

$$A \in \text{End}(V) : V \rightarrow V.$$

wektory własne  $v \in V - \{0\}$   $Av = \lambda v$  Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

**Obserwacja 1**  $u(t)$  - wielomian stopnia  $n$ ,  $u(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$   
Endomorfizm postaci  $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \in \text{End}(V)$  oznaczamy  $u(A)$ . Własności

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \quad (1)$$

$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \quad (2)$$

**Przykład 1**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

**Twierdzenie 1** (Cayleya - Hamiltona)

$$\forall_{A \in \text{End}(V)} w_A(A) = 0.$$

**Dowód 1** Niech  $\mathcal{E}$  - baza  $\mathcal{V} : \mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w \left( [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \right) \quad \forall_{w \in \mathbb{F}_k[x]}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy  $\mathcal{A}$

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga:  $n = \dim V$ , to istnieją  $b_0, \dots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$  takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \dots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \quad (3)$$

Na przykład (notacje:  $\det [a_{ij}] = |a_{ij}|$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie  $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n$  ?? oraz (123)

$$(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \dots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned} \lambda^0 b_0 \mathcal{A} &= c_0 1 & |\mathcal{A}^0 \\ \lambda^1 b_1 \mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 & |\mathcal{A}^1 \\ \lambda^{n-1} b_{n-1} \mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 & |\mathcal{A}^{n-1} \\ \lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 & |\mathcal{A}^n \\ +b_0 \mathcal{A} + (b_1 \mathcal{A}^2 - b_0 \mathcal{A}) + \dots + b_{n-1} \mathcal{A}^n - b_{n-2} \mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \\ 0 &= c_0 1 + c_1 \mathcal{A} + \dots + c_n \mathcal{A}^n \square \end{aligned}$$

**Przykład 2**  $x_n$  - ciąg Fibonacciego.  $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n}_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy  $a$  i  $b$ :

wartości własne wielomianu charakterystycznego:  $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda_+^n &= a\lambda_+ + b_1 \\ \lambda_-^n &= a\lambda_- + b_1. \end{aligned}$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right), b = \dots$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Założenie:  $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$  nad  $\mathbb{C}$ .

Ustalmy  $A \in \text{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i \neq j}^r (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:

a)  $j_1 \neq j_2$ , to  $\exists_{u \in \mathbb{C}_m[.]}, w_{j_1}(\lambda)w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)w_A(\lambda)$

b)  $NWD(w_1, \dots, w_r) = 1 \implies \exists_{v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}[.]} 1 = v_1 w_1 + \dots + v_r w_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A)w_j(A), \quad j = 1, \dots, r.$$

Własności rodziny  $\{P_1, \dots, P_r\}$

(i)  $\sum_{j=1}^r P_j = 1,$

(ii)  $j_1 \neq j_2$  :  $P_{j_1}P_{j_2} = v_{j_1}(A)v_{j_2}(A)w_{j_1}(A)w_{j_2}(A)$

(iii)  $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^r P_j = P_i$

(iv) niech  $V_i = \text{im} P_i$ . Wówczas  $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$

$$v = P_1 v + \dots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \cap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v)  $V_j$  jest niezmiennicze na działanie  $A$ , gdyż  $AP_j = Av_j(A)w_j(A) = v_j(A)w_j(A)A = P_j A$

a zatem jeżeli  $v \in V_j$ , to  $Av = AP_j v = P_j Av \in V_j$

(vi)  $v_j = \ker((A - \lambda_j 1)^{n_j})$ .  $v \in v_j(A)w_j(A)v \implies (A - \lambda_j 1)^{n_j} v = v_j(A)w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$

$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \dots + P_j v + \dots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$   
dla każdego  $s_j \in \mathbb{C}[\cdot]$

(vii)  $\dim V_j = n_j$

**Definicja 1** Przy powyższych oznaczeniach  $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$  nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową  $A$

**Twierdzenie 2** O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe