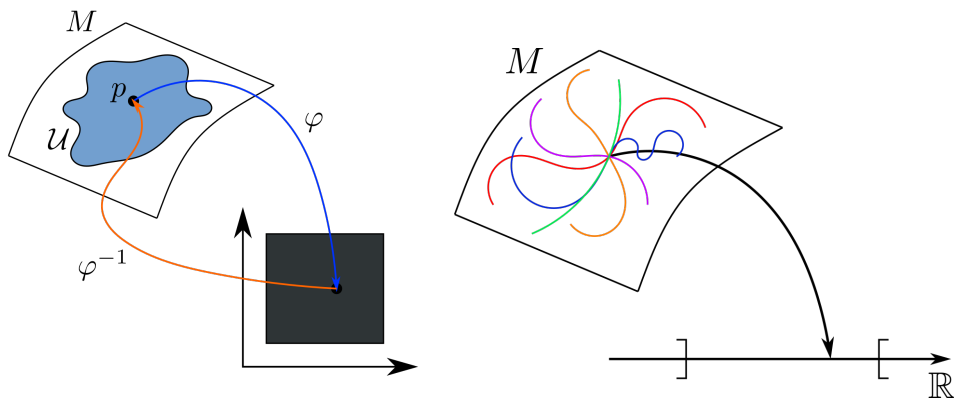


# Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

# 1 Wykład (04.10.2019)

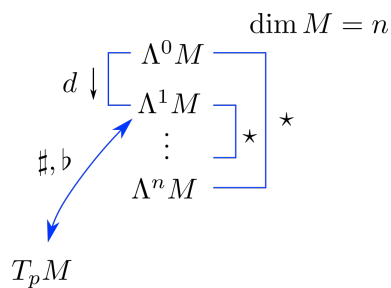
## 1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p M$ , to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\# = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy  $g_{ij}$  - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

## 1.2 Jest sytuacja taka

Niech  $A \in T_p M$ ,  $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $B = T_p M$ ,  $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^k}$ .  
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\langle A^\sharp, B \rangle, \quad (g_{ij} - \text{diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle A^\sharp, B \rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \dots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B. \end{aligned}$$

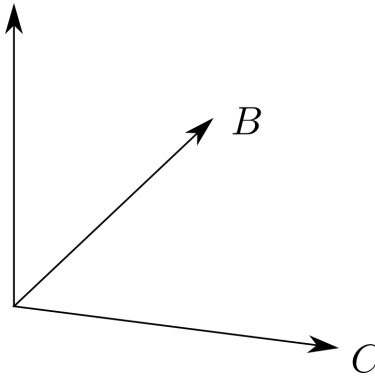
Czyli gdyby  $\|B\| = 1$ , to  $\langle A^\sharp, B \rangle$  byłoby długością rzutu  $A$  na kierunek  $B$ .  
Niech  $\dim M = 3$ ,  $\Lambda^2 M \ni A$ ,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_p M.$$

$$\begin{aligned} \langle A, B, C \rangle &= A^1 \langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \rangle + A^2 \langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \rangle + A^3 \langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \rangle = \\ &= A^1 \left[ \left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, C \right\rangle \right] + A^2 \left[ \left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, C \right\rangle \right] + A^3 \left[ \left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, C \right\rangle \right] = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 (B^2 C^3 - B^3 C^2) + A^2 (B^3 C^1 - B^1 C^3) + A^3 (B^1 C^2 - B^2 C^1) = \\ &= "A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3" = "A \cdot (B \times C)" \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Wychodzi tak jak na (rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

### 1.3 Problem

$\dim M = 3$ , mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą  $S$  w  $\mathbb{R}^3$  (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu  $A$  do  $B$ .

1. sparametryzujemy kształt  $S$ , np.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{array} \right\}.$$

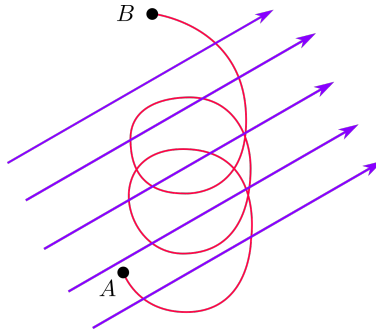
2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli  $p = \left[ \begin{array}{c} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{array} \right] \Big|_{t=t_0}$ , to

$$T_p M = \left\langle \left[ \begin{array}{c} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{array} \right] \right\rangle \Big|_{t=t_0}.$$

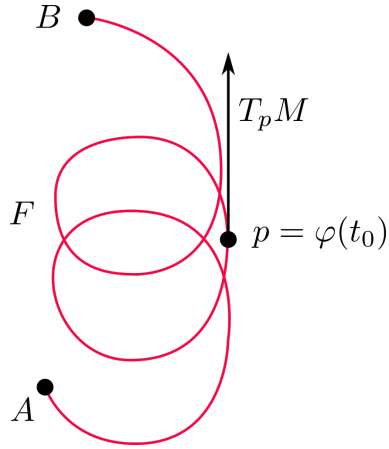
(rys 5)

3. Niech  $T_p M \ni v = -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ . (rys 6)  
Możemy policzyć np.

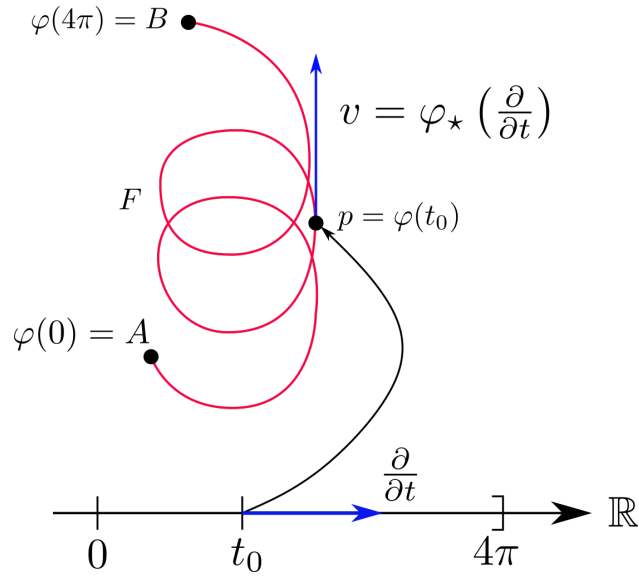
$$\begin{aligned} \int \langle F, v \rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^* F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez  $\varphi$



Rysunek 6

**Definicja 1.** Niech  $M$  - rozmaitość,  $L$  - krzywa na  $M$ ,  $w \in \Lambda^1 M$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  - parametryzacja krzywej  $L$ , czyli

$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

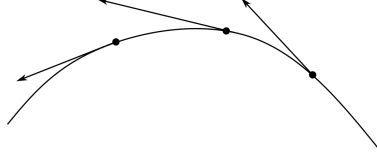
$$\int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

**Przykład 1.** niech (rys 8)

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

$i$

$$\omega = ydx = \left( y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\#.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Wtedy mamy  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ ,  $\varphi^*\omega = \begin{vmatrix} x=t-1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = [t^2 - t]_1^2 = 2$$

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

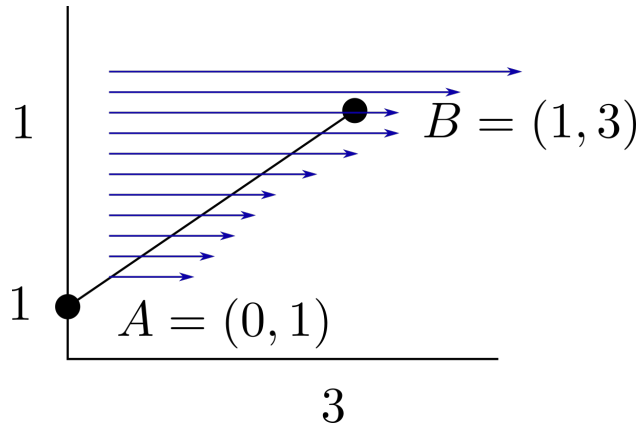
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^*\omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale  $\frac{x=2-u}{dx=-du}$  i mamy

$$\varphi_1^*\omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = [u^2 - 5u]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



Rysunek 8

## 2 Wykład (07.10.2019)

### 2.1 Ostatnio

Była rozmaitość  $M$  z wymiarem  $\dim M = n$ , krzywa

$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

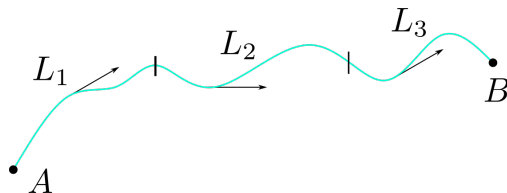
jednoforma  $\omega \in \Lambda^1 M$  i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla  $\omega = ydx$ ,

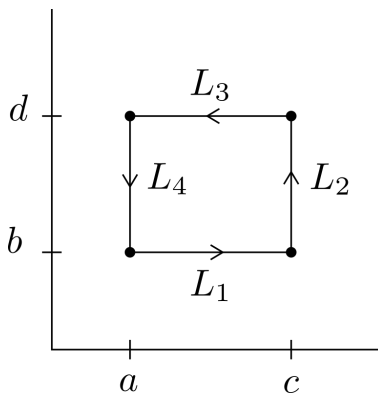
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 9)



Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść.  $L_1 + L_2 + L_3 = L$

**Przykład 2.** (rys 10)



Rysunek 10:  $\dim M = 2$

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$\begin{aligned}
\int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\
&= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\
&= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x, d) dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a, y) dy.
\end{aligned}$$

(rys 11)

dla  $\dim M = \mathbb{R}^1$ . Niech  $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $\varphi(v) = a \cdot v$  ( $\varphi$  - liniowe).

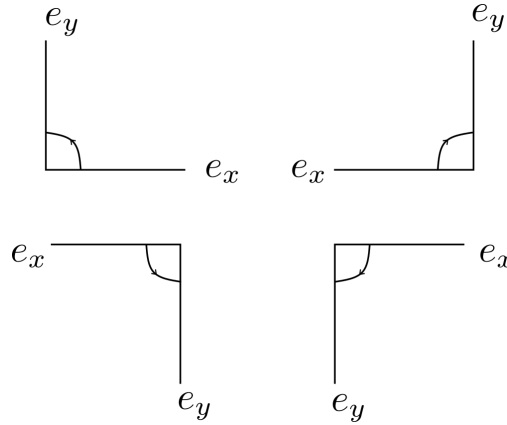


Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

$a > 0$  - nie zmienia orientacji (kierunku)

$a < 0$  - zmienia kierunek wektora.

(rys 12)



Rysunek 12: Różne orientacje na  $\mathbb{R}^2$ , czy można to jakoś pogrupować?

**Definicja 2.** Niech  $B_1, B_2$  - bazy uporządkowane w  $V$  - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że  $B_1$  i  $B_2$  należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z  $B_1$  do  $B_2$  jest większy od zera.

Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem  $V$ .

**Definicja 3.** Orientację standardową na  $\mathbb{R}^n$  nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$



**Definicja 4.** Niech  $M$  - rozmaitość zorientowana,  $\dim M = n$  i

$S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$  - powierzchnia sparametryzowana,  $\Lambda^2 M \ni \omega$  - dwuforma.

Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

**Przykład 3.** do 7:

weźmy  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  i obliczmy  $\int \int_P d\omega$ .

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \int \int_P d\omega &= \int \int_{[a, b] \times [c, d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\ &= \int_c^d dy (B(b, y) - B(a, y)) - \left[ \int_a^b dx (A(x, d) - A(x, c)) \right] = \\ &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy - \int_a^c A(x, d) dx - \int_c^d B(a, y) dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int \int_P d\omega = \int_L \omega,$$

to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

**Przykład 4.** niech (sytuacja jak na rys 13)  $S = S_1 \cup S_2$ , gdzie

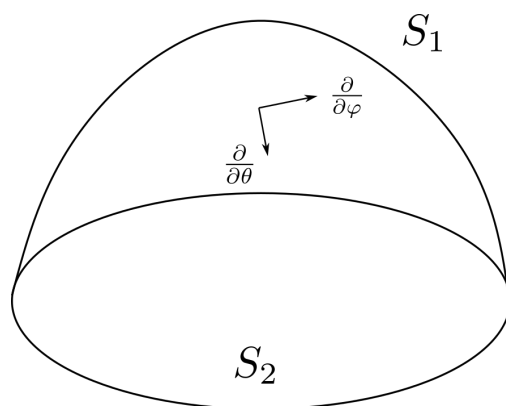
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$ .

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$

**Definicja 5.** Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map  $(U_i, \varphi_i)$ , że dla każdej pary  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  takiej, że  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , odwzorowanie  $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$ .

