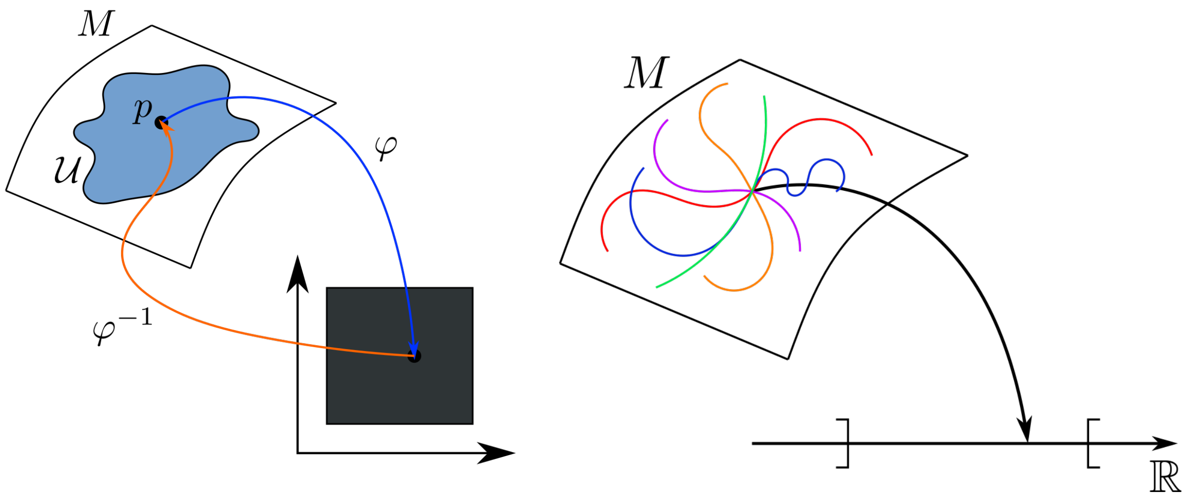
Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

28 października 2019

1 Wykład (04.10.2019)

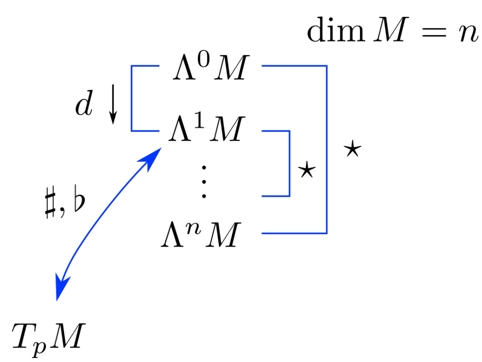
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \ldots & \alpha_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \ldots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_pM$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_pM$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\left\langle A^\sharp, B \right\rangle, \quad (g_{ij} \text{ - diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned}\left\langle A^\sharp, B \right\rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \ldots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B.\end{aligned}$$

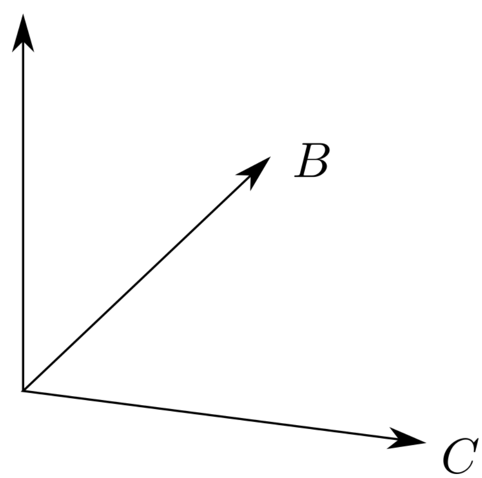
Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\left\langle A^\sharp, B \right\rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B.
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_pM.$$

$$\begin{aligned}\langle A, B, C \rangle &= A^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \right\rangle + A^2 \left\langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \right\rangle + A^3 \left\langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \right\rangle = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} \left\langle dx^2, B \right\rangle & \left\langle dx^3, B \right\rangle \\ \left\langle dx^2, C \right\rangle & \left\langle dx^3, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} \left\langle dx^3, B \right\rangle & \left\langle dx^1, B \right\rangle \\ \left\langle dx^3, C \right\rangle & \left\langle dx^1, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} \left\langle dx^1, B \right\rangle & \left\langle dx^2, B \right\rangle \\ \left\langle dx^1, C \right\rangle & \left\langle dx^2, C \right\rangle \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \left(B^2 C^3 - B^3 C^2 \right) + A^2 \left(B^3 C^1 - B^1 C^3 \right) + A^3 \left(B^1 C^2 - B^2 C^1 \right) = \\ &\text{"} = \text{"} A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3 \text{"} = \text{"} A \cdot (B \times C) \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|.\end{aligned}$$

(rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

1.3 Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w $\mathbb{R}^3$ (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B.

