0.1 Klatki Jordanowskie

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \lambda & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \in M_h(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon_k \in \{0,1\}.$$

Przykład 1 *np.* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 1 *Niech $A \in End(W), Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Istnieje baza (Jordanowska) $\mathcal{E}$ przestrzeni W, to znaczy, że baza taka, że $[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest sumą klatek Jordanowskich z λ_i na diagonali.*

Operator nilpotentny. $N^q = 0$ - q - stopień nilpotentności ($N^{q-1} \neq 0$)

Przykład 2

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies q = 3.$$

$$A \to W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i} \subset W \quad A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}. \quad A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}.$$

$$A_{\lambda_i} = \underbrace{\lambda_i 1_{W_{\lambda_i}}}_{D_{\lambda_i}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i 1_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}}.$$

$$N_{\lambda_i}^{n_i} = 0.$$

Dowód 1 *(dla operatorów nilpotentnych). Niech $N \in End(W)$ - nilpotentny.*
$W_i = \ker N^i, \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_q = W \to$
$\to \ker N \cap imN^{q-1} \subset \ker N \cap imN^{q-2} \subset \ldots \subset \ker N_i (*)$
$\dim \ker N \cap imN^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.
Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ będzie bazą $\ker N$ zgodna z zawieraniami (*). Wtedy $\{e_{11}, \ldots, e_{m,1}\} \underset{e_{i,1}}{\forall}$ jest końcówką serii długości $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów:

$$\begin{array}{cccc} e_{1,h(1)} & & & \\ \vdots & e_{2,h(2)} & & \\ \vdots & & e_{i,h(i)} & \\ \vdots & & & \\ e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{m,1} \end{array}$$

Dlaczego $\{e_{i,j} : i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, .., h(i)\}\}$ jest bazą W?
Liniowa niezależność: $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0 (**), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$
Działając N^{q-1} nie zeruje się e_{ij}, które wchodzą do serii krótkszej niż q. Zatem $\alpha_{iq} = 0 \quad \underset{i \in \{1,\ldots,m\}}{\forall}$.

Dalej, działając $N^{q-2} \to \alpha_{i,q-1} = 0$ itd.
Czy wektorów e_{ij} jest tyle co wymiar W?

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim W_q \cdot \dim W_{q-1} + \dim W_{q-1} - \dim W_{q-2} + \ldots + \dim W_1 \cdot W_0 = \\ &= \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-1}}_{\text{końcówki serii dł. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-2}}_{\text{końcówki serii dł. } q-1} + \ldots\ldots \\ &= \text{liczba wektorów} \left\{ e_{ij} : i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, h(i)\} \right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że macierz N w bazie $\mathcal{E} = \left\{ e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1,h(1)}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2,h(2)}, \ldots \right\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} & 0 & \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

0.2 Iloczyny skalarne

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, W - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Definicja 1 *Odwzorowanie* $\langle . | . \rangle : W \times W \to \mathbb{F}$ *takie, że*

$$\forall_{u_1, u_2, v \in W} \quad \langle v | u_1 + u_2 \rangle = \langle v | v_1 \rangle + \langle v | v_2 \rangle \tag{1}$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} \langle v | \lambda u \rangle = \lambda \langle v | u \rangle \tag{2}$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle} \tag{3}$$

$$\forall_{u \in W - \{0\}} \quad \langle u | u \rangle > 0. \tag{4}$$

nazywamy iloczynem skalarnym na przestrzeni W.

Uwaga: (a) $\langle 0 | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle 0 | 0 \rangle$
(b) $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \overline{\langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle} = \overline{\langle v | u_1 + u_2 \rangle} = \overline{\langle v | u_1 \rangle} + \overline{\langle v | u_2 \rangle}$
(c) $\langle \lambda u | v \rangle = \overline{\lambda} \langle u | v \rangle = \overline{\langle v | \lambda u \rangle} = \overline{\lambda \langle v | u \rangle}$

Przykład 3 $W = \mathbb{C}^n, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. *Def:* $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i v_i$.
Notacja Diraca: $\langle u | v \rangle, |u>, <v|, |u><v|$

Przykład 4 $u, v \in \mathbb{C}_n[\times]$, $\langle u | v \rangle \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \overline{u(t)} w(t) dt$

Definicja 2 *Mówimy, że wektory* $u, w \in W$ *są ortogonalne (względem* $\langle | \rangle$ *), jeżeli* $\langle u | v \rangle = 0$.

0.3 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą W. Mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortogonalną jeżeli $\langle e_i | e_j \rangle = 0, i \neq j$.
Jeżeli dodatkowo $\langle e_i | e_i \rangle = 1$, to mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną.
Niech $\{f_1, \ldots, f_n\}$ będzie dowolną bazą. Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory $\{e_1, \ldots, e_n\} : e_1 = f_1, e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k | f_i \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} \cdot e_k$