**Definicja 6.** Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.



Rysunek 13: Tak to wygląda

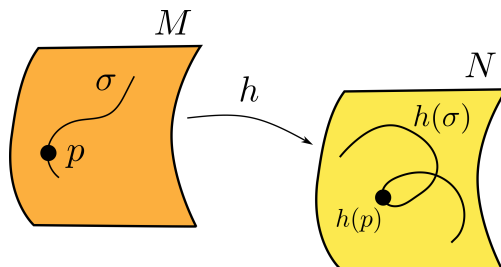
**Definicja 7.** *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

### 3 Wykład (11.10.2019)

#### 3.1 Przypomnienie

(rys 1)

Dla  $v \in T_p M$ , jest



Rysunek 14: Przypomnienie

$$h_* v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t)) \sigma'(t),$$

czyli  $v = [\sigma] = \frac{d}{dt} \sigma(t)$ ,

$$h_* v = \begin{matrix} h'(\sigma(t)) \\ \text{macierz kwadratowa} \end{matrix} v.$$

**Przykład 5.** Niech

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\} \cap S^2.$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\} \cap S^2.$$

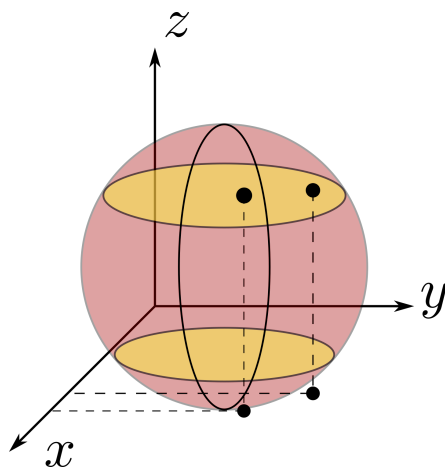
$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\} \cap S^2.$$

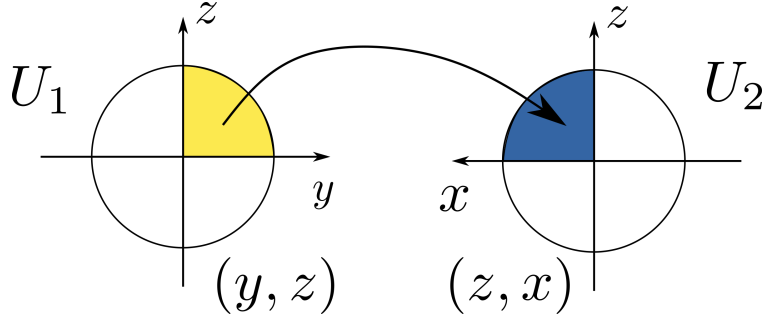
$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



Rysunek 15: fig3-2



Rysunek 16: fig3-3

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z$$

$$(x > 0, z > 0).$$

$$(z, x) \rightarrow h(z, x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) & \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (z) & \frac{\partial}{\partial x} (x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

**Przykład 6.** Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości  $2L$  i promieniu  $R$ . (rys 4)

$$\begin{aligned} x(\theta, t) &= \left( R - t \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \sin \theta \\ y(\theta, t) &= \left( R - t \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \cos \theta \\ z(\theta, t) &= \left( t \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.

Mamy  $\theta'$  i  $t'$ .

$$\begin{aligned} x'(\theta', t') &= \left( R - t' \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \cos \theta' \\ y'(\theta', t') &= - \left( R - t' \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \sin \theta' \\ z'(\theta', t') &= t' \cos \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right). \end{aligned}$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi \right\} \\ W_2 &= \left\{ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\} = \left\{ 0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi \right\}. \end{aligned}$$

Dla  $W_1$

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

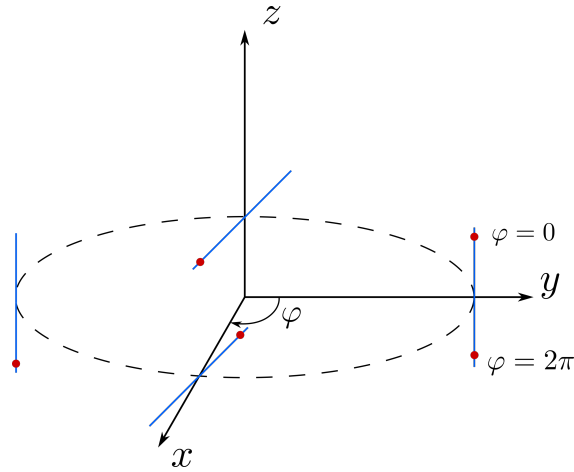
dla  $W_2$

$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

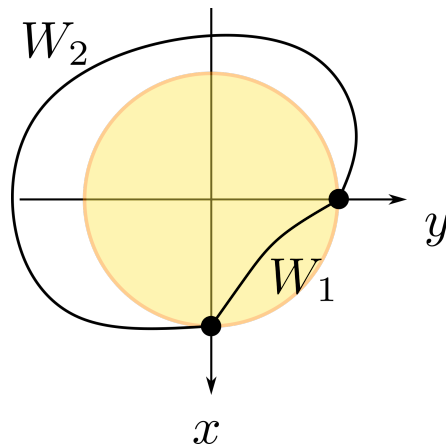
Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi'_1(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi'_2(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \varphi'_1 < 0 \quad \det \varphi'_2 > 0.$$



Rysunek 17: Gdzie wylądzie biedronka idąc prosto po wstędze?



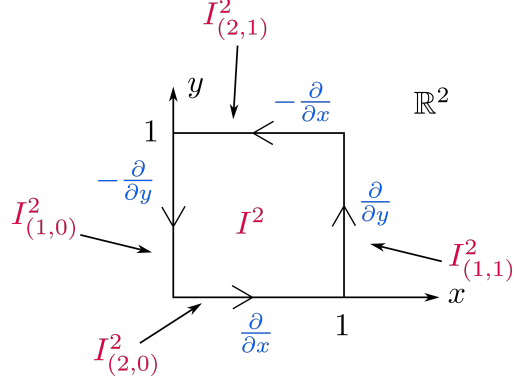
Rysunek 18: Obszary wspólne

### 3.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

1. Niech  $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \in \mathbb{R}^n$  (np. rys 6)

Wprowadźmy oznaczenia:

$$I_{(i,0)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$



Rysunek 19: fig3-6

$$I^n_{(i,1)} := \{(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1\}.$$

(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)} = I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)},$$

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)

- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.

Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki  $I^n$ .

Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$ ,  $I^n \in M$ . Niech  $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ . Chcemy obliczyć  $\int_{\partial I^n} \omega$ . Dowolna  $n-1$  forma z  $\Lambda^{n-1}(M)$  ma postać

$$\begin{aligned} \omega &= f_1(x^1, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ &+ f_2(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ &+ f_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ &+ f_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\int_{\partial I^n} \omega$  rozbija się na  $n$  składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{(j,\alpha)}} \left\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\ &= \delta_{ij} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{(j,\alpha)}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n. \end{aligned}$$

## 4 Wykład (14.10.2019)

### 4.1 Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla  $I^n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ ,  $\omega = f(x^1, \dots, x^n) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ . Wtedy dla  $x = (x^1, \dots, x^n)$  i  $d\tilde{x} = dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n$

$$\begin{aligned} & \int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\ &= \delta_{ij} \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) d\tilde{x} = \\ &= \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\ &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \\ &= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) + (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \dots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ &\cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ &\cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] = \\ &= (-1)^{i+1} \int_{I^n} [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)]. \end{aligned}$$

$$LHS = RHS.$$

□

**Uwaga:** Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek  $I^n$ . Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

**Przykład 7.** Niech  $[a, b] \in \mathbb{R}^1$  i  $f \in \Lambda^0([a, b])$ . Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak ( $x D$ ):

$$\int_{\partial[a, b]} f = \int_{[a, b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

**Przykład 8.** Niech  $\gamma$  - krzywa na  $M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $f \in \Lambda^0 M$ .

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

**Przykład 9.**  $\dim M = 2$ , niech  $\alpha = xydx + x^2dy$ . Policzmy  $\int_{\partial S} \alpha$ .

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha + \int_{C_3} \alpha,$$

ale

$$\int_{C_1} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

$\varphi$  - parametryzacja  $C_1$ . Jeżeli weźmiemy sobie

$$\int_{C_3} \left\langle \varphi_3^* \alpha, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

$\varphi_3$  - parametryzacja  $C_3$ .

$$C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

zatem  $\varphi_2^* \alpha$  przy  $x = \cos \theta \implies dx = -\sin \theta d\theta$ ,  $y = \sin \theta \implies dy = \cos \theta d\theta$ , mamy

$$\varphi_2^* \alpha = \cos \theta \sin \theta (-\sin \theta d\theta) + (\cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta.$$

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\langle \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa:  $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$ .

$$d\alpha = xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy.$$

$$\int_{\square} \left\langle xdx \wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx \cdot x \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Przykład 10.** Niech  $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Lambda^1(M)$ ,  $\partial K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta, 2\pi \right\}$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^* \alpha = -\sin \theta (-\sin \theta) d\theta + \cos \theta \cos \theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left[ \left( -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} \right) dy \wedge dx + \left( \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx \wedge dy \right] = \\ &= \left( \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.



Wiemy, że

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech  $\alpha = x^2 dx + xy dy + 2dz$ .  $\alpha$  jest potencjalna, jeżeli

$$\exists_{\eta \in \Lambda^0 M} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

**Definicja 8.** Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$ ,

$$i_v : T_p M \times \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1.  $i_v f = 0$ , jeżeli  $f \in \Lambda^0 M$
2.  $i_v dx^i = v^i$ , jeżeli  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3.  $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$ .

Operację  $i_v$  nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \stackrel{ozn}{=} v \lrcorner \omega.$$

**Obserwacja:**  $i_v(i_v \omega) = 0$  (w domu)

**Przykład 11.** Niech  $v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ ,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v \lrcorner \omega = \langle dx, v \rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v \rangle + \langle dz, v \rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v \rangle.$$

**Przykład 12.**

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e \frac{\partial}{\partial t} + ev^x \frac{\partial}{\partial x} + ev^y \frac{\partial}{\partial y} + ev^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j \lrcorner F = ?.$$

## 5 Wykład (18.10.2019)

Sprawdzić, że

$$j_{\perp}F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

**Przykład 13.** Niech  $X = \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p}$ ,  $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$ ,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = 2$ . Co oznacza napis

$$x_{\perp} \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t) \frac{\partial}{\partial x} + p(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dx = dH,$$

a teraz coś takiego:

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2dx.$$

To wypływa na wyjściu równania ruchu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}, & \dot{p}(t) &= -kx \\ m \frac{dx}{dt} &= p, & \frac{dp}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

### 5.1 Rozmaitość z brzegiem

**Obserwacja:**

(rys 5-1) Niech  $I = [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ , (metryka  $d(x, y) = |x - y|$ ) czy  $I$  jest otwarty w  $\mathbb{R}$ ? *chyba nie*.

Niech  $I = [0, 1[ \subset [0, 2]$ , czy  $I$  jest otwarty w  $[0, 2]$ ? *chyba tak*.

$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

**Definicja 9.**

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Niech  $M$  - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości  $M$  składa się z takich map  $\varphi_{\alpha}$ , że

$$\varphi_{\alpha}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}_+^m,$$

( $\mathcal{O}$  - otwarty w  $M$ ), gdzie  $\varphi_{\alpha}(\mathcal{O})$  - otwarte w  $\mathbb{R}_+^m$ , to  $M$  nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli  $p \in M$  i  $\varphi_{\alpha}(p) \in \mathbb{R}_0^m$ , to mówimy, że  $p$  należy do brzegu  $M$ .  
(brzeg rozmaitości  $M$  oznaczamy przez  $\partial M$ )

**Pytanie 1.** Co to jest różniczkowalność  $\varphi^{-1}$ , jeżeli dziedzina  $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}_+^m$ , który nie jest otwarty w  $\mathbb{R}^m$ ?

Mówimy wówczas tak:

**Definicja 10.** Niech  $U \subset \tilde{U}$ ,  $\tilde{U}$  - otwarty w  $\mathbb{R}^m$ ,  $U$  - otwarty w  $\mathbb{R}_+^m$ .  $\varphi$  jest klasy  $C^r$  na  $U$ , jeżeli istnieje  $\tilde{\varphi}$  klasy  $C^r$  na  $\tilde{U}$  i  $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ .

(rys 5-3)

**Pytanie 2.** Czym jest  $\partial S$ , jeżeli  $S$  - okrąg?

Odp.  $\partial S = \{\phi\}$ .

Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

sześcian  $\xrightarrow{\partial}$  boki sześciianu  $\xrightarrow{\partial}$  rogi sześciianu,

kula  $\xrightarrow{\partial}$  sfera  $\xrightarrow{\partial} \{\phi\}$ .

**Obserwacja:**

Zbiór  $\partial M$  wraz z mapami  $\varphi_\alpha|_{\partial M}$  i otoczeniami obciętych do  $\mathcal{O}|_{\partial M}$  jest rozmaitością o wymiarze  $m - 1$ , jeżeli  $\dim M = m$ .

**Definicja 11.** Niech  $p \in \partial M$ ,  $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$  - baza  $T_p \partial M$ , wybierzmy orientację na  $M$  (rys 5-5).

Niech  $\sigma$  - krzywa na  $M$  taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

niech  $\bar{n} = [\sigma]$ . Mówimy, że orientacja  $\partial M$  jest zgodna z orientacją  $M$ , jeżeli orientacja  $\langle \bar{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$  jest zgodna z orientacją  $M$ .

(rys 5-6) Niech  $M$  - rozmaitość,  $U \subset M$ ,  $\dim M = n$ ,  $\omega \in \Lambda^k M$ ,  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow T$  - parametryzacja  $T$  oraz  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow T$  - parametryzacja  $T$ . Z własności funkcji  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  wiemy, że

$$\exists_h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^* \omega = \int_{U_2} h^* (\varphi_1^* \omega) \stackrel{?}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^* \omega = \int_{U_2} \varphi_2^* \omega.$$

( $\Delta$ ) - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^* \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_* v \rangle = \langle k^* \omega, L_* v \rangle = \langle L^* k^* \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli  $v = [\sigma(t)]$ ,  $v = \frac{d}{dt} \bar{\sigma}$  to

$$(kL)_* v = \frac{d}{dt} (k(L(\bar{\sigma}(t)))) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_* L_* v.$$

**Wniosek:** całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

## 5.2 Lemat Poincare

Mieliśmy  $\omega = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$ , wiemy, że  $d\omega = 0$ . **Pytanie:** czy istnieje  $\eta$  taka, że  $\omega = d\eta$ ? Wówczas wiemy, że  $d\omega = d(d\eta) = 0$ .