1. sparametryzujmy kształt S, np.

$$S = \left\{ \begin{matrix} x = \cos(t) \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{matrix} \right\}.$$

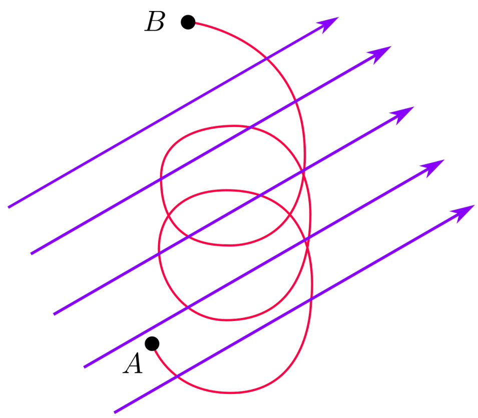
2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \left.\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix}\right|_{t=t_0}$, to

$$T_pM = \left.\left\langle \begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle\right|_{t=t_0}.$$

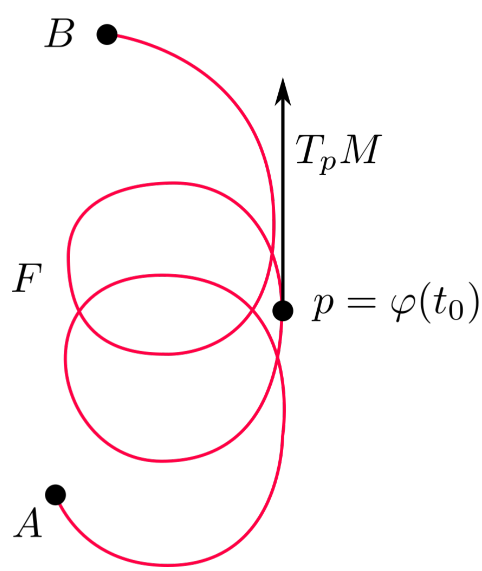
(rys 5)

3. Niech $T_pM \ni v = -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)
Możemy policzyć np.

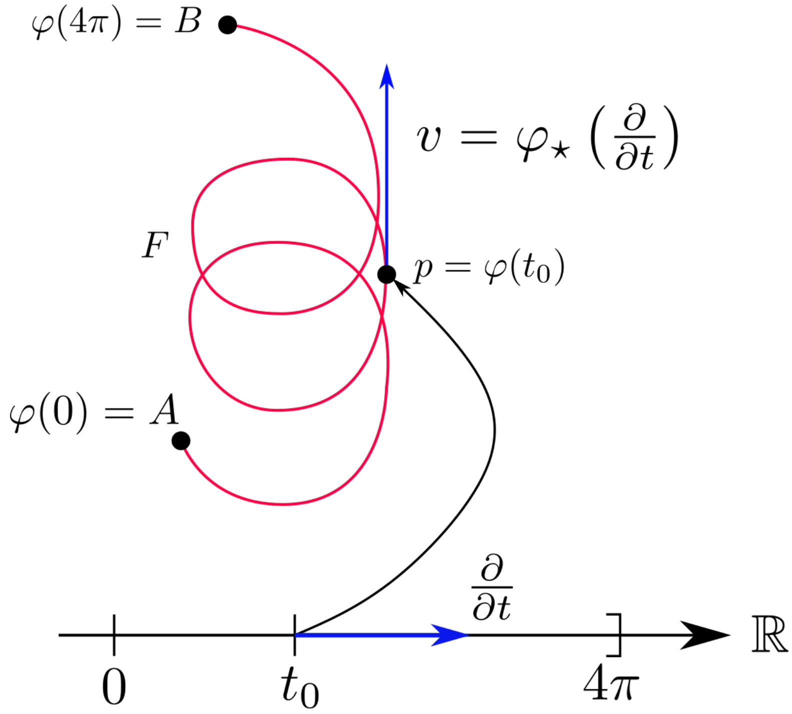
$$\begin{aligned}\int \langle F, v\rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^\star F, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt.\end{aligned}$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



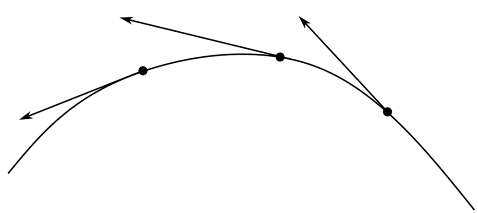
Rysunek 6

Definicja 1. *Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M, $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a,b] \to M$ - parametryzacja krzywej L, czyli*

$$L = \{\varphi(t), t \in [a,b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Przykład 1. *niech (rys 8)*

$$C_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leqslant t \leqslant 2 \right\}$$

i

$$\omega = y dx = \left(y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\sharp.$$

Wtedy mamy $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$, $\varphi^\star \omega = \quad \left| \begin{matrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{matrix} \right| = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t - 1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = \left[t^2 - t\right]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leqslant u \leqslant 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

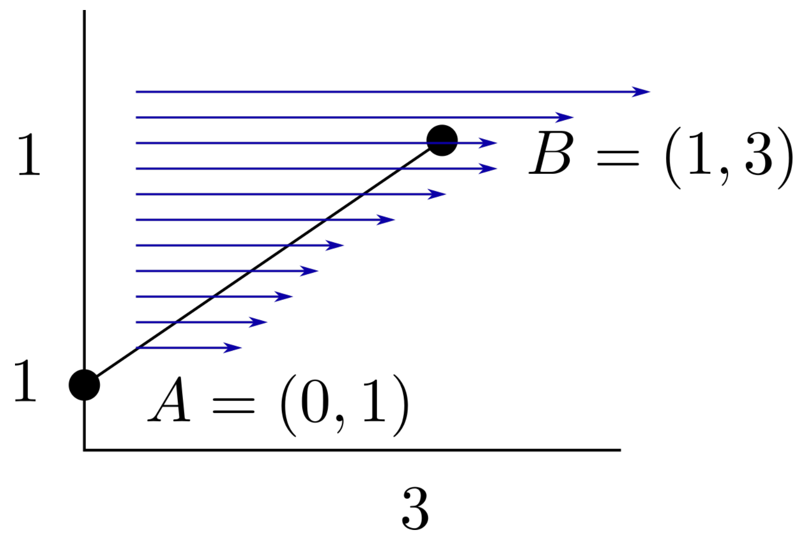
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\begin{array}{c} x = 2 - u \\ dx = -u \end{array}$ *i mamy*

$$\varphi^\star \omega = (5 - 2u)(-du) = (2u - 5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u - 5)du = \left[u^2 - 5u\right]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



Rysunek 8

2 Wykład (07.10.2019)

2.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywą

$$L : \{[a,b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

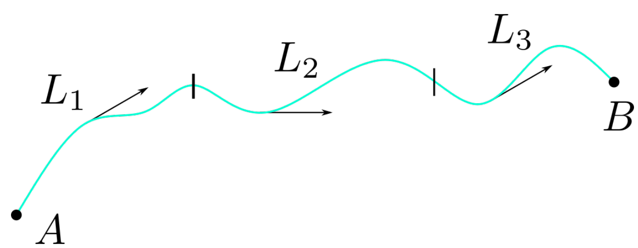
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$,

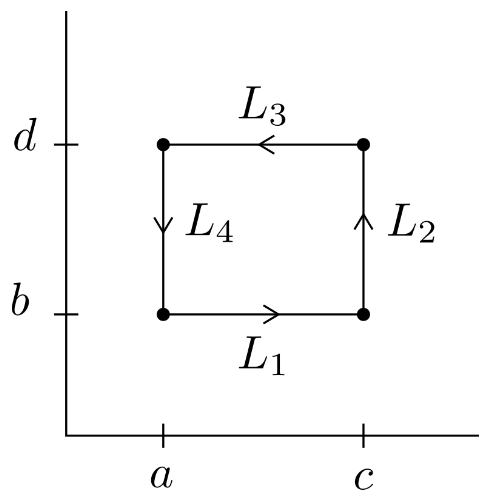
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 1)



Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. *(rys 2)*



Rysunek 10: $\dim M = 2$

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x,b), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_2 = \{(c,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$
$$L_3 = \{(x,d), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_4 = \{(a,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$

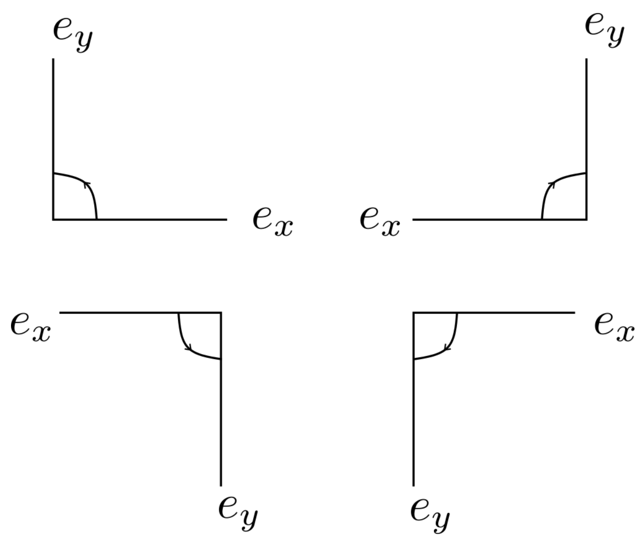
$$\begin{aligned}\int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^\star, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^c A(x,b)dx + \int_b^d B(c,y)dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x,d)dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a,y)dy.\end{aligned}$$

Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

(rys 3)

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_pM \to T_pM$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).
$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.

(rys 4)



Rysunek 12: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 2. *Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera.*
Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V.

Definicja 3. *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{bmatrix}, \quad e_3 = \ldots.$$

Definicja 4. *Niech M - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i $S = \{[a,b] \times [c,d] \ni (t_1, t_2) \to \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{zgodne\ z\ orientacją} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. *do 7:*
weźmy $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ i obliczmy $\int\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix}\right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\int\int_P d\omega &= \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\ &= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx\,(A(x,d) - A(x,c))\right] = \\ &= \int_a^b A(x,c)dx + \int_c^d B(b,y)dy - \int_a^c A(x,d)dx - \int_c^d B(a,y)dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{l_4} \omega.\end{aligned}$$

Czyli

$$\int\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

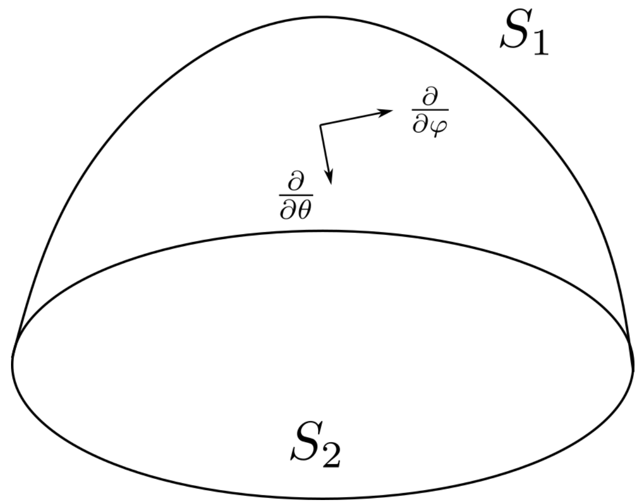
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. *niech* $S = S_1 \cup S_1$, *gdzie*

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\right\}, \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\right\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 13: Tak to wygląda

Definicja 5. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* (U_1, φ_1), *że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$, *odwzorowanie* $\det\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)' > 0$.

