$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \text{np.} \quad \varphi(x_1,x_2) = \overset{\text{diagonalne}}{x_1^2} - \overset{\text{wyraz mieszany}}{3x_1x_2} + \overset{\text{diagonalne}}{x_2^2} \quad \text{Narysować zbiór}$$

$$\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = p \right\}.$$

$$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiemy, że istnieją współrzędne na $\mathbb{R}^2$, w których macierz φ jest diagonalna. Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + 0\psi_1\psi_2$ w tych współrzędnych macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

$$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2, \psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}, \lambda_1 = 1, \psi_2 = x_2, \lambda_2 = -\frac{5}{4}.$$

$$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2, \quad \varphi^{-1}(1) = \left\{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \right\}.$$

Ogólniej: $\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa φ w pewnej bazie ma postać $\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \ldots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \ldots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$, gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, r+s, \tilde{\psi_i} = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Twierdzenie 1 *Niech* $\varphi : V \to \mathbb{R}, (\Psi_i), (\Phi_j)$ *bazy* V *takie, że* $\varphi = \psi_1^2 + \ldots + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \ldots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + \ldots + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}^2$. *Wówczas* $r = r' \quad \& \quad s = s'$

Dowód 1 $r + s = r' + s' = rk\varphi$

Dla uproszczenia załóżmy, że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0 \\ \phi_{r'+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}.$$

Mamy $r' + s < n$ równań na wektor v w przestrzeni wymiaru n. Istnieje wektor $V \neq 0$ spełniający ten układ równań. Zatem

$$\varphi(v) = \psi_1(v)^1 + \ldots + \psi_r(v)^2 = -\phi_{r'+1}(v)^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0.$$

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \ldots = \psi_n(v) \implies v = 0 \quad \square$

Definicja 1 *Sygnaturą* $sgn\varphi$ *formy kwadratowej* $\varphi : V \to \mathbb{R}_-$ *nazywamy parę liczb* (r, s), *gdzie* r *i* s *są liczbami dodatnich elementów macierzy* φ *w bazie diagonalizującej.*

Przykład 1

$$sgn(x_1^1 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1)$$
$$sgn(x_1^2) = (1, 0)$$
$$sgn(-x_1^1) = (0, 1).$$

0.1 Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa $[\varphi_{ij}]$ - macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.
$Q : V \times V \to \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$

$$D_l = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l2} & \cdots & \varphi_{ll} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$$

Rozważmy wektory $f_1, \dots, f_n$, gdzie $f_1 = e_1$& dla $i > 1$, $\quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-n,1} & \cdots & \varphi_{i-n,i} \\ e_1 & \cdots & e_i \end{bmatrix}$

Przykład 2

$$f_2 = \frac{1}{D_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{11}}(\varphi_{11}e_2 - \varphi_{12}e_1) = e_2 - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}}e_1.$$

$$f_3 = \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}\varphi_{23} & \end{bmatrix} e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}, \ \textit{itd.}$$

Widać, że $f_i = e_i + x_i, x_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$. *Zatem* $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ *jest bazą* V.

Twierdzenie 2 *Baza* $\mathcal{F}$ *diagonalizuje* φ *oraz*

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Przykład 3 $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 1, D_2 = -\frac{5}{4}, \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód 2 *Naszym celem jest obliczenie* $Q(f_i, f_j)$.
Załóżmy, że $j < i$ *i obliczmy*

$$Q(f_i, e_j) = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1,1} & \cdots & \varphi_{i-1,i} \\ \varphi_{j_1} & \cdots & \varphi_{ji} \end{bmatrix} \leftarrow j = 0.$$

Dla $j = 1 \qquad Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}}$
Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i;j} = Q(f_i, f_j) = \begin{cases} Q(f_i, e_j + x_j) = 0 & j < i \\ Q(f_i, e_i + x_i) = Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}} & j = i \end{cases} \quad \square$

Zauważmy, że $\varphi|_{<e_1,\dots,e_i>}$ ma rząd $= i$ gdyż jest dodatnio określona $\iff$ niezdegenerowana. Stąd:

$$\det\left(\left[\varphi|_{<e_1,\dots,e_n>} \right]_{(e_1,\dots,e_i)} \right) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} = D_i.$$

$$sgn\varphi = (n, 0), \quad [\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Zatem $D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$, a to jest spełniony tylko gdy $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0 \quad \square$