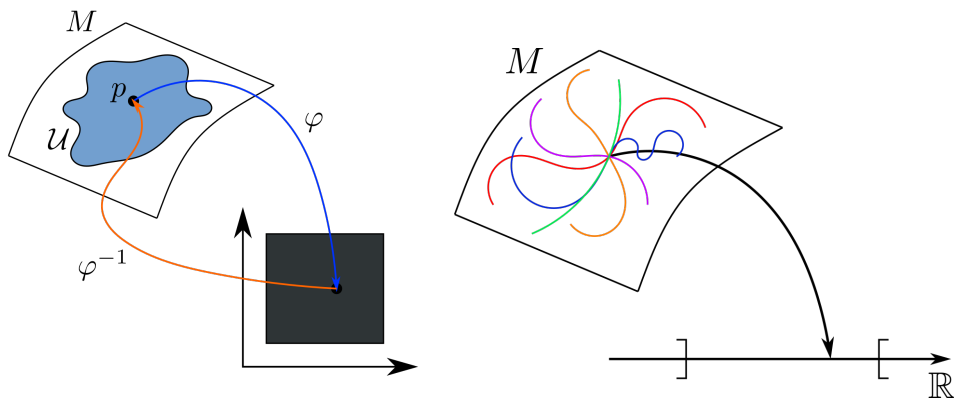


Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

1 Wykład (04.10.2019)

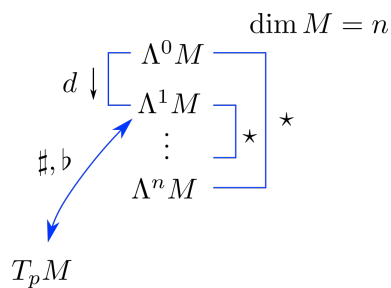
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p M$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\# = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_p M$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_p M$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\langle A^\sharp, B \rangle, \quad (g_{ij} - \text{diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle A^\sharp, B \rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \dots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B. \end{aligned}$$

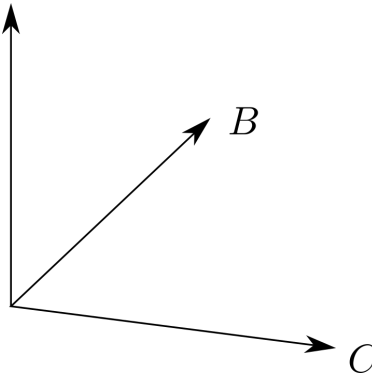
Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\langle A^\sharp, B \rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B .
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_p M.$$

$$\begin{aligned} \langle A, B, C \rangle &= A^1 \langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \rangle + A^2 \langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \rangle + A^3 \langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \rangle = \\ &= A^1 \left[\left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, C \right\rangle \right] + A^2 \left[\left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, C \right\rangle \right] + A^3 \left[\left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, C \right\rangle \right] = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 (B^2 C^3 - B^3 C^2) + A^2 (B^3 C^1 - B^1 C^3) + A^3 (B^1 C^2 - B^2 C^1) = \\ &= "A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3" = "A \cdot (B \times C)" \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Wychodzi tak jak na (rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

1.3 Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w \mathbb{R}^3 (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B .

1. sparametryzujemy kształt S , np.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{array} \right\}.$$

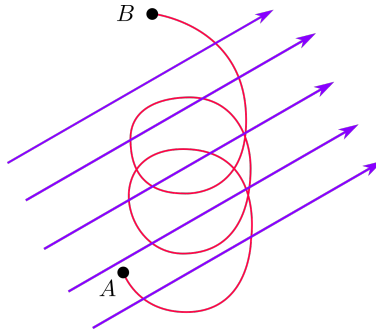
2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \left[\begin{array}{c} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{array} \right] \Big|_{t=t_0}$, to

$$T_p M = \left\langle \left[\begin{array}{c} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{array} \right] \right\rangle \Big|_{t=t_0}.$$

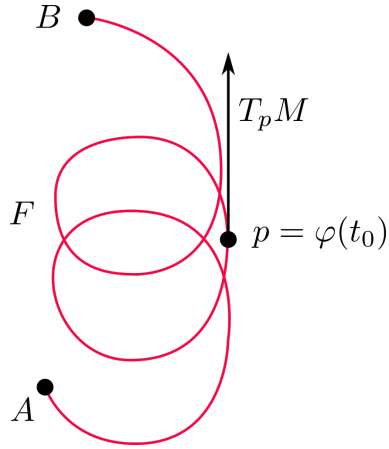
(rys 5)

3. Niech $T_p M \ni v = -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)
Możemy policzyć np.

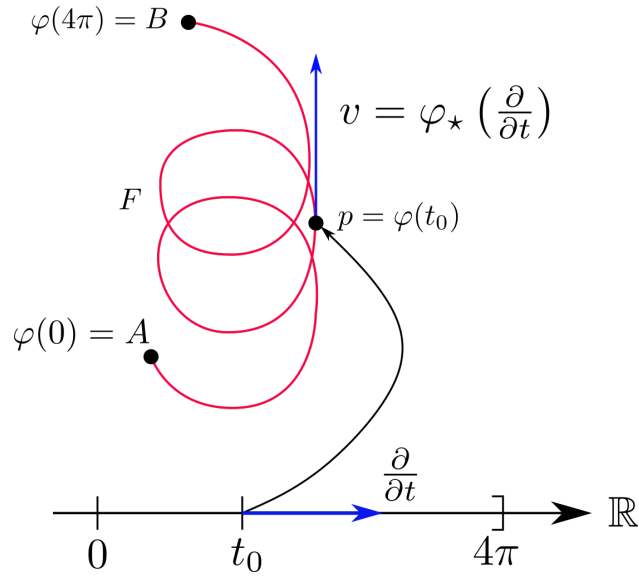
$$\begin{aligned} \int \langle F, v \rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^* F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



Rysunek 6

Definicja 1. Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M , $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ - parametryzacja krzywej L , czyli

$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

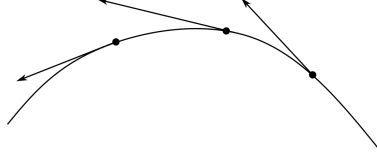
$$\int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Przykład 1. niech (rys 8)

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

i

$$\omega = ydx = \left(y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\#.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Wtedy mamy $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$, $\varphi^*\omega = \begin{vmatrix} x=t-1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = [t^2 - t]_1^2 = 2$$

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

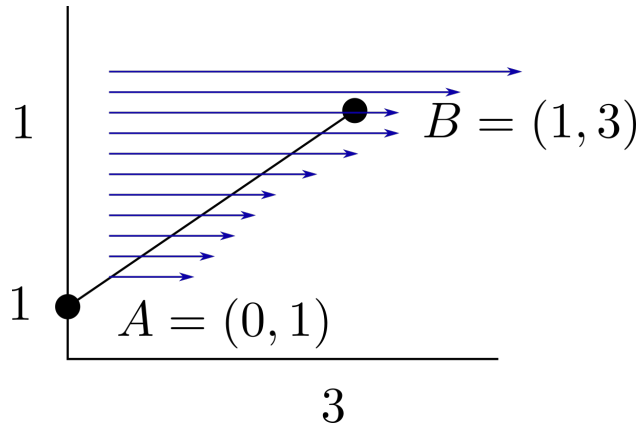
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^*\omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\frac{x=2-u}{dx=-u}$ i mamy

$$\varphi^*\omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = [u^2 - 5u]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



