W ostatnim odcinku

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^\sharp = \left(\overbrace{(.)\,, -(.)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots .$$

$$\int_S dA^\sharp = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^\sharp \right) \right)^\flat ,$$

ale

$$\begin{aligned}
\star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\
\star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\
\star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.
\end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^\sharp = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned}
\left(\star dA^\sharp\right)^\flat &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\
&= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Czyli dla $\vec{A}$ - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot\vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \\ D^3 \frac{1}{g_{11} g_{22}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}}$, ale

$$\left(rot\vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}} \sqrt{g_{22} g_{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^\sharp = \int_S (rot\vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int_{\partial S} A^\sharp.$$

$$\int_S \left(rot\vec{A}\right) \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

Przykład 1. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

Pytanie 1. *czym jest* $\int_{\partial V} \star A^\sharp$*?*

$$\begin{aligned}
&\star(dx^1)\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3,\\
&\star(dx^2)\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1,\\
&\star(dx^3)\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}
\star A^\sharp = {} & A^1 g_{11}\sqrt{g^{11}}\sqrt{g}g^{11}dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22}\sqrt{g^{22}}\sqrt{g}g^{22}dx^3 \wedge dx^1 + \\
& + A^3 g_{33}\sqrt{g^{33}}\sqrt{g}g^{33}dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned}$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2\sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3\sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \star A^\sharp = {} & \int A^1\sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2\sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \\
& + \int A^3\sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 dx^2,
\end{aligned}$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22} g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

Pytanie 2. *Jak wygląda* $\int_V d \star A^\sharp$*?*

$$\int_V d \star A^\sharp =$$

$$= \int_V \Big\langle \left(A^1 \sqrt{g_{22} g_{33}}\right)_{,1} + \left(A^2 \sqrt{g_{11} g_{33}}\right)_{,2} +$$

$$+ \left(A^3 \sqrt{g_{11} g_{22}}\right)_{,3}, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \Big\rangle dx^1 dx^2 dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$div \vec{A} = \star d \left(\star A^\sharp\right),$$

wiemy, że

$$\star \left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\right) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$div \vec{A} \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = div \vec{A} \quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V div \vec{A} \quad dV.$$

Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)
(rys 8-2)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt}e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

Definicja 1. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty. $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$.*
Mówimy, że f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ jeżeli $\underset{z\in\mathcal{O}}{\forall}$ istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \overset{def}{=} f'(z),$$

gdzie $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga: jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z $\mathbb{R}^2$.
Uwaga: dowolną funkcję z $\mathbb{C}$ możemy zapisać jako $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$, gdzie $z = x + iy$ a $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

Przykład 2. $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$, $z = x + iy$

Pytanie 3. *Co to znaczy różniczkowalność?*

ma istnieć granica (dla $h \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np. $h = it$, to wtedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{P(x,y+t)-P(x,y)}{it} + i\frac{Q(x,y+t)-Q(x,y)}{it} =$$
$$= \frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli f - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Przykład 3. *(jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)*

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i\underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy f jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

Przykład 4.

$$\alpha = Q(x,y)dx + P(x,y)dy,$$

gdzie P, Q są takie, że $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\wedge dy = 0.$$

Pytanie 4. *Niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, f - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach*

$$P_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad P(x,y) = c\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$Q_d = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad Q(x,y) = d\in\mathbb{R}\right\}.$$