

V - przestrzeń z iloczynem skalarnym nad \mathbb{F} . (\mathbb{R} - przestrzeń euklidesowa, \mathbb{C} - przestrzeń unitarna)

0.1 Ortogonalizacja G-S

uwaga: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna, $A \in L(V)$, $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$.

$$a_j^i = \langle e_i | A e_j \rangle.$$

$$\begin{aligned} A e_j &= \sum_l a_j^l e_l \\ \langle e_i | A e_j \rangle &= \sum_l \langle e_i | e_l \rangle a_j^l = a_j^i. \end{aligned}$$

0.2 Funkcjonały liniowe $\xleftrightarrow{1-d}$ wektory

$$\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle$$

Stwierdzenie 1 (*Tożsamość polaryzacyjna*)

$$\mathbb{F} = \mathbb{C}. \quad \frac{v}{\mathbb{C}} = \|v + i^k w\|^2$$

$$\forall_{v,w \in V}, \langle w | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle.$$

Dowód 1

$$\begin{aligned} k=0 & \quad \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\ k=1 & \quad i \langle v + iw | v + iw \rangle = i (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + i \langle v | w \rangle - i \langle w | v \rangle) \\ k=2 & \quad - \langle v - w | v - w \rangle = - \langle v | v \rangle - \langle w | w \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle \\ k=3 & \quad -i \langle v - iw | v - iw \rangle = -i (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle - i \langle v | w \rangle + i \langle w | v \rangle). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^3 i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle = 4 \langle w | v \rangle \quad \square$$

Uwaga: w ten sam sposób pokazujemy, że $\forall_{A \in L(V)} \langle w | A v \rangle = \frac{1}{4} \sum i^k \langle v + i^k w | A(v + i^k w) \rangle (*)$

Wniosek: Jeżeli $A \in L(V)$ spełnia $\langle x | A x \rangle = 0$ dla wszystkich $x \in V$, to $A \equiv 0$.

Rzeczywiście z $(*) \implies \langle w | A v \rangle = 0$, kładziemy $w = A v$ i $\langle A v | A v \rangle = \|A v\|^2 = 0 \implies A v = 0 \quad \forall_{v \in V}$

0.3 Sprzężenie hermitowskie operatora

V, W - przestrzenie z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C} . Niech $A \in L(V, W)$.

Ustalmy wektor $w \in W$ i rozważmy funkcjonal liniowy

$$V \ni v \rightarrow \langle w | A v \rangle \in \mathbb{F} \text{ (na p-ni } V \text{)}.$$

$$\exists_{\tilde{w} \in V} : \langle w | A v \rangle = \langle \tilde{w} | v \rangle = \langle A^* w | v \rangle.$$

Zauważmy, że $w_1, w_2 \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, to

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | v \rangle &= \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | Av \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle w_1 | Av \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle w_2 | Av \rangle = \\ &= \bar{\lambda}_1 \langle \tilde{w}_1 | v \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \tilde{w}_2 | v \rangle = \langle \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 | v \rangle. \quad \forall_{v \in V} \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2.\end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $W \ni w \rightarrow \tilde{w} \in V$ jest liniowe. Oznaczenie $\tilde{w} = A^* w$.

A^* nazywamy sprzężeniem hermitowskim A .

Wyrażenie w bazie ortonormalnej $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza V , $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ - baza W . $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$. $b_{ji} \in [A^*]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

$$b_{ji} = \langle e_j | A^* f_i \rangle = \langle Ae_j | f_i \rangle = \overline{\langle f_i | Ae_j \rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

0.4 Notacja Diraca

$$\begin{array}{c} \langle v | w \rangle \\ \text{bracket} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \langle v |, & |w \rangle, \\ \text{bra} & \text{ket} \end{array} |v \rangle \langle w| \leftarrow \text{ket bra (XD)}.$$

$\langle v |$ - z definicji oznacza funkcjonal liniowy.

$$v \ni |w \rangle \xrightarrow{\langle v |} \langle v | w \rangle \in \mathbb{C}.$$

$|v \rangle \langle w| : v \rightarrow v$ - liniowe odwzorowanie takie, że

$$|v \rangle \langle w| (u) = |v \rangle \langle w | u \rangle : \xrightarrow{\text{stara notacja}} \langle w | u \rangle v.$$

$$(|v \rangle \langle w|)^* = |w \rangle \langle v|.$$

Niech $A = |v \rangle \langle w|$, $B = |w \rangle \langle v|$.

$$\begin{aligned}\langle u_1 | Au_2 \rangle &= \langle u_1 | v \rangle \langle w | u_2 \rangle = \left\langle \overline{\langle u_1 | v \rangle} w | u_2 \right\rangle = \\ &= \langle \langle v | u_1 \rangle w | u_2 \rangle = \langle |w \rangle \langle v | u_1 \rangle | u_2 \rangle = \langle Bu_1 | u_2 \rangle.\end{aligned}$$

Zatem $A^* = B$, $|v \rangle \langle w|^* = |w \rangle \langle v|$. Dalsze reguły:

$$|v \rangle^* = \langle v|, \langle v|^* = |v \rangle.$$

Uwaga: rozkład jedności: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna taka, że $\mathbb{I}_V = \sum_{i=1}^n |e_i \rangle \langle e_i|$.

$$\sum_{i=1}^n |e_i \rangle \langle e_i | v \rangle = v.$$

0.5 Własności hermitowskiego sprzężenia

$$\langle A^* w | v \rangle = \langle w | Av \rangle.$$

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$
3. $(DC)^* = C^* D^*, C : V \rightarrow W, D : W \rightarrow U.$

$$\langle u | DCv \rangle = \langle D^* u | Cv \rangle = \langle C^* D^* u | v \rangle$$

Definicja 1 Niech $A \in L(V)$. Mówimy (1), że A jest samosprężona jeżeli $A^* = A$, (2), że A jest unitarna, jeżeli $A^* = A^{-1}$, (3) że A jest normalna jeżeli $A^*A = AA^*$.

Uwaga: $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3$

Przykład 1 \mathbb{C}^2 z iloczynem kawniczym $\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = A^*,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^* = A \iff A = \begin{bmatrix} x & u \\ \bar{u} & y \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}$.

Unitarność: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = A^*$, w szczególności gdy $\det A = 1$, to unitarność

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C}.$$