Rysunek 8

2 Wykład (07.10.2019)

2.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

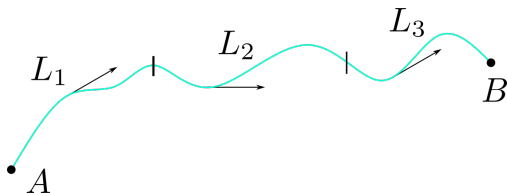
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$,

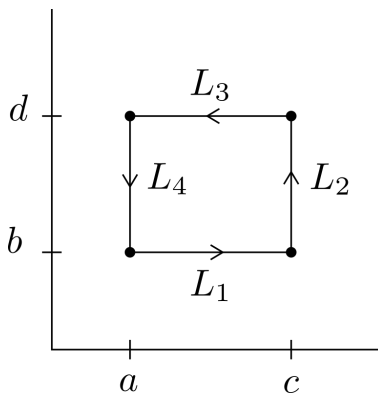
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 9)



Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. (rys 10)



Rysunek 10: $\dim M = 2$

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$\begin{aligned}
\int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\
&= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\
&= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x, d) dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a, y) dy.
\end{aligned}$$

(rys 11)

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).

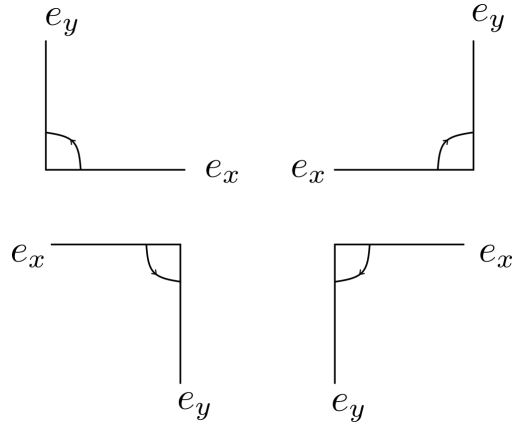


Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)

$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.

(rys 12)



Rysunek 12: Różne orientacje na \mathbb{R}^2 , czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 2. Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera.

Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V .

Definicja 3. Orientację standardową na \mathbb{R}^n nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$

Definicja 4. Niech M - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i

$S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma.

Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. do 7:

weźmy $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ i obliczmy $\int \int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \int \int_P d\omega &= \int \int_{[a, b] \times [c, d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\ &= \int_c^d dy (B(b, y) - B(a, y)) - \left[\int_a^b dx (A(x, d) - A(x, c)) \right] = \\ &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy - \int_a^c A(x, d) dx - \int_c^d B(a, y) dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int \int_P d\omega = \int_L \omega,$$

to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. niech (sytuacja jak na rys 13) $S = S_1 \cup S_2$, gdzie

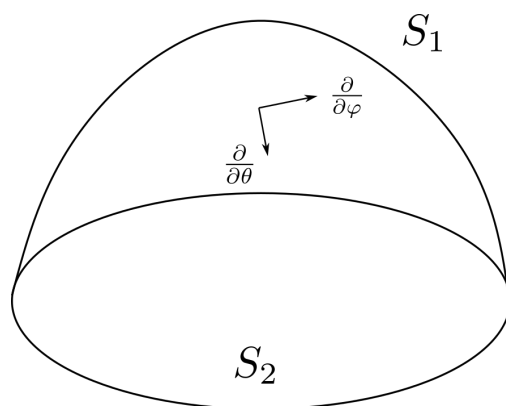
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$

Definicja 5. Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map (U_i, φ_i) , że dla każdej pary $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ takiej, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, odwzorowanie $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$.

Definicja 6. Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowaną.



Rysunek 13: Tak to wygląda

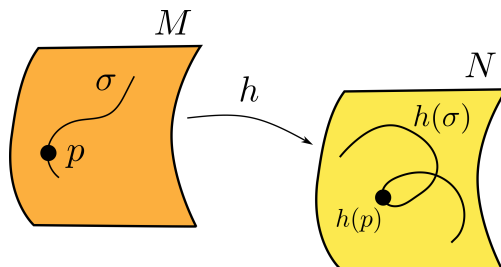
Definicja 7. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

3 Wykład (11.10.2019)

3.1 Przypomnienie

(rys 1)

Dla $v \in T_p M$, jest



Rysunek 14: Przypomnienie

$$h_* v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t)) \sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt} \sigma(t)$,

$$h_* v = \begin{matrix} h'(\sigma(t)) \\ \text{macierz kwadratowa} \end{matrix} v.$$

Przykład 5. Niech

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\} \cap S^2.$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\} \cap S^2.$$

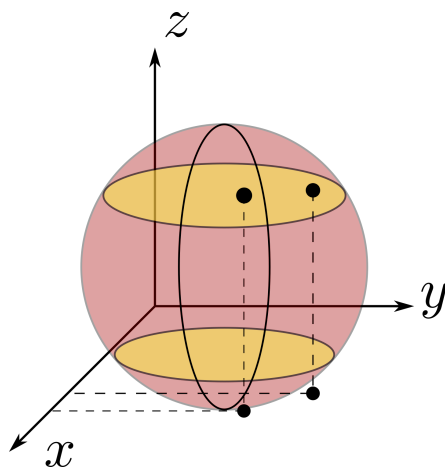
$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\} \cap S^2.$$

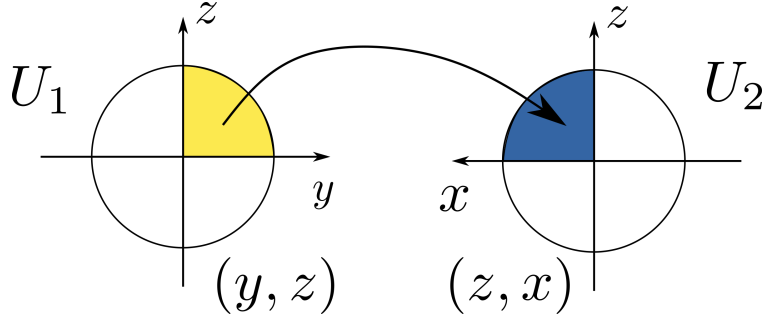
$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



Rysunek 15: fig3-2



Rysunek 16: fig3-3

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z$$

$$(x > 0, z > 0).$$

$$(z, x) \rightarrow h(z, x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) & \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (z) & \frac{\partial}{\partial x} (x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

Przykład 6. Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R . (rys 4)

$$\begin{aligned} x(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sin \theta \\ y(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cos \theta \\ z(\theta, t) &= \left(t \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.

