V - wektorowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Na tej przestrzeni mamy iloczyn skalarny $\langle v_1|v_2\rangle \in \mathbb{F}$. Wektory ortogonalne: $v_1 \perp v_2$, jeśli $\langle v_1|v_2\rangle = 0$

Przykład 1 *na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wprowadzamy iloczyn skalarny $\langle u|w\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u}_i w_i$, gdzie $\overline{u}$ - sprzężenie zespolone.*

Mówimy, że baza $\mathcal{E} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V jest ortonormalna, gdy $\langle v_i|v_j\rangle = 0, i \neq j$.
Notacja $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$ - długość wektora v.

Stwierdzenie 1 *Jeśli $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną oraz $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, to $\alpha_i = \langle v_i|v\rangle$.*

Dowód 1 $\langle v_i|v\rangle = \left\langle v_i|\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right\rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_i$

Uwaga: Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.
$f_1, \ldots, f_k$ - układ ortonormalny: $\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j = 0$, to $\alpha_i = \left\langle f_i|\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j\right\rangle = 0$

0.1 Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą V.
Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:
$f_1 = e_1$; $f_1, \ldots, f_k$ - mamy to

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle f_j|e_{k+1}\rangle f_j}{\|f_j\|^2}.$$

Uwaga: (1)
$\langle f_1, \ldots, f_k\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$

Dowód 2 *(indukcyjny)*
Dla $k = 1$ - oczywiste.
$k \implies k+1:$

$$\langle f_1, \ldots, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k+1}\rangle.$$

W szczególności $\underset{k=1,\ldots,n}{\forall} f_k \neq 0$

Uwaga (2)
$f_i \perp f_j$ dla $i \neq j$.

Dowód 3 *(indukcyjny)*
Przypuśćmy, że $i < j$.

$$\begin{aligned}\langle f_i|f_j\rangle &= \left\langle f_i|e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle f_l}{\|f_l\|^2}\right\rangle = \\ &= \langle f_i|e_j\rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l|e_j\rangle}{\|f_l\|^2} \langle f_i|f_l\rangle = \\ &= \langle f_i|e_j\rangle - \frac{\langle f_i|e_j\rangle}{\|f_i\|^2} \langle f_i|f_i\rangle = 0.\end{aligned}$$

Kładąc $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$, dostaję bazę ortonormalną $\{h_1, \ldots, h_n\}$ $\square$

Przykład 2 *Rozważamy przestrzeń wielomianów* $V = \mathbb{R}[\times] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{F} = \{1, x\}$, $\langle v_1 | v_2 \rangle = \int_0^1 v_1(x) v_2(x) dx$. $\quad v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x, v_2 = \beta_1 + \beta_2 x$.
$\langle 1 | x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2}$
$f_1 = 1, \quad f_2 = x - \frac{\langle 1|x \rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2} \implies f_1 \perp f_2$.
Czy h_1 *jest unormowane?* $h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1$.
$h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$. $\quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx = \frac{1}{12}$

0.2 Rzut ortogonalny

Ustalmy podprzestrzeń E przestrzeni V. Niech $E^\perp = \left\{ v \in V : \underset{e \in E}{\forall} v \perp e \right\}$, $E^\perp$ - jest poprzestrzenią wektorową. Zauważmy, że $E \cap E^\perp = \{0\} : v \in E \cap E^\perp$, to $v \perp v : \langle v | v \rangle = 0$.
Ponadto, $E + E^\perp = V$. Ustalmy bazę ortonormalną podprzestrzeni $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$.
Wtedy $v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle e_i | v \rangle e_i}_{\in E} + \left(v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right)$.
Zauważmy $\left\langle e_l | v - \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i \right\rangle = \langle e_l | v \rangle - \langle e_l | v \rangle = 0$. W takim razie

$$v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i | v \rangle e_i \in E^\perp.$$

Wniosek: $V = E \bigoplus E^\perp$. Rzut na E wzdłuż $E^\perp$ nazywamy rzutem ortogonalnym na E i oznaczamy P_E.
Działa tak: $P_E v = \sum_{i=1}^k \langle e_i | v \rangle e_i$.. $E^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni $E^{l=1}$

Stwierdzenie 2 *(Nierówność Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle v_1 | v_2 \rangle| \leqslant \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Dowód 4 *Niech* $\alpha \in [0, 2\pi] : \langle v_1 | v_2 \rangle = e^{i\alpha} |\langle v_1 | v_2 \rangle|$.
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : f(t) = \left\langle te^{i\alpha} v_1 - v_2 | te^{i\alpha} v_1 - v_2 \right\rangle$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left\langle te^{i\alpha} v_1 | te^{i\alpha} v_1 \right\rangle - \left\langle te^{i\alpha} v_1 | v_2 \right\rangle - \left\langle v_2 | te^{i\alpha} v_1 \right\rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle = \\
&= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - te^{-i\alpha} \langle v_1 | v_2 \rangle - te^{i\alpha} \langle v_2 | v_2 \rangle + \langle v_2 | v_2 \rangle \\
&= t^2 \langle v_1 | v_1 \rangle - 2t |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \langle v_2 | v_2 \rangle \implies \\
&\implies \Delta = 4 |\langle v_1 | v_2 \rangle|^2 - 4 \langle v_1 | v_1 \rangle \langle v_2 | v_2 \rangle \leqslant 0.
\end{aligned}$$

□

Wniosek (nierówność trójkąta)

$$\underset{v_1, v_2 \in V}{\forall} \|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Dowód 5

$$\begin{aligned}
&\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 \rangle + \langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_2 \rangle = \\
&= \|v_1\|^2 + 2Re \langle v_1 | v_2 \rangle + \|v_2\|^2 \leqslant \|v_1\|^2 + 2 |\langle v_1 | v_2 \rangle| + \|v_2\|^2 \leqslant \\
&\underset{C.S.}{\leqslant} \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Przestrzeń sprzężona do przestrzeni V z iloczynem skalarnym.

- Niech $u \in V$. Wówczas $v \in V \to \langle u|v\rangle \in \mathbb{F}$ jest elementem V^*, który oznaczamy ϕ_u.

$$\langle \phi_u, v\rangle = \langle u|v\rangle .$$

Przykład 3 $V = \mathbb{R}_3[\times], \phi_u(w) = \int_0^1 u(t)w(t)dt$

Na odwrót:

Twierdzenie 1 $\underset{\phi \in V^*}{\forall} \underset{u \in V}{\exists}! : \phi = \phi_u$

Dowód 6 *Jeżeli* $\phi = 0$, *to* $u = 0$.
jeżeli $\phi \neq 0$, *to* $\ker \phi := E \not\subseteq V$. *Wiemy, że* $V = E \bigoplus E^{\perp}$.
Niech $u \in E^{\perp} - \{0\} : \langle \phi, u\rangle = 1$.
Obliczmy $\langle u|v\rangle = \langle u|v - \langle \phi, v\rangle \cdot u + \langle \phi, v\rangle \cdot u\rangle = \langle u| \langle \phi, v\rangle \cdot u\rangle = \langle \phi, v\rangle \|u\|^2$

Podsumowując, $\left\langle \frac{u}{\|u\|^2} |v \right\rangle = \langle \phi, v\rangle \implies \phi = \phi_{\frac{u}{\|u\|^2}}$, co daje istnienie. Jedyność: jeśli $\phi_{u_1} = \phi_{u_2}$, to $\phi_{u_1 - u_2} = 0$. Ale to oznacza, że $0 = \phi_{u_1 - u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2 | u_1 - u_2\rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \implies u_1 = u_2$ $\square$