**Obserwacja:**

$$\eta = \arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$

## 6 Wykład (21.10.2019)

**Definicja 12.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ . Zbiór  $\mathcal{O}$  nazywamy *ściągłym*, jeżeli istnieje  $p \in \mathcal{O}$  i odwzorowanie  $h(p, x, t)$  takie, że

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \begin{aligned} h(p, x, 0) &= p \\ h(p, x, 1) &= x, \end{aligned} \quad \forall_{t \in [0,1]} \quad h(p, x, t) \in \mathcal{O}, \quad h(p, x, t) - \text{ciągła}.$$

**Twierdzenie 1.** (rys 6-1) (Lemat Poincare)  
Niech

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{O} - \text{zbiór ściągły} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{array} \right) \implies \left( \begin{array}{l} \exists_{\eta} d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{array} \right).$$

*Dowód.* Załóżmy, że zbiór  $\mathcal{O}$  jest zbiorem gwiazdystym, czyli

$$\exists_{p \in \mathcal{O}} \quad \forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{array} \right) \text{ (jest zawarty w } \mathcal{O} \text{)}.$$

**Obserwacja:** gdyby istniał operator  $T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \rightarrow \Lambda^{p-1}(\mathcal{O})$ ,  $p = 1, 2, \dots, n-1$ , taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byłoby prawdziwe. (bo dla  $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$  mielibyśmy  $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$ ).

Wtedy, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 (t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)) dt,$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$  spełnia warunek  $Td + dT = id$ .

**Przykład 14.**  $\omega \in \Lambda^1(M)$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\omega = xdx + ydy + zdz$ . Wówczas, gdy  $(\bar{x} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$  jest

$$T(\omega) = \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz}_{\omega(tx)}, \bar{x} \right\rangle dt = \int_0^1 t^0 (tx^2 + ty^2 + tz^2) dt = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \eta.$$

Zauważamy, że  $d\eta = \omega$  i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał). (rys 6-2)

**Przykład 15.**  $\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$ ,  $\omega \in \Lambda^2(M)$ ,  $\dim M = 3$ . Co to jest  $T\omega$ ?

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner (xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 (xtdxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx) dt = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 dy - xydx + y^2 dz - yzdy + z^2 dx - z^2 dx) = \eta \end{aligned}$$

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie  $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ .

Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \\ \omega &= \omega_{12} d^{i_1=1} x \wedge d^{i_2=2} y + \omega_{23} d^{i_1=2} y \wedge d^{i_2=3} z + \omega_{13} d^{i_1=1} x \wedge d^{i_2=3} z. \\ d\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Liczymy

$$\begin{aligned} Td_{p+1} \omega \text{ forma} &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} (-1)^\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{p-1} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Zatem dodajemy do siebie  $Td\omega + dT\omega$  i wychodzi

$$\begin{aligned} Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \int_0^1 dt p \cdot t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \quad \text{równa się zero} \\ &= \int_0^1 dt \left( \frac{d}{dt} (t^p \omega(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \right) = \\ &= t^p (\omega(tx^1, \dots, tx^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega. \end{aligned}$$

□

## 7 Wykład (25.10.2019)

**Definicja 13.** Jeżeli  $\alpha \in \Lambda^k(M)$  taka, że  $d\alpha = 0$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest domknięta. Jeżeli  $\exists_\eta$  taka, że  $d\eta = \alpha$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest zupełna.

**Przykład 16.**  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$ .

Dla  $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ , jest  $d\omega = 0$ . Było, że  $\eta = \text{artctg}(\frac{x}{y})$ ,  $d\eta = \omega$ . Problem leży w punkcie  $(0, 0)$  bo nie należy do dziedziny.

(rys 7-1)

### 7.1 Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor  $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$ , który jest w koszarnej bazie  $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$ , ale można go zamienić na coś fajniejszego  $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$ .

Dla trójki wektorów  $v_1, v_2, v_3$ , ich  $|v_1, v_2, v_3|$  to objętość.  
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$\text{vol}(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = \det(A) \det(A^T) = \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = G(v_1, v_2, v_3).$$

**Definicja 14.** Niech  $M$  - rozmaitość i  $\gamma$  krzywa na  $M$ .

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a, b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}.$$

**Przykład 17.** (rys 7-2)  $M$  takie, że  $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a, b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji na (rys 7-3) jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leq x \leq x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \middle| \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe (rys 7-4)

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} \middle| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left( \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że  $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j$ , dalej jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left( \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.  
Niech  $M = \mathbb{R}^3$ ,

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{bmatrix} \mid a \leq t_1 \leq b, \quad c \leq t_2 \leq d \right\}.$$

$$\|D\| = \int \text{vol} \left( \frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

**Przykład 18.** Niech

$$D = \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \right).$$

Liczmy  $\text{vol}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}}. \\ G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \left\| \begin{bmatrix} 1 + (f_x)^2 & (f_x)(f_y) \\ (f_x)(f_y) & 1 + (f_y)^2 \end{bmatrix} \right\| = (1 + (f_x)^2)(1 + (f_y)^2) - (f_x)^2(f_y)^2. \\ \|D\| &= \int_a^b \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}_{ds} dx dy. \end{aligned}$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Niech  $A$  - wektor w bazie ortonormalnej. Dla  $\dim M = 3$ ,  $g = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$ ,

$$A = A^1 \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech  $\alpha = A^\# \in \Lambda^1(M)$ ,  $\gamma$  - krzywa na  $M$ .

$$\begin{aligned} \alpha &= g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} dx^1 + g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} dx^2 + g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} dx^3. \\ \int_\gamma \alpha &= \int_\gamma A^\# = \int_\gamma \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \varphi_* \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \frac{\varphi_* \frac{\partial}{\partial t}}{\left\| \varphi_* \frac{\partial}{\partial t} \right\|} \right\rangle \left\| \varphi_* \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt. \end{aligned}$$

Niech  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ .

**Pytanie:** czym jest  $\langle \alpha, v \rangle$ ?

$$\langle \alpha, v \rangle = A^1 \sqrt{g^{11}} g_{11} v^1 + A^2 \sqrt{g^{22}} g_{22} v^2 + A^3 \sqrt{g^{33}} g_{33} v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\# = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.

Niech  $V \subset M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\dim V = 3$ . Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech  $S \subset M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\dim S = 2$ .

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

**Pytanie 3.** Niech  $\alpha = A^\#$ , czym jest  $\int_S dA^\#$ ?

$$\begin{aligned} dA^\# &= \underbrace{\left( (g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}})_{,2} - (g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}})_{,3} \right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 + \underbrace{\left( (g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}})_{,3} - (g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}})_{,1} \right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\dots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2. \\ \int_S dA^\# &= \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle + \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle. \\ &\quad \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|}_{ds} dx^2 dx^3 + \dots \end{aligned}$$

Pamiętamy, czym była  $\text{rot}(A) = (\star dA^\#)^\flat = \int (\text{rot}(A)) \mathbf{n} ds$



## 8 Wykład (28.10.2019)

### 8.1 W ostatnim odcinku

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^{\sharp} = \left( \overbrace{(\cdot), -(\cdot)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots$$

$$\int_S dA^{\sharp} = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left( \star \left( d\vec{A}^{\sharp} \right) \right)^{\flat},$$

ale

$$\begin{aligned} \star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\ \star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\ \star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^{\sharp} = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned} (\star dA^{\sharp})^{\flat} &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Czyli dla  $\vec{A}$  - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot \vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g^{22} g^{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{33}}} \\ D^3 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \end{bmatrix}.$$

ale  $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}}$ , ale

$$\left( rot \vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{22} g^{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^{\sharp} = \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A^{\sharp} &= \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \\ \int_S dA^{\sharp} &= \int_{\partial S} A^{\sharp}. \\ \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds &= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \end{aligned}$$

**Przykład 19.**  $\dim M = 3$ ,  $V \subset M$ ,  $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

**Pytanie 4.** *czym jest  $\int_{\partial V} \star A^\sharp$ ?*

$$\begin{aligned} & \star(dx^1)\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3, \\ & \star(dx^2)\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1, \\ & \star(dx^3)\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

**Odpowiedź:**

$$\star A^\sharp = A^1 g_{11} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1 + A^3 g_{33} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \int A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 dx^2,$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

**Pytanie 5.** *Jak wygląda  $\int_V d \star A^\sharp$ ?*

$$\int_V d \star A^\sharp = \int_V \left\langle (A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}})_{,1} + (A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}})_{,2} + (A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}})_{,3}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^1 dx^2 dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \star d (\star A^\sharp),$$

wiemy, że

$$\star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$\operatorname{div} \vec{A} \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

## 8.2 Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)

(rys 8-2)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt}e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

**Definicja 15.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarty.  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Mówimy, że  $f$  jest holomorficzna na  $\mathcal{O}$  jeżeli  $\forall_{z \in \mathcal{O}}$  istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z),$$

gdzie  $f'(z)$  jest funkcją ciągłą.

**Uwaga:** jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z  $\mathbb{R}^2$ .

**Uwaga:** dowolną funkcję z  $\mathbb{C}$  możemy zapisać jako  $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$ , gdzie  $z = x + iy$  a  $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

**Przykład 20.**  $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$ ,  $z = x + iy$

**Pytanie 6.** Co to znaczy różniczkowalność?

ma istnieć granica (dla  $h \in \mathbb{R}$ ):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np.  $h = it$ , to wtedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x, y+t) - P(x, y)}{it} + i \frac{Q(x, y+t) - Q(x, y)}{it} = \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli  $f$  - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

**Przykład 21.** (jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i \underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy  $f$  jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

**Przykład 22.**

$$\alpha = Q(x, y)dx + P(x, y)dy,$$

gdzie  $P, Q$  są takie, że  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

**Pytanie 7.** Niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ ,  $f$  - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(x, y) = c \in \mathbb{R}\}.$$

$$Q_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q(x, y) = d \in \mathbb{R}\}.$$

## 9 Wykład (04.11.2019)

### 9.1 Refleksja

Czy to

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest fajne?

**Przykład 23.** (fig 9-1)

$$\nabla P = \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right],$$
$$\nabla Q = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y} \right],$$

to możemy zrobić takie coś:

$$(\nabla P \cdot \nabla Q) = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

**Twierdzenie 2.**  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.

Dowód.  $\implies$  było

$\Leftarrow$  Zauważmy, że skoro  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest różniczkowalna na  $U \subset \mathbb{R}^2$ , czyli dla  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$  jest

$$\underbrace{F(x + h_1, y + h_2) - F(x, y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

$$\frac{r(x, y, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Czyli

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(x + h_1, y + h_2) - P(x, y) \\ Q(x + h_1, y + h_2) - Q(x, y) \end{bmatrix}}_{\Delta Q} \stackrel{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= P(x+h_1, y+h_2) + iQ(x+h_1, y+h_2) - (P(x, y) + iQ(x, y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2) + r = \\ &= (a+ib)(h_1 + ih_2) + r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z  $h$  do 0, to  $\frac{r}{h} \rightarrow 0$ , więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

□

**Stwierdzenie 1.** Niech  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , a  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  - holomorficzna na  $U$ . Wówczas  $g \circ f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ .

*Dowód.*

$$(g \circ f)' = g'(f)f' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1b \\ a_1b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -(a_1b + ab_1) \\ a_1b + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{bmatrix},$$

a tak wygląda macierz pochodnej  $f$  - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). □

## 9.2 Oznaczenia

(fig 9-3)

niech  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\langle dx, dy \rangle = T_p^*M$ . Wprowadźmy

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Jeżeli  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , to

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z}.$$

**Obserwacja:** niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ , wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

**Przykład 24.**  $f(z) = z^2 = z \cdot z$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

a  $g(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = z \neq 0.$$

Czyli  $g$  - nie jest holomorficzna

**Przykład 25.** (fig 9-4)

Obliczmy całkę:

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left| \frac{z = re^{i\theta}}{dz = rie^{i\theta} d\theta} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

**Stwierdzenie 2.** Jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$  i  $\Omega \subset \mathcal{O}$ , to

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\Omega} d(f dz) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

**Twierdzenie 3.** (wzór Cauchy)

Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $\xi \in \Omega$ . Wówczas

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\Omega} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

**Obserwacja:** jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $\Omega$ , to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

Wynik  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = 1$  otrzymamy dla  $\xi = 0$  i  $f(z) = 1$  (fig 9-5)

Dowód. niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - \xi}.$$

(fig 9-6)

zatem wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) &= \int_{\Omega} dg(z). \\ \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz &= \int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned}$$

**Pytanie:** co się dzieje, jak przejdziemy z  $\epsilon \rightarrow 0$  Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

dla  $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$ , ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka  $\int_{\Omega_\epsilon} d\bar{z} \wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$ . Oznacza, to że

$$\frac{1}{z-\xi} d\bar{z} \wedge dz \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon,$$

czyli w  $\epsilon = 0$  nie wybuchnie!

Ale

$$\int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= i f(c) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(c) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -2\pi i f(\xi),$$

gdzie  $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$ .

Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_{\Omega} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

□

**Twierdzenie 4. (Liouville)**

*Jeżeli  $f$  - ograniczona i holomorficzna na całym  $\mathbb{C}$ , to  $f$  jest stała.*

**Obserwacja:** a co z sinusem?  $f(x) = \sin(x)$ , ale trzeba zastanowić się nad  $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Dla np.  $z = it$ ,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.



## 10 Wykład (08.11.2019)

### **Twierdzenie 5.** (*Liouville*)

Jeżeli  $f$  - holomorphyzna i ograniczona na  $\mathbb{C}$ , to  $f$  - stała.

*Dowód.* Wiemy, że

$$\exists_{M>0} \quad \forall_{z \in \mathbb{C}} \quad |f(z)| < M.$$

Skoro  $f$  - holomorphyzna, to znaczy, że dla  $\xi \in \mathbb{C}$ ,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

(Wzór Cauchy)

Zauważmy, że skoro  $f$  - jak wyżej, to

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz.$$

(Absolutnie nieoczywiste lol. Uzasadnienie później)

Wówczas możemy oszacować  $f'$

$$|f'(\xi)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \max_{z \in \partial K(\xi, r)} \left| \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} \right| \cdot |\text{długość okręgu } K(\xi, r)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|(\xi + re^{i\varphi} - \xi)^2|} |2\pi r| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad \forall_{r>0}.$$

Czyli

$$\forall_{r>0} \quad |f'(\xi)| < \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem  $|f'(\xi)| = 0$ , czyli

$$f(z) = \text{const.}$$

□

**Przykład 26.**  $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  jest holomorphyzna na  $\mathbb{C}$ , ale nie jest na  $\mathbb{C}$  ograniczona (tylko dla  $z \in \mathbb{R}$ ).

**Wniosek:** (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

Niech  $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ .

Załóżmy, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad w(z) \neq 0.$$

Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{1}{w(z)} \text{ jest na } \mathbb{C} \text{ holomorphyzna i ograniczona.}$$

Jest więc stała. Co oznacza, że  $w(z)$  jest stała i sprzeczność. □

(PS oznacza to, że  $\exists_{z_0 \in \mathbb{C}}$ , że  $w(z_0) = 0$ , czyli  $w(z) = (z - z_0)w_1(z)$ . Biorąc funkcję  $f_1(z) = w_1(z) \dots$  pokażemy, że wielomian stopnia  $n$  nad  $\mathbb{C}$  ma  $n$  pierwiastków. □)

## 10.1 Szeregi Laurenta

**Przykład 27.** *Niech*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}.$$

*Zauważmy, że*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1-i}{z-i} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{z+i}.$$

*Jeżeli*

$$|z+2i| < 3,$$

*to*

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2i}{3i}} = -\frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+2i}{3i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} (z+2i)^n.$$

*Jeżeli  $|z+2i| > 1$ , to*

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2i-i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{z+2i}} = \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{z+2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

*Zatem*

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n} + \frac{i-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^n} (z+2i)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

*gdzie*

$$d_k = \begin{cases} \frac{1+i}{2} \cdot (i)^{-k-1} & k < 0 \\ \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^k} & k \geq 0 \end{cases}.$$

*Niech*

$$R(2i, 1, 3) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z+2i| < 3 \wedge |z+2i| > 1\}$$

*- pierścień otwarty o środku  $2i$  i promieniach  $1$  i  $3$ .*

*Dla  $|z+2i| < 1$ ,*

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+2i-i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2i}{i}} = -\frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+2i}{i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} \frac{(z+2i)^n}{1}.$$

*Zatem dla  $z \in R(-2i, 0, 1)$ ,*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} (z+2i)^n - \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} \cdot (z+2i)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

*gdzie*

$$d_k = -\frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{(i)^{n+1}} - \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^{n+1}}.$$

*dla  $|z+2i| > 3$*

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3i}{z+2i}} = \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3i)^n \cdot \frac{1}{(z+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

*I wtedy dla  $z \in R(-2i, 3, +\infty)$ , jest*

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^n} + \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n} = \sum_{k=-1}^{-\infty} d_k (z+2i)^k.$$

**Twierdzenie 6. (Laurent)**

Niech  $f(z)$  - holomorphyzna na pierścieniu  $R(z_0, r_1, r_2)$ ,

$$R(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| > r_1 \wedge |z - z_0| < r_2\}.$$

Wówczas  $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

$$r_1 < r < r_2$$

*Dowód.* Zauważmy, że  $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$  znajdziemy takie  $r'_1 > r_1$  i  $r'_2 < r_2$ , że  $z \in R(z_0, r'_1, r'_2)$ . Ze wzoru Cauchy wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right].$$

ale

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z},$$

a dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$  i  $z \in K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

więc

$$\frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

więc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

A dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$  i  $z$  takich, że  $|z - z_0| > r'_2$ , wiemy, że

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

itd. □

## 11 Wykład (15.11.2019)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli  $z \in K(z_0, r'_2)$  i  $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli  $|z - z_0| > r'_1$ , to mamy, że dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - z_0)^n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}, \\ d_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \end{aligned}$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzną na pierścieniu  $R(z_0, r_1, \infty)$ , to jak wyglądałoby rozwinięcie  $f(z)$ ?  
Zauważmy, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r'_2 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi}) d\varphi}{(r'_2 e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \cdot \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| \cdot 2\pi,$$

ale jeżeli  $f$  ograniczona poza kołem  $K(z_0, r'_1)$ , to znaczy, że

$$\forall_{r'_2 > r'_1} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| < M.$$

Czyli

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \xrightarrow{r'_2 \rightarrow \infty} 0,$$

więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzną na  $R(z_0, 0, r_2)$ , to jak wyglądałoby rozwinięcie?  
Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r'_1 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi}) (r'_1 e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\substack{\exists: |f(z)| < M, z \in K(z_0, r_1) \\ M}} |f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi})| \cdot |2\pi|.$$

Czyli dla  $z \in K(z_0, r_2)$ ,  $f$  - holomorficzną na  $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

**Pytanie 8.** Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się  $a_n$  do  $\frac{f^n(z_0)}{n!}$ ?

**Koniec obserwacji, wracamy do dowodu**

**Pytanie 9.** Czy wzory na  $a_n$  i  $d_n$  można uprościć?

**Przypomnienie:** jeżeli  $f$  - holomorficzną na  $\Omega$ , to

$$\int_{\partial \Omega} f = 0 = \int_{\partial \Omega_1} f - \int_{\partial \Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial \Omega_1} f = \int_{\partial \Omega_2} f.$$

Zauważmy, że  $f(z)$  - holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , a funkcja  $\frac{1}{(z - z_0)^n}$  - też jest holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , czyli

$$\int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

To samo możemy powiedzieć o  $d_n$

$$\int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(z - z_0)^{n-1} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n} (z - z_0)^n,$$

ale  $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ .

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

**Twierdzenie 7.** Niech  $C$  - krzywa na  $\mathbb{C}$  (zamknięta lub nie) i niech  $f(z)$  - ciągła na  $C$ . Wówczas funkcja

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorphyzna na  $\mathbb{C} - C$  dla  $p \in \mathbb{Z}$  i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $z_0 \notin C$ . Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \quad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z - z_0)} \left[ \frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p} \right] - p \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{p+1}} = \int_C d\xi f(\xi) \left[ \underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p}}{z - z_0}}_{(\Delta)} - \underbrace{\frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}}}_{(\Delta\Delta)} \right]$$

Ale  $(\Delta)$  - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi - z)^p}.$$

$$(\Delta) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Wiemy, że  $g(z)$  - holomorphyzna dla  $z \notin C$ , czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi - z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego, niż } (z - z_0).$$

Zatem

$$(\Delta\Delta) = \int_C d\xi f(\xi) \left[ \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego niż } (z - z_0) - \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} \right].$$

$$|(\Delta\Delta)| \leq |\max_{\xi \in C} f(\xi)| \cdot |\text{długość } C| \cdot |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

□

**Wniosek:** dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Wiemy, że  $f'(z)$  - też jest holomorficzna (bo wzór na  $\varphi$  z  $p = 2$ )

## 12 Wykład (22.11.2019)

Jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $R(z_0, 0, r_2)$ , to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

**Przykład 28.** Policzyc

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1 + iz)^2(1 - iz)^2}.$$

Niech  $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1 - iz)^2}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $K(i, 1)$ . W związku z tym piszemy

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z)}{(1 + iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z) dz}{(z - i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i f'(z)|_{z=i}.$$

### 12.1 Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np.  $\sin(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i pytanie skąd my wiemy, że  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ , dla  $z \in \mathbb{C}$

**Twierdzenie 8.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ ,

$z_n \in \mathcal{O}$  - ciąg z  $\mathcal{O}$  taki, że  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = 0$ .

Wówczas

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{z \in K(z_0, r)} f(z) = 0.$$

*Dowód.* przez sprzeczność ( $\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$ ).

Załóżmy, że  $\exists_{z \in K(z_0, r)} f(z) \neq 0$  i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

i wiemy, że  $f(z) \neq 0$ , czyli  $\exists k$  takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \quad (\star)$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego  $(\star)$  jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez  $j$ . Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left( \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!} (z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$



czyli  $g(z) \neq 0$ . Skoro  $f$  - holomorficzna, to  $g(z)$  też jest holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , czyli między innymi  $g(z)$  jest ciągła na  $\mathcal{O}$ . Ale wiemy, że  $f(z_n) = 0$ , czyli  $g(z_n) = 0$  i  $g$  - ciągła na  $\mathcal{O}$ . Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \xrightarrow{z_n \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo  $g(z_n)$  jest ciągiem samych zer, a  $g(z_0) \neq 0$ , bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

□

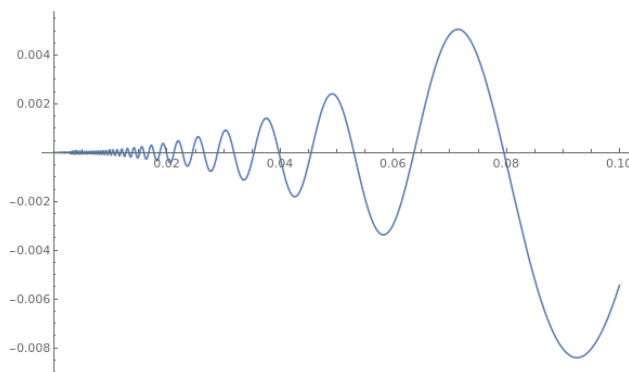
**Obserwacja:** Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu  $a_n \rightarrow 0$ ,

$$f(a_n) \rightarrow 0$$

i  $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 20:  $f(x)$

**Twierdzenie 9.** Niech  $f(z), g(z)$  - holomorficzne na  $\mathcal{O}$ ,

$$\forall_{h \in \mathbb{N}} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg  $z_n \rightarrow z_0$ . Wówczas

$$f(z) = g(z) \quad \forall_{z \in \mathcal{O}}.$$

*Dowód.* Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas  $h(z_n) = 0$  i  $z_n \rightarrow z_0$ . Skoro  $h(z)$  - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n$$

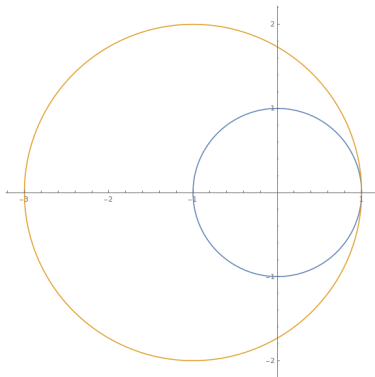
i dowodzimy tak jak wcześniej.

□

**Przykład 29.**

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \dots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 21:  $f$  i  $g$

**Definicja 16.** Niech  $f$  - holomorficzna na  $U_1$  i  $g$  - holomorficzna na  $U_2$  i

$$\exists_{z_0} \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\forall_{z \in U_1 \cap U_2} f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że  $f$  jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji  $g$ ).

**Przykład 30.** Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka

$$\ln(z) = (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots$$

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$$

### 12.1.1 Punkty osobliwe

**Definicja 17.** Punkt w którym  $f(z)$  nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.

**Definicja 18.** Niech  $f(z)$  - taka, że

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i  $\varphi(z)$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$  i  $f(z)$  - holomorficzna na  $\mathcal{O} - \{a\}$ .

O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie  $a$  biegun rzędu  $N$ .

**Pytanie:** czy  $f$  może nie być holomorficzna np. na krzywej  $\gamma \subset \mathbb{C}$ ?

**Odpowiedź:** gdyby  $f$  nie była holomorficzna na  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że  $g(z) \equiv 0$  także dla  $z \notin \gamma$ .

## 13 Wykład (18.11.2019)

**Przykład 31.**

$$U_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{5\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$(\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi)$$

Niech

$$f_1(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_1$$

$$f_2(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_2$$

$$f_3(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_3$$

.

Zauważmy, że dla  $z \in U_1 \cap U_2$  mamy

$$f_1(z) = f_2(z).$$

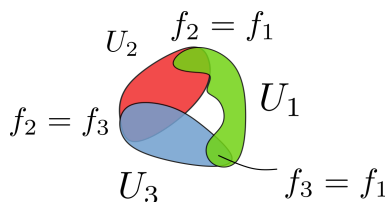
Mówimy zatem, że  $f_2$  jest przedłużeniem analitycznym  $f_1$ . Dla  $z \in U_1 \cap U_3$  wychodzi

$$f_1(z) = f_3(z),$$

czyli  $f_3$  jest przedłużeniem analitycznym  $f_1$ . Ale

$$f_2(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi$$

$$f_3(-1) = \ln(e^{-i\pi}) = -i\pi.$$



Rysunek 22: Tracimy jednoznaczność funkcji ale chyba worth it

### 13.1 Klasyfikacja

Niech  $f(z)$  - holomorficzna na pierścieniu  $R(z_0, 0, r_1)$ , ( $f(z)$  może nawet nie być określona w  $z_0$ ). Wiemy, że (działa wzór Laurenta):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wyróżniamy trzy przypadki:

1.  $(\Delta)$   $a_n = 0, n < 0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Oznacza to, że przyjmując  $f(z_0) = a_0$  otrzymamy funkcję holomorficzną na  $K(r_0, r)$ .

2.  $(\Delta\Delta)$   $\exists_{k < 0} a_n = 0, n < k$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

O punkcie  $z_0$  mówimy, że jest punktem osobliwym, izolowanym rzędu  $|k|$ . (albo, że jest biegunem rzędu  $|k|$ , np.  $\frac{\cos(z)}{z}$  ma w  $z_0 = 0$  biegun rzędu pierwszego).

3.  $(\Delta\Delta\Delta)$

$$\forall_{k < 0} \exists_{n < k} a_n \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

O punkcie  $z_0$  powiemy, że jest punktem osobliwym (izolowanym) (albo, że  $f(z)$  ma w  $z = z_0$  osobliwość istotną).

