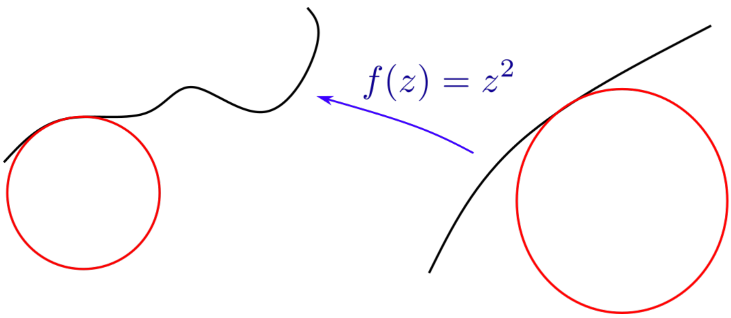


Rysunek 0.1

Sprawdzamy jak zmienia się promień krzywizny przy transformacji $f(z)$

(rys **??**).

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(\ddot{z}\overline{\dot{z}})}{|\dot{z}|^3}.$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{Im\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(z(t)\right)^2 \overline{\frac{d}{dt}|z(t)|}\right)\right)}{\left|\frac{d}{dt}\left(z(t)\right)^2\right|^3}.$$

$$\tilde{z}(t) = \left(z(t)\right)^2.$$

$$\left(\dot{\tilde{z}}(t)\right)' = \left(2\left(z(t)\left(\dot{z}(t)\right)\right)\right)' = 2\dot{z}(t)\dot{z}(t) + 2z(t)\ddot{z}(t).$$

$$\left(\overline{\tilde{z}}\right)' = \left(\tilde{z}(t)\tilde{z}(t)\right)' = 2\overline{z}(t)\overline{\dot{z}}(t).$$

$$\ddot{\tilde{z}} \cdot \overline{\dot{\tilde{z}}} = \left(2(\dot{z}(t))^2 + 2z(t)\ddot{z}(t)\right)\left(2\overline{z}(t)\overline{\dot{z}}(t)\right) = 4\overline{z}(t)\left|\dot{z}\right|^2\dot{z}(t) + 4\left|z(t)\right|^2\overline{\dot{z}}(t)\cdot\ddot{z}(t).$$

Ale

$$\frac{Im(\ddot{\tilde{z}}\overline{\dot{\tilde{z}}})}{\left|\dot{\tilde{z}}(t)\right|^3} = \frac{Im\left|4\overline{z}(t)\right|\left(\dot{z}(t)\right)^2\cdot\dot{z}(t)}{8\left|z(t)\right|^3\left|\dot{z}(t)\right|^3} + \frac{Im(4\left|z(t)\right|^2\overline{\dot{z}}(t)\ddot{z}(t))}{8\left|z(t)\right|^3\left|z(t)\right|^3}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\left|z(t)\right|}\left(\frac{Im\left(\overline{z}(t)\dot{z}(t)\right)}{\left|z(t)\right|^2\left|z(t)\right|} + \frac{1}{s}\right).$$

Ale

$$\overline{z}(t)\dot{z}(t) = (x(t) - iy(t))\,(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} + i\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,.$$

$$Im\,(\overline{z}(t)\dot{z}(t)) = x\dot{y} - y\dot{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{bmatrix} = |\overline{z}(t)| \cdot |\dot{z}(t)| \sin(\sphericalangle \dot{z}(t), \overline{z}(t)).$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\,|z(t)|}\left(\frac{|z(t)|\,|\dot{z}(t)|}{|z(t)|^2 \cdot |\dot{z}(t)|}\sin(\sphericalangle(\dot{z}, \overline{z})) + \frac{1}{s}\right).$$

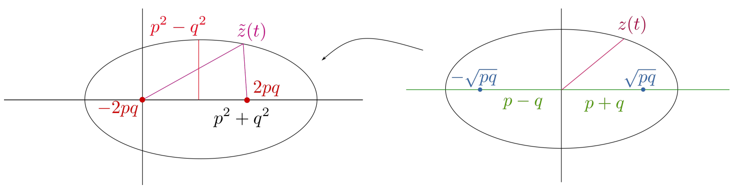
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2\,|z(t)|}\left(\frac{\sin(\sphericalangle(\dot{z}, \overline{z}))}{|z(t)|} + \frac{1}{s}\right).$$

Już prawie twierdzenie Kasner-Arnold

Rozważmy ruch na $\mathbb{R}^2$, pod wpływem siły $F = -r$, czyli na $\mathbb{C}$

$$\ddot{z}(t) = -z(t), \text{ gdzie } (m = 1, k = 1)\,.$$

Trajektoria wygląda tak:



