Definicja 1 *Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$est diagonalizowalna,eżeli istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{F}^n$ taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,*
gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$.
Jeżeli $G = [id]^{st}_{\mathcal{E}}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A est diagonalizowalna jeżeli $\mathbb{F}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych A.

Przykład 1 *(antyprzykład)*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *nie jest macierzą diagonalizowalną.*

$$w_a = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & \\ 1-\lambda & \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$ker(A-1) = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli $\mathbb{C}^2$ nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A.
$\lambda = 1, n_1 = 2. V_\lambda = ker(A - \lambda 1)^{n_1} = ker(A-1)^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

Twierdzenie 1 *V - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$. Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech*

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, dimV_i = n_i$

Wniosek: Niech $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i, kolejne n_2 jest bazą V_2, itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 1 *(równość $n_i = dimV_i$)*
Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.
Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$, to znaczy, że

$$\underset{\lambda_j \in Sp(A)}{\exists} . \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \phi$, *zatem* $i = j$. *Czyli* $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i}$. *Zatem*

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i} \implies n_i = dimV_i \quad \square.$$

Przykład 2 *Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:*

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\nabla(t)}.$$

$$v(t) = e^{At} v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 1 *Niech* f *- funkcja analityczna oraz* $w \in \mathbb{C}_n[.]$. *Wtedy istnieje funkcja analityczna* q *oraz wielomian* $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ *taki, że* $f = wq + r$

Dowód 2 *Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków* w.

$$k = 1: \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_{q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k}_{r}.$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje $\tilde{q}$ *- analityczna*

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1 + \dots + n_{k-1}}[.]$ *oraz istnieje* $\tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{r}}$ *takie, że* $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{r}} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$ *Po wstawieniu* $\tilde{q} : f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + r$, *gdzie* $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{\tilde{r}}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad \square$

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 3 *Obliczyć* e^{At} *: rozważmy funkcję*

$$f : \lambda \to e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$, *gdzie* f *jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).*

$$f(\lambda) = q(\lambda) w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A) w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$*?*

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1 & e^t &= a + b + c \\
&\lambda = -1 & e^{-t} &= a - b + c \\
&\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = & q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) &+ 2a\lambda + b \implies \\
&\lambda = -1 & te^{-t} &= -2a + b.
\end{aligned}$$