Mamy θ' i t' .

$$\begin{aligned} x'(\theta', t') &= \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \cos \theta' \\ y'(\theta', t') &= - \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \sin \theta' \\ z'(\theta', t') &= t' \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right). \end{aligned}$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi \right\} \\ W_2 &= \left\{ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\} = \left\{ 0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi \right\}. \end{aligned}$$

Dla W_1

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

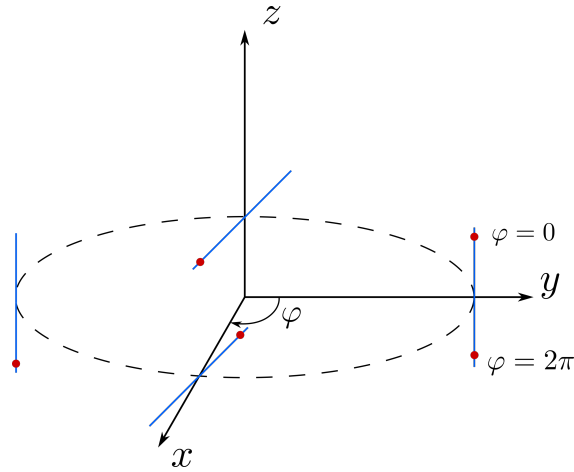
dla W_2

$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

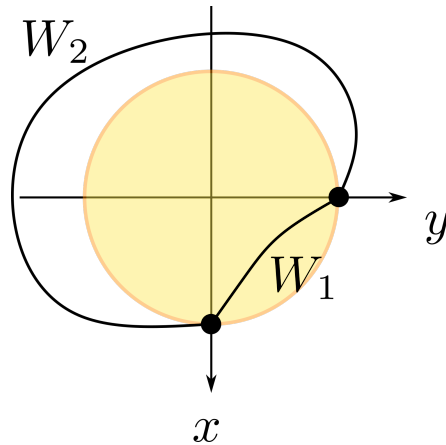
Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi'_1(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi'_2(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \varphi'_1 < 0 \quad \det \varphi'_2 > 0.$$



Rysunek 17: Gdzie wylądzie biedronka idąc prosto po wstędze?



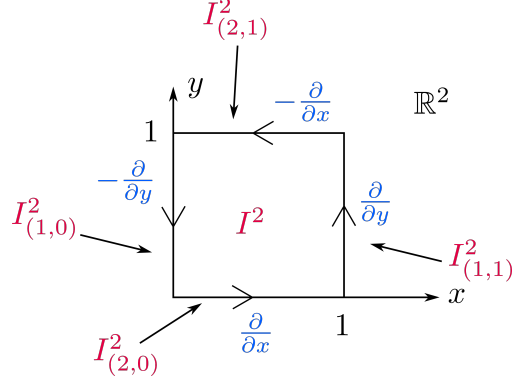
Rysunek 18: Obszary wspólne

3.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w \mathbb{R}^n

1. Niech $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)

Wprowadźmy oznaczenia:

$$I_{(i,0)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$



Rysunek 19: fig3-6

$$I^n_{(i,1)} := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$

(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)} - I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)},$$

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)

- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.

Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n .

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned} \omega = & f_1(x^1, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbija się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{(j,\alpha)}} \left\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \\ &\quad dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{(j,\alpha)}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

4 Wykład (14.10.2019)

4.1 Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega = f(x^1, \dots, x^n) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$. Wtedy dla $x = (x^1, \dots, x^n)$ i $d\tilde{x} = dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n$

$$\begin{aligned} & \int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\ & = \begin{cases} 0 \\ \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) d\tilde{x} = \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) \end{cases} \stackrel{(*)}{=} \text{wp.p.} \\ & \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\ &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \\ &= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) + (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, dx^1, \dots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ & \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ & \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] = \\ &= (-1)^{i+1} \int_{I^n} [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)]. \end{aligned}$$

$$LHS = RHS.$$

□

Uwaga: Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek I^n . Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

Przykład 7. Niech $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ i $f \in \Lambda^0([a, b])$. Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak ($x D$):

$$\int_{\partial[a, b]} f = \int_{[a, b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

Przykład 8. Niech γ - krzywa na M , $\dim M = 3$, $f \in \Lambda^0 M$.

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Przykład 9. $\dim M = 2$, niech $\alpha = xydx + x^2dy$. Policzmy $\int_{\partial S} \alpha$.

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha + \int_{C_3} \alpha,$$

ale

$$\int_{C_1} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

φ - parametryzacja C_1 . Jeżeli weźmiemy sobie

$$\int_{C_3} \left\langle \varphi_3^* \alpha, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

φ_3 - parametryzacja C_3 .

$$C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

zatem $\varphi_2^* \alpha$ przy $x = \cos \theta \implies dx = -\sin \theta d\theta$, $y = \sin \theta \implies dy = \cos \theta d\theta$, mamy

$$\varphi_2^* \alpha = \cos \theta \sin \theta (-\sin \theta d\theta) + (\cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta.$$

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\langle \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$.

$$d\alpha = xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy.$$

$$\int_{\square} \left\langle xdx \wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx \cdot x \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Przykład 10. Niech $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Lambda^1(M)$, $\partial K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta, 2\pi \right\}$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^* \alpha = -\sin \theta (-\sin \theta) d\theta + \cos \theta \cos \theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$d\alpha = \left[\left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} \right) dy \wedge dx + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx \wedge dy \right] = \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy = 0$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech $\alpha = x^2 dx + xy dy + 2dz$. α jest potencjalna, jeżeli

$$\exists_{\eta \in \Lambda^0 M} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

Definicja 8. Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$,

$$i_v : T_p M \times \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1. $i_v f = 0$, jeżeli $f \in \Lambda^0 M$
2. $i_v dx^i = v^i$, jeżeli $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3. $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$.

Operację i_v nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \stackrel{ozn}{=} v(odwrocone L)\omega.$$

Obserwacja: $i_v(i_v \omega) = 0$ (w domu)

Przykład 11. Niech $v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v(odwrocone L)\omega = \langle dx, v \rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v \rangle + \langle dz, v \rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v \rangle.$$

Przykład 12.

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e \frac{\partial}{\partial t} + ev^x \frac{\partial}{\partial x} + ev^y \frac{\partial}{\partial y} + ev^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j(odwrocone L)F = ?.$$

5 Wykład (18.10.2019)

Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

Przykład 13. Niech $X = \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2.$$

Niech M - rozmaitość, $\dim M = 2$. Co oznacza napis

$$x \lrcorner \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t) \frac{\partial}{\partial x} + p(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dx = dH,$$

a teraz coś takiego:

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m} dp + kx^2 dx.$$

To wypłyje na wyjściu równania ruchu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}, & \dot{p}(t) &= -kx \\ m \frac{dx}{dt} &= p, & \frac{dp}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

5.1 Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:

(rys 5-1) Niech $I = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x, y) = |x - y|$) czy I jest otwarty w \mathbb{R} ? *chyba nie*.

Niech $I = [0, 1[\subset [0, 2]$, czy I jest otwarty w $[0, 2]$? *chyba tak*.

$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

Definicja 9.

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Niech M - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości M składa się z takich map φ_α , że

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}_+^m,$$

(\mathcal{O} - otwarty w M), gdzie $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ - otwarte w \mathbb{R}_+^m , to M nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli $p \in M$ i $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}_0^m$, to mówimy, że p należy do brzegu M .
(brzeg rozmaitości M oznaczamy przez ∂M)

Pytanie 1. Co to jest różniczkowalność φ^{-1} , jeżeli dziedzina $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}_+^m$, który nie jest otwarty w \mathbb{R}^m ?

Mówimy wówczas tak:

Definicja 10. Niech $U \subset \tilde{U}$, \tilde{U} - otwarty w \mathbb{R}^m , U - otwarty w \mathbb{R}_+^m . φ jest klasy C^r na U , jeżeli istnieje $\tilde{\varphi}$ klasy C^r na \tilde{U} i $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$.

(rys 5-3)

Pytanie 2. Czym jest ∂S , jeżeli S - okrąg?

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.

Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

sześcian $\xrightarrow{\partial}$ boki sześciianu $\xrightarrow{\partial}$ rogi sześciianu,

kula $\xrightarrow{\partial}$ sfera $\xrightarrow{\partial} \{\phi\}$.

Obserwacja:

Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętych do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m - 1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 11. Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ - baza $T_p \partial M$, wybierzmy orientację na M (rys 5-5).

