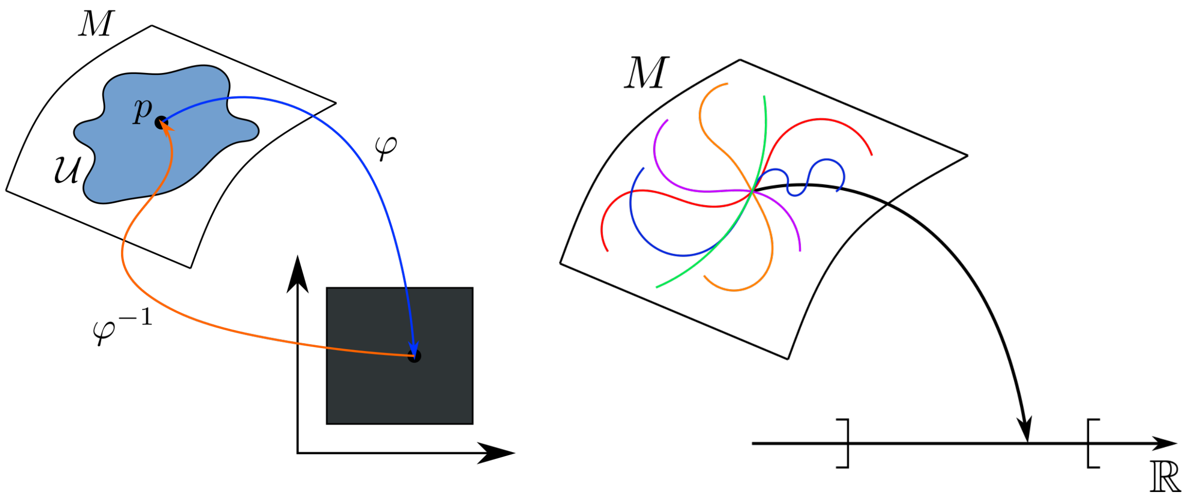
Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

7 października 2019

1 Wykład (04.10.2019)

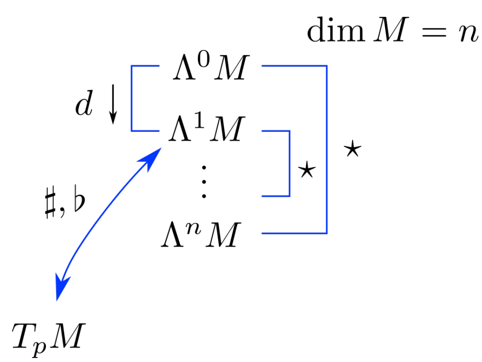
1.1 Przypomnienie



Rysunek 1: Przypomnienie

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM$, to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \ldots & \alpha_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \ldots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right| .$$



Rysunek 2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w \rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix} .$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n} .$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^n g_{nn} dx^n ,$$

(gdy g_{ij} - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j .$$

1.2 Jest sytuacja taka

Niech $A \in T_pM$, $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $B = T_pM$, $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^k}$.
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\left\langle A^\sharp, B \right\rangle, \quad (g_{ij} \text{ - diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned}\left\langle A^\sharp, B \right\rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \ldots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \ldots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B.\end{aligned}$$

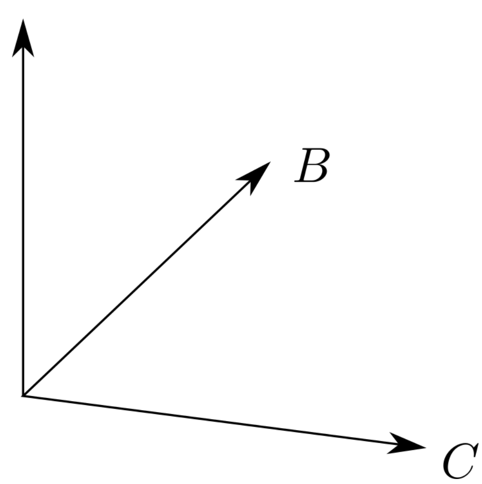
Czyli gdyby $\|B\| = 1$, to $\left\langle A^\sharp, B \right\rangle$ byłoby długością rzutu A na kierunek B.
Niech $\dim M = 3$, $\Lambda^2 M \ni A$,

