Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

X 2019 - II 2020

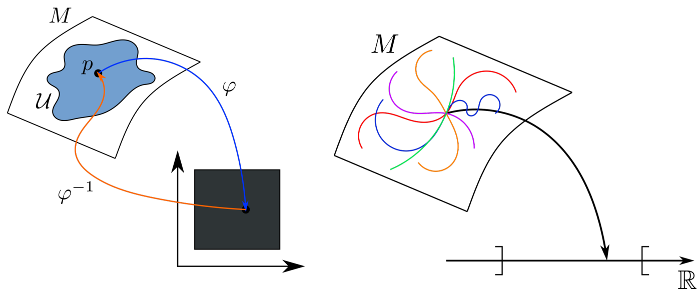
Spis treści

Wstęp

Niniejszy dokument zawiera moje notatki z wykładu Analiza III wygłoszonego przez dr Marcina Kościeleckiego na Wydziale Fizyki UW w semestrze zimowym roku akademickiego 2019/2020.

Wykład 1. 04.10.2019, *przypomnienie i całka z jednoformy*

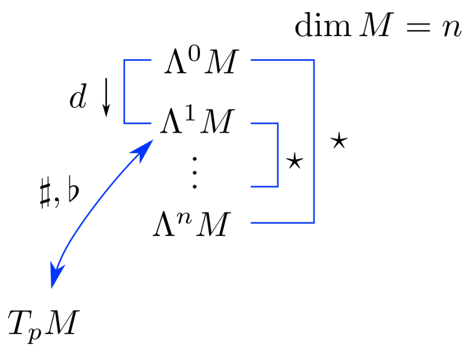
Przypomnienie



Rysunek 1.1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \ldots & \alpha_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \ldots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 1.2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w\rangle = [v]^T[g_{ij}]\begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^n\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

To jak to było z tymi wektorami?

Niech $A \in T_pM$, $A = A^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^k\frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_pM$, $B = B^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^k}$. Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\left\langle A^\sharp, B\right\rangle, \quad (g_{ij} \text{ - diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\left\langle A^\sharp, B\right\rangle = \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k, B^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + B^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle = \\ = g_{11}A^1B^1 + \ldots + g_{kk}A^kB^k = A \cdot B.$$

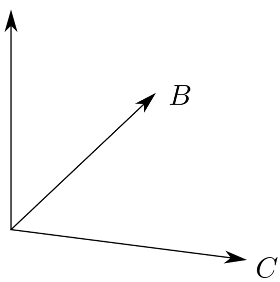
Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\left\langle A^\sharp, B\right\rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B. Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1\frac{\partial}{\partial x^1} + B^2\frac{\partial}{\partial x^2} + B^3\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + C^3\frac{\partial}{\partial x^3} \in T_pM.$$

$$\begin{aligned}
\langle A,B,C\rangle &= A^1\left\langle dx^2\wedge dx^3,B,C\right\rangle + A^2\left\langle dx^3\wedge dx^1,B,C\right\rangle + A^3\left\langle dx^1\wedge dx^2,B,C\right\rangle = \\
&= A^1\begin{bmatrix}\left\langle dx^2,B\right\rangle & \left\langle dx^3,B\right\rangle\\ \left\langle dx^2,C\right\rangle & \left\langle dx^3,C\right\rangle\end{bmatrix} + A^2\begin{bmatrix}\left\langle dx^3,B\right\rangle & \left\langle dx^1,B\right\rangle\\ \left\langle dx^3,C\right\rangle & \left\langle dx^1,C\right\rangle\end{bmatrix} + \\
&+ A^3\begin{bmatrix}\left\langle dx^1,B\right\rangle & \left\langle dx^2,B\right\rangle\\ \left\langle dx^1,C\right\rangle & \left\langle dx^2,C\right\rangle\end{bmatrix} = \\
&= A^1\begin{bmatrix}B^2 & B^3\\ C^2 & C^3\end{bmatrix} + A^2\begin{bmatrix}B^3 & B^1\\ C^3 & C^1\end{bmatrix} + A^3\begin{bmatrix}B^1 & B^2\\ C^1 & C^2\end{bmatrix} = \\
&= A^1\left(B^2C^3-B^3C^2\right) + A^2\left(B^3C^1-B^1C^3\right) + A^3\left(B^1C^2-B^2C^1\right) = \\
&\text{"}={}\text{"}A^1(B\times C)_1 + A^2(B\times C)_2 + A^3(B\times C)_3\text{"}={}\text{"}A\cdot(B\times C) \\
&= \left|\begin{bmatrix}A^1 & A^2 & A^3\\ B^1 & B^2 & B^3\\ C^1 & C^2 & C^3\end{bmatrix}\right|.
\end{aligned}$$

Wychodzi tak jak na (rys 1.3)



Rysunek 1.3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w $\mathbb{R}^3$ (np. spiralę) (rys 1.3). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B.

1. sparametryzujmy kształt S, np.

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{matrix}, t \in [0, 4\pi] \right\}.$$

2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych.
   Jeżeli $p = \left.\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}\right|_{t=t_0}$, to

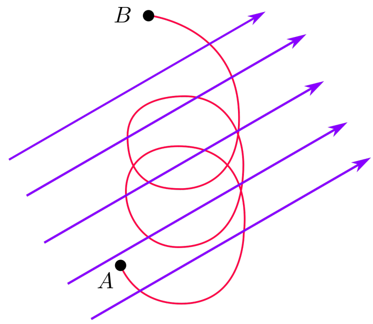
$$T_pM = \left.\left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle\right|_{t=t_0}.$$

   (rys 1.4)

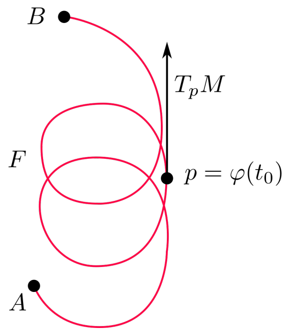
3. Niech $T_pM \ni v = -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 1.5)
   Możemy policzyć np.

$$\int \langle F, v \rangle = \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^\star F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 1.4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



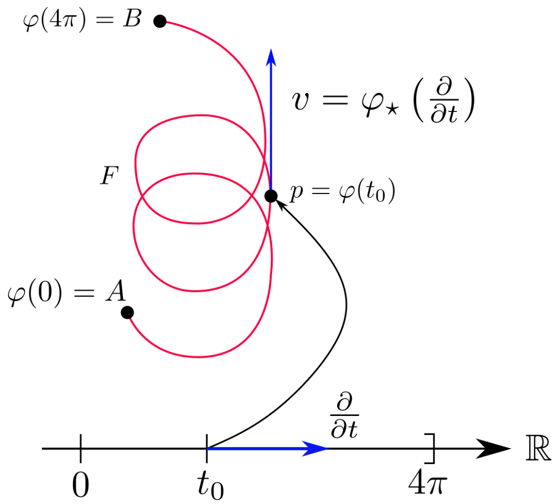
Rysunek 1.5: można jakoś to sparametryzować przez φ

Definicja 1. *Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M, $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a,b] \to M$ - parametryzacja krzywej L, czyli*

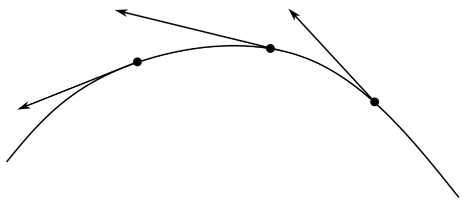
$$L = \{\varphi(t), t \in [a,b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 1.6)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 1.6



Rysunek 1.7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Przykład 1. *niech (rys 1.7)*

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leqslant t \leqslant 2\right\}$$

i

$$\omega = ydx = \left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)^\sharp.$$

Wtedy mamy $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$, $\varphi^\star\omega = \begin{vmatrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^\star\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int\limits_{C_1} \omega = \int\limits_1^2 \left\langle \varphi^\star\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int\limits_1^2 (2t-1)dt = \left[t^2-t\right]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leqslant u \leqslant 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

$$\int\limits_{C_2} \omega = \int\limits_1^2 \left\langle \varphi_1^\star\omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\begin{matrix} x = 2-u \\ dx = -u \end{matrix}$ *i mamy*

$$\varphi^\star\omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int\limits_{C_2} \omega = \int\limits_1^2 (2u-5)du = \left[u^2-5u\right]_1^2 = -6+4 = -2.$$

Wykład 2. 07.10.2019, *całka po kostce, rozmaitości zorientowane i prawie twierdzenie Stokesa*

Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

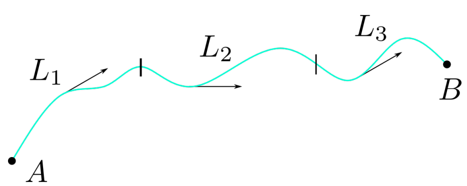
$$L : \{[a, b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$, (rys 2.1)

$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$



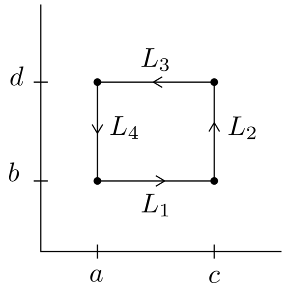
Rysunek 2.1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. *(rys 2.2)*

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leqslant x \leqslant c\}.$$



Rysunek 2.2: $\dim M = 2$

$$\begin{aligned} L_2 &= \{(c,y), b \leqslant y \leqslant d\}. \\ L_3 &= \{(x,d), a \leqslant x \leqslant c\}. \\ L_4 &= \{(a,y), b \leqslant y \leqslant d\}. \end{aligned}$$

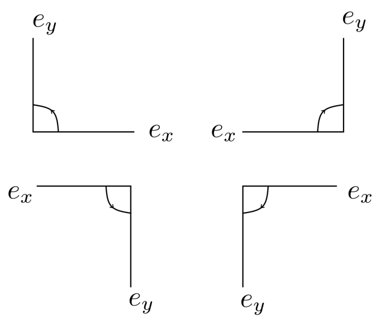
$$\begin{aligned} \int\limits_L \omega = \int\limits_{L_1} \omega + \int\limits_{L_2} \omega + \int\limits_{L_3} \omega + \int\limits_{L_4} \omega = \\ = \int\limits_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int\limits_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \\ + \int\limits_a^c \left\langle \varphi_3^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int\limits_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ = \int\limits_a^c A(x,b) dx + \int_b^d B(c,y) dy + \\ - \int\limits_a^c A(x,d) dx - \int\limits_b^d B(a,y) dy. \end{aligned}$$

(rys 2.3)

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_pM \to T_pM$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).
$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.

Rysunek 2.3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

(rys 2.4)



Rysunek 2.4: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 2. *Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V.*

Definicja 3. *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \ldots .$$

Definicja 4. *Niech M - rozmaitość zorientowana,* $\dim M = n$ *i* $S = \{[a,b]\times[c,d] \ni (t_1,t_2) \to \varphi(t_1,t_2) \in M\}$ *- powierzchnia sparametryzowana,* $\Lambda^2 M \ni \omega$ *- dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{\textit{zgodne z orientacją}} \quad \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. *weźmy* $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ *i obliczmy* $\int\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix}\right\}.$$

Wtedy mamy

$$\int\int_P d\omega = \int \int_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} =$$

$$= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx \,(A(x,d) - A(x,c))\right] =$$

$$= \int_a^b A(x,c)dx + \int_c^d B(b,y)dy - \int_a^c A(x,d)dx - \int_c^d B(a,y)dy =$$

$$= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{l_4} \omega.$$

Czyli

$$\int\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

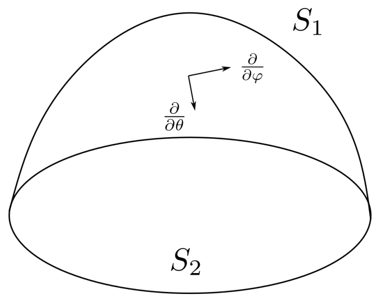
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. *niech (sytuacja jak na rys 13)* $S = S_1 \cup S_2$*, gdzie*

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\right\}, \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\right\},$

$\alpha \in \Lambda^2 M.$

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 2.5: Tak to wygląda

Definicja 5. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* (U_1, φ_1)*, że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$*, odwzorowanie* $\det\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)' > 0$.

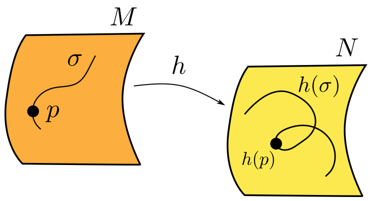
Definicja 6. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*

Definicja 7. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

Wykład 3. 11.10.2019, *wstęga Moebiusa i dowód twierdzenia Stokesa (1/2)*

Przypomnienie

(rys 1)
Dla $v \in T_pM$, jest



Rysunek 3.1: Przypomnienie

$$h_\star v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t))\sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt}\sigma(t)$,

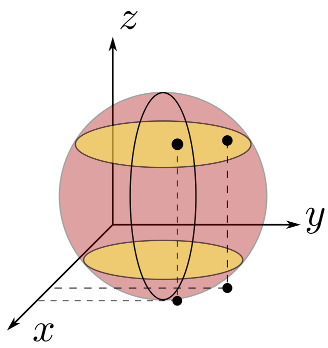
$$h_\star v = \underbrace{h'(\sigma(t))}_{\text{macierz kwadratowa}} v.$$

Przykład 5. *Niech*

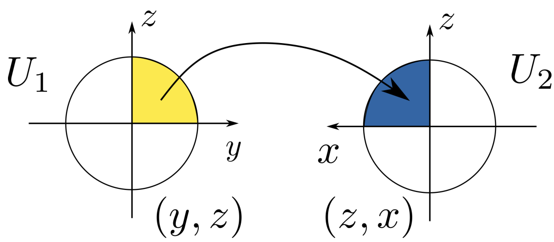
$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

$$U_1^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_1^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\right\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



Rysunek 3.2: fig3-2



Rysunek 3.3: fig3-3

$$y = \sqrt{1-x^2-z^2}$$

$$z = z \qquad\qquad (z,x) \to h(z,x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1-x^2-z^2} \end{bmatrix}$$

$$(x>0, z>0).$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) & \frac{\partial}{\partial x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x>0 \\ z>0 \end{matrix}.$$

Przykład 6. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R. (rys 4)*

$$x(\theta,t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\theta$$
$$y(\theta,t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta$$
$$z(\theta,t) = \left(t\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' i t'.

