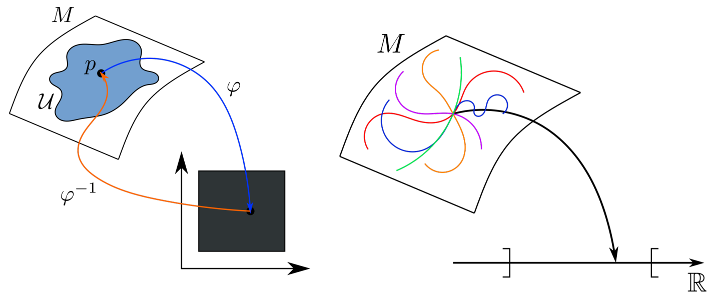
Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

1 Wykład (04.10.2019)

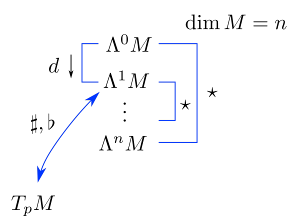
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \ldots & \alpha_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \ldots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_pM$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_pM$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\left\langle A^\sharp, B \right\rangle, \quad (g_{ij} \text{ - diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned}\left\langle A^\sharp, B \right\rangle = &\left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \ldots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B.\end{aligned}$$

Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\left\langle A^\sharp, B \right\rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B.
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_pM.$$

$$\begin{aligned}\langle A, B, C \rangle = &A^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \right\rangle + A^2 \left\langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \right\rangle + A^3 \left\langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \right\rangle = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} \left\langle dx^2, B \right\rangle & \left\langle dx^3, B \right\rangle \\ \left\langle dx^2, C \right\rangle & \left\langle dx^3, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} \left\langle dx^3, B \right\rangle & \left\langle dx^1, B \right\rangle \\ \left\langle dx^3, C \right\rangle & \left\langle dx^1, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} \left\langle dx^1, B \right\rangle & \left\langle dx^2, B \right\rangle \\ \left\langle dx^1, C \right\rangle & \left\langle dx^2, C \right\rangle \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \left(B^2 C^3 - B^3 C^2\right) + A^2 \left(B^3 C^1 - B^1 C^3\right) + A^3 \left(B^1 C^2 - B^2 C^1\right) = \\ &\text{"} = \text{"} A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3 \text{"} = \text{"} A \cdot (B \times C) \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|.\end{aligned}$$

Wychodzi tak jak na (rys 3)

1.3 Problem

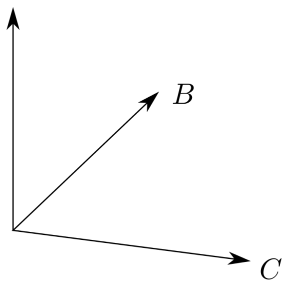
$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w $\mathbb{R}^3$ (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B.

1. sparametryzujmy kształt S, np.

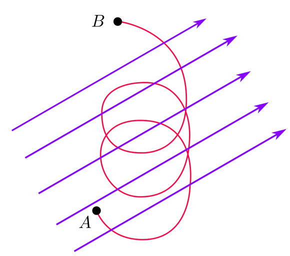
$$S = \left\{ \begin{array}{c} x = \cos(t) \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{array} \right\}.$$



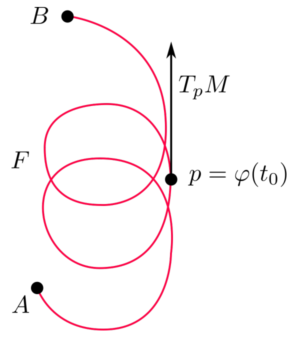
Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \left.\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix}\right|_{t=t_0}$, to
$$T_pM = \left.\left\langle \begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle\right|_{t=t_0}.$$
(rys 5)

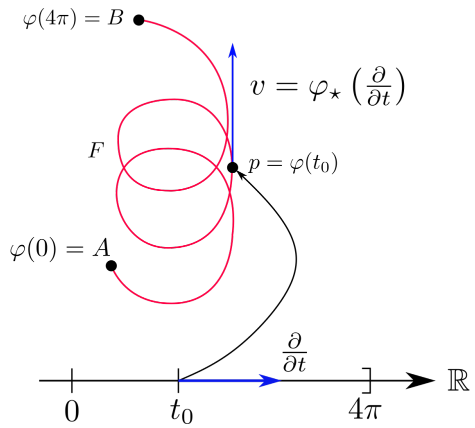
3. Niech $T_pM \ni v = -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)
Możemy policzyć np.
$$\int \langle F, v\rangle = \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle dt =$$
$$= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle dt = \int_0^{4\pi}\left\langle \varphi^\star F, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt.$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



Rysunek 6

Definicja 1. *Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M, $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a,b] \to M$ - parametryzacja krzywej L, czyli*

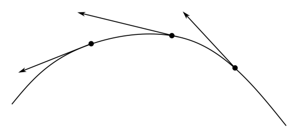
$$L = \{\varphi(t), t \in [a,b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Przykład 1. *niech (rys 8)*

$$C_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leqslant t \leqslant 2 \right\}$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

i

$$\omega = ydx = \left(y\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\sharp}.$$

Wtedy mamy $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$, $\varphi^{\star}\omega = \quad \begin{vmatrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^{\star}\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^{\star}\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = \left[t^2 - t \right]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leqslant u \leqslant 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

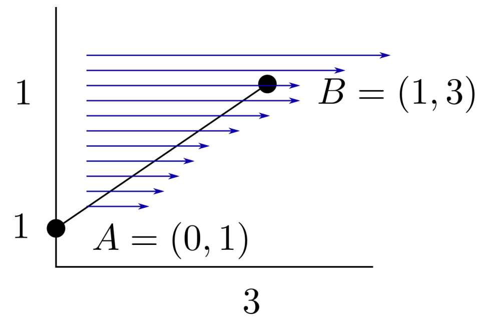
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^{\star}\omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\begin{matrix} x = 2-u \\ dx = -u \end{matrix}$ *i mamy*

$$\varphi^{\star}\omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = \left[u^2 - 5u \right]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



Rysunek 8

2 Wykład (07.10.2019)

2.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

$$L : \{[a, b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

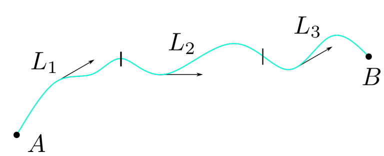
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = y dx$,

$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 9)



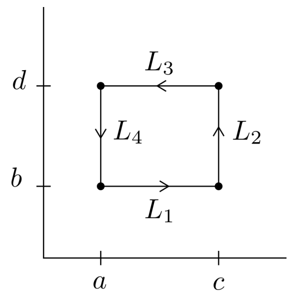
Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. *(rys 10)*

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leqslant x \leqslant c\}.$$



Rysunek 10: $\dim M = 2$

$$L_2 = \{(c, y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$
$$L_3 = \{(x, d), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_4 = \{(a, y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$

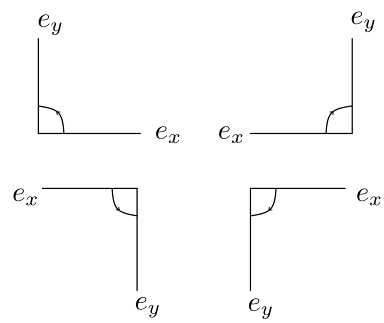
$$\int_L \omega = \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega =$$
$$= \int_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle =$$
$$= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x, d) dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a, y) dy.$$

(rys 11)
dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_p M \to T_p M$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).

Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.
(rys 12)

Definicja 2. *Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V.*



Rysunek 12: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 3. *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots .$$

Definicja 4. *Niech M - rozmaitość zorientowana,* $\dim M = n$ *i* $S = \{[a,b] \times [c,d] \ni (t_1,t_2) \to \varphi(t_1,t_2) \in M\}$ *- powierzchnia sparametryzowana,* $\Lambda^2 M \ni \omega$ *- dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{zgodne\ z\ orientacją} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. *do 7:*
weźmy $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ *i obliczmy* $\int\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array}\right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\int\int_P d\omega &= \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\ &= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx\, (A(x,d) - A(x,c))\right] = \\ &= \int_a^b A(x,c)dx + \int_c^d B(b,y)dy - \int_a^c A(x,d)dx - \int_c^d B(a,y)dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{l_4} \omega.\end{aligned}$$

Czyli

$$\int\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

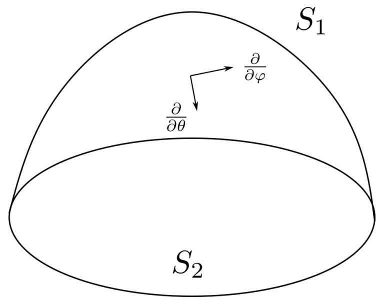
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. *niech (sytuacja jak na rys 13)* $S = S_1 \cup S_2$, *gdzie*

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\right\}, \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\right\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 13: Tak to wygląda

Definicja 5. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* (U_1, φ_1)*, że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$*, odwzorowanie* $\det\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)' > 0$.

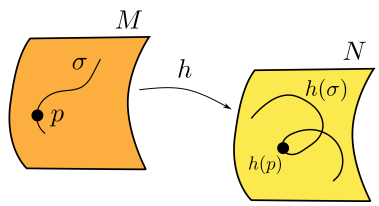
Definicja 6. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*

Definicja 7. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

3 Wykład (11.10.2019)

3.1 Przypomnienie

(rys 1)
Dla $v \in T_pM$, jest



Rysunek 14: Przypomnienie

$$h_\star v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t))\sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt}\sigma(t)$,

$$h_\star v = \underbrace{h'(\sigma(t))}_{\text{macierz kwadratowa}} v.$$

Przykład 5. *Niech*

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

$$U_1^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_1^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\right\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).

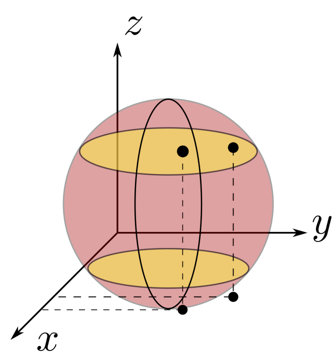
$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z \qquad\qquad (z,x) \to h(z,x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{bmatrix}$$

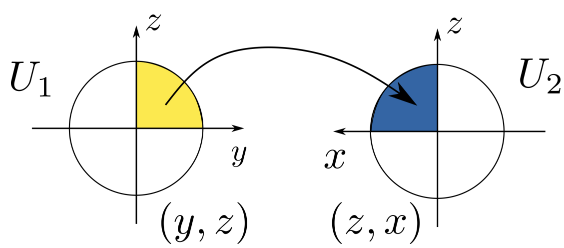
$$(x > 0, z > 0).$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) & \frac{\partial}{\partial x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$



Rysunek 15: fig3-2



Rysunek 16: fig3-3

Przykład 6. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości* $2L$ *i promieniu* R. *(rys 4)*

$$
\begin{aligned}
x(\theta, t) &= \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\theta \\
y(\theta, t) &= \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta \\
z(\theta, t) &= \left(t\cos\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' *i* t'.

$$
\begin{aligned}
x'(\theta', t') &= \left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\cos\theta' \\
y'(\theta', t') &= -\left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\sin\theta' \\
z'(\theta', t') &= t'\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$W_1 = \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\}$$
$$W_2 = \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Dla W_1

$$\begin{cases} \theta' & = \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' & = -t, \end{cases}$$

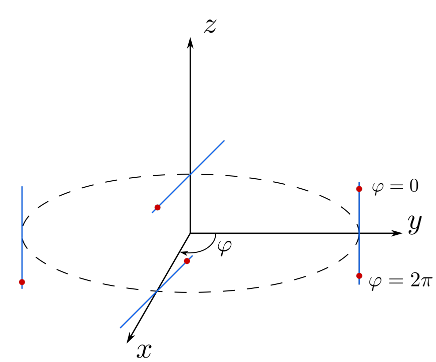
dla W_2

$$\begin{cases} \theta' & = \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' & = t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi_1'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \varphi_1' < 0 \quad \det \varphi_2' > 0.$$



Rysunek 17: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?

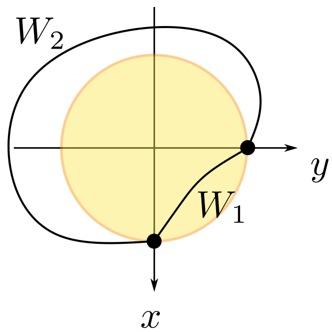
3.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

1. Niech $I^n = [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0.1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)
   Wprowadźmy oznaczenia:

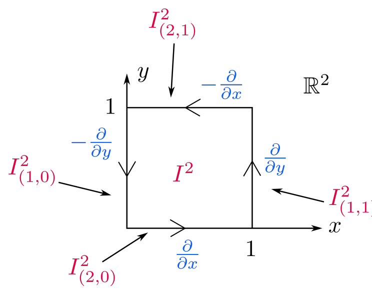
$$I^n_{(i,0)} := \left\{\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1\right\}.$$
$$I^n_{(i,1)} := \left\{\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1\right\}.$$

(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \overset{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)}{}'' = {}'' I^2_{(1,1)}{}'' + {}'' - I^2_{(2,1)}{}'' + {}'' - I^2_{(1,0)},$$



Rysunek 18: Obszary wspólne



Rysunek 19: fig3-6

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.
Zdefiniujmy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n.

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned} \omega = {} & f_1(x^1, \ldots, x^n) dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\ & + f_i(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\ & + f_n(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\int_{\partial I^n} \omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \Big\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}$$

$$dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n =$$

$$= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n & \end{cases}$$

4 Wykład (14.10.2019)

4.1 Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$. Wtedy dla $x = (x^1, \ldots, x^n)$ i $d\tilde{x} = dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n$

$$\int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle =$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots x^n) d\tilde{x} = \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots \end{cases}$$

$$\stackrel{(\star)}{=} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n).$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\ &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{j+1}, \ldots, x^n) = \\ &= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) + (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Stąd

$$(-1)^{i+1}\int_{I^n}\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1,\ldots,dx^n,\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle = (-1)^{i+1}\int_0^1 dx^1\ldots\int_0^1 dx^i\ldots\int_0^1 dx^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) =$$
$$= (-1)^{i+1}\int_0^1 dx^1\ldots\int_0^1 dx^{i-1}\int_0^1 dx^{i+1}\ldots\int_0^1 dx^n\cdot$$
$$\cdot\left[f(x^1,\ldots,x^{i-1},1,x^{i+1},\ldots,x^n)-f(x^1,\ldots,x^{i-1},0,x^{i+1},\ldots,x^n)\right]$$
$$= (-1)^{i+1}\int_0^1 dx^1\ldots\int_0^1 dx^i\ldots\int_0^1 dx^n\cdot$$
$$\cdot\left[f(x^1,\ldots,x^{i-1},1,x^{i+1},\ldots,x^n)-f(x^1,\ldots,x^{i-1},0,x^{i+1},\ldots,x^n)\right] =$$
$$= (-1)^{i+1}\int_{I^n}\left[f(x^1,\ldots,x^{i-1},1,x^{i+1},\ldots,x^n)-f(x^1,\ldots,x^{i-1},0,x^{i+1},\ldots,x^n)\right].$$

$$LHS = RHS.$$

□

Uwaga: Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek I^n. Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

Przykład 7. *Niech* $[a,b]\in\mathbb{R}^1$ *i* $f\in\Lambda^0([a,b])$. *Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak (xD):*

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_{[a,b]} df = \int_a^b\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}dx,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle dx = \int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}dx = f(b)-f(a).$$

Przykład 8. *Niech* γ *- krzywa na* M, $\dim M = 3$, $f\in\Lambda^0 M$.

