$$\delta\widehat{(x-a)} = e^{-2\pi i k a}.$$

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\widehat{(x-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x} \iff \langle T(x), \varphi \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}, \varphi \right\rangle.$$

Policzmy $T(x)$ w inny sposób. Zauważmy, że jeżeli $T(x)$ jest postaci

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x},$$

to wtedy

$$e^{-2\pi i x} \cdot T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (n+1) x} = T(x).$$

Czyli mamy napis

$$T(x+1) = e^{-2\pi i x} \cdot T(x) = T(x).$$

W związku z tym, T jest okresowa z okresem jeden ($T(x) = T(x+1)$). Co się stanie jak spróbujemy to rozwiązać?

$$\left(e^{-2\pi i x} - 1\right) T(x) = 0.$$

Oba czynniki mają okres równy jeden, czyli nasze rozwiązanie musi być niezmiennicze względem translacji o jeden. Pierwszy czynnik można przepisać inaczej

$$e^{-2\pi i x} - 1 = \cos(2\pi x) - 1 - i \sin(2\pi x).$$

Teraz dla $x = 0$ mamy

$$e^{-2\pi i \cdot 0} - 1 = 0,$$

czyli mamy już równanie i warunek początkowy

$$f(x)T(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Rozwiążemy problem dla $x \in]-1,1[$. Wiemy narazie tylko jak rozwiązać podobne coś: $xT = 0$. Analogicznie

$$\left\langle \left(e^{-2\pi i x} - 1\right) T, \varphi \right\rangle = 0.$$

Jeżeli

$$\underset{\psi}{\exists} \langle T, \psi \rangle = 0,$$

to wtedy wiemy, że (analogicznie do $xT = 0$)

$$\left\langle \left(e^{-2\pi i x} - 1\right) T, \frac{\psi}{e^{-2\pi i x} - 1} \right\rangle = 0.$$

Oznacza to, że

$$\psi \in S \implies \frac{\psi}{e^{-2\pi i x} - 1} \in S. \tag{1}$$

Żeby (1) był prawdziwy, to musi być spełnione

$$\psi(x) = 0 \iff \mathbb{Z} \ni x = 0.$$

($\frac{\psi(x)}{\cos(2\pi x)-1}$ - wyrażenie regularne). Można przedstawić T następująco

$$T(x) \underset{x \in]n-1, n+1[}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\alpha_n} \delta(x-n).$$

Skoro T - okresowa, to

$$T(x+1) = T(x) \implies T(x) = c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n).$$

Trzeba wyliczyć c.

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(x-n) = c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n).$$

Czyli piszemy

$$c \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(x-n), \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), \hat{\varphi} \right\rangle.$$

Kiedyś policzyliśmy

$$\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right) = e^{-\pi x^2}.$$

Czyli bierzemy takie φ, które znamy.

$$c \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), e^{-\pi x^2} \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), e^{-\pi x^2} \right\rangle.$$

Zatem $c = 1$. Otrzymaliśmy

Wzór sumacyjny Poissona

Skoro mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(x-n), \tag{2}$$

to mamy też

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \impliedby \varphi \in S.$$

Wcześniej wyliczyliśmy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx,$$

więc była spora promocja jak widać. **Uwaga:** z racji obecności δ i $\hat{\delta}$, równość (2) może być stosowana na dziedzinie szerszej niż S.

Szeregi Fouriera

Wiemy, że

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{-2\pi ikx} dk,$$

$$\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{2\pi ikx} dk,$$

czyli, że

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi ikx} dk \tag{3}$$

Pytanie 1. *Czy istnieją jakieś c_k i d_k takie, że*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-2\pi ikx}?$$

Zauważmy, że

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ix(m-n)} dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}.$$

Fajniejsza wersja:

$$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2\pi i \frac{(m-n)x}{a}} dx = \begin{cases} a & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}.$$

Można by też stwierdzić, że obiekty $e^{2\pi ixm}$ i $e^{2\pi ixn}$ tworzą bazę ortonormalną i dlatego

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ixm} \left(e^{2\pi ixn}\right)^{\star} dx = \left\langle e^{2\pi ixm}, e^{2\pi ixn}\right\rangle = \delta_{mn}.$$

Zatem

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2\pi inx}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dxe^{-2\pi inx}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}\right) \underset{\text{wolno?}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ix(k-n)}dx.$$

Wolno tak zrobić np. jak szereg jest zbieżny jednostajnie. W takim razie cały ten napis jest równy c_n, bo

$$\sum c_k\delta_{kn} = c_n.$$

Dokładnie ten sam rachunek możemy odpalić dla $\hat{f}$! Wtedy

$$d_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(x)e^{2\pi ikx}dx.$$

Dostajemy dlatego wzorki:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi inx} \tag{4}$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-2\pi ikx}. \tag{5}$$

Obserwacja: zauważmy, że $\hat{f}(\lambda)$ takie, że ma nośnik zwarty, czyli

$$|\lambda| > \frac{1}{2} \implies \hat{f}(\lambda) = 0.$$

Wtedy

$$d_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(x)e^{2\pi inx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{2\pi inx}dx \overset{(3)}{=} f(n).$$

Czyli jak to wsadzimy do (5), to dostaniemy

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-2\pi ikx} \tag{6}$$

Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

Definicja 1.

$$\operatorname{sinc}(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{+2\pi i x\lambda} d\lambda.$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli f - taka, że ...,*

$$|\lambda| > \frac{1}{2} \implies \hat{f}(\lambda) = 0,$$

to szereg

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} f(n) \operatorname{sinc}(t-n) \overset{\textit{jednostajnie}}{\longrightarrow} f(t).$$

Oznacza to, że możemy z dowolną dokładnością odtworzyć kształt funkcji $f(t)$ przy pomocy **skończonej** ilości wyrazów.

Pytanie 2. *Co to znaczy, że $\hat{f}$ ma zwarty nośnik?*

To znaczy, że jak mamy sygnał, to bierzemy tylko te częstotliwości, które słyszymy.

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\sup_{t \in A} \left| \sum_{n=-N}^{N} f(n) \operatorname{sinc}(t-n) - f(t) \right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ale

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} f(n)\,\mathrm{sinc}(t-n) - f(t)\right| = \left|\sum_{n=-N}^{N} f(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\lambda(t-n)} d\lambda - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\lambda) e^{2\pi i\lambda t} d\lambda\right| =$$

$$= \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \left(\sum_{n=-N}^{N} f(n) e^{2\pi i(t-n)\lambda} - \hat{f}(\lambda) e^{2\pi i\lambda t}\right)\right| =$$

$$= \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \left(\sum_{n=-N}^{N} f(n) e^{-2\pi i\lambda n} - \hat{f}(\lambda)\right) e^{2\pi i\lambda t}\right| =$$

$$\overset{(6)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-2pii\lambda n} - \hat{f}(\lambda) - \sum_{|n|\geqslant N+1} f(n) e^{-2\pi i\lambda n}\right) =$$

$$= |S_N(t) - f(t)| \leqslant \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \sum_{|n|\geqslant N+1} f(n) e^{-2\pi i\lambda n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \sum_{|n|\geqslant N+1} \left|f(n) e^{-2\pi i\lambda n}\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda \sum_{|n|\geqslant N+1} |f(n)| =$$

$$= 1 \cdot \sum_{|n|\geqslant N+1} |f(n)| = (\star\star\star).$$

Zauważmy, że

$$\hat{f}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-2\pi i k\cdot 0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \to \lim_{k\to\infty} f(k) = 0.$$

Czyli

$$(\star\star\star) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$