$$x'(\theta',t') = \left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right)\right)\cos\theta'$$
$$y'(\theta',t') = -\left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right)\right)\sin\theta'$$
$$z'(\theta',t') = t'\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right).$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$W_1 = \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\}$$
$$W_2 = \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Dla W_1

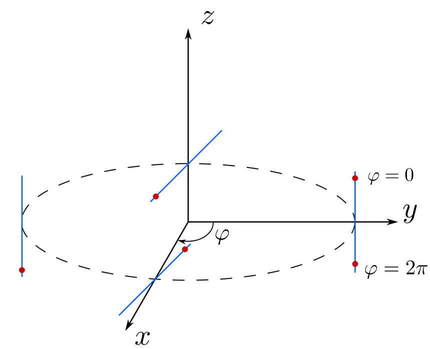
$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

dla W_2

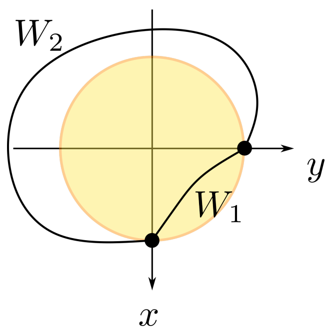
$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi_1'(\theta,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2'(\theta,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det\varphi_1' < 0 \quad \det\varphi_2' > 0.$$



Rysunek 3.4: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 3.5: Obszary wspólne

Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

1. Niech $I^n = [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0.1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)
   Wprowadźmy oznaczenia:

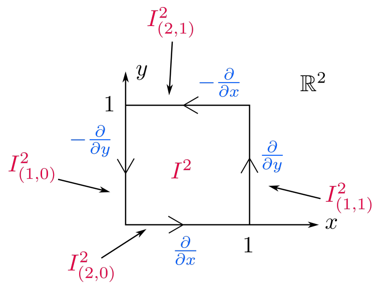
$$I^n_{(i,0)} := \left\{ \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n \right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1 \right\}.$$

$$I^n_{(i,1)} := \left\{ \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n \right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1 \right\}.$$

   (odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)}\text{"} = \text{"}I^2_{(1,1)}\text{"} + \text{"} - I^2_{(2,1)}\text{"} + \text{"} - I^2_{(1,0)},$$

   (tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
   - ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.



Rysunek 3.6: fig3-6

Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n.

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned}\omega = {} & f_1(x^1,\ldots,x^n)dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1,\ldots,x^n)dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\ & + f_i(x^1,\ldots,x^n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\ & + f_n(x^1,\ldots,x^n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1,\ldots,x^n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\int_{\partial I^n} \omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \Big\langle f(x^1,\ldots,x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big\rangle dx^1 \ldots dx^{j-1} dx^{j+1} \ldots dx^n =$$

$$= \delta_{ij} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1,\ldots,x^n) dx^1 \ldots dx^{j-1} dx^{j+1} \ldots dx^n.$$

Wykład 4. 14.10.2019, *dowód twierdzenia Stokesa (2/2), agitacja na temat lematu Poincare i iloczyn wewnętrzny*

Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$. Wtedy dla $x = (x^1, \ldots, x^n)$ i $d\tilde{x} = dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n$

$$\begin{aligned}
&\int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\
&= \delta_{ij} \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots x^n) d\tilde{x} = \\
&= \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n) \overset{(\star)}{=} \\
&\overset{(\star)}{=} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n).
\end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\
&= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{j+1}, \ldots, x^n) = \\
&= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) + \\
&+ (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n = \\
&= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1, \ldots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^i \ldots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \ldots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\cdot \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right] \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^i \ldots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\cdot \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right] = \\
&= (-1)^{i+1} \int_{I^n} \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right].
\end{aligned}
$$

$$LHS = RHS.$$

□

Uwaga: Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek I^n. Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

Przykład 7. *Niech $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ i $f \in \Lambda^0([a, b])$. Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak (xD):*

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_{[a,b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

Przykład 8. *Niech γ - krzywa na M, $\dim M = 3$, $f \in \Lambda^0 M$.*

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Przykład 9. $\dim M = 2$, *niech* $\alpha = xydx + x^2dy$. *Policzmy* $\int_{\partial S} \alpha$.

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha + \int_{C_3} \alpha,$$

ale

$$\int_{C_1} \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

φ *- parametryzacja* C_1. *Jeżeli weźmiemy sobie*

$$\int_{C_3} \left\langle \varphi_3^\star \alpha, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

φ_3 *- parametryzacja* C_3.

$$C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\},$$

zatem $\varphi_2^\star \alpha$ *przy* $x = \cos\theta \implies dx = -\sin\theta d\theta$, $y = \sin\theta \implies dy = \cos\theta d\theta$, *mamy*

$$\varphi_2^\star \alpha = \cos\theta \sin\theta(-\sin\theta d\theta) + (\cos^2\theta)\cos\theta d\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta.$$

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\langle \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$.

$$d\alpha = xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy.$$

$$\int_\square \left\langle xdx \wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx \cdot x\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Przykład 10. *Niech* $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Lambda^1(M)$, $\partial K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, 0 \leqslant \theta, 2\pi \right\}$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^\star \alpha = -\sin\theta(-\sin\theta)d\theta + \cos\theta\cos\theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$d\alpha = \left[\left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx \wedge dy\right] =$$
$$= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2}\right) dx \wedge dy = 0.$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech $\alpha = x^2dx + xydy + 2dz$. α jest potencjalna, jeżeli

$$\underset{\eta\in\Lambda^0 M}{\exists} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

Definicja 8. *Niech M - rozmaitość,* $\dim M = n$,

$$i_v : T_pM \times \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1. $i_v f = 0$, *jeżeli* $f \in \Lambda^0 M$
2. $i_v dx^i = v^i$, *jeżeli* $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \ldots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3. $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$.

Operację i_v nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \overset{ozn}{=} v \lrcorner \omega.$$

Obserwacja: $i_v(i_v\omega) = 0$ (w domu)

Przykład 11. *Niech* $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v \lrcorner \omega = \langle dx, v\rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v\rangle + \langle dz, v\rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v\rangle .$$

Przykład 12.

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e\frac{\partial}{\partial t} + ev^x\frac{\partial}{\partial x} + ev^y\frac{\partial}{\partial y} + ev^z\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j \lrcorner F = ?.$$

Wykład 5. 18.10.2019, *brzeg rozmaitości i dalsza agitacja lematu Poincare*

Sprawdzić, że
$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

Przykład 13. *Niech* $X = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,
$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$
Niech M *- rozmaitość,* $\dim M = 2$*. Co oznacza napis*
$$X \lrcorner\, \omega = dH?$$

$$\begin{aligned} X \lrcorner \omega &= \dot{x}\left(\partial_x \lrcorner (dx \wedge dp)\right) + \dot{p}\left(\partial_p \lrcorner (dx \wedge dp)\right) = \\ &= \dot{x}\left(\langle \partial_x, dx\rangle \wedge dp + dx \wedge \langle \partial_x, dp\rangle\right) + \\ &+ \dot{p}\left(\langle \partial_p, dx\rangle \wedge dp + dx \wedge \langle \partial_p, dp\rangle\right) = \\ &= \dot{x}dp - \dot{p}dx = dH = \frac{p}{m}dp + kxdx. \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie
$$\dot{x}dp - \dot{p}dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2 dx.$$
To wypluje na wyjściu równania ruchu
$$m\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:
Niech $I = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x, y) = |x - y|$) czy I jest otwarty w $\mathbb{R}$?
chyba nie.
Niech $I = [0, 1[\subset [0, 2]$, czy I jest otwarty w $[0, 2]$?
chyba tak.
$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

Definicja 9.

$$\mathbb{R}^m_+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geqslant 0\right\},$$

$$\mathbb{R}^m_0 = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Niech M - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości M składa się z takich map φ_α, że

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m_+,$$

($\mathcal{O}$ - otwarty w M), gdzie $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ - otwarte w $\mathbb{R}^m_+$, to M nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli $p \in M$ i $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^m_0$, to mówimy, że p należy do brzegu M.
(brzeg rozmaitości M oznaczamy przez ∂M)

Pytanie 1. *Co to jest różniczkowalność φ^{-1}, jeżeli dziedzina $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}^m_+$, który nie jest otwarty w $\mathbb{R}^m$?*

Mówimy wówczas tak:

Definicja 10. *Niech $U \subset \tilde{U}$, $\tilde{U}$ - otwarty w $\mathbb{R}^m$, U - otwarty w $\mathbb{R}^m_+$. φ jest klasy $\mathcal{C}^r$ na U, jeżeli istnieje $\tilde{\varphi}$ klasy $\mathcal{C}^r$ na $\tilde{U}$ i $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$.*

Pytanie 2. *Czym jest ∂S, jeżeli S - okrąg?*

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie:

$$\text{sześcian} \xrightarrow{\partial} \text{boki sześcianu} \xrightarrow{\partial} \text{rogi sześcianu},$$

$$\text{kula} \xrightarrow{\partial} \text{sfera} \xrightarrow{\partial} \{\phi\}.$$

Obserwacja:
Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętymi do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m-1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 11. *Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ - baza $T_p\partial M$, wybierzmy orientację na M.*
Niech σ - krzywa na M taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \ldots, 0, t) \in \mathbb{R}^m_+,$$

niech $\overline{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M, jeżeli orientacja $\langle \overline{n}, f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ jest zgodna z orientacją M.

Stwierdzenie 1. *Całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji.*

Dowód. Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$,
$\varphi_1 : U_1 \to T$ - parametryzacja T oraz
$\varphi_2 : U_2 \to T$ - parametryzacja T. Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\underset{h}{\exists} h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^\star \omega = \int_{U_2} h^\star \left(\varphi_1^\star \omega\right) \stackrel{?}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^\star \omega = \int_{U_2} \varphi_2^\star \omega.$$

$$\langle (kL)^\star \omega, v\rangle = \langle \omega, (kL)_\star v\rangle = \langle k^\star \omega, L_\star v\rangle = \langle L^\star k^\star \omega, v\rangle\,,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt}\overline{\sigma}$ to

$$(kL)_\star v = \frac{d}{dt}\left(k\left(L\left(\overline{\sigma}(t)\right)\right)\right) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_\star L_\star v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

$\square$

Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$.

Pytanie 3. *czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$?*

Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.
Obserwacja:

$$\eta = arctg\frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{1}{y}dx - \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{x}{y^2}dy = \omega$$

Wykład 6. 21.10.2019, *dowód lematu Poincare, przykłady*

Definicja 12. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathcal{O}$ nazywamy ściągalnym (gwiaździstym), jeżeli istnieje $p \in \mathcal{O}$ i odwzorowanie $h(p,x,t)$ takie, że*

$$\underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \begin{matrix} h(p,x,0) = p \\ h(p,x,1) = x \end{matrix}, \quad \underset{t\in[0,1]}{\forall} h(p,x,t) \in \mathcal{O}, \quad h(p,x,t) \text{ - ciągła.}$$

Twierdzenie 1. *(Lemat Poincare)*
Niech

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \text{ - zbiór ściągalny} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \underset{\eta}{\exists}, d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{pmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathcal{O}$ jest zbiorem gwiaździstym, czyli

$$\underset{p\in\mathcal{O}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \quad \begin{pmatrix} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{pmatrix} \big(\text{jest zawarty w } \mathcal{O}\big).$$

Obserwacja: gdyby istniał operator

$$T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \to \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}), \quad p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byloby prawdziwe. (bo dla $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$ mielibyśmy $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$).

Więc, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 \left(t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)\right),$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ spełnia warunek $Td + dT = id$.

Przykład 14. *$\omega \in \Lambda^1(M)$, $\dim M = 3$, $\omega = xdx + ydy + zdz$. Wówczas, gdy ($\overline{x} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$) jest*

$$T(\omega) = \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz}_{\omega(tx)}, \quad \overline{x} \right\rangle dt =$$
$$= \int_0^1 t^0 \left(tx^2 + ty^2 + tz^2\right) dt = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \eta.$$

Zauważamy, że $d\eta = \omega$ i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał).

Przykład 15. *$\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$, $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\dim M = 3$. Co to jest $T\omega$?*

$$T\omega = \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner \left(xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz\right) dt =$$
$$= \int_0^1 t^1 \left(xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx\right) dt =$$
$$= \frac{1}{3}\left(x^2dy - xydx + y^2dz - yzdy + zxdz - z^2dx\right) = \eta.$$

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.
Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\omega(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x^1, \ldots, x^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

$$\omega = \overset{\omega_{12}}{x} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=2}{y} + \overset{\omega_{23}}{y} d\overset{i_1=2}{y} \wedge d\overset{i_2=3}{z} + \overset{\omega_{13}}{z} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=3}{z}.$$

$$d\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega(x^1,\dots,x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Liczymy

$$\begin{aligned}
Td \underset{p+1 \text{ forma}}{\omega} &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1,\dots,tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\dots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\dots,tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \underset{\text{brak } dx^{i_\alpha}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^\alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\omega &= \int_0^1 t^{p-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\
&= \sum_{k=1} \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \underset{\text{bez } dx^{i_k}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \\
&+ \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

Zatem dodajemy do siebie $Td\omega + dT\omega$ i wychodzi

$$\begin{aligned}
Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \\
&+ \int_0^1 dt p \cdot t^{p-1} \omega_{i_1,\dots,i_p}(tx^1,\dots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \underset{\text{równa się zero}}{(.) + (.)} = \\
&= \int_0^1 dt \left(\frac{d}{dt} \left(t^p \omega(tx^1,\dots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \right) = \\
&= t^p \left(\omega(tx^1,\dots,tx^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega.
\end{aligned}$$

$\square$

Wykład 7. 25.10.2019, *domkniętość i zupełność formy, długość krzywej i zastosowania twierdzenia Stokesa*

Definicja 13. *Jeżeli* $\alpha \in \Lambda^k(M)$ *taka, że* $d\alpha = 0$, *to mówimy, że* α *jest domknięta. Jeżeli* $\underset{\eta}{\exists}$ *taka, że* $d\eta = \alpha$, *to mówimy, że* α *jest zupełna.*

Przykład 16. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$.
Dla $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, *jest* $d\omega = 0$. *Było, że* $\eta = artctg(\frac{x}{y})$, $d\eta = \omega$. *Problem leży w punkcie* $(0, 0)$ *bo nie należy do dziedziny.*

Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$, który jest w koszmarnej bazie $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$, ale można go zamienić na coś fajniejszego $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Dla trójki wektorów v_1, v_2, v_3, ich $|v_1, v_2, v_3|$ to objętość.
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$
\begin{aligned}
(\det A)^2 &= (\det A)(\det A) = \det(A)\det(A^T) = \\
&= \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \\
&= G(v_1, v_2, v_3).
\end{aligned}
$$

Definicja 14. *Niech M - rozmaitość i γ krzywa na M.*

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a,b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \overset{def}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}.$$

Przykład 17. *M takie, że* $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a,b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} | \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^i$, dalej jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left(\frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.
Niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \left\{ \begin{matrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{matrix} \quad a \leqslant t_1 \leqslant b, \quad c \leqslant t_2 \leqslant d \right\}.$$

$$\|D\| = \int vol \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

Przykład 18. *Niech*

$$D = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \right).$$

Liczymy $vol(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\begin{bmatrix}0\\1\\\frac{\partial}{\partial y}f\end{bmatrix}.$$

$$vol(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})=\sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)}=\sqrt{\left\|\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\\\left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\end{bmatrix}\right\|}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left\|\begin{bmatrix}1+(f_{,x})^2 & (f_{,x})(f_{,y})\\(f_{,x})(f_{,y}) & 1+(f_{,y})^2\end{bmatrix}\right\|=\left(1+(f_{,x})^2\right)\left(1+(f_{,y})^2\right)-(f_{,x})^2(f_{,y})^2.$$

$$\|D\|=\int_a^b\int_c^d\underbrace{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy}_{ds}.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega=\int_{\partial U}\omega.$$

Niech A - wektor w bazie ortonormalnej. Dla $\dim M=3$, $g=\begin{bmatrix}g_{11}&&\\&g_{22}&\\&&g_{33}\end{bmatrix}$,

$$A=A^1\sqrt{g^{11}}\frac{\partial}{\partial x^1}+A^2\sqrt{g^{22}}\frac{\partial}{\partial x^2}+A^3\sqrt{g^{33}}\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech $\alpha=A^\sharp\in\Lambda^1(M)$, γ - krzywa na M.

$$\alpha=g_{11}A^1\sqrt{g^{11}}dx^1+g_{22}A^2\sqrt{g^{22}}dx^2+g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}dx^3.$$

$$\int_\gamma\alpha=\int_\gamma A^\sharp=\int_\gamma\left\langle\varphi^\star\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt=\int_\gamma\left\langle\alpha,\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt=\int_\gamma\left\langle\alpha,\frac{\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}}{\left\|\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\|}\right\rangle\left\|\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\|dt.$$

Niech $v=v^1\frac{\partial}{\partial x^1}+v^2\frac{\partial}{\partial x^2}+v^3\frac{\partial}{\partial x^3}$.
Pytanie: czym jest $\langle\alpha,v\rangle$?

$$\langle\alpha,v\rangle=A^1\sqrt{g^{11}}g_{11}v^1+A^2\sqrt{g^{22}}g_{22}v^2+A^3\sqrt{g^{33}}g_{33}v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.
Niech $V \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim V = 3$. Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech $S \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim S = 2$.

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

Pytanie 4. *Niech $\alpha = A^\sharp$, czym jest $\int_S dA^\sharp$?*

$$dA^\sharp = \underbrace{\left(\left(g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}\right)_{,2} - \left(g_{22}A^2\sqrt{g^{22}}\right)_{,3}\right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 +$$
$$+ \underbrace{\left(\left(g_{11}A^1\sqrt{g^{11}}\right)_{,3} - \left(g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}\right)_{,1}\right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\ldots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle =$$
$$= \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\| dx^2 dx^3}_{ds} + \ldots.$$

Pamiętamy, czym była $rot(A) = \left(\star dA^\sharp\right)^\flat = \int \left(rot(A)\right) \mathbf{n} ds$

Wykład 8. 28.10.2019, *zastosowania twierdzenia Stokesa, holomorficzność funkcji i wzory Cauchy-Riemanna*

W ostatnim odcinku

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^\sharp = \left(\overbrace{(.)\,, - (.)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \ldots .$$

$$\int_S dA^\sharp = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^\sharp \right) \right)^\flat,$$

ale

$$\begin{aligned} \star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\ \star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\ \star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^\sharp = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned} \left(\star dA^\sharp\right)^\flat &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Czyli dla $\vec{A}$ - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot\vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \\ D^3 \frac{1}{g_{11} g_{22}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g_{22}g_{33}}$, ale

$$\left(rot\vec{A} \cdot \vec{n}\right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g_{22}g_{33}} \sqrt{g_{22}g_{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^\sharp = \int_S (rot\vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int_{\partial S} A^\sharp.$$

$$\int_S \left(rot\vec{A}\right) \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

Przykład 19. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

Pytanie 5. *czym jest* $\int_{\partial V} \star A^\sharp$*?*

$$\star(dx^1)\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\star(dx^2)\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1,$$

$$\star(dx^3)\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}\star A^\sharp = A^1 g_{11}\sqrt{g^{11}}\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22}\sqrt{g^{22}}\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1 + \\ + A^3 g_{33}\sqrt{g^{33}}\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,\end{aligned}$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2\sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3\sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int A^1 \sqrt{g_{22} g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2 \sqrt{g_{11} g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \\ + \int A^3 \sqrt{g_{11} g_{22}} \quad dx^1 dx^2,$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22} g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

Pytanie 6. *Jak wygląda* $\int_V d \star A^\sharp$*?*

$$\int_V d \star A^\sharp = \\ = \int_V \Big\langle \left(A^1 \sqrt{g_{22} g_{33}}\right)_{,1} + \left(A^2 \sqrt{g_{11} g_{33}}\right)_{,2} + \\ + \left(A^3 \sqrt{g_{11} g_{22}}\right)_{,3}, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \Big\rangle dx^1 dx^2 dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$div \vec{A} = \star d \left(\star A^\sharp\right),$$

wiemy, że

$$\star \left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\right) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$div \vec{A} \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = div \vec{A} \quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V div \vec{A} \quad dV.$$

Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt}e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

Definicja 15. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty. $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$.*
Mówimy, że f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ jeżeli $\underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}$ istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \overset{def}{=} f'(z),$$

gdzie $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga: jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z $\mathbb{R}^2$.
Uwaga: dowolną funkcję z $\mathbb{C}$ możemy zapisać jako $f(z) = P(x,y) + Q(x,y) \cdot i$, gdzie $z = x + iy$ a $P(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $Q(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

Przykład 20. $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$, $z = x + iy$

Pytanie 7. *Co to znaczy różniczkowalność?*

ma istnieć granica (dla $h \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(x+h,y) + iQ(x+h,y) - P(x,y) - iQ(x,y)}{h} =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np. $h = it$, to wtedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{P(x,y+t)-P(x,y)}{it} + i\frac{Q(x,y+t)-Q(x,y)}{it} =$$
$$= \frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli f - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Przykład 21. *(jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)*

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i\underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy f jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

Przykład 22.

$$\alpha = Q(x,y)dx + P(x,y)dy,$$

gdzie P, Q są takie, że $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\wedge dy = 0.$$

Pytanie 8. *Niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, f - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach*

$$P_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad P(x,y) = c\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$Q_d = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad Q(x,y) = d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Wykład 9. 04.11.2019, *warunek Cauchy-Riemanna, wzór Cauchy i twierdzenie Liouville (1/2)*

Refleksja

Czy to

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest fajne?

Przykład 23.

$$\nabla P = \left[\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right],$$
$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right],$$

to możemy zrobić takie coś:

$$\text{"}\,(\nabla P \cdot \nabla Q)\,\text{"} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Twierdzenie 2. *f - holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy f - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.*

Dowód. $\Longrightarrow$ było
$\Longleftarrow$ Zauważmy, że skoro $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna na $U \subset \mathbb{R}^2$, czyli dla $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ jest

$$\underbrace{F(x + h_1, y + h_2) - F(x, y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

$\frac{r(x,y,h)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$
Czyli

$$\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} P(x+h_1,y+h_2)-P(x,y) \\ Q(x+h_1,y+h_2)-Q(x,y) \end{bmatrix}}_{\Delta Q}}^{\Delta P} \overset{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z+h)-f(z) &= P(x+h_1,y+h_2)+iQ(x+h_1,y+h_2)-(P(x,y)+iQ(x,y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i\,(bh_1+ah_2) + r = \\ &= (a+ib)\,(h_1+ih_2)+r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z h do 0, to $\frac{r}{h} \to 0$, więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$$

□

Stwierdzenie 2. *Niech $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, a $g : U \to \mathbb{C}$ - holomorficzna na U. Wówczas $g \circ f$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$.*

Dowód.

$$\begin{aligned}(g\circ f)' = g'(f)f' &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1 b \\ a_1 b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -\left(a_1 b + ab_1\right) \\ a_1 b + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

a tak wygląda macierz pochodnej f - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). □

Oznaczenia

niech $M \subset \mathbb{R}^2$, $\langle dx, dy\rangle = T_p^* M$. Wprowadźmy

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\overline{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Jeżeli $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, to

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(dz + d\overline{z}\right) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\left(dz - d\overline{z}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} d\overline{z}. \end{aligned}$$

Obserwacja: niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\end{aligned}$$

.

Przykład 24. $f(z) = z^2 = z \cdot z$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

a $g(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = z \neq 0.$$

Czyli g *- nie jest holomorficzna*

Przykład 25. *Obliczmy całkę:*

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left| \begin{matrix} z = re^{i\theta} \\ dz = rie^{i\theta} d\theta \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Stwierdzenie 3. *Jeżeli* f *- holomorficzna na* $\mathcal{O}$ *i* $\Omega \subset \mathcal{O}$, *to*

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_\Omega d(f dz) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial d\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

Twierdzenie 3. *(wzór Cauchy)*
Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, *niech* $\xi \in \Omega$. *Wówczas*

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_\Omega \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}.$$

Obserwacja: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}dz.$$

Wynik $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = 1$ otrzymamy dla $\xi = 0$ i $f(z) = 1$

Dowód. niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\xi}.$$

zatem wiemy, że

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) = \int_\Omega dg(z).$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}dz + \int_{\partial K(\xi,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi}dz = \int\int\limits_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\wedge dz.$$

Pytanie: co się dzieje, jak przejdziemy z $\epsilon \to 0$ Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\int\int\limits_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

dla $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$, ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka $\int\int\limits_{\Omega_\epsilon} d\overline{z}\wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$. Oznacza, to że

$$\frac{1}{z-\xi}d\overline{z}\wedge dz \overset{\epsilon\to 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon}\cdot\epsilon,$$

czyli w $\epsilon = 0$ nie wybuchnie!
Ale

$$\int_{\partial K(\xi,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi}dz = -\int_0^{2\pi} \frac{f(\xi+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\epsilon i e^{i\theta}d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= if(c)\cdot\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(c) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} -2\pi i f(\xi),$$

gdzie $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$.
Zatem
$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_{\Omega} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

$\square$

Twierdzenie 4. *(Liouville)*
Jeżeli f - ograniczona i holomorficzna na całym $\mathbb{C}$, to f jest stała.

Obserwacja: a co z sinusem? $f(x) = \sin(x)$, ale trzeba zastanowić się nad $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Dla np. $z = it$,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.

Wykład 10. 08.11.2019, *twierdzenie Liouville (2/2), Zasadnicze Twierdzenie Algebry i początek Szeregów Laurenta*

Twierdzenie 5. *(Liouville)*
Jeżeli f - holomorficzna i ograniczona na $\mathbb{C}$, to f - stała.

Dowód. Wiemy, że

$$\underset{M>0}{\exists} \quad \underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad |f(z)| < M.$$

Skoro f - holomorficzna, to znaczy, że dla $\xi \in \mathbb{C}$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(\xi,r)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz.$$

(Wzór Cauchy)
Zauważmy, że skoro f - jak wyżej, to

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(\xi,r)} \frac{f(z)}{(z-\xi)^2} dz.$$

(Absolutnie nieoczywiste lol. Uzasadnienie później)
Wówczas możemy oszacować f'

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &\leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \max_{z\in\partial K(\xi,r)} \left|\frac{f(z)}{(z-\xi)^2}\right| \cdot |\text{długość okręgu } K(\xi,r)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\left|(\xi + re^{i\varphi} - \xi)^2\right|} |2\pi r| = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad \underset{r>0}{\forall}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\underset{r>0}{\forall} |f'(\xi)| < \frac{M}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem $|f'(\xi)| = 0$, czyli

$$f(z) = const.$$

□

Przykład 26. *$f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$, ale nie jest na $\mathbb{C}$ ograniczona (tylko dla $z \in \mathbb{R}$).*

Wniosek: (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)
Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$.
Załóżmy, że

$$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad w(z) \neq 0.$$

Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{1}{w(z)} \text{ jest na } \mathbb{C} \text{ holomorficzna i ograniczona.}$$

Jest więc stała. Co oznacza, że $w(z)$ jest stała i sprzeczność. □
(PS oznacza to, że $\underset{z_0\in\mathbb{C}}{\exists}$, że $w(z_0) = 0$, czyli $w(z) = (z - z_0) w_1(z)$. Biorąc funkcję $f_1(z) = w_1(z) \ldots$ pokażemy, że wielomian stopnia n nad $\mathbb{C}$ ma n pierwiastków. □)

Szeregi Laurenta

Przykład 27. *Niech*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}.$$

Zauważmy, że

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1-i}{z-i} + \frac{1}{2}\frac{1+i}{z+i}.$$

Jeżeli

$$|z + 2i| < 3,$$

to

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+2i}{3i}} =$$
$$= -\frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{3i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} (z+2i)^n .$$

Jeżeli $|z+2i|>1$, *to*

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+2i-i}=\frac{1}{z+2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z+2i}}=$$
$$=\frac{1}{z+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z+2i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{(z+2i)^{n+1}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

Zatem

$$\frac{z+1}{z^2+1}=\frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}+\frac{i-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^n}(z+2i)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_k(z+2i)^k,$$

gdzie

$$dk=\begin{cases}\frac{1+i}{2}\cdot(i)^{-k-1} & k<0\\ \frac{i-1}{2}\cdot\frac{1}{(3i)^k} & k\geqslant 0\end{cases}.$$

