

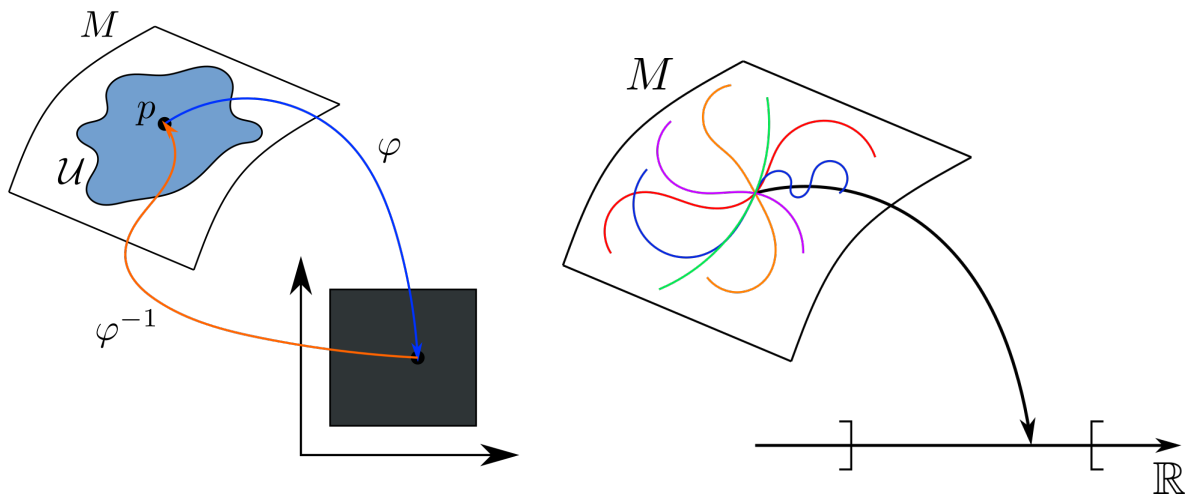
Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

17 października 2019

1 Wykład (04.10.2019)

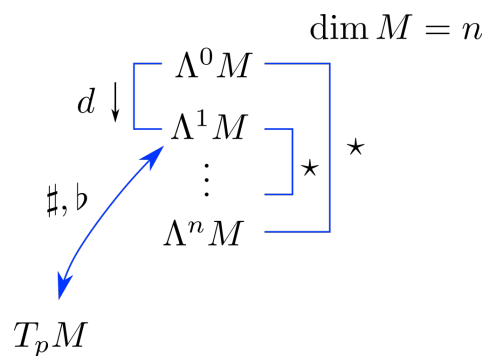
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p M$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\# = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_p M$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_p M$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\langle A^\sharp, B \rangle, \quad (g_{ij} - \text{diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle A^\sharp, B \rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \dots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B. \end{aligned}$$

Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\langle A^\sharp, B \rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B .

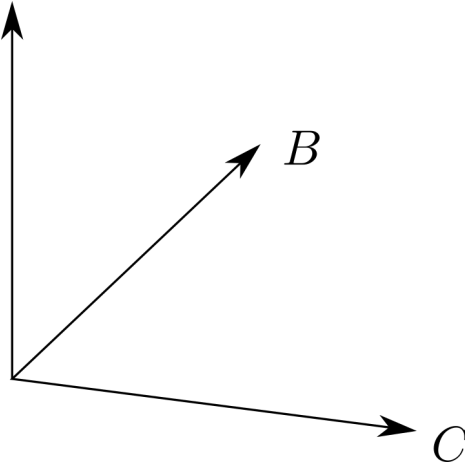
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_p M.$$

$$\begin{aligned} \langle A, B, C \rangle &= A^1 \langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \rangle + A^2 \langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \rangle + A^3 \langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \rangle = \\ &= A^1 \left[\left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, C \right\rangle \right] + A^2 \left[\left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, C \right\rangle \right] + A^3 \left[\left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, C \right\rangle \right] = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 (B^2 C^3 - B^3 C^2) + A^2 (B^3 C^1 - B^1 C^3) + A^3 (B^1 C^2 - B^2 C^1) = \\ &= "A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3" = "A \cdot (B \times C) \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

(rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

1.3 Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w \mathbb{R}^3 (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B .

