Notatki z Algebry II L2019, FUW

Jakub Korsak

19 maja 2019

1 Wykład (08.03.2019)

1.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

Definicja 1 *V - przestrzeń wektorowa,* $\dim V < \infty, \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C})$
$V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \to \mathbb{F}, \phi$ *- liniowe* $\}$.
Terminologia: ϕ jest formą liniową

Przykład 1 $V = \mathbb{R}^3, \phi\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja 2 *Odwzorowanie $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V, jeżeli:*

- $\Omega(v, \lambda_1\tilde{v}_1 + \lambda_2\tilde{v}_2) = \lambda_1\Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2\Omega(v, \tilde{v}_2) \underset{v,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2 \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1\Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2\Omega(v_2, \tilde{v}) \underset{v_1,v_2,\tilde{v} \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$

Przykład 2 *$V = \mathbb{R}^2$. Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci*

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^1, x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3 *Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będziebazą przestrzeni V. Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j]_{i,j \in 1,\ldots,n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie $\mathcal{E}$ i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$*

Przykład 3

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \Omega \text{ - jak poprzednio } [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Uwaga: Jeśli $v \in V$ *ma w bazie* $\mathcal{E}$ *współrzędne* $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

a $\tilde{v} \in V$ *ma w bazie* $\mathcal{E}$ *współrzędne* $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, *to*

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j) = \sum_{i,j} \lambda^i \Omega(e_i, e_j) \tilde{\lambda}^j = \left[\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right] [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

1.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V. Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_i a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \underset{\text{conv.}}{\overset{\text{East}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = \left[a_i^k\right]^T [\Omega]_{\mathcal{E},k,l} \left[a_j^l\right] \tag{1}$$

Zauważmy $\left[a_i^j\right] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ i wzór 1 zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Przykład 4

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Rozważmy bazę* $\mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$

Zauważmy, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det [\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

Definicja 4 *Mówimy, że* Ω *jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej)* $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \dots, E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}} = rk\,[\Omega]_{\mathcal{E}'}$

Definicja 5 *Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie $\mathcal{E}$ przestrzeni wektorowej V.*

Przykład 5 *(a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że Ω jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$*
(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^{k} w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odzworowanie $T_\Omega : V \to V^*$ takie, że

$$\langle T_\Omega(v), \tilde{v}\rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E},i,j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_\Omega(e_i), e_j\rangle = [T_\Omega]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{E},i,j}\,.$$

w szczególności $rk\Omega = rk(T_\Omega) = n+1$

Definicja 6 *Mówimy, że forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ jest*

- *symetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$*
- *antysymetryczna, jeśli $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \underset{v,\tilde{v}\in V}{\forall}$*

Przykład 6

- *$\Omega : \psi$ na $\mathbb{R}_n[.]$ jak wyżej sąsymetryczne.*
- *$\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ dla $\begin{matrix} - \text{ antysymetria} \\ + \text{ symetria}\end{matrix}$*

Stwierdzenie 1 *Dla każdego Ω istnieje Ω_a i Ω_s, gdzie Ω_s - symetryczna, Ω_a - antysymetryczna oraz*

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

Ponadto Ω_a, Ω_s - jednoznacznie wyznaczone

Dowód 1 *Sprawdzić, że $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v))$; $\Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}), \Omega(\tilde{v}, v))$*

2 Wykład (15.03.2019)

2.1 Formy dwuliniowe (a) i formy kwadratowe (b)

$$(a) \quad \phi(w, \tilde{w}) = \int_0^1 w(t)\tilde{w}'(t)dt \in \mathbb{R}, \quad w, \tilde{w} \in \mathbb{R}_3[.], \phi : \mathbb{R}_5[.] \times \mathbb{R}_5[.] \to \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \varphi(w) = \phi(w, w) = \int_0^1 w(t)w'(t)dt, \quad \varphi : \mathbb{R}_3[.] \to \mathbb{R}.$$

Definicja 7 *Niech* $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ *będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie* $\varphi : V \to \mathbb{F}$ *takie, że* $\varphi(v) = \phi(v, v)$ *nazywamy formą kwadratową związaną z* ϕ

Przykład 7 *Formy kwadratowe na* $V = \mathbb{R}^2$. *Niech* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \phi_A(x, \tilde{x}) =$
$x^T A\tilde{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1\tilde{x}_1 + bx_1\tilde{x}_2 + cx_2\tilde{x}_1 + dx_2\tilde{x}_2$
$\varphi_A(x) = \phi_A(x, x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b + c)x_1x_2 + dx_2^2$

Przypomnienie:

$$\phi = \phi_a + \phi_s, \phi_a(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) - \phi(\tilde{v}, v)), \phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v)).$$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v, v) + \phi_s(v, v) = \phi_s(v, v)$

Stwierdzenie 2 *Jeżeli* $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ *- jak wyżej, to*

$$\phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(v + \tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})) \text{ - formuła polaryzacyjna! .}$$