Niech

$$R(2i,1,3)\stackrel{def}{=}\{z\in\mathbb{C},|z+2i|<3\wedge|z+2i|>1\}$$

- pierścień otwarty o środku $2i$ *i promieniach* 1 *i* 3.
Dla $|z+2i|<1$,

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z+2i-i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{i}}=-\frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i)^{n+1}}\frac{(z+2i)^n}{1}.$$

Zatem dla $z\in R(-2i,0,1)$,

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+1}=\frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i)^{n+1}}(z+2i)^n-\frac{1-i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^{n+1}}\cdot(z+2i)^n=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\,(z+2i)^k\,,$$

gdzie

$$d_k=-\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{(i)^{n+1}}-\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{(3i)^{n+1}}.$$

dla $|z+2i|>3$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z+2i-3i}=\frac{1}{z+2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3i}{z+2i}}=$$
$$=\frac{1}{z+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(3i)^n\cdot\frac{1}{(z+2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{(z+2i)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

I wtedy dla $z \in R(-2i, 3, +\infty)$, *jest*

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^n} + \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n} = \sum_{k=-1}^{-\infty} d_k(z+2i)^k.$$

Twierdzenie 6. *(Laurent)*
Niech $f(z)$ *- holomorficzna na pierścieniu* $R(z_0, r_1, r_2)$,

$$R(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}, |z-z_0| > r_1 \wedge |z-z_0| < r_2\}.$$

Wówczas $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

$r_1 < r < r_2$

Dowód. Zauważmy, że $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$ znajdziemy takie $r_1' > r_1$ i $r_2' < r_2$, że $z \in R(z_0, r_1', r_2')$. Ze wzoru Cauchy wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r_1', r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad - \int_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right].$$

ale

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z},$$

a dla $\xi \in \partial K(z_0, r_1')$ i $z \in K(z_0, r_1')$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

więc

$$\frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

więc

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

A dla $\xi \in \partial K(z_0, r_2')$ i z takich, że $|z - z_0| > r_2'$, wiemy, że

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

itd. $\square$

Wykład 11. 15.11.2019, *zabawa z Szeregiem Laurenta, związki z szeregiem Taylora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R(z_0, r_1', r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli $z \in K(z_0, r_2')$ i $\xi \in \partial K(z_0, r_2')$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli $|z - z_0| > r_1'$, to mamy, że dla $\xi \in \partial K(z_0, r_1')$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\xi - z_0)^n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Zatem

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n},$$

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi,$$

czyli

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na pierścieniu $R(z_0,r_1,\infty)$, to jak wyglądało by rozwinięcie $f(z)$?
Zauważmy, że

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{r_2'ie^{i\varphi}f(z_0+r_2'e^{i\varphi})d\varphi}{(r_2'e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\cdot\frac{1}{(r_2')^n}\cdot\max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}\left|f(z_0+r_2'e^{i\varphi})\right|\cdot 2\pi,$$

ale jeżeli f ograniczona poza kołem $K(z_0,r_1')$, to znaczy, że

$$\forall_{r_2'>r_1'}\left|f(z_0+r_2'e^{i\varphi})\right|<M.$$

Czyli

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot M\cdot\frac{1}{(r_2')^n}\xrightarrow[r_2'\to\infty]{}0,$$

więc

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to jak wyglądałoby rozwinięcie?
Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r_1' i e^{i\varphi} f(z_0 + r_1' e^{i\varphi})(r_1' e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\substack{\exists : |f(z)|<M, z\in K(z_0,r_1) \\ M}} \left|f(z_0 + r_1' e^{i\varphi})\right| \; |2\pi|.$$

Czyli dla $z \in K(z_0, r_2)$, f - holomorficzna na $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Pytanie 9. *Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się a_n do $\frac{f^n(z_0)}{n!}$?*

Koniec obserwacji, wracamy do dowodu

Pytanie 10. *Czy wzory na a_n i d_n można uprościć?*

Przypomnienie: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że $f(z)$ - holomorficzne na $R(z_0, r_1, r_2)$, a funkcja $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ - też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, czyli

$$\int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

To samo możemy powiedzieć o d_n

$$\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')} f(\xi)(z-z_0)^{n-1}d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0,r)} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi, \qquad \underset{r_1<r<r_2}{\forall}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n}(z-z_0)^n,$$

ale $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$.

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \qquad \square$$

Twierdzenie 7. *Niech C - krzywa na $\mathbb{C}$ (zamknięta lub nie) i niech $f(z)$ - ciągła na C. Wówczas funkcja*

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^p}d\xi$$

jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus C$ dla $p \in \mathbb{Z}$ i

$$\varphi'(z) = p\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}}d\xi.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ i $z_0 \notin C$. Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} = \varphi'(z_0) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z-z_0)}\left[\frac{1}{(\xi-z)^p} - \frac{1}{(z-z_0)^p}\right] - p\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{p+1}} = \tag{11.1}$$

$$= \int_C d\xi f(\xi)\left[\underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi-z)^p} - \frac{1}{(\xi-z_0)^p}}{z-z_0}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi-z_0)^{p+1}}\right]. \tag{$\Delta\Delta$}$$

Ale (Δ) - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi-z)^p}.$$

$$(\Delta) = \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Wiemy, że $g(z)$ - holomorficzna dla $z \notin C$, czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi-z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi-z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego, niż } (z-z_0).$$

Zatem

$$(11.1) = \int_C d\xi f(\xi)\left[\frac{p}{(\xi-z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego niż } (z-z_0) - \frac{p}{(\xi-z)^{p+1}}\right].$$

$$|(11.1)| \leqslant |\max_{\xi in C} f(\xi)|\,|\text{długość } C| \cdot |z-z_0| \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

□

Wniosek: dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.$$

Wiemy, że $f'(z)$ - też jest holomorficzna (bo wzór na φ z $p=2$)

Wykład 12. 22.11.2019, *przedłużenie analityczne funkcji punkty osobliwe i bieguny*

Jeżeli f - holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Przykład 28. *Policzyć*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1+iz)^2(1-iz)^2}.$$

Niech $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1-iz)^2}$, f *- holomorficzna na* $K(i,1)$. *W związku z tym piszemy*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)}{(1+iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)dz}{(z-i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i \; f'(z)\big|_{z=i}.$$

Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np. $\sin(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pytanie skąd my wiemy, że $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, dla $z \in \mathbb{C}$

Twierdzenie 8. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, $z_n \in \mathcal{O}$ - ciąg z $\mathcal{O}$ taki, że $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = 0$. Wówczas*

$$\underset{r>0}{\exists} \quad \underset{z\in K(z_0,r)}{\forall} \quad f(z) = 0.$$

Dowód. przez sprzeczność $(\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q))$.
Załóżmy, że $\underset{z\in K(z_0,r)}{\exists} f(z) \neq 0$ i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

i wiemy, że $f(z) \neq 0$, czyli $\exists k$ takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \tag{$\star$}$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego $(\star)$ jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez j. Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!}(z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli $g(z) \neq 0$. Skoro f - holomorficzna, to $g(z)$ też jest holomorficzna na $\mathcal{O}$, czyli między innymi $g(z)$ jest ciągła na $\mathcal{O}$. Ale wiemy, że $f(z_n) = 0$, czyli $g(z_n) = 0$ i g - ciągła na $\mathcal{O}$. Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \underset{z_n \to z_0}{\longrightarrow} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo $g(z_n)$ jest ciągiem samych zer, a $g(z_0) \neq 0$, bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

$\square$

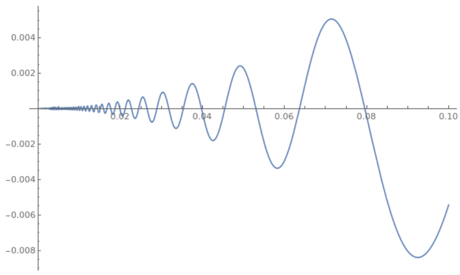
Obserwacja: Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu $a_n \to 0$,

$$f(a_n) \longrightarrow 0$$

i $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 12.1: $f(x)$

Twierdzenie 9. *Niech $f(z), g(z)$ - holomorficzne na $\mathcal{O}$,*

$$\underset{h\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg $z_n \to z_0$. Wówczas

$$f(z) = g(z) \underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}.$$

Dowód. Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas $h(z_n) = 0$ i $z_n \to z_0$. Skoro $h(z)$ - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

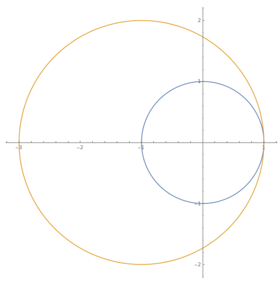
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$$

i dowodzimy tak jak wcześniej. $\square$

Przykład 29.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \ldots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 12.2: f i g

Definicja 16. *Niech f - holomorficzna na U_1 i g - holomorficzna na U_2 i*

$$\underset{z_0}{\exists} \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\underset{z \in U_1 \cap U_2}{\forall} \quad f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że f jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji g).

Przykład 30. *Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka*

$$ln(z) = (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots$$
$$ln(re^{i\varphi}) = ln(r) + ln\left(e^{i\varphi}\right) = ln(r) + i\varphi$$

Punkty osobliwe

Definicja 17. *Punkt w którym $f(z)$ nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.*

Definicja 18. *Niech $f(z)$ - taka, że*

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i $\varphi(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$ i $f(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O} - \{a\}$.

O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie a biegun rzędu N.

Pytanie: czy f może nie być holomorficzna np. na krzywej $\gamma \subset \mathbb{C}$?
Odpowiedź: gdyby f nie była holomorficzna na $\gamma \subset \mathbb{C}$, to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że $g(z) \equiv 0$ także dla $z \notin \gamma$.

Wykład 13. 18.11.2019, *punkt izolowany, osobliwość istotna, twierdzenie o residuach*

Przykład 31.

$$U_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$
$$U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \right\},$$
$$U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{5\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\},$$
$$U_1 \cap U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$
$$U_1 \cap U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

($ln(z) = ln(re^{i\varphi}) = ln(r) + i\varphi$)
Niech

$$\begin{aligned} f_1(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_1 \\ f_2(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_2 \\ f_3(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_3 \end{aligned}$$
.

Zauważmy, że dla $z \in U_1 \cap U_2$ mamy

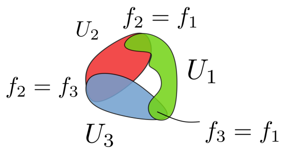
$$f_1(z) = f_2(z).$$

Mówimy zatem, że f_2 jest przedłużeniem analitycznym f_1. Dla $z \in U_1 \cap U_3$ wychodzi

$$f_1(z) = f_3(z),$$

czyli f_3 jest przedłużeniem analitycznym f_1. Ale

$$\begin{aligned} f_2(-1) &= ln(e^{i\pi}) = i\pi \\ f_3(-1) &= ln(e^{-i\pi}) = -i\pi. \end{aligned}$$



Rysunek 13.1: Tracimy jednoznaczność funkcji ale chyba worth it

Klasyfikacja

Niech $f(z)$ - holomorficzna na pierścieniu $R(z_0, 0, r_1)$, ($f(z)$ może nawet nie być określona w z_0).
Wiemy, że (działa wzór Laurenta):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wyróżniamy trzy przypadki:

1. (Δ) $a_n = 0$, $n < 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Oznacza to, że przyjmując $f(z_0) = a_0$ otrzymamy funkcję holomorficzną na $K(r_0, r)$.

2. ($\Delta\Delta$) $\underset{k<0}{\exists} \quad a_n = 0$, $n < k$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)}$$

O punkcie z_0 mówimy, że jest punktem osobliwym, izolowanym rzędu $|k|$. (albo, że jest biegunem rzędu $|k|$, np. $\frac{\cos(z)}{z}$ ma w $z_0 = 0$ biegun rzędu pierwszego).

3. ($\Delta\Delta\Delta$)

$$\underset{k<0}{\forall} \quad \underset{n<k}{\exists} \quad a_n \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

O punkcie z_0 powiemy, że jest punktem osobliwym (izolowanym) (albo, że $f(z)$ ma w $z = z_0$ osobliwość istotną).

Przykład 32. *(Δ)*

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

jeżeli przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to jest

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Przykład 33. *(ΔΔ)*

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z)^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{a_{-1}} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Przykład 34. *(ΔΔΔ)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Definicja 19. *Liczbę a_{-1} z rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szerege Laurenta w pierścieniu $R(z_0, 0, r)$ nazywamy **residuum** funkcji $f(z)$ w z_0 i oznaczamy*

$$a_{-1} \equiv Res\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K(z_0, r), \\ 0<r<r_1}} f(\xi) d\xi$$

Uwaga: mówimy (na razie) o osobliwościach izolowanych

Przykład 35.

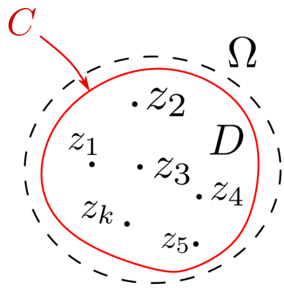
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Zauważmy, że $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \iff z_n = \frac{1}{n}$, *więc*

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| \to \infty,$$

Więc $z_0 = 0$ *nie jest osobliwością izolowaną, bo*

$$\forall_{r>0} \quad \exists_{n} \quad z = \frac{1}{n} \in K(0, r).$$



Rysunek 13.2

Twierdzenie 10. *Niech* Ω *- otwarty,* $D \subset \Omega$, $z_1, \ldots, z_k \subset D$, $\quad z_i \cap \partial D = \{\phi\}$, $\quad i = 1, \ldots, k$, f *- holomorficzna na* $\Omega - \{z_1, \ldots, z_k\}$ *i* z_i *- bieguny funkcji* f.
Wówczas

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{k} Res_{z=z_n}\{f(z)\}$$

Dowód. Rozważmy zbiór P taki, jak na rys **??**. Zauważmy, że $f(z)$ jest na P holomorficzna. to znaczy, że

$$\int\limits_{\partial P} f(z)dz = 0 = \int \partial D f(z)dz + \sum_{n=1}^{k} \left[\int\limits_{\partial K(z_n, r_n)} f(z)dz \right],$$

czyli

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} Res_{z=z_k} f(z).$$

□

Pytanie: czy umiemy znaleźć współczynnik a_{-1} bez roz funkcji f w szereg Laurenta?
Odpowiedź: Jeżeli f ma w z_0 biegun rzędu n, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \ldots$$

$$Res_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dz} \left((z - z_0)^n f(z) \right)$$

Przykład 36. *Policzyć całkę*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a\cos(x) + a^2)}$$

Zauważmy, że

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = 1 - 2a\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + a^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{z}(z - a)(1 - az)$$

Wykład 14. 25.11.2019, *fajność residuów i Transformata Legendre geometrycznie*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Przykład 37.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx$.