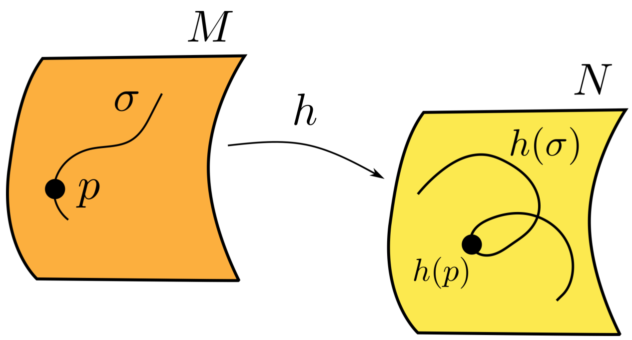
Definicja 6. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*

Definicja 7. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

3 Wykład (11.10.2019)

3.1 Przypomnienie

(rys 1)
Dla $v \in T_pM$, jest



Rysunek 14: Przypomnienie

$$h_\star v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t))\sigma'(t),$$

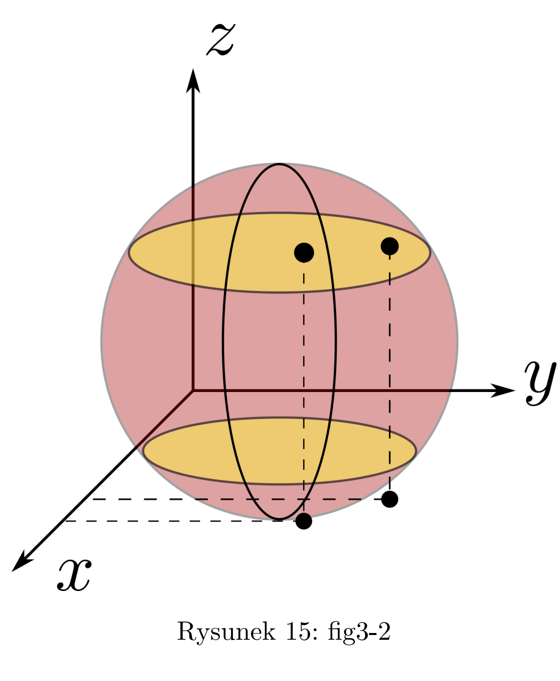
czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt}\sigma(t)$,

$$h_\star v = \underbrace{h'(\sigma(t))}_{\text{macierz kwadratowa}} v.$$

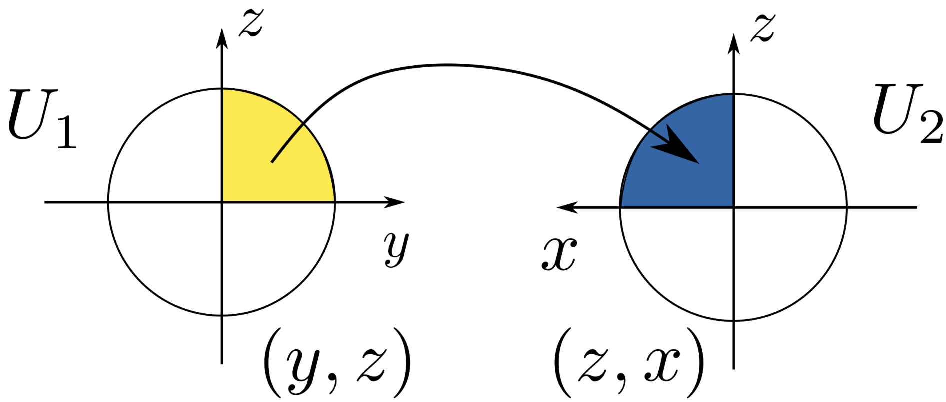
Przykład 5. *Niech*

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$
$$U_1^+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_1^- = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^- = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^- = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\right\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



Rysunek 15: fig3-2



Rysunek 16: fig3-3

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z \qquad\qquad (z, x) \to h(z, x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{bmatrix}$$

$$(x > 0, z > 0).$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{1 - x^2 - z^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1 - x^2 - z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) & \frac{\partial}{\partial x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

Przykład 6. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R. (rys 4)*

$$x(\theta, t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\theta$$
$$y(\theta, t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta$$
$$z(\theta, t) = \left(t\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' i t'.

$$x'(\theta', t') = \left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\cos\theta'$$
$$y'(\theta', t') = -\left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right)\sin\theta'$$
$$z'(\theta', t') = t'\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right).$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$W_1 = \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\}$$
$$W_2 = \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Dla W_1

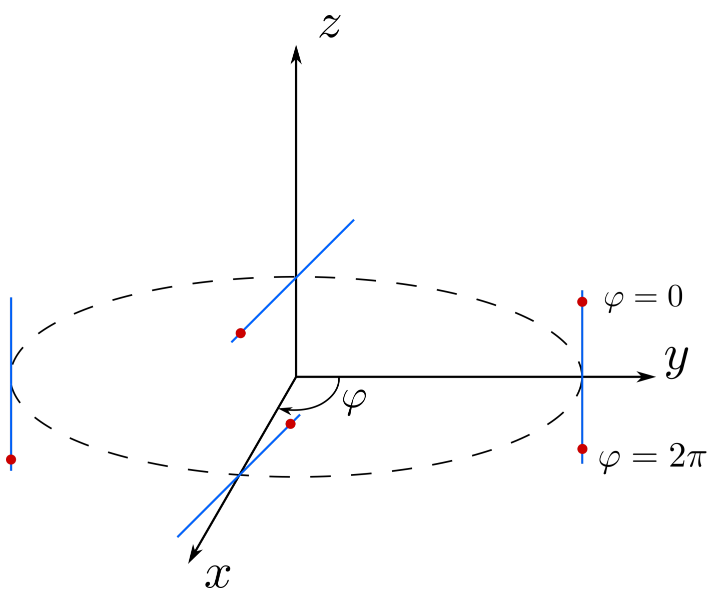
$$\begin{cases} \theta' & = \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' & = -t, \end{cases}$$

dla W_2

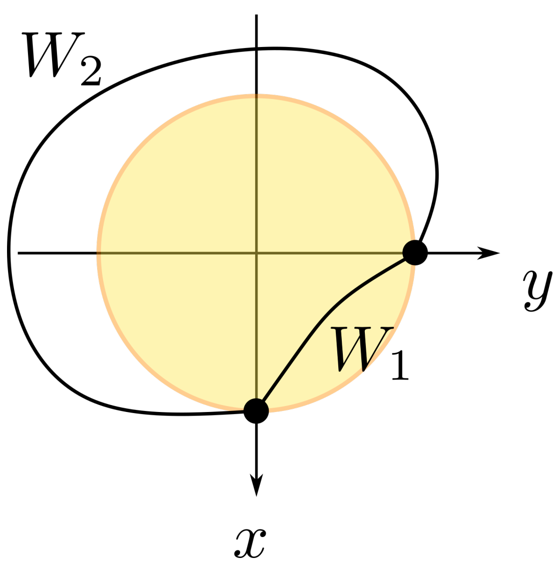
$$\begin{cases} \theta' & = \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' & = t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi_1'(\theta,t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \varphi_2'(\theta,t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$
$$\det\varphi_1'<0\quad \det\varphi_2'>0.$$



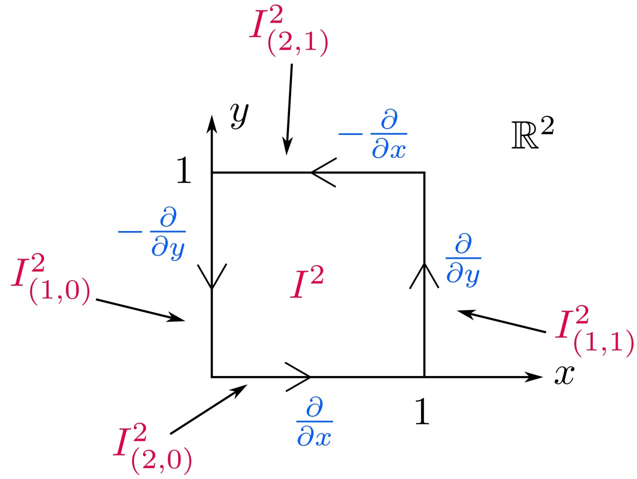
Rysunek 17: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 18: Obszary wspólne

3.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

1. Niech $I^n = [0,1]\times[0,1]\times\ldots\times[0.1]\in\mathbb{R}^n$ (np. rys 6)
   Wprowadźmy oznaczenia:
   $$I^n_{(i,0)} := \left\{\left(x^1,\ldots,x^{i-1},0,x^{i+1},\ldots,x^n\right)\in\mathbb{R}^n, 0\leqslant x^j\leqslant 1\right\}.$$
   $$I^n_{(i,1)} := \left\{\left(x^1,\ldots,x^{i-1},1,x^{i+1},\ldots,x^n\right)\in\mathbb{R}^n, 0\leqslant x^j\leqslant 1\right\}.$$
   (odpowiednio: ścianka tylna i przednia)
   $$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)}\text{''} = \text{''}I^2_{(1,1)}\text{''} + \text{''} - I^2_{(2,1)}\text{''} + \text{''} - I^2_{(1,0)},$$
   (tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
   - ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.
   Zdefiniujmy "zbiór"
   $$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$



Rysunek 19: fig3-6

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n.

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned}\omega = & f_1(x^1,\dots,x^n)dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1,\dots,x^n)dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_i(x^1,\dots,x^n)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_n(x^1,\dots,x^n)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1,\dots,x^n)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^n} \omega = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \left\langle f(x^1,\dots,x^n)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \\ & dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\ & = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1,\dots,x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n & wp.p.. \end{cases}\end{aligned}$$

4 Wykład (14.10.2019)

4.1 Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)

Dowód. mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$. Wtedy dla $x = (x^1, \ldots, x^n)$ i $d\tilde{x} = dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n$

$$\begin{aligned}
&\int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\
&= \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots x^n) d\tilde{x} = \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n) \overset{(\star)}{=} & wp.p. \end{cases} \\
&\overset{(\star)}{=} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^n f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n).
\end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\
&= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{j+1}, \ldots, x^n) = \\
&= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) + (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n = \\
&= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1, \ldots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^i \ldots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \ldots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\cdot \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right] \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \ldots \int_0^1 dx^i \ldots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\cdot \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right] = \\
&= (-1)^{i+1} \int_{I^n} \left[f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n) \right].
\end{aligned}$$

$$LHS = RHS.$$

□

Uwaga: Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek I^n. Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

Przykład 7. *Niech* $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ *i* $f \in \Lambda^0([a, b])$. *Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak (xD):*

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_{[a,b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

Przykład 8. *Niech* γ *- krzywa na* M, $\dim M = 3$, $f \in \Lambda^0 M$.