Dowód 2 *Obliczmy* $\varphi(v + \tilde{v}) = \phi(v + \tilde{v}, v + \tilde{v}) = \phi(v, v) + \phi(\tilde{v}, \tilde{v}) + \phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v) = \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) + 2\phi_s(v, \tilde{v}) \quad \square$

Uwaga: Powyższe stwierdzenie zadaje $1 - 1$ odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład 8 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *- forma kwadratowa.*

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\forall}$ *rozważmy* $\phi_\lambda(x, \tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$. *Zauważmy, że* $\varphi(x) = \phi_\lambda(x, x)$, ϕ_0 *jest symetryczną formą dwuliniową oraz* $\varphi(x) = \phi_0(x, x)$

Przykład 9 *φ - forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ. Macierzą formy φ w bazie $\mathcal{E}$ definiujemy jako macierz ϕ w $\mathcal{E}$.*

$$rk\varphi \stackrel{def}{=} rk\phi.$$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana. Wracając do przykładu: $\mathcal{E}$ - baza standardowa $\mathbb{R}^2$,

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Definicja 8 *Mówimy, że baza $\mathcal{E}$ diagonalizuje formę kwadratową φ jeżeli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.*

Przykład 10 *$\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Znaleźć bazę diagonalizującą.*

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{1}{3}x_1^1.$$

Rozważmy dwie formy liniowe na $\mathbb{R}^2$:

$$\psi_1(x) = x_1 + 2x_2$$
$$\psi_2(x) = x_2.$$

$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Wówczas* $\varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1 = [1, 2], \psi_2 = [0, 1]), \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Notacja: Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja $\varphi : v \in V \to \varphi_1(v)\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\phi(v, \tilde{v}) = \varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}), \frac{1}{2}(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})) = \phi_s(v, \tilde{v}).$$

Notacja: $\varphi \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi_1\varphi_2, \quad \phi = \varphi_1 \bigotimes \varphi_2$. W szczególności $\phi_s = \frac{1}{2}(\varphi_1 \bigotimes \varphi_2 + \varphi_2 \bigotimes \varphi_1$

Jeśli teraz $\varphi : V \to \mathbb{F}$ - dowolna forma kwadratowa oraz $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ - baza V, $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ - baza dualna,
Macierz φ w $\mathcal{E} : [\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}], \quad a_{ij} = a_{ji}$,
zachodzi $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} = \psi_i\psi_j$

Twierdzenie 1 *(Lagrange'a)*
Dla każdej formy kwadratowej itnieje (co najmniej jedna) baza diagonalizująca

Dowód 3 $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)\,, \varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j$, *gdzie* $a_{ij} = a_{ji}$.
Przypuśćmy, że $a_{ij} \neq 0$ *dla pewnego* i, *np.* $i = 1$.
Rozważmy formę liniową

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j}\psi_j.$$

Wówczas istnieje wsp. bij. $i, j = 2, \ldots, n$ *taka, że*

$$\sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j = a_{11}\tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}\psi_i\psi_j.$$

np.

$$a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 = a_{11}(\psi_1 + \frac{q_{12}}{a_{11}}\psi_z)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\psi_2^2.$$

Przykład 11 $V = \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 = \left(\overset{y_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}}\right)^2 - \left(\overset{y_2}{\frac{x_1 - x_2}{2}}\right)^2 + x_2\overset{y_3}{x_3}.$$

$$x_2 = y_1 - y_2, \varphi(x) = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

$$\psi_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \psi_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \psi_3 = \ldots.$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}\,[1, 1, 1] \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}\,[1, -1, 1] \\ \psi_3 &\overset{np.}{=} [1, 0, -1]\,. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,, \mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3)\,, \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2, (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3 Wykład (22.03.2019)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, np. $\varphi(x_1, x_2) = \overset{\text{diagonalne}}{x_1^2} - \overset{\text{wyraz mieszany}}{3x_1x_2} + \overset{\text{diagonalne}}{x_2^2}$ Narysować zbiór

$$\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = p \right\}.$$

$$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiemy, że istnieją współrzędne na $\mathbb{R}^2$, w których macierz φ jest diagonalna. Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + 0\psi_1\psi_2$ w tych współrzędnych macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

$$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2, \psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}, \lambda_1 = 1, \psi_2 = x_2, \lambda_2 = -\frac{5}{4}.$$

$$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2, \quad \varphi^{-1}(1) = \left\{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \right\}.$$

Ogólniej: $\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa φ w pewnej bazie ma postać $\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \ldots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \ldots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$, gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, r+s, \tilde{\psi}_i = \sqrt{\lambda_i}\psi_i$.

