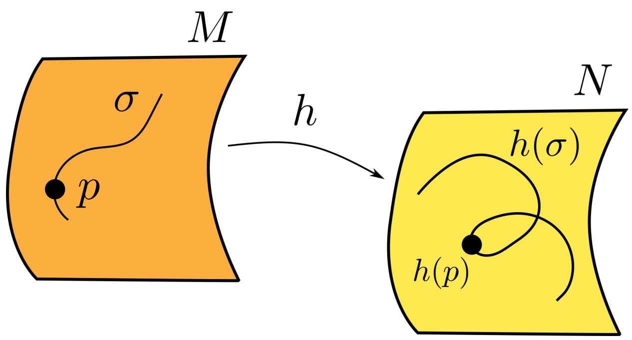
0.1 Przypomnienie

(rys 1)
Dla $v \in T_pM$, jest



Rysunek 1: Przypomnienie

$$h_\star v = \frac{d}{dt}h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t))\sigma'(t),$$

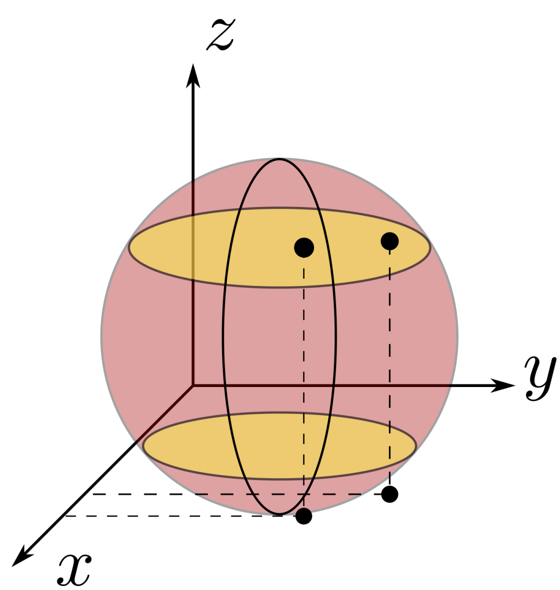
czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt}\sigma(t)$,

$$h_\star v = \underbrace{h'(\sigma(t))}_{\text{macierz kwadratowa}} v.$$

Przykład 1. *Niech*

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$
$$U_1^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_1^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_2^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\right\} \cap S^2.$$
$$U_3^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\right\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).



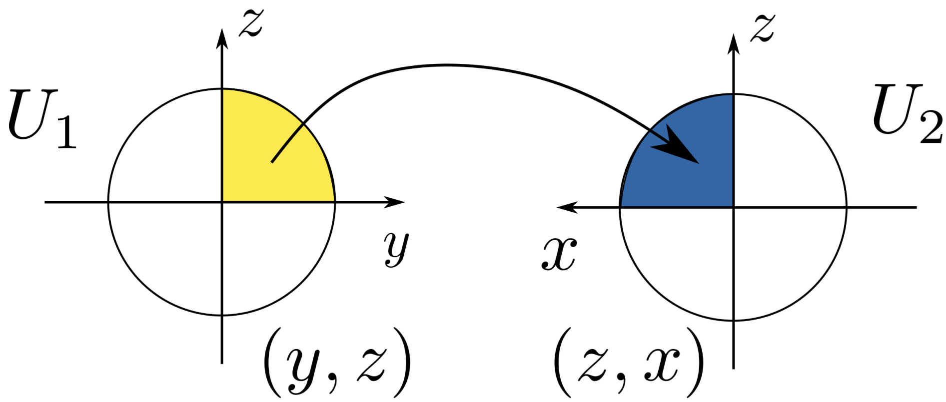
Rysunek 2: fig3-2

$y = \sqrt{1-x^2-z^2}$

$z = z$

$(x > 0, z > 0).$

$$(z,x) \to h(z,x) = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt{1-x^2-z^2} \end{bmatrix}$$



Rysunek 3: fig3-3

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) & \frac{\partial}{\partial x}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

Przykład 2. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R. (rys 4)*

$$x(\theta, t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\theta$$
$$y(\theta, t) = \left(R - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta$$
$$z(\theta, t) = \left(t\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' i t'.

$$x'(\theta', t') = \left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right)\right)\cos\theta'$$
$$y'(\theta', t') = -\left(R - t'\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right)\right)\sin\theta'$$
$$z'(\theta', t') = t'\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta'}{2}\right).$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$W_1 = \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\}$$
$$W_2 = \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Dla W_1