1. sparametryzujmy kształt S , np.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{matrix} \right\}.$$

2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} \Big|_{t=t_0}$, to

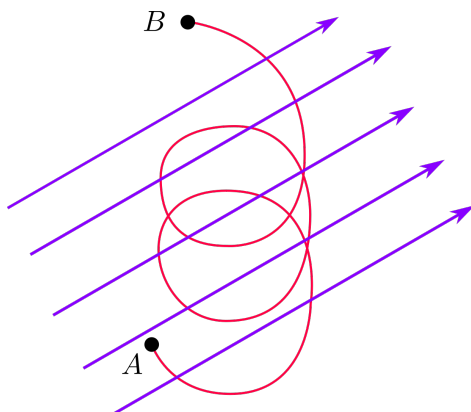
$$T_p M = \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \Big|_{t=t_0}.$$

(rys 5)

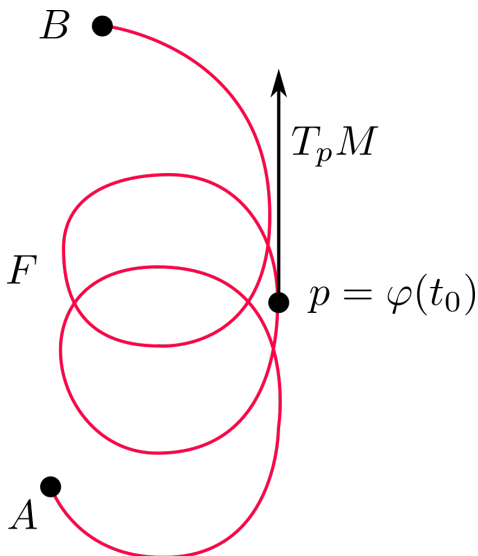
3. Niech $T_p M \ni v = -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)

Możemy policzyć np.

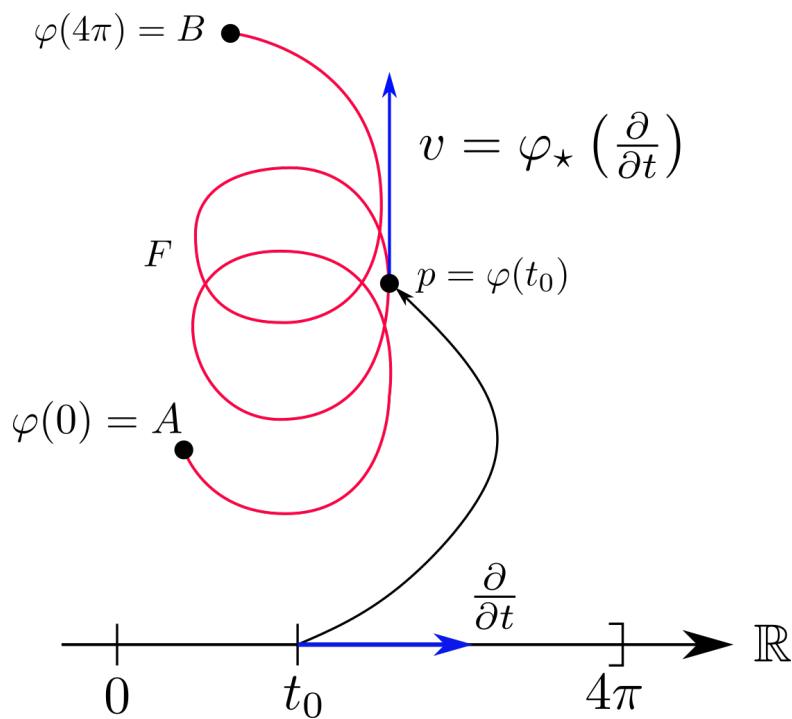
$$\begin{aligned} \int \langle F, v \rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^* F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



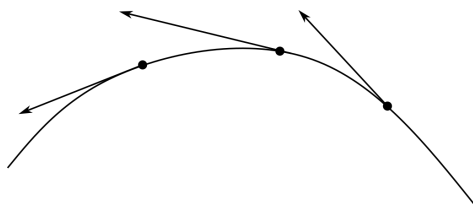
Rysunek 6

Definicja 1. Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M , $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ - parametryzacja krzywej L , czyli

$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Przykład 1. niech (rys 8)

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

i

$$\omega = ydx = \left(y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\#.$$

$$\text{Wtedy mamy } \varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, \varphi^* \omega = \begin{vmatrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$$

$$\left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = [t^2 - t]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

