

Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

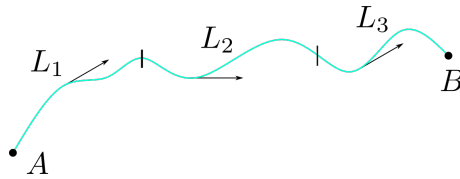
$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$, (rys ??)

$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$



Rysunek 0.1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 1. (rys ??)

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

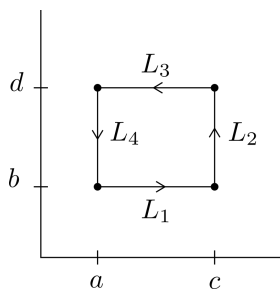
Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

Rysunek 0.2: $\dim M = 2$

$$\begin{aligned}
 \int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\
 &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \\
 &+ \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\
 &= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + \\
 &- \int_a^c A(x, d) dx - \int_b^d B(a, y) dy.
 \end{aligned}$$

(rys ??)

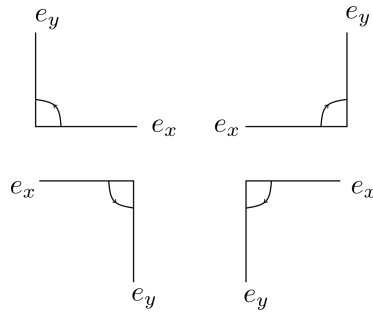


Rysunek 0.3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).
 $a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)

$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.

(rys ??)



Rysunek 0.4: Różne orientacje na \mathbb{R}^2 , czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 1. Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V .

Definicja 2. Orientację standardową na \mathbb{R}^n nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$

Definicja 3. Niech M - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i
 $S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma. Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 2. weźmy $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ i obliczmy $\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \int_P d\omega &= \int_{[a, b] \times [c, d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dy = \\ &= \int_c^d dy (B(b, y) - B(a, y)) - \left[\int_a^b dx (A(x, d) - A(x, c)) \right] = \\ &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy - \int_a^c A(x, d) dx - \int_c^d B(a, y) dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

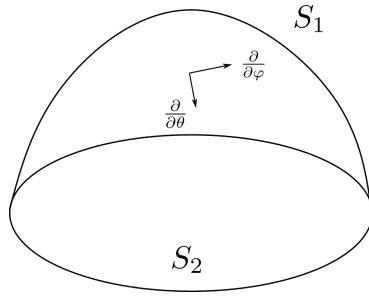
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 3. niech (sytuacja jak na rys 13) $S = S_1 \cup S_2$, gdzie

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 0.5: Tak to wygląda

Definicja 4. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map (U_i, φ_i) , że dla każdej pary $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ takiej, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, odwzorowanie $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$.*

Definicja 5. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy zorientowaną.*

Definicja 6. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*