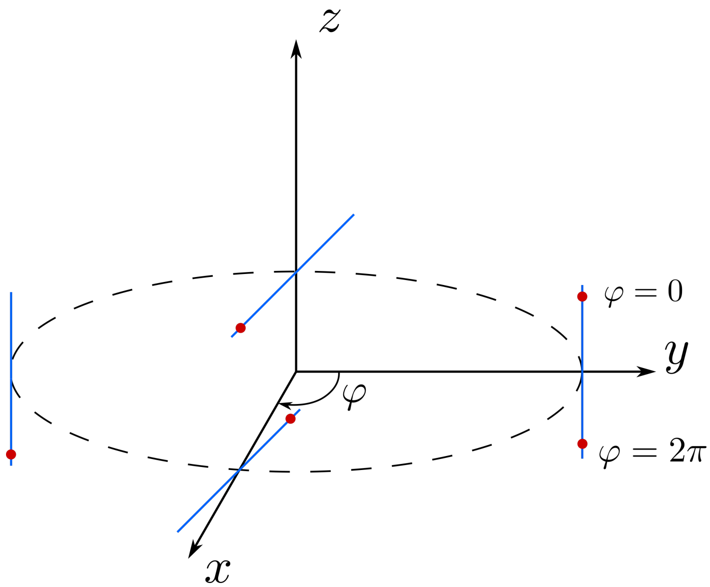
$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

dla W_2

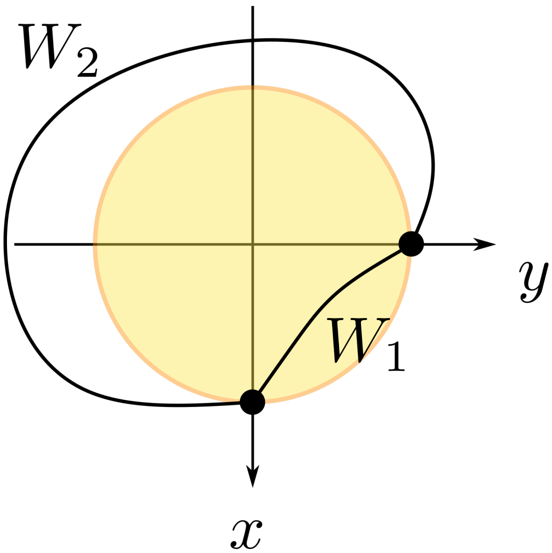
$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi_1'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2'(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det\varphi_1' < 0 \quad \det\varphi_2' > 0.$$



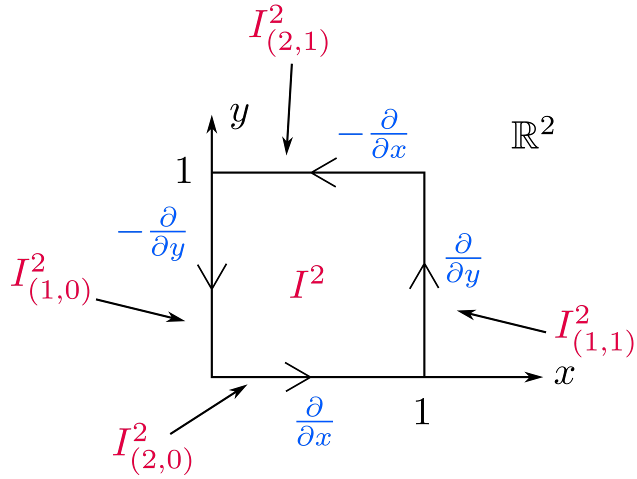
Rysunek 4: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 5: Obszary wspólne

0.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w $\mathbb{R}^n$

1. Niech $I^n = [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0.1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)
   Wprowadźmy oznaczenia:
$$I^n_{(i,0)} := \left\{ \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1 \right\}.$$
$$I^n_{(i,1)} := \left\{ \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant x^j \leqslant 1 \right\}.$$
   (odpowiednio: ścianka tylna i przednia)
$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I^2_{(2,0)}" = "I^2_{(1,1)}" + " - I^2_{(2,1)}" + " - I^2_{(1,0)},$$
   (tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
   - ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.
   Zdefiniujmy "zbiór"
$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I^n_{i,\alpha},$$
   który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n.



Rysunek 6: fig3-6

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned}
\omega = & f_1(x^1, \ldots, x^n) dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + \\
& + f_2(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\
& + f_i(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots + \\
& + f_n(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I^n} \omega = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \left\langle f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle \\
& dx^1 \ldots dx^{j-1} dx^{j+1} \ldots dx^n = \\
= & \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \ldots dx^{j-1} dx^{j+1} \ldots dx^n & wp.p.. \end{cases}
\end{aligned}$$