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = \frac{1}{z}\left(z - az^2 - a + a^2 z\right) = \frac{1}{z}(1 - az)(z - a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{zdx}{(1 - az)(z - a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że $(z - a)f(z)$ jest regularne w $z = a$, bo wynosi $\frac{1}{1-az}$.
Zatem

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Czyli jest ładnie i słodko

Wiemy, że jeżeli f ma biegun stopnia n w $z = z_k$, to

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wiekością skończoną, bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z-z_k)} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_k)^n}$

Pytanie 11. *Jak zachowuje się funkcja gdy z_0 jest punktem istotnie osobliwym?*

Przykład 38. *Weźmy*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z \to 0} f(z).$$

$$\lim_{r\to 0} f\left(re^{i\varphi}\right) = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\cdot e^{-i\varphi}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \lim_{r\to 0} e^{-i\cdot\frac{1}{r}\sin\varphi}\cdot e^{\frac{1}{r}\cos\varphi}.$$

A to dla $\cos\varphi > 0$ idzie do $+\infty$, dla $\cos\varphi < 0$ idzie do 0, a dla $\cos\varphi = 0$ nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.

Przykład 39.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx,$$

gdzie $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

1. $R(z)$ *nie ma biegunów na osi rzeczywistej*
2. $z \cdot R(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu r. Policzmy

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx.$$

Weźmy funkcję $R(z)$ i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{C_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k\in D} \operatorname{Res} f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{C_r} R(z)dz \to 0$$

to będzie z głowy.

$$\int\limits_{C_r} R(z)dz = \int\limits_0^\pi re^{i\varphi}R(re^{i\varphi})d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\left|rR(re^{i\varphi})\right|\pi \to 0,$$

bo założyliśmy, że $zR(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Przykład 40. *Transformata Legendre'a geometrycznie niech np.* $f(x) = x^2$.
Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{f(x) - \psi(p)}{x} \\ px &= f(x) - px \\ \psi(p) &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right) \\ y &= px - \frac{p^2}{4}. \end{aligned}$$

I ogólnie

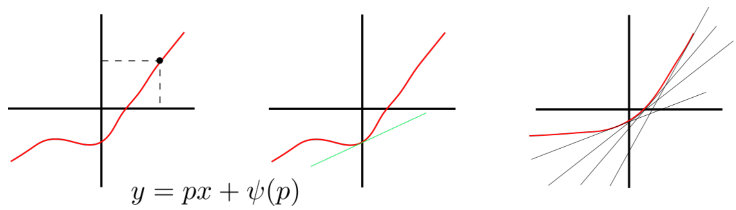
$$f(x) \to p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \to x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$

Przykład 41. *Funkcja* $L(q,\dot{q})$.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{-1}(p).$$



Teraz szukamy $\psi(p)$, ale ψ to jest H.

$$H(q,p) = L(q,\dot{q}) - p\cdot\dot{q}.$$

Przykład 42.
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$, to

$$d\psi(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p\frac{\partial x}{\partial p}\right)dp,$$

ale $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$. Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

Przykład 43. *Mamy gaz i funkcję stanu $U(V,N,S)$. Możemy zrobić z niej jednoformę*

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V}dV + \frac{\partial U}{\partial N}dN + \frac{\partial U}{\partial S}dS.$$

Albo nawet dd

$$ddU = \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right) \right) ds \wedge dv = 0.$$

Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech $\frac{\partial U}{\partial S} = T$. *Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza)* $F(V, N, T) = U - T \cdot S$.

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

I później wychodzi

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$

Wykład 15. 29.11.2019, *Lemat Jordana, funkcja wokół punktu istotnie osobliwego i twierdzenie Weierstrass*

Przykład 44. *Całka*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots.$$

Jak przemnożymy przez $(x^2+1)^3$ *to dostaniemy wyrażenie regularne.*

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}\right).$$

Ale

$$\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \left(-\frac{3}{(z+i)^4}\right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}(-3)(-4)\frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{2^4}\cdot\frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{2^4 i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Przykład 45.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx.$$

Taka, że $|zR(z)| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

np.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx = J, \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}.$$

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)}{2i(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2}e^{iax}dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2}e^{-iax}dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

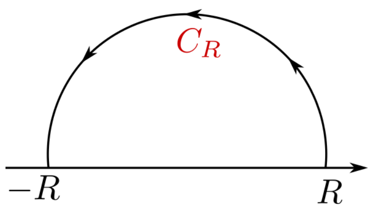
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx.$$

Twierdzenie 11. *(Lemat Jordana)*
Niech $f(z)$ - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys **??***) taka, że*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \to 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_r} f(z)e^{iaz}dz \to 0.$$



Dowód.

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| = \left|\int\limits_{0}^{\pi} f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaRe^{i\varphi}}d\varphi\right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}.$$

Czyli

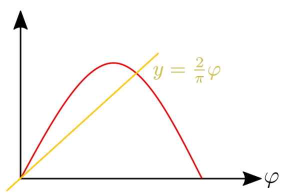
$$\left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right| R\cdot\underbrace{\int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}d\varphi}_{J}.$$

Stąd

$$J = \left|2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = 2\,\frac{-\pi}{2aR}e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right).$$

$$\int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \leqslant \sup_{p\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right| \frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$



Rysunek 15.1: w15-2

Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Twierdzenie 12. *(Lemat)*
Niech f - holomorficzna i ograniczona na $R(a,0,r)$. Wówczas możemy przedłużyć f do funkcji holomorficznej na $K(a,r)$. Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

Dowód. Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $H(z)$ jest holomorficzna w $z=a$.
Policzmy $H'(a)$.

$$H'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{H(a+h)-H(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h-a)^2 f(a+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 f(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} hf(a$$

Ale skoro f - ograniczona na $R(a,0,r)$, to $0 \leqslant |hf(a+h)| \leqslant hM \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, czyli $H'(a) = 0$, więc $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$.

$$H(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Czyli (bo $c_0 = 0$ i $c_1 = 0$, bo $H'(0) = 0$)

$$(z-a)^2 f(z) = c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots.$$

Co oznacza, że nasz $f(z)$ da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z-a)^1 + \ldots.$$

Jak położymy $c_2 \equiv f(a)$, to wtedy f - holomorficzna na $K(a,r)$ □

Twierdzenie 13. *(Weierstrass)*
Niech f - holomorficzna na $R(a,0,r)$, i a - punkt istotnie osobliwy funkcji f. Wówczas

$$\underset{r>0}{\forall} \quad f(R(a,0,r)) = \mathbb{C}.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że f - ma w a punkt istotnie osobliwy i

$$\underset{r>0}{\forall}\ \underset{c\in\mathbb{C}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{z}{\exists}\quad |z-a|<r \implies |f(z)-c|<\varepsilon.$$

Przez sprzeczność.
Wiemy, że f ma w a punkt istotnie osobliwy oraz

$$\underset{r>0}{\exists}\ \underset{c\in\mathbb{C}}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{z}{\forall}\, |z-a|<r, |f(z)-c|\geqslant\varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że f ma w a punkt istotnie osobliwy.
Jeżeli

$$\underset{z}{\forall}\, |z-a|<r, |f(z)-c|\geqslant\varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja $g(z)=\frac{1}{f(z)-c}$ jest ograniczona i holomorficzna na $R(a,0,r)$. Oznacza to, że możemy przedłużyć $g(z)$ do funkcji holomorficznej na $K(a,r)$. Czyli możemy rozwinąć z w szereg Laurenta na $K(a,r)$.

$$g(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots.$$

$i)$ Jeżeli $a_0\neq 0$, to znaczy, że $g(a)\neq 0$, czyli

$$0\neq a_0=\frac{1}{f(a)-c},$$

to znaczy, że $f(a)-c=\frac{1}{a_0} \implies f(a)=c+\frac{1}{a_0}$ i sprzecznosc, bo jeżeli f ma w a konkretną wartość a na $R(a,0,r)$ jest holomorficzna to wtedy możemy zapisać

$$f(z)=c+\frac{1}{a_0}+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots,$$

a skoro f ma w a punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{(z-a)^k}.$$

$i)$ Jeżeli $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, to znaczy, że

$$g(z)=(z-a)^n\left(c_0+\underbrace{c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots}_{\varphi(z)}\right),\quad c_0\neq 0.$$

Zauważmy, że $\varphi(z)$ jest holomorficzna i $\varphi(a) \neq 0$, możemy więc rozwinąć $\frac{1}{\varphi(z)}$ w $K(a,r)$, bo $\frac{1}{\varphi(z)}$ - też jest holomorficzna na $K(a,r)$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Zatem

$$\frac{1}{f(z)-c} = g(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

czyli

$$f(z) - c = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \left(d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots\right),$$

czyli

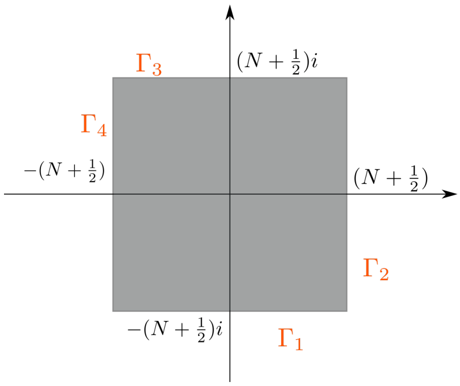
$$f(z) = c + \frac{d_0}{(z-a)^n} + \frac{d_1}{(z-a)^{n-1}} + \frac{d_2}{(z-a)^{n-2}} + \ldots$$

i sprzeczność, bo wtedy wiemy, że $f(z)$ miałaby w $z = a$ biegun n-tego rzędu, a $f(z)$ ma w $z = a$ punkt istotnie osobliwy.

$\square$

Wykład 16. 02.12.2019, *sumowanie szeregów*

Sumowanie szeregów



Rysunek 16.1: Kontur Γ

Stwierdzenie 4. *Niech Γ - kontur przechodzący przez wierzchołki*

$$\left(N \pm \frac{1}{2}\right)(1 \pm i) \quad (\textit{Rysunek } 16.1).$$

I niech $f(z)$ - taka, że

$$\underset{M}{\exists} \quad \underset{|z|>M}{\forall} \quad |f(z)| < \frac{const}{|z|^2},$$

$f(z)$ nie ma biegunów na Γ oraz nie ma biegunów dla $z \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Gamma f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0.$$

Dowód. Oszacujemy $\operatorname{ctg}(\pi z)$.
Dla $z \in \Gamma$

a) Jeżeli $z \in \Gamma_4$ lub Γ_2, to

$$\Gamma_2 = \left\{ y \in \left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = N + \frac{1}{2} + iy \right\}.$$

$$\Gamma_4 = \left\{ y \in \left[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = -(N + \frac{1}{2}) + iy \right\}.$$

$$|\operatorname{ctg}(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \cdot \left| \frac{2i}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}} \right|.$$

Dalej mamy dla $\left|e^{iN\pi}\right| = 1$

$$\left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}} \right| \qquad (\Delta)$$

Obserwacja:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})} = 1.$$

Zatem

$$|(\Delta)| \leqslant \frac{2\left|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi N}\right|}{\left|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\left|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}\right|}{\left|e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{i\pi(N+\frac{1}{2})}\right|} < \text{const.}$$

b) Analogicznie pokażemy, że $\operatorname{ctg}(\pi z)$ jest ograniczony dla $z \in \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$. Zatem

$$\left| \int_\Gamma f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz \right| \leqslant \left| \max_{z\in\Gamma} f(z) \right| \cdot |8N+4| \cdot \text{const} \underset{N>M}{\leqslant} \frac{\text{const}}{N^2} (8N+4) \cdot \text{const} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Wniosek:
Niech b - zbiór wszystkich biegunów $f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)$

$$0 = \lim_{N\to\infty} \int_\Gamma f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)dz = 2\pi i \sum_b \operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right) = 0.$$

Pytanie 12. *W jakich punktach* $\operatorname{ctg}(\pi z)$ *ma bieguny i którego rzędu?*

Zauważmy, że

$$\frac{(\pi z - 0\pi)\cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{1}{\pi}.$$

A np.

$$\lim_{z\to n} \frac{(z-n)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \overset{H}{=} \lim_{z\to n} \frac{\cos(\pi z) - (z-n)\pi\sin(\pi z)}{\pi\cos(\pi z)} \xrightarrow[z\to n]{} \frac{1}{\pi}.$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) = 0,$$

czyli

$$0 = \sum_c \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) + \sum_d \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

gdzie c - bieguny $\operatorname{ctg}(\pi z)$, d - bieguny $f(z)$. Zatem

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_d \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

Przykład 46.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \quad ?$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Rozdzielmy sobie sumę na dwie:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}f(n)+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{\pi}f(n)}_{\textit{bieguny } \operatorname{ctg}(\pi z) \textit{ bez } 0}+\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)=0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}n^2+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}.$$

Obserwacja: Niech $P=\{z\in\Omega, f(z)=0\}$. Niech D - zbiór biegunów $f(z)$ na Ω i f - holomorficzna na $\Omega - D$. Wówczas $\frac{f'}{f}$ ma na Ω bieguny pierwszego rzędu dla $z\in P\cup D$

Dowód. Niech $z_0\in P$. Oznacza to, że

$$f(z)=a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

gdzie $k\geqslant 1$. Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{ka_k(z-z_0)^{k-1}+(k+1)a_{k+1}(z-z_0)^k+\ldots}{a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{ka_k+(k+1)a_{k+1}(z-z_0)+\ldots}{a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots}.$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)f'}{f}=k.$$

Czyli $\frac{f'}{f}$ ma w $z_0\in P$ biegun pierwszego rzędu i wynosi k. □

Niech $z_1\in D$, f ma w $z=z_1$ biegun n - tego rzędu. Oznacza to, że

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}}+\ldots.$$

Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{-na_{-n}}{(z-z_1)^{n+1}} + \frac{-(n-1)a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^n} + \dots}{\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}} + \dots} =$$
$$= \frac{1}{(z-z_1)} \frac{\left[-na_{-n} + -(n-1)a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots\right]}{\left[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots\right]}.$$

$$\lim_{z \to z_n} \frac{f'}{f}(z-z_1) = -n.$$

Wniosek:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} = \sum_{z \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_1 \in P} \frac{f'}{f}.$$

Wykład 17. 06.12.2019, *twierdzenie Rouche, Zasadnicze Twierdzenie Algebry v2.0, sumowanie szeregów v2.0, residuum w* $+\infty$ *(1/3)*

Twierdzenie 14. *Niech* $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω *- otwarty i spójny,* $A \subset \Omega$. *Niech* $D \subset A$ *- zbiór zer funkcji* $f(z)$ *na* A. *Niech* $P \subset A$ *- zbiór biegunów funkcji* f *na* A *oraz*

$$\partial A \cap \partial D = \phi, \quad \partial A \cap P = \phi.$$

Wówczas

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial A} \frac{f'}{f} = N_Z - N_B,$$

gdzie N_Z *- suma krotności wszystkich zer funkcji* f *na* A, *a* N_B *- suma stopni wszystkich biegunów* f *na* A.

