Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

**Przykład 1.** *Niech* $X = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

*Niech* $M$ *- rozmaitość,* $\dim M = 2$*. Co oznacza napis*

$$x \lrcorner \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t)\frac{\partial}{\partial x} + p(t)\frac{\partial}{\partial p}\right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}\right\rangle dx = dH,$$

*a teraz coś takiego:*

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2 dx.$$

*To wypluje na wyjściu równania ruchu*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p}(t) = -kx$$
$$m\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

## 0.1 Rozmaitość z brzegiem

**Obserwacja:**
(rys 5-1) Niech $I = [0,1[ \subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x,y) = |x-y|$) czy $I$ jest otwarty w $\mathbb{R}$? *chyba nie.*
Niech $I = [0,1[ \subset [0,2]$, czy $I$ jest otwarty w $[0,2]$? *chyba tak.*

$$B(0,1) = \{x \in [0,2], \quad d(0,x) < 1\} = [0,1[.$$

**Definicja 1.**

$$\mathbb{R}^m_+ = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geqslant 0\right\},$$
$$\mathbb{R}^m_0 = \left\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \ldots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\right\}.$$

*Niech* $M$ *- rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości* $M$ *składa się z takich map* $\varphi_\alpha$*, że*

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m_+,$$

*(*$\mathcal{O}$ *- otwarty w* $M$*), gdzie* $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ *- otwarte w* $\mathbb{R}^m_+$*, to* $M$ *nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli* $p \in M$ *i* $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^m_0$*, to mówimy, że* $p$ *należy do brzegu* $M$*.*
*(brzeg rozmaitości* $M$ *oznaczamy przez* $\partial M$*)*

**Pytanie 1.** *Co to jest różniczkowalność* $\varphi^{-1}$*, jeżeli dziedzina* $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}^m_+$*, który nie jest otwarty w* $\mathbb{R}^m$*?*

Mówimy wówczas tak:

**Definicja 2.** *Niech* $U \subset \tilde{U}$*,* $\tilde{U}$ *- otwarty w* $\mathbb{R}^m$*,* $U$ *- otwarty w* $\mathbb{R}^m_+$*.* $\varphi$ *jest klasy* $\mathcal{C}^r$ *na* $U$*, jeżeli istnieje* $\tilde{\varphi}$ *klasy* $\mathcal{C}^r$ *na* $\tilde{U}$ *i* $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$*.*

(rys 5-3)

**Pytanie 2.** *Czym jest* $\partial S$*, jeżeli* $S$ *- okrąg?*

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

$$\text{sześcian} \xrightarrow{\partial} \text{boki sześcianu} \xrightarrow{\partial} \text{rogi sześcianu},$$

$$\text{kula} \xrightarrow{\partial} \text{sfera} \xrightarrow{\partial} \{\phi\}.$$

**Obserwacja:**
Zbiór $\partial M$ wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętymi do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m-1$, jeżeli $\dim M = m$.

**Definicja 3.** *Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ - baza $T_p \partial M$, wybierzmy orientację na $M$ (rys 5-5). Niech $\sigma$ - krzywa na $M$ taka, że*

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^m_+,$$

*niech $\overline{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja $\partial M$ jest zgodna z orientacją $M$, jeżeli orientacja $\langle \overline{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ jest zgodna z orientacją $M$.*

(rys 5-6) Niech $M$ - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \to T$ - parametryzacja $T$ oraz $\varphi_2 : U_2 \to T$ - parametryzacja $T$. Z własności funkcji $\varphi_1$ i $\varphi_2$ wiemy, że

$$\underset{h}{\exists} h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^\star \omega = \int_{U_2} h^\star \left( \varphi_1^\star \omega \right) \underset{(\Delta)}{\overset{?}{=}} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^\star \omega = \int_{U_2} \varphi_2^\star \omega.$$

$(\Delta)$ - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^\star \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_\star v \rangle = \langle k^\star \omega, L_\star v \rangle = \langle L^\star k^\star \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt} \overline{\sigma}$ to

$$(kL)_\star v = \frac{d}{dt} \left( k \left( L \left( \overline{\sigma}(t) \right) \right) \right) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_\star L_\star v.$$

**Wniosek:** całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

## 0.2 Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{y dx}{x^2+y^2} - \frac{x dy}{x^2+y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje $\eta$ taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.
**Obserwacja:**

$$\eta = arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$