Niech σ - krzywa na M taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

niech $\bar{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M , jeżeli orientacja $\langle \bar{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ jest zgodna z orientacją M .

(rys 5-6) Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \rightarrow T$ - parametryzacja T oraz $\varphi_2 : U_2 \rightarrow T$ - parametryzacja T . Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\exists_h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^* \omega = \int_{U_2} h^* (\varphi_1^* \omega) \stackrel{?}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^* \omega = \int_{U_2} \varphi_2^* \omega.$$

(Δ) - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^* \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_* v \rangle = \langle k^* \omega, L_* v \rangle = \langle L^* k^* \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt} \bar{\sigma}$ to

$$(kL)_* v = \frac{d}{dt} (k(L(\bar{\sigma}(t)))) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_* L_* v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

5.2 Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.

Obserwacja:

$$\eta = \arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$

6 Wykład (21.10.2019)

Definicja 12. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór \mathcal{O} nazywamy *ściągłym*, jeżeli istnieje $p \in \mathcal{O}$ i odwzorowanie $h(p, x, t)$ takie, że

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \begin{aligned} h(p, x, 0) &= p \\ h(p, x, 1) &= x, \end{aligned} \quad \forall_{t \in [0,1]} h(p, x, t) \in \mathcal{O}, \quad h(p, x, t) - \text{ciągła}.$$

Twierdzenie 1. (rys 6-1) (Lemat Poincare)
Niech

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{O} - \text{zbiór ściągły} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} \exists_{\eta} d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{array} \right).$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór \mathcal{O} jest zbiorem gwiazdistym, czyli

$$\exists_{p \in \mathcal{O}} \quad \forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{array} \right) \text{ (jest zawarty w } \mathcal{O} \text{)}.$$

Obserwacja: gdyby istniał operator $T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \rightarrow \Lambda^{p-1}(\mathcal{O})$, $p = 1, 2, \dots, n-1$, taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byłoby prawdziwe. (bo dla $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$ mielibyśmy $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$).

Wtedy, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 (t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)) dt,$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ spełnia warunek $Td + dT = id$.

Przykład 14. $\omega \in \Lambda^1(M)$, $\dim M = 3$, $\omega = xdx + ydy + zdz$. Wówczas, gdy $(\bar{x} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$ jest

$$T(\omega) = \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz}_{\omega(tx)}, \bar{x} \right\rangle dt = \int_0^1 t^0 (tx^2 + ty^2 + tz^2) dt = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \eta.$$

Zauważamy, że $d\eta = \omega$ i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał). (rys 6-2)

Przykład 15. $\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$, $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\dim M = 3$. Co to jest $T\omega$?

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner (xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 (xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx) dt = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 dy - xydx + y^2 dz - yzdy + z^2 dx - z^2 dx) = \eta \end{aligned}$$

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \\ \omega &= \omega_{12} d^{i_1=1} x \wedge d^{i_2=2} y + \omega_{23} d^{i_1=2} y \wedge d^{i_2=3} z + \omega_{13} d^{i_1=1} x \wedge d^{i_2=3} z. \\ d\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.\end{aligned}$$

Liczymy

$$\begin{aligned}Td_{p+1} \omega_{\text{forma}} &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\text{brak } dx^{i_\alpha}}{\dots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{i_\alpha-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T\omega &= \int_0^1 t^{p-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\text{bez } dx^{i_k}}{\dots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.\end{aligned}$$

Zatem dodajemy do siebie $Td\omega + dT\omega$ i wychodzi

$$\begin{aligned}Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \int_0^1 dt p \cdot t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &= \int_0^1 dt \left(\frac{d}{dt} (t^p \omega(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \right) = t^p (\omega(tx^1, \dots, tx^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega.\end{aligned}$$

□

7 Wykład (25.10.2019)

Definicja 13. Jeżeli $\alpha \in \Lambda^k(M)$ taka, że $d\alpha = 0$, to mówimy, że α jest domknięta. Jeżeli \exists_η taka, że $d\eta = \alpha$, to mówimy, że α jest zupełna.

Przykład 16. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$.

Dla $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, jest $d\omega = 0$. Było, że $\eta = \text{artctg}(\frac{x}{y})$, $d\eta = \omega$. Problem leży w punkcie $(0, 0)$ bo nie należy do dziedziny.

(rys 7-1)

7.1 Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$, który jest w koszarnej bazie $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$, ale można go zamienić na coś fajniejszego $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Dla trójki wektorów v_1, v_2, v_3 , ich $|v_1, v_2, v_3|$ to objętość.
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$\text{vol}(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = \det(A) \det(A^T) = \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = G(v_1, v_2, v_3).$$

Definicja 14. Niech M - rozmaitość i γ krzywa na M .

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a, b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}.$$

Przykład 17. (rys 7-2) M takie, że $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a, b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji na (rys 7-3) jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leq x \leq x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \middle| \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe (rys 7-4)

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} \middle| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j$, dalej jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left(\frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.
Niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{bmatrix} \mid a \leq t_1 \leq b, \quad c \leq t_2 \leq d \right\}.$$

$$\|D\| = \int \text{vol} \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

Przykład 18. Niech

$$D = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \right).$$

Liczymy $\text{vol}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

$$vol\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left\| \begin{bmatrix} 1 + (f,x)^2 & (f,x)(f,y) \\ (f,x)(f,y) & 1 + (f,y)^2 \end{bmatrix} \right\| = (1 + (f,x)^2)(1 + (f,y)^2) - (f,x)^2(f,y)^2.$$

$$\|D\| = \int_a^b \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}_{ds} dx dy.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Niech A - wektor w bazie ortonormalnej. Dla $\dim M = 3$, $g = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$,

$$A = A^1 \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech $\alpha = A^\# \in \Lambda^1(M)$, γ - krzywa na M .

$$\alpha = g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} dx^1 + g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} dx^2 + g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} dx^3.$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A^\# = \int_\gamma \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \frac{\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}}{\left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\|} \right\rangle \left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt.$$

Niech $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Pytanie: czym jest $\langle \alpha, v \rangle$?

$$\langle \alpha, v \rangle = A^1 \sqrt{g^{11}} g_{11} v^1 + A^2 \sqrt{g^{22}} g_{22} v^2 + A^3 \sqrt{g^{33}} g_{33} v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\# = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.

Niech $V \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim V = 3$. Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech $S \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim S = 2$.

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

Pytanie 3. Niech $\alpha = A^\#$, czym jest $\int_S dA^\#$?

$$dA^\# = \underbrace{\left((g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}})_{,2} - (g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}})_{,3} \right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 + \underbrace{\left((g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}})_{,3} - (g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}})_{,1} \right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\dots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2.$$

$$\int_S dA^\# = \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle + \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle.$$

$$\int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|}_{ds} dx^2 dx^3 + \dots$$

Pamiętamy, czym była $rot(A) = (\star dA^\#)^\flat = \int (rot(A)) \mathbf{n} ds$

8 Wykład (28.10.2019)

8.1 W ostatnim odcinku

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^{\sharp} = \left(\overbrace{(\cdot), -(\cdot)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots$$

$$\int_S dA^{\sharp} = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^{\sharp} \right) \right)^{\flat},$$

ale

$$\begin{aligned} \star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\ \star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\ \star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^{\sharp} = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned} (\star dA^{\sharp})^{\flat} &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Czyli dla \vec{A} - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot \vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g^{22} g^{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{33}}} \\ D^3 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}}$, ale

$$\left(rot \vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{22} g^{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^{\sharp} = \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A^{\sharp} &= \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \\ \int_S dA^{\sharp} &= \int_{\partial S} A^{\sharp}. \\ \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds &= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \end{aligned}$$

Przykład 19. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

Pytanie 4. *czym jest $\int_{\partial V} \star A^\sharp$?*

$$\begin{aligned} & \star(dx^1)\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3, \\ & \star(dx^2)\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1, \\ & \star(dx^3)\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\star A^\sharp = A^1 g_{11} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1 + A^3 g_{33} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \int A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 dx^2,$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

Pytanie 5. *Jak wygląda $\int_V d \star A^\sharp$?*

$$\int_V d \star A^\sharp = \int_V \left\langle (A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}})_{,1} + (A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}})_{,2} + (A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}})_{,3}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^1 dx^2 dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \star d (\star A^\sharp),$$

wiemy, że

$$\star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$\operatorname{div} \vec{A} \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

8.2 Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)

(rys 8-2)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt}e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

Definicja 15. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, \mathcal{O} - otwarty. $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$.