Dowód. Wiemy, że

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial A} \frac{f'}{f} = \sum \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \sum_{z_i \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_k \in P} \frac{f'}{f},$$

jest sumą krotności wszystkich zer plus sumą krotności wszystkich biegunów, bo jeżeli $z_i \in D$ - zero rzędu k, to $\operatorname{Res} \frac{f'}{f} = k$, a jeżeli $z_j \in P$ - biegun rzędu n, to

$$\operatorname*{Res}_{z_j} \frac{f'}{f} = -n.$$

□

Twierdzenie 15. *(Rouche)*
Niech $A \subset \Omega$, Ω - otwarty i spójny, f, g - holomorficzne na Ω i taka, że

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

dla $z \in A$, $f(z) \neq 0$, $z \in \partial A$. Wówczas funkcja $f(z) + g(z)$ ma taką samą ilość zer (wraz z krotnościami), co funkcja $f(z)$.

Dowód. Niech $a \in [0, 1]$. Rozważmy

$$h_a(z) = f(z) + a \cdot g(z).$$

Wówczas

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{h_a'(z)}{h_a(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{f'(z) + ag'(z)}{f(z) + ag(z)}.$$

Zauważmy, że $N(a)$ jest ciągła ze względu na a (jako całka z parametrem). Z drugiej strony,

$$N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_z \text{ funkcji } f.$$

Skoro wartość $N(0)$ jest liczbą naturalną, a $N(a)$ jest funkcją ciągłą, to znaczy, że $N(0) = N(a) = N(1)$, a

$$N(1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A} \frac{f' + g'}{f + g} = N_2 \text{ funkcji } (f + g).$$

$\square$

Przykład 47. *(Dowód zasadniczego twierdzenia algebry v2.0)*
Niech $f(z) = a_0 z^n$ i $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$.
Zauważmy, że

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Możemy zatem wybrać taki zbiór A, dla którego $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \partial A$, w którym zawarte będą wszystkie zera funkcji $g(z)$.
Zauważmy, że funkcja $f(z)$ ma zero n - tego stopnia, czyli $N_z = n$ dla funkcji f. Oznacza to, że ilość zer wraz z krotnościami (na mocy tw. Rouche) funkcji $f + g$ wynosi n. $\square$

Przykład 48. *(Sumowanie szeregów v2.0)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ile to będzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}?$$

Niech

$$f(z) = \frac{1}{a^2 - z^2}, \quad a \neq \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2} + \operatorname*{Res}_{z=-a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2}.$$

Ale

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) &= \operatorname{Res} \frac{1}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = \\ &= \lim_{z \to a} \frac{z-a}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a}.\end{aligned}$$

Analogicznie $\frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\operatorname{ctg}(-\pi a)}{2a}$. *Zatem*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a} = -\operatorname{ctg}(\pi a) \qquad (\star)$$

Ale

$$\frac{a}{a^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{-\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}.$$

Zatem

$$(\star): \qquad \ldots + \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a-(n-1)} + \ldots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{a+n} + \ldots = \mathrm{ctg}(\pi a).$$

Wyrażenie po prawej stronie jest funkcją okresu 1.

Residuum w $+\infty$

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z^{-1}} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Przykład 49. *(bijekcja szprychowa - rys 17.1)*

i) Chcemy aby $f(x) = \frac{1}{x}$ *(na* $\mathbb{R}$ *) była ciągła w* $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\frac{1-y'}{x'} = \frac{y'}{x-x'} \implies x - x' - xy' + y'x' = y'x' \implies x(1-y') = x'.$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{1-y'} \\ (x')^2 + (y')^2 = 1 \end{cases}.$$

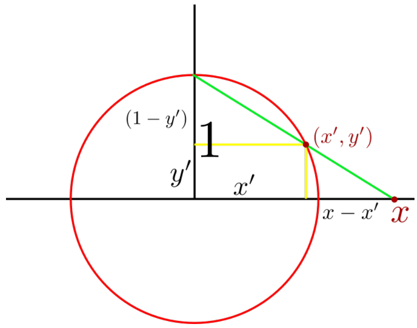
Uzwarcenie aleksandrowe $\mathbb{R} \sim 0$, $\overline{\mathbb{R}} \sim 0$ *- zamknęliśmy nieskończoności w zerze.*

Definicja 20.

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + (0,0,1).$$

Mówimy, że $f(z)$ *jest holomorficzna w* $z = \infty$, *jeżeli funkcja* $g(z) = f(\frac{1}{z})$ *jest holomorficzna w* $z = 0$.

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad K(0, R).$$



Rysunek 17.1: Taka szprycha niech przecina nam okrąg

Definicja 21. *Jeżeli $g(z)$ w rozwinięciu $R(0,0,r)$ ma postać*

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \ldots + a_0 + a_1 z,$$

to mówimy, że $f(z)$ ma w $z = \infty$ biegun rzedu k.

Definicja 22. *Jeżeli* $\lim_{z\to 0} g(z)$ *nie istnieje, to mówimy, że $f(z)$ ma w $z = \infty$ osobliwośc istotną.*

Obserwacja: Jeżeli

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \ldots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

to

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_{-k} z^{k-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots.$$

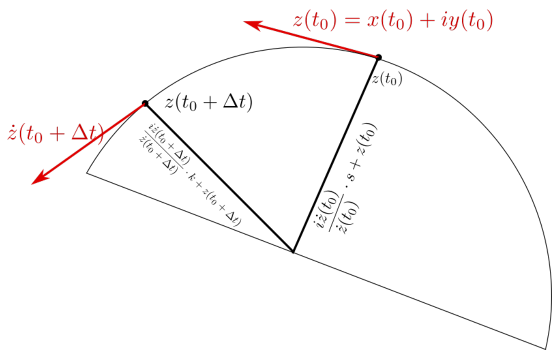
Wykład 18. 09.12.2019, *przygotowanie do twierdzenia Kasner-Arnold, krzywizna, odwzorowania konforemne, residuum w +∞ (2/3)*

Przygotowanie podłoża do tw (. . .)

Krzywizna

Pytanie 13. *Jak policzyć przyspieszenie dla nie-okręgów?*

Odpowiedź: A jaki jest promień tego aktualnego kółka? Mamy jakąś krzy-



Rysunek 18.1: Liczymy na chama promień krzywizny

wą (rys 18.1)

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Szukamy tego punktu przecięcia z (rys 18.1): $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + iy(t)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\frac{i\dot{z}(t_0 + \Delta t)}{|z(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + z(t_0 + \Delta t) = \frac{i\dot{z}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + z(t_0).$$

i) Część urojona (wyrażamy k przez s)

$$\frac{\dot{x}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + y(t_0 + \Delta t) = \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + y(t_0).$$

Wyliczamy z tego k:

$$k = \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)).$$

ii) Część rzeczywista

$$\frac{-\dot{y}(t_0+\Delta t)}{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}\cdot k + x(t_0+\Delta t) = \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|}\cdot s + x(t_0).$$

$$\frac{-\dot{y}(t_0+\Delta t)}{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}\cdot\frac{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}{\dot{x}(t_0+\Delta t)}\cdot\left(y(t_0)-y(t_0+\Delta t)+x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\right) = .$$

$$= s\cdot\left(\frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|}+\frac{\dot{y}(t_0+\Delta t)}{\dot{z}(t_0+\Delta t)}\cdot\frac{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}{\dot{x}(t_0+\Delta t)}\cdot\frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|}\right).$$

iii) Mnożymy wszystko przez $\dot{x}(t_0+\Delta t)$

$$-\dot{y}(t_0+\Delta t)\left(y(t_0)-y(t_0+\Delta t)\right)+\left(x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\right)\dot{x}(t_0+\Delta t) =$$

$$= \frac{s}{|\dot{z}(t_0)|}\left(-\dot{y}(t_0)(\dot{x}(t_0+\Delta t)+\dot{y}(t_0+\Delta t)\cdot x(t_0)\right).$$

iv) Dalej

$$\dot{y}(t_0+\Delta t)\left(y(t_0+\Delta t)-y(t_0)\right)+\dot{x}(t_0+\Delta t)(x(t_0+\Delta t)-x(t_0)) =$$

$$= \frac{s}{|\dot{z}(t)|}\left(\dot{x}(t_0)\left[\dot{y}(t_0+\Delta t)-\dot{y}(t_0)\right]-\dot{y}(t_0)\left[\dot{x}(t_0+\Delta t)-\dot{x}(t_0)\right]\right).$$

v) dzielimy wszystko przez Δt i bierzemy granicę $\Delta t\to 0$

$$\dot{y}(t_0)\cdot\dot{y}(t_0)+\dot{x}(t_0)\cdot\dot{x}(t_0) = \frac{s}{\left((\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\dot{x}(t_0)\cdot\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\cdot\ddot{x}(t_0)\right).$$

vi) Zatem dostajemy wzór na krzywiznę s:

$$\frac{1}{s} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left((\dot{x})^2+(\dot{y})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Inna fajna forma

Zauważmy, że $\overline{\dot{z}}(t)\cdot\ddot{z}(t) = (\dot{x}(t)-i\dot{y}(t))+(\ddot{x}(t)+i\ddot{y}(t)) = \ldots + i\left(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}(t)\right)$, czyli mając $z(t)$, policzymy krzywiznę tak:

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(\overline{\dot{z}}\ddot{z})}{|\dot{z}|^3}.$$

Przykład 50. *Krzywa:* $z(t) = 2e^{it}$, $\dot{z}(t) = 2ie^{it} = 2e^{i(t+\frac{\pi}{2})} \implies \overline{\dot{z}}(t) = 2e^{-i(t+\frac{\pi}{2})}$, $\ddot{z}(t) = -2e^{it}$.

$$\overline{\dot{z}}\ddot{z} = -4e^{i(t-t-\frac{\pi}{2})} = -4 \cdot (-i).$$

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(4i)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Czyli okrąg o promieniu 2 ma promień równy 2.

Odwzorowania konforemne

Definicja 23. *Niech* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω *- spójny,* F *- różniczkowalna na* Ω. *Mówimy, że*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^N.$$

jest odwzorowaniem konforemnym, jeżeli F' *jest proporcjonalna do macierzy ortogonalnej.*

$$F'(x) = f(x) \cdot R(x),$$

gdzie $f(x) : \Omega \to R$, *a* $R(x)$ *- macierz* $n \times n$ *taka, że*

$$R(x)^{-1} = \left(\overline{R}(x)\right)^T, \quad \det R(x) = 1.$$

Stwierdzenie 5. *(**Wniosek:**) odwzorowanie konforemne zachowuje kąt między stycznymi do krzywych.*

Dowód. Weźmy dwie krzywe sparametryzowane

$$x_1(t), \quad t \in]-a, a[$$

$$x_2(t), \quad t \in]-b, b[$$

i

$$x_1(0) = x_1(0).$$

Wówczas (γ - kąt między krzywymi)

$$\cos\gamma = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|\dot{x}_1\| \, \|\dot{x}_2\|_{t=0}}.$$

Policzmy kąt między stycznymi do krzywych $F(x_1(t)), F(x_2(t))$

$$\cos\gamma' = \frac{\left\langle \frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} | \frac{d}{dt}F(x_2(t))_{t=0}\right\rangle}{\|\ldots\|\,\|\ldots\|},$$

ale my wiemy, że

$$\frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} = F'(x_1(t))\frac{d}{dt}x_1(t)_{t=0} =$$

F - konforemna, więc

$$= f(x_1(t))R(x_1(t))\dot{x}_1(t)_{t=0}.$$

Pamiętamy, że jeżeli R - ortogonalna, to $\langle x|y\rangle = \langle Rx|Ry\rangle$, zatem

$$\cos\gamma' = \frac{\langle f\cdot R\dot{x}_1 | f\cdot R\dot{x}_2\rangle_{t=0}}{\|f\cdot R\dot{x}_1\|\,\|f\cdot R\dot{x}_2\|_{t=0}} = \frac{\langle \dot{x}_1|\dot{x}_2\rangle}{\|\dot{x}_1\|\,\|\dot{x}_2\|_{t=0}} = \cos\gamma.$$

□

Pytanie 14. *A co z funkcjami zespolonymi?*

Odpowiedź: Niech

$$f(z) = f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y),$$

taka, że f - holomorficzna. Możemy zatem badać funkcję

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \overset{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i R - ortogonalna, to znaczy, że $R^{-1} = \overline{R}^T$ i $\det R = 1$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies d = a \wedge -b = c.$$

Czyli

$$F'(x,y) = (a^2+b^2)\frac{1}{a\cdot a - (-b)\cdot b}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Powrót do residuów w nieskończoności

mamy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in R(0,0,r).$$

Oznacza to, że

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

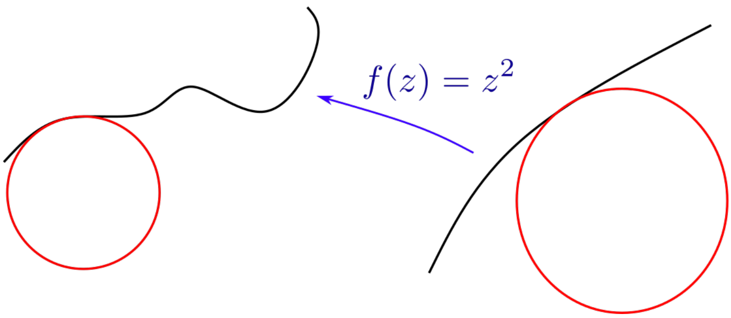
Zauważmy, że a_n w rozwinięciu $g(z)\ldots$ jest dany wzorem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t)\\ 0<t<r}} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Zamieniamy zmienne: $z = \frac{1}{z'}$, $dz = -\frac{1}{(z')^2}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K\left(0,\frac{1}{t}\right)\\ 0<t<r}} \frac{g\left(\frac{1}{z'}\right)}{\left(\frac{1}{z'}\right)^{n+1}} \cdot \frac{-1}{(z')^2} dz' = \int\limits_{\substack{\partial K(0,\frac{1}{t}\\ 0<t<r}} f(z')(z')^{n-1} dz'.$$

Wykład 19. 13.12.2019, *twierdzenie Kasner-Arnold*



Rysunek 19.1

Sprawdzamy jak zmienia się promień krzywizny przy transformacji $f(z)$

(rys 19.1).

