

Jeżeli f - holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Przykład 1. Policzyc

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1 + iz)^2(1 - iz)^2}.$$

Niech $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1 - iz)^2}$, f - holomorficzna na $K(i, 1)$. W związku z tym piszemy

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z)}{(1 + iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z) dz}{(z - i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i f'(z)|_{z=i}.$$

0.1 Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np. $\sin(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pytanie skąd my wiemy, że $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, dla $z \in \mathbb{C}$

Twierdzenie 1. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na \mathcal{O} ,

$z_n \in \mathcal{O}$ - ciąg z \mathcal{O} taki, że $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z_0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = 0$.

Wówczas

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{z \in K(z_0, r)} \quad f(z) = 0.$$

Dowód. przez sprzeczność ($\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$).

Założmy, że $\exists_{z \in K(z_0, r)} f(z) \neq 0$ i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro f - holomorficzna na \mathcal{O} , to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

i wiemy, że $f(z) \neq 0$, czyli $\exists k$ takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \quad (\star)$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego (\star) jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez j . Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!} (z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli $g(z) \neq 0$. Skoro f - holomorficzna, to $g(z)$ też jest holomorficzna na \mathcal{O} , czyli między innymi $g(z)$ jest ciągła na \mathcal{O} . Ale wiemy, że $f(z_n) = 0$, czyli $g(z_n) = 0$ i g - ciągła na \mathcal{O} . Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \xrightarrow{z_n \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo $g(z_n)$ jest ciągiem samych zer, a $g(z_0) \neq 0$, bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

□

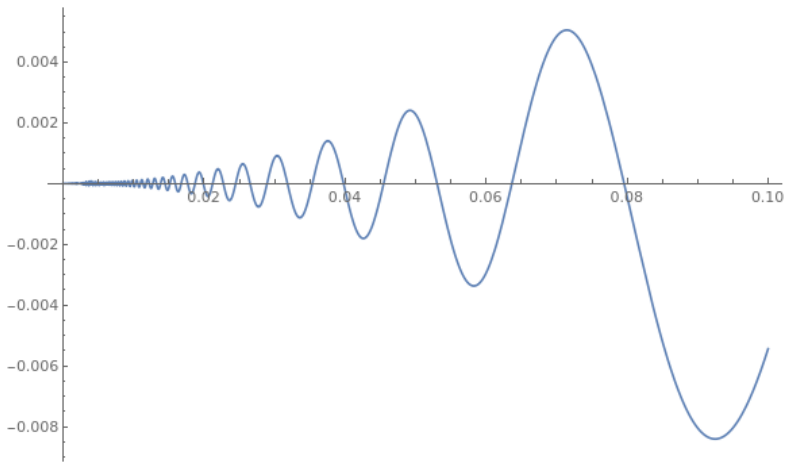
Obserwacja: Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu $a_n \rightarrow 0$,

$$f(a_n) \longrightarrow 0$$

i $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 1: $f(x)$

Twierdzenie 2. Niech $f(z), g(z)$ - holomorficzne na \mathcal{O} ,

$$\forall_{h \in \mathbb{N}} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg $z_n \rightarrow z_0$. Wówczas

$$f(z) = g(z) \quad \forall_{z \in \mathcal{O}}.$$

Dowód. Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas $h(z_n) = 0$ i $z_n \rightarrow z_0$. Skoro $h(z)$ - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n$$

i dowodzimy tak jak wcześniej.

□

Przykład 2.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

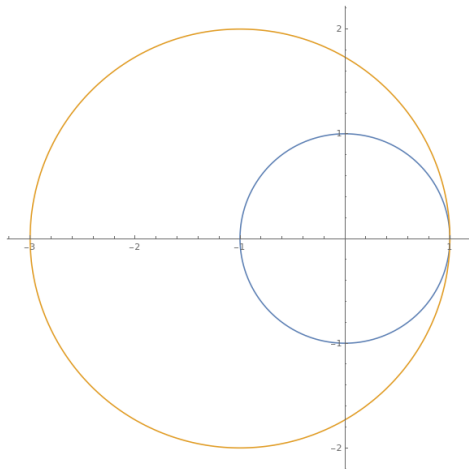
$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \dots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$

Definicja 1. Niech f - holomorficzna na U_1 i g - holomorficzna na U_2 i

$$\exists_{z_0} z_0 \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\forall_{z \in U_1 \cap U_2} f(z) = g(z).$$



Rysunek 2: f i g

Mówimy wówczas, że f jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym) funkcji g .

Przykład 3. Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka

$$\ln(z) = (z - 1) - \frac{1}{z}(z - 1)^2 + \dots$$

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$$

0.1.1 Punkty osobliwe

Definicja 2. Punkt w którym $f(z)$ nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.

Definicja 3. Niech $f(z)$ - taka, że

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i $\varphi(z)$ - holomorficzna na \mathcal{O} i $f(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O} - \{a\}$.
O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie a biegun rzędu N .

Pytanie: czy f może nie być holomorficzna np. na krzywej $\gamma \subset \mathbb{C}$?

Odpowiedź: gdyby f nie była holomorficzna na $\gamma \subset \mathbb{C}$, to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że $g(z) \equiv 0$ także dla $z \notin \gamma$.