Mówimy, że f jest holomorficzną na \mathcal{O} jeżeli $\forall_{z \in \mathcal{O}}$ istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z),$$

gdzie $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga: jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z \mathbb{R}^2 .

Uwaga: dowolną funkcję z \mathbb{C} możemy zapisać jako $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$, gdzie $z = x + iy$ a $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

Przykład 20. $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$, $z = x + iy$

Pytanie 6. Co to znaczy różniczkowalność?

ma istnieć granica (dla $h \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np. $h = it$, to wtedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x, y+t) - P(x, y)}{it} + i \frac{Q(x, y+t) - Q(x, y)}{it} = \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli f - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned}$$

Przykład 21. (jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i \underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy f jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

Przykład 22.

$$\alpha = Q(x, y)dx + P(x, y)dy,$$

gdzie P, Q są takie, że $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

Pytanie 7. Niech $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(x, y) = c \in \mathbb{R}\}.$$

$$Q_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q(x, y) = d \in \mathbb{R}\}.$$

9 Wykład (04.11.2019)

9.1 Refleksja

Czy to

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest fajne?

Przykład 23. (fig 9-1)

$$\nabla P = \left[\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right],$$
$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y} \right],$$

to możemy zrobić takie coś:

$$"(\nabla P \cdot \nabla Q)" = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Twierdzenie 2. f - holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, \mathcal{O} - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy f - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.

Dowód. \implies było

\Leftarrow Zauważmy, że skoro $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna na $U \subset \mathbb{R}^2$, czyli dla $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ jest

$$\underbrace{F(x + h_1, y + h_2) - F(x, y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

$$\frac{r(x, y, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Czyli

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(x + h_1, y + h_2) - P(x, y) \\ Q(x + h_1, y + h_2) - Q(x, y) \end{bmatrix}}_{\Delta Q} \stackrel{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= P(x+h_1, y+h_2) + iQ(x+h_1, y+h_2) - (P(x, y) + iQ(x, y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2) + r = \\ &= (a+ib)(h_1 + ih_2) + r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z h do 0, to $\frac{r}{h} \rightarrow 0$, więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

□

Stwierdzenie 1. Niech $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \rightarrow U \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na \mathcal{O} , a $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ - holomorficzna na U . Wówczas $g \circ f$ - holomorficzna na \mathcal{O} .

Dowód.

$$(g \circ f)' = g'(f)f' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1b \\ a_1b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -(a_1b + ab_1) \\ a_1b + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{bmatrix},$$

a tak wygląda macierz pochodnej f - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). □

9.2 Oznaczenia

(fig 9-3)

niech $M \subset \mathbb{R}^2$, $\langle dx, dy \rangle = T_p^*M$. Wprowadźmy

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Jeżeli $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, to

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z}.$$

Obserwacja: niech $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

Przykład 24. $f(z) = z^2 = z \cdot z$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

a $g(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = z \neq 0.$$

Czyli g - nie jest holomorficzna

Przykład 25. (fig 9-4)

Obliczmy całkę:

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left| \frac{z = re^{i\theta}}{dz = rie^{i\theta} d\theta} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Stwierdzenie 2. Jeżeli f - holomorficzna na \mathcal{O} i $\Omega \subset \mathcal{O}$, to

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\Omega} d(f dz) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

Twierdzenie 3. (wzór Cauchy)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, niech $\xi \in \Omega$. Wówczas

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\Omega} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Obserwacja: jeżeli f - holomorficzna na Ω , to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

Wynik $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = 1$ otrzymamy dla $\xi = 0$ i $f(z) = 1$ (fig 9-5)

Dowód. niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - \xi}.$$

(fig 9-6)

zatem wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) &= \int_{\Omega} dg(z). \\ \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz &= \int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned}$$

Pytanie: co się dzieje, jak przejdziemy z $\epsilon \rightarrow 0$ Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

dla $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$, ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka $\int_{\Omega_\epsilon} d\bar{z} \wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$. Oznacza, to że

$$\frac{1}{z-\xi} d\bar{z} \wedge dz \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon,$$

czyli w $\epsilon = 0$ nie wybuchnie!

Ale

$$\int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= i f(c) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(c) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -2\pi i f(\xi),$$

gdzie $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$.

Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_{\Omega} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

□

Twierdzenie 4. (Liouville)

Jeżeli f - ograniczona i holomorficzna na całym \mathbb{C} , to f jest stała.

Obserwacja: a co z sinusem? $f(x) = \sin(x)$, ale trzeba zastanowić się nad $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Dla np. $z = it$,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.

10 Wykład (08.11.2019)

Twierdzenie 5. (*Liouville*)

Jeżeli f - holomorphyzna i ograniczona na \mathbb{C} , to f - stała.

Dowód. Wiemy, że

$$\exists_{M>0} \quad \forall_{z \in \mathbb{C}} \quad |f(z)| < M.$$

Skoro f - holomorphyzna, to znaczy, że dla $\xi \in \mathbb{C}$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

(Wzór Cauchy)

Zauważmy, że skoro f - jak wyżej, to

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz.$$

(Absolutnie nieoczywiste lol. Uzasadnienie później)

Wówczas możemy oszacować f'

$$|f'(\xi)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \max_{z \in \partial K(\xi, r)} \left| \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} \right| \cdot |\text{długość okręgu } K(\xi, r)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|(\xi + re^{i\varphi} - \xi)^2|} |2\pi r| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad \forall_{r>0}.$$

Czyli

$$\forall_{r>0} \quad |f'(\xi)| < \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem $|f'(\xi)| = 0$, czyli

$$f(z) = \text{const.}$$

□

Przykład 26. $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ jest holomorphyzna na \mathbb{C} , ale nie jest na \mathbb{C} ograniczona (tylko dla $z \in \mathbb{R}$).

Wniosek: (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$.

