Definicja 1. *Jeżeli* $\alpha \in \Lambda^k(M)$ *taka, że* $d\alpha = 0$, *to mówimy, że* α *jest domknięta. Jeżeli* $\underset{\eta}{\exists}$ *taka, że* $d\eta = \alpha$, *to mówimy, że* α *jest zupełna.*

Przykład 1. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$.
Dla $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, *jest* $d\omega = 0$. *Było, że* $\eta = artctg(\frac{x}{y})$, $d\eta = \omega$. *Problem leży w punkcie* $(0, 0)$ *bo nie należy do dziedziny.*
(rys 7-1)

Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$, który jest w koszmarnej bazie $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$, ale można go zamienić na coś fajniejszego $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Dla trójki wektorów v_1, v_2, v_3, ich $|v_1, v_2, v_3|$ to objętość.
Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$vol(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ & \dots & \\ & \dots & \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= (\det A)(\det A) = \det(A)\det(A^T) = \\ &= \det(A^T A) = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \\ &= G(v_1, v_2, v_3). \end{aligned}$$

Definicja 2. *Niech M - rozmaitość i γ krzywa na M.*

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a,b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \overset{def}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

Przykład 2. *(rys 7-2) M takie, że* $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a,b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji na (rys 7-3) jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe (rys 7-4)

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi} | \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^i$, *dalej jest*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial\varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial\varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left(\frac{\partial r(\varphi)}{\partial\varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.
Niech $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \left\{ \begin{matrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{matrix} \quad a \leqslant t_1 \leqslant b, \quad c \leqslant t_2 \leqslant d \right\}.$$

$$\|D\| = \int vol\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

Przykład 3. *Niech*

$$D = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \right).$$

Liczymy $vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{bmatrix}.$$

$$vol(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left\|\begin{bmatrix}1+(f_{,x})^2 & (f_{,x})(f_{,y})\\ (f_{,x})(f_{,y}) & 1+(f_{,y})^2\end{bmatrix}\right\|=\left(1+(f_{,x})^2\right)\left(1+(f_{,y})^2\right)-(f_{,x})^2(f_{,y})^2.$$

$$\|D\|=\int_a^b\int_c^d\underbrace{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy}_{ds}.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega=\int_{\partial U}\omega.$$

Niech A - wektor w bazie ortonormalnej. Dla $\dim M=3$, $g=\begin{bmatrix}g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33}\end{bmatrix}$,

$$A=A^1\sqrt{g^{11}}\frac{\partial}{\partial x^1}+A^2\sqrt{g^{22}}\frac{\partial}{\partial x^2}+A^3\sqrt{g^{33}}\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech $\alpha=A^\sharp\in\Lambda^1(M)$, γ - krzywa na M.

$$\alpha=g_{11}A^1\sqrt{g^{11}}dx^1+g_{22}A^2\sqrt{g^{22}}dx^2+g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}dx^3.$$

$$\int_\gamma\alpha=\int_\gamma A^\sharp=\int_\gamma\left\langle\varphi^\star\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt=\int_\gamma\left\langle\alpha,\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt=\int_\gamma\left\langle\alpha,\frac{\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}}{\left\|\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\|}\right\rangle\left\|\varphi_\star\frac{\partial}{\partial t}\right\|dt.$$

Niech $v=v^1\frac{\partial}{\partial x^1}+v^2\frac{\partial}{\partial x^2}+v^3\frac{\partial}{\partial x^3}$.
Pytanie: czym jest $\langle\alpha,v\rangle$?

$$\langle\alpha,v\rangle=A^1\sqrt{g^{11}}g_{11}v^1+A^2\sqrt{g^{22}}g_{22}v^2+A^3\sqrt{g^{33}}g_{33}v^3.$$

czyli mamy

$$\int_\gamma A^\sharp=\int_\gamma\mathbf{A}\cdot\underbrace{\mathbf{t}_{st}dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.
Niech $V\subset M$, $\dim M=3$, $\dim V=3$. Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega=\int_{\partial V}\omega,\quad \omega\in\Lambda^2(M).$$

Niech $S\subset M$, $\dim M=3$, $\dim S=2$.

$$\int_S d\alpha=\int_{\partial S}\alpha,\quad \alpha\in\Lambda^1(M).$$

Pytanie 1. *Niech $\alpha = A^\sharp$, czym jest $\int_S dA^\sharp$?*

$$dA^\sharp = \underbrace{\left(\left(g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}\right)_{,2} - \left(g_{22}A^2\sqrt{g^{22}}\right)_{,3}\right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 +$$
$$+ \underbrace{\left(\left(g_{11}A^1\sqrt{g^{11}}\right)_{,3} - \left(g_{33}A^3\sqrt{g^{33}}\right)_{,1}\right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\dots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle =$$
$$= \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\| dx^2 dx^3}_{ds} + \dots.$$

Pamiętamy, czym była $rot(A) = \left(\star dA^\sharp\right)^\flat = \int \left(rot(A)\right) \mathbf{n} ds$