Twierdzenie 2 *Niech* $\varphi : V \to \mathbb{R}, (\Psi_i), (\Phi_j)$ *bazy* V *takie, że* $\varphi = \psi_1^2 + \ldots + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \ldots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + \ldots + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}^2$. *Wówczas* $r = r' \quad \& \quad s = s'$

Dowód 4 $r + s = r' + s' = rk\varphi$

Dla uproszczenia załóżmy, że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0 \\ \phi_{r'+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}.$$

Mamy $r' + s < n$ równań na wektor v w przestrzeni wymiaru n. Istnieje wektor $V \neq 0$ spełniający ten układ równań. Zatem

$$\varphi(v) = \psi_1(v)^1 + \ldots + \psi_r(v)^2 = -\phi_{r'+1}(v)^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0.$$

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \ldots = \psi_n(v) \implies v = 0 \quad \square$

Definicja 9 *Sygnaturą $sgn\varphi$ formy kwadratowej $\varphi : V \to \mathbb{R}_-$ nazywamy parę liczb (r, s), gdzie r i s są liczbami dodatnich elementów macierzy φ w bazie diagonalizującej.*

Przykład 12

$$\begin{aligned} &sgn(x_1^1 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1)\\ &sgn(x_1^2) = (1, 0)\\ &sgn(-x_1^1) = (0, 1). \end{aligned}$$

3.1 Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa $[\varphi_{ij}]$ - macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$.
$Q : V \times V \to \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$

$$D_l = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l2} & \cdots & \varphi_{ll} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$$

Rozważmy wektory $f_1, \ldots, f_n$, gdzie $f_1 = e_1$& dla $i > 1$, $\quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-n,1} & \cdots & \varphi_{i-n,i} \\ e_1 & \cdots & e_i \end{bmatrix}$

Przykład 13

$$f_2 = \frac{1}{D_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{11}}(\varphi_{11}e_2 - \varphi_{12}e_1) = e_2 - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}}e_1.$$

$$f_3 = \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}\varphi_{23} & \end{bmatrix} e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}, \ \textit{itd.}$$

Widać, że $f_i = e_i + x_i, x_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle$. Zatem $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V.

Twierdzenie 3 *Baza $\mathcal{F}$ diagonalizuje φ oraz*

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Przykład 14 $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\quad D_1 = 1, D_2 = -\frac{5}{4}, \mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód 5 *Naszym celem jest obliczenie $Q(f_i, f_j)$.*
Załóżmy, że $j < i$ i obliczmy

$$Q(f_i, e_j) = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1,1} & \cdots & \varphi_{i-1,i} \\ \varphi_{j_1} & \cdots & \varphi_{ji} \end{bmatrix} \leftarrow j = 0.$$

Dla $j = 1 \qquad Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}}$

Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i;j} = Q(f_i, f_j) = \begin{cases} Q(f_i, e_j + x_j) = 0 & j < i \\ Q(f_i, e_i + x_i) = Q(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}} & j = i \end{cases} \qquad \square$

Zauważmy, że $\varphi|_{<e_1,\ldots,e_i>}$ ma rząd $= i$ gdyż jest dodatnio określona $\iff$ niezdegenerowana. Stąd:

$$\det\left(\left[\varphi|_{<e_1,\ldots,e_n>}\right]_{(e_1,\ldots,e_i)}\right) = \det\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} = D_i.$$

$$sgn\varphi = (n, 0), \quad [\varphi]_{\mathcal{F}} = diag\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right).$$

Zatem $D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$, a to jest spełniony tylko gdy $D_1 > 0, D_2 > 0, \ldots, D_n > 0 \quad \square$

4 Wykład (29.03.2019)

Niech $\varphi : V \to \mathbb{F}$. mamy bazy $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$. $\underbrace{([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}})[\varphi]_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\substack{\text{reguła transformacyjna dla} \\ \text{macierzy form kwadratowych}}}$

4.1 Reguła transformacyjna macierzy odwzorowania liniowego

$$A : V \to V \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}, \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: następnych kilka wykładów.
Kończymy wątek o twierdzeniu Sylwestra:
niech φ - dodatnio określona $D_i > 0$.

Definicja 10 *φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dodatnio określona.*

Wniosek: Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^2 D_i > 0$, gdzie $D_i = det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \overset{ozn}{=} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$

Definicja 11 *Odwzorowanie liniowe $A : V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. ($L(V,V) \overset{ozn}{=} L(V)$)*

4.2 Rzuty na podprzestrzenie

Przykład 15 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1, \quad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$. *Zauważmy, że* $P_1^2 = P_1$. $\left([P_1]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

Przykład 16 *Inny rozkład:* $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \bigoplus \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

$$P_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix},\quad P_2^2=P_2.\left([P_2]\right)_{st}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ogólniej: Jeżeli przestrzeń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$, to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem:

$$Pu = v.$$

gdzie $u = v + w, v \in V, w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P, W = \ker P, imP = V$

Definicja 12 *Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$*

Stwierdzenie 3 *$P \in L(U), P^2 = P, W = imP, V = imP$. Wtedy $U = V \bigoplus W$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W.*

