wówczas $D^* = D$. Zatem, skoro $\dim X^\perp = n$, to na mocy założenia indukcyjnego X^\perp posiada ortonormalną bazę $\{e_1, \dots, e_n\}$ wektorów własnych operatora B . Wówczas $\{e_0, \dots, e_n\}$ jest ortonormalną bazą wektorów własnych operatora A .

Istnienie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $e_0 \in V$ - takiego jak wyżej:

Niech $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_n\}$ będzie dowolną bazą ortonormalną przestrzeni V . Rozważmy macierz $\mathcal{A} = [A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Macierz \mathcal{A} jest rzeczywista i symetryczna. Operator $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ taki, że $Tx = \mathcal{A}x \ \forall_{x \in \mathbb{C}^n}$. Operator T na \mathbb{C}^n , (gdzie iloczyn skalarny na \mathbb{C} jest kanoniczny) jest samo sprzężony!

Wielomian charakterystyczny T ma tylko rzeczywiste pierwiastki. Zauważmy, że $w_T(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}) = w_A(\lambda)$ a zatem w_A ma rzeczywiste pierwiastki. Stąd wynika, że istnieje λ_0, e_0 j.w. \square

12.1 Kwadryki

Klasyfikacja (czyli co nam daje tw. spektralne w kontekście form np. kwadratowych) form kwadratowych na przestrzeni euklidesowej (rzeczywista z il. skalarnym).

$V, \dim V < \infty, Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny w przestrzeni V . Z Q związana jest symetryczna forma 2 liniowa $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $Q(v) = b(v, v)$ (albo inaczej $b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) = \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$).

Funkcjonały liniowe na V są postaci: ustalamy $\tilde{v} \in V$ i definiujemy funkcjonal $\langle \tilde{v} | \cdot \rangle \in V^*$, gdzie $\langle \tilde{v} | v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{v} | v \rangle$.

Ustalmy $w' \in V$ i rozważmy funkcjonal $b(w, \cdot)$. Istnieje $\tilde{w} \in W$ taki, że $b(w, v) = \langle \tilde{w} | v \rangle \ \forall_{v \in V}$.

Powyższe definiuje operator $F : V \rightarrow V$, gdzie $Fw = \tilde{w}$.

Czyli $b(w, v) = \langle Fw | v \rangle \quad \forall_{w, v \in V}$.

Lemat: F - samosprężony.

Dowód 25 $\langle Fw | v \rangle = b(w, v) = b(v, w) = \langle Fv | w \rangle$, zatem $F = F^*$ \square

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V . Zauważmy, że $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \langle e_j | Fe_i \rangle_{i,j=1,\dots,n} = b(e_i, e_j)_{i,j=1,\dots,n}$.

Jeśli w szczególności \mathcal{E} - ortonormalna baza złożona z wektorów własnych F , to w tej bazie $[F]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalne. Niech $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ - współrzędne ortogonalne związane z bazą \mathcal{E} . Wtedy $\sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i^2 = Q$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ są niezerowymi wartościami własnymi F . Niech $\text{sgn} Q = (p, q)$. Wtedy istnieją $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_p$ & $a_{p+1} \geq \dots \geq a_{p+q}$ takie, że

$$Q = \sum_{i=1}^p \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^q \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2} (**).$$

Definicja 23 Mówimy, że $(**)$ jest postacią kanoniczną formy kwadratowej Q .

Definicja 24 $Q_1, Q_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ mają tę samą postać kanoniczną, jeżeli istnieją współrzędne ortonormalne $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}, \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ takie, że

$$Q_1 = \sum_{i=1}^p \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^q \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2} \quad \& \quad Q_2 = \sum_{i=1}^p \frac{\psi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^q \frac{\psi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2}.$$

Definicja 25 V nad $\mathbb{R}, T : V \rightarrow V$ - operator taki, że $T^* = T^{-1}$. Wówczas mówimy, że T jest operatorem ortogonalnym.

Uwaga: T jest ortogonalny jeżeli mamy:

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna $\implies \{Te_1, \dots, Te_n\}$ - baza ortonormalna.

$$\langle Te_i | Te_j \rangle = \langle e_i | T^* Te_j \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Stwierdzenie 11 Formy kwadratowe Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną \iff istnieje operator ortogonalny $T : V \rightarrow V$ taki, że $Q_2(v) = Q_1(Tv)$

Dowód 26 Jeśli Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to definiujemy $T : V \rightarrow V$ następująco: niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna związana z $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ i $\{f_1, \dots, f_n\}$ z $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Niech $Te_i = f_i$ - daje $Q_2(v) = Q_1(Tv)$.

Na odwrót: jeśli $Q_2(v) = Q_1(Tv)$ i w bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$, Q_1 ma postać kanoniczną to definiując $f_i : e_i := Tf_i$ dostajemy bazę $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortonormalną i postać kanoniczną Q_2 w bazie $\{f_1, \dots, f_n\}$ jest taka Q_1 w $\{e_1, \dots, e_n\}$ \square

13 Wykład (07.06.2019)

13.1 Macierz Grama układu wektorów

Weźmy V - nad \mathbb{R} . Mamy tutaj iloczyn skalarny $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Ustalamy wektory v_1, \dots, v_k - liniowo niezależne.
niech

$$x = \sum_{i=1}^k x^i v_i, \quad \langle x | x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i | v_j \rangle x^j.$$