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B)-f(A).$$

Przykład 9. $\dim M = 2$, *niech* $\alpha = xydx + x^2dy$. *Policzmy* $\int_{\partial S}\alpha$.

$$\int_{\partial S}\alpha = \int_{C_1}\alpha + \int_{C_2}\alpha + \int_{C_3}\alpha,$$

ale

$$\int_{C_1}\left\langle\varphi^\star\alpha,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle = 0,$$

φ *- parametryzacja* C_1. *Jeżeli weźmiemy sobie*

$$\int_{C_3}\left\langle\varphi_3^\star\alpha,-\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = 0,$$

φ_3 *- parametryzacja* C_3.

$$C_2 = \left\{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

zatem $\varphi_2^\star\alpha$ *przy* $x=\cos\theta \implies dx=-\sin\theta d\theta$, $y=\sin\theta \implies dy=\cos\theta d\theta$, *mamy*

$$\varphi_2^\star\alpha=\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta d\theta)+(\cos^2\theta)\cos\theta d\theta=\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta.$$

$$\int_{\partial S}\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\langle\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta,\frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa: $\int_{\partial S}\alpha=\int_S d\alpha$.

$$d\alpha=xdy\wedge dx+2xdx\wedge dy=xdx\wedge dy.$$

$$\int_\square\left\langle xdx\wedge dy,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x=\int_0^1dx\cdot x\sqrt{1-x^2}=\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(-1)}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Przykład 10. *Niech* $\alpha=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\in\Lambda^1(M)$, $\partial K=\left\{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},0\leqslant\theta,2\pi\right\}$

$$\int_{\partial K}\alpha=\int_0^{2\pi}\left\langle\varphi^\star\alpha,\frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^\star\alpha=-\sin\theta(-\sin\theta)d\theta+\cos\theta\cos\theta d\theta=d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K}\alpha=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$d\alpha=\left[\left(-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right)dy\wedge dx+\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy\right]=\left(\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{2}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_\gamma df=\int_{\partial\gamma}f=f(B)-f(A).$$

Niech $\alpha=x^2dx+xydy+2dz$. α jest potencjalna, jeżeli

$$\underset{\eta\in\Lambda^0M}{\exists}d\eta=\alpha\implies d(d\eta)=0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_\gamma\alpha=\int_\gamma d\eta=\eta(B)-\eta(A).$$

Definicja 8. *Niech M - rozmaitość,* $\dim M = n$,

$$i_v : T_pM \times \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1. $i_v f = 0$, *jeżeli* $f \in \Lambda^0 M$
2. $i_v dx^i = v^i$, *jeżeli* $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \ldots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3. $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$.

Operację i_v nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \overset{ozn}{=} v(odwroconeL)\omega.$$

Obserwacja: $i_v(i_v\omega) = 0$ (w domu)

Przykład 11. *Niech* $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v(odwroconeL)\omega = \langle dx, v\rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v\rangle + \langle dz, v\rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v\rangle .$$

Przykład 12.

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e\frac{\partial}{\partial t} + ev^x \frac{\partial}{\partial x} + ev^y \frac{\partial}{\partial y} + ev^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j(odwroconeL)F = ?.$$

5 Wykład (18.10.2019)

Sprawdzić, że
$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

Przykład 13. *Niech* $X = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,
$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$
Niech M *- rozmaitość,* $\dim M = 2$*. Co oznacza napis*
$$x \lrcorner \omega = dH?$$
$$\left\langle dx, x(t)\frac{\partial}{\partial x} + p(t)\frac{\partial}{\partial p}\right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}\right\rangle dx = dH,$$
a teraz coś takiego:
$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2 dx.$$
To wypluje na wyjściu równania ruchu
$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p}(t) = -kx$$
$$m\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

5.1 Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:
(rys 5-1) Niech $I = [0,1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x,y) = |x-y|$) czy I jest otwarty w $\mathbb{R}$? *chyba nie.*
Niech $I = [0,1[\subset [0,2]$, czy I jest otwarty w $[0,2]$? *chyba tak.*
$$B(0,1) = \{x \in [0,2], \quad d(0,x) < 1\} = [0,1[.$$

Definicja 9.
$$\mathbb{R}^m_+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geqslant 0\right\},$$
$$\mathbb{R}^m_0 = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\right\}.$$
Niech M *- rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości* M *składa się z takich map* φ_α*, że*
$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m_+,$$
($\mathcal{O}$ *- otwarty w* M*), gdzie* $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ *- otwarte w* $\mathbb{R}^m_+$*, to* M *nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli* $p \in M$ *i* $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^m_0$*, to mówimy, że* p *należy do*

brzegu M.
(brzeg rozmaitości M oznaczamy przez ∂M)

Pytanie 1. *Co to jest różniczkowalność φ^{-1}, jeżeli dziedzina $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}^m_+$, który nie jest otwarty w $\mathbb{R}^m$?*

Mówimy wówczas tak:

Definicja 10. *Niech $U \subset \tilde{U}$, $\tilde{U}$ - otwarty w $\mathbb{R}^m$, U - otwarty w $\mathbb{R}^m_+$. φ jest klasy $\mathcal{C}^r$ na U, jeżeli istnieje $\tilde{\varphi}$ klasy $\mathcal{C}^r$ na $\tilde{U}$ i $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$.*

(rys 5-3)

Pytanie 2. *Czym jest ∂S, jeżeli S - okrąg?*

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

$$\text{sześcian} \xrightarrow{\partial} \text{boki sześcianu} \xrightarrow{\partial} \text{rogi sześcianu},$$

$$\text{kula} \xrightarrow{\partial} \text{sfera} \xrightarrow{\partial} \{\phi\}\,.$$

Obserwacja:
Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętymi do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m-1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 11. *Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ - baza $T_p\partial M$, wybierzmy orientację na M (rys 5-5).*
Niech σ - krzywa na M taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \ldots, 0, t) \in \mathbb{R}^m_+,$$

niech $\overline{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M, jeżeli orientacja $\langle \overline{n}, f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ jest zgodna z orientacją M.

(rys 5-6) Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \to T$ - parametryzacja T oraz $\varphi_2 : U_2 \to T$ - parametryzacja T. Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\underset{h}{\exists} h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^\star \omega = \int_{U_2} h^\star \left(\varphi_1^\star \omega\right) \underset{(\Delta)}{\overset{?}{=}} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^\star \omega = \int_{U_2} \varphi_2^\star \omega.$$

(Δ) - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^\star \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_\star v \rangle = \langle k^\star \omega, L_\star v \rangle = \langle L^\star k^\star \omega, v \rangle ,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt}\overline{\sigma}$ to

$$(kL)_\star v = \frac{d}{dt}\left(k\left(L\left(\overline{\sigma}(t)\right)\right)\right) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_\star L_\star v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

5.2 Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.
Obserwacja:

$$\eta = arctg\frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{1}{y}dx - \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{x}{y^2}dy = \omega$$

6 Wykład (21.10.2019)

Definicja 12. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathcal{O}$ nazywamy ściągalnym, jeżeli istnieje $p \in \mathcal{O}$ i odwzorowanie $h(p,x,t)$ takie, że*

$$\underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \begin{array}{l} h(p,x,0)=p \\ h(p,x,1)=x \end{array}, \quad \underset{t\in[0,1]}{\forall} h(p,x,t) \in \mathcal{O}, \quad h(p,x,t) \text{ - ciągła.}$$

Twierdzenie 1. *(rys 6-1) (Lemat Poincare)*
Niech

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \text{ - zbiór ściągalny} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \underset{\eta}{\exists}, d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{pmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathcal{O}$ jest zbiorem gwiaździstym, czyli

$$\underset{p\in\mathcal{O}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \begin{pmatrix} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1+q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{pmatrix} \big(\text{jest zawarty w } \mathcal{O}\big).$$

Obserwacja: gdyby istniał operator $T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \to \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}), \quad p = 1,2,\ldots,n-1$,taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byloby prawdziwe. (bo dla $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$ mielibyśmy $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$).