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Przykład 9. *$\dim M = 2$, niech $\alpha = xydx + x^2dy$. Policzmy $\int_{\partial S}\alpha$.*

$$\int_{\partial S}\alpha = \int_{C_1}\alpha + \int_{C_2}\alpha + \int_{C_3}\alpha,$$

ale

$$\int_{C_1}\left\langle \varphi^\star\alpha, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle = 0,$$

φ - parametryzacja C_1. Jeżeli weźmiemy sobie

$$\int_{C_3}\left\langle \varphi_3^\star\alpha, -\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = 0,$$

φ_3 - parametryzacja C_3.

$$C_2 = \left\{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\},$$

zatem $\varphi_2^\star\alpha$ przy $x = \cos\theta \implies dx = -\sin\theta d\theta$, $y = \sin\theta \implies dy = \cos\theta d\theta$, mamy

$$\varphi_2^\star\alpha = \cos\theta\sin\theta(-\sin\theta d\theta) + (\cos^2\theta)\cos\theta d\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta.$$

$$\int_{\partial S}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\left\langle \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa: $\int_{\partial S}\alpha = \int_S d\alpha$.

$$d\alpha = xdy\wedge dx + 2xdx\wedge dy = xdx\wedge dy.$$

$$\int_\square \left\langle xdx\wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx\cdot x\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(-1)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Przykład 10. *Niech $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Lambda^1(M)$, $\partial K = \left\{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, 0 \leqslant \theta, 2\pi\right\}$*

$$\int_{\partial K}\alpha = \int_0^{2\pi}\left\langle \varphi^\star\alpha, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^\star\alpha = -\sin\theta(-\sin\theta)d\theta + \cos\theta\cos\theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K}\alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$d\alpha = \left[\left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right)dy\wedge dx + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy\right] = \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy = 0$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech $\alpha = x^2dx + xydy + 2dz$. α jest potencjalna, jeżeli

$$\underset{\eta\in\Lambda^0 M}{\exists} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

Definicja 8. *Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$,*

$$i_v : T_pM \times \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1}M$$

zdefiniowana następująco:

1. *$i_v f = 0$, jeżeli $f \in \Lambda^0 M$*
2. *$i_v dx^i = v^i$, jeżeli $v = v^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + v^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \ldots + v^n\frac{\partial}{\partial x^n}$*
3. *$i_v(\omega\wedge\theta) = i_v(\omega)\wedge\theta + (-1)^{st\omega}\omega\wedge i_v(\theta)$.*

Operację i_v nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \stackrel{ozn}{=} v(odwroconeL)\omega.$$

Obserwacja: $i_v(i_v\omega) = 0$ (w domu)

Przykład 11. *Niech* $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v(odwroconeL)\omega = \langle dx, v\rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v\rangle + \langle dz, v\rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v\rangle .$$

Przykład 12.

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e\frac{\partial}{\partial t} + ev^x\frac{\partial}{\partial x} + ev^y\frac{\partial}{\partial y} + ev^z\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j(odwroconeL)F = ?.$$

5 Wykład (18.10.2019)

Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = \text{"}e \cdot E + e(v \times B)\text{"}.$$

Przykład 13. *Niech* $X = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Niech M *- rozmaitość,* $\dim M = 2$. *Co oznacza napis*

$$x \lrcorner \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t)\frac{\partial}{\partial x} + p(t)\frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dx = dH,$$

a teraz coś takiego:

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2 dx.$$

To wypluje na wyjściu równania ruchu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p}(t) = -kx$$
$$m\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

5.1 Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:
(rys 5-1) Niech $I = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x, y) = |x - y|$) czy I jest otwarty w $\mathbb{R}$? *chyba nie.*
Niech $I = [0, 1[\subset [0, 2]$, czy I jest otwarty w $[0, 2]$? *chyba tak.*

$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

Definicja 9.

$$\mathbb{R}^m_+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geqslant 0\right\},$$
$$\mathbb{R}^m_0 = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Niech M *- rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości* M *składa się z takich map* φ_α*, że*

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m_+,$$

($\mathcal{O}$ *- otwarty w* M*), gdzie* $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ *- otwarte w* $\mathbb{R}^m_+$*, to* M *nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli* $p \in M$ *i* $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^m_0$*, to mówimy, że* p *należy do brzegu* M*.*
(brzeg rozmaitości M *oznaczamy przez* ∂M*)*

Pytanie 1. *Co to jest różniczkowalność* φ^{-1}*, jeżeli dziedzina* $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}^m_+$*, który nie jest otwarty w* $\mathbb{R}^m$*?*

Mówimy wówczas tak:

Definicja 10. *Niech* $U \subset \tilde{U}$*,* $\tilde{U}$ *- otwarty w* $\mathbb{R}^m$*,* U *- otwarty w* $\mathbb{R}^m_+$*.* φ *jest klasy* $\mathcal{C}^r$ *na* U*, jeżeli istnieje* $\tilde{\varphi}$ *klasy* $\mathcal{C}^r$ *na* $\tilde{U}$ *i* $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$*.*

(rys 5-3)

Pytanie 2. *Czym jest* ∂S*, jeżeli* S *- okrąg?*

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

$$\text{sześcian} \xrightarrow{\partial} \text{boki sześcianu} \xrightarrow{\partial} \text{rogi sześcianu},$$

$$\text{kula} \xrightarrow{\partial} \text{sfera} \xrightarrow{\partial} \{\phi\}.$$

Obserwacja:
Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętymi do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m - 1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 11. *Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ - baza $T_p \partial M$, wybierzmy orientację na M (rys 5-5). Niech σ - krzywa na M taka, że*

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^m_+,$$

niech $\overline{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M, jeżeli orientacja $\langle \overline{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ jest zgodna z orientacją M.

