$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R(z_0,r_1',r_2')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial K(z_0,r_1')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

1. Jeżeli $z\in K(z_0,r_2')$ i $\xi\in\partial K(z_0,r_2')$

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1.$$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0+z_0-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-z}{\xi-z_0}}$$

   i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi.$$

2. Jeżeli $|z-z_0|>r_1'$, to mamy, że dla $\xi\in\partial K(z_0,r_1')$

$$\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1.$$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0+z_0-z}=\frac{1}{z_0-z}\cdot\frac{1}{1+\frac{\xi-z_0}{z_0-z}}=\frac{1}{z_0-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}=\frac{1}{z_0-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{1}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}=-\sum$$

   Zatem

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n},$$

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi,$$

   czyli

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na pierścieniu $R(z_0,r_1,\infty)$, to jak wyglądało by rozwinięcie $f(z)$?
Zauważmy, że

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{r_2'ie^{i\varphi}f(z_0+r_2'e^{i\varphi})d\varphi}{(r_2'e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n|\leqslant|\frac{1}{2\pi i}|\cdot\frac{1}{(r_2')^n}\cdot\max_{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}\left|f(z_0+r_2'e^{i\varphi})\right|\cdot2\pi,$$

ale jeżeli f ograniczona poza kołem $K(z_0,r_1')$, to znaczy, że

$$\underset{r_2'>r_1'}{\forall}\left|f(z_0+r_2'e^{i\varphi})\right|<M.$$

Czyli

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi\cdot M\cdot\frac{1}{(r_2')^n}\underset{r_2'\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

więc

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na $R(z_0,0,r_2)$, to jak wyglądałoby rozwinięcie?
Wiemy, że

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_1')}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}r_1'ie^{i\varphi}f(z_0+r_1'e^{i\varphi})(r_1'e^{i\varphi})^{n-1}d\varphi.$$

$$|d_n|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\cdot r_1^n\cdot\max_{\underset{M}{\exists}:|f(z)|<M,z\in K(z_0,r_1)}\left|f(z_0+r_1'e^{i\varphi})\right||2\pi|.$$

Czyli dla $z\in K(z_0,r_2)$, f - holomorficzna na $K(z_0,r_2)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi.$$

Pytanie 1. *Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się a_n do $\frac{f^n(z_0)}{n!}$?*

Koniec obserwacji, wracamy do dowodu

Pytanie 2. *Czy wzory na a_n i d_n można uprościć?*

Przypomnienie: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że $f(z)$ - holomorficzne na $R(z_0, r_1, r_2)$, a funkcja $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ - też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, czyli

$$\int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \underset{r_1 < r < r_2}{\forall}.$$

To samo możemy powiedzieć o d_n

$$\int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(z - z_0)^{n-1} d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \underset{r_1 < r < r_2}{\forall}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n} (z - z_0)^n,$$

ale $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

Twierdzenie 1. *Niech C - krzywa na $\mathbb{C}$ (zamknięta lub nie) i niech $f(z)$ - ciągła na C. Wówczas funkcja*

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorficzna na $\mathbb{C} - C$ dla $p \in \mathbb{Z}$ i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ i $z_0 \notin C$. Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0 \qquad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z - z_0)} \left[\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(z - z_0)^p} \right] - p \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{p+1}} = \int_C d\xi f(\xi) \left[\underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p}}{z - z_0}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}} \right] \qquad (\Delta\Delta)$$

Ale (Δ) - iloraz różnicowy funkcji
$$g(z) = \frac{1}{(\xi - z)^p}.$$
$$(\Delta) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$
Wiemy, że $g(z)$ - holomorficzna dla $z \notin C$, czyli
$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi - z)^{p+1}},$$
czyli
$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego, niż } (z - z_0).$$
Zatem
$$(\Delta\Delta) = \int_C d\xi f(\xi) \left[\frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego niż } (z - z_0) - \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} \right].$$
$$|(\Delta\Delta)| \leqslant |\max_{\xi in C} f(\xi)| \, |\text{długość } C| \cdot |z - z_0| \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Wniosek: dla krzywej zamkniętej wiemy, że
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$
zatem
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$
Wiemy, że $f'(z)$ - też jest holomorficzna (bo wzór na φ z $p = 2$)