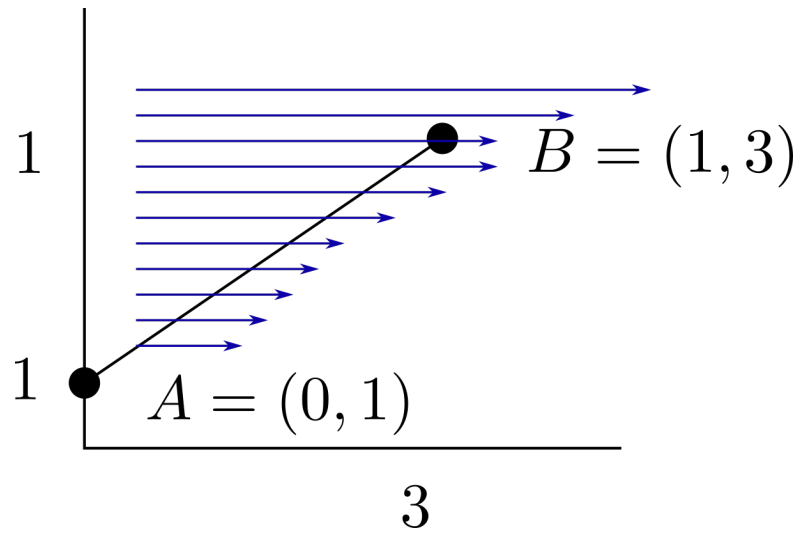
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\frac{x=2-u}{dx=-u}$ i mamy

$$\varphi^* \omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = [u^2-5u]_1^2 = -6+4 = -2.$$



Rysunek 8

2 Wykład (07.10.2019)

2.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywą

$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

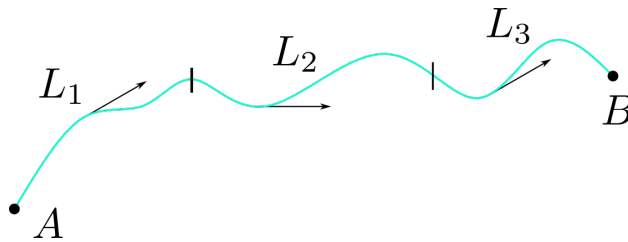
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$,

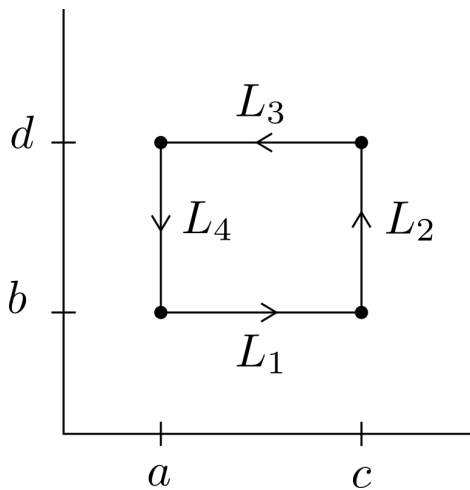
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 1)



Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. (rys 2)



Rysunek 10: $\dim M = 2$

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$\begin{aligned} \int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\ &= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x, d) dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a, y) dy. \end{aligned}$$



Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

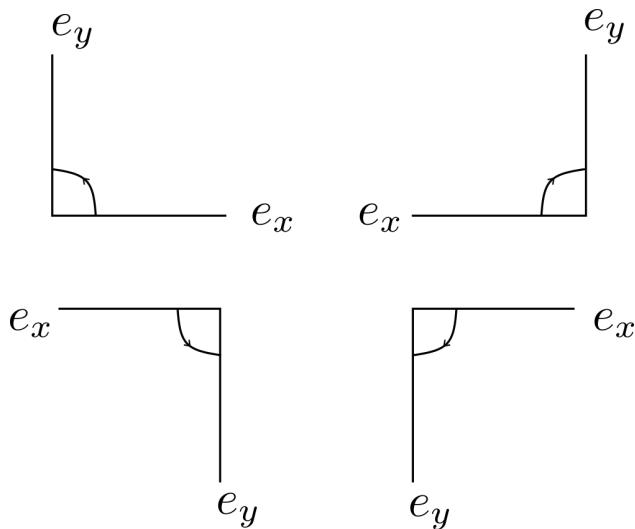
(rys 3)

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).

$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)

$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.

(rys 4)



Rysunek 12: Różne orientacje na \mathbb{R}^2 , czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 2. Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V .

