Przykład 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}, \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{4}\left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t}\mathbb{I} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

$$V_1 = ker(A - 1\mathbb{I}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{wektor\ własny \\ o\ wartości\ własnej\ =\ 1}} \right\rangle$$

$$V_{-1} = ker(A + 1\mathbb{I})^2 = ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 1\mathbb{I}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$Rozważmy\ bazę\ \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ - } postać\ jordanowska\ macierzy.$$

$$A \in End(V), \quad Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \quad n_i \text{ - krotności } \lambda_i$$

$$V = \bigoplus V_{\lambda_i}, \quad V_{\lambda_i} = ker(A - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i}$$

$$A = \bigoplus A_i, \text{ gdzie } A_i \in End(V_{\lambda_i}) \text{ taki, że } \quad A_i = A|_{V_{\lambda_i}}.$$

Zauważmy,że

$$A_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}} + \lambda_i \mathbb{I}_{V_i}.$$

gdzie

$$(A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$$

Definicja 1 *Jeżeli $N \in End(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q), to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopniem nilpotentności N.*

Przykład 2

$$W = \mathbb{R}_n[.], \quad N = \frac{d}{dx} \text{ - nilpotent st. n+1.}$$

$$\left\{ n!, n!x, \binom{n}{2} x^2, \ldots, \binom{n}{n-1} x^{n-1}, \binom{n}{n} x^n \right\}$$

$$[N]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2 *Klatką jordanowską nazywamy macierz postaci*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1 *Niech $A \in End(W)$, gdzie w jest nad $\mathbb{C}$, $dimV < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W, w której macierz operatora A jest blokowa, a jej bloki są klatkami jordanowskimi własnymi na diagonali.*

Dowód 1 *Skoro $A = \bigoplus A_i$, $\quad A_i = \lambda_i \mathbb{I}_{V_i} + N_I$, $N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{I}_{V_i})$ - jest nilpotentny stopnia n_i, to wystarczy twierdzenie udowodnić dla operatorów nilpotentnych. Niech $N : W \to W$ - nilpotentny stopdnia q i $N^q = 0$.*
$\underset{i \in \{0,\ldots,q\}}{\forall}$ *niech $W_i = kerN^i$.*

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{q-1} \subset W_q = W.$$

ustalmy $w \in W$. Mówimy, że w ma wysokość i, jeżeli $N^i x$ = 0 oraz $N^{i-1}x \neq 0$.
Zauważmy, że jeżeli x ma wysokość równą i, to układ wektorów

$$\left\{ x, Nx, \ldots, N^{i-1}x \right\}.$$

jest liniowo niezależny.
Rzeczywiście, $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0|_{\substack{N^{i-1} \\ dzialamy \implies x_0}}$
$\alpha_1 Nx + \ldots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0|_{\substack{N^{i-2} \\ dzialamy \implies \alpha_1 = 0}}$ *itd.*
Rozważmy tym razem podprzestrzeń $kerN \cap ImN^{j-1} \subset W$ i zauważmy, że $dimkerN_1 ImN^{j-1} = dimW_j - dimW_{j-1}$.

W tym celu zdefiniujmy operator $F : W_j \to kerN \cap ImN^{j-1}$ *wzorem* $Fx = N^{j-1}x$.
Skoro $imF = kerN \cap ImN^{j-1}$ *oraz* $kerF = W_{j-1}$, *to*
$dimW_j = dimimF + dimkerF = dim(kerN \cap ImN^{j-1}) + dimW_{j-1}$

$$kerF = W_{j-1} \text{ - oczywiste. .}$$

$$ImF = kerN \cap ImN^{j-1} : y \in kerN \cap ImN^{j-1} \implies \underset{x \in ImN^{j-1}}{\exists} : y = N^{j-1}x \text{ oraz } Ny = 0$$
$$\text{to w takim razie } N^j x = 0 \implies x \in W_j \text{ oraz } y = N^{j-1}x = Fx$$
$$kerN \cap ImN^{q-1} \subset kerN \cap ImN^{q-2} \subset \ldots \subset kerN$$
.

Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $m = dimkerN$ *będzie bazą* $kerN$ *zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni.*
Wektor $f_1 \in kerN \cap ImN^{q-1}$ *jest końcówką serii wektorów długości* q.
Oznaczmy $f_i = e_{i1}$ *i niech* $h(i)$ *oznacza wysokość odpowiedniej serii w powyższym sensie. Okazuje się, że*

$$\{e_{ij} : i \in 1, .., m, j \in \{1, \ldots, h(i)\}\} \text{ jest bazą } W_i \quad \Box.$$