V - przestrzeń nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym - tak było.
$A : V \to V$ takie, że $A^*A = AA^*$. Zachodzi tw. spektralne dla A.
Istnieje baza ortonormalna V złożona z wektorów własnych A.

Drugie sformułowanie: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Sp(A)$, $V_i = \ker(A - \lambda\mathbb{I})$, $\mathcal{P}_i$ - rzuty ortogonalne na V_i. Wtedy $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{i_k} \mathcal{P}_i \quad \& \quad A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$.

Twierdzenie 1 *(spektralne dla operatorów samosprzężonych na przestrzeni Euklidesowej, tzn. V nad $\mathbb{R}, A : V \to V, A^* = A$)*
Lemat: *W - przestrzeń zespolona z iloczynem skalarnym $\langle .|. \rangle$. Niech $B : W \to W, B^* = B$. Wówczas $sp(B) \subset \mathbb{R}$*

Dowód 1 *$\lambda \in \mathbb{C}, w \in W - \{0\}, Bw = \lambda w \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\langle w|Bw \rangle = \langle w|\lambda w \rangle = \lambda \langle w|w \rangle$$
$$\langle Bw|w \rangle = \langle \lambda w|w \rangle = \overline{\lambda} \langle w|w \rangle \implies \lambda = \overline{\lambda}.$$

Wniosek $w_B(z)$ - wielomian charakterystyczny B. Pierwiastki w_B są rzeczywiste.

$V, A : V \to V$ - jak wyżej, V nad $\mathbb{R}^*, A^* = A$.
Istnieje baza ortonormalna V wektorów własnych operatora A.

Dowód 2 *(indukcja ze względu na $\dim V$)*
1 krok indukcyjny - oczywiste.
$n \implies n + 1$. Przypuśćmy, że A posiada wektor własny e_0 o wartości własnej $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Niech $X = \mathbb{R} \cdot e_0$. Wówczas $AX \subset X$ - oczywiste. Mniej oczywiste jest to, że $AX^\perp \subset X^\perp$ - bo jeżeli $y \in X^\perp$, to $\langle Ay|e_0 \rangle = \langle y|Ae_0 \rangle = \lambda_0 \langle y|e_0 \rangle = 0 \implies y \in X^\perp$.
Rozważmy operator $D = A|_{X^\perp}$ - obcięcie do X. Wówczas $D^* = D$. Zatem, skoro $\dim X^\perp = n$, to na mocy założenia indukcyjnego $X^\perp$ posiada ortonormalną bazę $\{e_1, \dots, e_n\}$ wektorów własnych operatora B. Wówczas $\{e_0, \dots, e_n\}$ jest ortonormalną bazą wektorów własnych operatora A.
Istnienie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $e_0 \in V$ - takiego jak wyżej:
Niech $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_n\}$ będzie dowolną bazą ortonormalną przestrzeni V. Rozważmy macierz $\mathcal{A} = [A]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Macierz $\mathcal{A}$ jest rzeczywista i symetryczna. Operator $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ taki, że $Tx = \mathcal{A}x \underset{x \in \mathbb{C}}{\forall}$. Operator T na $\mathbb{C}^n$, (gdzie iloczyn skalarny na $\mathbb{C}$ jest kanoniczny) jest samo sprzężony! Wielomian charakterystyczny T ma tylko rzeczywiste pierwiastki. Zauważmy, że $w_T(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathbb{I}) = w_A(\lambda)$ a zatem w_A ma rzeczywiste pierwiastki. Stąd wynika, że istnieje λ_0, e_0 j.w. $\square$

0.1 Kwadryki

Klasyfikacja (czyli co nam daje tw. spektralne w kontekście form np. kwadratowych) form kwadratowych na przestrzeni euklidesowej (rzeczywista z il. skalarnym).
$V, \dim V < \infty, Q : V \to \mathbb{R}$ - forma kwadratowa.
$\langle .|. \rangle$ - iloczyn skalarny w przestrzeni V. Z Q związana jest symetryczna forma 2 liniowa $b : V \times V \to \mathbb{R}$, gdzie $Q(v) = b(v, v)$ (albo inaczej $b(v_1, v_2) = b(v_2, v_1) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)))$.
Funkcjonały liniowe na V są postaci: ustalamy $\tilde{v} \in V$ i definiujemy funkcjonał $\langle \tilde{v}| \in V^*$, gdzie $\langle \tilde{v}| (v) \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{v}|v \rangle$.
Ustalmy $w' \in V$ i rozważmy funkcjonał $b(w, \cdot)$. Istnieje $\tilde{w} \in W$ taki, że $b(w, v) = \langle \tilde{w}|v \rangle \underset{v \in V}{\forall}$.
Powyższe definiuje operator $F : V \to V$, gdzie $Fw = \tilde{w}$.
Czyli $b(w, v) = \langle Fw|v \rangle \underset{w,v \in V}{\forall}$.

Lemat: F - samosprzężony.

Dowód 3 *$\langle Fw|v\rangle = b(w,v) = b(v,w) = \langle Fv|w\rangle$, zatem $F = F^*$* $\square$

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Zauważmy, że $[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \langle e_j|Fe_i\rangle_{i,j=1,\ldots,n} = b(e_i, e_j)_{i,j=1,\ldots,n}$.
Jeśli w szczególności $\mathcal{E}$ - ortonormalna baza złożona z wektorów własnych F, to w tej bazie $[b]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalne. Niech $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ - współrzędne ortogonalne związane z bazą $\mathcal{E}$. Wtedy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i^2 = Q$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są niezerowymi wartościami własnymi F. Niech $sgnQ = (p,q)$. Wtedy istnieją $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_p \quad \& \quad a_{p+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{p+q}$ takie, że

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} (**).$$

Definicja 1 *Mówimy, że (**) jest postacią kanoniczną formy kwadratowej Q.*

Definicja 2 *$Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}$ mają tę samą postać kanoniczną, jeżeli istnieją współrzędne ortonormalne $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}, \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ takie, że*

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2} \quad \& \quad Q_2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\psi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\psi_{p+i}^2}{a_{p+1}^2}.$$

Definicja 3 *V nad $\mathbb{R}, T : V \to V$ - operator taki, że $T^* = T^{-1}$. Wówczas mówimy, że T jest operatorem ortogonalnym.*

Uwaga: T jest ortogonalny jeżeli mamy:
$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza ortonormalna $\implies$ $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$ - baza ortonormalna.

$$\langle Te_i|Te_j\rangle = \langle e_i|T^*Te_j\rangle = \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Stwierdzenie 1 *Formy kwadratowe Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną $\iff$ istnieje operator ortogonalny $T : V \to V$ taki, że $Q_2(v) = Q_1(Tv)$*

Dowód 4 *Jeśli Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną, to definiujemy $T : V \to V$ następująco: niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza ortonormalna związana z $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ i $\{f_1, \ldots, f_n\}$ z $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Niech $Te_i = f_i$ - daje $Q_2(v) = Q_1(Tv)$.*
Na odwrót: jeśli $Q_2(v) = Q_1(Tv)$ i w bazie $\{e_1, \ldots, e_n\}$, Q_1 ma postać kanoniczną to definiując $f_i : e_i := Tf_i$ dostajemy bazę $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormalną i postac kanoniczna Q_2 w bazie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ jest taka Q_1 w $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\square$