Definicja 1. *Jeżeli f - klasy L^1 na $\mathbb{R}$ i g - klasy L^1 na $\mathbb{R}$, to wielkość*

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt$$

nazywamy splotem (konwolucją) funkcji f i g i oznaczamy

$$h(x) \stackrel{ozn}{=} (f \star g)(x).$$

bonus:

$$\|f_1 \star f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Przykład 1.

$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = e^x.$$

$$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{x-t}dt.$$

Uwaga: $h(x)$ też jest klasy L_1 na $\mathbb{R}$, bo

Dowód.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)g(x-t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dt.$$

$\square$

Przykład 2. *(np. rozkład ładunku elektrycznego)*

$$f(\overline{x}) = \rho(\overline{x})$$
$$g(\overline{x}) = \frac{1}{\|\overline{x}\|}.$$

$$(f \star g)(\overline{x}) = \int d^3\overline{x}' \frac{\rho(x')}{\|x - x'\|}.$$

Przykład 3. *(związek z Rezolwentą z drugiego semestru)*

$$x(t) = \int R(t-s)b(s)ds.$$

Stwierdzenie 1.

$$\mathcal{F}(f \star g)(x) = (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x).$$

Dowód.

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{-2\pi ikx}dk = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dke^{-2\pi ikx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dtf(t)g(k-t) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dtf(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dkg(k-t)e^{-2\pi ikx}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&k - t = s \\
&dk = ds \\
&k = s + t \\
&\implies \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x(s+t)} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-2\pi i x t} \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x s} = \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}
$$

Uwaga: analogicznie,

$$\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) \left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(x).$$

$\square$

Pytanie 1. *Kiedy możemy wejść z granicą pod całkę?*

Twierdzenie 1. *Niech*

1. $A, B \subset \mathbb{R}$
2. $f : A \times B \to \mathbb{R}$
3. $x \in A,\ y \in B,\ f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Jeżeli

$$\underset{y \in B}{\forall} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$$

oraz istnieje $g : B \to \mathbb{R}$, g *- całkowalna na* B *oraz*

$$\underset{x \in A}{\forall} \quad \underset{y \in B}{\forall} |f(x, y)| < |g(y)|,$$

to

$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_B f(x, y)dy = \int\limits_B f(x_0, y)dy.$$

$|g(y)|$ *nazywamy* ***majorantą****, a ten warunek zbieżnością* ***zmajoryzowaną****.*

Dowód. brak :(□

Przykład 4. *Niech*

1. $B =]0, \infty[$
2. $f(x, y) = xe^{-xy}$

$$\int\limits_0^\infty dy x e^{-xy} = x \cdot \frac{-1}{x} e^{-xy} \Big|_0^\infty = -e^{-xy} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \int\limits_0^\infty xe^{-xy}dy = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

$$\int\limits_0^\infty \lim_{x \to 0} xe^{-xy}dy = \int\limits_0^\infty 0dy = 0.$$

Czy $f(x,y)$ jest majoryzowalna?

$$\underset{x\in A}{\forall}\quad \underset{y\in B}{\forall} |f(x,y)| < |g(y)|\,.$$

$$h(x) = xe^{-xy} h'(x) = e^{-xy} + x\left(-ye^{-xy}\right).$$

$e^{-xy}(1-xy)$ *ma robi* $h'(x)=0$, *gdy* $xy = 1 \implies x = \frac{1}{y}$.

$$h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}e^{-\frac{1}{y}y} = \frac{1}{y}e^{-1}.$$

Czy istnieje g - całkowalna na $]0,\infty[$, taka, że

$$\left|\frac{1}{ey}\right| < |g(y)|?$$

Odpowiedź: *nie.*

Równanie przewodnictwa

Szukamy funkcji $U(x,y) : \mathbb{R}\times[0,\infty[\to\mathbb{R}$, takiej, że

1. $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, dla $t > 0$
2. $U(x,0) = f(x)$
3. $f(x) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Załóżmy, że istnieją funkcje $\tilde{U}(\omega,t)$ i $\tilde{f}(\omega)$ takie, że

- $U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega,t)e^{-2\pi i\omega x}d\omega$
- $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-2\pi i\omega x}$, czyli $f(x) = \mathcal{F}\left(\tilde{f}\right)(x)$.

Podstawiamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t}e^{-2\pi i\omega x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(-2\pi i\omega\right)^2\tilde{U}(\omega,t)e^{-2\pi i\omega x}$$

do naszego równania przewodnictwa i mamy

$$\underset{x\in]-\infty,+\infty[}{\forall} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-2\pi iax} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - a^2 \left(-2\pi i\omega\right)^2 \tilde{U}(\omega, t) \right) = 0.$$

To oznacza, że skoro rozwiązanie ma być dla całej szyny, to wyrażenie podcałkowe ma być równe 0. Czyli

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = -(2\pi ia\omega)^2 \tilde{U}(\omega, t) \implies \tilde{U}(\omega, t) = C(\omega)e^{-(2\pi a\omega)^2 t}.$$

Równanie jest rozwiązane, ale trzeba dopracować szczegóły. Znajdźmy $C(\omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega, 0) &= C(\omega) \\ \tilde{U}(x, 0) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{U}(\omega, 0)e^{-2\pi i\omega x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega C(\omega)e^{-2\pi ix}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, $\tilde{U}(x, 0) = f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-2\pi i\omega x} d\omega$. Stąd $C(\omega) = \tilde{f}(\omega)$. Ostatecznie

$$\tilde{U}(\omega, t) = \tilde{f}(\omega)e^{-(2\pi a)^2 \omega^2 t}.$$

Nasze $U(x, t)$ jest transformatą Fouriera tego napisu względem zmiennej ω (**nie czasu!**).

$$U(x, t) = \mathcal{F}\left(\tilde{U}(\omega, t)\right).$$

Wiemy, że

$$\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f).$$

Niech

$$\tilde{g}(\omega, t) = e^{-(2\pi a)^2 \cdot t \cdot \omega^2}.$$

Znajdźmy funkcję g taką, że

$$\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g).$$

Chcemy wyznaczyć $U(x, t)$ bez konieczności liczenia $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$, czyli w języku f i g. Policzmy najpierw g.

$$g = \mathcal{F}(\tilde{g}).$$

My już kiedyś policzyliśmy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad a > 0 \tag{Δ}$$

Czyli

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(2\pi a)^2 t\omega^2} e^{-2\pi i \omega x}.$$

Przekładamy tę całkę (Δ) na nasze literki

$$(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\spadesuit\omega} e^{-\clubsuit\omega^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\clubsuit}} e^{-\frac{(\spadesuit)^2}{4\clubsuit}} \quad \clubsuit > 0.$$

Czyli mamy g

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 \cdot t}} e^{\frac{-(-2\pi x)^2}{4(2\pi a)^2 t}}.$$

Wiemy, że

- $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$
- $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g)$
- $U(x,t) = \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g})$.

Jeżeli α, β - funkcje klasy L_1, to

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta) = \mathcal{F}^{-1}(\alpha)\mathcal{F}^{-1}(\beta).$$

Teraz obustronnie fourierujemy

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta)\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)\right).$$

Czyli

$$\alpha \star \beta = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)\right).$$

Jeżeli

- $\mathcal{F}^{-1}(\alpha) = \tilde{f}$

- $\alpha = \mathcal{F}(\tilde{f}) = f$
- $\mathcal{F}^{-1}(\beta) = \tilde{g}$
- $\beta = \mathcal{F}(\tilde{g}) = g,$

to

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = f \star g = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds. \end{aligned}$$

$$U(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) \cdot e^{-\frac{(2\pi)^2 \cdot (x-s)^2}{(2\pi)^2 \cdot 4a^2 t}} = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}.$$