$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_pM.$$

$$\begin{aligned}\langle A, B, C \rangle &= A^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \right\rangle + A^2 \left\langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \right\rangle + A^3 \left\langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \right\rangle = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} \left\langle dx^2, B \right\rangle & \left\langle dx^3, B \right\rangle \\ \left\langle dx^2, C \right\rangle & \left\langle dx^3, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} \left\langle dx^3, B \right\rangle & \left\langle dx^1, B \right\rangle \\ \left\langle dx^3, C \right\rangle & \left\langle dx^1, C \right\rangle \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} \left\langle dx^1, B \right\rangle & \left\langle dx^2, B \right\rangle \\ \left\langle dx^1, C \right\rangle & \left\langle dx^2, C \right\rangle \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\ &= A^1 \left(B^2 C^3 - B^3 C^2 \right) + A^2 \left(B^3 C^1 - B^1 C^3 \right) + A^3 \left(B^1 C^2 - B^2 C^1 \right) = \\ &\text{"} = \text{"} A^1 (B \times C)_1 + A^2 (B \times C)_2 + A^3 (B \times C)_3 \text{"} = \text{"} A \cdot (B \times C) \\ &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|.\end{aligned}$$

(rys 3)



Rysunek 3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

1.3 Problem

$\dim M = 3$, mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą S w $\mathbb{R}^3$ (np. spiralę) (rys 4). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu A do B.

1. sparametryzujmy kształt S, np.

$$S = \left\{ \begin{matrix} x = \cos(t) \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{matrix} \right\}.$$

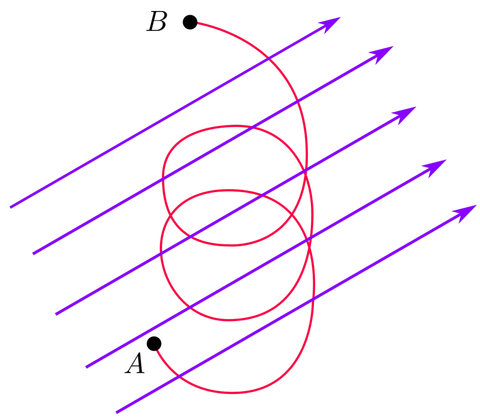
2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych. Jeżeli $p = \left.\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{bmatrix}\right|_{t=t_0}$, to

$$T_pM = \left.\left\langle \begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle\right|_{t=t_0}.$$

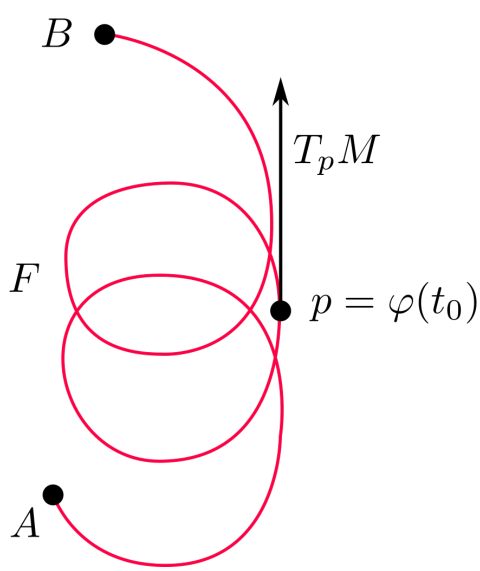
(rys 5)

3. Niech $T_pM \ni v = -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. (rys 6)
Możemy policzyć np.

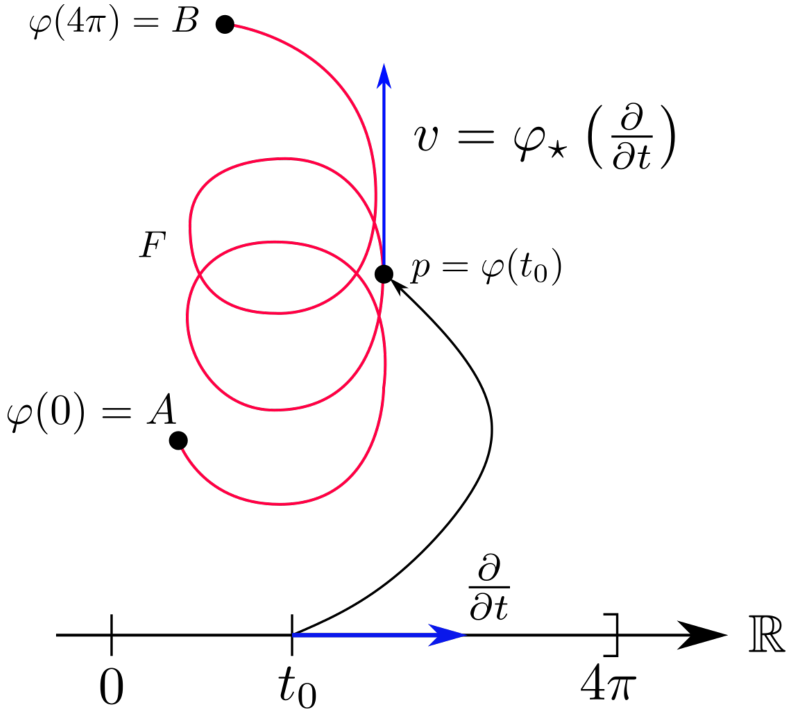
$$\int \langle F, v\rangle = \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle dt =$$
$$= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle dt = \int_0^{4\pi}\left\langle \varphi^\star F, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle dt.$$



Rysunek 4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



Rysunek 5: można jakoś to sparametryzować przez φ



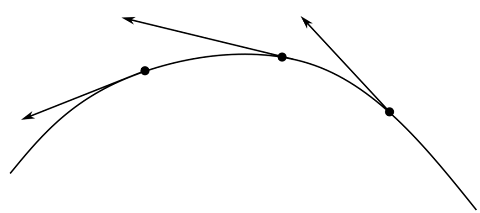
Rysunek 6

Definicja 1. *Niech M - rozmaitość, L - krzywa na M, $w \in \Lambda^1 M$, $\varphi : [a, b] \to M$ - parametryzacja krzywej L, czyli*

$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 7)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

Przykład 1. *niech (rys 8)*

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leqslant t \leqslant 2\right\}$$

i

$$\omega = ydx = \left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)^\sharp.$$

Wtedy mamy $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$, $\varphi^\star \omega = \quad \begin{vmatrix} x = t-1 \\ dx = dt \end{vmatrix} = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t - 1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^\star \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = \left[t^2 - t\right]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leqslant u \leqslant 2\right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

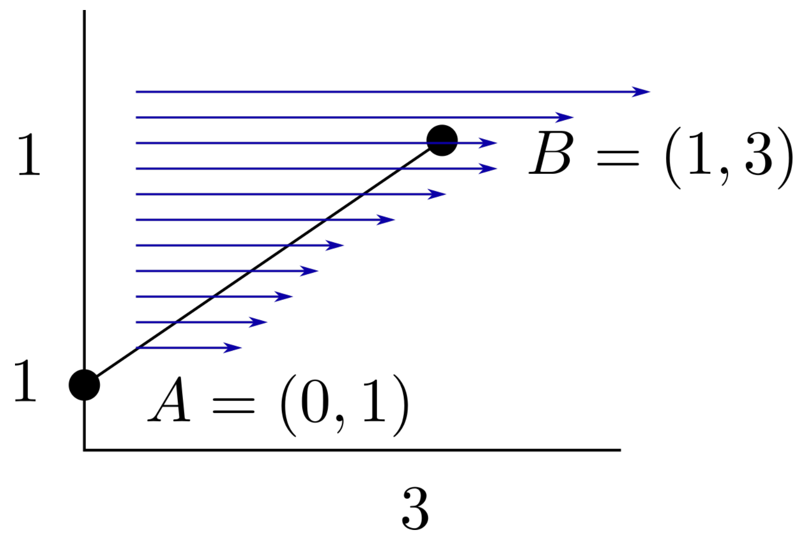
$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale $\begin{matrix} x = 2 - u \\ dx = -u \end{matrix}$ *i mamy*

$$\varphi^\star \omega = (5 - 2u)(-du) = (2u - 5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u - 5)du = \left[u^2 - 5u\right]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



