Jeżeli f - holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Przykład 1. *Policzyć*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1+iz)^2(1-iz)^2}.$$

Niech $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1-iz)^2}$, f *- holomorficzna na* $K(i,1)$. *W związku z tym piszemy*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)}{(1+iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)dz}{(z-i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i \; f'(z)\big|_{z=i}.$$

Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np. $\sin(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pytanie skąd my wiemy, że $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, dla $z \in \mathbb{C}$

Twierdzenie 1. *Niech* $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, f *- holomorficzna na* $\mathcal{O}$,
$z_n \in \mathcal{O}$ *- ciąg z* $\mathcal{O}$ *taki, że* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \; \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = 0$.
Wówczas

$$\underset{r>0}{\exists} \quad \underset{z \in K(z_0, r)}{\forall} \quad f(z) = 0.$$

Dowód. przez sprzeczność $(\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q))$.
Załóżmy, że $\underset{z\in K(z_0,r)}{\exists} f(z) \neq 0$ i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

i wiemy, że $f(z) \neq 0$, czyli $\exists k$ takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \tag{$\star$}$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego (**??**) jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez j. Oznacza to, że

$$f(z) = (z-z_0)^j \left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!}(z-z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z-z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli $g(z) \neq 0$. Skoro f - holomorficzna, to $g(z)$ też jest holomorficzna na $\mathcal{O}$, czyli między innymi $g(z)$ jest ciągła na $\mathcal{O}$. Ale wiemy, że $f(z_n) = 0$, czyli $g(z_n) = 0$ i g - ciągła na $\mathcal{O}$. Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \underset{z_n \to z_0}{\longrightarrow} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo $g(z_n)$ jest ciągiem samych zer, a $g(z_0) \neq 0$, bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

$\square$

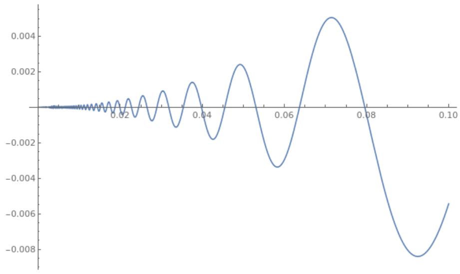
Obserwacja: Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu $a_n \to 0$,

$$f(a_n) \longrightarrow 0$$

i $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 0.1: $f(x)$

Twierdzenie 2. *Niech $f(z), g(z)$ - holomorficzne na $\mathcal{O}$,*

$$\underset{h\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg $z_n \to z_0$. Wówczas

$$f(z) = g(z) \underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}.$$

Dowód. Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas $h(z_n) = 0$ i $z_n \to z_0$. Skoro $h(z)$ - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

oraz

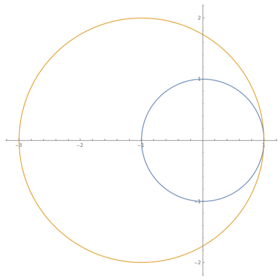
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(z - z_0)^n$$

i dowodzimy tak jak wcześniej. □

Przykład 2.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \dots \qquad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 0.2: f i g

Definicja 1. *Niech f - holomorficzna na U_1 i g - holomorficzna na U_2 i*

$$\underset{z_0}{\exists} \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\underset{z \in U_1 \cap U_2}{\forall} \quad f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że f jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji g).

Przykład 3. *Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka*

$$ln(z) = (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots$$

$$ln(re^{i\varphi}) = ln(r) + ln\left(e^{i\varphi}\right) = ln(r) + i\varphi$$

Punkty osobliwe

Definicja 2. *Punkt w którym $f(z)$ nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.*

Definicja 3. *Niech $f(z)$ - taka, że*

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i $\varphi(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$ i $f(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O} - \{a\}$.
O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie a biegun rzędu N.

Pytanie: czy f może nie być holomorficzna np. na krzywej $\gamma \subset \mathbb{C}$?
Odpowiedź: gdyby f nie była holomorficzna na $\gamma \subset \mathbb{C}$, to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że $g(z) \equiv 0$ także dla $z \notin \gamma$.