Definicja 1. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathcal{O}$ nazywamy ściągalnym (gwiaździstym), jeżeli istnieje $p \in \mathcal{O}$ i odwzorowanie $h(p,x,t)$ takie, że*

$$\underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \begin{matrix} h(p,x,0) = p \\ h(p,x,1) = x \end{matrix}, \quad \underset{t\in[0,1]}{\forall} h(p,x,t) \in \mathcal{O}, \quad h(p,x,t) \text{ - ciągła.}$$

Twierdzenie 1. *(Lemat Poincare)*
Niech

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \text{ - zbiór ściągalny} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \underset{\eta}{\exists}, d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{pmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathcal{O}$ jest zbiorem gwiaździstym, czyli

$$\underset{p\in\mathcal{O}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \quad \begin{pmatrix} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{pmatrix} \big(\text{jest zawarty w } \mathcal{O}\big).$$

Obserwacja: gdyby istniał operator

$$T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \to \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}), \quad p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byłoby prawdziwe. (bo dla $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$ mielibyśmy $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$).

Więc, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 \left(t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)\right),$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ spełnia warunek $Td + dT = id$.

Przykład 1. *$\omega \in \Lambda^1(M)$, $\dim M = 3$, $\omega = xdx + ydy + zdz$. Wówczas, gdy ($\overline{x} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$) jest*

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz,}_{\omega(tx)} \quad \overline{x} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^1 t^0 \left(tx^2 + ty^2 + tz^2\right) dt = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \eta. \end{aligned}$$

Zauważamy, że $d\eta = \omega$ i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał).

Przykład 2. *$\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$, $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\dim M = 3$. Co to jest $T\omega$?*

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner \left(xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz\right) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 \left(xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx\right) dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2dy - xydx + y^2dz - yzdy + zxdz - z^2dx\right) = \eta. \end{aligned}$$

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.
Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\omega(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x^1, \ldots, x^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

$$\omega = \overset{\omega_{12}}{x} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=2}{y} + \overset{\omega_{23}}{y} d\overset{i_1=2}{y} \wedge d\overset{i_2=3}{z} + \overset{\omega_{13}}{z} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=3}{z}.$$

$$d\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Liczymy

$$Td \underset{p+1 \text{ forma}}{\omega} = \int_0^1 t^{p+1-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \underset{\text{brak } dx^{i_\alpha}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{\alpha}.$$

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} =$$

$$= \sum_{k=1} \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \underset{\text{bez } dx^{i_k}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1}.$$

$$dT\omega = \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^{\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Zatem dodajemy do siebie $Td\omega + dT\omega$ i wychodzi

$$Td\omega + dT\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} +$$

$$+ \int_0^1 dt p \cdot t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \underset{\text{równa się zero}}{(.) + (.)} =$$

$$= \int_0^1 dt \left(\frac{d}{dt} \left(t^p \omega(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \right) =$$

$$= t^p \left(\omega(tx^1,\ldots,tx^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega.$$

$\square$