

0.1 Formy dwuliniowe (a) i formy kwadratowe (b)

$$(a) \quad \phi(w, \tilde{w}) = \int_0^1 w(t) \tilde{w}'(t) dt \in \mathbb{R}, \quad w, \tilde{w} \in \mathbb{R}_3[\cdot], \phi : \mathbb{R}_5[\cdot] \times \mathbb{R}_5[\cdot] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \varphi(w) = \phi(w, w) = \int_0^1 w(t) w'(t) dt, \quad \varphi : \mathbb{R}_3[\cdot] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definicja 1 Niech $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$ takie, że $\varphi(v) = \phi(v, v)$ nazywamy formą kwadratową związaną z ϕ

Przykład 1 Formy kwadratowe na $V = \mathbb{R}^2$. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\phi_A(x, \tilde{x}) = x^T A \tilde{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1 \tilde{x}_1 + bx_1 \tilde{x}_2 + cx_2 \tilde{x}_1 + dx_2 \tilde{x}_2$
 $\varphi_A(x) = \phi_A(x, x) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$

Przypomnienie:

$$\phi = \phi_a + \phi_s, \phi_a(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) - \phi(\tilde{v}, v)), \phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v)).$$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v, v) + \phi_s(v, v) = \phi_s(v, v)$

Stwierdzenie 1 Jeżeli $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ - jak wyżej, to

$$\phi_s(v, \tilde{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(v + \tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})) - \text{formuła polaryzacyjna!}.$$

Dowód 1 Obliczmy $\varphi(v + \tilde{v}) = \phi(v + \tilde{v}, v + \tilde{v}) = \phi(v, v) + \phi(\tilde{v}, \tilde{v}) + \phi(v, \tilde{v}) + \phi(\tilde{v}, v) = \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) + 2\phi_s(v, \tilde{v})$ \square

Uwaga: Powyższe stwierdzenie zadaje 1 – 1 odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład 2 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}$ rozważmy $\phi_\lambda(x, \tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$. Zauważmy, że $\varphi(x) = \phi_\lambda(x, x)$, ϕ_0 jest symetryczną formą dwuliniową oraz $\varphi(x) = \phi_0(x, x)$

Przykład 3 φ - forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ . Macierzą formy φ w bazie \mathcal{E} definiujemy jako macierz ϕ w \mathcal{E} .

$$rk\varphi \stackrel{\text{def}}{=} rk\phi.$$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana. Wracając do przykładu: \mathcal{E} - baza standardowa \mathbb{R}^2 ,

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Definicja 2 Mówimy, że baza \mathcal{E} diagonalizuje formę kwadratową φ jeżeli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.

Przykład 4 $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Znaleźć bazę diagonalizującą.

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1)^2 - \frac{1}{3}x_1^2.$$

Rozważmy dwie formy liniowe na \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= x_1 + 2x_2 \\ \psi_2(x) &= x_2.\end{aligned}$$

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Wówczas } \varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1 = [1, 2], \psi_2 = [0, 1]), \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Notacja: Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja $\varphi : v \in V \rightarrow \varphi_1(v)\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\phi(v, \tilde{v}) = \varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}), \frac{1}{2}(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})) = \phi_s(v, \tilde{v}).$$

Notacja: $\varphi \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi_1\varphi_2$, $\phi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$. W szczególności $\phi_s = \frac{1}{2}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_2 \otimes \varphi_1)$

Jeśli teraz $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$ - dowolna forma kwadratowa oraz $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - baza V , $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ - baza dualna,
Macierz φ w $\mathcal{E} : [\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$,
zachodzi $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} = \psi_i\psi_j$

Twierdzenie 1 (Lagrange'a)

Dla każdej formy kwadratowej istnieje (co najmniej jedna) baza diagonalizująca

Dowód 2 $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j$, gdzie $a_{ij} = a_{ji}$.

Przypuśćmy, że $a_{ij} \neq 0$ dla pewnego i , np. $i = 1$.

Rozważmy formę liniową

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j}\psi_j.$$

Wówczas istnieje wsp. bij. $i, j = 2, \dots, n$ taka, że

$$\sum_{i,j} a_{ij}\psi_i\psi_j = a_{11}\tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij}\psi_i\psi_j.$$

np.

$$a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 = a_{11}(\psi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_2)^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}})\psi_2^2.$$

Przykład 5 $V = \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + x_2x_3.$$

$$x_2 = y_1 - y_2, \varphi(x) = y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - \frac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2 y_3 = (y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

$$\psi_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \psi_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \psi_3 = \dots.$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2} [1, 1, 1]$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} [1, -1, 1]$$

$$\psi_3 \stackrel{np.}{=} [1, 0, -1].$$

$$\mathcal{E}^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), \mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3), \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2, (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$