Dowód 6 *Weźmy $u \in U : u = Pu + (1-P)u \& Pu \in imP \& (1-P)u \in \ker P$, gdyż $P(1-P)u = (P-P^2)u = 0$. Czy $imP \cap \ker P = \{0\}$?*
Jeśli $u \in imP \& u \in \ker P$, to $\underset{x\in V}{\exists} u = Px = PPx = Pu = 0$

Definicja 13 *Jeżeli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią taką, że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A - niezmiennicza.*

Uwaga: Niech V będzię niezmiennicze dla $A : U \to U, \mathcal{E}_0 = \{e_1, ..., e_k\}$ dla bazy V, $\mathcal{E}_1 = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - baza $U \implies [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix}a_{11}&\dots&a_{1k}&\\ \vdots&&&*\\ a_{k_1}&\dots&a_{kk}&\\ 0&\dots&0&\\ \vdots&&\vdots&**\\ 0&\dots&0&\end{bmatrix}$,

$* \in M_{k,n-k}(\mathbb{F}), ** \in M_{n-k,n-k}(\mathbb{F})$
Uwaga 2: Przypuśćmy, że $U = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \dots \bigoplus V_l \quad \& AV_i \subset V_i, i \in 1, \dots, l$. Wtedy istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni U taka, że gdzie $B_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F}) \quad \& \quad n_i = \dim V_i$

$$A=\begin{bmatrix}B_1&0&\dots&0\\0&B_2&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&0\\0&\dots&0&B_l\end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, \dots, \dots, e_{n_1+n_2+\dots+n_l}\}.$$

Definicja 14 *Mówimy, że $0 \neq u \in U$ jest wektorem własnym $A \in L(U)$, jeśli $Au = \lambda u$ dla pewnego skalara $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Mówimy wówczas, że jest wartością własną A. Zbiór wartości własnych A nazywamy spektrum A i oznaczamy $sp(A) \subset \mathbb{F}$. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{F}$, to $V_\lambda = \ker(A - \lambda 1)$ nazywamy podprzestrzenią własną dla $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Zauważmy $\lambda \in sp(A) \iff \ker(A - \lambda 1) \neq \{0\} \iff det(A - \lambda 1) = 0 \iff A - \lambda 1$ jest operatorem nieodwracalnym.
Uwaga: Jeśli $A \in L(V)$, to $\det([A]_\mathcal{E}) = \det([A]_\mathcal{F}) = \det(A)$, gdyż $\det[A]_\mathcal{E} = \det\left(\left([id]_\mathcal{E}^\mathcal{F}\right)^{-1}[A]_\mathcal{F}[id]_\mathcal{E}^\mathcal{F}\right) = \det([A]_\mathcal{F})$.
Operator A jest odwracalny $\iff [A]_\mathcal{E}$ - odwracalna $\iff \det A \neq 0$

Definicja 15 *Wielomian $\lambda \in \mathbb{F} \to \det(A - \lambda 1) \in \mathbb{F}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora A, oznaczamy $w_A(\lambda)$*

Wniosek: $spA = \{\lambda \in \mathbb{F} : w_A(\lambda) = 0\}$.

Przykład 17 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $spA : w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$
Pierwiastki $w_A : \Delta = 1 + 4, \quad \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Wektory własne: $V_{\lambda_1} = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$.
$V_{\lambda_2} = \ker \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ciąg Fibonacciego: $x_0 = 1 = x_1, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.
Znaleźć ogólny wyraz $x_n =$?
Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 - \lambda - 1$. Zauważmy, że $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \ldots = A^{n+1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$

5 Wykład (05.04.2019)

$$A \in \mathrm{End}(V) : V \to V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 *$u(t)$ - wielomian stopnia n, $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \in End(V)$ oznaczać będziemy $u(A)$. Własności*

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \tag{2}$$
$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \tag{3}$$

Przykład 18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 4 *(Cayleya - Hamiltona)*

$$\underset{A \in End(V)}{\forall} w_A(A) = 0.$$

Dowód 7 *Niech $\mathcal{E}$ - baza $\mathcal{V}$: $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$*

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w\left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) \underset{w \in \mathbb{F}_k[x]}{\forall}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy $\mathcal{A}$

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \ldots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \tag{4}$$

Na przykład (notacje: $\det[a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{22} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n$ *4 oraz (123)*

$$(b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \ldots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0\mathcal{A} &= c_0 1 && |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1\mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 && |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1}\mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 && |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 && |\mathcal{A}^n \\ +b_0\mathcal{A} + (b_1\mathcal{A}^2 - b_0\mathcal{A}) + \ldots + b_{n-1}\mathcal{A}^n - b_{n-2}\mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

Przykład 19 x_n *- ciąg Fibonacciego.* $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underset{a\lambda + b_1}{r(\lambda)} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b:
wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right), b = \ldots.$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad $\mathbb{C}$.
Ustalmy $A \in \mathrm{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:
a) $j_1 \neq j_2$, to $\underset{u \in \mathbb{C}_m[.]}{\exists}, \quad w_{j_1}(\lambda) w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda) w_A(\lambda)$
b) $NWD(w_1, \ldots, w_r) = 1 \implies \underset{v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{C}[.]}{\exists} 1 = v_1 w_1 + \ldots + v_r w_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A) w_j(A), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \ldots, P_r\}$
(i) $\sum_{j=1}^{r} P_j = 1$,
$(ii) j_1 \neq j_2 : \quad P_{j_1} P_{j_2} = v_{j_1}(A) v_{j_2}(A) w_{j_1}(A) w_{j_2}(A)$
(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^{r} P_j = P_i$
(iv) niech $V_i = im P_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$

$$v = P_1 v + \ldots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \bigcap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A, gdyż $AP_j = Av_j(A) w_j(A) = v_j(A) w_j(A) A = P_i A$
a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_j v = P_j A v \in V_j$
(vi) $v_j = \ker\left((A - \lambda_j 1)^{n_j}\right)$. $v \in v_j(a) w_j(A) v \implies (A - \lambda_1 1)^{n_j} v = v_j(A) w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_r 1)^{n_j}$
$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \ldots + P_j v + \ldots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$ dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[.]$
(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 16 *Przy powyższych oznaczeniach $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową A*

Twierdzenie 5 *O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe*

6 Wykład (12.04.2019)

Definicja 17 *Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$est diagonalizowalna,eżeli istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{F}^n$ taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$.*
Jeżeli $G = [id]^{st}_{\mathcal{E}}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A est diagonalizowalna jeżeli $\mathbb{F}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych A.

Przykład 20 *(antyprzykład)*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *nie jest macierzą diagonalizowalną.*

$$w_a = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & \\ 1-\lambda & \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$ker(A-1) = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli $\mathbb{C}^2$ nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A.
$\lambda = 1, n_1 = 2. V_\lambda = ker(A - \lambda 1)^{n_1} = ker(A-1)^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

Twierdzenie 6 *V - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$. Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech*

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, dimV_i = n_i$

Wniosek: Niech $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i, kolejne n_2 jest bazą V_2, itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 8 *(równość $n_i = dimV_i$)*
Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.
Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$, to znaczy, że

$$\underset{\lambda_j \in Sp(A)}{\exists} . \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \phi$, zatem $i = j$. Czyli $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i}$. Zatem

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{dimV_i} \implies n_i = dimV_i \quad \square.$$

Przykład 21 *Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:*

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\nabla(t)}.$$

$$v(t) = e^{At} v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 4 *Niech f - funkcja analityczna oraz $w \in \mathbb{C}_n[.]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz wielomian $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ taki, że $f = wq + r$*

Dowód 9 *Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków w.*

$$k = 1 : \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_{q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda -}_{r}$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje $\tilde{q}$ - analityczna

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1 + \dots + n_{k-1}}[.]$ oraz istnieje $\tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{r}}$ takie, że $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{r}} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$ Po wstawieniu $\tilde{q} : f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + r$, gdzie $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{\tilde{r}}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad \square$

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 22 *Obliczyć* e^{At} *: rozważmy funkcję*

$$f : \lambda \to e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$*, gdzie* f *jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).*

$$f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A)w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$*?*

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1 && e^t = a + b + c \\
&\lambda = -1 && e^{-t} = a - b + c \\
&\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = && q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) + 2a\lambda + b \implies \\
&\lambda = -1 && te^{-t} = -2a + b.
\end{aligned}$$

7 Wykład (12.04.2019)

Przykład 23

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}, \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{4} \left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t}\mathbb{I} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1 = ker(A - 1\mathbb{I}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{wektor wlasny} \\ \textit{o wartości wlasnej} = 1}} \right\rangle$$

$$V_{-1} = ker(A + 1\mathbb{I})^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 1\mathbb{I}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\textit{Rozważmy bazę } \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ - } \textit{postać jordanowska macierzy.}$$

$$A \in End(V), \quad Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \quad n_i \text{ - krotności } \lambda_i$$
$$V = \bigoplus V_{\lambda_i}, \quad V_{\lambda_i} = ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i}$$
$$A = \bigoplus A_i, \text{ gdzie } A_i \in End(V_{\lambda_i}) \text{ taki, że } \quad A_i = A|_{V_{\lambda_i}}.$$

Zauważmy,że

$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$

gdzie

$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 18 *Jeżeli $N \in End(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N.*

Przykład 24

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} \text{ - } \textit{nilpotent st. n+1.}$$

$$\left\{ n!, n!x, \binom{n}{2}x^2, \ldots, \binom{n}{n-1}x^{n-1}, \binom{n}{n}x^n \right\}$$
$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 19 *Klatką jordanowską nazywamy macierz postaci*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7 *Niech $A \in End(W)$, gdzie w jest nad $\mathbb{C}$, $dimV < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W, w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonali.*

Dowód 10 *Skoro $A = \bigoplus A_i, \quad A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_I$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i, to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \to W$ - nilpotentny stopdnia q i $N^q = 0$.*
$\underset{i \in \{0,\ldots,q\}}{\forall}$ niech $W_i = kerN^i$.

