## 0.1 Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych

Przypomnienie:(definicja)

**Definicja 1** *$V$ - przestrzeń wektorowa,* $\dim V < \infty, \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C})$
$V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{\phi : V \to \mathbb{F}, \phi$ *- liniowe* $\}$.
*Terminologia: $\phi$ jest formą liniową*

**Przykład 1** $V = \mathbb{R}^3, \phi\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

**Definicja 2** *Odwzorowanie $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na $V$, jeżeli:*

- $\Omega(v, \lambda_1 \tilde{v}_1 + \lambda_2 \tilde{v}_2) = \lambda_1 \Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2 \Omega(v, \tilde{v}_2) \underset{v,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2 \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$
- $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1 \Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2 \Omega(v_2, \tilde{v}) \underset{v_1,v_2,\tilde{v} \in V}{\forall} \underset{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}}{\forall}$

**Przykład 2** $V = \mathbb{R}^2$. *Wszystkie formy 2-liniowe na $V$ są postaci*

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2.$$

*dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że*

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^1, x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

**Definicja 3** *Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będziebazą przestrzeni $V$. Wówczas macierz $n \times n$ postaci* $[\Omega(e_i, e_j]_{i,j \in 1,\ldots,n}$ *nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie $\mathcal{E}$ i oznaczamy* $[\Omega]_{\mathcal{E}}$

**Przykład 3**

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \Omega \text{ - jak poprzednio } [\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

*Uwaga: Jeśli $v \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne* $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$,

*a $\tilde{v} \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne* $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$, *to*

$$\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j) = \sum_{i,j} \lambda^i \Omega(e_i, e_j) \tilde{\lambda}^j = \begin{bmatrix} \lambda^1, \ldots, \lambda^n \end{bmatrix} [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

## 0.2 Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\mathcal{E}' = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą $V$. Jeżeli $\tilde{e}_i = \sum_i a_i^j e_j$, to $[\Omega]_{\mathcal{E}'}$ jest dana wzorem

$$\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \underset{\text{conv.}}{\overset{\text{East}}{=}} \Omega(a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k \Omega(e_k, e_l) a_j^l = \left[a_i^k\right]^T [\Omega]_{\mathcal{E},k,l} \left[a_j^l\right] \tag{1}$$

Zauważmy $\left[a_i^j\right] = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ i wzór 1 zapisuje się w postaci

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = \left([Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

**Przykład 4**

$$V = \mathbb{R}^2, \Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = x^1y^1 + x^2y^2.$$

$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Rozważmy bazę* $\mathcal{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

## 0.3 Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\mathcal{E}'} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A.$$

gdzie $A = [Id]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$

Zauważmy, że $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalna oraz $A^{-1} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$. W szczególności $\det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = \det(A)^2 \det [\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$, to $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det [\Omega]_{\mathcal{E}'} = 0$.

**Definicja 4** *Mówimy, że $\Omega$ jest niezdegenerowana, gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej)* $\det [\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$

Przypomnienie: Jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \ldots, E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oraz $C$ i $E$ są odwracalne, to $rk(B) = rk(D)$

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CDE\mathbb{F}^n), \dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim D\mathbb{F}^n = rkD.$$

Zatem $rk\, [\Omega]_{\mathcal{E}} = rk\, [\Omega]_{\mathcal{E}'}$

**Definicja 5** *Rzędem formy $\Omega$ nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie $\mathcal{E}$ przestrzeni wektorowej $V$.*

**Przykład 5** *(a) $V = \mathbb{R}_n[.]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)$. Wykazać, że $\Omega$ jest niezdegenerowana i ma rząd $n+1$*
*(b) $\psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^k w_1(i)w_2(i)$. Wykazać, że rząd $\psi$ jest równy* $\min(k+1, n+1)$

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odzworowanie $T_\Omega : V \to V^*$ takie, że

$$\langle T_\Omega(v), \tilde{v}\rangle = \Omega(v, \tilde{v}).$$

Zauważmy, że

$$[\Omega]_{\mathcal{E},i,j} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_\Omega(e_i), e_j\rangle = [T_\Omega]_{\mathcal{E},i,j}^{\mathcal{E}^*}.$$

w szczególności $rk\Omega = rk(T_\Omega) = n + 1$

**Definicja 6** *Mówimy, że forma dwuliniowa* $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ *jest*

- *symetryczna, jeśli* $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega(\tilde{v}, v)$
- *antysymetryczna, jeśli* $\Omega(v, \tilde{v}) = -\Omega(\tilde{v}, v) \underset{v,\tilde{v} \in V}{\forall}$

**Przykład 6**

- $\Omega : \psi$ *na* $\mathbb{R}_n[.]$ *jak wyżej sąsymetryczne.*
- $\Xi \pm (w, \tilde{w}) = w(0)\tilde{w}(1) \pm \tilde{w}(0)w(1)$ *dla* $\begin{matrix} - \text{ antysymetria} \\ + \text{ symetria} \end{matrix}$

**Stwierdzenie 1** *Dla każdego* $\Omega$ *istnieje* $\Omega_a$ *i* $\Omega_s$*, gdzie* $\Omega_s$ *- symetryczna,* $\Omega_a$ *- antysymetryczna oraz*

$$\Omega = \Omega_a + \Omega_s.$$

*Ponadto* $\Omega_a, \Omega_s$ *- jednoznacznie wyznaczone*

**Dowód 1** *Sprawdzić, że* $\Omega_a(v, \tilde{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}) - \Omega(\tilde{v}, v)); \Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \tilde{v}), \Omega(\tilde{v}, v))$