

$$A \in \text{End}(V) : V \rightarrow V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 $u(t)$ - wielomian stopnia n , $u(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$
Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \in \text{End}(V)$ oznaczать będziemy $u(A)$. Własności

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \quad (1)$$

$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \quad (2)$$

Przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 1 (Cayleya - Hamiltona)

$$\forall_{A \in \text{End}(V)} w_A(A) = 0.$$

Dowód 1 Niech \mathcal{E} - baza $\mathcal{V} : \mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w \left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \right) \quad \forall_{w \in \mathbb{F}_k[x]}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy \mathcal{A}

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \dots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \dots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \quad (3)$$

Na przykład (notacje: $\det [a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n$?? oraz (123)

$$(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \dots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0 \mathcal{A} &= c_0 1 & |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1 \mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 & |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1} \mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 & |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 & |\mathcal{A}^n \\ +b_0 \mathcal{A} + (b_1 \mathcal{A}^2 - b_0 \mathcal{A}) + \dots + b_{n-1} \mathcal{A}^n - b_{n-2} \mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

Przykład 2 x_n - ciąg Fibonacciego. $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n}_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b :

wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right), b = \dots$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad \mathbb{C} .

Ustalmy $A \in \text{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:

a) $j_1 \neq j_2$, to $\exists_{u \in \mathbb{C}_m[.]}, w_{j_1}(\lambda)w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)w_A(\lambda)$

b) $NWD(w_1, \dots, w_r) = 1 \implies \exists_{v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}[.]} 1 = v_1 w_1 + \dots + v_r w_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A)w_j(A), \quad j = 1, \dots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \dots, P_r\}$

(i) $\sum_{j=1}^r P_j = 1,$

(ii) $j_1 \neq j_2$: $P_{j_1}P_{j_2} = v_{j_1}(A)v_{j_2}(A)w_{j_1}(A)w_{j_2}(A)$

(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^r P_j = P_i$

(iv) niech $V_i = \text{im} P_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$

$$v = P_1 v + \dots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \cap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A , gdyż $AP_j = Av_j(A)w_j(A) = v_j(A)w_j(A)A = P_j A$

a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_j v = P_j Av \in V_j$

(vi) $v_j = \ker((A - \lambda_j 1)^{n_j})$. $v \in v_j(A)w_j(A)v \implies (A - \lambda_j 1)^{n_j} v = v_j(A)w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$

$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \dots + P_j v + \dots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$
dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[\cdot]$

(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 1 Przy powyższych oznaczeniach $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową A

Twierdzenie 2 O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe