Z ostatniego odcinka wiemy, że

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta.$$

$$\left\langle \Delta\left(\frac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle = -4\pi \left\langle \delta, \varphi \right\rangle.$$

$$\Delta \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|} = -4\pi\delta(\overline{r} - \overline{r_0}).$$

Były też kiedyś równania Maxwella

$$div(E) = \rho(\overline{r})$$
$$E = -grad(\varphi)$$
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$rot(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

Jak to złożymy, to będzie

$$\Delta\varphi = -\rho(x).$$

$$\int\limits_V (U\Delta V - V\Delta U)\, dV = \int\limits_{\partial V} \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS.$$

$$V = \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|}.$$

$$U = \varphi(\overline{r}).$$

Czyli

$$\int\limits_V \varphi(\overline{r})\Delta\frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|} d\overline{r} - \int\limits_V \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|}\Delta\varphi d\overline{r} = \int\int\limits_{\partial V} \left(\varphi(\overline{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|} - \frac{1}{|r - r_0|}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS.$$

$$-4\pi\int\limits_V \varphi(r)\delta(\overline{r} - \overline{r_0})d\overline{r} - \int\limits_V \frac{-\rho(\overline{r})}{|\overline{r} - \overline{r_0}|} d\overline{r} = \int\limits_{\partial V} \left(\varphi(\overline{r})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|}\right) - \frac{1}{|r - r_0|\frac{\partial\varphi}{\partial n}}\right) dS.$$

$$\varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\rho(\overline{r})}{|\overline{r} - \overline{r_0}|} d\overline{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial V} \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi(r)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\overline{r} - \overline{r_0}|}\right) dS.$$

Druga całka znika czasami w $V \to \infty$ i wtedy zostaje Prawo Coulomba.

Równanie $xT = 0$

$$xT = 0, \quad T \in D^\star.$$

To znaczy, że

$$\forall_{\varphi \in D} \langle xT, \varphi \rangle = 0.$$

Zauważmy, że

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0.$$

Oznacza to, że dystrybucja T zeruje się na wszystkich funkcjach postaci $x\varphi$, $\varphi \in D$.

Pytanie 1. *Czy oznacza to, że T zeruje się na każdej funkcji, która w $x = 0$ wynosi zero?*

Załóżmy, że T istnieje i

$$\exists_{\psi \in D} \langle T, \psi \rangle = 0.$$

Oznacza to, że

$$\left\langle xT, \frac{\psi}{x} \right\rangle = 0.$$

Czyli jeżeli $\psi \in D$, to $\frac{\psi}{x}$ też musi należeć do D.

Pytanie 2. *Ile wynosi $\psi(0)$?*

Gdyby $\psi(0) \neq 0$, to wtedy $\frac{\psi(x)}{x}$ nie byłoby ograniczone w $x = 0$, czyli $\frac{\psi}{x} \notin D$ Zauważmy, że

$$\frac{\psi(x)}{x} = \int_0^1 \psi'(xt) dt.$$

Czyli jeżeli $\psi \in D$, to znaczy, że $\psi' \in D$. Niech $\varphi(x)$ - dowolne $\in D$ i niech $\alpha(x)$ takie, że $\alpha(0) = 1$, $\alpha \in D$. Wówczas

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \alpha(x)\varphi(0) + \alpha(x)\varphi(0).$$

Wówczas

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x) - \alpha(x)\varphi(0) \rangle + \langle T, \alpha(x)\varphi(0) \rangle.$$

to pierwsze daje zero, bo liczymy T na funkcji, która w zerze daje zero. Zatem

$$\forall_{\varphi \in D} \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha(x) \rangle \varphi(0).$$

Czyli $\langle T, \varphi \rangle = C_\alpha \varphi(0) = \langle C_\alpha \delta, \varphi \rangle$, czyli $T = C_\alpha \delta$.

Pytanie 3. *Czy C_α rzeczywiście zależy od wyboru funkcji $\alpha(x)$, czy jest stałą uniwersalną?*

Transformata Fouriera dystrybucji

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

$$T \in S^\star, \underset{\varphi \in S}{\forall}.$$

Definicja 1. *(Przestrzeń Schwartza)*
Przestrzenią Schwartza (S) nazywamy zbiór takich $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, że

1. $\underset{L,m \geqslant 0}{\forall} x^L \varphi^{(m)}$ *- ograniczone (w sensie $\|.\|$)*
2. $\underset{L,m \geqslant 0}{\forall} \left(x^L \varphi\right)^{(m)}$ *jest całkowalna*

Motywacja:

$$\mathcal{F}(\varphi') \sim x\mathcal{F}\varphi$$

$$\mathcal{F}'(x\varphi) \sim \mathcal{F}'(\varphi).$$

Definicja 2. *Przestrzeń dualną do S oznaczamy, przez $S^\star$, odwzorowania liniowe z $S^\star$ nazywamy dystrybucjami temperowanymi.*

Policzmy nareszcie $\mathcal{F}\delta$

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k \cdot 0} \varphi(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(k) dk = \langle 1, \varphi \rangle .$$

Zatem $\mathcal{F}\delta = 1$. A ile wynosi $\mathcal{F}\delta(x-a)$?

$$\langle \mathcal{F}\delta(x-a), \varphi \rangle = \langle \delta(x-a), \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k a} \varphi(k) dk = \left\langle e^{-2\pi i x a}, \varphi \right\rangle .$$

Obserwacja:

$$\ddot{f} + \omega^2 f = \delta.$$

$$\mathcal{F}\left(\ddot{f} + \omega^2 f = \delta\right).$$

$$\left(-2\pi i t\right)^2 \mathcal{F}f + \omega^2 \mathcal{F}f = \mathcal{F}\delta.$$

$$-4\pi^2 t^2 \mathcal{F}f + \omega \mathcal{F}f = 1.$$

$$\hat{f} = \frac{1}{\omega^2 - 4\pi^2 t^2}.$$

Pytanie 4. *A ile to $\mathcal{F}1$?*

$$\mathcal{F}1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i k x} dk = -\frac{1}{2\pi i x} e^{-2\pi i k x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = ????.$$

Tego napisu nie wolno traktować w sensie transformaty funkcji. A dystrybucji?
Wniosek: $\mathcal{F}1$ należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym, czyli

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

Pamiętamy, że

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}\right) = (2\pi i x)^n \mathcal{F}(f).$$

Czyli

$$\mathcal{F}(f') = 2\pi i x \mathcal{F}(f).$$

Jeżeli $f = 1$, to

$$0 = \mathcal{F}(0) = 2\pi i x \mathcal{F}(1).$$

Czyli $x\hat{1} = 0$. Wiemy, że jeżeli $xT = 0$, to

$$T = C_\alpha \delta.$$

Czyli

$$\hat{1} = C_\alpha \delta.$$

Pozostało policzyć ile to jest C_α. Wiemy, że

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

$$\langle C_\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

$$C_\alpha \langle \delta, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

W szczególności dla

$$\varphi = e^{-ax^2}, \quad \mathcal{F}(\varphi) = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right).$$

Jeżeli $\varphi = e^{-x^2}$, $a = 1$, $\mathcal{F}(\varphi) = e^{-(\pi^2 x^2)}\sqrt{\pi}$, to

$$C_\alpha \left\langle \delta, e^{-x^2} \right\rangle = \sqrt{\pi} \left\langle 1, e^{-\pi^2 x^2} \right\rangle .$$

$$C_\alpha e^0 = \sqrt{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-\pi^2 x^2} dx.$$

$$C_\alpha = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\pi^2}} = 1.$$

$$\mathcal{F}1 = \delta \implies \mathcal{F}\delta = 1.$$

Definicja 3.

$$\check{f}(x) \stackrel{def}{=} f(-x).$$

Twierdzenie 1.

$$\hat{\hat{f}}(x) = \check{f}(x).$$

Dowód.

$$\hat{\hat{f}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dke^{-2\pi ikx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-2\pi isk} f(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-2\pi ik(x+s)} f(s) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dke^{-2\pi ik(x+s)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s) \left\langle e^{-2\pi ik(x+s)}, 1 \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dsf(s)\delta(x+s) = f(-x).$$

$\square$

Pytanie 5. *A ile to będzie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixn}?$$

No tyle

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(x-n).$$