**Przykład 32.**  $(\Delta)$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

jeżeli przyjmiemy, że  $f(0) = 1$ , to jest

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

**Przykład 33.**  $(\Delta\Delta)$

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{a_{-1}} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

**Przykład 34.**  $(\Delta\Delta\Delta)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

**Definicja 19.** Liczbę  $a_{-1}$  z rozwinięcia funkcji  $f(z)$  w szereg Laurenta w pierścieniu  $R(z_0, 0, r)$  nazywamy **residuum** funkcji  $f(z)$  w  $z_0$  i oznaczamy

$$a_{-1} \equiv \text{Res}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{K(z_0, r), \\ 0 < r < r_1}} f(\xi) d\xi$$

**Uwaga:** mówimy (na razie) o osobliwościach izolowanych

**Przykład 35.**

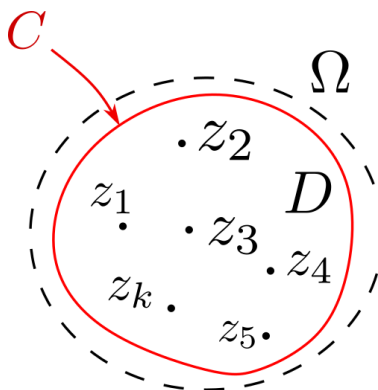
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Zauważmy, że  $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \iff z_n = \frac{1}{n}$ , więc

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| \rightarrow \infty,$$

Więc  $z_0 = 0$  nie jest osobliwością izolowaną, bo

$$\forall_{r>0} \quad \exists_n \quad z = \frac{1}{n} \in K(0, r).$$



**Twierdzenie 10.** Niech  $\Omega$  - otwarty,  $D \subset \Omega$ ,  $z_1, \dots, z_k \subset D$ ,  $z_i \cap \partial D = \{\phi\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $f$  - holomorficzna na  $\Omega - \{z_1, \dots, z_k\}$  i  $z_i$  - bieguny funkcji  $f$ .  
Wówczas

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^k \text{Res}_{z=z_n} \{f(z)\}$$

*Dowód.* Rozważmy zbiór  $P$  taki, jak na rys 13-3. Zauważmy, że  $f(z)$  jest na  $P$  holomorficzna. to znaczy, że

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 0 = \int \partial D f(z) dz + \sum_{n=1}^k \left[ \int_{\partial K(z_n, r_n)} f(z) dz \right],$$

czyli

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

□

**Pytanie:** czy umiemy znaleźć współczynnik  $a_{-1}$  bez roz funkcji  $f$  w szereg Laurenta?

**Odpowiedź:** Jeżeli  $f$  ma w  $z_0$  biegun rzędu  $n$ , to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \dots$$

$$\text{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dz} ((z - z_0)^n f(z))$$

**Przykład 36.** *Policzyć całkę*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a \cos(x) + a^2)}$$

*Zauważmy, że*

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = 1 - 2a \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) + a^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{z} (z - a)(1 - az)$$

## 14 Wykład (25.11.2019)

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

**Przykład 37.**

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech  $z = e^{ix}$ ,  $dz = ie^{ix} dx$ .

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = \frac{1}{z} (z - az^2 - a + a^2 z) = \frac{1}{z} (1 - az)(z - a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{z dx}{(1 - az)(z - a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że  $(z - a)f(z)$  jest regularne w  $z = a$ , bo wynosi  $\frac{1}{1 - az}$ .

Zatem

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

*Czyli jest ładnie i słodko*

Wiemy, że jeżeli  $f$  ma biegun stopnia  $n$  w  $z = z_k$ , to

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wielkością skończoną, bo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_k)} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_k)^n}$

**Pytanie 10.** Jak zachowuje się funkcja gdy  $z_0$  jest punktem istotnie osobliwym?

**Przykład 38.** Weźmy

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} e^{-i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-i \cdot \frac{1}{r} \sin \varphi} \cdot e^{\frac{1}{r} \cos \varphi}.$$

A to dla  $\cos \varphi > 0$  idzie do  $+\infty$ , dla  $\cos \varphi < 0$  idzie do 0, a dla  $\cos \varphi = 0$  nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.

**Przykład 39.**

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx,$$

gdzie  $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że

1.  $R(z)$  nie ma biegunów na osi rzeczywistej

2.  $z \cdot R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu  $r$ . Policzmy

$$\int_{-r}^r R(x) dx.$$

Weźmy funkcję  $R(z)$  i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res} f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) dz \rightarrow 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z) dz = \int_0^\pi r e^{i\varphi} R(r e^{i\varphi}) d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leq \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |r R(r e^{i\varphi})| \pi \rightarrow 0,$$

bo założyliśmy, że  $z R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Przykład 40.** Transformata Legendre'a geometrycznie

niech np.  $f(x) = x^2$ .

Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

$$p = \frac{f(x) - \psi(p)}{x}$$

$$px = f(x) - \psi(p)$$

$$\psi(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$y = px - \frac{p^2}{4}.$$

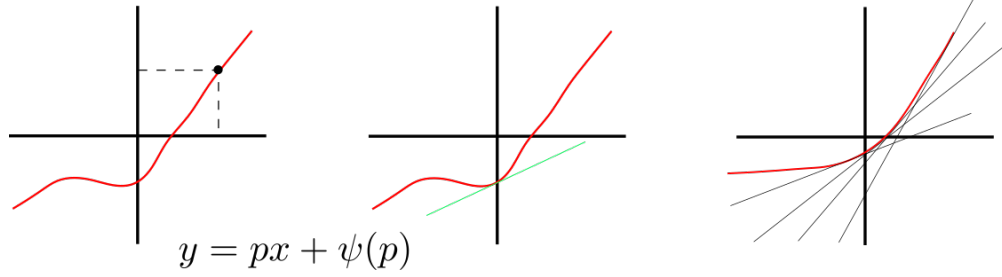
I ogólnie

$$f(x) \rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \rightarrow x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$





**Przykład 41.** Funkcja  $L(q, \dot{q})$ .

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^{-1} (p).$$

Teraz szukamy  $\psi(p)$ , ale  $\psi$  to jest  $H$ .

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

**Przykład 42.**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli  $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$ , to

$$d\psi(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p \frac{\partial x}{\partial p} \right) dp,$$

ale  $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ , czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy  $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$ . Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

**Przykład 43.** Mamy gaz i funkcję stanu  $U(V, N, S)$ . Możemy zrobić z niej jednoformę

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial N} dN + \frac{\partial U}{\partial S} dS.$$

Albo nawet  $dd$

$$ddU = \left( \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right) \right) ds \wedge dv = 0.$$

Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech  $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ . Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza)  $F(V, N, T) = U - T \cdot S$ .

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

I później wychodzi

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$

## 15 Wykład (29.11.2019)

**Przykład 44.** *Całka*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots$$

Jak przemnożymy przez  $(x^2 + 1)^3$  to dostaniemy wyrażenie regularne.

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( (z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \right).$$

*Ale*

$$\left( \frac{1}{(z+i)^3} \right)'' = \left( -\frac{3}{(z+i)^4} \right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

*Dostajemy*

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} (-3)(-4) \frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{24} \cdot \frac{1}{i}.$$

*Zatem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{24i} = \frac{3\pi}{8}.$$

**Przykład 45.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx.$$

*Taka, że  $|zR(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$   
np.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = J, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2i(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{iax} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{-iax} dx.$$

*Chcemy policzyć całkę typu*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

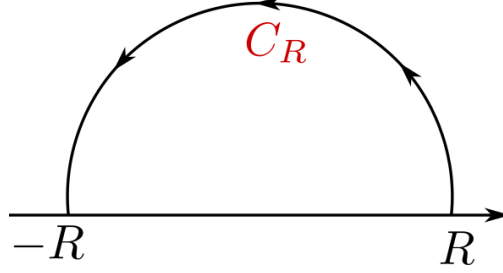
**Twierdzenie 11. (Lemat Jordana)**

Niech  $f(z)$  - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys ??) taka, że

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0.$$



Dowód.

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaRe^{i\varphi}} d\varphi \right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi}.$$

Czyli

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| R \cdot \underbrace{\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi}_J.$$

Stąd

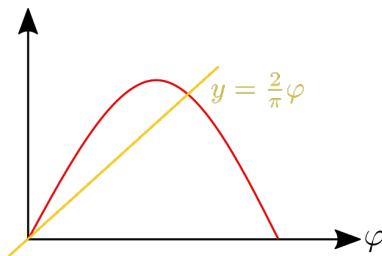
$$J = \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = 2 \left. \frac{-\pi}{2aR} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

□

## 15.1 Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$



Rysunek 23: w15-2

**Twierdzenie 12. (Lemat)**

Niech  $f$  - holomorphyzna i ograniczona na  $R(a, 0, r)$ . Wówczas możemy przedłużyć  $f$  do funkcji holomorphyznej na  $K(a, r)$ . Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

*Dowód.* Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że  $H(z)$  jest holomorphyzna na  $K(a, r)$ . Wystarczy pokazać, że  $H(z)$  jest holomorphyzna w  $z = a$ . Policzmy  $H'(a)$ .

$$H'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(a + h) - H(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h - a)^2 f(a + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(a + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h f(a + h).$$

Ale skoro  $f$  - ograniczona na  $R(a, 0, r)$ , to  $0 \leq |h f(a + h)| \leq hM \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , czyli  $H'(a) = 0$ , więc  $H(z)$  jest holomorphyzna na  $K(a, r)$ .

$$H(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots$$

Czyli (bo  $c_0 = 0$  i  $c_1 = 0$ , bo  $H'(0) = 0$ )

$$(z - a)^2 f(z) = c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots$$

Co oznacza, że nasz  $f(z)$  da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z - a)^1 + \dots$$

Jak położymy  $c_2 \equiv f(a)$ , to wtedy  $f$  - holomorphyzna na  $K(a, r)$  □

**Twierdzenie 13. (Weierstrass)**

Niech  $f$  - holomorphyzna na  $R(a, 0, r)$ , i  $a$  - punkt istotnie osobliwy funkcji  $f$ . Wówczas

$$\forall_{r>0} f(R(a, 0, r)) = \mathbb{C}.$$

*Dowód.* Chcemy pokazać, że  $f$  - ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy i

$$\forall_{r>0} \quad \forall_{c \in \mathbb{C}} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_z \quad |z - a| < r \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.

Wiemy, że  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy oraz

$$\exists_{r>0} \quad \exists_{c \in \mathbb{C}} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_z \quad |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy. Jeżeli

$$\forall_z |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja  $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$  jest ograniczona i holomorficzna na  $R(a, 0, r)$ . Oznacza to, że możemy przedłużyć  $g(z)$  do funkcji holomorficznego na  $K(a, r)$ . Czyli możemy rozwinąć  $z$  w szereg Laurenta na  $K(a, r)$ .

$$g(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

i) Jeżeli  $a_0 \neq 0$ , to znaczy, że  $g(a) \neq 0$ , czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a) - c},$$

to znaczy, że  $f(a) - c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$  i sprzeczność, bo jeżeli  $f$  ma w  $a$  konkretną wartość a na  $R(a, 0, r)$  jest holomorficzną to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

a skoro  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z - a)^k}.$$

i) Jeżeli  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , to znaczy, że

$$g(z) = (z - a)^n \left( c_0 + \underbrace{c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots}_{\varphi(z)} \right), \quad c_0 \neq 0.$$

Zauważmy, że  $\varphi(z)$  jest holomorficzną i  $\varphi(a) \neq 0$ , możemy więc rozwinąć  $\frac{1}{\varphi(z)}$  w  $K(a, r)$ , bo  $\frac{1}{\varphi(z)}$  - też jest holomorficzną na  $K(a, r)$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots$$

Zatem

$$\frac{1}{f(z) - c} = g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

czyli

$$f(z) - c = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot (d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots),$$

czyli

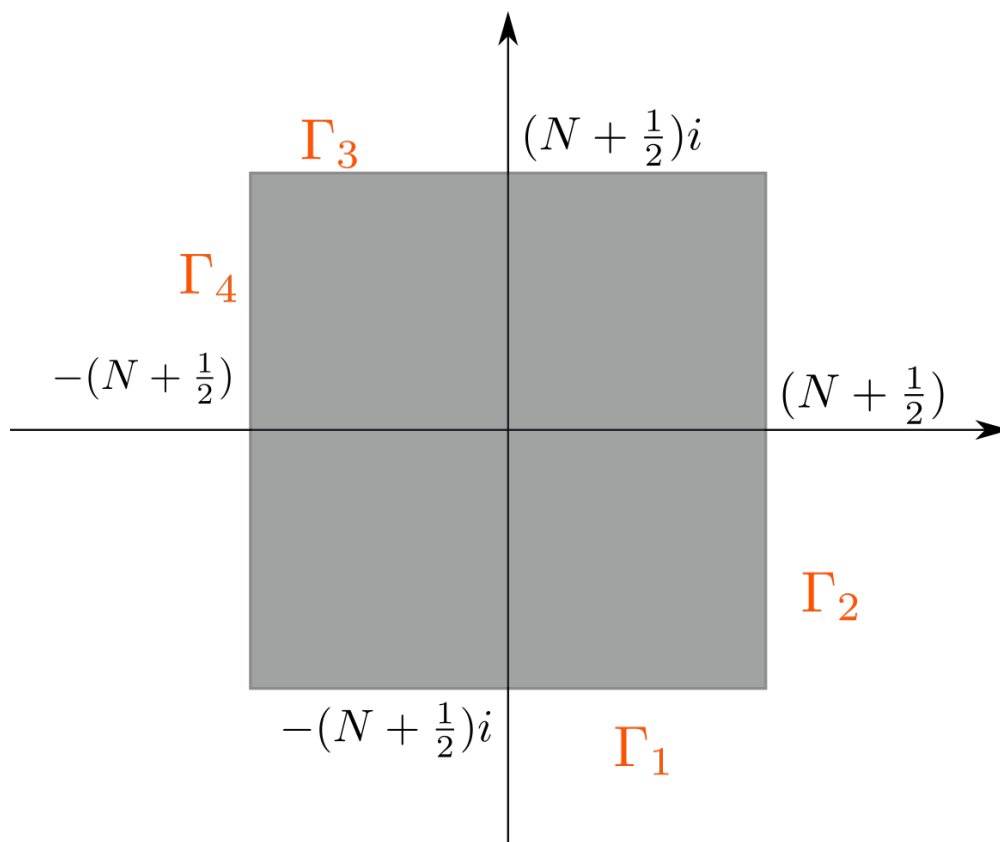
$$f(z) = c + \frac{d_0}{(z - a)^n} + \frac{d_1}{(z - a)^{n-1}} + \frac{d_2}{(z - a)^{n-2}} + \dots$$

i sprzeczność, bo wtedy wiemy, że  $f(z)$  miałaby w  $z = a$  biegun  $n$ -tego rzędu, a  $f(z)$  ma w  $z = a$  punkt istotnie osobliwy.

