

Przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}, \quad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{4} \left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t}\mathbb{I} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \end{aligned}$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1 = \ker(A - 1\mathbb{I}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{wektor własny} \\ \text{o wartości własnej} = 1}} \right\rangle$$

$$V_{-1} = \ker(A + 1\mathbb{I})^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 1\mathbb{I}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Rozważmy bazę } \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ - postać jordanowska macierzy.}$$

$$A \in \text{End}(V), \quad Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, \quad n_i \text{ - krotności } \lambda_i$$

$$V = \bigoplus V_{\lambda_i}, \quad V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i}$$

$$A = \bigoplus A_i, \text{ gdzie } A_i \in \text{End}(V_{\lambda_i}) \text{ taki, że } A_i = A|_{V_{\lambda_i}}.$$

Zauważmy, że

$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$

gdzie

$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 1 Jeżeli $N \in \text{End}(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N .

Przykład 2

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} - \text{nilpotent st. } n+1.$$

$$\left\{ n!, n!x, \binom{n}{2}x^2, \dots, \binom{n}{n-1}x^{n-1}, \binom{n}{n}x^n \right\}$$

$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2 Klatkę jordanowską nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1 Niech $A \in \text{End}(W)$, gdzie W jest nad \mathbb{C} , $\dim W < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W , w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonalu.

Dowód 1 Skoro $A = \bigoplus A_i$, $A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_i$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i , to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \rightarrow W$ - nilpotentny stopnia q i $N^q = 0$.

$\forall_{i \in \{0, \dots, q\}}$ niech $W_i = \ker N^i$.

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. Mówimy, że w ma wysokość i , jeżeli $N^i w = 0$ oraz $N^{i-1} w \neq 0$.

Zauważmy, że jeżeli x ma wysokość równą i , to układ wektorów

$$\{x, Nx, \dots, N^{i-1}x\}.$$

jest liniowo niezależny.

Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \mid_{\text{działamy}} N^{i-1} \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$\alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \mid_{\text{działamy}} N^{i-2} \Rightarrow \alpha_1 = 0$ itd.

Rozważmy tym razem podprzestrzeń $\ker N \cap \text{Im } N^{j-1} \subset W$ i zauważmy, że $\dim \ker N \cap \text{Im } N^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.

W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \rightarrow \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ wzorem $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $\operatorname{Im} F = \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ oraz $\ker F = W_{j-1}$, to
 $\dim W_j = \dim \operatorname{Im} F + \dim \ker F = \dim(\ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}) + \dim W_{j-1}$

$$\ker F = W_{j-1} - \text{oczywiste.}$$

$$\operatorname{Im} F = \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} : y \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} \implies \exists_{x \in \operatorname{Im} N^{j-1}} : y = N^{j-1}x \text{ oraz } Ny = 0$$

$$\text{to w takim razie } N^j x = 0 \implies x \in W_j \text{ oraz } y = N^{j-1}x = Fx$$

$$\ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-1} \subset \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-2} \subset \dots \subset \ker N$$

.

Niech $\{f_1, \dots, f_m\}$ $m = \dim \ker N$ będzie bazą $\ker N$ zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni.
Wektor $f_1 \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-1}$ jest końcówką serii wektorów długości q .
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ i niech $h(i)$ oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że

$$\{e_{ij} : i \in 1, \dots, m, j \in \{1, \dots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \square.$$