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(\ddot{z}\overline{\dot{z}})}{|\dot{z}|^3}.$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{Im\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}(z(t))^2\, \overline{\frac{d}{dt}|z(t)|}\right)\right)}{\left|\frac{d}{dt}(z(t))^2\right|^3}.$$

$$\tilde{z}(t) = (z(t))^2 .$$

$$\left(\dot{\tilde{z}}(t)\right)' = (2\,(z(t)\,(\dot{z}(t))))' = 2\dot{z}(t)\dot{z}(t) + 2z(t)\ddot{z}(t).$$

$$\left(\overline{\tilde{z}}\right)' = (\tilde{z}(t)\tilde{z}(t))' = 2\overline{z}(t)\overline{\dot{z}}(t).$$

$$\ddot{\tilde{z}} \cdot \overline{\dot{\tilde{z}}} = \left(2(\dot{z}(t))^2 + 2z(t)\ddot{z}(t)\right)\left(2\overline{z}(t)\overline{\dot{z}}(t)\right) = 4\overline{z}(t)\,|\dot{z}|^2\,\dot{z}(t) + 4\,|z(t)|^2\,\overline{\dot{z}}(t)\cdot\ddot{z}(t).$$

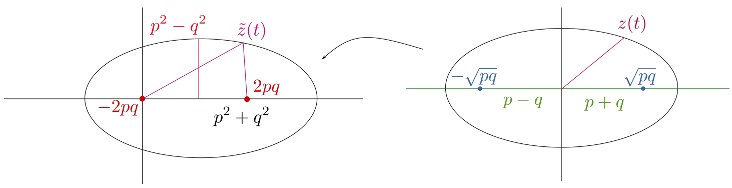
Ale

$$\frac{Im(\ddot{\tilde{z}}\overline{\dot{\tilde{z}}})}{\left|\dot{\tilde{z}}(t)\right|^3} = \frac{Im\,|4\overline{z}(t)|\,(\dot{z}(t))^2\cdot\dot{z}(t)}{8\,|z(t)|^3\,|\dot{z}(t)|^3} + \frac{Im(4\,|z(t)|^2\,\overline{\dot{z}}(t)\ddot{z}(t))}{8\,|z(t)|^3\,|z(t)|^3}.$$

Zatem
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\,|z(t)|}\left(\frac{Im\,(\overline{z}(t)\dot{z}(t))}{|z(t)|^2\,|z(t)|} + \frac{1}{s}\right).$$
Ale
$$\overline{z}(t)\dot{z}(t) = (x(t) - iy(t))\,(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} + i\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,.$$
$$Im\,(\overline{z}(t)\dot{z}(t)) = x\dot{y} - y\dot{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{bmatrix} = |\overline{z}(t)| \cdot |\dot{z}(t)| \sin(\sphericalangle \dot{z}(t), \overline{z}(t)).$$
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\,|z(t)|}\left(\frac{|z(t)|\,|\dot{z}(t)|}{|z(t)|^2 \cdot |\dot{z}(t)|}\sin(\sphericalangle(\dot{z}, \overline{z})) + \frac{1}{s}\right).$$
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\,|z(t)|}\left(\frac{\sin(\sphericalangle(\dot{z}, \overline{z}))}{|z(t)|} + \frac{1}{s}\right).$$

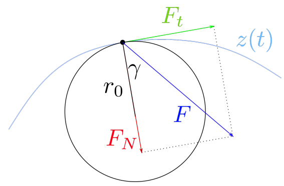
Już prawie twierdzenie Kasner-Arnold

Rozważmy ruch na $\mathbb{R}^2$, pod wpływem siły $F = -r$, czyli na $\mathbb{C}$
$$\ddot{z}(t) = -z(t), \text{ gdzie } (m = 1, k = 1)\,.$$
Trajektoria wygląda tak:



Rysunek 19.2: przed i po

$$z(t) = pe^{it} + qe^{-it} = (p + q)\cos(t) + i(p - q)\sin(t).$$
$$(x(t), y(t)) = ((p + q)\cos(t), (p - q)\sin(t))\,.$$
Jak rozpoznać siłę typu $F = -\frac{1}{r^2}$ od $F = -r$? Trajektoria wychodzi taka sama, ale dla tej drugiej siła jest zaczepiona w środku elipsy. Co się stanie jak przepuścimy tę elipsę przez $f(z) = z^2$? Dostaniemy
$$\tilde{z}(t) = \left(pe^{it} + qe^{-it}\right)^2 = p^2e^{2it} + 2pq + q^2e^{-2it} = \left(p^2 + q^2\right)\cos(2t) + 2pq + i(p^2 - q^2)\sin(2t)$$
taką przesuniętą elipsę jak na rys. 19.2



Rysunek 19.3

Pytanie 15. *Jeżeli $F = -r$, To jaka jest $\tilde{F}$? (sytuacja jak na rys. 19.3)*

$\cos\gamma = \frac{F_N}{F}$, $F = \frac{F_N}{\cos\gamma}$, ale $F_N = \frac{v^2(t)}{r_0}$. My wiemy, że czasami zachowany jest moment pędu

$$\overline{r} \times \overline{v}(t) = r \cdot v \sin(\sphericalangle r, v) = rv\cos\gamma = const = A.$$

Czyli

$$v = \frac{A}{r\cos\gamma}.$$

$$F = \frac{F_N}{\cos\gamma} = \frac{1}{r_0}\frac{A^2}{r^2(\cos\gamma)^3}.$$

I dostaliśmy taki związek. Dla ruchu po okręgu $\gamma = 0$, $r = r_0$ i wtedy

$$F = \frac{1}{r^3}A^2 = \frac{1}{r^3}(rv)^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Znowu spróbujemy przepuścić taki ruch przez $f(z) = z^2$. Przypuszczamy, że będą takie zmiany:

$$\begin{aligned} A &\sim \tilde{A} \\ r &\sim \tilde{r} \\ r_0 &\sim \tilde{r}_0 \\ \gamma &\sim \gamma \quad \text{(bo } f(z) \text{ - koforemna)} \\ v &\sim \tilde{v} \\ F &\sim \tilde{F}. \end{aligned}$$

Ale

$$F = \frac{A^2}{r_0}\frac{1}{r^2}\frac{1}{(\cos\gamma)^3}.$$

Zatem

$$\tilde{F} = \frac{1}{\tilde{r}_0} \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{1}{(\cos\gamma)^3}.$$

A i $\tilde{A}$ się nie przejmujemy, ale za to r_0 już tak

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{\overset{\sin(\sphericalangle(\dot{z},\overline{z}))}{\cos\gamma}}{r}\right).$$

Z tego co wcześniej napisaliśmy, mamy

$$\frac{1}{r_0} = \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos\gamma)^3.$$

Wtedy

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\cos\gamma}{r} + \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos\gamma)^3\right).$$

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{r}\frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2} r \left(\frac{(A)^2}{2r^2(\cos\gamma)^2} + \frac{Fr}{2}\right).$$

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{Fr}{2}\right).$$

Zauważmy, że gdy $F \sim r$, to

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}r^2 = E.$$

(Energia całkowita ruchu po elipsie, przed przepuszczeniem przez $f(z) = z^2$)

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2} \cdot E.$$

Zatem podstawiając do wcześniej wyliczonego $\tilde{F}$ mamy

$$\tilde{F} = \frac{(\cos\gamma)^3 E}{(A)^2} \cdot \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \frac{1}{(\cos\gamma)^3} = \left(\frac{\tilde{A}}{A}\right)^2 \frac{E}{\tilde{r}^2} = \frac{const}{\tilde{r}^2}.$$

To jest dowód Kasnera - Arnolda w przypadku $f(z) = z^2$. Siły grawitacji i te $\sim r$ okazują się być w jakiejś "dualności" względem z^2.

Twierdzenie 16. *(Kasner-Arnold)*
Jeżeli $F_1 \sim r^A$, *a* $F_2 \sim r^{\tilde{A}}$ *i*

$$(A+3)\,(\tilde{A}+3) = 4$$

i $m = \frac{A+3}{2}$, *to transformacja* $f(z) = z^m$ *przeprowadza ruch (trajektorię i cały ten posag) pod wpływem siły* F_1 *w ruch pod wpływem siły* F_2.

Przykład 51. *sprężyna* - $A = 1$, $\tilde{A} = -2$, $m = \frac{1+3}{2} = 2$

$$(1+3)(-2+3) = 4.$$

Wtedy nasz f *wynosi* $f(z) = z^2$.

Wykład 20. 16.12.2019, *residuum w $+\infty$ (3/3) + super twierdzenie, transformata Fouriera*

dodatek na temat kąta

Było

$$\sin(\sphericalangle \dot{z}, \overline{z}).$$

Ma być

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = |z||\dot{z}| \sin\left(\sphericalangle(z, \dot{z})\right).$$

Powrót do residuów w nieskończoności

Dostaliśmy na Wykładzie 18

$$a_n = -\frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) z^{n-1} dz.$$

Wielkość

$$-a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) dz$$

nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności.

Stwierdzenie 6. *Niech f - holomorficzna na $\mathbb{C}$ z wyjątkiem punktów $z_1, \ldots, z_k$, ale z_i - biegun p_i rzędu (nie ma punktów istotnie osobliwych). Wówczas*

$$\sum_{\mathrm{Res}\, f + \mathrm{Res}\, \infty} f = 0.$$

Dowód. Niech z_i takie, że

$$\underset{A}{\exists} \ \underset{i}{\forall} \ z_i \in A.$$

Wówczas

$$-\int\limits_{\partial A} f + \sum_i \int\limits_{\partial K(z_i, r_i)} = 0.$$

$\square$

Pytanie 16. *Jak obliczyć a_1?*

Zauważmy, że gdy rozwiniemy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

w szereg Laurenta wokół zera, to $g(z)$ przyjmuje postać

$$g(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

Zauważmy, że

$$\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{a_2}{z^4} + \frac{a_{-1}}{z^3} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \ldots.$$

Zatem

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}.$$

Przykład 52.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = \sum_{\substack{\text{Res}\, \frac{1}{8} \\ (-1)}} f = -\operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Ale

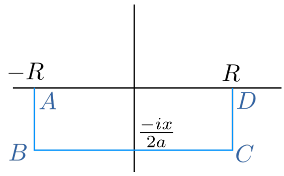
$$f(z) = \frac{1}{(z^8+1)^2}.$$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^8 + 1\right)^2} = \frac{z^{16}}{(1+z^8)^2}$$

i liczymy $\operatorname*{Res}_{0} \quad \frac{g(z)}{z^2}$ *Ale*

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \cdot z^{14}}{(1+z^8)^2} = 0.$$

Więc całka też 0.



Rysunek 20.1: w20-1

Przykład 53. *Sytuacja jak na rys. 20.1*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt, \quad a \geqslant 0.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[(t-\frac{ix}{2a})^2+\frac{x^2}{4a^2}\right]} dt = e^{-a\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-\frac{ix}{2a})^2} dt.$$

Liczymy teraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R-\frac{ix}{2a}}^{R-\frac{ix}{2a}} e^{-as^2} ds.$$

Niech $f(z) = e^{-az^2}$

$$\int_{AB} f + \int_{BC} f + \int_{CD} f + \int_{DA} f = 0.$$

BC *już mamy, więc*

$$\int_{BC} f = -\int_{DA} f - \int_{BA} f - \int_{CD} f.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{CD} f = 0.$$

Parametryzacja $CD := \left\{z = R + iy, -\frac{x}{2a} \leqslant y \leqslant 0\right\}$

$$\int_{CD} f = \int_{-\frac{x}{2a}}^{0} idy \cdot e^{-a(R+iy)^2} = i \int_{-\frac{x}{2a}}^{0} dy \cdot e^{-aR^2} e^{-2Riya} e^{ay^2}.$$

$$\left| \int_{CD} f \right| \leqslant e^{-aR^2} \left|\frac{x}{2a}\right| \cdot \left|e^{-2Riya}\right| \cdot \max_{-\frac{x}{2a} \leqslant y \leqslant 0} \left|e^{ay^2}\right| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I tak samo będzie z całką po AB*. Jeszcze zostało* DA

$$\lim_{R\to+\infty} - \int_{DA} f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Transtormata Fouriera

Obserwacja: Rozwińmy $f(z)$ w $R(0, a, b)$, $a, b < 1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t)\\ a<t<b}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Wstawmy $z = e^{ix}$

$$g(z) = f\left(e^{ix}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{mx}.$$

Ale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,t)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \begin{matrix} z = e^{ix} \\ dz = ie^{ix} dx \end{matrix} = \frac{1}{2\pi i} i \int_0^{2\pi} \frac{f\left(e^{ix}\right)}{e^{(ix)(n+1)}} e^{ix} dx.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

Definicja 24. *Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy wielkość*

$$\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xt} f(t) dt.$$

Uwaga: transformatę Fouriera możemy zdefiniować też tak

Definicja 25. *(inne notacje)*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\sigma xt} f(t) dt,$$

gdzie $m = \{1, 2\pi\}$, $q = \{-1, 1\}$, $\sigma = \{1, 2\pi\}$.
Konwencja u nas:

- $m = 1$
- $q = -1$
- $\sigma = 2pi$

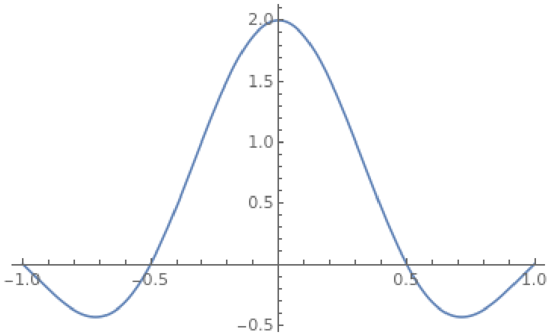
Przykład 54.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi tx} dt = \int\limits_{-a}^{+a} e^{-i2\pi tx} dt = -\frac{1}{2\pi ix} e^{-i2\pi tx} \Big|_{-a}^{a} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi ix} \left[e^{-i2\pi ax} - e^{i2\pi ax} \right] = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}.$$

Czyli jak na rys. 20.2



Rysunek 20.2: Wynik przefourierowania f

Definicja 26. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Mówimy, że*

- f *- klasy* L_1, *jeżeli*
$$\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty.$$
- f *- klasy* L_2, *jeżeli*
$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < +\infty.$$

Przykład 55.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & x > 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$
Zbadać, czy f *jest klasy* L_1 *lub (i)* L_2 *i czy* g *jest klasy* L_1 *lub (i)* L_2

Wykład 21. 20.12.2019, *własności transformaty Fouriera i transformata odwrotna*

Do pytania o L_1 i L_2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f| = \int\limits_{0}^{1} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 = \int\limits_{0}^{1} (x)^{-\frac{4}{3}} \text{ nie istnieje}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g| = \int\limits_{1}^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} \text{ nie istnieje}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 = \int\limits_{1}^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3$$

.