Rysunek 0.2: przed i po

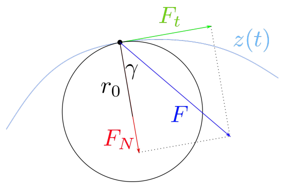
$$z(t) = pe^{it} + qe^{-it} = (p+q)\cos(t) + i(p-q)\sin(t).$$

$$(x(t), y(t)) = ((p+q)\cos(t), (p-q)\sin(t))\,.$$

Jak rozpoznać siłę typu $F = -\frac{1}{r^2}$ od $F = -r$? Trajektoria wychodzi taka sama, ale dla tej drugiej siła jest zaczepiona w środku elipsy. Co się stanie jak przepuścimy tę elipsę przez $f(z) = z^2$? Dostaniemy

$$\tilde{z}(t) = \left(pe^{it} + qe^{-it}\right)^2 = p^2e^{2it} + 2pq + q^2e^{-2it} = \left(p^2 + q^2\right)\cos(2t) + 2pq + i(p^2 - q^2)\sin(2t)$$

taką przesuniętą elipsę jak na rys. **??**



Rysunek 0.3

Pytanie 1. *Jeżeli $F = -r$, To jaka jest $\tilde{F}$? (sytuacja jak na rys. **??**)*

$\cos\gamma = \frac{F_N}{F}$, $F = \frac{F_N}{\cos\gamma}$, ale $F_N = \frac{v^2(t)}{r_0}$. My wiemy, że czasami zachowany jest moment pędu

$$\overline{r} \times \overline{v}(t) = r \cdot v \sin(\sphericalangle r, v) = rv\cos\gamma = const = A.$$

Czyli

$$v = \frac{A}{r\cos\gamma}.$$

$$F = \frac{F_N}{\cos\gamma} = \frac{1}{r_0}\frac{A^2}{r^2(\cos\gamma)^3}.$$

I dostaliśmy taki związek. Dla ruchu po okręgu $\gamma = 0$, $r = r_0$ i wtedy

$$F = \frac{1}{r^3}A^2 = \frac{1}{r^3}(rv)^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Znowu spróbujemy przepuścić taki ruch przez $f(z) = z^2$. Przypuszczamy, że będą takie zmiany:

$$\begin{aligned}
A &\sim \tilde{A}\\
r &\sim \tilde{r}\\
r_0 &\sim \tilde{r}_0\\
\gamma &\sim \gamma \quad \text{(bo } f(z) \text{ - koforemna)}\\
v &\sim \tilde{v}\\
F &\sim \tilde{F}.
\end{aligned}$$

Ale

$$F = \frac{A^2}{r_0}\frac{1}{r^2}\frac{1}{(\cos\gamma)^3}.$$

Zatem
$$\tilde{F} = \frac{1}{\tilde{r}_0}\frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{1}{(\cos\gamma)^3}.$$
A i $\tilde{A}$ się nie przejmujemy, ale za to r_0 już tak
$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{\overset{\sin(\sphericalangle(\dot{z},\overline{z}))}{\cos\gamma}}{r}\right).$$
Z tego co wcześniej napisaliśmy, mamy
$$\frac{1}{r_0} = \frac{F}{(A)^2}r^2(\cos\gamma)^3.$$
Wtedy
$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\cos\gamma}{r} + \frac{F}{(A)^2}r^2(\cos\gamma)^3\right).$$
$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{r}\frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2}r\left(\frac{(A)^2}{2r^2(\cos\gamma)^2} + \frac{Fr}{2}\right).$$
$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{Fr}{2}\right).$$
Zauważmy, że gdy $F \sim r$, to
$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}r^2 = E.$$
(Energia całkowita ruchu po elipsie, przed przepuszczeniem przez $f(z) = z^2$)
$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos\gamma)^3}{(A)^2} \cdot E.$$
Zatem podstawiając do wcześniej wyliczonego $\tilde{F}$ mamy
$$\tilde{F} = \frac{(\cos\gamma)^3 E}{(A)^2} \cdot \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2}\frac{1}{(\cos\gamma)^3} = \left(\frac{\tilde{A}}{A}\right)^2\frac{E}{\tilde{r}^2} = \frac{const}{\tilde{r}^2}.$$
To jest dowód Kasnera - Arnolda w przypadku $f(z) = z^2$. Siły grawitacji i te $\sim r$ okazują się być w jakiejś "dualności" względem z^2.

Twierdzenie 1. *(Kasner-Arnold)*
Jeżeli $F_1 \sim r^A$, *a* $F_2 \sim r^{\tilde{A}}$ *i*

$$(A+3)\,(\tilde{A}+3) = 4$$

i $m = \frac{A+3}{2}$, *to transformacja* $f(z) = z^m$ *przeprowadza ruch (trajektorię i cały ten posag) pod wpływem siły* F_1 *w ruch pod wpływem siły* F_2.

Przykład 1. *sprężyna -* $A = 1$, $\tilde{A} = -2$, $m = \frac{1+3}{2} = 2$

$$(1+3)(-2+3) = 4.$$

Wtedy nasz f *wynosi* $f(z) = z^2$.