Niech $\varphi : V \to \mathbb{F}$. mamy bazy $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$. $\underbrace{([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}})[\varphi]_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\text{reguła transformacyjna dla macierzy form kwadratowych}}$

0.1 Reguła transformacyjna macierzy odwzorowania liniowego

$$A : V \to V \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}, \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: następnych kilka wykładów.
Kończymy wątek o twierdzeniu Sylwestra:
niech φ - dodatnio określona $D_i > 0$.

Definicja 1 *φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dodatnio określona.*

Wniosek: Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^2 D_i > 0$, gdzie $D_i = det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=}$
$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$

Definicja 2 *Odwzorowanie liniowe $A : V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. $(L(V,V) \overset{ozn}{=} L(V))$*

0.2 Rzuty na podprzestrzenie

Przykład 1 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1, \quad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$. *Zauważmy, że $P_1^2 = P_1$.* $\left([P_1]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

Przykład 2 *Inny rozkład:* $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \bigoplus \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

$$P_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2^2 = P_2. ([P_2])_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ogólniej: Jeżeli przestrzeń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$, to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem:

$$Pu = v.$$

gdzie $u = v + w, v \in V, w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P, W = \ker P, imP = V$

Definicja 3 *Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$*

Stwierdzenie 1 *$P \in L(U), P^2 = P, W = imP, V = imP$. Wtedy $U = V \bigoplus W$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W.*

Dowód 1 *Weźmy $u \in U : u = Pu + (1 - P)u \& Pu \in imP \& (1 - P)u \in \ker P$, gdyż $P(1 - P)u = (P - P^2)u = 0$. Czy $imP \cap \ker P = \{0\}$?*
Jeśli $u \in imP \& u \in \ker P$, to $\underset{x \in V}{\exists} u = Px = PPx = Pu = 0$

Definicja 4 *Jeżeli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią taką, że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A - niezmiennicza.*

Uwaga: Niech V będzię niezmiennicze dla $A : U \to U, \mathcal{E}_0 = \{e_1, ..., e_k\}$ dla bazy V, $\mathcal{E}_1 = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - baza $U \implies [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \\ \vdots & & & * \\ a_{k_1} & \dots & a_{kk} & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & ** \\ 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}$,
$* \in M_{k,n-k}(\mathbb{F}), ** \in M_{n-k,n-k}(\mathbb{F})$
Uwaga 2: Przypuśćmy, że $U = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \dots \bigoplus V_l \quad \& AV_i \subset V_i, i \in 1, \dots, l$. Wtedy istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni U taka, że gdzie $B_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F}) \quad \& \quad n_i = \dim V_i$

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_l \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, \dots, \dots, e_{n_1+n_2+\dots+n_l}\}.$$

Definicja 5 *Mówimy, że $0 \neq u \in U$ jest wektorem własnym $A \in L(U)$, jeśli $Au = \lambda u$ dla pewnego skalara $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Mówimy wówczas, że jest wartością własną A. Zbiór wartości własnych A nazywamy spektrum A i oznaczamy $sp(A) \subset \mathbb{F}$. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{F}$, to $V_\lambda = \ker(A - \lambda 1)$ nazywamy podprzestrzenią własną dla $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Zauważmy $\lambda \in sp(A) \iff \ker(A - \lambda 1) \neq \{0\} \iff det(A - \lambda 1) = 0 \iff A - \lambda 1$ jest operatorem nieodwracalnym.
Uwaga: Jeśli $A \in L(V)$, to $\det([A]_{\mathcal{E}}) = \det([A]_{\mathcal{F}}) = \det(A)$, gdyż $\det[A]_{\mathcal{E}} = \det\left(\left([id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1} [A]_{\mathcal{F}} [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) = \det([A]_{\mathcal{F}})$.
Operator A jest odwracalny $\iff [A]_{\mathcal{E}}$ - odwracalna $\iff \det A \neq 0$

Definicja 6 *Wielomian $\lambda \in \mathbb{F} \to \det(A - \lambda 1) \in \mathbb{F}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora A, oznaczamy $w_A(\lambda)$*

Wniosek: $spA = \{\lambda \in \mathbb{F} : w_A(\lambda) = 0\}$.

Przykład 3 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $spA : w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

Pierwiastki $w_A : \Delta = 1 + 4, \quad \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Wektory własne: $V_{\lambda_1} = \ker \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \ker \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle.$

$V_{\lambda_2} = \ker \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ciąg Fibonacciego: $x_0 = 1 = x_1, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Znaleźć ogólny wyraz $x_n = ?$

Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 - \lambda - 1$. Zauważmy, że $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \ldots = A^{n+1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$