V, W - przestrzenie nad $\mathbb{C}$.
$\langle . | . \rangle_V$ - iloczyn skalarny na V
$\langle . | . \rangle_W$ - iloczyn skalarny na W,
$A \in L(V, W) \to A^* \in L(W, V) \to \langle w | Av \rangle_W = \langle A^* w | v \rangle_V$.
W dalszych rozważaniach $V = W \& A \in L(V)$. A - normalny, jeśli $A^* A = AA^*$.

Przykład 1 *np.*
i) $A^* = A$ *- samosprzężoność.*
ii) $A^* = A^{-1}$ *- unitarność.*

Jeżeli $\mathcal{E}$ - baza ortnonormalna V, $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $[b_{ij}] = [A^*]_{\mathcal{E}}$. $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Przypomnienie: jak mamy $X \subset V$ to zapisujemy to $V = X \bigoplus X^{\perp}$, $P : V \to V$ - nazywamy rzutem X wzdłuż $X^{\perp}$, czyli rzutem ortogonalnym na X.
$\{e_1, \dots, e_k\}$ - baza ortonormalna X, $P = \sum_{i=1}^{k} |e_i >< e_i|$

Stwierdzenie 1 *Niech* $V = X \bigoplus Y$. *Wówczas rzut* $P : V \to V$ *na* X *wzdłuż* Y *jest ortogonalny* $\iff P^* = P$.

Dowód 1 $\implies$
$Y = X^{\perp}$. *Weźmy* $v = v_1 + v_2, u = u_1 + u_2, v_1, u_1 \in X, v_2, u_2 \in Y$.

$$\langle u | Pv \rangle = \langle u_1 + u_2 | v_1 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle .$$

$$\langle Pu | v \rangle = \langle u_1 | v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle .$$

$$\langle u | Pv \rangle = \langle Pu | v \rangle \implies P = P^*.$$

$\impliedby$
$P = P^*$. *Czy* $\underset{y \in Y, x \in X}{\forall} \langle y | x \rangle = 0$*?*

$$\langle y | x \rangle = \langle y | Px \rangle = \langle Py | x \rangle = 0 \quad \square$$

Stwierdzenie 2 *Niech* $A \in L(V)$. *Następujące warunki są równoważne: (1)* A *jest normalne (2)* $\underset{v \in V}{\forall} \|Av\| = \|A^* v\|$
W szczególności jeśli A *- normalny, to*

$$ker(A - \lambda \mathbb{I}) = ker(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I}).$$

Ponadto, jeśli $\lambda \neq \mu$, *to* $ker(A - \lambda \mathbb{I}) \perp ker(A - \mu \mathbb{I})$.

Dowód 2 *(1)* $\implies$ *(2).*

$$\underset{v \in V}{\forall} \langle v | A^* A v \rangle = \langle v | AA^* v \rangle \implies \|Av\|^2 = \|A^* v\|^2.$$

(2) $\implies$ *(1).*

$$\|Av\| = \|A^* v\| \implies \langle v | (A^* A - AA^*) v \rangle = 0 \underset{v \in V}{\forall}.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej $A^* A - AA^* = 0$. *W szczególności* $v \in ker(A - \lambda \mathbb{I}) \iff \|(A - \lambda \mathbb{I}) v\| = 0 \iff \|(A - \lambda \mathbb{I})^* v\| = 0 = \|(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I}) v\| \iff v \in ker(A^* - \overline{\lambda} \mathbb{I})$. $\lambda \langle u | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle A^* u | v \rangle = \langle \overline{\mu} u | v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$, *czyli* $\langle u | v \rangle = 0 \quad \square$

0.1 Twierdzenie spektralne

Twierdzenie 1 *Niech $(V, \langle .|. \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $A \in L(V)$ będzie operatorem normalnym. Wówczas A posiada diagonalizującą, ortonormalną bazę złożoną z wektorów własnych A.*

Dowód 3 *(indukcja ze względu na wymiar przestrzeni V).*
Pierwszy krok indukcji $\dim V = 1$ - oczywiste. (Każdy operator w przestrzeni jednowymiarowej jest diagonalny bo to mnożenie przez skalar).
$n \implies n+1$. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim W = n$ i dla wszystkich operatorów normalnych na W. Niech $A \in L(V), \dim V = n+1$, A - normalny. Skoro V jest nad $\mathbb{C}$, to w_A ma pierwiastek $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.
Niech $e_0 \in V$ będzie wektorem własnym A o wartości własnej λ_0 taki, że $\|e_0\| = 1$.
Niech $X = \langle e_0 \rangle^{\perp}$. Wtedy $\dim X = n$.
Uwaga: $\underset{x \in X}{\forall} Ax \in X$ oraz $A^* x \in X$.

$$\begin{aligned} LHS: \quad & \langle e_0 | a_x \rangle = \langle A^* e_0 | x \rangle = \left\langle \overline{\lambda_0} e_0 | x \right\rangle = \lambda_0 \langle e_0 | x \rangle = 0 \\ RHS: \quad & \langle e_0 | A^* x \rangle = \langle A e_0 | x \rangle = \overline{\lambda_0} \langle e_0 | v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Niech $\tilde{A} = A|_X \in L(X)$. Jeżeli $\tilde{A}$ jest operatorem normalnym na X ($\dim X = n$),
Normalność $\tilde{A}$. udowodnimy, że $\tilde{A}^* = A^*|_x$.

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2 \in X}{\forall} : \left\langle x_1 | \tilde{A} x_2 \right\rangle = \langle x_1 | A x_2 \rangle = \langle A^* x_1 | x_2 \rangle = \\ = \langle A^*|_x x_1 | x_2 \rangle \implies \tilde{A}^* = A^*|_x. \end{aligned}$$

i w końcu $\tilde{A}^* \tilde{A} = A^*|_x A|_x = A^* A|_x = A A^*|_x = A|_x A^*|_x = \tilde{A} \tilde{A}^*$ $\square$

0.2 A teraz coś z zupełnie innej beczki

Ustalmy $u \in V$ i $X \subset V$ (podprzestrzeń wektorowa).
Zdefiniujmy $\inf_{x \in X} \|u - x\| = dist(u, X)$

Stwierdzenie 3 *Niech $P : V \to V$ będzie rzutem ortogonalnym na X. Wówczas $dist(u, X) = \|u - Pu\|$*

Dowód 4 *$dist(u, X) \leqslant \|u - Pu\|$, gdyż $Pu \in X$. Z drugiej strony,*

$$\underset{x \in X}{\forall} \|u - x\|^2 = \| \underbrace{u - Pu}_{\in X^{\perp}} + \underbrace{Pu - x}_{\in X} \|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu - x\|^2 \geqslant \|u - Pu\|^2 \quad \square$$

Odległość przestrzeni afinicznych

$X_1 \subset V, X_2 \subset V$, $v_1, v_2 \in V$ - $dist(v_1 + X_1, v_2 + X_2) = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 + x_1 - (v_2 + x_2)\| = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} \|v_1 - v_2 + (x_2 + x_1)\| = \inf_{y \in X_1 + X_2} \|v_1 - v_2 - y\| = \|v_1 - v_2 - P_{X_1 + X_2}(v_1 - v_2)\|$, gdzie $P_{X_1 + X_2}$ - rzut ortogonalny na $X_1 + X_2$.