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. *Mówimy, że* w *ma wysokość* i, *jeżeli* $N^i x = 0$ *oraz* $N^{i-1}x \neq 0$.
Zauważmy, że jeżeli x *ma wysokość równą* i, *to układ wektorów*

$$\left\{x, Nx, \ldots, N^{i-1}x\right\}.$$

jest liniowo niezależny.
Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\substack{N^{i-1} \\ działamy}} \Longrightarrow x_0$
$\alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1}N^{i-1}x = 0|_{\substack{N^{i-2} \\ działamy}} \Longrightarrow \alpha_1 = 0$ *itd.*
Rozważmy tym razem podprzestrzeń $kerN \cap ImN^{j-1} \subset W$ *i zauważmy, że* $dimkerN_1 ImN^{j-1} = dimW_j - dimW_{j-1}$.
W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \to kerN \cap ImN^{j-1}$ *wzorem* $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $imF = kerN \cap ImN^{j-1}$ *oraz* $kerF = W_{j-1}$, *to*
$dimW_j = dimimF + dimkerF = dim(kerN \cap ImN^{j-1}) + dimW_{j-1}$

$$kerF = W_{j-1} \text{ - oczywiste. .}$$

$ImF = kerN \cap ImN^{j-1} : y \in kerN \cap ImN^{j-1} \Longrightarrow \underset{x \in ImN^{j-1}}{\exists} : y = N^{j-1}x$ *oraz* $Ny = 0$
to w takim razie $N^j x = 0 \Longrightarrow x \in W_j$ *oraz* $y = N^{j-1}x = Fx$
$kerN \cap ImN^{q-1} \subset kerN \cap ImN^{q-2} \subset \ldots \subset kerN$
.

Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $m = dimkerN$ *będzie bazą* $kerN$ *zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni. Wektor* $f_1 \in kerN \cap ImN^{q-1}$ *jest końcówką serii wektorów długości* q.
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ *i niech* $h(i)$ *oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że*

$$\{e_{ij} : i \in 1, .., m, j \in \{1, \ldots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \square.$$

8 Wykład (12.04.2019)

8.1 Klatki Jordanowskie

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \lambda & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \in M_h(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon_k \in \{0,1\}.$$

Przykład 25 *np.* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 8 *Niech $A \in End(W), Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Istnieje baza (Jordanowska) $\mathcal{E}$ przestrzeni W, to znaczy, że baza taka, że $[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest sumą klatek Jordanowskich z λ_i na diagonali.*

Operator nilpotentny. $N^q = 0$ - q - stopień nilpotentności ($N^{q-1} \neq 0$)

Przykład 26

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies q = 3.$$

$$A \to W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i} \subset W \quad A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}. \quad A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}.$$

$$A_{\lambda_i} = \underbrace{\lambda_i 1_{W_{\lambda_i}}}_{D_{\lambda_i}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i 1_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}}.$$

$$N_{\lambda_i}^{n_i} = 0.$$

Dowód 11 *(dla operatorów nilpotentnych). Niech $N \in End(W)$ - nilpotentny.*
$W_i = \ker N^i, \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_q = W \to$
$\to \ker N \cap imN^{q-1} \subset \ker N \cap imN^{q-2} \subset \ldots \subset \ker N_i (*)$
$\dim \ker N \cap imN^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.
Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ będzie bazą $\ker N$ zgodna z zawieraniami (*). Wtedy $\{e_{11}, \ldots, e_{m,1}\} \underset{e_{i,1}}{\forall}$ jest końcówką serii długości $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów:

$$\begin{array}{cccc} e_{1,h(1)} & & & \\ \vdots & e_{2,h(2)} & & \\ \vdots & & e_{i,h(i)} & \\ \vdots & & & \\ e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{m,1} \end{array}$$

Dlaczego $\{e_{i,j} : i \in \{1,\ldots,m\}\,, j \in \{1,..,h(i)\}\}$ jest bazą W?
Liniowa niezależność: $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0(**)$, $\quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$
Działając N^{q-1} nie zeruje się e_{ij}, które wchodzą do serii krótkszej niż q. Zatem $\alpha_{iq} = 0 \quad \underset{i\in\{1,\ldots,m\}}{\forall}$. Dalej, działając $N^{q-2} \to \alpha_{i,q-1} = 0$ itd.
Czy wektorów e_{ij} jest tyle co wymiar W?