(rys 5-6) Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \to T$ - parametryzacja T oraz $\varphi_2 : U_2 \to T$ - parametryzacja T. Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\underset{h}{\exists} h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^\star \omega = \int_{U_2} h^\star \left(\varphi_1^\star \omega\right) \underset{(\Delta)}{\overset{?}{=}} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^\star \omega = \int_{U_2} \varphi_2^\star \omega.$$

(Δ) - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^\star \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_\star v \rangle = \langle k^\star \omega, L_\star v \rangle = \langle L^\star k^\star \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt} \overline{\sigma}$ to

$$(kL)_\star v = \frac{d}{dt} \left(k \left(L \left(\overline{\sigma}(t)\right)\right)\right) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_\star L_\star v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

5.2 Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.
Obserwacja:

$$\eta = arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$

6 Wykład (21.10.2019)

Definicja 12. *Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathcal{O}$ nazywamy ściągalnym, jeżeli istnieje $p \in \mathcal{O}$ i odwzorowanie $h(p,x,t)$ takie, że*

$$\underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \begin{matrix} h(p,x,0) = p \\ h(p,x,1) = x \end{matrix}, \quad \underset{t\in[0,1]}{\forall} h(p,x,t) \in \mathcal{O}, \quad h(p,x,t) \text{ - ciągła.}$$

Twierdzenie 1. *(rys 6-1) (Lemat Poincare)*
Niech

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \text{ - zbiór ściągalny} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \underset{\eta}{\exists}, d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{pmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathcal{O}$ jest zbiorem gwiaździstym, czyli

$$\underset{p\in\mathcal{O}}{\exists} \quad \underset{x\in\mathcal{O}}{\forall} \quad \begin{pmatrix} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{pmatrix} \left(\text{jest zawarty w } \mathcal{O}\right).$$

Obserwacja: gdyby istniał operator $T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \to \Lambda^{p-1}(\mathcal{O})$, $\quad p = 1, 2, \ldots, n-1$,taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byloby prawdziwe. (bo dla $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$ mielibyśmy $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$).

Więc, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 \left(t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)\right),$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ spełnia warunek $Td + dT = id$.

Przykład 14. *$\omega \in \Lambda^1(M)$, $\dim M = 3$, $\omega = xdx + ydy + zdz$. Wówczas, gdy ($\overline{x} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$) jest*

$$T(\omega) = \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz}_{\omega(tx)}, \quad \overline{x} \right\rangle dt = \int_0^1 t^0 \left(tx^2 + ty^2 + tz^2\right) dt = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \eta.$$

Zauważamy, że $d\eta = \omega$ i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał).(rys 6-2)

Przykład 15. *$\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$, $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\dim M = 3$. Co to jest $T\omega$?*

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner \left(xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz\right) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 \left(xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx\right) dt = \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 dy - xydx + y^2 dz - yzdy + zxdz - z^2 dx\right) = \eta \end{aligned}$$

.

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.
Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\omega(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x^1,\ldots,x^n)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

$$\omega = \overset{\omega_{12}}{x} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=2}{y} + \overset{\omega_{23}}{y} d\overset{i_1=2}{y} \wedge d\overset{i_2=3}{z} + \overset{\omega_{13}}{z} d\overset{i_1=1}{x} \wedge d\overset{i_2=3}{z}.$$

$$d\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Liczymy

$$\begin{aligned} Td \underset{p+1 \text{ forma}}{\omega} &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \underset{\text{brak } dx^{i_\alpha}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{p-1} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{k=1} \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \underset{\text{bez } dx^{i_k}}{\ldots} \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Zatem dodajemy do siebie $Td\omega + dT\omega$ i wychodzi

$$\begin{aligned} Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \int_0^1 dtp \cdot t^{p-1} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + \underset{\text{równa się zero}}{(.) + (.)} = \\ &= \int_0^1 dt \left(\frac{d}{dt} \left(t^p \omega(tx^1,\ldots,tx^n) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \right) = t^p \left. \left(\omega(tx^1,\ldots,tx^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \right) \right|_{t=0}^{t=1} = \omega. \end{aligned}$$

$\square$

7 Wykład (25.10.2019)

Definicja 13. *Jeżeli* $\alpha \in \Lambda^k(M)$ *taka, że* $d\alpha = 0$, *to mówimy, że* α *jest domknięta. Jeżeli* $\underset{\eta}{\exists}$ *taka, że* $d\eta = \alpha$, *to mówimy, że* α *jest zupełna.*

Przykład 16. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$.
Dla $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, *jest* $d\omega = 0$. *Było, że* $\eta = artctg(\frac{x}{y})$, $d\eta = \omega$. *Problem leży w punkcie* $(0, 0)$ *bo nie należy do dziedziny.*
(rys 7-1)

7.1 Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$, który jest w koszmarnej bazie $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$, ale można go zamienić na coś fajniejszego $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Dla trójki wektorów v_1, v_2, v_3, ich $|v_1, v_2, v_3|$ to objętość.
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = \det(A)\det(A^T) = \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = G(v_1, v_2, v_3).$$

Definicja 14. *Niech* M *- rozmaitość i* γ *krzywa na* M.

