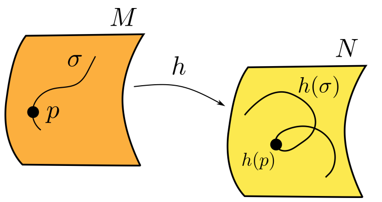
Przypomnienie

(rys 1)
Dla $v \in T_pM$, jest



Rysunek 0.1: Przypomnienie

$$h_\star v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t))\sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt}\sigma(t)$,

$$h_\star v = \underset{\text{macierz kwadratowa}}{h'(\sigma(t))} v.$$

Przykład 1. *Niech*

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

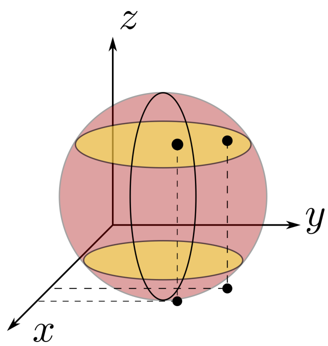
$$U_1^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_1^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\right\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).

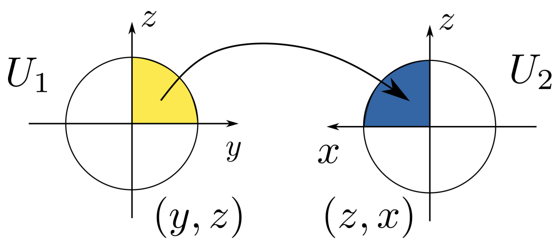
$$y = \sqrt{1-x^2-z^2}$$

$$z = z \qquad (z,x) \to h(z,x) = \left[\frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right]$$

$$(x > 0, z > 0).$$



Rysunek 0.2: fig3-2



Rysunek 0.3: fig3-3

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) & \frac{\partial}{\partial x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

Przykład 2. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R. (rys 4)*

$$\begin{aligned} x(\theta,t) &= \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\theta \\ y(\theta,t) &= \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta \\ z(\theta,t) &= \left(t\cos\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' i t'.

$$\begin{aligned}
x'(\theta', t') &= \left(R - t' \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\cos\theta' \\
y'(\theta', t') &= -\left(R - t' \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\sin\theta' \\
z'(\theta', t') &= t' \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right).
\end{aligned}$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$\begin{aligned}
W_1 &= \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\} \\
W_2 &= \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.
\end{aligned}$$

Dla W_1

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

dla W_2

$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi_1'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

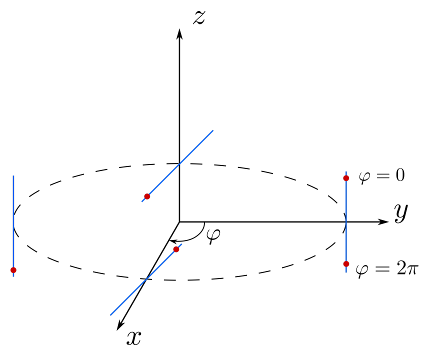
$$\det\varphi_1' < 0 \qquad \det\varphi_2' > 0.$$

Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

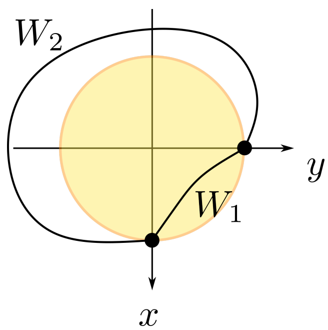
1. Niech $I^n = [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0.1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)
   Wprowadźmy oznaczenia:

$$I^n_{(i,0)} := \left\{\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1\right\}.$$

$$I^n_{(i,1)} := \left\{\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1\right\}.$$



Rysunek 0.4: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 0.5: Obszary wspólne

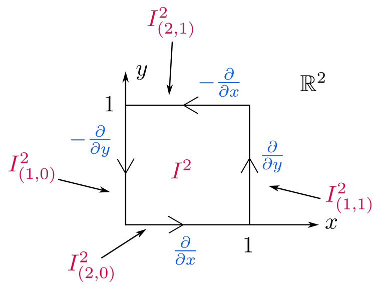
(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} I^2_{(2,0)}" = "I^2_{(1,1)}" + " - I^2_{(2,1)}" + " - I^2_{(1,0)},$$

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.
Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n.



Rysunek 0.6: fig3-6

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned}\omega = &f_1(x^1,\ldots,x^n)dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n +\\ &+f_2(x^1,\ldots,x^n)dx^1\wedge dx^3\wedge\ldots\wedge dx^n+\ldots+\\ &+f_i(x^1,\ldots,x^n)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^n+\ldots+\\ &+f_n(x^1,\ldots,x^n)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n}\omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^n}\omega = \sum_{j=1}^n\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int_{I^n(j,\alpha)}\Big\langle f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^n,\\ \frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j-1}},\frac{\partial}{\partial x^{j+1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big\rangle dx^1\ldots dx^{j-1}dx^{j+1}\ldots dx^n =\\ = \delta_{ij}\sum_{j=1}^n\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\ldots dx^{j-1}dx^{j+1}\ldots dx^n.\end{aligned}$$