□

## 16 Wykład (02.12.2019)

### 16.1 Sumowanie szeregów



Rysunek 24: Kontur  $\Gamma$

**Stwierdzenie 3.** Niech  $\Gamma$  - kontur przechodzący przez wierzchołki

$$\left(N \pm \frac{1}{2}\right)(1 \pm i) \quad (\text{Rysunek 24}).$$

I niech  $f(z)$  - taka, że

$$\exists_M \quad \forall_{|z| > M} \quad |f(z)| < \frac{\text{const}}{|z|^2},$$

$f(z)$  nie ma biegunów na  $\Gamma$  oraz nie ma biegunów dla  $z \in \mathbb{Z}$ . Wówczas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0.$$

*Dowód.* Oszacujemy  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ .

Dla  $z \in \Gamma$

a) Jeżeli  $z \in \Gamma_4$  lub  $\Gamma_2$ , to

$$\Gamma_2 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = N + \frac{1}{2} + iy \right\}.$$

$$\Gamma_4 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = -(N + \frac{1}{2}) + iy \right\}.$$

$$|\operatorname{ctg}(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \cdot \left| \frac{2i}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}} \right|.$$

Dalej mamy dla  $|e^{iN\pi}| = 1$

$$\left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}} \right| \quad (\Delta)$$

**Obserwacja:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = 1.$$

Zatem

$$|(\Delta)| \leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi N} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} \leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} < \text{const.}$$

b) Analogicznie pokażemy, że  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  jest ograniczony dla  $z \in \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$ . Zatem

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz \right| \leq \left| \max_{z \in \Gamma} f(z) \right| \cdot |8N + 4| \cdot \text{const} \underset{N > M}{\leq} \frac{\text{const}}{N^2} (8N + 4) \cdot \text{const} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

□

**Wniosek:**

Niech  $b$  - zbiór wszystkich biegunów  $f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 2\pi i \sum_b \operatorname{Res}(f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)) = 0.$$

**Pytanie 11.** W jakich punktach  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  ma bieguny i którego rzędu?

Zauważmy, że

$$\frac{(\pi z - 0\pi) \cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi}.$$

A np.

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{(z - n) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos(\pi z) - (z - n)\pi \sin(\pi z)}{\pi \cos(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi}.$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0,$$

czyli

$$0 = \sum_c \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) + \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

gdzie  $c$  - bieguny  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ ,  $d$  - bieguny  $f(z)$ . Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

**Przykład 46.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Rozdzielmy sobie sumę na dwie:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} f(n) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} f(n)}_{\text{bieguny } \operatorname{ctg}(\pi z) \text{ bez } 0} + \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} n^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n^2} \right) = - \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}.$$

**Obserwacja:** Niech  $P = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$ . Niech  $D$  - zbiór biegunów  $f(z)$  na  $\Omega$  i  $f$  - holomorphyzna na  $\Omega - D$ . Wówczas  $\frac{f'}{f}$  ma na  $\Omega$  bieguny pierwszego rzędu dla  $z \in P \cup D$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in P$ . Oznacza to, że

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

gdzie  $k \geq 1$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{ka_k(z - z_0)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k + \dots}{a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z - z_0) + \dots}{a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots}. \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)f'}{f} &= k. \end{aligned}$$

Czyli  $\frac{f'}{f}$  ma w  $z_0 \in P$  biegun pierwszego rzędu i wynosi  $k$ . □

Niech  $z_1 \in D$ ,  $f$  ma w  $z = z_1$  biegun  $n$  - tego rzędu. Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_1)^{n-1}} + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\frac{-na_{-n}}{(z - z_1)^{n+1}} + \frac{-(n-1)a_{-(n-1)}}{(z - z_1)^n} + \dots}{\frac{a_{-n}}{(z - z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_1)^{n-1}} + \dots} = \frac{1}{(z - z_1)} \frac{[-na_{-n} + -(n-1)a_{-(n-1)}(z - z_1) + \dots]}{[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z - z_1) + \dots]}. \\ \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f'}{f}(z - z_1) &= -n. \end{aligned}$$

**Wniosek:**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} = \sum_{z \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_1 \in P} \frac{f'}{f}.$$



## 17 Wykład (06.12.2019)

**Twierdzenie 14.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  - otwarty i spójny,  $A \subset \Omega$ . Niech  $D \subset A$  - zbiór zer funkcji  $f(z)$  na  $A$ . Niech  $P \subset A$  - zbiór biegunów funkcji  $f$  na  $A$  oraz

$$\partial A \cap \partial D = \emptyset, \quad \partial A \cap P = \emptyset.$$

Wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'}{f} = N_Z - N_B,$$

gdzie  $N_Z$  - suma krotności wszystkich zer funkcji  $f$  na  $A$ , a  $N_B$  - suma stopni wszystkich biegunów  $f$  na  $A$ .

*Dowód.* Wiemy, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'}{f} = \sum \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \sum_{z_i \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_k \in P} \frac{f'}{f},$$

jest sumą krotności wszystkich zer plus sumą krotności wszystkich biegunów, bo jeżeli  $z_i \in D$  - zero rzędu  $k$ , to  $\operatorname{Res} \frac{f'}{f} = k$ , a jeżeli  $z_j \in P$  - biegun rzędu  $n$ , to

$$\operatorname{Res}_{z_j} \frac{f'}{f} = -n.$$

□

**Twierdzenie 15.** (Rouche)

Niech  $A \subset \Omega$ ,  $\Omega$  - otwarty i spójny,  $f, g$  - holomorficzne na  $\Omega$  i taka, że

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

dla  $z \in A$ ,  $f(z) \neq 0$ ,  $z \in \partial A$ . Wówczas funkcja  $f(z) + g(z)$  ma taką samą ilość zer (wraz z krotnościami), co funkcja  $f(z)$ .

*Dowód.* Niech  $a \in [0, 1]$ . Rozważmy

$$h_a(z) = f(z) + a \cdot g(z).$$

Wówczas

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{h'_a(z)}{h_a(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'(z) + ag'(z)}{f(z) + ag(z)}.$$

Zauważmy, że  $N(a)$  jest ciągłą ze względu na  $a$  (jako całka z parametrem). Z drugiej strony,

$$N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_z \text{ funkcji } f.$$

Skoro wartość  $N(0)$  jest liczbą naturalną, a  $N(a)$  jest funkcją ciągłą, to znaczy, że  $N(0) = N(a) = N(1)$ , a

$$N(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f' + g'}{f + g} = N_2 \text{ funkcji } (f + g).$$

□

**Przykład 47.** (Dowód zasadniczego twierdzenia algebry v2.0)

Niech  $f(z) = a_0 z^n$  i  $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ .

Zauważmy, że

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Możemy zatem wybrać taki zbiór  $A$ , dla którego  $|g(z)| < |f(z)|$ ,  $z \in \partial A$ , w którym zawarte będą wszystkie zera funkcji  $g(z)$ .

Zauważmy, że funkcja  $f(z)$  ma zero  $n$ -tego stopnia, czyli  $N_z = n$  dla funkcji  $f$ . Oznacza to, że ilość zer wraz z krotnościami (na mocy tw. Rouché) funkcji  $f + g$  wynosi  $n$ .  $\square$

**Przykład 48.** (Sumowanie szeregów v2.0)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ile to będzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}?$$

Niech

$$f(z) = \frac{1}{a^2 - z^2}, \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2} + \operatorname{Res}_{z=-a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2}.$$

Ale

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \operatorname{Res} \frac{1}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a}.$$

Analogicznie  $\frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\operatorname{ctg}(-\pi a)}{2a}$ . Zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a} = -\operatorname{ctg}(\pi a) \quad (\star)$$

Ale

$$\frac{a}{a^2 - n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n} \right).$$

$$\sum_{n=1}^{-\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}.$$

Zatem

$$(\star): \quad \dots + \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a-(n-1)} + \dots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a+n} + \dots = \operatorname{ctg}(\pi a).$$

Wyrażenie po prawej stronie jest funkcją okresu 1.

## 17.1 Residuum w $+\infty$

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z^{-1}} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

**Przykład 49.** (bijekcja szprychowa - rys 25)

i) Chcemy aby  $f(x) = \frac{1}{x}$  (na  $\mathbb{R}$ ) była ciągła w  $x = 0$ .

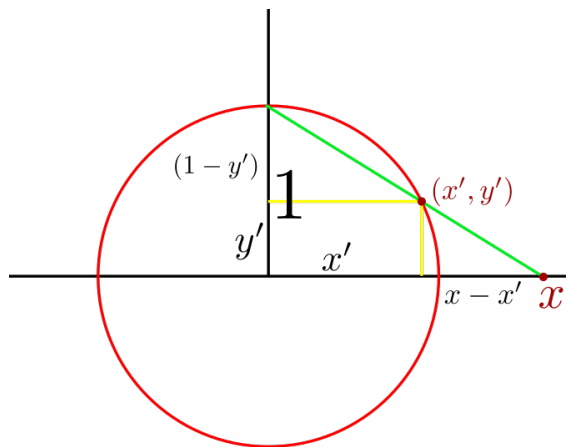
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\frac{1-y'}{x'} = \frac{y'}{x-x'} \implies x - x' - xy' + y'x' = y'x' \implies x(1-y') = x'.$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{1-y'} \\ (x')^2 + (y')^2 = 1 \end{cases}.$$

Uzwarzenie aleksandrowe  $\mathbb{R} \sim 0$ ,  $\overline{\mathbb{R}} \sim 0$  - zamknęliśmy nieskończoności w zerze.



Rysunek 25: Taka szprycha niech przecina nam okrąg

**Definicja 20.**

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + (0, 0, 1).$$

Mówimy, że  $f(z)$  jest holomorficzna w  $z = \infty$ , jeżeli funkcja  $g(z) = f(\frac{1}{z})$  jest holomorficzna w  $z = 0$ .

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad K(0, R).$$

**Definicja 21.** Jeżeli  $g(z)$  w rozwinięciu  $R(0, 0, r)$  ma postać

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z,$$

to mówimy, że  $f(z)$  ma w  $z = \infty$  biegun rzędu  $k$ .

**Definicja 22.** *Jeżeli  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$  nie istnieje, to mówimy, że  $f(z)$  ma w  $z = \infty$  osobliwość istotną.*

**Obserwacja:** Jeżeli

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

to

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_{-k} z^{k-1} + \dots + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

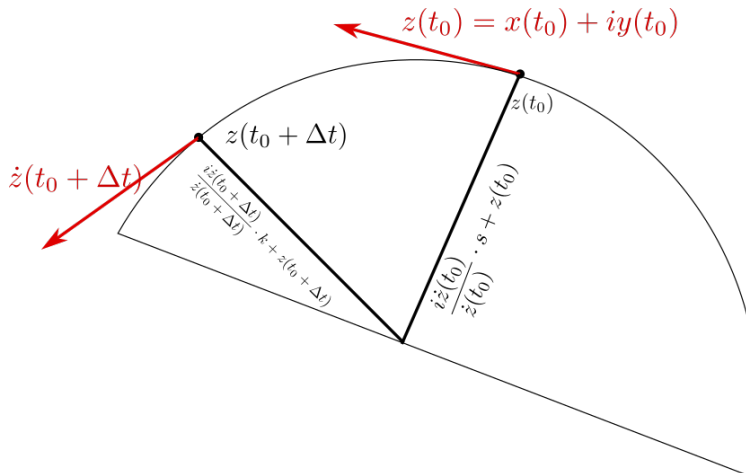
## 18 Wykład (09.12.2019)

### 18.1 Przygotowanie podłoża do tw (...)

#### 18.1.1 Krzywizna

**Pytanie 12.** Jak policzyć przyspieszenie dla nie-okręgów?

**Odpowiedź:** A jaki jest promień tego aktualnego kółka? Mamy jakąś krzywą (rys 26)



Rysunek 26: Liczymy na choma promień krzywizny

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Szukamy tego punktu przecięcia z (rys 26):  $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\frac{i\dot{z}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + z(t_0 + \Delta t) = \frac{i\dot{z}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + z(t_0).$$

i) Część urojona (wyrażamy  $k$  przez  $s$ )

$$\frac{\dot{x}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + y(t_0 + \Delta t) = \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + y(t_0).$$