Załóżmy, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad w(z) \neq 0.$$

Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{1}{w(z)} \text{ jest na } \mathbb{C} \text{ holomorphyzna i ograniczona.}$$

Jest więc stała. Co oznacza, że $w(z)$ jest stała i sprzeczność. □

(PS oznacza to, że $\exists_{z_0 \in \mathbb{C}}$, że $w(z_0) = 0$, czyli $w(z) = (z - z_0)w_1(z)$. Biorąc funkcję $f_1(z) = w_1(z) \dots$ pokażemy, że wielomian stopnia n nad \mathbb{C} ma n pierwiastków. □)

10.1 Szeregi Laurenta

Przykład 27. *Niech*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}.$$

Zauważmy, że

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1-i}{z-i} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{z+i}.$$

Jeżeli

$$|z+2i| < 3,$$

to

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2i}{3i}} = -\frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{3i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} (z+2i)^n.$$

Jeżeli $|z+2i| > 1$, to

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2i-i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{z+2i}} = \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z+2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

Zatem

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n} + \frac{i-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^n} (z+2i)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

gdzie

$$d_k = \begin{cases} \frac{1+i}{2} \cdot (i)^{-k-1} & k < 0 \\ \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^k} & k \geq 0 \end{cases}.$$

Niech

$$R(2i, 1, 3) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z+2i| < 3 \wedge |z+2i| > 1\}$$

- *pierścień otwarty o środku $2i$ i promieniach 1 i 3 .*

Dla $|z+2i| < 1$,

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+2i-i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2i}{i}} = -\frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} \frac{(z+2i)^n}{1}.$$

Zatem dla $z \in R(-2i, 0, 1)$,

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} (z+2i)^n - \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} \cdot (z+2i)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

gdzie

$$d_k = -\frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{(i)^{n+1}} - \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^{n+1}}.$$

dla $|z+2i| > 3$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3i}{z+2i}} = \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3i)^n \cdot \frac{1}{(z+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

I wtedy dla $z \in R(-2i, 3, +\infty)$, jest

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^n} + \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n} = \sum_{k=-1}^{-\infty} d_k (z+2i)^k.$$

Twierdzenie 6. (Laurent)

Niech $f(z)$ - holomorphyzna na pierścieniu $R(z_0, r_1, r_2)$,

$$R(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| > r_1 \wedge |z - z_0| < r_2\}.$$

Wówczas $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

$$r_1 < r < r_2$$

Dowód. Zauważmy, że $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$ znajdziemy takie $r'_1 > r_1$ i $r'_2 < r_2$, że $z \in R(z_0, r'_1, r'_2)$. Ze wzoru Cauchy wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right].$$

ale

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z},$$

a dla $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$ i $z \in K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

więc

$$\frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

więc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

A dla $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$ i z takich, że $|z - z_0| > r'_2$, wiemy, że

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

itd. □

11 Wykład (15.11.2019)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli $z \in K(z_0, r'_2)$ i $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli $|z - z_0| > r'_1$, to mamy, że dla $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - z_0)^n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Zatem

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi,$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzną na pierścieniu $R(z_0, r_1, \infty)$, to jak wyglądałoby rozwinięcie $f(z)$?

Zauważmy, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r'_2 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi}) d\varphi}{(r'_2 e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \cdot \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| \cdot 2\pi,$$

ale jeżeli f ograniczona poza kołem $K(z_0, r'_1)$, to znaczy, że

$$\forall_{r'_2 > r'_1} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| < M.$$

Czyli

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \xrightarrow{r'_2 \rightarrow \infty} 0,$$

więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzną na $R(z_0, 0, r_2)$, to jak wyglądałoby rozwinięcie?
Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r'_1 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi}) (r'_1 e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\substack{\exists: |f(z)| < M, z \in K(z_0, r_1) \\ M}} |f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi})| \cdot |2\pi|.$$

Czyli dla $z \in K(z_0, r_2)$, f - holomorficzna na $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Pytanie 8. Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się a_n do $\frac{f^n(z_0)}{n!}$?

Koniec obserwacji, wracamy do dowodu

Pytanie 9. Czy wzory na a_n i d_n można uprościć?

Przypomnienie: jeżeli f - holomorficzna na Ω , to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że $f(z)$ - holomorficzne na $R(z_0, r_1, r_2)$, a funkcja $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ - też jest holomorficzną na $R(z_0, r_1, r_2)$, to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzną na $R(z_0, r_1, r_2)$, czyli

$$\int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

To samo możemy powiedzieć o d_n

$$\int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n} (z - z_0)^n,$$

ale $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

Twierdzenie 7. Niech C - krzywa na \mathbb{C} (zamknięta lub nie) i niech $f(z)$ - ciągła na C . Wówczas funkcja

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorphyzna na $\mathbb{C} - C$ dla $p \in \mathbb{Z}$ i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ i $z_0 \notin C$. Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \quad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z - z_0)} \left[\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p} \right] - p \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{p+1}} = \int_C d\xi f(\xi) \left[\underbrace{\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}} \right] \quad (\Delta\Delta)$$

Ale (Δ) - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi - z)^p},$$

$$(\Delta) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Wiemy, że $g(z)$ - holomorphyzna dla $z \notin C$, czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi - z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego, niż } (z - z_0).$$

Zatem

$$(\Delta\Delta) = \int_C d\xi f(\xi) \left[\frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego niż } (z - z_0) - \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} \right].$$

$$|(\Delta\Delta)| \leq |\max_{\xi \in C} f(\xi)| \cdot \text{długość } C \cdot |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

□

Wniosek: dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Wiemy, że $f'(z)$ - też jest holomorphyzna (bo wzór na φ z $p = 2$)

12 Wykład (22.11.2019)

Jeżeli f - holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Przykład 28. Policzyc

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1 + iz)^2(1 - iz)^2}.$$

Niech $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1 - iz)^2}$, f - holomorficzna na $K(i, 1)$. W związku z tym piszemy

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z)}{(1 + iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z) dz}{(z - i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i f'(z)|_{z=i}.$$

12.1 Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np. $\sin(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pytanie skąd my wiemy, że $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, dla $z \in \mathbb{C}$

Twierdzenie 8. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na \mathcal{O} ,
 $z_n \in \mathcal{O}$ - ciąg z \mathcal{O} taki, że $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = 0$.

Wówczas

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{z \in K(z_0, r)} f(z) = 0.$$

Dowód. przez sprzeczność $(\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q))$.

Załóżmy, że $\exists_{z \in K(z_0, r)} f(z) \neq 0$ i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro f - holomorficzna na \mathcal{O} , to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

i wiemy, że $f(z) \neq 0$, czyli $\exists k$ takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \quad (\star)$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego (\star) jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez j . Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!} (z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli $g(z) \neq 0$. Skoro f - holomorficzna, to $g(z)$ też jest holomorficzna na \mathcal{O} , czyli między innymi $g(z)$ jest ciągła na \mathcal{O} . Ale wiemy, że $f(z_n) = 0$, czyli $g(z_n) = 0$ i g - ciągła na \mathcal{O} . Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \xrightarrow{z_n \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo $g(z_n)$ jest ciągiem samych zer, a $g(z_0) \neq 0$, bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

□

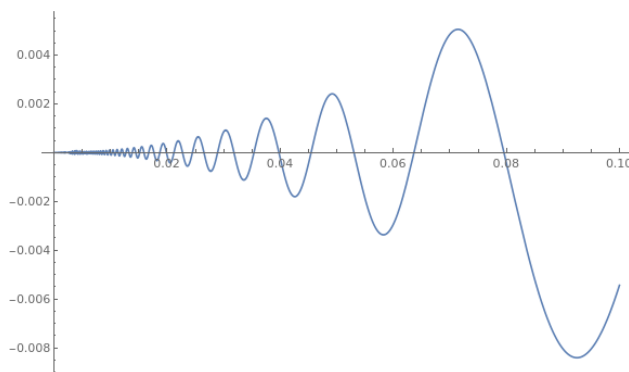
Obserwacja: Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu $a_n \rightarrow 0$,

$$f(a_n) \rightarrow 0$$

i $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 20: $f(x)$

Twierdzenie 9. Niech $f(z), g(z)$ - holomorficzne na \mathcal{O} ,

$$\forall_{h \in \mathbb{N}} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg $z_n \rightarrow z_0$. Wówczas

$$f(z) = g(z) \quad \forall_{z \in \mathcal{O}}.$$

Dowód. Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas $h(z_n) = 0$ i $z_n \rightarrow z_0$. Skoro $h(z)$ - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n$$

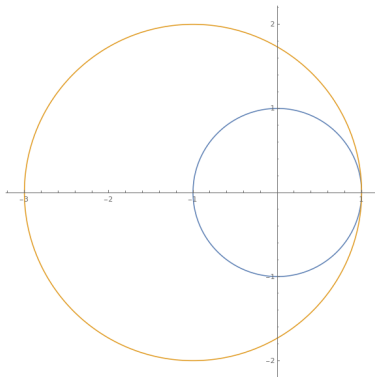
i dowodzimy tak jak wcześniej.