$$\begin{aligned}
&\dim W = \dim W_q \cdot \dim W_{q-1} + \dim W_{q-1} - \dim W_{q-2} + \ldots + \dim W_1 \cdot W_0 = \\
&= \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-1}}_{\text{końcówki serii dł. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap imN^{q-2}}_{\text{końcówki serii dł. } q-1} + \ldots\ldots \\
&= \text{liczba wektorów}\, \{e_{ij} : i \in \{1,\ldots,m\}\,, j \in \{1,\ldots,h(i)\}\}\,.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że macierz N w bazie $\mathcal{E} = \left\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1,h(1)}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2,h(2)}, \ldots\right\}$

$$[N] = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} & 0 & \\
0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} & \\
 & & \ddots
\end{bmatrix}.$$

8.2 Iloczyny skalarne

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, W - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Definicja 20 *Odwzorowanie* $\langle .|. \rangle : W \times W \to \mathbb{F}$ *takie, że*

$$\underset{u_1,u_2,v\in W}{\forall} \qquad \langle v|u_1 + u_2\rangle = \langle v|v_1\rangle + \langle v|v_2\rangle \tag{5}$$

$$\underset{u,v\in W}{\forall} \qquad \underset{\lambda\in\mathbb{F}}{\forall} \langle v|\lambda u\rangle = \lambda \langle v|u\rangle \tag{6}$$

$$\underset{u,v\in W}{\forall} \qquad \langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle \tag{7}$$

$$\underset{u\in W-\{0\}}{\forall} \qquad \langle u|u\rangle > 0. \tag{8}$$

nazywamy iloczynem skalarnym na przestrzeni W.

Uwaga: (a) $\langle 0|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\cdot 0\rangle = 0\,\langle 0|0\rangle$
(b) $\langle u_1 + u_2|v\rangle = \langle u_1|v\rangle + \langle u_2|v\rangle = \overline{\langle v|u_1 + u_2\rangle} = \overline{\langle v|u_1\rangle} + \overline{\langle v|u_2\rangle}$
(c) $\langle \lambda u|v\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|\lambda u\rangle} = \overline{\lambda\langle v|u\rangle}$

Przykład 27 $W = \mathbb{C}^n, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. *Def:* $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i v_i$.

Notacja Diraca: $\langle u|v\rangle, |u>, <v|, |u><v|$

Przykład 28 $u, v \in \mathbb{C}_n[\times]$, $\langle u|v\rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\overline{u(t)}w(t)dt$

Definicja 21 *Mówimy, że wektory* $u, w \in W$ *są ortogonalne (względem* $\langle|\rangle$ *), jeżeli* $\langle u|v\rangle = 0$.

8.3 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą W. Mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortogonalną jeżeli $\langle e_i|e_j\rangle = 0, i \neq j$.
Jeżeli dodatkowo $\langle e_i|e_i\rangle = 1$, to mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną.
Niech $\{f_1, \ldots, f_n\}$ będzie dowolną bazą. Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory $\{e_1, \ldots, e_n\}$:
$e_1 = f_1, e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k|f_i\rangle}{\langle e_k|e_k\rangle} \cdot e_k$

9 Wykład (12.04.2019)

V - wektorowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na tej przestrzeni mamy iloczyn skalarny $\langle v_1|v_2\rangle \in \mathbb{F}$. Wektory ortogonalne: $v_1 \perp v_2$, jeśli $\langle v_1|v_2\rangle = 0$

Przykład 29 *na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wprowadzamy iloczyn skalarny $\langle u|w\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i w_i$, gdzie $\overline{u}$ - sprzężenie zespolone.*

Mówimy, że baza $\mathcal{E} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V jest ortonormalna, gdy $\langle v_i|v_j\rangle = 0, i \neq j$.
Notacja $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v.

Stwierdzenie 5 *Jeśli $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną oraz $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, to $\alpha_i = \langle v_i|v\rangle$.*

Dowód 12 $\langle v_i|v\rangle = \left\langle v_i|\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_i$

Uwaga: Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.
$f_1, \ldots, f_k$ - układ ortonormalny: $\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j = 0$, to $\alpha_i = \left\langle f_i|\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j\right\rangle = 0$

9.1 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą V.
Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:
$f_1 = e_1$; $f_1, \ldots, f_k$ - mamy to

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle f_j|e_{k+1}\rangle f_j}{\|f_j\|^2}.$$

Uwaga: (1)
$\langle f_1, \ldots, f_k\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$

Dowód 13 *(indukcyjny)*
Dla $k = 1$ - oczywiste.
$k \implies k+1:$

$$\langle f_1, \ldots, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k+1}\rangle.$$

W szczególności $\underset{k=1,\ldots,n}{\forall} f_k \neq 0$

Uwaga (2)
$f_i \perp f_j$ dla $i \neq j$.