Czyli f - klasy L_1, g - klasy L_2

Własności (transformaty Fouriera)

1. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. f, g - klasy L_1, wówczas
$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g.$$
(z liniowości całki)

2. Niech f, g - klasy L_1, wówczas
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

Dowód. (z twierdzenia Foubiniego)

$$\hat{g}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-2\pi ikx}dk.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-2\pi ikx}dk = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\hat{f}(k)dk.$$

$\square$

Obserwacja: chcemy rozwiązać równanie:

$$(f(t))'' + \omega^2 f(t) = g(t).$$

Załóżmy, że nasz f :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

Dajmy na to, że

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

$$f'(t) = -2\pi ik \int_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

$$f''(t) = (-2\pi ik)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

Po podstawieniu do oscylatora, uzyskujemy napis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-2\pi ik)^2 h(k) + \omega^2 h(k) - w(k)\right] e^{-2\pi ikt}dk = 0,$$

co by oznaczało tyle, że

$$\left(-4\pi^2k^2 + \omega^2\right) h(k) = w(k).$$

Czyli

$$h(k) = \frac{w(k)}{-4\pi^2k^2 + \omega^2}.$$

Ale wiemy, że

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(k)}{\omega^2 - 4\pi^2 k^2} e^{-2\pi i k t} dt.$$

Obserwacja: Jeżeli f - klasy L_1 i f' - klasy L_1, to $\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = 2\pi i x(\mathcal{F}f)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(k) e^{-2\pi i k x} dk = f(k) e^{-2\pi i k x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-2\pi i x) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk}_{\mathcal{F}(f)}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$, to znaczy, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, oraz skoro f' - klasy L_1, to

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^x f'(k) dk.$$

Skoro f' - klasy L_1, to znaczy, że

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - f(0)| \leqslant \left| \int\limits_0^{+\infty} f'(k) dk \right| \leqslant M.$$

Widzimy zatem, że $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leqslant M$ znaczy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty$, to znaczy, że

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \square$$

Zatem

$$\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = (2\pi i x)(\mathcal{F}f)(x),$$

(jeżeli $f, f', \ldots, f^{(m)}$ - klasy L_1) i ogólniej

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi i x)^m (\mathcal{F}f)(x).$$

Obserwacja: Niech f - klasy L_1, wówczas $\frac{d}{dx}\left(\mathcal{F}f\right)(x) = -2\pi i \mathcal{F}(xf)$

Dowód.

$$\frac{d}{dx}\left(\mathcal{F}f\right)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\mathcal{F}f)(x+h)-(\mathcal{F}f)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(f(k)e^{-2\pi ik(x+h)} - f(k)e^{-2\pi ikx}\right)dk =$$

$$= \lim_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi ikx}\left(\frac{e^{-2\pi ikh}-1}{h}\right)dt. \qquad (\star)$$

Ale

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2\pi ikh}-1}{h} \overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-2\pi ike^{-2\pi ikh}}{1} = -2\pi ik.$$

Zatem dalej mamy

$$(\star) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -2\pi ikf(k)e^{-2\pi ikx}dk = -2\pi i\widehat{(xf)}.$$

□

Transformata odwrotna

1. policzmy $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathcal{F}f\right)(x)dx$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-2\pi ikx}dk.$$

Wcześniej napisaliśmy $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$. No to weźmy $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-2\pi ikx}dk$, ale to jeszcze nie teraz, bo taka całka jeszcze nie istnieje. Zauważmy, że

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dk =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx.$$

Policzmy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2\pi ikx}e^{\varepsilon|x|}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(-2\pi ik-\varepsilon)x}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(-2\pi ik+\varepsilon)x}dx =$$

$$= \frac{1}{-2\pi ik-\varepsilon}\ e^{(-2\pi ik-\varepsilon)x}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{-2\pi ik+\varepsilon}\ e^{(-2\pi ik+\varepsilon)x}\Big|_{-\infty}^{0}. \qquad (\star\star)$$

Ale $e^{-2\pi ikx}\cdot e^{-\varepsilon x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$(\star\star) = \frac{-1}{-2\pi ik-\varepsilon} + \frac{1}{-2\pi ik+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon+2\pi ik} + \frac{1}{\varepsilon-2\pi ik} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(2\pi k)^2}.$$

Zatem

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(k)\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(2\pi k)^2}dk.$$

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right)\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(\varepsilon L)^2}\cdot\varepsilon\cdot dL = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right)\frac{2\varepsilon^2 dL}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}.$$

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{2\varepsilon L}{2\pi}\right)\frac{1}{1+L^2}dL = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(0)\frac{dL}{1+L^2} = \frac{2f(0)}{2\pi}\left(arctg(L)\right)_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{f(0)}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{f(0)}{\pi}\cdot\pi = f(0) \quad \square.$$

Niech $f_L(x) = f(x+L)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f_L(x)\right) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_L(k)e^{-2\pi ikx}dk = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(L+k)e^{-2\pi ikx}dk = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(k')e^{-2\pi ix(k'-L)}dk' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixL}f(k')e^{-2\pi ixk'}dk' = \\ &= e^{2\pi ixL}\left(\mathcal{F}f\right).\end{aligned}$$

Policzmy całkę $\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{F}f_L)(x)$. Wiemy, że

$$f_L(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f_L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi iL}\mathcal{F}f.$$

Czyli

$$f(L) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}e^{2\pi iL}dL.$$

Mamy wzór na transformatę odwrotną, czyli wiemy, że jeżeli $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi ikx}dk$, to $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}dk$

Wykład 22. 09.01.2020, *Splot, wchodzenie z granicą pod całkę i równanie przewodnictwa*

Definicja 27. *Jeżeli f - klasy L^1 na $\mathbb{R}$ i g - klasy L^1 na $\mathbb{R}$, to wielkość*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt$$

nazywamy splotem (konwolucją) funkcji f i g i oznaczamy

$$h(x) \overset{ozn}{=} (f \star g)(x).$$

bonus:

$$\|f_1 \star f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Przykład 56.

$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = e^x.$$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{x-t}dt.$$

Uwaga: $h(x)$ też jest klasy L_1 na $\mathbb{R}$, bo

Dowód.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)g(x-t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\, dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dt.$$

$\square$

Przykład 57. *(np. rozkład ładunku elektrycznego)*

$$f(\overline{x}) = \rho(\overline{x})$$
$$g(\overline{x}) = \frac{1}{\|\overline{x}\|}.$$

$$(f \star g)(\overline{x}) = \int d^3\overline{x}' \frac{\rho(x')}{\|x - x'\|}.$$

Przykład 58. *(związek z Rezolwentą z drugiego semestru)*

$$x(t) = \int R(t-s)b(s)ds.$$

Stwierdzenie 7.

$$\mathcal{F}(f \star g)(x) = (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x).$$

Dowód.

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{-2\pi ikx}dk = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dke^{-2\pi ikx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dtf(t)g(k-t) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dtf(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dkg(k-t)e^{-2\pi ikx}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&k - t = s \\
&dk = ds \\
&k = s + t \\
&\implies \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x(s+t)} = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-2\pi i x t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x s} = \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}
$$

Uwaga: analogicznie,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(f \star g\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x)\left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(x).$$

$\square$

Pytanie 17. *Kiedy możemy wejść z granicą pod całkę?*

Twierdzenie 17. *Niech*

1. $A, B \subset \mathbb{R}$
2. $f : A \times B \to \mathbb{R}$
3. $x \in A$, $y \in B$, $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Jeżeli

$$\forall_{y \in B} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$$

oraz istnieje $g : B \to \mathbb{R}$, g *- całkowalna na* B *oraz*

$$\forall_{x \in A} \quad \forall_{y \in B} |f(x, y)| < |g(y)|,$$

to

$$\lim_{x \to x_0} \int_B f(x, y) dy = \int_B f(x_0, y) dy.$$

$|g(y)|$ *nazywamy* ***majorantą****, a ten warunek zbieżnością* ***zmajoryzowaną****.*

Dowód. brak :(□

Przykład 59. *Niech*

1. $B =]0, \infty[$
2. $f(x, y) = xe^{-xy}$

$$\int_0^\infty dy x e^{-xy} = x \cdot \frac{-1}{x} e^{-xy} \Big|_0^\infty = -e^{-xy} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \int_0^\infty xe^{-xy} dy = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

$$\int_0^\infty \lim_{x \to 0} xe^{-xy} dy = \int_0^\infty 0 dy = 0.$$

Czy $f(x,y)$ jest majoryzowalna?

$$\underset{x\in A}{\forall} \quad \underset{y\in B}{\forall} |f(x,y)| < |g(y)|\,.$$

$$h(x) = xe^{-xy} h'(x) = e^{-xy} + x\left(-ye^{-xy}\right).$$

$e^{-xy}(1-xy)$ *ma robi* $h'(x) = 0$, *gdy* $xy = 1 \implies x = \frac{1}{y}$.

$$h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}e^{-\frac{1}{y}y} = \frac{1}{y}e^{-1}.$$

Czy istnieje g - całkowalna na $]0,\infty[$, taka, że

$$\left|\frac{1}{ey}\right| < |g(y)|?$$

Odpowiedź: *nie.*

Równanie przewodnictwa

Szukamy funkcji $U(x,y) : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, takiej, że

1. $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, dla $t > 0$
2. $U(x,0) = f(x)$
3. $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Załóżmy, że istnieją funkcje $\tilde{U}(\omega,t)$ i $\tilde{f}(\omega)$ takie, że

- $U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega,t)e^{-2\pi i\omega x}d\omega$
- $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-2\pi i\omega x}$, czyli $f(x) = \mathcal{F}\left(\tilde{f}\right)(x)$.

Podstawiamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} e^{-2\pi i\omega x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-2\pi i\omega\right)^2 \tilde{U}(\omega,t)e^{-2\pi i\omega x}$$

do naszego równania przewodnictwa i mamy

$$\underset{x\in]-\infty,+\infty[}{\forall} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-2\pi iax}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t} - a^2\left(-2\pi i\omega\right)^2\tilde{U}(\omega,t)\right) = 0.$$

To oznacza, że skoro rozwiązanie ma być dla całej szyny, to wyrażenie podcałkowe ma być równe 0. Czyli

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t} = -(2\pi ia\omega)^2\tilde{U}(\omega,t) \implies \tilde{U}(\omega,t) = C(\omega)e^{-(2\pi a\omega)^2 t}.$$

Równanie jest rozwiązane, ale trzeba dopracować szczegóły. Znajdźmy $C(\omega)$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\omega,0) &= C(\omega)\\ \tilde{U}(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\tilde{U}(\omega,0)e^{-2\pi i\omega x} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C(\omega)e^{-2\pi ix}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony, $\tilde{U}(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-2\pi i\omega x}d\omega$. Stąd $C(\omega) = \tilde{f}(\omega)$. Ostatecznie

$$\tilde{U}(\omega,t) = \tilde{f}(\omega)e^{-(2\pi a)^2\omega^2 t}.$$

Nasze $U(x,t)$ jest transformatą Fouriera tego napisu względem zmiennej ω (**nie czasu!**).

$$U(x,t) = \mathcal{F}\left(\tilde{U}(\omega,t)\right).$$

Wiemy, że

$$\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f).$$

Niech

$$\tilde{g}(\omega,t) = e^{-(2\pi a)^2\cdot t\cdot\omega^2}.$$

Znajdźmy funkcję g taką, że

$$\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g).$$

Chcemy wyznaczyć $U(x,t)$ bez konieczności liczenia $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$, czyli w języku f i g. Policzmy najpierw g.

$$g = \mathcal{F}(\tilde{g}).$$

My już kiedyś policzyliśmy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad a > 0 \tag{Δ}$$

Czyli

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(2\pi a)^2 t\omega^2} e^{-2\pi i\omega x}.$$

Przekładamy tę całkę (**??**) na nasze literki

$$(\mathbf{??}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\spadesuit\omega} e^{-\clubsuit\omega^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\clubsuit}} e^{-\frac{(\spadesuit)^2}{4\clubsuit}} \quad \clubsuit > 0.$$

Czyli mamy g

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 \cdot t}} e^{\frac{-(-2\pi x)^2}{4(2\pi a)^2 t}}.$$

Wiemy, że

- $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$
- $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g)$
- $U(x,t) = \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g})$.

Jeżeli α, β - funkcje klasy L_1, to

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta) = \mathcal{F}^{-1}(\alpha)\mathcal{F}^{-1}(\beta).$$

Teraz obustronnie fourierujemy

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta)\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)\right).$$

Czyli

$$\alpha \star \beta = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)\right).$$

Jeżeli

- $\mathcal{F}^{-1}(\alpha) = \tilde{f}$

- $\alpha = \mathcal{F}(\tilde{f}) = f$
- $\mathcal{F}^{-1}(\beta) = \tilde{g}$
- $\beta = \mathcal{F}(\tilde{g}) = g,$

to

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = f \star g = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds. \end{aligned}$$

$$U(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) \cdot e^{-\frac{(2\pi)^2 \cdot (x-s)^2}{(2\pi)^2 \cdot 4a^2 t}} = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}.$$