

0.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

Definicja 1 V - przestrzeń wektorowa, $\dim V < \infty, \mathbb{F} (= \mathbb{R} \text{ lub } \mathbb{C})$
 $V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \rightarrow \mathbb{F}, \phi - \text{liniowe}\}.$
Terminologia: ϕ jest formą liniową

Przykład 1 $V = \mathbb{R}^3, \phi \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja 2 Odwzorowanie $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V , jeżeli:

- $\Omega(v, \lambda_1 \tilde{v}_1 + \lambda_2 \tilde{v}_2) = \lambda_1 \Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2 \Omega(v, \tilde{v}_2) \quad \forall_{v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in V} \forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1 \Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2 \Omega(v_2, \tilde{v}) \quad \forall_{v_1, v_2, \tilde{v} \in V} \forall_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$

Przykład 2 $V = \mathbb{R}^2$. Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci

$$\Omega \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = [x^1, x^2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3 Niech $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą przestrzeni V . Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j)]_{i,j \in 1, \dots, n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie \mathcal{E} i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$

Przykład 3

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \Omega - \text{ jak poprzednio } [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Uwaga: Jeśli $v \in V$ ma w bazie \mathcal{E} współrzędne $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

a $\tilde{v} \in V$ ma w bazie \mathcal{E} współrzędne $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, to

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega \left(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j \right) = \sum_{i,j} \lambda^i \tilde{\lambda}^j \Omega(e_i, e_j) = [\lambda^1, \dots, \lambda^n] [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

0.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V . Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_j a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \stackrel{\text{East}}{\underset{\text{conv.}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = [a_i^k]^T [\Omega]_{\mathcal{E}, k, l} [a_j^l] \quad (1)$$

Zauważmy $[a_i^j] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$, i wzór ?? zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Przykład 4

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

$$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Rozważmy bazę } \mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

0.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$,

Zauważmy, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det [\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

Definicja 4 Mówimy, że Ω jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej) $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \dots, E \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk[\Omega]_{\mathcal{E}} = rk[\Omega]_{\mathcal{E}'}$,

Definicja 5 Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie \mathcal{E} przestrzeni wektorowej V .

Przykład 5 (a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że Ω jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$

(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^k w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odwzorowanie $T_{\Omega} : V \rightarrow V^*$ takie, że

$$\langle T_{\Omega}(v), \tilde{v} \rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E}, i, j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_{\Omega}(e_i), e_j \rangle = [T_{\Omega}]_{\mathcal{E}, i, j}^{\mathcal{E}*}.$$

w szczególności $rk\Omega = rk(T_{\Omega}) = n+1$

Definicja 6 Mówimy, że forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ jest

- symetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$
- antysymetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \quad \forall_{v, \tilde{v} \in V}$

Przykład 6 • $\Omega : \psi$ na $\mathbb{R}_n[.]$ jak wyżej są symetryczne.

- $\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ dla $\begin{array}{l} - \text{antysymetria} \\ + \text{symetria} \end{array}$

Stwierdzenie 1 Dla każdego Ω istnieje Ω_a i Ω_s , gdzie Ω_s - symetryczna, Ω_a - antysymetryczna oraz

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

Ponadto Ω_a, Ω_s - jednoznacznie wyznaczone

Dowód 1 Sprawdzić, że $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v)); \Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) + \Omega(\tilde{v}, v))$