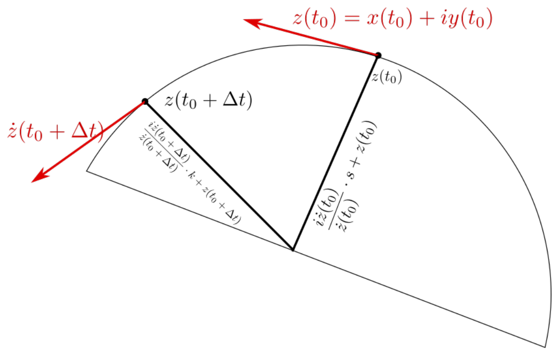
Przygotowanie podłoża do tw (. . .)

Krzywizna

Pytanie 1. *Jak policzyć przyspieszenie dla nie-okręgów?*

Odpowiedź: A jaki jest promień tego aktualnego kółka? Mamy jakąś krzy-



Rysunek 0.1: Liczymy na chama promień krzywizny

wą (rys **??**)

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Szukamy tego punktu przecięcia z (rys **??**): $\dot{z}(t) = \dot{x}(t)+iy(t)$, $z(t) = x(t)+iy(t)$

$$\frac{i\dot{z}(t_0 + \Delta t)}{|z(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + z(t_0 + \Delta t) = \frac{i\dot{z}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + z(t_0).$$

i) Część urojona (wyrażamy k przez s)

$$\frac{\dot{x}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + y(t_0 + \Delta t) = \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + y(t_0).$$

Wyliczamy z tego k:

$$k = \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)).$$

ii) Część rzeczywista

$$\frac{-\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + x(t_0 + \Delta t) = \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + x(t_0).$$

$$\frac{-\dot{y}(t_0+\Delta t)}{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}\cdot\frac{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}{\dot{x}(t_0+\Delta t)}\cdot(y(t_0)-y(t_0+\Delta t)+x(t_0+\Delta t)-x(t_0))=.$$
$$=s\cdot\left(\frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|}+\frac{\dot{y}(t_0+\Delta t)}{\dot{z}(t_0+\Delta t)}\cdot\frac{|\dot{z}(t_0+\Delta t)|}{\dot{x}(t_0+\Delta t)}\cdot\frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|}\right).$$

iii) Mnożymy wszystko przez $\dot{x}(t_0+\Delta t)$

$$-\dot{y}(t_0+\Delta t)\left(y(t_0)-y(t_0+\Delta t)\right)+\left(x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\right)\dot{x}(t_0+\Delta t)=$$
$$=\frac{s}{|\dot{z}(t_0)|}\left(-\dot{y}(t_0)(\dot{x}(t_0+\Delta t)+\dot{y}(t_0+\Delta t)\cdot x(t_0)\right).$$

iv) Dalej

$$\dot{y}(t_0+\Delta t)\left(y(t_0+\Delta t)-y(t_0)\right)+\dot{x}(t_0+\Delta t)(x(t_0+\Delta t)-x(t_0))=$$
$$=\frac{s}{|\dot{z}(t)|}\left(\dot{x}(t_0)\left[\dot{y}(t_0+\Delta t)-\dot{y}(t_0)\right]-\dot{y}(t_0)\left[\dot{x}(t_0+\Delta t)-\dot{x}(t_0)\right]\right).$$

v) dzielimy wszystko przez Δt i bierzemy granicę $\Delta t\to 0$

$$\dot{y}(t_0)\cdot\dot{y}(t_0)+\dot{x}(t_0)\cdot\dot{x}(t_0)=\frac{s}{\left((\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\dot{x}(t_0)\cdot\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\cdot\ddot{x}(t_0)\right).$$

vi) Zatem dostajemy wzór na krzywiznę s:

$$\frac{1}{s}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left((\dot{x})^2+(\dot{y})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Inna fajna forma

Zauważmy, że $\overline{\dot{z}}(t)\cdot\ddot{z}(t)=(\dot{x}(t)-i\dot{y}(t))+(\ddot{x}(t)+i\ddot{y}(t))=\ldots+i\left(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}(t)\right),$ czyli mając $z(t)$, policzymy krzywiznę tak:

$$\frac{1}{s}=\frac{Im(\overline{\dot{z}}\ddot{z})}{|\dot{z}|^3}.$$

Przykład 1. *Krzywa:* $z(t)=2e^{it}$, $\dot{z}(t)=2ie^{it}=2e^{i(t+\frac{\pi}{2})}\implies\overline{\dot{z}}(t)=2e^{-i(t+\frac{\pi}{2})}$, $\ddot{z}(t)=-2e^{it}$.

$$\overline{\dot{z}}\ddot{z}=-4e^{i(t-t-\frac{\pi}{2})}=-4\cdot(-i).$$
$$\frac{1}{s}=\frac{Im(4i)}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Czyli okrąg o promieniu 2 *ma promień równy* 2.

Odwzorowania konforemne

Definicja 1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω - spójny, F - różniczkowalna na Ω. Mówimy, że*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^N.$$

jest odwzorowaniem konforemnym, jeżeli F' jest proporcjonalna do macierzy ortogonalnej.

$$F'(x) = f(x) \cdot R(x),$$

gdzie $f(x) : \Omega \to R$, a $R(x)$ - macierz $n \times n$ taka, że

$$R(x)^{-1} = \left(\overline{R}(x)\right)^T, \quad \det R(x) = 1.$$

Stwierdzenie 1. ***(Wniosek:)*** *odwzorowanie konforemne zachowuje kąt między stycznymi do krzywych.*

Dowód. Weźmy dwie krzywe sparametryzowane

$$x_1(t), \quad t \in]-a, a[$$

$$x_2(t), \quad t \in]-b, b[$$

i

$$x_1(0) = x_1(0).$$

Wówczas (γ - kąt między krzywymi)

$$\cos\gamma = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|\dot{x}_1\| \, \|\dot{x}_2\|_{t=0}}.$$

Policzmy kąt między stycznymi do krzywych $F(x_1(t)), F(x_2(t))$

$$\cos\gamma' = \frac{\left\langle \frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} | \frac{d}{dt}F(x_2(t))_{t=0} \right\rangle}{\|\ldots\| \, \|\ldots\|},$$

ale my wiemy, że

$$\frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} = F'(x_1(t))\frac{d}{dt}x_1(t)_{t=0} =$$

F - konforemna, więc

$$= f(x_1(t))R(x_1(t))\dot{x}_1(t)_{t=0}.$$

Pamiętamy, że jeżeli R - ortogonalna, to $\langle x|y\rangle = \langle Rx|Ry\rangle$, zatem

$$\cos\gamma' = \frac{\langle f \cdot R\dot{x}_1 | f \cdot R\dot{x}_2\rangle_{t=0}}{\|f \cdot R\dot{x}_1\| \, \|f \cdot R\dot{x}_2\|_{t=0}} = \frac{\langle \dot{x}_1|\dot{x}_2\rangle}{\|\dot{x}_1\| \, \|\dot{x}_2\|_{t=0}} = \cos\gamma.$$

□

Pytanie 2. *A co z funkcjami zespolonymi?*

Odpowiedź: Niech

$$f(z) = f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y),$$

taka, że f - holomorficzna. Możemy zatem badać funkcję

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \overset{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i R - ortogonalna, to znaczy, że $R^{-1} = \overline{R}^T$ i $\det R = 1$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies d = a \wedge -b = c.$$

Czyli

$$F'(x,y) = (a^2+b^2)\frac{1}{a \cdot a - (-b) \cdot b}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Powrót do residuów w nieskończoności

mamy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in R(0,0,r).$$

Oznacza to, że

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Zauważmy, że a_n w rozwinięciu $g(z)\ldots$ jest dany wzorem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ 0<t<r}} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Zamieniamy zmienne: $z = \frac{1}{z'}$, $dz = -\frac{1}{(z')^2}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K\left(0,\frac{1}{t}\right) \\ 0<t<r}} \frac{g\left(\frac{1}{z'}\right)}{\left(\frac{1}{z'}\right)^{n+1}} \cdot \frac{-1}{(z')^2} dz' = \int\limits_{\substack{\partial K(0,\frac{1}{t} \\ 0<t<r}} f(z')(z')^{n-1} dz'.$$