Dowód 14 *(indukcyjny)*
Przypuśćmy, że $i < j$.

$$\langle f_i|f_j\rangle = \left\langle f_i|e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle f_l}{\|f_l\|^2} \right\rangle =$$

$$= \langle f_i|e_j\rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle}{\|f_l\|^2} \langle f_i|f_l\rangle =$$

$$= \langle f_i|e_j\rangle - \frac{\langle f_i|e_j\rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i|f_i\rangle = 0.$$

Kładąc $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$, *dostaję bazę ortonormalną* $\{h_1, \ldots, h_n\}$ $\square$

Przykład 30 *Rozważamy przestrzeń wielomianów* $V = \mathbb{R}[\times] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{F} = \{1, x\}$, $\langle v_1|v_2\rangle = \int_0^1 v_1(x)v_2(x)dx.$ $\quad v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x, v_2 = \beta_1 + \beta_2 x.$
$\langle 1|x\rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2}$
$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{\langle 1|x\rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2} \implies f_1 \perp f_2.$
Czy h_1 *jest unormowane?* $h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1.$
$h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}).$ $\quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{12}$

9.2 Rzut ortogonalny

Ustalmy podprzestrzeń E przestrzeni V. Niech $E^\perp = \left\{ v \in V : \underset{e \in E}{\forall} v \perp e \right\}, E^\perp$
- jest poprzestrzenią wektorową. Zauważmy, że $E \cap E^\perp = \{0\} : v \in E \cap E^\perp$, to
$v \perp v : \langle v|v\rangle = 0$.
Ponadto, $E + E^\perp = V$. Ustalmy bazę ortonormalną podprzestrzeni $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$.
Wtedy $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i}_{\in E} + \Big(v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i \Big).$
Zauważmy $\left\langle e_l|v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i \right\rangle = \langle e_l|v\rangle - \langle e_l|v\rangle = 0$. W takim razie

$$v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i \in E^\perp.$$

Wniosek: $V = E \bigoplus E^\perp$. Rzut na E wzdłuż $E^\perp$ nazywamy rzutem ortogonalnym na E i oznaczamy P_E.
Działa tak: $P_E v = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i$.. $E^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni $E^{l=1}$

Stwierdzenie 6 *(Nierówność Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle v_1|v_2\rangle| \leqslant \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Dowód 15 *Niech* $\alpha \in [0, 2\pi] : \langle v_1 | v_2 \rangle = e^{i\alpha} \left| \langle v_1 | v_2 \rangle \right|$.
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : f(t) = \left\langle te^{i\alpha} v_1 - v_2 | te^{i\alpha} v_1 - v_2 \right\rangle$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\langle te^{i\alpha} v_1 | te^{i\alpha} v_1 \right\rangle - \left\langle te^{i\alpha} v_1 | v_2 \right\rangle - \left\langle v_2 | te^{i\alpha} v_1 \right\rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle = \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - te^{-i\alpha} \langle v_1 | v_2 \rangle - te^{i\alpha} \langle v_2 | v_2 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - 2t \left| \langle v_1 | v_2 \rangle \right| + \langle v_2 | v_2 \rangle \implies \\ &\implies \Delta = 4 \left| \langle v_1 | v_2 \rangle \right|^2 - 4 \langle v_1 | v_1 \rangle \langle v_2 | v_2 \rangle \leqslant 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek (nierówność trójkąta)

$$\underset{v_1, v_2 \in V}{\forall} \|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Dowód 16

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_2 \rangle = \\ &= \|v_1\|^2 + 2Re \langle v_1 | v_2 \rangle + \|v_2\|^2 \leqslant \|v_1\|^2 + 2 \left| \langle v_1 | v_2 \rangle \right| + \|v_2\|^2 \leqslant \\ &\underset{C.S.}{\leqslant} \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2. \end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni V z iloczynem skalarnym.

- Niech $u \in V$. Wówczas $v \in V \to \langle u | v \rangle \in \mathbb{F}$ jest elementem V^*, który oznaczamy ϕ_u.

$$\langle \phi_u, v \rangle = \langle u | v \rangle.$$

Przykład 31 $V = \mathbb{R}_3[\times], \phi_u(w) = \int_0^1 u(t)w(t)dt$

Na odwrót:

Twierdzenie 9 $\underset{\phi \in V^*}{\forall} \underset{u \in V}{\exists !} : \phi = \phi_u$

Dowód 17 *Jeżeli* $\phi = 0$, *to* $u = 0$.
jeżeli $\phi \neq 0$, *to* $\ker \phi := E \not\subseteq V$. *Wiemy, że* $V = E \bigoplus E^\perp$.
Niech $u \in E^\perp - \{0\} : \langle \phi, u \rangle = 1$.
Obliczmy $\langle u | v \rangle = \langle u | v - \langle \phi, v \rangle \cdot u + \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle u | \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle \phi, v \rangle \|u\|^2$

Podsumowując, $\left\langle \frac{u}{\|u\|^2} | v \right\rangle = \langle \phi, v \rangle \implies \phi = \phi_{\frac{u}{\|u\|^2}}$, co daje istnienie. Jedyność: jeśli $\phi_{u_1} = \phi_{u_2}$, to $\phi_{u_1 - u_2} = 0$. Ale to oznacza, że $0 = \phi_{u_1 - u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2 | u_1 - u_2 \rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \implies u_1 = u_2$ □