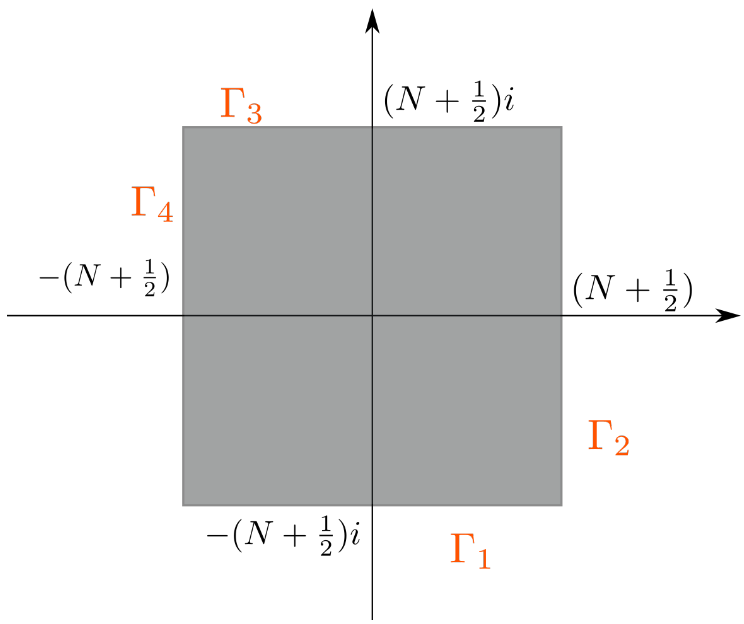
0.1 Sumowanie szeregów



Rysunek 1: Kontur Γ

Stwierdzenie 1. *Niech Γ - kontur przechodzący przez wierzchołki*

$$\left(N \pm \frac{1}{2}\right)(1 \pm i) \quad (\textit{Rysunek } 1).$$

I niech $f(z)$ - taka, że

$$\underset{M}{\exists} \quad \underset{|z|>M}{\forall} \quad |f(z)| < \frac{const}{|z|^2},$$

$f(z)$ nie ma biegunów na Γ oraz nie ma biegunów dla $z \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Gamma f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0.$$

Dowód. Oszacujemy $\operatorname{ctg}(\pi z)$.
Dla $z \in \Gamma$

a) Jeżeli $z \in \Gamma_4$ lub Γ_2, to

$$\Gamma_2 = \left\{ y \in \left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}\right], z = N + \frac{1}{2} + iy \right\}.$$

$$\Gamma_4 = \left\{ y \in \left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = -(N + \frac{1}{2}) + iy \right\}.$$

$$|\mathrm{ctg}(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \cdot \left| \frac{2i}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}} \right|.$$

Dalej mamy dla $\left| e^{iN\pi} \right| = 1$

$$\left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}} \right| \tag{Δ}$$

Obserwacja:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = 1.$$

Zatem

$$|(\Delta)| \leqslant \frac{2\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi N} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} \leqslant \frac{2\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} < \text{const.}$$

b) Analogicznie pokażemy, że $\mathrm{ctg}(\pi z)$ jest ograniczony dla $z \in \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$. Zatem

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{ctg}(\pi z) dz \right| \leqslant \left| \max_{z \in \Gamma} f(z) \right| \cdot |8N + 4| \cdot \text{const} \underset{N > M}{\leqslant} \frac{\text{const}}{N^2}(8N+4) \cdot \text{const} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Wniosek:
Niech b - zbiór wszystkich biegunów $f(z)\, \mathrm{ctg}(\pi z)$

$$0 = \lim_{N \to \infty} \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{ctg}(\pi z) dz = 2\pi i \sum_b \mathrm{Res}\left(f(z)\, \mathrm{ctg}(\pi z) \right) = 0.$$

Pytanie 1. *W jakich punktach* $\mathrm{ctg}(\pi z)$ *ma bieguny i którego rzędu?*

Zauważmy, że

$$\frac{(\pi z - 0\pi)\cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \underset{z \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}.$$

A np.

$$\lim_{z \to n} \frac{(z - n)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \overset{H}{=} \lim_{z \to n} \frac{\cos(\pi z) - (z - n)\pi \sin(\pi z)}{\pi \cos(\pi z)} \underset{z \to n}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}.$$

Wiemy, że

$$\sum_b \mathrm{Res}\, f(z)\, \mathrm{ctg}(\pi z) = 0,$$

czyli

$$0 = \sum_c \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) + \sum_d \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

gdzie c - bieguny $\operatorname{ctg}(\pi z)$, d - bieguny $f(z)$. Zatem

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_d \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

Przykład 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \quad ?$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Rozdzielmy sobie sumę na dwie:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}f(n) + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{\pi}f(n)}_{bieguny\ \operatorname{ctg}(\pi z)\ bez\ 0} + \operatorname*{Res}_{z=0} \quad f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}n^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \quad f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}.$$

Obserwacja: Niech $P = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$. Niech D - zbiór biegunów $f(z)$ na Ω i f - holomorficzna na $\Omega - D$. Wówczas $\frac{f'}{f}$ ma na Ω bieguny pierwszego rzędu dla $z \in P \cup D$

Dowód. Niech $z_0 \in P$. Oznacza to, że

$$f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots,$$

gdzie $k \geqslant 1$. Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{ka_k(z-z_0)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z-z_0)^k + \ldots}{a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z-z_0) + \ldots}{a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \ldots}.$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)f'}{f} = k.$$

Czyli $\frac{f'}{f}$ ma w $z_0 \in P$ biegun pierwszego rzędu i wynosi k. $\square$

Niech $z_1 \in D$, f ma w $z = z_1$ biegun n - tego rzędu. Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}} + \ldots.$$

Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{-na_{-n}}{(z-z_1)^{n+1}} + \frac{-(n-1)a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^n} + \ldots}{\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}} + \ldots} = \frac{1}{(z-z_1)} \frac{\left[-na_{-n} + -(n-1)a_{-(n-1)}(z-z_1) + \ldots\right]}{\left[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-z_1) + \ldots\right]}.$$

$$\lim_{z \to z_n} \frac{f'}{f}(z - z_1) = -n.$$

Wniosek:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} = \sum_{z \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_1 \in P} \frac{f'}{f}.$$