Wyliczamy z tego  $k$ :

$$k = \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)).$$

ii) Część rzeczywista

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + x(t_0 + \Delta t) &= \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + x(t_0). \\ \frac{-\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t) + x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) &= . \\ &= s \cdot \left( \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} + \frac{\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \right). \end{aligned}$$

iii) Mnożymy wszystko przez  $\dot{x}(t_0 + \Delta t)$

$$\begin{aligned} -\dot{y}(t_0 + \Delta t) (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)) + (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) \dot{x}(t_0 + \Delta t) &= \\ = \frac{s}{|\dot{z}(t_0)|} (-\dot{y}(t_0)(\dot{x}(t_0 + \Delta t) + \dot{y}(t_0 + \Delta t) \cdot x(t_0)) &= \end{aligned}$$

iv) Dalej

$$\begin{aligned} & \dot{y}(t_0 + \Delta t)(y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)) + \dot{x}(t_0 + \Delta t)(x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) = \\ & = \frac{s}{|\dot{z}(t)|} (\dot{x}(t_0)[\dot{y}(t_0 + \Delta t) - \dot{y}(t_0)] - \dot{y}(t_0)[\dot{x}(t_0 + \Delta t) - \dot{x}(t_0)]) . \end{aligned}$$

v) dzielimy wszystko przez  $\Delta t$  i bierzemy granicę  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\dot{y}(t_0) \cdot \dot{y}(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot \dot{x}(t_0) = \frac{s}{\left((\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2\right)^{\frac{1}{2}}} (\dot{x}(t_0) \cdot \ddot{y}(t_0) - \dot{y}(t_0) \cdot \ddot{x}(t_0)) .$$

vi) Zatem dostajemy wzór na krzywiznę  $s$ :

$$\frac{1}{s} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

### 18.1.2 Inna fajna forma

Zauważmy, że  $\bar{z}(t) \cdot \ddot{z}(t) = (\dot{x}(t) - i\dot{y}(t)) + (\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)) = \dots + i(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}(t))$ , czyli mając  $z(t)$ , policzymy krzywiznę tak:

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(\bar{z}\ddot{z})}{|\dot{z}|^3} .$$

**Przykład 50.** Krzywa:  $z(t) = 2e^{it}$ ,  $\dot{z}(t) = 2ie^{it} = 2e^{i(t+\frac{\pi}{2})} \implies \bar{\dot{z}}(t) = 2e^{-i(t+\frac{\pi}{2})}$ ,  $\ddot{z}(t) = -2e^{it}$ .

$$\bar{\ddot{z}}\ddot{z} = -4e^{i(t-t-\frac{\pi}{2})} = -4 \cdot (-i) .$$

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(4i)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} .$$

Czyli okrąg o promieniu 2 ma promień równy 2.

### 18.1.3 Odwzorowania konforemne

**Definicja 23.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  - spójny,  $F$  - różniczkowalna na  $\Omega$ . Mówimy, że

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N .$$

jest odwzorowaniem konforemnym, jeżeli  $F'$  jest proporcjonalna do macierzy ortogonalnej.

$$F'(x) = f(x) \cdot R(x) ,$$

gdzie  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , a  $R(x)$  - macierz  $n \times n$  taka, że

$$R(x)^{-1} = (\bar{R}(x))^T, \quad \det R(x) = 1 .$$

**Stwierdzenie 4. (Wniosek:)** odwzorowanie konforemne zachowuje kąt między stycznymi do krzywych.

*Dowód.* Weźmy dwie krzywe sparametryzowane

$$x_1(t), \quad t \in ]-a, a[$$

$$x_2(t), \quad t \in ]-b, b[$$

i

$$x_1(0) = x_1(0) .$$

Wówczas ( $\gamma$  - kąt między krzywymi)

$$\cos \gamma = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|_{t=0}}.$$

Policzmy kąt między stycznymi do krzywych  $F(x_1(t)), F(x_2(t))$

$$\cos \gamma' = \frac{\langle \frac{d}{dt} F(x_1(t))_{t=0} | \frac{d}{dt} F(x_2(t))_{t=0} \rangle}{\|\dots\| \|\dots\|},$$

ale my wiemy, że

$$\frac{d}{dt} F(x_1(t))_{t=0} = F'(x_1(t)) \frac{d}{dt} x_1(t)_{t=0} =$$

$F$  - konforemna, więc

$$= f(x_1(t)) R(x_1(t)) \dot{x}_1(t)_{t=0}.$$

Pamiętamy, że jeżeli  $R$  - ortogonalna, to  $\langle x | y \rangle = \langle Rx | Ry \rangle$ , zatem

$$\cos \gamma' = \frac{\langle f \cdot R \dot{x}_1 | f \cdot R \dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|f \cdot R \dot{x}_1\| \|f \cdot R \dot{x}_2\|_{t=0}} = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle}{\|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|_{t=0}} = \cos \gamma.$$

□

**Pytanie 13.** *A co z funkcjami zespolonymi?*

**Odpowiedź:** Niech

$$f(z) = f(x + iy) = f_1(x, y) + i f_2(x, y),$$

taka, że  $f$  - holomorficzna. Możemy zatem badać funkcję

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \stackrel{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Jeżeli  $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  i  $R$  - ortogonalna, to znaczy, że  $R^{-1} = \overline{R}^T$  i  $\det R = 1$

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies d = a \wedge -b = c.$$

Czyli

$$F'(x, y) = (a^2 + b^2) \frac{1}{a \cdot a - (-b) \cdot b} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

## 18.2 Powrót do residuów w nieskończoności

mamy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in R(0, 0, r).$$

Oznacza to, że

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Zauważmy, że  $a_n$  w rozwinięciu  $g(z) \dots$  jest dany wzorem

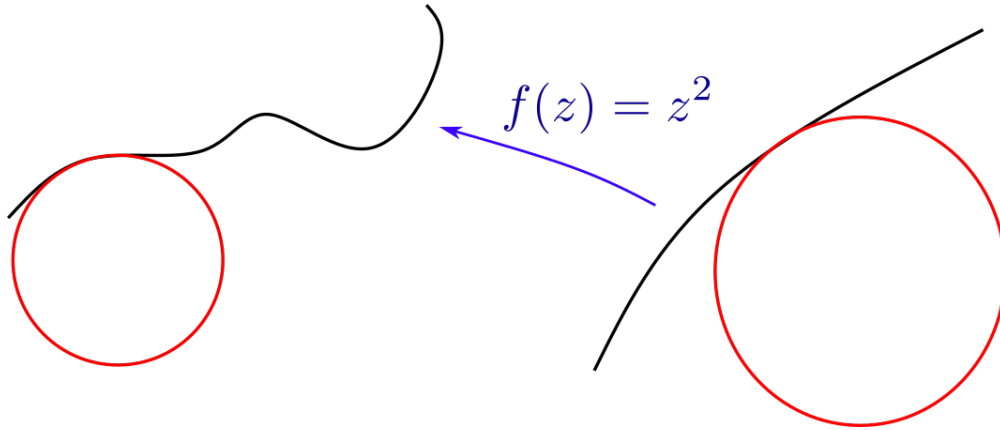
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0, t) \\ 0 < t < r}} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Zamieniamy zmienne:  $z = \frac{1}{z'}$ ,  $dz = -\frac{1}{(z')^2}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0, \frac{1}{t}) \\ 0 < t < r}} \frac{g\left(\frac{1}{z'}\right)}{\left(\frac{1}{z'}\right)^{n+1}} \cdot \frac{-1}{(z')^2} dz' = \int_{\substack{\partial K(0, \frac{1}{t}) \\ 0 < t < r}} f(z')(z')^{n-1} dz'.$$



## 19 Wykład (13.12.2019)



Rysunek 27

### 19.0.1 Sprawdzamy jak zmienia się promień krzywizny przy transformacji $f(z)$

(rys 27).

$$\frac{1}{s} = \frac{\operatorname{Im}(\ddot{z}\bar{\dot{z}})}{|\dot{z}|^3}.$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{\operatorname{Im}\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}(z(t))^2 \frac{d}{dt}|z(t)|\right)\right)}{\left|\frac{d}{dt}(z(t))^2\right|^3}.$$

$$\tilde{z}(t) = (z(t))^2.$$

$$(\dot{\tilde{z}}(t))' = (2(z(t)(\dot{z}(t))))' = 2\dot{z}(t)\dot{z}(t) + 2z(t)\ddot{z}(t).$$

$$(\bar{\tilde{z}})' = (\bar{z}(t)\bar{\dot{z}}(t))' = 2\bar{z}(t)\bar{\dot{z}}(t).$$

$$\ddot{\tilde{z}} \cdot \bar{\dot{\tilde{z}}} = (2(\dot{z}(t))^2 + 2z(t)\ddot{z}(t)) (2\bar{z}(t)\bar{\dot{z}}(t)) = 4\bar{z}(t)|\dot{z}|^2\dot{z}(t) + 4|z(t)|^2\bar{\dot{z}}(t) \cdot \ddot{z}(t).$$

Ale

$$\frac{\operatorname{Im}(\ddot{\tilde{z}}\bar{\dot{\tilde{z}}})}{|\dot{\tilde{z}}(t)|^3} = \frac{\operatorname{Im}(4\bar{z}(t)|\dot{z}(t)|^2 \cdot \dot{z}(t))}{8|z(t)|^3|\dot{z}(t)|^3} + \frac{\operatorname{Im}(4|z(t)|^2\bar{\dot{z}}(t)\ddot{z}(t))}{8|z(t)|^3|z(t)|^3}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{\operatorname{Im}(\bar{z}(t)\dot{z}(t))}{|z(t)|^2|z(t)|} + \frac{1}{s} \right).$$

Ale

$$\bar{z}(t)\dot{z}(t) = (x(t) - iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} + i(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}(t)\dot{z}(t)) = x\dot{y} - y\dot{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{bmatrix} = |\bar{z}(t)| \cdot |\dot{z}(t)| \sin(\angle \dot{z}(t), \bar{z}(t)).$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{|z(t)||\dot{z}(t)|}{|z(t)|^2 \cdot |\dot{z}(t)|} \sin(\angle(\dot{z}, \bar{z})) + \frac{1}{s} \right).$$

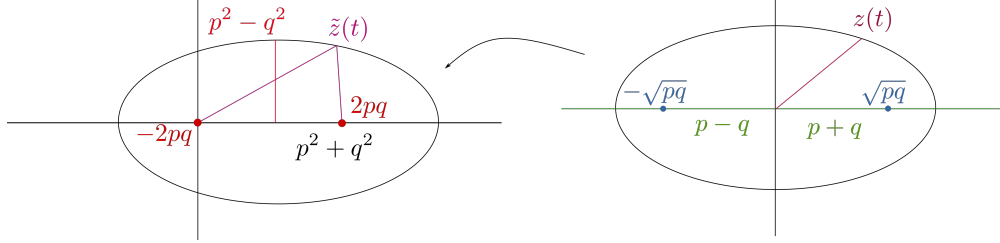
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{\sin(\angle(\dot{z}, \bar{z}))}{|z(t)|} + \frac{1}{s} \right).$$

### 19.0.2 Już prawie twierdzenie Kasner-Arnold

Rozważmy ruch na  $\mathbb{R}^2$ , pod wpływem siły  $F = -r$ , czyli na  $\mathbb{C}$

$$\ddot{z}(t) = -z(t), \text{ gdzie } (m = 1, k = 1).$$

Trajektoria wygląda tak:



Rysunek 28: przed i po

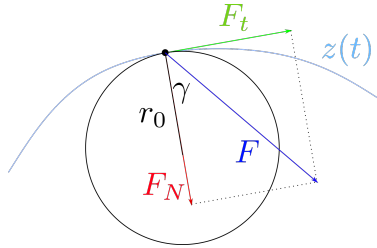
$$z(t) = pe^{it} + qe^{-it} = (p + q) \cos(t) + i(p - q) \sin(t).$$

$$(x(t), y(t)) = ((p + q) \cos(t), (p - q) \sin(t)).$$

Jak rozpoznać siłę typu  $F = -\frac{1}{r^2}$  od  $F = -r$ ? Trajektoria wychodzi taka sama, ale dla tej drugiej siła jest zaczepiona w środku elipsy. Co się stanie jak przepuścimy tę elipsę przez  $f(z) = z^2$ ? Dostaniemy

$$\tilde{z}(t) = (pe^{it} + qe^{-it})^2 = p^2 e^{2it} + 2pq + q^2 e^{-2it} = (p^2 + q^2) \cos(2t) + 2pq + i(p^2 - q^2) \sin(2t)$$

taką przesuniętą elipsę jak na rys. 28



Rysunek 29

**Pytanie 14.** Jeżeli  $F = -r$ , To jaka jest  $\tilde{F}$ ? (sytuacja jak na rys. 29)

$\cos \gamma = \frac{F_N}{F}$ ,  $F = \frac{F_N}{\cos \gamma}$ , ale  $F_N = \frac{v^2(t)}{r_0}$ . My wiemy, że czasami zachowany jest moment pędu

$$\bar{r} \times \bar{v}(t) = r \cdot v \sin(\angle r, v) = rv \cos \gamma = \text{const} = A.$$

Czyli

$$v = \frac{A}{r \cos \gamma}.$$

$$F = \frac{F_N}{\cos \gamma} = \frac{1}{r_0} \frac{A^2}{r^2 (\cos \gamma)^3}.$$

I dostaliśmy taki związek. Dla ruchu po okręgu  $\gamma = 0$ ,  $r = r_0$  i wtedy

$$F = \frac{1}{r^3} A^2 = \frac{1}{r^3} (rv)^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Znowu spróbujemy przepuścić taki ruch przez  $f(z) = z^2$ . Przypuszczamy, że będą takie zmiany:

$$\begin{aligned} A &\sim \tilde{A} \\ r &\sim \tilde{r} \\ r_0 &\sim \tilde{r}_0 \\ \gamma &\sim \gamma \quad (\text{bo } f(z) \text{ - koforemna}) \\ v &\sim \tilde{v} \\ F &\sim \tilde{F}. \end{aligned}$$

Ale

$$F = \frac{A^2}{r_0} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(\cos \gamma)^3}.$$

Zatem

$$\tilde{F} = \frac{1}{\tilde{r}_0} \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{1}{(\cos \gamma)^3}.$$

A i  $\tilde{A}$  się nie przejmujemy, ale za to  $r_0$  już tak

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\sin(\angle(z, \bar{z}))}{r \cos \gamma} \right).$$

Z tego co wcześniej napisaliśmy, mamy

$$\frac{1}{r_0} = \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos \gamma)^3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\cos \gamma}{r} + \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos \gamma)^3 \right). \\ \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{1}{r} \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} r \left( \frac{(A)^2}{2r^2 (\cos \gamma)^2} + \frac{Fr}{2} \right). \\ \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{Fr}{2} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy  $F \sim r$ , to

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r^2 = E.$$

(Energia całkowita ruchu po elipsie, przed przepuszczeniem przez  $f(z) = z^2$  )

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} \cdot E.$$

Zatem podstawiając do wcześniej wyliczonego  $\tilde{F}$  mamy

$$\tilde{F} = \frac{(\cos \gamma)^3 E}{(A)^2} \cdot \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \frac{1}{(\cos \gamma)^3} = \left( \frac{\tilde{A}}{A} \right)^2 \frac{E}{\tilde{r}^2} = \frac{const}{\tilde{r}^2}.$$

To jest dowód Kasnera - Arnolda w przypadku  $f(z) = z^2$ . Siły grawitacji i te  $\sim r$  okazują się być w jakiejś "dualności" względem  $z^2$ .