□

Przykład 29.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \dots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 21: f i g

Definicja 16. Niech f - holomorficzna na U_1 i g - holomorficzna na U_2 i

$$\exists_{z_0} \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\forall_{z \in U_1 \cap U_2} f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że f jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji g).

Przykład 30. Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka

$$\ln(z) = (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots$$

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$$

12.1.1 Punkty osobliwe

Definicja 17. Punkt w którym $f(z)$ nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.

Definicja 18. Niech $f(z)$ - taka, że

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i $\varphi(z)$ - holomorficzna na \mathcal{O} i $f(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O} - \{a\}$.

O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie a biegun rzędu N .

Pytanie: czy f może nie być holomorficzna np. na krzywej $\gamma \subset \mathbb{C}$?

Odpowiedź: gdyby f nie była holomorficzna na $\gamma \subset \mathbb{C}$, to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że $g(z) \equiv 0$ także dla $z \notin \gamma$.

13 Wykład (18.11.2019)

Przykład 31.

$$U_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{5\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$(\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi)$$

Niech

$$f_1(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_1$$

$$f_2(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_2$$

$$f_3(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_3$$

.

Zauważmy, że dla $z \in U_1 \cap U_2$ mamy

$$f_1(z) = f_2(z).$$

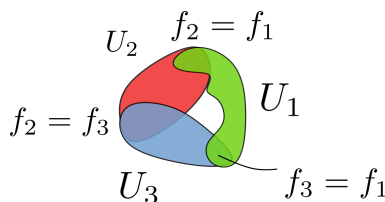
Mówimy zatem, że f_2 jest przedłużeniem analitycznym f_1 . Dla $z \in U_1 \cap U_3$ wychodzi

$$f_1(z) = f_3(z),$$

czyli f_3 jest przedłużeniem analitycznym f_1 . Ale

$$f_2(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi$$

$$f_3(-1) = \ln(e^{-i\pi}) = -i\pi.$$



Rysunek 22: Tracimy jednoznaczność funkcji ale chyba worth it

13.1 Klasyfikacja

Niech $f(z)$ - holomorficzna na pierścieniu $R(z_0, 0, r_1)$, ($f(z)$ może nawet nie być określona w z_0). Wiemy, że (działa wzór Laurenta):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wyróżniamy trzy przypadki:

1. (Δ) $a_n = 0, n < 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Oznacza to, że przyjmując $f(z_0) = a_0$ otrzymamy funkcję holomorficzną na $K(r_0, r)$.

2. $(\Delta\Delta)$ $\exists_{k < 0} a_n = 0, n < k$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

O punkcie z_0 mówimy, że jest punktem osobliwym, izolowanym rzędu $|k|$. (albo, że jest biegunem rzędu $|k|$, np. $\frac{\cos(z)}{z}$ ma w $z_0 = 0$ biegun rzędu pierwszego).

3. $(\Delta\Delta\Delta)$

$$\forall_{k < 0} \exists_{n < k} a_n \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

O punkcie z_0 powiemy, że jest punktem osobliwym (izolowanym) (albo, że $f(z)$ ma w $z = z_0$ osobliwość istotną).

Przykład 32. (Δ)

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

jeżeli przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to jest

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Przykład 33. $(\Delta\Delta)$

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{a_{-1}} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Przykład 34. $(\Delta\Delta\Delta)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Definicja 19. Liczbę a_{-1} z rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szeregi Laurenta w pierścieniu $R(z_0, 0, r)$ nazywamy **residuum** funkcji $f(z)$ w z_0 i oznaczamy

$$a_{-1} \equiv \text{Res}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{K(z_0, r), \\ 0 < r < r_1}} f(\xi) d\xi$$

Uwaga: mówimy (na razie) o osobliwościach izolowanych

Przykład 35.

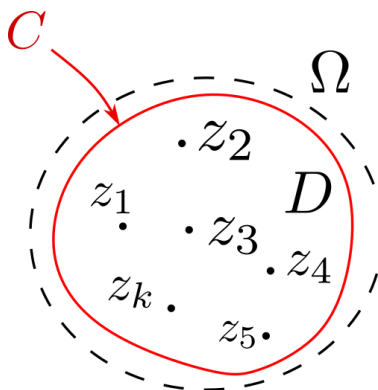
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Zauważmy, że $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \iff z_n = \frac{1}{n}$, więc

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| \rightarrow \infty,$$

Więc $z_0 = 0$ nie jest osobliwością izolowaną, bo

$$\forall_{r>0} \quad \exists_n \quad z = \frac{1}{n} \in K(0, r).$$



Twierdzenie 10. Niech Ω - otwarty, $D \subset \Omega$, $z_1, \dots, z_k \subset D$, $z_i \cap \partial D = \{\phi\}$, $i = 1, \dots, k$, f - holomorficzna na $\Omega - \{z_1, \dots, z_k\}$ i z_i - bieguny funkcji f .
Wówczas

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^k \text{Res}_{z=z_n} \{f(z)\}$$

Dowód. Rozważmy zbiór P taki, jak na rys 13-3. Zauważmy, że $f(z)$ jest na P holomorficzna. to znaczy, że

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 0 = \int \partial D f(z) dz + \sum_{n=1}^k \left[\int_{\partial K(z_n, r_n)} f(z) dz \right],$$

czyli

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

□

Pytanie: czy umiemy znaleźć współczynnik a_{-1} bez roz funkcji f w szereg Laurenta?

Odpowiedź: Jeżeli f ma w z_0 biegun rzędu n , to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \dots$$

$$\text{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dz} ((z - z_0)^n f(z))$$

Przykład 36. *Policzyć całkę*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a \cos(x) + a^2)}$$

Zauważmy, że

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = 1 - 2a \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) + a^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{z} (z - a)(1 - az)$$

14 Wykład (25.11.2019)

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Przykład 37.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix} dx$.

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = \frac{1}{z} (z - az^2 - a + a^2 z) = \frac{1}{z} (1 - az)(z - a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{z dx}{(1 - az)(z - a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że $(z - a)f(z)$ jest regularne w $z = a$, bo wynosi $\frac{1}{1 - az}$.

Zatem

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Czyli jest ładnie i słodko

Wiemy, że jeżeli f ma biegun stopnia n w $z = z_k$, to

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wielkością skończoną, bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_k)} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_k)^n}$

Pytanie 10. Jak zachowuje się funkcja gdy z_0 jest punktem istotnie osobliwym?

