0.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

$$L : \{[a,b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

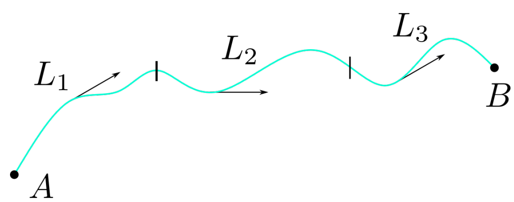
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$,

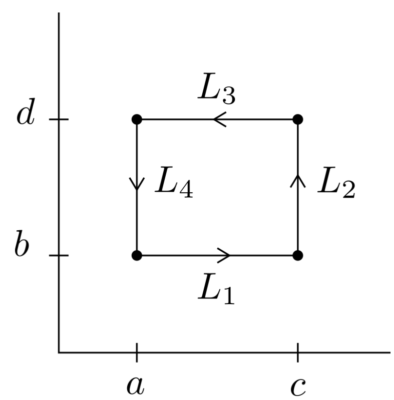
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 9)



Rysunek 1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 1. *(rys 10)*



Rysunek 2: $\dim M = 2$

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

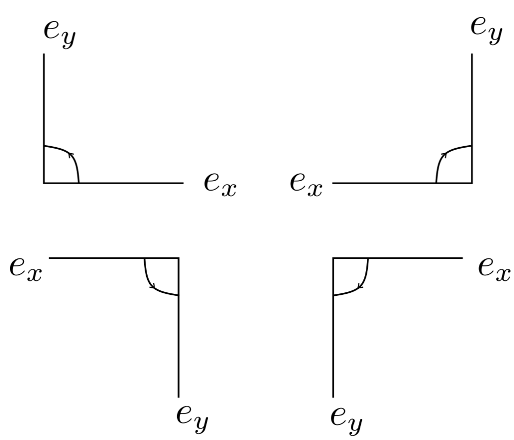
$$L_1 = \{(x,b), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_2 = \{(c,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$
$$L_3 = \{(x,d), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_4 = \{(a,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$

$$\begin{aligned}\int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^c A(x,b)dx + \int_b^d B(c,y)dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x,d)dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a,y)dy.\end{aligned}$$

(rys 11)
dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_pM \to T_pM$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).

Rysunek 3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.
(rys 12)



Rysunek 4: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 1. *Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera.*
Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V.

Definicja 2. *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots .$$

Definicja 3. *Niech M - rozmaitość zorientowana,* $\dim M = n$ *i*
$S = \{[a,b] \times [c,d] \ni (t_1, t_2) \to \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ *- powierzchnia sparametryzowana,* $\Lambda^2 M \ni \omega$ *- dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 2. *do 7:*
weźmy $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ *i obliczmy* $\int\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\int\int_P d\omega &= \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
&= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} = \\
&= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx \, (A(x,d) - A(x,c)) \right] = \\
&= \int_a^b A(x,c)dx + \int_c^d B(b,y)dy - \int_a^c A(x,d)dx - \int_c^d B(a,y)dy = \\
&= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{l_4} \omega.
\end{aligned}$$

Czyli

$$\int\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 3. *niech (sytuacja jak na rys 13)* $S = S_1 \cup S_2$*, gdzie*

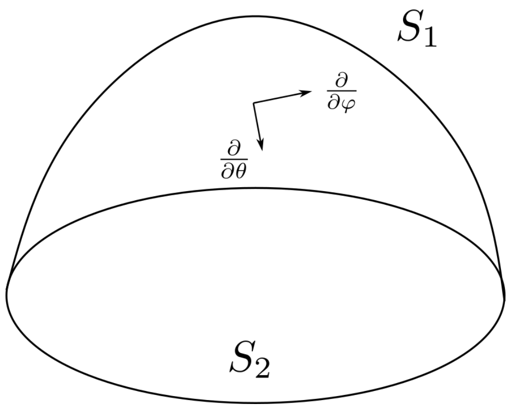
$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0 \right\}, \quad S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0 \right\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$

Definicja 4. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* (U_1, φ_1)*, że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$*, odwzorowanie* $\det \left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \right)' > 0$.

Definicja 5. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*



Rysunek 5: Tak to wygląda

Definicja 6. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*