Definicja 3. Orientację standardową na \mathbb{R}^n nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$

Definicja 4. Niech M - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i $S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma. Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. do 7:

weźmy $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ i obliczmy $\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
 \int \int_P d\omega &= \int \int_{[a,b] \times [c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
 &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\
 &= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx (A(x,d) - A(x,c)) \right] = \\
 &= \int_a^b A(x,c) dx + \int_c^d B(b,y) dy - \int_a^c A(x,d) dx - \int_c^d B(a,y) dy = \\
 &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega.
 \end{aligned}$$

Czyli

$$\int \int_P d\omega = \int_L \omega,$$

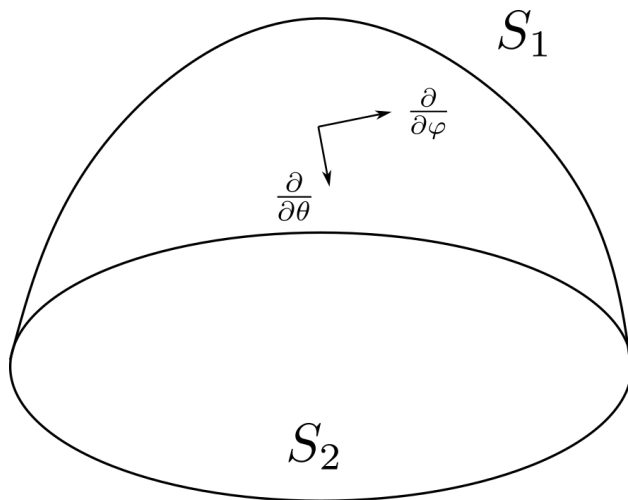
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. niech $S = S_1 \cup S_2$, gdzie

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 13: Tak to wygląda

Definicja 5. Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map (U_i, φ_i) , że dla każdej pary $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ takiej, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, odwzorowanie $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$.

Definicja 6. Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy zorientowaną.

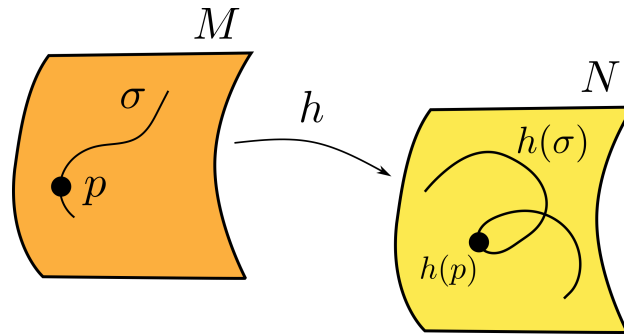
Definicja 7. Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.

3 Wykład (11.10.2019)

3.1 Przypomnienie

(rys 1)

Dla $v \in T_p M$, jest



Rysunek 14: Przypomnienie

$$h_* v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t)) \sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt} \sigma(t)$,

$$h_* v = \begin{matrix} h'(\sigma(t)) \\ \text{macierz kwadratowa} \end{matrix} v.$$

Przykład 5. Niech

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\} \cap S^2.$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\} \cap S^2.$$

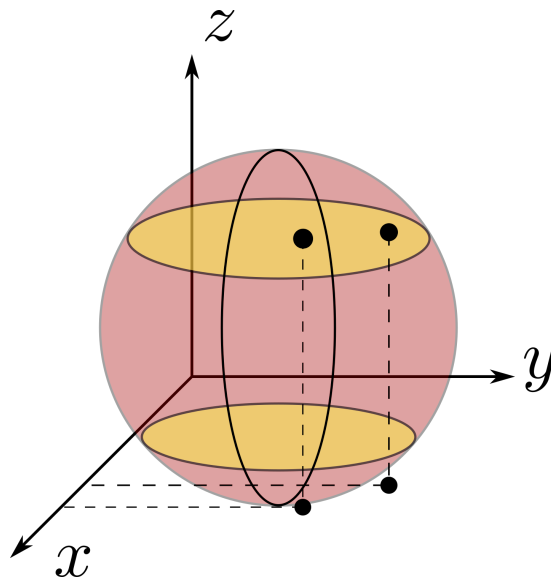
$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\} \cap S^2.$$

