0.1 Macierz Grama układu wektorów

Weźmy V - nad $\mathbb{R}$. Mamy tutaj iloczyn skalarny $\langle .|. \rangle$. Ustalamy wektory $v_1, \ldots, v_k$ - liniowo niezależne.
niech

$$x = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i, \quad \langle x|x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i|v_j \rangle x^j.$$

Definicja 1 *Macierzą Grama układu wektorów* $v_1, \ldots, v_k$ *nazywamy macierz*

$$[\langle v_i|v_j \rangle] \stackrel{ozn}{=} G(v_1, \ldots, v_k).$$

Ustalmy wektor $v \in V$, odległość wynosi $dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle) = \|(1-P)v\|$, gdzie P - rzut ortogonalny na $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
Niech $Pv = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i|v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle + \langle v_i|(1-P)v \rangle = \langle v_i|Pv \rangle = \sum x^j \langle v_i|v_j \rangle.$$

Oznaczmy $\delta = dist\,(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$.

$$\delta^2 = \langle (1-P)v|(1-P)v \rangle = \langle v|(1-P)v \rangle - \langle Pv|(1-P)v \rangle = \langle v|v \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v|v_j \rangle x^j.$$

Macierzowy zapis:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1|v_1 \rangle & \langle v_1|v_2 \rangle & \ldots & \langle v_1|v_k \rangle & \langle v_1|v \rangle \\ \langle v_2|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v_2|v_k \rangle & \langle v_2|v \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle v|v_1 \rangle & \ldots & & \langle v|v_k \rangle & \langle v|v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy zero. Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny mamy:

$$0 = \det G(v_1, \ldots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \ldots, v_k)).$$

Zatem

$$\delta = \left(\frac{\det G(v_1, \ldots, v_k, v)}{\det G(v_1, \ldots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja 2 *Niech* $(v_1, \ldots, v_k) \in V$ *jw. Objętością równoległościanu rozpiętego przez* $(v_1, \ldots, v_k)$ *definiujemy indukcyjnie:*

$$vol(v_1, \ldots, v_k) \stackrel{def}{=} vol(v_1, \ldots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle).$$

$$vol(v_1) = \|v_1\|.$$

Stwierdzenie 1 *Zachodzi równość*

$$vol(v_1, \ldots, v_k) = \det(G(v_1, \ldots, v_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód 1 *(indukcyjny)*
Jeden wektor: $vol(v_1) = \|v_1\| = \det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}$, $\det \langle v_1 | v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ *- długość wektora* v_1.
Krok indukcyjny: $k \implies k+1$

$$\begin{aligned} vol(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) &= vol(v_1, \ldots, v_k) \cdot dist(v_{k+1}, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle) = \\ &= \det(G(v_1, \ldots, v_k))^{\frac{1}{2}} \cdot dist(\ldots) = \det G(v_1, \ldots, v_{k+1})^{\frac{1}{2}} \quad \square. \end{aligned}$$

0.2 Powierzchnie kwadratowe

Klasyfikacja powierzchni kwadratowych.

Przykład 1 $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3 = 1\right\}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1\}.$$

Definicja 3 *Niech* V *- przestrzeń,* $\langle . | . \rangle$ *- iloczyn skalarny oraz* $Q : V \to \mathbb{R}$ *- forma kwadratowa,* $c \in \mathbb{R}$.
Powierzchnie S *postaci* $S = \{x \in V : Q(x) = c\}$ *nazywamy powierzchnią kwadratową typu*

- *I jeśli* $c \neq 0$
- *II jeśli* $c = 0$

Uwaga: jeśli $c \neq 0$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $c = 1$.

Definicja 4 *Mówimy, że dwie powierzchnie* S_1, S_2 *kwadratowe mają taki sam kształt, jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne* $T : V \to V$ *takie, że* $S_2 = TS_1$.

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{i+p}^2}{a_{i+p}^2}, \quad (p, q) = sgn(Q).$$

$(\phi_1, \ldots, \phi_{p+q})$ - współrzędne ortonormalne na V.
Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to istnieje $T : V \to V$ takie, że $Q_2 = Q_1 \cdot T$. Wówczas $S_1 = \{x \in V : Q_1(x) = c\}$, $\quad S_2 = \{x \in V : Q_2(x) = c\}$ mają ten sam kształt: $S_2 = \{x \in V : Q_1(Tx) = c\} = \{x \in V : Tx \in S_1\} = T^{-1}S_1 \implies S_1 = TS_2$

Twierdzenie 1 $Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}, S_i = \{x \in V : Q_i(x) = 1\}$ $i = 1, 2$. *Jeżeli* $S_1 = S_2$, *to* $Q_1 = Q_2$

Dowód 2 *Ustalmy* $i = 1$ *oraz rozważmy* $\{x \in V : Q_1(x) > 0\}$. *Zauważmy, że* $\underset{x \in S_1}{\forall}$ *oraz* $t > 0$, $t \cdot x \in \mathcal{O}$, *gdyż* $Q_1(tx) = t^2 Q_1(x) = t^2 > 0$.
Na odwrót, jeżeli $y \in \mathcal{O}$, *to* $\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}} \in S_1$. *(*$Q(\frac{y}{\sqrt{Q(y)}}) = \frac{Q(y)}{Q(y)} = 1$*).*

Widzimy zatem, że:

$$1.\mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} S_1,$$

2. Wartość Q_1 *na* $\mathcal{O}$ *jest wyznaczona przez wartości na* S_1*, gdyż* $Q_1(tx) = t^2 \underset{x \in S_1}{\forall}$.
Skoro $\mathcal{O}$ *jest zbiorem otwartym a funkcja* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *taka, że* $f(x) = Q_1(x)$ *jest różniczkowalna oraz* $f''(x) = Q_1(x) \underset{x \in V}{\forall}$*, to widzimy, że znajomość* S_1 *pozwala odtworzyć* Q_1 $\square$

Uwaga: można pokazać, że powierzchnia kwadratowa typu II (generycznie) odtwarza Q z dokładnością do stałej multiplikatywnej.
Terminologia: niech $\dim V = 3$.
powierzchnia typu I:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - elipsoida}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida jednopowłokowa}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 \text{ - hiperboloida dwupowłokowa}(1,2)$$

.

powierzchnia typu II:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(3,0)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - stożek eliptyczny}(2,1)$$
$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 \text{ - punkt}(1,2)$$

.