Więc, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 \left(t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)\right),$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ spełnia warunek $Td + dT = id$.

Przykład 14. $\omega \in \Lambda^1(M)$, $\dim M = 3$, $\omega = xdx + ydy + zdz$. *Wówczas, gdy* ($\overline{x} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$) *jest*

$$T(\omega) = \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz,}_{\omega(tx)} \quad \overline{x} \right\rangle dt = \int_0^1 t^0 \left(tx^2 + ty^2 + tz^2\right) dt = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \eta.$$

Zauważamy, że $d\eta = \omega$ *i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał).(rys 6-2)*

Przykład 15. $\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$, $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\dim M = 3$. *Co to jest* $T\omega$*?*

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner \left(xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz\right) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 \left(xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx\right) dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2dy - xydx + y^2dz - yzdy + zxdz - z^2dx\right) = \eta \end{aligned}$$

.

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie $x = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n\frac{\partial}{\partial x^n}$.
Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\omega(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x^1,\ldots,x^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

$$\omega = \overset{\omega_{12}}{x} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=2}{y} + \overset{\omega_{23}}{y} d\overset{i_1=2}{y} \wedge d\overset{i_2=3}{z} + \overset{\omega_{13}}{z} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=3}{z}.$$

$$d\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Liczymy

$$\begin{aligned} Td \underset{p+1 \text{ forma}}{\omega} &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \underset{\text{brak}}{\ldots} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T\omega &= \int_0^1 t^{p-1}\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\ldots+x^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\lrcorner\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} = \\
&= \sum_{k=1}\int_0^1 dt \quad t^{p-1}\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)x^k dx^{i_1}\wedge \underset{\text{bez } dx^{i_k}}{\ldots}\wedge dx^{i_p}(-1)^{k+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{p}\int_0^1 dtt^{p-1}\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} + \sum_{k=1}^{p}\int_0^1 dtt^{p-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^\alpha}\cdot t\cdot x^{i_k}dx
\end{aligned}
$$

Zatem dodajemy do siebie $Td\omega + dT\omega$ i wychodzi

$$
\begin{aligned}
Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 dt\cdot t^p\frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j}x^j dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} + \int_0^1 dtp\cdot t^{p-1}\omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)dx^{i_1} \\
&= \int_0^1 dt\left(\frac{d}{dt}\left(t^p\omega(tx^1,\ldots,tx^n)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)\right) = t^p\left(\omega(tx^1,\ldots,tx^n)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^p\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = \omega.
\end{aligned}
$$

□

7 Wykład (25.10.2019)

Definicja 13. *Jeżeli $\alpha \in \Lambda^k(M)$ taka, że $d\alpha = 0$, to mówimy, że α jest domknięta. Jeżeli $\underset{\eta}{\exists}$ taka, że $d\eta = \alpha$, to mówimy, że α jest zupełna.*

Przykład 16. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = -\nabla f(x,y,z)$.
Dla $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, jest $d\omega = 0$. Było, że $\eta = artctg(\frac{x}{y})$, $d\eta = \omega$. Problem leży w punkcie $(0,0)$ bo nie należy do dziedziny.
(rys 7-1)

7.1 Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$, który jest w koszmarnej bazie $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$, ale można go zamienić na coś fajniejszego $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Dla trójki wektorów v_1, v_2, v_3, ich $|v_1, v_2, v_3|$ to objętość.
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = \det(A)\det(A^T) = \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = G(v_1, v_2, v_3).$$

Definicja 14. *Niech M - rozmaitość i γ krzywa na M.*

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a,b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \overset{def}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

Przykład 17. *(rys 7-2) M takie, że* $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a,b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji na (rys 7-3) jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe (rys 7-4)

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} | \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^i$*, dalej jest*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left(\frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.
Niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \left\{ \begin{matrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{matrix} \quad a \leqslant t_1 \leqslant b, \quad c \leqslant t_2 \leqslant d \right\}.$$

$$\|D\| = \int vol \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

Przykład 18. *Niech*

$$D = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \right).$$

Liczymy $vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{bmatrix}.$$

$$vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left\| \begin{bmatrix} 1 + (f_{,x})^2 & (f_{,x})(f_{,y}) \\ (f_{,x})(f_{,y}) & 1 + (f_{,y})^2 \end{bmatrix} \right\| = \left(1 + (f_{,x})^2\right)\left(1 + (f_{,y})^2\right) - (f_{,x})^2 (f_{,y})^2.$$

$$\|D\| = \int_a^b \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy}_{ds}.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Niech A - wektor w bazie ortonormalnej. Dla $\dim M = 3$, $g = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$,

$$A = A^1 \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech $\alpha = A^\sharp \in \Lambda^1(M)$, γ - krzywa na M.

$$\alpha = g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} dx^1 + g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} dx^2 + g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} dx^3.$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \frac{\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}}{\left\|\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}\right\|} \right\rangle \left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt.$$

Niech $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$.
Pytanie: czym jest $\langle \alpha, v \rangle$?

$$\langle \alpha, v \rangle = A^1 \sqrt{g^{11}} g_{11} v^1 + A^2 \sqrt{g^{22}} g_{22} v^2 + A^3 \sqrt{g^{33}} g_{33} v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.
Niech $V \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim V = 3$. Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech $S \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim S = 2$.

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

Pytanie 3. *Niech $\alpha = A^\sharp$, czym jest $\int_S dA^\sharp$?*

$$dA^\sharp = \underbrace{\left(\left(g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,2} - \left(g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} \right)_{,3} \right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 + \underbrace{\left(\left(g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} \right)_{,3} - \left(g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,1} \right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\dots)}_{D_3} dx$$

$$\int_S dA^\sharp = \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle + \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle.$$

$$\int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\| dx^2 dx^3}_{ds} + \dots.$$

Pamiętamy, czym była $rot(A) = \left(\star dA^\sharp\right)^\flat = \int (rot(A))\, \mathbf{n} ds$

8 Wykład (28.10.2019)

8.1 W ostatnim odcinku

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^\sharp = \left(\overbrace{(.)\,, -(.)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots .$$

$$\int_S dA^\sharp = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^\sharp \right) \right)^\flat,$$

ale

$$\begin{aligned}
\star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\
\star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\
\star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.
\end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^\sharp = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned}
\left(\star dA^\sharp \right)^\flat &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\
&= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Czyli dla $\vec{A}$ - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot\vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \\ D^3 \frac{1}{g_{11} g_{22}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}}$, ale

$$\left(rot\vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}} \sqrt{g_{22} g_{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^\sharp = \int_S (rot\vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int_{\partial S} A^\sharp.$$

$$\int_S \left(rot\vec{A} \right) \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

Przykład 19. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

Pytanie 4. *czym jest* $\int_{\partial V} \star A^\sharp$*?*

$$\star(dx^1)\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3,$$
$$\star(dx^2)\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1,$$
$$\star(dx^3)\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,$$

Odpowiedź:

$$\star A^\sharp = A^1 g_{11}\sqrt{g^{11}}\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22}\sqrt{g^{22}}\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1 + A^3 g_{33}\sqrt{g^{33}}\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2\sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3\sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2\sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \int A^3\sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 dx^2,$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

Pytanie 5. *Jak wygląda* $\int_V d \star A^\sharp$*?*

$$\int_V d\star A^\sharp = \int_V \left\langle \left(A^1\sqrt{g_{22}g_{33}}\right)_{,1} + \left(A^2\sqrt{g_{11}g_{33}}\right)_{,2} + \left(A^3\sqrt{g_{11}g_{22}}\right)_{,3}, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^1 dx^2 dx^3$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$div\vec{A} = \star d\left(\star A^\sharp\right),$$

wiemy, że
$$\star\left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\right) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$
więc
$$div\vec{A}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = div\vec{A} \quad dV.$$
Zatem ze zdania
$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$
wiemy, że
$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V div\vec{A} \quad dV.$$

8.2 Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)
(rys 8-2)

Można się zastanowić nad taką funkcją:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$
$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$
(kółko)
$$f(t) = e^{bt} e^{iat}; \quad a, b > 0.$$
(spiralka)