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a, b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \stackrel{def}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

Przykład 17. *(rys 7-2)* M *takie, że* $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a, b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji na (rys 7-3) jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe (rys 7-4)

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} | \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^i$, dalej jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left(\frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.
Niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \left\{ \begin{matrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{matrix} \quad a \leqslant t_1 \leqslant b, \quad c \leqslant t_2 \leqslant d \right\}.$$

$$\|D\| = \int vol \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

Przykład 18. *Niech*

$$D = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \right).$$

Liczymy $vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{bmatrix}.$$

$$vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left\| \begin{bmatrix} 1 + (f_{,x})^2 & (f_{,x})(f_{,y}) \\ (f_{,x})(f_{,y}) & 1 + (f_{,y})^2 \end{bmatrix} \right\| = \left(1 + (f_{,x})^2\right) \left(1 + (f_{,y})^2\right) - (f_{,x})^2 (f_{,y})^2.$$

$$\|D\| = \int_a^b \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy}_{ds}.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Niech A - wektor w bazie ortonormalnej. Dla $\dim M = 3$, $g = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$,

$$A = A^1 \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech $\alpha = A^\sharp \in \Lambda^1(M)$, γ - krzywa na M.

$$\alpha = g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} dx^1 + g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} dx^2 + g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} dx^3.$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \frac{\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}}{\left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\|} \right\rangle \left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt.$$

Niech $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$.
Pytanie: czym jest $\langle \alpha, v \rangle$?

$$\langle \alpha, v \rangle = A^1 \sqrt{g^{11}} g_{11} v^1 + A^2 \sqrt{g^{22}} g_{22} v^2 + A^3 \sqrt{g^{33}} g_{33} v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.
Niech $V \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim V = 3$. Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech $S \subset M$, $\dim M = 3$, $\dim S = 2$.

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

Pytanie 3. *Niech $\alpha = A^\sharp$, czym jest $\int_S dA^\sharp$?*

$$dA^\sharp = \underbrace{\left(\left(g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,2} - \left(g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} \right)_{,3} \right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 + \underbrace{\left(\left(g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} \right)_{,3} - \left(g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,1} \right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\ldots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle + \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle.$$

$$\int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\| dx^2 dx^3}_{ds} + \ldots.$$

Pamiętamy, czym była $rot(A) = \left(\star dA^\sharp \right)^\flat = \int \left(rot(A) \right) \mathbf{n} ds$

8 Wykład (28.10.2019)

8.1 W ostatnim odcinku

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^\sharp = \left(\overbrace{(.)\,, -(.)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \ldots.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left(\star \left(d\vec{A}^\sharp \right) \right)^\flat,$$

ale

$$\star(dx^2 \wedge dx^3) = g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1,$$
$$\star(dx^3 \wedge dx^1) = g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2,$$
$$\star(dx^1 \wedge dx^2) = g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

Więc

$$\star dA^\sharp = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned}\left(\star dA^\sharp\right)^\flat &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.\end{aligned}$$

Czyli dla $\vec{A}$ - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot\vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \\ D^3 \frac{1}{g_{11} g_{22}} \end{bmatrix}.$$

ale $rot(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}}$, ale

$$\left(rot\vec{A} \cdot \vec{n} \right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g_{22} g_{33}} \sqrt{g_{22} g_{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^\sharp = \int_S (rot\vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int_{\partial S} A^\sharp.$$

$$\int_S \left(rot\vec{A} \right) \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

Przykład 19. $\dim M = 3$, $V \subset M$, $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

Pytanie 4. *czym jest* $\int_{\partial V} \star A^\sharp$*?*

$$\star(dx^1) \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3,$$
$$\star(dx^2) \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1,$$
$$\star(dx^3) \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

Odpowiedź:

$$\star A^\sharp = A^1 g_{11} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1 + A^3 g_{33} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1\sqrt{g_{22}g_{33}}\quad dx^2\wedge dx^3+A^2\sqrt{g_{11}g_{33}}\quad dx^3\wedge dx^1+A^3\sqrt{g_{11}g_{22}}\quad dx^1\wedge dx^2.$$

Całka z tego interesu:

$$\int_{\partial V}\star A^\sharp=\int A^1\sqrt{g_{22}g_{33}}\quad dx^2dx^3+\int A^2\sqrt{g_{11}g_{33}}\quad dx^3dx^1+\int A^3\sqrt{g_{11}g_{22}}\quad dx^1dx^2,$$

ale

$$\vec{A}\cdot\vec{n}\cdot ds=A^1\sqrt{g_{22}g_{33}}\quad dx^2dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V}\star A^\sharp=\int_{\partial V}\vec{A}\cdot\vec{n}ds.$$

Pytanie 5. *Jak wygląda $\int_V d\star A^\sharp$?*

$$\int_V d\star A^\sharp=\int_V\left\langle\left(A^1\sqrt{g_{22}g_{33}}\right)_{,1}+\left(A^2\sqrt{g_{11}g_{33}}\right)_{,2}+\left(A^3\sqrt{g_{11}g_{22}}\right)_{,3},dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3,\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\rangle dx^1dx^2dx^3.$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$div\vec{A}=\star d\left(\star A^\sharp\right),$$

wiemy, że

$$\star\left(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\right)=\sqrt{g}g^{11}g^{22}g^{33}=\sqrt{g^{11}g^{22}g^{33}},$$

więc

$$div\vec{A}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\quad dx^1dx^2dx^3=div\vec{A}\quad dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V}\star A^\sharp=\int_V d\star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V}\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\int_V div\vec{A}\quad dV.$$