

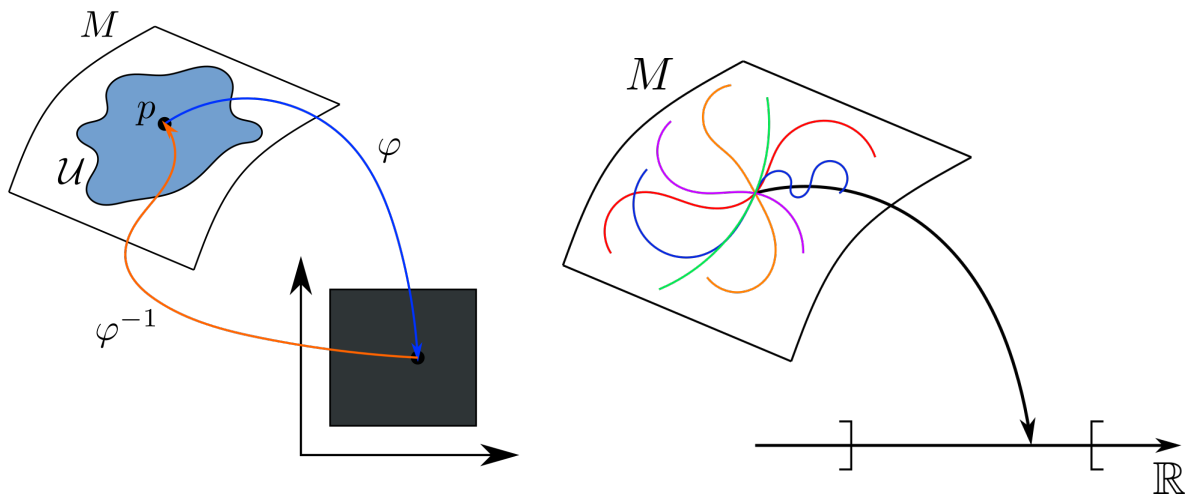
Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

4 października 2019

1 Wykład (04.10.2019)

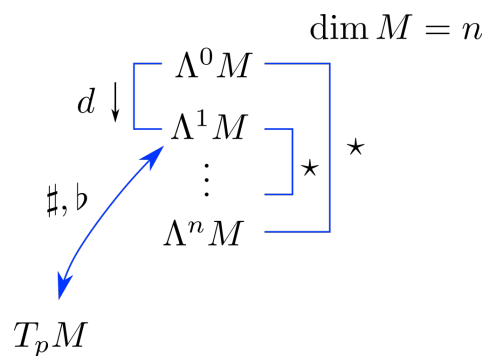
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p M$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\# = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_p M$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_p M$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\langle A^\sharp, B \rangle, \quad (g_{ij} - \text{diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle A^\sharp, B \rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \dots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B. \end{aligned}$$

Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\langle A^\sharp, B \rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B .

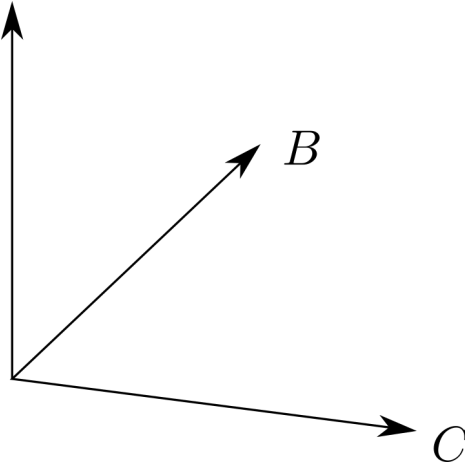
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_p M.$$

$$\begin{aligned} \langle A, B, C \rangle &= A^1 \langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \rangle + A^2 \langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \rangle + A^3 \langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \rangle = \\ &= A^1 \left[\left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, C \right\rangle \right] + A^2 \left[\left\langle \frac{dx^3}{dx^3}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, C \right\rangle \right] + A^3 \left[\left\langle \frac{dx^1}{dx^1}, B \right\rangle \left\langle \frac{dx^2}{dx^2}, C \right\rangle \right] = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 (B^2 C^3 - B^3 C^2) + A^2 (B^3 C^1 - B^1 C^3) + A^3 (B^1 C^2 - B^2 C^1) = \\ &= "A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3" = "A \cdot (B \times C) \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

(rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

1.3 Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w \mathbb{R}^3 (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B .

1. sparametryzujmy kształt S , np.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{matrix} \right\}.$$

2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} \Big|_{t=t_0}$, to

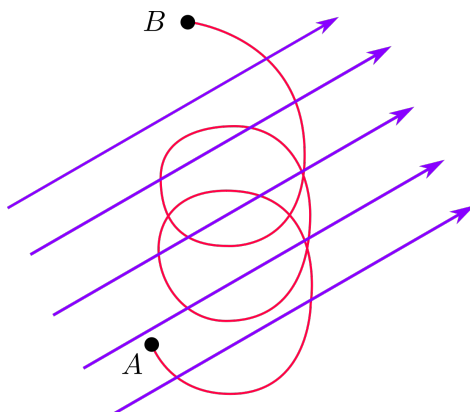
$$T_p M = \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \Big|_{t=t_0}.$$

(rys 5)

