$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Przykład 1.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos(x)+a^2}, \quad 0<a<1.$$

Niech $z=e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx$.

$$1-2a\cos(x)+a^2 = \frac{1}{z}\left(z-az^2-a+a^2z\right) = \frac{1}{z}(1-az)(z-a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{zdx}{(1-az)(z-a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1-az)(z-a)}\frac{1}{i}\frac{dz}{z} = \frac{1}{i}\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1-az)(z-a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1-az)(z-a)} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że $(z-a)f(z)$ *jest regularne w* $z=a$*, bo wynosi* $\frac{1}{1-az}$.
Zatem

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\frac{z-a}{(z-a)(1-az)} = \lim_{z\to a}\frac{1}{(1-az)} = \frac{1}{1-a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{1-a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Czyli jest ładnie i słodko

Wiemy, że jeżeli f ma biegun stopnia n w $z=z_k$, to

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^n f(z)$$

będzie wiekością skończoną, bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z-z_k)} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_k)^n}$

Pytanie 1. *Jak zachowuje się funkcja gdy* z_0 *jest punktem istotnie osobliwym?*

Przykład 2. *Weźmy*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z\to 0} f(z).$$

$$\lim_{r\to 0} f\left(re^{i\varphi}\right) = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\cdot e^{-i\varphi}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \lim_{r\to 0} e^{-i\cdot\frac{1}{r}\sin\varphi}\cdot e^{\frac{1}{r}\cos\varphi}.$$

A to dla $\cos\varphi>0$ *idzie do* $+\infty$*, dla* $\cos\varphi<0$ *idzie do* 0*, a dla* $\cos\varphi=0$ *nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.*

Przykład 3.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx,$$

gdzie $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *takie, że*

1. *$R(z)$ nie ma biegunów na osi rzeczywistej*

2. *$z \cdot R(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu r. Policzmy

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx.$$

Weźmy funkcję $R(z)$ i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{C_r} R(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z_k \in D} f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} R(z)dz \to 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z)dz = \int_{0}^{\pi} re^{i\varphi} R(re^{i\varphi})d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \left| rR(re^{i\varphi}) \right| \pi \to 0,$$

bo założyliśmy, że $zR(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Przykład 4. *Transformata Legendre'a geometrycznie*
niech np. $f(x) = x^2$.
Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

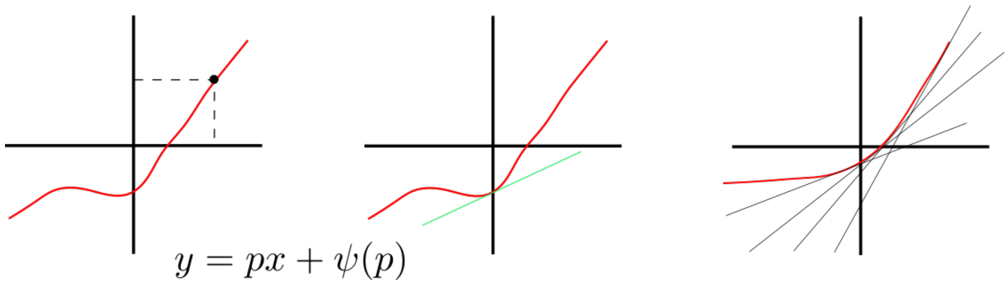
$$p = \frac{f(x) - \psi(p)}{x}$$
$$px = f(x) - px$$
$$\psi(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right)$$
$$y = px - \frac{p^2}{4}.$$

I ogólnie

$$f(x) \to p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \to x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$



Przykład 5. *Funkcja* $L(q, \dot{q})$.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{-1}(p).$$

Teraz szukamy $\psi(p)$*, ale* ψ *to jest* H*.*

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

Przykład 6.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$, to

$$d\psi(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p\frac{\partial x}{\partial p}\right) dp,$$

ale $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$. Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

Przykład 7. *Mamy gaz i funkcję stanu* $U(V, N, S)$*. Możemy zrobić z niej jednoformę*

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial N} dN + \frac{\partial U}{\partial S} dS.$$

Albo nawet dd

$$ddU = \left(\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)\right) ds \wedge dv = 0.$$

Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech $\frac{\partial U}{\partial S} = T$*. Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza)* $F(V, N, T) = U - T \cdot S$*.*

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

I później wychodzi

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$