

## 0.1 Klatki Jordanowskie

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \lambda & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \in M_h(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$

**Przykład 1** np.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**Twierdzenie 1** Niech  $A \in \text{End}(W)$ ,  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Istnieje baza (Jordanowska)  $\mathcal{E}$  przestrzeni  $W$ , to znaczy, że baza taka, że  $[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$  jest sumą klatek Jordanowskich z  $\lambda_i$  na diagonalu.

Operator nilpotentny.  $N^q = 0$  -  $q$  - stopień nilpotentności ( $N^{q-1} \neq 0$ )

**Przykład 2**

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies q = 3.$$

$$A \rightarrow W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i} \subset W \quad A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \rightarrow W_{\lambda_i}. \quad A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}.$$

$$A_{\lambda_i} = \underbrace{\lambda_i 1_{W_{\lambda_i}}}_{D_{\lambda_i}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i 1_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}}.$$

$$N_{\lambda_i}^{n_i} = 0.$$

**Dowód 1** (dla operatorów nilpotentnych). Niech  $N \in \text{End}(W)$  - nilpotentny.

$$W_i = \ker N^i, \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_q = W \rightarrow$$

$$\rightarrow \ker N \cap \text{im} N^{q-1} \subset \ker N \cap \text{im} N^{q-2} \subset \dots \subset \ker N_i(*)$$

$$\dim \ker N \cap \text{im} N^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}.$$

Niech  $\{f_1, \dots, f_m\}$  będzie bazą  $\ker N$  zgodna z zawieraniem (\*). Wtedy  $\{e_{11}, \dots, e_{m,1}\}_{e_{i,1}}$  jest końcówką serii długości  $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & e_{1,h(1)} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & e_{2,h(2)} & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & & e_{i,h(i)} \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & & \vdots \\ e_{11} & & e_{21} & & \dots & & e_{m,1} \end{array}$$

Dlaczego  $\{e_{i,j} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, h(i)\}\}$  jest bazą  $W$ ?

Liniowa niezależność:  $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0(**)$ ,  $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$

Działając  $N^{q-1}$  nie zeruje się  $e_{ij}$ , które wchodzi do serii krótszej niż  $q$ . Zatem  $\alpha_{iq} = 0 \quad \forall_{i \in \{1, \dots, m\}}$ .

Dalej, działając  $N^{q-2} \rightarrow \alpha_{i,q-1} = 0$  itd.  
 Czy wektorów  $e_{ij}$  jest tyle co wymiar  $W$ ?

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim W_q \cdot \dim W_{q-1} + \dim W_{q-1} - \dim W_{q-2} + \dots + \dim W_1 \cdot W_0 = \\ &= \underbrace{\dim \ker N \cap \operatorname{im} N^{q-1}}_{\text{końcówki serii dl. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap \operatorname{im} N^{q-2}}_{\text{końcówki serii dl. } q-1} + \dots \\ &= \text{liczba wektorów } \{e_{ij} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, h(i)\}\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że macierz  $N$  w bazie  $\mathcal{E} = \{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1,h(1)}, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2,h(2)}, \dots\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} & & 0 \\ & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

## 0.2 Iloczyny skalarne

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ,  $W$  - przestrzeń wektorowa nad  $\mathbb{F}$

**Definicja 1** Odwzorowanie  $\langle \cdot | \cdot \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{F}$  takie, że

$$\forall_{u_1, u_2, v \in W} \quad \langle v | u_1 + u_2 \rangle = \langle v | u_1 \rangle + \langle v | u_2 \rangle \quad (1)$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} \quad \langle v | \lambda u \rangle = \lambda \langle v | u \rangle \quad (2)$$

$$\forall_{u, v \in W} \quad \langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle} \quad (3)$$

$$\forall_{u \in W - \{0\}} \quad \langle u | u \rangle > 0. \quad (4)$$

nazywamy iloczynem skalarnym na przestrzeni  $W$ .

Uwaga: (a)  $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ ,  $\langle 0 | 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle 0 | 0 \rangle$

(b)  $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle = \overline{\langle v | u_1 + u_2 \rangle} = \overline{\langle v | u_1 \rangle} + \overline{\langle v | u_2 \rangle}$

(c)  $\langle \lambda u | v \rangle = \overline{\lambda} \langle u | v \rangle = \overline{\langle v | \lambda u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v | u \rangle}$

**Przykład 3**  $W = \mathbb{C}^n$ ,  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ . Def:  $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$ .

Notacja Diraca:  $\langle u | v \rangle, |u\rangle, \langle v|, |u\rangle \langle v|$

**Przykład 4**  $u, v \in \mathbb{C}_n[\times]$ ,  $\langle u | v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \overline{u(t)} v(t) dt$

**Definicja 2** Mówimy, że wektory  $u, w \in W$  są ortogonalne (względem  $\langle | \rangle$ ), jeżeli  $\langle u | v \rangle = 0$ .

### 0.3 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  będzie bazą  $W$ . Mówimy, że  $\mathcal{E}$  jest bazą ortogonalną jeżeli  $\langle e_i | e_j \rangle = 0, i \neq j$ . Jeżeli dodatkowo  $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ , to mówimy, że  $\mathcal{E}$  jest bazą ortonormalną.

Niech  $\{f_1, \dots, f_n\}$  będzie dowolną bazą. Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory  $\{e_1, \dots, e_n\}$  :  $e_1 = f_1, e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k | f_i \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} \cdot e_k$