Niech $\varphi : V \to \mathbb{F}$. mamy bazy $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$. $\underbrace{([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}})[\varphi]_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\text{reguła transformacyjna dla macierzy form kwadratowych}}$

0.1 Reguła transformacyjna macierzy odwzorowania liniowego

$$A : V \to V \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}, \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: następnych kilka wykładów.
Kończymy wątek o twierdzeniu Sylwestra:
niech φ - dodatnio określona $D_i > 0$.

Definicja 1 *φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dodatnio określona.*

Wniosek: Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^2 D_i > 0$, gdzie $D_i = det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=}$
$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$

Definicja 2 *Odwzorowanie liniowe $A : V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. ($L(V,V) \overset{ozn}{=} L(V)$)*

0.2 Rzuty na podprzestrzenie

Przykład 1 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1, \quad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$. *Zauważmy, że $P_1^2 = P_1$.* $\left([P_1]_{st} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)$

Przykład 2 *Inny rozkład:* $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle \bigoplus \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix}.$$

$$P_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix}, \quad P_2^2 = P_2. \left([P_2]\right)_{st} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ogólniej: Jeżeli przestrzeń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$, to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem:

$$Pu = v.$$

gdzie $u = v + w, v \in V, w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P, W = \ker P, imP = V$

Definicja 3 *Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem, gdy $P^2 = P$*

Stwierdzenie 1 *$P \in L(U), P^2 = P, W = imP, V = imP$. Wtedy $U = V \bigoplus W$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W.*

Dowód 1 *Weźmy $u \in U : u = Pu + (1 - P)u \& Pu \in imP \& (1 - P)u \in \ker P$, gdyż $P(1 - P)u = (P - P^2)u = 0$. Czy $imP \cap \ker P = \{0\}$?*
Jeśli $u \in imP \& u \in \ker P$, to $\underset{x \in V}{\exists} u = Px = PPx = Pu = 0$

Definicja 4 *Jeżeli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią taką, że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A - niezmiennicza.*

Uwaga: Niech V będzię niezmiennicze dla $A : U \to U, \mathcal{E}_0 = \{e_1, ..., e_k\}$ dla bazy V, $\mathcal{E}_1 = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - baza $U \implies [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & * \\ a_{k_1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$