

Definicja 1 Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$ jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje baza \mathcal{E} przestrzeni \mathbb{F}^n taka, że $[A]_{\mathcal{E}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, to znaczy, że $Ae_k = \lambda_k e_k$. Jeżeli $G = [id]_{\mathcal{E}}^{st}$, to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = G^{-1}AG.$$

Wniosek: Macierz A jest diagonalizowalna jeżeli \mathbb{F}^n ma bazę złożoną z wektorów własnych A .

Przykład 1 (antyprzykład)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nie jest macierzą diagonalizowalną.

$$w_A = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2, \quad Sp(A) = \{1\}.$$

$$\ker(A - 1) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Czyli \mathbb{C}^2 nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A .

$$\lambda = 1, n_1 = 2. V_{\lambda} = \ker(A - \lambda 1)^{n_1} = \ker(A - 1)^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$$

Twierdzenie 1 V - przestrzeń wektorowa nad \mathbb{C} . Ustala się endomorfizm $A \in L(V)$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Zdefiniujmy $V_i = \ker(A - \lambda_i 1)^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subset V_i, V = \bigoplus V_i, \dim V_i = n_i$

Wniosek: Niech \mathcal{E} będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, to znaczy pierwsze n_i wektorów V jest bazą V_i , kolejne n_2 jest bazą V_2 , itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ takie, że

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}.$$

$$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_{n_1} e_{n_1}.$$

Dowód 1 (równość $n_i = \dim V_i$)

Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda 1)$.

Wtedy

$$w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda 1) = \prod_{i=1}^k w_i(\lambda).$$

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$, to znaczy, że

$$\exists_{\lambda_j \in Sp(A)} \lambda = \lambda_j.$$

Wtedy $V_i \cap V_j \neq \phi$, zatem $i = j$. Czyli $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i}$. Zatem

$$\prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i} \implies n_i = \dim V_i \quad \square.$$

Przykład 2 Rozważmy równanie różniczkowe liniowe:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{v(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}_{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\nabla(t)}.$$

$$v(t) = e^{At}v(0) = v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Stwierdzenie 1 Niech f - funkcja analityczna oraz $w \in \mathbb{C}_n[.]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz wielomian $r \in \mathbb{C}_{n-1}[.]$ taki, że $f = wq + r$

Dowód 2 Indukcja ze względu na liczbę pierwiastków w .

$$k = 1 : \quad w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^{k-n}}_q + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k}_r.$$

Indukcja:

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}.$$

Z indukcji istnieje \tilde{q} - analityczna

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \tilde{q}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda).$$

Gdzie $\tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_1+\dots+n_{k-1}}[.]$ oraz istnieje \tilde{q}, \tilde{r} takie, że $\tilde{q} = (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{q} + \tilde{r}, \tilde{r} \in \mathbb{C}_{n_{k+1}-1}$. Po wstawieniu $\tilde{q} : f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{q} + r$, gdzie $r(\lambda) = \tilde{r}(\lambda) + \tilde{r}(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ \square

Zastosowanie powyższego stwierdzenia i twierdzenia Cayleya - Hamiltona.

Przykład 3 Obliczyć e^{At} : rozważmy funkcję

$$f : \lambda \rightarrow e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Chcemy obliczyć $f(A)$, gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

$$f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + r(\lambda); \quad w_A(A) = 0.$$

Zatem

$$f(A) = q(A)w(A) + r(A) = r(A).$$

$$w_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2, Sp(A) = \{1, -1\}, n_1 = 1, n_2 = 2.$$

$$e^{t\lambda} = q(\lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$?

$$\lambda = 1$$

$$e^t = a + b + c$$

$$\lambda = -1$$

$$e^{-t} = a - b + c$$

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} =$$

$$q'(\lambda)w(\lambda) + qw'(\lambda) + 2a\lambda + b \implies$$

$$\lambda = -1$$

$$te^{-t} = -2a + b.$$