

$V$  - wektorowa nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ . Na tej przestrzeni mamy iloczyn skalarny  $\langle v_1 | v_2 \rangle \in \mathbb{F}$ . Wektory ortogonalne:  $v_1 \perp v_2$ , jeśli  $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$

**Przykład 1** na przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  wprowadzamy iloczyn skalarny  $\langle u | w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i w_i$ , gdzie  $\bar{u}$  - sprzężenie zespolone.

Mówimy, że baza  $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_n\}$  przestrzeni  $V$  jest ortonormalna, gdy  $\langle v_i | v_j \rangle = 0, i \neq j$ .

Notacja  $\|v\| = \langle v | v \rangle^{\frac{1}{2}}$  - długość wektora  $v$ .

**Stwierdzenie 1** Jeśli  $\mathcal{E}$  jest bazą ortonormalną oraz  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , to  $\alpha_i = \langle v_i | v \rangle$ .

**Dowód 1**  $\langle v_i | v \rangle = \left\langle v_i | \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_i$

*Uwaga:* Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.

$f_1, \dots, f_k$  - układ ortonormalny:  $\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j = 0$ , to  $\alpha_i = \left\langle f_i | \sum_{j=1}^k \alpha_j f_j \right\rangle = 0$

## 0.1 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech  $\{e_1, \dots, e_n\}$  będzie bazą  $V$ .

Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:

$f_1 = e_1$ ;  $f_1, \dots, f_k$  - mamy to

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle f_j | e_{k+1} \rangle f_j}{\|f_j\|^2}.$$

*Uwaga:* (1)

$$\langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

**Dowód 2** (indukcyjny)

Dla  $k = 1$  - oczywiste.

$k \implies k+1$ :

$$\langle f_1, \dots, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_k, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle.$$

W szczególności  $\forall_{k=1, \dots, n} f_k \neq 0$

*Uwaga* (2)

$f_i \perp f_j$  dla  $i \neq j$ .

**Dowód 3** (indukcyjny)

Przypuśćmy, że  $i < j$ .

$$\begin{aligned} \langle f_i | f_j \rangle &= \left\langle f_i | e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle f_l}{\|f_l\|^2} \right\rangle = \\ &= \langle f_i | e_j \rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle}{\|f_l\|^2} \langle f_i | f_l \rangle = \\ &= \langle f_i | e_j \rangle - \frac{\langle f_i | e_j \rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i | f_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Kładąc  $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$ , dostaję bazę ortonormalną  $\{h_1, \dots, h_n\}$   $\square$

**Przykład 2** Rozważamy przestrzeń wielomianów  $V = \mathbb{R}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ .

$\mathcal{F} = \{1, x\}$ ,  $\langle v_1 | v_2 \rangle = \int_0^1 v_1(x) v_2(x) dx$ .  $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x$ ,  $v_2 = \beta_1 + \beta_2 x$ .

$$\langle 1 | x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2}$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{\langle 1 | x \rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2} \implies f_1 \perp f_2.$$

Czy  $h_1$  jest unormowane?  $h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1$ .

$$h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right). \quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{12}$$

## 0.2 Rzut ortogonalny

Ustalmy podprzestrzeń  $E$  przestrzeni  $V$ . Niech  $E^\perp = \left\{ v \in V : \forall_{e \in E} v \perp e \right\}$ ,  $E^\perp$  - jest poprzestrzenią

wektorową. Zauważmy, że  $E \cap E^\perp = \{0\} : v \in E \cap E^\perp$ , to  $v \perp v : \langle v | v \rangle = 0$ .

Ponadto,  $E + E^\perp = V$ . Ustalmy bazę ortonormalną podprzestrzeni  $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ .

$$\text{Wtedy } v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i}_{\in E} + \left( v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right).$$

Zauważmy  $\left\langle e_l | v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right\rangle = \langle e_l | v \rangle - \langle e_l | v \rangle = 0$ . W takim razie

$$v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \in E^\perp.$$

Wniosek:  $V = E \oplus E^\perp$ . Rzut na  $E$  wzdłuż  $E^\perp$  nazywamy rzutem ortogonalnym na  $E$  i oznaczamy  $P_E$ .

Działa tak:  $P_E v = \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i$ .  $E^\perp$  nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni  $E^{l=1}$

**Stwierdzenie 2** (Nierówność Cauchy-Schwartz)

$$|\langle v_1 | v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

**Dowód 4** Niech  $\alpha \in [0, 2\pi] : \langle v_1 | v_2 \rangle = e^{i\alpha} |\langle v_1 | v_2 \rangle|$ .

Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : f(t) = \langle te^{i\alpha} v_1 - v_2 | te^{i\alpha} v_1 - v_2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle te^{i\alpha} v_1 | te^{i\alpha} v_1 \rangle - \langle te^{i\alpha} v_1 | v_2 \rangle - \langle v_2 | te^{i\alpha} v_1 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle = \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - te^{-i\alpha} \langle v_1 | v_2 \rangle - te^{i\alpha} \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle \\ &= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - 2t |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \langle v_2 | v_2 \rangle \implies \\ &\implies \Delta = 4 |\langle v_1 | v_2 \rangle|^2 - 4 \langle v_1 | v_1 \rangle \langle v_2 | v_2 \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek (nierówność trójkąta)

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|.$$

**Dowód 5**

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_2 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle = \\ &= \|v_1\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v_1 | v_2 \rangle + \|v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + 2 |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \|v_2\|^2 \leq \\ &\leq_{C.S.} \|v_1\|^2 + 2 \|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2. \end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni  $V$  z iloczynem skalarnym.

- Niech  $u \in V$ . Wówczas  $v \in V \rightarrow \langle u|v \rangle \in \mathbb{F}$  jest elementem  $V^*$ , który oznaczamy  $\phi_u$ .

$$\langle \phi_u, v \rangle = \langle u|v \rangle.$$

**Przykład 3**  $V = \mathbb{R}_3[\times], \phi_u(w) = \int_0^1 u(t)w(t)dt$

Na odwrót:

**Twierdzenie 1**  $\forall_{\phi \in V^*} \exists_{u \in V} !: \phi = \phi_u$

**Dowód 6** Jeżeli  $\phi = 0$ , to  $u = 0$ .

jeżeli  $\phi \neq 0$ , to  $\ker \phi := E \not\subseteq V$ . Wiemy, że  $V = E \oplus E^\perp$ .

Niech  $u \in E^\perp - \{0\} : \langle \phi, u \rangle = 1$ .

Obliczmy  $\langle u|v \rangle = \langle u|v - \langle \phi, v \rangle \cdot u + \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle u| \langle \phi, v \rangle \cdot u \rangle = \langle \phi, v \rangle \|u\|^2$

Podsumowując,  $\left\langle \frac{u}{\|u\|^2} | v \right\rangle = \langle \phi, v \rangle \implies \phi = \phi_{\frac{u}{\|u\|^2}}$ , co daje istnienie. Jedyność: jeśli  $\phi_{u_1} = \phi_{u_2}$ , to  $\phi_{u_1 - u_2} = 0$ . Ale to oznacza, że  $0 = \phi_{u_1 - u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2 | u_1 - u_2 \rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \implies u_1 = u_2$   $\square$