

## 0.1 Ostatnio

Była rozmaitość  $M$  z wymiarem  $\dim M = n$ , krzywą

$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

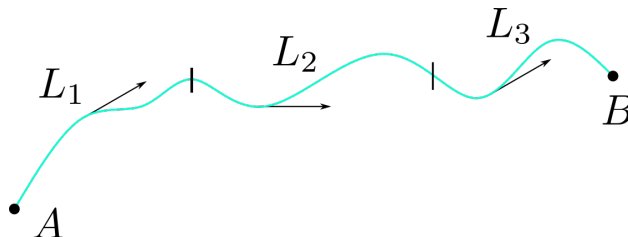
jednoforma  $\omega \in \Lambda^1 M$  i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla  $\omega = ydx$ ,

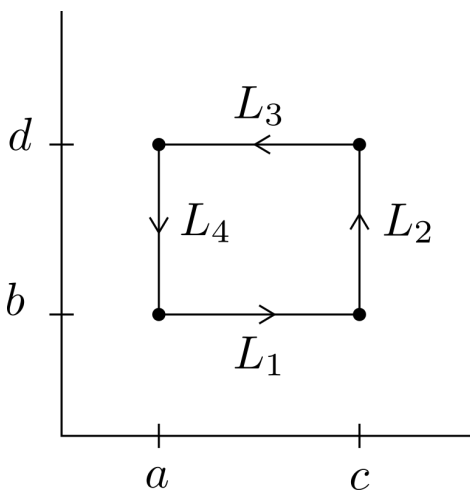
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 1)



Rysunek 1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść.  $L_1 + L_2 + L_3 = L$

**Przykład 1.** (rys 2)



Rysunek 2:  $\dim M = 2$

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$\begin{aligned} \int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\ &= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x, d) dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a, y) dy. \end{aligned}$$

(rys 3)

dla  $\dim M = \mathbb{R}^1$ . Niech  $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $\varphi(v) = a \cdot v$  ( $\varphi$  - liniowe).

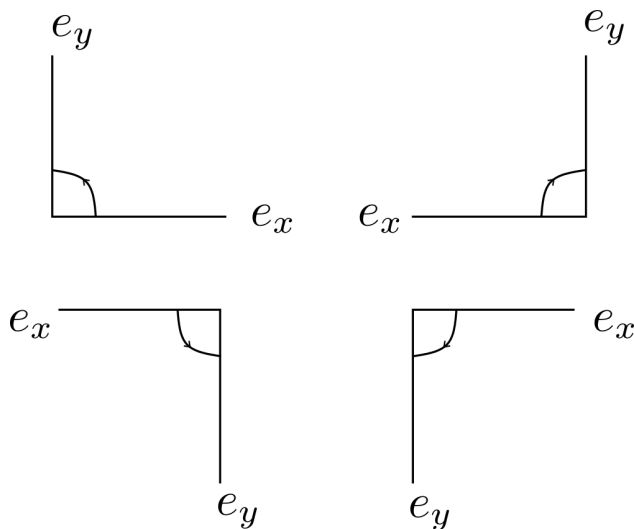
$a > 0$  - nie zmienia orientacji (kierunku)

$a < 0$  - zmienia kierunek wektora.

(rys 4)



Rysunek 3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach



Rysunek 4: Różne orientacje na  $\mathbb{R}^2$ , czy można to jakoś pogrupować?

**Definicja 1.** Niech  $B_1, B_2$  - bazy uporządkowane w  $V$  - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że  $B_1$  i  $B_2$  należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z  $B_1$  do  $B_2$  jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem  $V$ .

**Definicja 2.** Orientację standardową na  $\mathbb{R}^n$  nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$

**Definicja 3.** Niech  $M$  - rozmaitość zorientowana,  $\dim M = n$  i  $S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$  - powierzchnia sparametryzowana,  $\Lambda^2 M \ni \omega$  - dwuforma. Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

**Przykład 2.** do 7:

weźmy  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  i obliczmy  $\int_P \omega$ .

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\int \int_P d\omega &= \int \int_{[a,b] \times [c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
&= \int_a^b dx \int_c^d dy \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\
&= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[ \int_a^b dx (A(x,d) - A(x,c)) \right] = \\
&= \int_a^b A(x,c) dx + \int_c^d B(b,y) dy - \int_a^c A(x,d) dx - \int_c^d B(a,y) dy = \\
&= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega.
\end{aligned}$$

Czyli

$$\int \int_P d\omega = \int_L \omega,$$

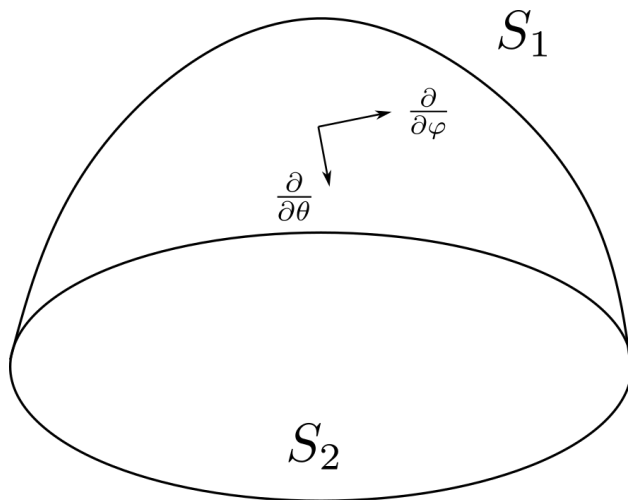
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

**Przykład 3.** niech  $S = S_1 \cup S_2$ , gdzie

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$ .

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 5: Tak to wygląda

**Definicja 4.** Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map  $(U_i, \varphi_i)$ , że dla każdej pary  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  takiej, że  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , odwzorowanie  $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$ .

**Definicja 5.** Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy zorientowaną.

**Definicja 6.** Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.