Przykład 38. Weźmy

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} e^{-i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-i \cdot \frac{1}{r} \sin \varphi} \cdot e^{\frac{1}{r} \cos \varphi}.$$

A to dla $\cos \varphi > 0$ idzie do $+\infty$, dla $\cos \varphi < 0$ idzie do 0, a dla $\cos \varphi = 0$ nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.

Przykład 39.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx,$$

gdzie $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

1. $R(z)$ nie ma biegunów na osi rzeczywistej

$$2. z \cdot R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu r . Policzmy

$$\int_{-r}^r R(x) dx.$$

Weźmy funkcję $R(z)$ i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res} f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) dz \rightarrow 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z) dz = \int_0^\pi r e^{i\varphi} R(r e^{i\varphi}) d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leq \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |r R(r e^{i\varphi})| \pi \rightarrow 0,$$

bo założyliśmy, że $z R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$.

Przykład 40. Transformata Legendre'a geometrycznie

niech np. $f(x) = x^2$.

Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

$$p = \frac{f(x) - \psi(p)}{x}$$

$$px = f(x) - \psi(p)$$

$$\psi(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right)$$

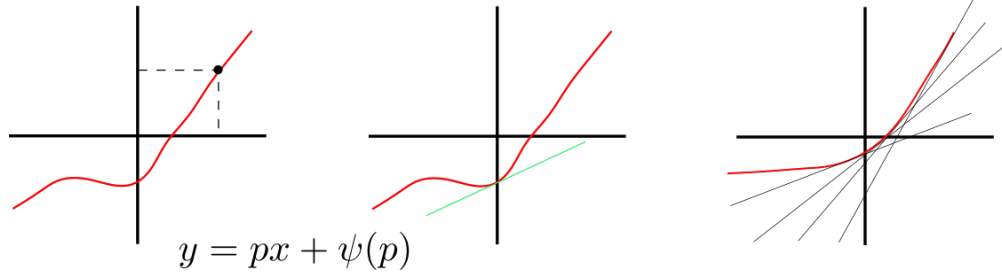
$$y = px - \frac{p^2}{4}.$$

I ogólnie

$$f(x) \rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \rightarrow x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$



Przykład 41. Funkcja $L(q, \dot{q})$.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^{-1}(p).$$

Teraz szukamy $\psi(p)$, ale ψ to jest H .

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

Przykład 42.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$, to

$$d\psi(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} - x(p) - p \frac{\partial x}{\partial p} \right) dp,$$

ale $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$. Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

Przykład 43. Mamy gaz i funkcję stanu $U(V, N, S)$. Możemy zrobić z niej jednoformę

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial N} dN + \frac{\partial U}{\partial S} dS.$$

Albo nawet dd

$$ddU = \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right) \right) ds \wedge dv = 0.$$

Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech $\frac{\partial U}{\partial S} = T$. Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza) $F(V, N, T) = U - T \cdot S$.

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

I później wychodzi

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$

15 Wykład (29.11.2019)

Przykład 44. *Całka*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots$$

Jak przemnożymy przez $(x^2 + 1)^3$ to dostaniemy wyrażenie regularne.

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \right).$$

Ale

$$\left(\frac{1}{(z+i)^3} \right)'' = \left(-\frac{3}{(z+i)^4} \right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} (-3)(-4) \frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{24} \cdot \frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{24i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Przykład 45.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx.$$

Taka, że $|zR(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$
np.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = J, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2i(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{iax} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{-iax} dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

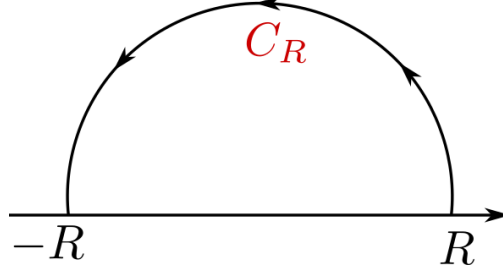
Twierdzenie 11. (Lemat Jordana)

Niech $f(z)$ - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys ??) taka, że

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0.$$



Dowód.

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaRe^{i\varphi}} d\varphi \right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi}.$$

Czyli

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| R \cdot \underbrace{\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi}_J.$$

Stąd

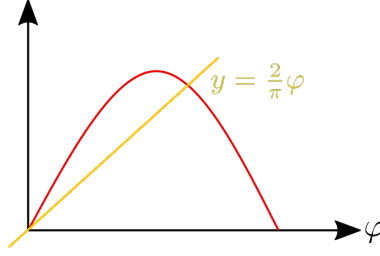
$$J = \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = 2 \left. \frac{-\pi}{2aR} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

□

15.1 Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$



Rysunek 23: w15-2

Twierdzenie 12. (Lemat)

Niech f - holomorphyzna i ograniczona na $R(a, 0, r)$. Wówczas możemy przedłużyć f do funkcji holomorphyznej na $K(a, r)$. Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

Dowód. Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że $H(z)$ jest holomorphyzna na $K(a, r)$. Wystarczy pokazać, że $H(z)$ jest holomorphyzna w $z = a$. Policzmy $H'(a)$.

$$H'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(a + h) - H(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h - a)^2 f(a + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(a + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h f(a + h).$$

Ale skoro f - ograniczona na $R(a, 0, r)$, to $0 \leq |h f(a + h)| \leq hM \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, czyli $H'(a) = 0$, więc $H(z)$ jest holomorphyzna na $K(a, r)$.

$$H(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots$$

Czyli (bo $c_0 = 0$ i $c_1 = 0$, bo $H'(0) = 0$)

$$(z - a)^2 f(z) = c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots$$

Co oznacza, że nasz $f(z)$ da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z - a)^1 + \dots$$

Jak położymy $c_2 \equiv f(a)$, to wtedy f - holomorphyzna na $K(a, r)$ □

Twierdzenie 13. (Weierstrass)

Niech f - holomorphyzna na $R(a, 0, r)$, i a - punkt istotnie osobliwy funkcji f . Wówczas

$$\forall_{r>0} f(R(a, 0, r)) = \mathbb{C}.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że f - ma w a punkt istotnie osobliwy i

$$\forall_{r>0} \quad \forall_{c \in \mathbb{C}} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_z \quad |z - a| < r \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.

Wiemy, że f ma w a punkt istotnie osobliwy oraz

$$\exists_{r>0} \quad \exists_{c \in \mathbb{C}} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_z \quad |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że f ma w a punkt istotnie osobliwy. Jeżeli

$$\forall_z |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ jest ograniczona i holomorficzna na $R(a, 0, r)$. Oznacza to, że możemy przedłużyć $g(z)$ do funkcji holomorficznego na $K(a, r)$. Czyli możemy rozwinąć z w szereg Laurenta na $K(a, r)$.

$$g(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

i) Jeżeli $a_0 \neq 0$, to znaczy, że $g(a) \neq 0$, czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a) - c},$$

to znaczy, że $f(a) - c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$ i sprzeczność, bo jeżeli f ma w a konkretną wartość a na $R(a, 0, r)$ jest holomorficzną to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots,$$

a skoro f ma w a punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z - a)^k}.$$

Jeżeli $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, to znaczy, że

$$g(z) = (z - a)^n \left(c_0 + \underbrace{c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots}_{g_1(z)} \right).$$

Zauważmy, że $g_1(z)$ jest holomorficzną i $g_1(a) \neq 0$, możemy więc rozwinąć $\frac{1}{g_1(z)}$ w $K(a, r)$

$$\frac{1}{g_1(z)} = f_0 + f_1(z - a) + f_2(z - a)^2 + \dots$$

□