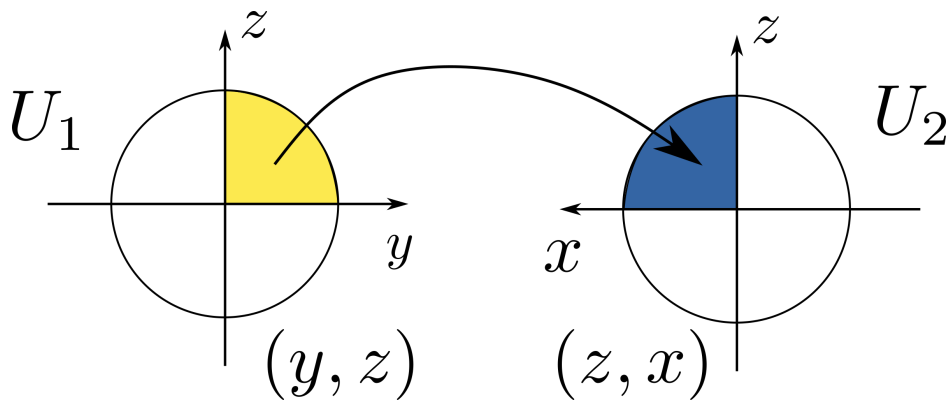
$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



Rysunek 15: fig3-2



Rysunek 16: fig3-3

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z$$

$$(x > 0, z > 0).$$

$$(z, x) \rightarrow h(z, x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) & \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (z) & \frac{\partial}{\partial x} (x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

Przykład 6. Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R . (rys 4)

$$\begin{aligned} x(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sin \theta \\ y(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cos \theta \\ z(\theta, t) &= \left(t \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.

Mamy θ' i t' .

$$\begin{aligned} x'(\theta', t') &= \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \cos \theta' \\ y'(\theta', t') &= - \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \sin \theta' \\ z'(\theta', t') &= t' \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right). \end{aligned}$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi \right\} \\ W_2 &= \left\{ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\} = \left\{ 0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi \right\}. \end{aligned}$$

Dla W_1

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

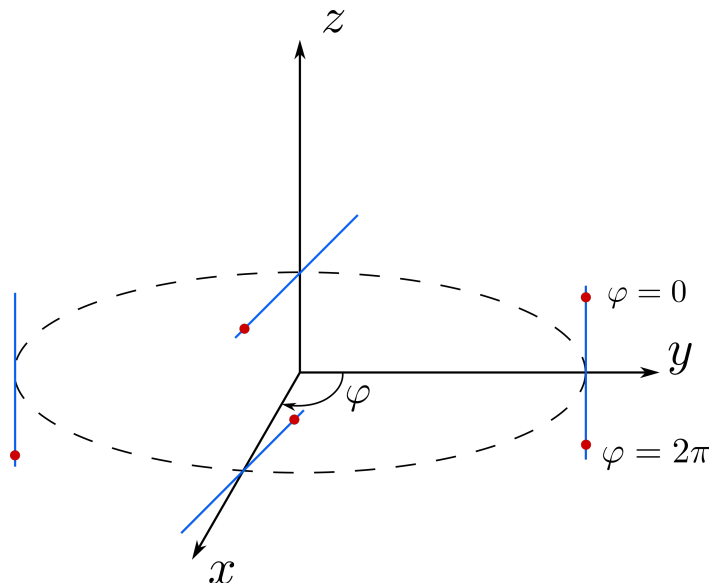
dla W_2

$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

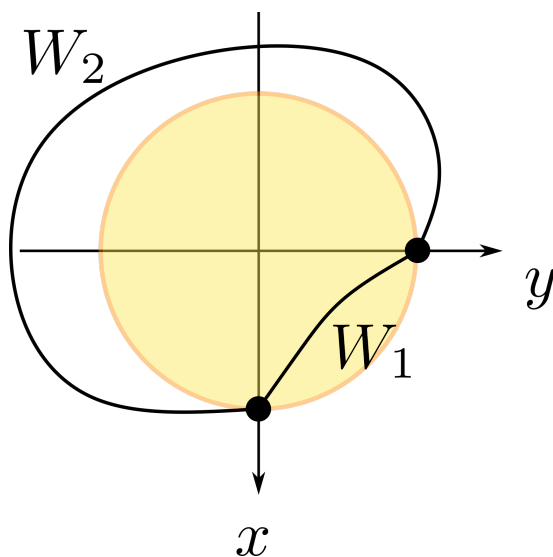
Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi'_1(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi'_2(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \varphi'_1 < 0 \quad \det \varphi'_2 > 0.$$



Rysunek 17: Gdzie wylądaje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 18: Obszary wspólne