**Twierdzenie 16.** *(Kasner-Arnold)*

*Jeżeli  $F_1 \sim r^A$ , a  $F_2 \sim r^{\tilde{A}}$  i*

$$(A+3)(\tilde{A}+3)=4$$

*i  $m = \frac{A+3}{2}$ , to transformacja  $f(z) = z^m$  przeprowadza ruch (trajektorię i cały ten posag) pod wpływem siły  $F_1$  w ruch pod wpływem siły  $F_2$ .*

**Przykład 51.** *sprężyna* -  $A = 1$ ,  $\tilde{A} = -2$ ,  $m = \frac{1+3}{2} = 2$

$$(1+3)(-2+3)=4.$$

*Wtedy nasz  $f$  wynosi  $f(z) = z^2$ .*

## 20 Wykład (16.12.2019)

### 20.0.1 dodatek na temat kąta

Było

$$\sin(\angle \dot{z}, \bar{z}).$$

Ma być

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = |z| |\dot{z}| \sin(\angle(z, \dot{z})).$$

### 20.0.2 Powrót do residuów w nieskończoności

Dostaliśmy na Wykładzie 18

$$a_n = -\frac{2}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) z^{n-1} dz.$$

Wielkość

$$-a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) dz$$

nazywamy residuum funkcji  $f$  w nieskończoności.

**Stwierdzenie 5.** Niech  $f$  - holomorphyzna na  $\mathbb{C}$  z wyjątkiem punktów  $z_1, \dots, z_k$ , ale  $z_i$  - biegun  $p_i$  rzędu (nie ma punktów istotnie osobliwych). Wówczas

$$\sum_{\text{Res } f + \text{Res } \infty} f = 0.$$

*Dowód.* Niech  $z_i$  takie, że

$$\exists_A \quad \forall_i \quad z_i \in A.$$

Wówczas

$$-\int_{\partial A} f + \sum_i \int_{\partial K(z_i, r_i)} f = 0.$$

□

**Pytanie 15.** Jak obliczyć  $a_1$ ?

Zauważmy, że gdy rozwiemy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

w szereg Laurenta wokół zera, to  $g(z)$  przyjmuje postać

$$g(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Zauważmy, że

$$\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{a_2}{z^4} + \frac{a_{-1}}{z^3} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \dots$$

Zatem

$$\text{Res}_\infty f(z) = -\text{Res}_0 \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}.$$

**Przykład 52.**

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = \sum_{\substack{\text{Res} \\ (-1)^{\frac{1}{8}}}} f = -\text{Res}_{\infty} f(z).$$

Ale

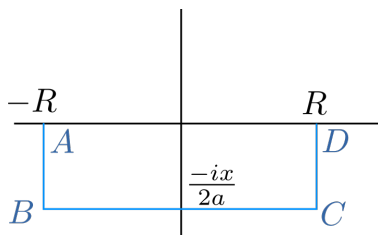
$$f(z) = \frac{1}{(z^8+1)^2}.$$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^8+1\right)^2} = \frac{z^{16}}{(1+z^8)^2}$$

i liczymy  $\text{Res}_0 \frac{g(z)}{z^2}$  Ale

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot z^{14}}{(1+z^8)^2} = 0.$$

Więc całka też 0.



Rysunek 30: w20-1

**Przykład 53.** Sytuacja jak na rys. 30

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt, \quad a \geq 0.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2 + \frac{x^2}{4a^2}\right]} dt = e^{-a\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt.$$

Liczmy teraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R-\frac{ix}{2a}}^{R-\frac{ix}{2a}} e^{-as^2} ds.$$

Niech  $f(z) = e^{-az^2}$

$$\int_{AB} f + \int_{BC} f + \int_{CD} f + \int_{DA} f = 0.$$

BC już mamy, więc

$$\int_{BC} f = - \int_{DA} f - \int_{BA} f - \int_{CD} f.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{CD} f = 0.$$

Parametryzacja  $CD := \{z = R + iy, -\frac{x}{2a} \leq y \leq 0\}$

$$\int_{CD} f = \int_{-\frac{x}{2a}}^0 idy \cdot e^{-a(R+iy)^2} = i \int_{-\frac{x}{2a}}^0 dy \cdot e^{-aR^2} e^{-2Riya} e^{ay^2}.$$

$$\left| \int_{CD} f \right| \leq e^{-aR^2} \left| \frac{x}{2a} \right| \cdot |e^{-2Riya}| \cdot \max_{-\frac{x}{2a} \leq y \leq 0} |e^{ay^2}| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

I tak samo będzie z całką po  $AB$ . Jeszcze zostało  $DA$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} - \int_{DA} f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

## 20.1 Transformaty Fouriera

**Obserwacja:** Rozwińmy  $f(z)$  w  $R(0, a, b)$ ,  $a, b < 1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ a < t < b}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Wstawmy  $z = e^{ix}$

$$g(z) = f(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Ale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,t)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{ix})}{e^{i(n+1)x}} e^{ix} dx.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

**Definicja 24.** Transformatą Fouriera funkcji  $f$  nazywamy wielkość

$$\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xt} f(t) dt.$$

**Uwaga:** transformatę Fouriera możemy zdefiniować też tak

**Definicja 25.** (inne notacje)

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\sigma xt} f(t) dt,$$

gdzie  $m = \{1, 2\pi\}$ ,  $q = \{-1, 1\}$ ,  $\sigma = \{1, 2\pi\}$ .

Konwencja u nas:

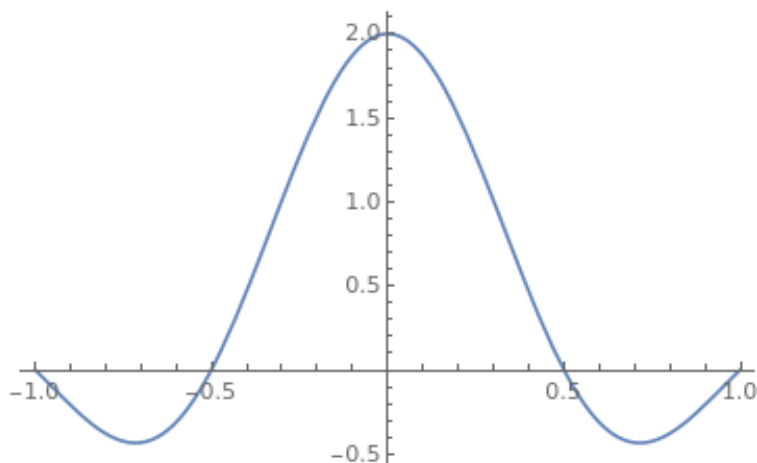
- $m = 1$
- $q = -1$
- $\sigma = 2\pi i$

**Przykład 54.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi tx} dt = \int_{-a}^{+a} e^{-i2\pi tx} dt = -\frac{1}{2\pi ix} e^{-i2\pi tx} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{2\pi ix} [e^{-i2\pi ax} - e^{i2\pi ax}] = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}.$$

Czyli jak na rys. 31



Rysunek 31: Wynik przefourierowania  $f$

**Definicja 26.** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że

- $f$  - klasy  $L_1$ , jeżeli

$$\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty.$$

- $f$  - klasy  $L_2$ , jeżeli

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < +\infty.$$

**Przykład 55.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & w.p. \end{cases}.$$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} & x > 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

*Zbadać, czy  $f$  jest klasy  $L_1$  lub (i)  $L_2$  i czy  $g$  jest klasy  $L_1$  lub (i)  $L_2$*

## 21 Wykład (20.12.2019)

Do pytania o  $L_1$  i  $L_2$ .

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f| &= \int_0^1 (x)^{-\frac{2}{3}} = 3 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 &= \int_0^1 (x)^{-\frac{4}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g| &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3\end{aligned}$$

Czyli  $f$  - klasy  $L_1$ ,  $g$  - klasy  $L_2$

### 21.1 Własności (transformaty Fouriera)

1. Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $f, g$  - klasy  $L_1$ , wówczas

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g.$$

(z liniowości całki)

2. Niech  $f, g$  - klasy  $L_1$ , wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

*Dowód.* (z twierdzenia Fubiniiego)

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \hat{f}(k) dk.\end{aligned}$$

□

**Obserwacja:** chcemy rozwiązać równanie:

$$(f(t))'' + \omega^2 f(t) = g(t).$$

Założmy, że nasz  $f$  :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Dajmy na to, że

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f'(t) = -2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f''(t) = (-2\pi i k)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Po podstawieniu do oscylatora, uzyskujemy napis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(-2\pi i k)^2 h(k) + \omega^2 h(k) - w(k)] e^{-2\pi i k t} dk = 0,$$

co by oznaczało tyle, że

$$(-4\pi^2 k^2 + \omega^2) h(k) = w(k).$$

Czyli

$$h(k) = \frac{w(k)}{-4\pi^2 k^2 + \omega^2}.$$

Ale wiemy, że

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(k)}{\omega^2 - 4\pi^2 k^2} e^{-2\pi i k t} dt.$$

**Obserwacja:** Jeżeli  $f$  - klasy  $L_1$  i  $f'$  - klasy  $L_1$ , to  $\mathcal{F}(f')(x) = 2\pi i x (\mathcal{F}f)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(k) e^{-2\pi i k x} dk = f(k) e^{-2\pi i k x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-2\pi i x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk}_{\mathcal{F}(f)}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$ , to znaczy, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , oraz skoro  $f'$  - klasy  $L_1$ , to

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(k) dk.$$

Skoro  $f'$  - klasy  $L_1$ , to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - f(0)| \leq \left| \int_0^{+\infty} f'(k) dk \right| \leq M.$$

Widzimy zatem, że  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \leq M$  znaczy, że jeżeli  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty$ , to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \square$$

Zatem

$$\mathcal{F}(f')(x) = (2\pi i x)(\mathcal{F}f)(x),$$

(jeżeli  $f, f', \dots, f^{(m)}$  - klasy  $L_1$ ) i ogólniej

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi i x)^m (\mathcal{F}f)(x).$$

**Obserwacja:** Niech  $f$  - klasy  $L_1$ , wówczas  $\frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x) = -2\pi i \mathcal{F}(xf)$

Dowód.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\mathcal{F}f)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{F}f)(x+h) - (\mathcal{F}f)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(k)e^{-2\pi i k(x+h)} - f(k)e^{-2\pi i kx}) dk = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi i kx} \left( \frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \right) dt\end{aligned}\quad (\star)$$

Ale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\pi i k e^{-2\pi i kh}}{1} = -2\pi i k.$$

Zatem dalej mamy

$$(\star\star) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi i k f(k) e^{-2\pi i kx} dk = -2\pi i (\widehat{xf}).$$

□

## 21.2 Transformata odwrotna

1. policzmy  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} dk.$$

Wcześniej napisaliśmy  $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$ . No to weźmy  $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i kx} dk$ , ale to jeszcze nie teraz, bo taka całka jeszcze nie istnieje. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dk = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dx.\end{aligned}$$

Policzmy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i kx} e^{\varepsilon|x|} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-2\pi i k + \varepsilon)x} dx = \frac{1}{-2\pi i k - \varepsilon} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} e^{-2\pi i k + \varepsilon} \Big|_{-\infty}^0 \quad (\star\star)\end{aligned}$$

Ale  $e^{-2\pi i kx} \cdot e^{-\varepsilon x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$(\star\star) = \frac{-1}{-2\pi i k - \varepsilon} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon + 2\pi i k} + \frac{1}{\varepsilon - 2\pi i k} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2}.$$

Zatem

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2} dk.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\varepsilon L)^2} \cdot \varepsilon \cdot dL = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon^2 dL}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon)}.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{2\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{1}{1 + L^2} dL = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{dL}{1 + L^2} = \frac{2f(0)}{2\pi} (\arctg(L))_{-\infty}^{+\infty} = \frac{f(0)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{f(0)}{\pi} \cdot \pi = f(0) \quad \square$$

Niech  $f_L(x) = f(x + L)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_L(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(L + k) e^{-2\pi i k x} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k') e^{-2\pi i x(k' - L)} dk' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x L} f(k') e^{-2\pi i x k'} dk' = e^{2\pi i x L} (\mathcal{F}f). \end{aligned}$$

Policzmy całkę  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f_L)(x)$ . Wiemy, że

$$f_L(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f_L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i L} \mathcal{F}f.$$

Czyli

$$f(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{2\pi i L} dL.$$

Mamy wzór na transformatę odwrotną, czyli wiemy, że jeżeli  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk$ , to  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} dk$