

0.1 Macierz Grama układu wektorów

Weźmy V - nad \mathbb{R} . Mamy tutaj iloczyn skalarny $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Ustalamy wektory v_1, \dots, v_k - liniowo niezależne.
niech

$$x = \sum_{i=1}^k x^i v_i, \quad \langle x | x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i | v_j \rangle x^j.$$

Definicja 1 Macierzą Grama układu wektorów v_1, \dots, v_k nazywamy macierz

$$[\langle v_i | v_j \rangle] \stackrel{\text{ozn}}{=} G(v_1, \dots, v_k).$$

Ustalmy wektor $v \in V$, odległość wynosi $\text{dist}(v, \langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \|(1 - P)v\|$, gdzie P - rzut ortogonalny na $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Niech $Pv = \sum_{i=1}^k x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i | v \rangle = \langle v_i | Pv \rangle + \langle v_i | (1 - P)v \rangle = \langle v_i | Pv \rangle = \sum x^j \langle v_i | v_j \rangle.$$

Oznaczmy $\delta = \text{dist}(v, \langle v_1, \dots, v_k \rangle)$.

$$\delta^2 = \langle (1 - P)v | (1 - P)v \rangle = \langle v | (1 - P)v \rangle - \langle Pv | (1 - P)v \rangle = \langle v | v \rangle - \sum_{j=1}^k \langle v | v_j \rangle x^j.$$

Macierzowy zapis:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_k \rangle & \langle v_1 | v \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \dots & & \langle v_2 | v_k \rangle & \langle v_2 | v \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle v | v_1 \rangle & \dots & & \langle v | v_k \rangle & \langle v | v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ 1 \end{bmatrix} = [0].$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy zero. Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny mamy:

$$0 = \det G(v_1, \dots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

Zatem

$$\delta = \left(\frac{\det G(v_1, \dots, v_k, v)}{\det G(v_1, \dots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja 2 Niech $(v_1, \dots, v_k) \in V$ jw. Objętością równoległoscianu rozpiętego przez (v_1, \dots, v_k) definiujemy indukcyjnie:

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{vol}(v_1, \dots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle).$$

$$\text{vol}(v_1) = \|v_1\|.$$

Stwierdzenie 1 *Zachodzi równość*

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) = \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Dowód 1 *(indukcyjny)*

Jeden wektor: $\text{vol}(v_1) = \|v_1\| = \det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}, \det \langle v_1 | v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v_1 .

Krok indukcyjny: $k \implies k+1$

$$\begin{aligned} \text{vol}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) &= \text{vol}(v_1, \dots, v_k) \cdot \text{dist}(v_{k+1}, \langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \\ &= \det(G(v_1, \dots, v_k))^{\frac{1}{2}} \cdot \text{dist}(\dots) = \det G(v_1, \dots, v_{k+1})^{\frac{1}{2}} \quad \square. \end{aligned}$$

0.2 Powierzchnie kwadratowe

Klasyfikacja powierzchni kwadratowych.

Przykład 1 $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3 = 1\}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1\}.$$

Definicja 3 *Niech V - przestrzeń, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny oraz $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa, $c \in \mathbb{R}$.*

Powierzchnie S postaci $S = \{x \in V : Q(x) = c\}$ nazywamy powierzchnią kwadratową typu

- I jeśli $c \neq 0$
- II jeśli $c = 0$

Uwaga: jeśli $c \neq 0$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $c = 1$.

Definicja 4 *Mówimy, że dwie powierzchnie S_1, S_2 kwadratowe mają taki sam kształt, jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne $T : V \rightarrow V$ takie, że $S_2 = TS_1$.*

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q = \sum_{i=1}^p \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^q \frac{\phi_{i+p}^2}{a_{i+p}^2}, \quad (p, q) = \text{sgn}(Q).$$

$(\phi_1, \dots, \phi_{p+q})$ - współrzędne ortonormalne na V .

Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to istnieje $T : V \rightarrow V$ takie, że $Q_2 = Q_1 \cdot T$. Wówczas $S_1 = \{x \in V : Q_1(x) = c\}$, $S_2 = \{x \in V : Q_2(x) = c\}$ mają ten sam kształt: $S_2 = \{x \in V : Q_1(Tx) = c\} = \{x \in V : Tx \in S_1\} = T^{-1}S_1 \implies S_1 = TS_2$

Twierdzenie 1 $Q_1, Q_2 : V \rightarrow \mathbb{R}, S_i = \{x \in V : Q_i(x) = 1\} i = 1, 2$. Jeżeli $S_1 = S_2$, to $Q_1 = Q_2$

Dowód 2 *Ustalmy $i = 1$ oraz rozważmy $\{x \in V : Q_1(x) > 0\}$. Zauważmy, że $\forall_{x \in S_1}$ oraz $t > 0$,*

$t \cdot x \in \mathcal{O}$, gdyż $Q_1(tx) = t^2 Q_1(x) = t^2 > 0$.

Na odwrót, jeżeli $y \in \mathcal{O}$, to $\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}} \in S_1$. ($Q(\frac{y}{\sqrt{Q_1(y)}}) = \frac{Q(y)}{Q_1(y)} = 1$).

Widzimy zatem, że:

$$1. \mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} S_1,$$

2. Wartość Q_1 na \mathcal{O} jest wyznaczona przez wartości na S_1 , gdyż $Q_1(tx) = t^2 \quad \forall_{x \in S_1}$.

Skoro \mathcal{O} jest zbiorem otwartym a funkcja $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = Q_1(x)$ jest różniczkowalna oraz $f''(x) = Q_1(x) \quad \forall_{x \in V}$, to widzimy, że znajomość S_1 pozwala odtworzyć Q_1 \square

Uwaga: można pokazać, że powierzchnia kwadratowa typu II (generycznie) odtwarza Q z dokładnością do stałej moltiplicatywnej.

Terminologia: niech $\dim V = 3$.

powierzchnia typu I:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 - \text{elipsoida}(3, 0)$$

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 - \text{hiperboloida jednowłokowa}(2, 1)$$

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1 - \text{hiperboloida dwuwłokowa}(1, 2)$$

powierzchnia typu II:

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 - \text{punkt}(3, 0)$$

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 - \text{stożek eliptyczny}(2, 1)$$

$$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0 - \text{punkt}(1, 2)$$