

$V, W$  - przestrzenie nad  $\mathbb{C}$ .  
 $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$  - iloczyn skalarny na  $V$   
 $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$  - iloczyn skalarny na  $W$ ,  
 $A \in L(V, W) \rightarrow A^* \in L(W, V) \rightarrow \langle w | Av \rangle_W = \langle A^* w | v \rangle_V$ .  
W dalszych rozważaniach  $V = W$  &  $A \in L(V)$ .  $A$  - normalny, jeśli  $A^* A = A A^*$ .

**Przykład 1** np.

i)  $A^* = A$  - samosprężoność.

ii)  $A^* = A^{-1}$  - unitarność.

Jeżeli  $\mathcal{E}$  - baza ortonormalna  $V$ ,  $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$ ,  $[b_{ij}] = [A^*]_{\mathcal{E}}$ .  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Przypomnienie: jak mamy  $X \subset V$  to zapisujemy to  $V = X \oplus X^\perp$ ,  $P : V \rightarrow V$  - nazywamy rzutem  $X$  wzdłuż  $X^\perp$ , czyli rzutem ortogonalnym na  $X$ .

$\{e_1, \dots, e_k\}$  - baza ortonormalna  $X$ ,  $P = \sum_{i=1}^k |e_i\rangle\langle e_i|$

**Stwierdzenie 1** Niech  $V = X \oplus Y$ . Wówczas rzut  $P : V \rightarrow V$  na  $X$  wzdłuż  $Y$  jest ortogonalny  
 $\iff P^* = P$ .

**Dowód 1**  $\implies$

$Y = X^\perp$ . Weźmy  $v = v_1 + v_2, u = u_1 + u_2, v_1, u_1 \in X, v_2, u_2 \in Y$ .

$$\langle u | Pv \rangle = \langle u_1 + u_2 | v_1 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle.$$

$$\langle Pu | v \rangle = \langle u_1 | v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle.$$

$$\langle u | Pv \rangle = \langle Pu | v \rangle \implies P = P^*.$$

$\longleftarrow$

$P = P^*$ . Czy  $\forall_{y \in Y, x \in X} \langle y | x \rangle = 0$ ?

$$\langle y | x \rangle = \langle y | Px \rangle = \langle Py | x \rangle = 0 \quad \square$$

**Stwierdzenie 2** Niech  $A \in L(V)$ . Następujące warunki są równoważne: (1)  $A$  jest normalne

(2)  $\forall_{v \in V} \|Av\| = \|A^*v\|$

W szczególności jeśli  $A$  - normalny, to

$$\ker(A - \lambda \mathbb{I}) = \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I}).$$

Ponadto, jeśli  $\lambda \neq \mu$ , to  $\ker(A - \lambda \mathbb{I}) \perp \ker(A - \mu \mathbb{I})$ .

**Dowód 2** (1)  $\implies$  (2).

$$\forall_{v \in V} \langle v | A^* A v \rangle = \langle v | A A^* v \rangle \implies \|Av\|^2 = \|A^*v\|^2.$$

(2)  $\implies$  (1).

$$\|Av\| = \|A^*v\| \implies \langle v | (A^* A - A A^*) v \rangle = 0 \quad \forall_{v \in V}.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej  $A^* A - A A^* = 0$ . W szczególności  $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{I}) \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})v\| = 0 \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})^* v\| = 0 = \|(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})v\| \iff v \in \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})$ .  $\lambda \langle u | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle A^* u | v \rangle = \langle \bar{\mu} u | v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$ , czyli  $\langle u | v \rangle = 0 \quad \square$

## 0.1 Twierdzenie spektralne

**Twierdzenie 1** Niech  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią unitarną oraz  $A \in L(V)$  będzie operatorem normalnym. Wówczas  $A$  posiada diagonalizującą, ortonormalną bazę złożoną z wektorów własnych  $A$ .

**Dowód 3** (indukcja ze względu na wymiar przestrzeni  $V$ ).

Pierwszy krok indukcji  $\dim V = 1$  - oczywiste. (Każdy operator w przestrzeni jednowymiarowej jest diagonalny bo to mnożenie przez skalar).

$n \implies n+1$ . Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $\dim W = n$  i dla wszystkich operatorów normalnych na  $W$ . Niech  $A \in L(V)$ ,  $\dim V = n+1$ ,  $A$  - normalny. Skoro  $V$  jest nad  $\mathbb{C}$ , to  $w_A$  ma pierwiastek  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ .

Niech  $e_0 \in V$  będzie wektorem własnym  $A$  o wartości własnej  $\lambda_0$  taki, że  $\|e_0\| = 1$ .

Niech  $X = \langle e_0 \rangle^\perp$ . Wtedy  $\dim X = n$ .

Uwaga:  $\forall_{x \in X} Ax \in X$  oraz  $A^*x \in X$ .

$$\begin{aligned} \text{LHS :} \quad & \langle e_0 | a_x \rangle = \langle A^* e_0 | x \rangle = \langle \overline{\lambda_0} e_0 | x \rangle = \lambda_0 \langle e_0 | x \rangle = 0 \\ \text{RHS :} \quad & \langle e_0 | A^* x \rangle = \langle A e_0 | x \rangle = \overline{\lambda_0} \langle e_0 | x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Niech  $\tilde{A} = A|_X \in L(X)$ . Jeżeli  $\tilde{A}$  jest operatorem normalnym na  $X$  ( $\dim X = n$ ), Normalność  $\tilde{A}$  udowodnimy, że  $\tilde{A}^* = A^*|_X$ .

$$\begin{aligned} \forall_{x_1, x_2 \in X} : \langle x_1 | \tilde{A} x_2 \rangle &= \langle x_1 | A x_2 \rangle = \langle A^* x_1 | x_2 \rangle = \\ &= \langle A^*|_X x_1 | x_2 \rangle \implies \tilde{A}^* = A^*|_X. \end{aligned}$$

i w końcu  $\tilde{A}^* \tilde{A} = A^*|_X A|_X = A^* A|_X = A A^*|_X = A|_X A^*|_X = \tilde{A} \tilde{A}^* \quad \square$

## 0.2 A teraz coś z zupełnie innej beczki

Ustalmy  $u \in V$  i  $X \subset V$  (podprzestrzeń wektorowa).

Zdefiniujmy  $\inf_{x \in X} \|u - x\| = \text{dist}(u, X)$

**Stwierdzenie 3** Niech  $P : V \rightarrow V$  będzie rzutem ortogonalnym na  $X$ . Wówczas  $\text{dist}(u, X) = \|u - Pu\|$

**Dowód 4**  $\text{dist}(u, X) \leq \|u - Pu\|$ , gdyż  $Pu \in X$ . Z drugiej strony,

$$\forall_{x \in X} \|u - x\|^2 = \|\underbrace{u - Pu}_{\in X^\perp} + \underbrace{Pu - x}_{\in X}\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu - x\|^2 \geq \|u - Pu\|^2 \quad \square$$

Odległość przestrzeni afinicznych

$X_1 \subset V, X_2 \subset V, v_1, v_2 \in V$  -  $\text{dist}(v_1 + X_1, v_2 + X_2) = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 + x_1 - (v_2 + x_2)\| = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 - v_2 + (x_1 - x_2)\| = \inf_{y \in X_1 + X_2} \|v_1 - v_2 - y\| = \|v_1 - v_2 - P_{X_1 + X_2}(v_1 - v_2)\|$ , gdzie  $P_{X_1 + X_2}$  - rzut ortogonalny na  $X_1 + X_2$ .