Definicja 15. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty. $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$.
Mówimy, że f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ jeżeli $\underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}$ istnieje granica*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{def}{=} f'(z),$$
gdzie $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga: jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z $\mathbb{R}^2$.
Uwaga: dowolną funkcję z $\mathbb{C}$ możemy zapisać jako $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$, gdzie $z = x + iy$ a $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

Przykład 20. $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$, $z = x + iy$

Pytanie 6. *Co to znaczy różniczkowalność?*

ma istnieć granica (dla $h \in \mathbb{R}$):
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np. $h = it$, to wtedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{P(x,y+t)-P(x,y)}{it} + i\frac{Q(x,y+t)-Q(x,y)}{it} = \frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli f - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Przykład 21. *(jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)*

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i\underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy f jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

Przykład 22.

$$\alpha = Q(x,y)dx + P(x,y)dy,$$

gdzie P, Q są takie, że $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\wedge dy = 0.$$

Pytanie 7. *Niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, f - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach*

$$P_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad P(x,y) = c\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$Q_d = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad Q(x,y) = d\in\mathbb{R}\right\}.$$

9 Wykład (04.11.2019)

9.1 Refleksja

Czy to

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest fajne?

Przykład 23. *(fig 9-1)*

$$\nabla P = \left[\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right],$$
$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right],$$

to możemy zrobić takie coś:

$$\text{"}(\nabla P \cdot \nabla Q)\text{"} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Twierdzenie 2. *f - holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy f - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.*

Dowód. $\implies$ było

$\impliedby$ Zauważmy, że skoro $P(x,y)$, $Q(x,y)$ spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna na $U \subset \mathbb{R}^2$, czyli dla $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ jest

$$\underbrace{F(x+h_1, y+h_2) - F(x,y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h),$$

$\frac{r(x,y,h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$

Czyli

$$\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y) \\ Q(x+h_1, y+h_2) - Q(x,y) \end{bmatrix}}_{\Delta Q}}^{\Delta P} \overset{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ah_1 - bh_2\\ bh_1 + ah_2\end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= P(x+h_1, y+h_2) + iQ(x+h_1, y+h_2) - (P(x,y) + iQ(x,y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i\,(bh_1 + ah_2) + r = \\ &= (a+ib)\,(h_1 + ih_2) + r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z h do 0, to $\frac{r}{h} \to 0$, więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

□

Stwierdzenie 1. *Niech $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, a $g : U \to \mathbb{C}$ - holomorficzna na U. Wówczas $g \circ f$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$.*

Dowód.

$$(g\circ f)' = g'(f)f' = \begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1 b\\ a_1 b + ab_1 & -bb_1 + aa_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aa_1 - bb_1 & -(a_1 b + ab_1)\\ a_1 b + ab_1 & aa_1 - bb_1\end{bmatrix},$$

a tak wygląda macierz pochodnej f - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). □

9.2 Oznaczenia

(fig 9-3)
niech $M \subset \mathbb{R}^2$, $\langle dx, dy\rangle = T_p^* M$. Wprowadźmy

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy\\ d\overline{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Jeżeli $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, to

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} d\overline{z}.$$

Obserwacja: niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

czyli

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\end{aligned}$$

.

Przykład 24. $f(z) = z^2 = z \cdot z$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

a $g(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = z \neq 0.$$

Czyli g - nie jest holomorficzna

Przykład 25. *(fig 9-4)*
Obliczmy całkę:

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left| \begin{matrix} z = re^{i\theta} \\ dz = rie^{i\theta}d\theta \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Stwierdzenie 2. *Jeżeli f - holomorficzna na $\mathcal{O}$ i $\Omega \subset \mathcal{O}$, to*

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_\Omega d(f dz) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial d\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

Twierdzenie 3. *(wzór Cauchy)*
Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, niech $\xi \in \Omega$. Wówczas

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}dz + \int_\Omega \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}.$$

Obserwacja: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz.$$

Wynik $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = 1$ otrzymamy dla $\xi = 0$ i $f(z) = 1$ (fig 9-5)

Dowód. niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\xi}.$$

(fig 9-6)
zatem wiemy, że

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) = \int_\Omega dg(z).$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz + \int_{\partial K(\xi,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = \iint\limits_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.$$

Pytanie: co się dzieje, jak przejdziemy z $\epsilon \to 0$ Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\iint\limits_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

dla $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$, ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka $\iint\limits_{\Omega_\epsilon} d\overline{z} \wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$. Oznacza, to że

$$\frac{1}{z-\xi} d\overline{z} \wedge dz \overset{\epsilon \to 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon,$$

czyli w $\epsilon = 0$ nie wybuchnie!
Ale

$$\int_{\partial K(\xi,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = -\int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= if(c) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(c) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} -2\pi i f(\xi),$$

gdzie $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$.
Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_\Omega \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

□

Twierdzenie 4. *(Liouville)*
Jeżeli f - ograniczona i holomorficzna na całym $\mathbb{C}$, to f jest stała.

Obserwacja: a co z sinusem? $f(x) = \sin(x)$, ale trzeba zastanowić się nad $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Dla np. $z = it$,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.

10 Wykład (08.11.2019)

Twierdzenie 5. *(Liouville)*
Jeżeli f - holomorficzna i ograniczona na $\mathbb{C}$, to f - stała.

Dowód. Wiemy, że

$$\underset{M>0}{\exists} \quad \underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad |f(z)| < M.$$

Skoro f - holomorficzna, to znaczy, że dla $\xi \in \mathbb{C}$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(\xi,r)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz.$$

(Wzór Cauchy)
Zauważmy, że skoro f - jak wyżej, to

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(\xi,r)} \frac{f(z)}{(z-\xi)^2} dz.$$

(Absolutnie nieoczywiste lol. Uzasadnienie później)
Wówczas możemy oszacować f'

$$|f'(\xi)| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \max_{z\in\partial K(\xi,r)} \left|\frac{f(z)}{(z-\xi)^2}\right| \cdot |\text{długość okręgu } K(\xi,r)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\left|(\xi + re^{i\varphi} - \xi)^2\right|} |2\pi r| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r}$$

Czyli

$$\underset{r>0}{\forall} |f'(\xi)| < \frac{M}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem $|f'(\xi)| = 0$, czyli

$$f(z) = const.$$

$\square$

Przykład 26. $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ *jest holomorficzna na $\mathbb{C}$, ale nie jest na $\mathbb{C}$ ograniczona (tylko dla $z \in \mathbb{R}$).*

Wniosek: (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)
Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$.
Załóżmy, że

$$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad w(z) \neq 0.$$

Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{1}{w(z)} \text{ jest na } \mathbb{C} \text{ holomorficzna i ograniczona.}$$

Jest więc stała. Co oznacza, że $w(z)$ jest stała i sprzeczność. $\square$
(PS oznacza to, że $\underset{z_0\in\mathbb{C}}{\exists}$, że $w(z_0) = 0$, czyli $w(z) = (z-z_0)w_1(z)$. Biorąc funkcję $f_1(z) = w_1(z) \ldots$ pokażemy, że wielomian stopnia n nad $\mathbb{C}$ ma n pierwiastków. $\square$)

10.1 Szeregi Laurenta

Przykład 27. *Niech*
$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}.$$
Zauważmy, że
$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1-i}{z-i} + \frac{1}{2}\frac{1+i}{z+i}.$$
Jeżeli
$$|z+2i| < 3,$$
to
$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{3i}} = -\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{3i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^{n+1}}\left(z+2i\right)^n.$$
Jeżeli $|z+2i| > 1$, *to*
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2i-i} = \frac{1}{z+2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z+2i}} = \frac{1}{z+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z+2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$
Zatem
$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n} + \frac{i-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^n}(z+2i)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k(z+2i)^k,$$
gdzie
$$dk = \begin{cases} \frac{1+i}{2}\cdot(i)^{-k-1} & k < 0 \\ \frac{i-1}{2}\cdot\frac{1}{(3i)^k} & k \geqslant 0 \end{cases}.$$
Niech
$$R(2i,1,3) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z+2i| < 3 \wedge |z+2i| > 1\}$$
- pierścień otwarty o środku $2i$ *i promieniach* 1 *i* 3.
Dla $|z+2i| < 1$,
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+2i-i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{i}} = -\frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i)^{n+1}}\frac{(z+2i)^n}{1}.$$
Zatem dla $z \in R(-2i,0,1)$,
$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i)^{n+1}}(z+2i)^n - \frac{1-i}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^{n+1}}\cdot(z+2i)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\left(z+2i\right)^k,$$
gdzie
$$d_k = -\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{(i)^{n+1}} - \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{(3i)^{n+1}}.$$

dla $|z+2i|>3$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z+2i-3i}=\frac{1}{z+2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3i}{z+2i}}=\frac{1}{z+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(3i)^n\cdot\frac{1}{(z+2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3i)^n}{(z+2i)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}.$$

I wtedy dla $z\in R(-2i,3,+\infty)$, *jest*

$$\frac{z+1}{z^2+1}=\frac{1+i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{(z+2i)^n}+\frac{1-i}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}=\sum_{k=-1}^{-\infty}d_k(z+2i)^k.$$

Twierdzenie 6. *(Laurent)*
Niech $f(z)$ *- holomorficzna na pierścieniu* $R(z_0,r_1,r_2)$,

$$R(z_0,r_1,r_2):=\{z\in\mathbb{C},|z-z_0|>r_1\wedge|z-z_0|<r_2\}.$$

Wówczas $\underset{z\in R(z_0,r_1,r_2)}{\forall}$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial K(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}},$$

$r_1<r<r_2$

Dowód. Zauważmy, że $\underset{z\in R(z_0,r_1,r_2)}{\forall}$ znajdziemy takie $r_1'>r_1$ i $r_2'<r_2$, że $z\in R(z_0,r_1',r_2')$. Ze wzoru Cauchy wiemy, że

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R(z_0,r_1',r_2')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\partial K(z_0,r_2')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\quad-\int_{\partial K(z_0,r_1')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right].$$

ale

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0+z_0-z},$$

a dla $\xi\in\partial K(z_0,r_1')$ i $z\in K(z_0,r_1')$

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1.$$

więc

$$\frac{1}{\xi-z_0+z_0-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-z}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}\cdot(z-z_0)^n.$$

więc

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

A dla $\xi \in \partial K(z_0, r_2')$ i z takich, że $|z - z_0| > r_2'$, wiemy, że

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

itd. $\square$

11 Wykład (15.11.2019)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R(z_0, r_1', r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli $z \in K(z_0, r_2')$ i $\xi \in \partial K(z_0, r_2')$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli $|z - z_0| > r_1'$, to mamy, że dla $\xi \in \partial K(z_0, r_1')$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = -\sum$$

Zatem

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi,$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na pierścieniu $R(z_0, r_1, \infty)$, to jak wyglądało by rozwinięcie $f(z)$?
Zauważmy, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r_2' i e^{i\varphi} f(z_0 + r_2' e^{i\varphi}) d\varphi}{(r_2' e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n| \leqslant |\frac{1}{2\pi i}| \cdot \frac{1}{(r_2')^n} \cdot \max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} \left|f(z_0 + r_2' e^{i\varphi})\right| \cdot 2\pi,$$

ale jeżeli f ograniczona poza kołem $K(z_0, r_1')$, to znaczy, że

$$\underset{r_2' > r_1'}{\forall} \left|f(z_0 + r_2' e^{i\varphi})\right| < M.$$

Czyli

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{(r_2')^n} \underset{r_2' \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Obserwacja: Gdyby f była holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to jak wyglądałoby rozwinięcie?
Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r_1' i e^{i\varphi} f(z_0 + r_1' e^{i\varphi})(r_1' e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\underset{M}{\exists}: |f(z)| < M, z \in K(z_0, r_1)} \left|f(z_0 + r_1' e^{i\varphi})\right| \; |2\pi|.$$

Czyli dla $z \in K(z_0, r_2)$, f - holomorficzna na $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Pytanie 8. *Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się a_n do $\frac{f^n(z_0)}{n!}$?*

Koniec obserwacji, wracamy do dowodu

Pytanie 9. *Czy wzory na a_n i d_n można uprościć?*

Przypomnienie: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że $f(z)$ - holomorficzne na $R(z_0, r_1, r_2)$, a funkcja $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ - też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzna na $R(z_0, r_1, r_2)$, czyli

$$\int\limits_{\partial K(z_0, r_2')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \underset{r_1 < r < r_2}{\forall}.$$

To samo możemy powiedzieć o d_n

$$\int\limits_{\partial K(z_0, r_1')} f(\xi)(z - z_0)^{n-1} d\xi = \int\limits_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \underset{r_1 < r < r_2}{\forall}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n} (z - z_0)^n,$$

ale $d_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

Twierdzenie 7. *Niech C - krzywa na $\mathbb{C}$ (zamknięta lub nie) i niech $f(z)$ - ciągła na C. Wówczas funkcja*

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorficzna na $\mathbb{C} - C$ dla $p \in \mathbb{Z}$ i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ i $z_0 \notin C$. Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z-z_0)}\left[\frac{1}{(\xi-z)^p} - \frac{1}{(z-z_0)^p}\right] - p\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{p+1}} = \underbrace{\int_C d\xi f(\xi)\left[\underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi-z)^p} - \frac{1}{(\xi-z_0)^p}}{z-z_0}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi-z_0)^{p+1}}\right]}_{(\Delta\Delta)}$$

Ale (Δ) - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi-z)^p}.$$

$$(\Delta) = \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Wiemy, że $g(z)$ - holomorficzna dla $z \notin C$, czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi-z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi-z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego, niż } (z-z_0).$$

Zatem

$$(\Delta\Delta) = \int_C d\xi f(\xi)\left[\frac{p}{(\xi-z)^{p+1}} + \text{ mała rzędu wyższego niż } (z-z_0) - \frac{p}{(\xi-z)^{p+1}}\right].$$

$$|(\Delta\Delta)| \leqslant |\max_{\xi in C} f(\xi)|\,|\text{długość } C|\cdot|z-z_0| \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Wniosek: dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.$$

Wiemy, że $f'(z)$ - też jest holomorficzna (bo wzór na φ z $p=2$)

12 Wykład (22.11.2019)

Jeżeli f - holomorficzna na $R(z_0, 0, r_2)$, to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Przykład 28. *Policzyć*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1+z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1+iz)^2(1-iz)^2}.$$

Niech $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1-iz)^2}$, f *- holomorficzna na* $K(i,1)$*. W związku z tym piszemy*

$$I = \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)}{(1+iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int\limits_{\partial K(i,1)} \frac{f(z)dz}{(z-i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i \; f'(z)\big|_{z=i}.$$

12.1 Przedłużenie analityczne (oho)

Mieliśmy np. $\sin(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i pytanie skąd my wiemy, że $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, dla $z \in \mathbb{C}$

Twierdzenie 8. *Niech* $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, f *- holomorficzna na* $\mathcal{O}$,
$z_n \in \mathcal{O}$ *- ciąg z* $\mathcal{O}$ *taki, że* $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = 0$.
Wówczas

$$\underset{r>0}{\exists} \quad \underset{z \in K(z_0,r)}{\forall} \quad f(z) = 0.$$

Dowód. przez sprzeczność ($\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$).
Załóżmy, że $\underset{z\in K(z_0,r)}{\exists} f(z) \neq 0$ i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

i wiemy, że $f(z) \neq 0$, czyli $\exists k$ takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \tag{$\star$}$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego ($\star$) jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez j. Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!}(z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli $g(z) \neq 0$. Skoro f - holomorficzna, to $g(z)$ też jest holomorficzna na $\mathcal{O}$, czyli między innymi $g(z)$ jest ciągła na $\mathcal{O}$. Ale wiemy, że $f(z_n) = 0$, czyli $g(z_n) = 0$ i g - ciągła na $\mathcal{O}$. Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \underset{z_n \to z_0}{\longrightarrow} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo $g(z_n)$ jest ciągiem samych zer, a $g(z_0) \neq 0$, bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

$\square$

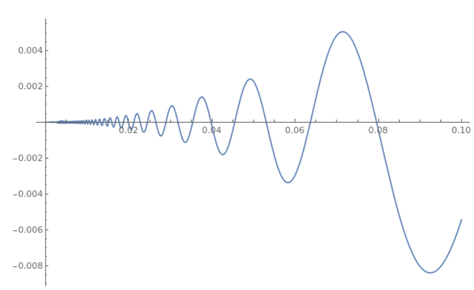
Obserwacja: Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu $a_n \to 0$,

$$f(a_n) \longrightarrow 0$$

i $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 20: $f(x)$

Twierdzenie 9. *Niech $f(z), g(z)$ - holomorficzne na $\mathcal{O}$,*

$$\underset{h\in\mathbb{N}}{\forall} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg $z_n \to z_0$. Wówczas

$$f(z) = g(z) \underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}.$$

Dowód. Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas $h(z_n) = 0$ i $z_n \to z_0$. Skoro $h(z)$ - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

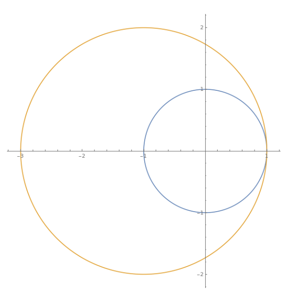
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$$

i dowodzimy tak jak wcześniej. □

Przykład 29.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \ldots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 21: f i g

Definicja 16. *Niech f - holomorficzna na U_1 i g - holomorficzna na U_2 i*

$$\underset{z_0}{\exists} \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\underset{z \in U_1 \cap U_2}{\forall} \quad f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że f jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji g.

Przykład 30. *Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka*

$$ln(z) = (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots$$

$$ln(re^{i\varphi}) = ln(r) + ln\left(e^{i\varphi}\right) = ln(r) + i\varphi$$

12.1.1 Punkty osobliwe

Definicja 17. *Punkt w którym $f(z)$ nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.*

Definicja 18. *Niech $f(z)$ - taka, że*

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

i $\varphi(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$ i $f(z)$ - holomorficzna na $\mathcal{O} - \{a\}$.
O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie a biegun rzędu N.

Pytanie: czy f może nie być holomorficzna np. na krzywej $\gamma \subset \mathbb{C}$?
Odpowiedź: gdyby f nie była holomorficzna na $\gamma \subset \mathbb{C}$, to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że $g(z) \equiv 0$ także dla $z \notin \gamma$.

13 Wykład (18.11.2019)

Przykład 31.

$$U_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{5\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

($ln(z) = ln(re^{i\varphi}) = ln(r) + i\varphi$)
Niech

$$\begin{aligned} f_1(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_1 \\ f_2(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_2 \\ f_3(z) &= lnr + i\varphi, \quad z \in U_3 \end{aligned}$$

.

Zauważmy, że dla $z \in U_1 \cap U_2$ mamy

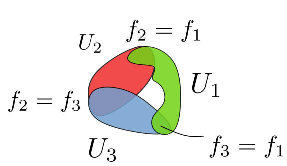
$$f_1(z) = f_2(z).$$

Mówimy zatem, że f_2 jest przedłużeniem analitycznym f_1. Dla $z \in U_1 \cap U_3$ wychodzi

$$f_1(z) = f_3(z),$$

czyli f_3 jest przedłużeniem analitycznym f_1. Ale

$$\begin{aligned} f_2(-1) &= ln(e^{i\pi}) = i\pi \\ f_3(-1) &= ln(e^{-i\pi}) = -i\pi. \end{aligned}$$



Rysunek 22: Tracimy jednoznaczność funkcji ale chyba worth it

13.1 Klasyfikacja

Niech $f(z)$ - holomorficzna na pierścieniu $R(z_0, 0, r_1)$, ($f(z)$ może nawet nie być określona w z_0).
Wiemy, że (działa wzór Laurenta):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wyróżniamy trzy przypadki:

1. (Δ) $a_n = 0$, $n < 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

   Oznacza to, że przyjmując $f(z_0) = a_0$ otrzymamy funkcję holomorficzną na $K(r_0, r)$.

2. ($\Delta\Delta$) $\underset{k<0}{\exists} \quad a_n = 0$, $n < k$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)}$$

   O punkcie z_0 mówimy, że jest punktem osobliwym, izolowanym rzędu $|k|$. (albo, że jest biegunem rzędu $|k|$, np. $\frac{\cos(z)}{z}$ ma w $z_0 = 0$ biegun rzędu pierwszego).

3. ($\Delta\Delta\Delta$)

$$\underset{k<0}{\forall} \quad \underset{n<k}{\exists} \quad a_n \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

   O punkcie z_0 powiemy, że jest punktem osobliwym (izolowanym) (albo, że $f(z)$ ma w $z = z_0$ osobliwość istotną).

Przykład 32. *(Δ)*

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

jeżeli przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to jest

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Przykład 33. *(ΔΔ)*

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z)^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{a_{-1}} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Przykład 34. *(ΔΔΔ)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Definicja 19. *Liczbę a_{-1} z rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szerege Laurenta w pierścieniu $R(z_0, 0, r)$ nazywamy **residuum** funkcji $f(z)$ w z_0 i oznaczamy*

$$a_{-1} \equiv Res\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K(z_0,r),\\ 0<r<r_1}} f(\xi) d\xi$$

Uwaga: mówimy (na razie) o osobliwościach izolowanych

Przykład 35.

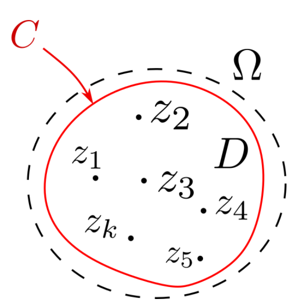
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Zauważmy, że $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \iff z_n = \frac{1}{n}$*, więc*

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| \to \infty,$$

Więc $z_0 = 0$ nie jest osobliwością izolowaną, bo

$$\underset{r>0}{\forall} \quad \underset{n}{\exists} \quad z = \frac{1}{n} \in K(0, r).$$



Twierdzenie 10. *Niech Ω - otwarty, $D \subset \Omega$, $z_1, \ldots, z_k \subset D$, $\quad z_i \cap \partial D = \{\phi\}$, $\quad i = 1, \ldots, k$, f - holomorficzna na $\Omega - \{z_1, \ldots, z_k\}$ i z_i - bieguny funkcji f.*
Wówczas

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{k} Res_{z=z_n}\{f(z)\}$$

Dowód. Rozważmy zbiór P taki, jak na rys 13-3. Zauważmy, że $f(z)$ jest na P holomorficzna. to znaczy, że

$$\int\limits_{\partial P} f(z)dz = 0 = \int \partial D f(z)dz + \sum_{n=1}^{k} \left[\int\limits_{\partial K(z_n, r_n)} f(z)dz \right],$$

czyli

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} Res_{z=z_k} f(z).$$

$\square$

Pytanie: czy umiemy znaleźć współczynnik a_{-1} bez roz funkcji f w szereg Laurenta?
Odpowiedź: Jeżeli f ma w z_0 biegun rzędu n, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \ldots$$

$$Res_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dz} \left((z - z_0)^n f(z)\right)$$

Przykład 36. *Policzyć całkę*

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a\cos(x) + a^2)}$$

Zauważmy, że

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = 1 - 2a\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + a^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{z}(z - a)(1 - az)$$

14 Wykład (25.11.2019)

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Przykład 37.

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx$.

$$1 - 2a\cos(x) + a^2 = \frac{1}{z}\left(z - az^2 - a + a^2 z\right) = \frac{1}{z}(1 - az)(z - a).$$

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{zdx}{(1 - az)(z - a)} = \int\limits_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int\limits_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int\limits_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że $(z - a)f(z)$ jest regularne w $z = a$, bo wynosi $\frac{1}{1-az}$.
Zatem

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Czyli jest ładnie i słodko
Wiemy, że jeżeli f ma biegun stopnia n w $z = z_k$, to

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wiekością skończoną, bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z-z_k)} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_k)^n}$

Pytanie 10. *Jak zachowuje się funkcja gdy z_0 jest punktem istotnie osobliwym?*

Przykład 38. *Weźmy*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z\to 0} f(z).$$

$$\lim_{r\to 0} f\left(re^{i\varphi}\right) = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\cdot e^{-i\varphi}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \lim_{r\to 0} e^{-i\cdot\frac{1}{r}\sin\varphi}\cdot e^{\frac{1}{r}\cos\varphi}.$$

A to dla $\cos\varphi > 0$ *idzie do* $+\infty$, *dla* $\cos\varphi < 0$ *idzie do* 0, *a dla* $\cos\varphi = 0$ *nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.*

Przykład 39.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx,$$

gdzie $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *takie, że*

1. $R(z)$ *nie ma biegunów na osi rzeczywistej*
2. $z\cdot R(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu r. *Policzmy*

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx.$$

Weźmy funkcję $R(z)$ *i policzmy*

$$\int_{\partial D} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{C_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k\in D} \operatorname{Res} f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} R(z)dz \to 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z)dz = \int_{0}^{\pi} re^{i\varphi} R(re^{i\varphi})d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \left|rR(re^{i\varphi})\right| \pi \to 0,$$

bo założyliśmy, że $zR(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Przykład 40. *Transformata Legendre'a geometrycznie niech np.* $f(x) = x^2$.
Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

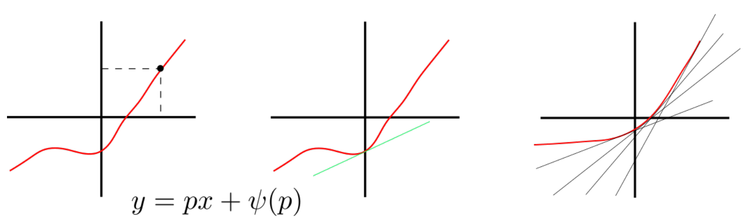
$$\begin{aligned} p &= \frac{f(x) - \psi(p)}{x} \\ px &= f(x) - px \\ \psi(p) &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right) \\ y &= px - \frac{p^2}{4}. \end{aligned}$$

I ogólnie

$$f(x) \to p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \to x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$



Przykład 41. *Funkcja* $L(q, \dot{q})$.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{-1}(p).$$

Teraz szukamy $\psi(p)$, *ale* ψ *to jest* H.

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

Przykład 42.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$, to

$$d\psi(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p\frac{\partial x}{\partial p}\right) dp,$$

ale $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$. Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

Przykład 43. *Mamy gaz i funkcję stanu $U(V, N, S)$. Możemy zrobić z niej jednoformę*

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V}dV + \frac{\partial U}{\partial N}dN + \frac{\partial U}{\partial S}dS.$$

Albo nawet dd

$$ddU = \left(\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)\right) ds \wedge dv = 0.$$

Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech $\frac{\partial U}{\partial S} = T$. Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza) $F(V, N, T) = U - T \cdot S$.

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

I później wychodzi

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$

15 Wykład (29.11.2019)

Przykład 44. *Całka*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \ldots.$$

Jak przemnożymy przez $(x^2+1)^3$ *to dostaniemy wyrażenie regularne.*

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}\right).$$

Ale

$$\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \left(-\frac{3}{(z+i)^4}\right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}(-3)(-4)\frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{2^4}\cdot\frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{2^4 i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Przykład 45.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx.$$

Taka, że $|zR(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$

np.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2} dx = J, \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}.$$

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)}{2i(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2} e^{iax} dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2} e^{-iax} dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

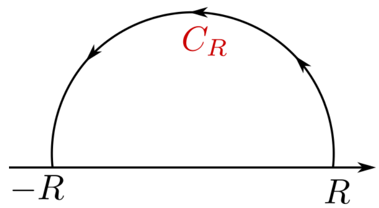
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

Twierdzenie 11. *(Lemat Jordana)*
Niech $f(z)$ - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys **??***) taka, że*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \to 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_r} f(z)e^{iaz}dz \to 0.$$



Dowód.

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaRe^{i\varphi}}d\varphi\right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}.$$

Czyli

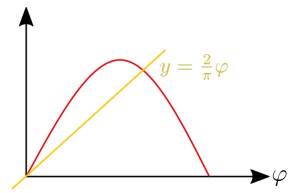
$$\left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right| R\cdot \underbrace{\int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}d\varphi}_{J}.$$

Stąd

$$J = \left|2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = 2\,\frac{-\pi}{2aR}e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right).$$

$$\int\limits_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \leqslant \sup_{p\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right|\frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□



Rysunek 23: w15-2

15.1 Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Twierdzenie 12. *(Lemat)*
Niech f - holomorficzna i ograniczona na $R(a,0,r)$. Wówczas możemy przedłużyć f do funkcji holomorficznej na $K(a,r)$. Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

Dowód. Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $H(z)$ jest holomorficzna w $z = a$.
Policzmy $H'(a)$.

$$H'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{H(a+h) - H(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h-a)^2 f(a+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 f(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} hf(a+h).$$

Ale skoro f - ograniczona na $R(a,0,r)$, to $0 \leqslant |hf(a+h)| \leqslant hM \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, czyli $H'(a) = 0$, więc $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$.

$$H(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Czyli (bo $c_0 = 0$ i $c_1 = 0$, bo $H'(0) = 0$)

$$(z-a)^2 f(z) = c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots.$$

Co oznacza, że nasz $f(z)$ da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z-a)^1 + \ldots.$$

Jak położymy $c_2 \equiv f(a)$, to wtedy f - holomorficzna na $K(a,r)$ □

Twierdzenie 13. *(Weierstrass)*
Niech f - holomorficzna na $R(a,0,r)$, i a - punkt istotnie osobliwy funkcji f. Wówczas

$$\underset{r>0}{\forall} \quad f(R(a,0,r)) = \mathbb{C}.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że f - ma w a punkt istotnie osobliwy i

$$\underset{r>0}{\forall} \; \underset{c\in\mathbb{C}}{\forall} \; \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{z}{\exists} \quad |z-a| < r \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.
Wiemy, że f ma w a punkt istotnie osobliwy oraz

$$\underset{r>0}{\exists} \; \underset{c\in\mathbb{C}}{\exists} \; \underset{\varepsilon>0}{\exists} \; \underset{z}{\forall} |z-a| < r, |f(z) - c| \geqslant \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że f ma w a punkt istotnie osobliwy.
Jeżeli

$$\underset{z}{\forall} |z-a| < r, |f(z) - c| \geqslant \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ jest ograniczona i holomorficzna na $R(a, 0, r)$. Oznacza to, że możemy przedłużyć $g(z)$ do funkcji holomorficznej na $K(a, r)$. Czyli możemy rozwinąć z w szereg Laurenta na $K(a, r)$.

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots.$$

i) Jeżeli $a_0 \neq 0$, to znaczy, że $g(a) \neq 0$, czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a) - c},$$

to znaczy, że $f(a) - c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$ i sprzecznośc, bo jeżeli f ma w a konkretną wartość a na $R(a, 0, r)$ jest holomorficzna to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

a skoro f ma w a punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z-a)^k}.$$

Jeżeli $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, to znaczy, że

$$g(z) = (z-a)^n \left(\underbrace{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}_{g_1(z)} \right).$$

Zauważmy, że $g_1(z)$ jest holomorficzna i $g_1(a) \neq 0$, możemy więc rozwinąć $\frac{1}{g_1(z)}$ w $K(a, r)$

$$\frac{1}{g_1(z)} = f_0 + f_1(z-a) + f_2(z-a)^2 + \ldots.$$

□