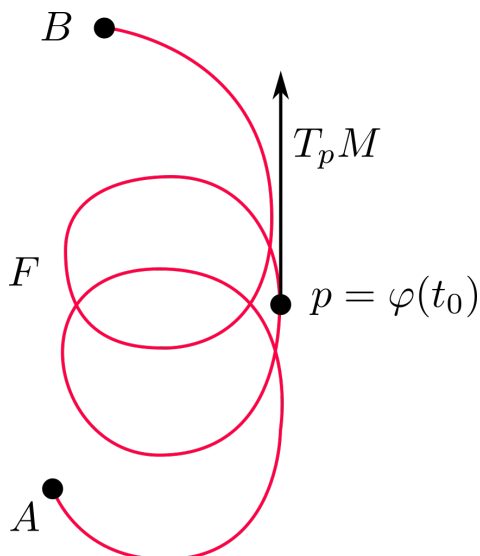
3. Niech $T_p M \ni v = -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)

Możemy policzyć np.

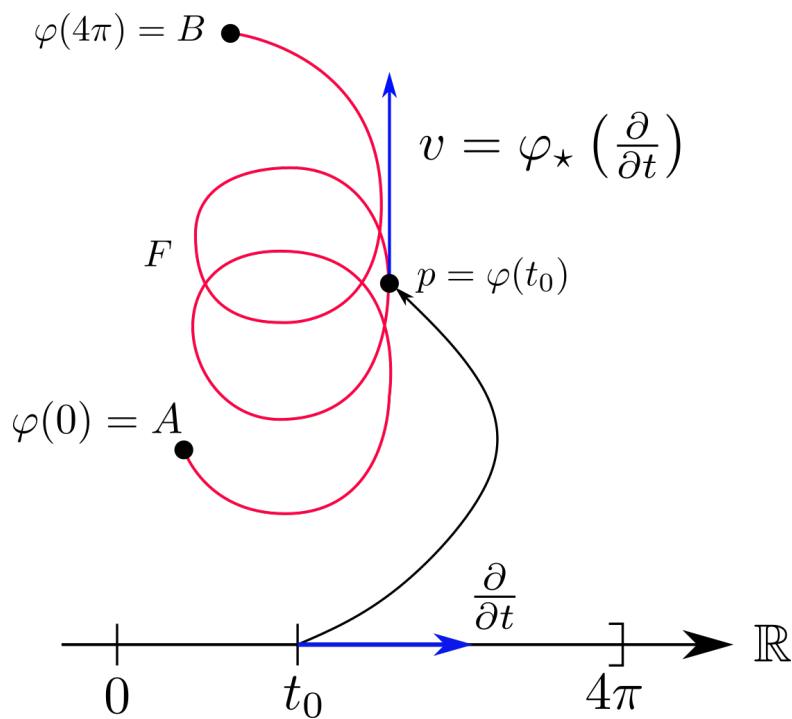
$$\begin{aligned} \int \langle F, v \rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^* F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



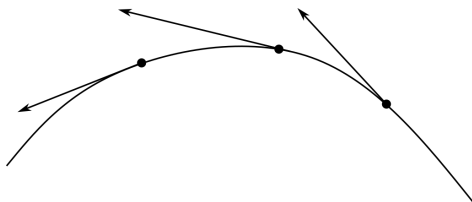
Rysunek 6

Definicja 1. Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M , $\omega \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ - parametryzacja krzywej L , czyli

$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Przykład 1. niech (rys 8)

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

i

$$\omega = ydx = \left(y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\#.$$

$$\text{Wtedy mamy } \varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, \varphi^* \omega = \begin{vmatrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$$

$$\left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^* \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = [t^2 - t]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

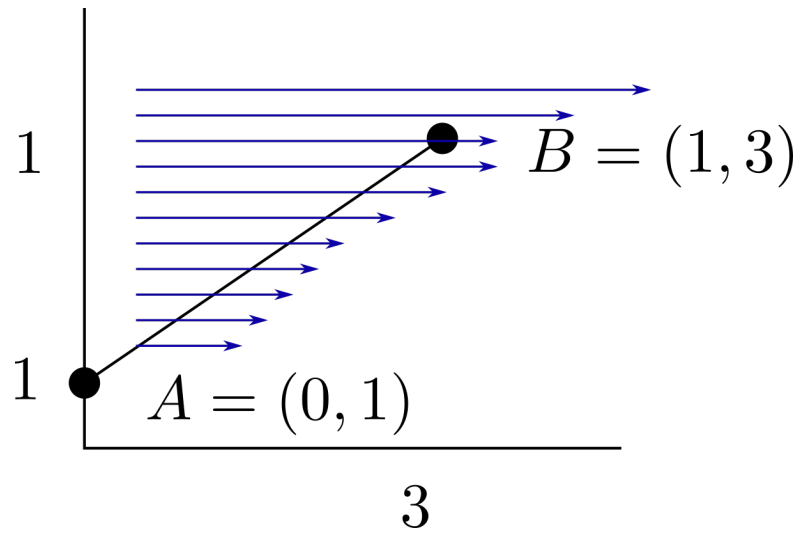
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\frac{x=2-u}{dx=-u}$ i mamy

$$\varphi^* \omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = [u^2-5u]_1^2 = -6+4 = -2.$$



Rysunek 8