3.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w \mathbb{R}^n

1. Niech $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)

Wprowadźmy oznaczenia:

$$I_{(i,0)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$

$$I_{(i,1)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$

(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

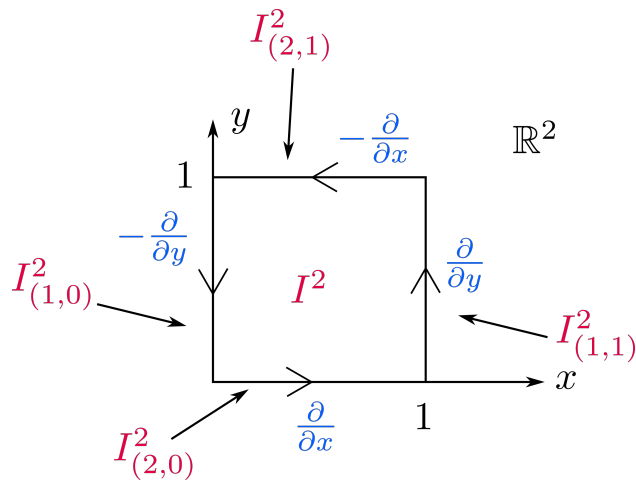
$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I_{(2,0)}^2 = I_{(1,1)}^2 + I_{(2,1)}^2 + I_{(1,0)}^2,$$

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)

- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.

Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I_{i,\alpha}^n,$$



Rysunek 19: fig3-6

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n .

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned} \omega = & f_1(x^1, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \left\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \\ & \quad dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n & i = j \end{cases} \quad \text{w.p.p..} \end{aligned}$$

4 Wykład (14.10.2019)

4.1 Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega = f(x^1, \dots, x^n) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$. Wtedy dla $x = (x^1, \dots, x^n)$ i $d\tilde{x} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$

$$\begin{aligned} & \int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\ & = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) d\tilde{x} = \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) \stackrel{(*)}{=} & \text{wp.p.} \end{cases} \\ & \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\ &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \\ &= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) + (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, dx^1, \dots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ & \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\ & \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] = \\ &= (-1)^{i+1} \int_{I^n} [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)]. \end{aligned}$$

$$LHS = RHS.$$

□

Uwaga: Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek I^n . Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

Przykład 7. Niech $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ i $f \in \Lambda^0([a, b])$. Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak (xD):

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_{[a,b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

Przykład 8. Niech γ - krzywa na M , $\dim M = 3$, $f \in \Lambda^0 M$.

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Przykład 9. $\dim M = 2$, niech $\alpha = xydx + x^2dy$. Policzmy $\int_{\partial S} \alpha$.

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha + \int_{C_3} \alpha,$$

ale

$$\int_{C_1} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

φ - parametryzacja C_1 . Jeżeli weźmiemy sobie

$$\int_{C_3} \left\langle \varphi_3^* \alpha, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

φ_3 - parametryzacja C_3 .

$$C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

zatem $\varphi_2^* \alpha$ przy $x = \cos \theta \implies dx = -\sin \theta d\theta$, $y = \sin \theta \implies dy = \cos \theta d\theta$, mamy

$$\varphi_2^* \alpha = \cos \theta \sin \theta (-\sin \theta d\theta) + (\cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta.$$

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\langle \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa: $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$.

$$d\alpha = xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy.$$

$$\int_{\square} \left\langle xdx \wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx \cdot x \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Przykład 10. Niech $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Lambda^1(M)$, $\partial K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta, 2\pi \right\}$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^* \alpha = -\sin \theta (-\sin \theta) d\theta + \cos \theta \cos \theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$d\alpha = \left[\left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} \right) dy \wedge dx + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx \wedge dy \right] = \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy = 0$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial \gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech $\alpha = x^2 dx + xy dy + 2dz$. α jest potencjalna, jeżeli

$$\exists_{\eta \in \Lambda^0 M} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

Definicja 8. Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$,

$$i_v : T_p M \times \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1. $i_v f = 0$, jeżeli $f \in \Lambda^0 M$
2. $i_v dx^i = v^i$, jeżeli $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3. $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$.

Operację i_v nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \stackrel{\text{ozn}}{=} v(\text{odwrocone}L)\omega.$$

Obserwacja: $i_v(i_v\omega) = 0$ (w domu)

Przykład 11. Niech $v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v(\text{odwrocone}L)\omega = \langle dx, v \rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v \rangle + \langle dz, v \rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v \rangle.$$

Przykład 12.

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e \frac{\partial}{\partial t} + ev^x \frac{\partial}{\partial x} + ev^y \frac{\partial}{\partial y} + ev^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j(\text{odwrocone}L)F = ?.$$