$$A \in \mathrm{End}(V) : V \to V.$$

wektory własne $v \in V - \{0\}$ $Av = \lambda v$ Wielomian charakterystyczny endomorfizmu

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda 1), \quad \lambda \in S_p(A).$$

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda 1).$$

Rozwiązania równań różniczkowych wynika w pewnym sensie z następującego twierdzenia:

Obserwacja 1 *$u(t)$ - wielomian stopnia n, $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$*
Endomorfizm postaci $a_0 1 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \in End(V)$ oznaczać będziemy $u(A)$. Własności

$$(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A) \tag{1}$$
$$(u_1 u_2)(A) = u_1(A) u_2(A). \tag{2}$$

Przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0!!!.$$

Twierdzenie 1 *(Cayleya - Hamiltona)*

$$\underset{A \in End(V)}{\forall} w_A(A) = 0.$$

Dowód 1 *Niech $\mathcal{E}$ - baza $\mathcal{V}$: $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$*

$$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w\left([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) \underset{w \in \mathbb{F}_k[x]}{\forall}.$$

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy $\mathcal{A}$

Przypomnienie: macierz dopełnień algebraicznych

$$\mathcal{A}^D \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}) 1.$$

W szczególności

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D (\mathcal{A} - \lambda 1) = \det(\mathcal{A} - \lambda 1) 1 = w_A(\lambda) 1.$$

Uwaga: $n = \dim V$, to istnieją $b_0, \ldots, b_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$(\mathcal{A} - \lambda 1)^D = b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^{n-1} b_{n-1} \tag{3}$$

Na przykład (*notacje:* $\det[a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n$ *3 oraz (123)*

$$(b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1})(\mathcal{A} - \lambda 1) = c_0 1 + \lambda c_1 1 + \ldots + \lambda^n c_n 1.$$

$$\begin{aligned}
\lambda^0 b_0\mathcal{A} &= c_0 1 && |\mathcal{A}^0\\
\lambda^1 b_1\mathcal{A} - b_0 &= c_1 1 && |\mathcal{A}^1\\
\lambda^{n-1} b_{n-1}\mathcal{A} - b_{n-2} &= c_{n-1} 1 && |\mathcal{A}^{n-1}\\
\lambda^n - b_{n-1} &= c_n 1 && |\mathcal{A}^n\\
+b_0\mathcal{A} + (b_1\mathcal{A}^2 - b_0\mathcal{A}) + \ldots + b_{n-1}\mathcal{A}^n - b_{n-2}\mathcal{A}^{n-1} &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n\\
0 &= c_0 1 + c_1\mathcal{A} + \ldots + c_n\mathcal{A}^n\square
\end{aligned}$$

Przykład 2 x_n - *ciąg Fibonacciego.* $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, u(\lambda) = \lambda^n.$$

$$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + \underbrace{r(\lambda)}_{a\lambda + b_1} \implies A^n = aA + b1.$$

Wyznaczamy a i b:
wartości własne wielomianu charakterystycznego: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\lambda_+^n = a\lambda_+ + b_1$$
$$\lambda_-^n = a\lambda_- + b_1.$$

$$\implies a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right), b = \ldots.$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \implies x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Założenie: $\mathbb{F} \in \mathbb{C}, V$ nad $\mathbb{C}$.
Ustalmy $A \in \mathrm{End}(V), sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - \lambda)^{n_i}, w_j(\lambda) = \prod_{i\neq j}^{r}(\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Własności:
a) $j_1 \neq j_2$, to $\underset{u\in\mathbb{C}_m[.]}{\exists}, \quad w_{j_1}(\lambda)w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)w_A(\lambda)$
b) $NWD(w_1, \ldots, w_r) = 1 \implies \underset{v_1,\ldots,v_r\in\mathbb{C}[.]}{\exists} 1 = v_1w_1 + \ldots + v_rw_r$

Zdefiniujmy

$$P_j = v_j(A)w_j(A), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Własności rodziny $\{P_1, \ldots, P_r\}$
(i) $\sum_{j=1}^{r} P_j = 1$,

$(ii) j_1 \neq j_2 : \quad P_{j_1}P_{j_2} = v_{j_1}(A)v_{j_2}(A)w_{j_1}(A)w_{j_2}(A)$
(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1}^{r} P_j = P_i$
(iv) niech $V_i = imP_i$. Wówczas $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$

$$v = P_1 v + \ldots + P_r v \text{ i jeżeli } v \in V_{j_1} \bigcap V_{j_2} \implies P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicze na działanie A, gdyż $AP_j = Av_j(A)w_j(A) = v_j(A)w_j(A)A = P_iA$
a zatem jeżeli $v \in V_j$, to $Av = AP_jv = P_jAv \in V_j$
(vi) $v_j = \ker\left((A - \lambda_j 1)^{n_j}\right)$. $v \in v_j(a)w_j(A)v \implies (A - \lambda_1 1)^{n_j} v = v_j(A)w_j(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} = 0 \implies$
$v \in \ker(A - \lambda_r 1)^{n_j}$
$(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0 \implies v = P_1 v + \ldots + P_j v + \ldots + P_r v = P_j v \subset V, i \neq j, P_i v = s_i(A)(A - \lambda_j 1)^{n_j} v = 0$
dla każdego $s_j \in \mathbb{C}[.]$
(vii) $\dim V_j = n_j$

Definicja 1 *Przy powyższych oznaczeniach* $v_j = \ker(A - \lambda_j 1)^{n_j}$ *nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową* A

Twierdzenie 2 *O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe*