

0.1 W ostatnim odcinku

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^{\sharp} = \left(\overbrace{(\cdot), -(\cdot)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots$$

$$\int_S dA^{\sharp} = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^{\sharp} \right) \right)^{\flat},$$

ale

$$\begin{aligned} \star(dx^2 \wedge dx^3) &= g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1, \\ \star(dx^3 \wedge dx^1) &= g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2, \\ \star(dx^1 \wedge dx^2) &= g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Więc

$$\star dA^{\sharp} = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned} (\star dA^{\sharp})^{\flat} &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Czyli dla \vec{A} - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot \vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g^{22} g^{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{33}}} \\ D^3 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}}$, ale

$$\left(rot \vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{22} g^{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^{\sharp} = \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A^{\sharp} &= \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \\ \int_S dA^{\sharp} &= \int_{\partial S} A^{\sharp}. \\ \int_S (rot \vec{A}) \cdot \vec{n} ds &= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL. \end{aligned}$$

Przykład 1. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^{\sharp} = \int_V d \star A^{\sharp}.$$

Pytanie 1. *czym jest $\int_{\partial V} \star A^{\sharp}$?*

$$\begin{aligned} \star(dx^1) \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3, \\ \star(dx^2) \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1, \\ \star(dx^3) \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\star A^{\sharp} = A^1 g_{11} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1 + A^3 g_{33} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3 + \int A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 dx^1 + \int A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 dx^2,$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

Pytanie 2. Jak wygląda $\int_V d \star A^\sharp$?

$$\int_V d \star A^\sharp = \int_V \left\langle (A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}})_{,1} + (A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}})_{,2} + (A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}})_{,3}, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^1 dx^2 dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \star d (\star A^\sharp),$$

wiemy, że

$$\star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$\operatorname{div} \vec{A} \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \quad dx^1 dx^2 dx^3 = \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \quad dV.$$

0.2 Analiza Zespolona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)

(rys 8-2)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt} e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

Definicja 1. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, \mathcal{O} - otwarty. $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$.

Mówimy, że f jest holomorficzna na \mathcal{O} jeżeli $\forall_{z \in \mathcal{O}}$ istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z),$$

gdzie $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga: jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z \mathbb{R}^2 .

Uwaga: dowolną funkcję z \mathbb{C} możemy zapisać jako $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$, gdzie $z = x + iy$ a $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

Przykład 2. $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$, $z = x + iy$

Pytanie 3. Co to znaczy różniczkowalność?

ma istnieć granica (dla $h \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ale jeżeli np. $h = it$, to wtedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x, y+t) - P(x, y)}{it} + i \frac{Q(x, y+t) - Q(x, y)}{it} = \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Czyli jeżeli f - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned}$$

Przykład 3. (jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i \underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy f jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

Przykład 4.

$$\alpha = Q(x, y)dx + P(x, y)dy,$$

gdzie P, Q są takie, że $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

Pytanie 4. Niech $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, P(x, y) = c \in \mathbb{R}\}.$$

$$Q_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, Q(x, y) = d \in \mathbb{R}\}.$$