Dystrybucje

Definicja 1. *Niech D - przestrzeń funkcji klasy $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ o zwartym nośniku. Czyli*

$$\underset{K\subset\mathbb{R}}{\exists}, K \text{ - domknięty}, \quad \underset{\varphi\in D}{\forall} \quad \underset{x\notin K}{\forall} \varphi(x)=0.$$

Przestrzeń D nazywamy przestrzenią funkcji próbnych.

Przykład 1. $\varphi \in D$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}.$$

Przestrzeń dualną do D oznaczymy przez $D^{\star}$

Definicja 2. *Funkcjonał liniowy z przestrzeni $D^{\star}$ nazywamy dystrybucją.*
Oznaczenia: *jeżeli $T \in D^{\star}$, $\varphi \in D$, to*

$$T(\varphi) \overset{ozn}{=} \langle T, \varphi \rangle .$$

Przykład 2. *Niech*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

T_{θ} jest dystrybucją. Wówczas

$$\langle T_{\theta}, \varphi \rangle \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Oznacza to, że jeżeli f - funkcja na $\mathbb{R}$, to możemy z nią związać dystrybucję $T_f \in D^{\star}$ taką, że

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Definicja 3. *Niech $T \in D^\star$, wówczas przez T' oznaczymy dystrybucję o następującej własności*

$$\underset{\varphi \in D}{\forall} \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle .$$

Uwaga: powyższa definicja spełnia warunek

$$(T_f)' = T_{f'},$$

bo

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Dalej

$$\left\langle T_f', \varphi \right\rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Definicja 4. *Niech $\delta \in D^\star$. Dystrybucję δ nazywamy deltą Diraca i definiujemy tak:*

$$\langle \delta, \varphi \rangle \overset{def}{=} \varphi(0).$$

Analogicznie,

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle \overset{def}{=} \varphi(a).$$

Definicja 5. *Czasami pojawiają się takie oznaczenia (konwencje):*

$$\delta = \delta(x)$$
$$\delta_a = \delta(x-a)$$
$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$$
$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx.$$

Można też znaleźć takie napisy:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Obserwacja:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} 7\delta(x)dx = 1 \neq 7 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 7,$$

a ona miała być elementem przestrzeni liniowej.

Policzmy $(T_\theta)'$.

$$\langle T_\theta', \varphi \rangle = -\langle T_\theta, \varphi' \rangle .$$

Prawa strona:

$$-\langle T_\theta, \varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty =$$
$$= -\lim_{x\to\infty} \varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

$$(T_\theta)' = \delta.$$

$$"\theta' = \delta".$$

Ale to nie ma sensu, ale na poziomie

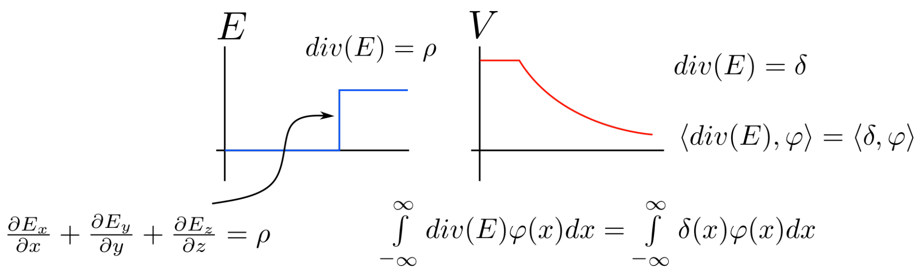
$$\underset{\varphi \in D}{\forall} \langle T_{\theta'}, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

też nie, ale trochę mniej.

$$\left\langle (T_\theta)', \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

sens ma, ale w literaturze pojawiają się wszystkie 3 napisy.

Przykład 3. *Niech E - pole elektryczne.*



Rysunek 0.1: Dlaczego fizycy lubią deltę Diraca?

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Definicja 6. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka, że dla $x = a$*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) = \sigma.$$

(Kiedyś poważniejszą wersję tego nazywaliśmy wahaniem funkcji)

Policzmy $(T_f)'$

$$\left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$
$$= -\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx =$$
$$= -f(x)\varphi(x)\Big|_a^{\infty} + \int\limits_{a}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx +$$
$$- f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{a} + \int\limits_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx =$$
$$= \lim_{x\to a^+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)\varphi(x) +$$
$$+ \underset{\text{bez } x=a'}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}} f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{\sigma\varphi(a) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\}\,\varphi(x)dx}_{\clubsuit} =$$
$$= \left\langle \sigma\cdot\delta + T_{\{f'\}}, \varphi \right\rangle.$$

Czyli niepoprawnie piszemy tak:

$$f' = \sigma\cdot\delta + \{f'\}$$

i rozumiemy w sensie $\clubsuit$

Przykład 4. *Rozwiązać równanie*

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = \delta(x-a).$$

Bierzemy dwie funkcje:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= A_1\sin(\omega x) + B_1\cos(\omega x) && x < a\\
f_2(x) &= A_2\sin(\omega x) + B_2\cos(\omega x) && x > a\\
f_1(a) &= f_2(a)\\
\lim_{x\to a} f_2'(x) - f_1'(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega a) + B_1 \cos(\omega a) &= A_2 \sin(\omega a) + B_2 \cos(\omega a) \\ \omega A_1 \cos(\omega a) - B_1 \omega \sin(\omega a) &= \omega A_2 \cos(\omega a) - B_2 \omega \sin(\omega a) - 1. \end{aligned}$$

W szczególności ($B_1 = 0,\ A_2 = 0$)

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega a) &= B_2 \cos(\omega a) \\ \omega A_1 \cos(\omega a) &= -B_2 \omega \sin(\omega a) - 1. \end{aligned}$$

Więc

$$f(x) = \begin{cases} ---------- & x > a \\ ---------- & x < a \end{cases}.$$

Zastosowania

Mamy coś takiego

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = h(t). \tag{$\star$}$$

Wiemy, że $f''(t) + \omega f(t) = \delta(x - a)$. Niech

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds = \langle T_f, h_t \rangle .$$

Czym jest $\dot{x}(t)$?

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}(t), \varphi \rangle &= \langle T_{f'}, \varphi \rangle , \\ \langle \ddot{x}(t), \varphi \rangle &= \langle T_{f''}, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \langle x'' + \omega x', h \rangle = \left\langle T_{f'} + \omega^2 T_f, h \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left((f'' + \omega^2 f)h \right) = \\ = \langle \delta(t,a), h \rangle = h(t). \end{aligned}$$