Definicja 26 Macierzą Grama układu wektorów v_1, \dots, v_k nazywamy macierz

$$[\langle v_i | v_j \rangle] \stackrel{\text{ozn}}{=} G(v_1, \dots, v_k).$$

Ustalmy wektor $v \in V$, odległość wynosi $\text{dist}(v, \langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \|(1 - P)v\|$, gdzie P - rzut ortogonalny na $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Niech $Pv = \sum_{i=1}^k x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i | v \rangle = \langle v_i | Pv \rangle + \langle v_i | (1 - P)v \rangle = \langle v_i | Pv \rangle = \sum x^j \langle v_i | v_j \rangle.$$

Oznaczmy $\delta = \text{dist}(v, \langle v_1, \dots, v_k \rangle)$.

$$\delta^2 = \langle (1 - P)v | (1 - P)v \rangle = \langle v | (1 - P)v \rangle - \langle Pv | (1 - P)v \rangle = \langle v | v \rangle - \sum_{j=1}^k \langle v | v_j \rangle x^j.$$

Macierzowy zapis:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_k \rangle & \langle v_1 | v \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \dots & & \langle v_2 | v_k \rangle & \langle v_2 | v \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle v | v_1 \rangle & \dots & & \langle v | v_k \rangle & \langle v | v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 1 \end{bmatrix} = [0].$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy zero. Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny mamy:

$$0 = \det G(v_1, \dots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

Zatem

$$\delta = \left(\frac{\det G(v_1, \dots, v_k, v)}{\det G(v_1, \dots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja 27 Niech $(v_1, \dots, v_k) \in V$ jw. Objętością równoległoscianu rozpiętego przez (v_1, \dots, v_k) definiujemy indukcyjnie:

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{vol}(v_1, \dots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle).$$

$$\text{vol}(v_1) = \|v_1\|.$$

Stwierdzenie 12 *Zachodzi równość*

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) = \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód 27 *(indukcyjny)*

Jeden wektor: $\text{vol}(v_1) = \|v_1\| = \det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}, \det \langle v_1 | v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v_1 .

Krok indukcyjny: $k \implies k+1$

$$\begin{aligned} \text{vol}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) &= \text{vol}(v_1, \dots, v_k) \cdot \text{dist}(v_{k+1}, \langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \\ &= \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}} \cdot \text{dist}(\dots) = \det G(v_1, \dots, v_{k+1})^{\frac{1}{2}} \quad \square. \end{aligned}$$

13.2 Powierzchnie kwadratowe

Klasyfikacja powierzchni kwadratowych.

Przykład 34 $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3 = 1\}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1\}.$$

Definicja 28 *Niech V - przestrzeń, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny oraz $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa, $c \in \mathbb{R}$.*

Powierzchnie S postaci $S = \{x \in V : Q(x) = c\}$ nazywamy powierzchnią kwadratową typu

- I jeśli $c \neq 0$
- II jeśli $c = 0$

Uwaga: jeśli $c \neq 0$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $c = 1$.

Definicja 29 *Mówimy, że dwie powierzchnie S_1, S_2 kwadratowe mają taki sam kształt, jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne $T : V \rightarrow V$ takie, że $S_2 = TS_1$.*

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q = \sum_{i=1}^p \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^q \frac{\phi_{i+p}^2}{a_{i+p}^2}, \quad (p, q) = \text{sgn}(Q).$$

$(\phi_1, \dots, \phi_{p+q})$ - współrzędne ortonormalne na V .

Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to istnieje $T : V \rightarrow V$ takie, że $Q_2 = Q_1 \cdot T$. Wówczas $S_1 = \{x \in V : Q_1(x) = c\}$, $S_2 = \{x \in V : Q_2(x) = c\}$ mają ten sam kształt: $S_2 = \{x \in V : Q_1(Tx) = c\} = \{x \in V : Tx \in S_1\} = T^{-1}S_1 \implies S_1 = TS_2$

Twierdzenie 12 $Q_1, Q_2 : V \rightarrow \mathbb{R}, S_i = \{x \in V : Q_i(x) = 1\} \ i = 1, 2$. Jeżeli $S_1 = S_2$, to $Q_1 = Q_2$

Dowód 28 *Ustalmy $i = 1$ oraz rozważmy $\{x \in V : Q_1(x) > 0\}$. Zauważmy, że $\forall_{x \in S_1}$ oraz $t > 0$,*

$t \cdot x \in \mathcal{O}$, gdyż $Q_1(tx) = t^2 Q_1(x) = t^2 > 0$.

Na odwrót, jeżeli $y \in \mathcal{O}$, to $\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}} \in S_1$. ($Q(\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}}) = \frac{Q(y)}{Q_1(y)} = 1$).

Widzimy zatem, że:

$$1. \mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} S_1,$$

2. Wartość Q_1 na \mathcal{O} jest wyznaczona przez wartości na S_1 , gdyż $Q_1(tx) = t^2 \quad \forall_{x \in S_1}$.

Skoro \mathcal{O} jest zbiorem otwartym a funkcja $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = Q_1(x)$ jest różniczkowalna oraz $f''(x) = Q_1(x) \quad \forall_{x \in V}$, to widzimy, że znajomość S_1 pozwala odtworzyć Q_1 \square

Uwaga: można pokazać, że powierzchnia kwadratowa typu II (generycznie) odtwarza Q z dokładnością do stałej moltiplicatywnej.

Terminologia: niech $\dim V = 3$.

powierzchnia typu I:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 1 - \text{elipsoida}(3, 0) \\ \frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 1 - \text{hiperboloida jednopowłokowa}(2, 1) \\ \frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 1 - \text{hiperboloida dwupowłokowa}(1, 2) \end{aligned}$$

powierzchnia typu II:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 0 - \text{punkt}(3, 0) \\ \frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 0 - \text{stożek eliptyczny}(2, 1) \\ \frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} &= 0 - \text{punkt}(1, 2) \end{aligned}$$