Przykład 1.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \partial_{t^2} u + \omega^2 u = \delta(t-a).$$

$$\left\langle \partial_{t^2} u + \omega^2 u, \varphi \right\rangle = \langle \delta(t-a), \varphi \rangle .$$

Ale to jest całka po a, czy po t? Dla

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,a) f(a) da$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u(t,a) f(a) da$$

$$\ddot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{t^2} u(t,a) f(a) da.$$

Czyli

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_{t^2} u(t,a) + \omega^2 u(t,a)\right) f(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(a) da \underset{(\star)}{=} -f(t).$$

Uwaga: *Jak pozbyć się minusa w* $(\star)$*?*
Trzeba rozstrzygnąć problem

a) $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(t-a)$

b) $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(a-t)$

c) $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(t)$, $x(t) = (u \star f)$

Funkcja u nazywa się czasem funkcją Greena.

Przykład 2. *Czasem problem*

$$L\varphi = \rho(x)$$

możemy rozwiązać problemem

$$Lu = \delta.$$

Przykład 3. *Wiemy, że* $div(E) = \rho(x)$. *Mamy też napis* $E = -\nabla\varphi$. *Czyli*

$$-div(grad(\varphi)) = \rho(x).$$

$$\Delta\varphi = -\rho(x).$$

Spróbujemy poradzić sobie z minusem. Traktujemy to równanie jako dystrybucyjne.

$$\Delta u = \delta \longrightarrow \langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Wtedy $\varphi = (u \star \rho)$

$$\varphi(x_0) = \left(\frac{1}{\|x\|} \star \rho \right) = \int\limits_V \frac{\rho(x')d^3x'}{\|x_0 - x'\|}.$$

Wzór Greena

Twierdzenie 1. *Niech* $U, V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $U, V \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. *Niech* M *- rozmaitość,* $M \subset \mathbb{R}^3$. *Wówczas*

$$\int\limits_M (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int\limits_{\partial M} \left(u\frac{\partial}{\partial\eta} v - v\frac{\partial}{\partial\eta} u \right) dS.$$

Gdzie $\frac{\partial}{\partial\eta} v$ *- pochodna wzdłuż wektora normalnego do powierzchni* ∂M. *Czyli* $\frac{\partial}{\partial\eta} v = (\nabla u) \cdot \eta$

Dowód. Wiemy, że jeżeli $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, to

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Zatem, jeżeli $\omega = \star du$, to znaczy, że

$$\int\limits_M d(v \star du) = \int\limits_{\partial M} v \star du \tag{A}$$

A jeżeli $\omega = u \star dv$

$$\int\limits_M d(u \star dv) = \int\limits_{\partial M} u \star dv \tag{B}$$

Odejmując (B) od (A) otrzymamy

$$\int_M du \wedge \star dv + ud\star dv - dv \wedge \star du - vd\star du = \int_{\partial M} u\star dv - v\star du.$$

Zauważmy, że jeżeli $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ i $B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$, to

$$\star A = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy.$$

$$\star B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

Zatem

$$A \wedge \star B = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$B \wedge \star A = (B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Oznacza to, że

$$du \wedge \star dv - dv \wedge \star du = 0.$$

Zatem

$$\int_M ud\star dv - vd\star du = \int_M u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial M} u\star dv - v\star du.$$

Zauważmy, że jeżeli $v(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$,

$$\begin{aligned} dv &= v_x dx + v_y dy + v_z dz \\ \star dv &= v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dy \wedge dx. \end{aligned}$$

Weźmy sobie kostkę z $\mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\int_{\partial M} \star dv = \sum_{i=1}^{6} \int \left\langle \star dv, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \int_{\partial M} (\nabla v)\, ndS.$$

Zatem, przechodząc od form do całek po funkcjach, otrzymujemy

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS.$$

□

Stwierdzenie 1. *Jeżeli* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *to w sensie dystrybucyjnym*

$$\Delta \frac{1}{r} = \delta \longleftarrow \left\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\left\langle \Delta \left(\frac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle = -\left\langle \nabla \left(\frac{1}{r}\right), \nabla\varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r}, \Delta\varphi \right\rangle.$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varphi \in D}{\forall} \left\langle \frac{1}{r}, \Delta\varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Od lewej:

$$\left\langle \frac{1}{r}, \Delta\varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{r}\Delta\varphi\right) dV.$$

Wiemy, że φ ma nośnik zwarty, więc zamiast po $\mathbb{R}^3$, możemy całkować po objętości V (Jak V ma się do nośnika φ, to zobaczymy).

$$\int\limits_V \left(\frac{1}{r}\Delta\varphi\right) dV = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{V \setminus K(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r}\Delta\varphi\right) dV.$$

Odpalamy wzór Greena Niech $u = \frac{1}{r}$, $v = \varphi$, $M = V \setminus K(0, \varepsilon)$. Wtedy

$$\int\limits_{V \setminus K(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r}\Delta\varphi - \varphi\Delta\frac{1}{r}\right) dV = \int\limits_{\partial(V \setminus K(0,\varepsilon))} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \varphi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że $\Delta\frac{1}{r}$, gdy $(x, y, z) \in V \setminus K(0, \varepsilon)$ wynosi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) = \\
&= -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} + \frac{3y^2}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

.

Zatem

$$\int\limits_{V\setminus K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}\Delta\varphi = \int\limits_{\partial(V\setminus K(0,\varepsilon))} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \varphi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS.$$

Ale

$$\int\limits_{\partial(V\setminus K(0,\varepsilon))} () = \int\limits_{\partial V} () + \int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} () \,.$$

(**uważać na orientację**) Wybierzemy V na tyle duże, żeby nośnik $\varphi \subset V$. Oznacza to, że $\varphi(x)\Big|_{x=\partial V} = 0$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=\partial V} = 0$. Zatem

$$\int\limits_{V\setminus K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}\Delta\varphi = -\int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \varphi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS.$$

Ale znamy twierdzenie o wartości średniej

$$\int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dS = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big|_c \cdot \int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}dS = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big|_c \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Teraz mamy

$$\int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \varphi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \varphi_{(c)} \int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right) = \varphi_{(c)} \int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \varphi_{(c)} \int\limits_{\partial K(0,\varepsilon)} -\frac{1}{r^2} = -\varphi_{(c)} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2 = -4\pi\varphi_{(c)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -4\pi\varphi(0).$$

$$\left\langle \Delta\frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{V\setminus K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}\Delta\varphi = -4\pi\varphi(0) = -4\pi\left\langle \delta, \varphi \right\rangle.$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta.$$

□