Rysunek 8

2 Wykład (07.10.2019)

2.1 Ostatnio

Była rozmaitość M z wymiarem $\dim M = n$, krzywą

$$L : \{[a,b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

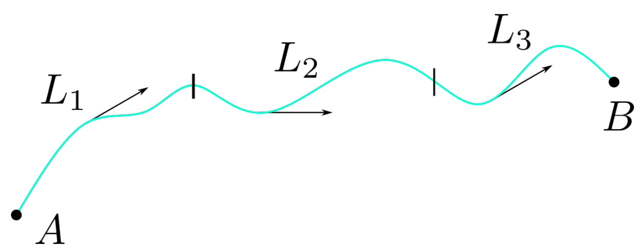
jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$,

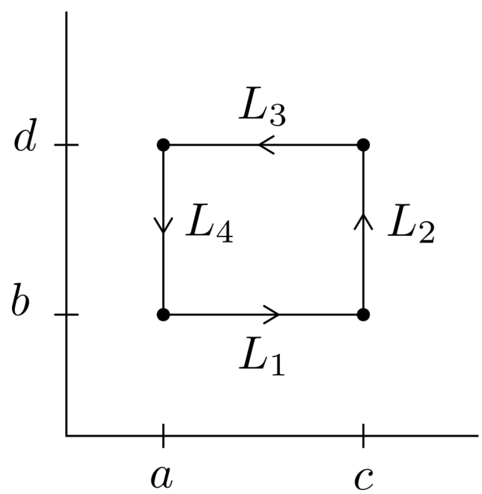
$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$

(rys 1)



Rysunek 9: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$

Przykład 2. *(rys 2)*



Rysunek 10: $\dim M = 2$

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \in \Lambda^1 M.$$

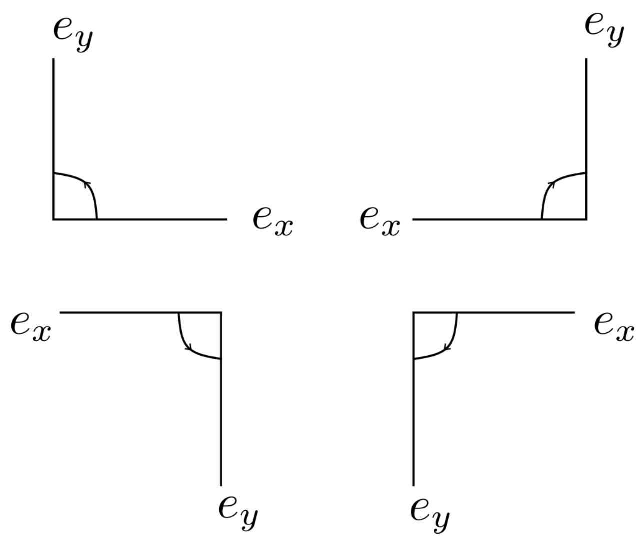
Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x,b), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_2 = \{(c,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$
$$L_3 = \{(x,d), a \leqslant x \leqslant c\}.$$
$$L_4 = \{(a,y), b \leqslant y \leqslant d\}.$$

$$\begin{aligned}\int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \int_a^c \left\langle \varphi_3^\star, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^c A(x,b)dx + \int_b^d B(c,y)dy + (-1) \cdot \int_a^c A(x,d)dx + (-1) \cdot \int_b^d B(a,y)dy.\end{aligned}$$

Rysunek 11: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

(rys 3)
dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_pM \to T_pM$, $\varphi(v) = a \cdot v$ (φ - liniowe).
$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.
(rys 4)



Rysunek 12: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

Definicja 2. *Niech B_1, B_2 - bazy uporządkowane w V - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że B_1 i B_2 należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z B_1 do B_2 jest większy od zera.*
Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem V.

Definicja 3. *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \ldots .$$

Definicja 4. *Niech M - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i $S = \{[a,b] \times [c,d] \ni (t_1, t_2) \to \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{zgodne\ z\ orientacją} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

Przykład 3. *do 7:*
weźmy $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ i obliczmy $\int\int_P d\omega$.

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\int\int_P d\omega = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} =$$

$$= \int_c^d dy (B(b,y) - B(a,y)) - \left[\int_a^b dx \,(A(x,d) - A(x,c)) \right] =$$

$$= \int_a^b A(x,c)dx + \int_c^d B(b,y)dy - \int_a^c A(x,d)dx - \int_c^d B(a,y)dy =$$

$$= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{l_4} \omega.$$

Czyli

$$\int\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

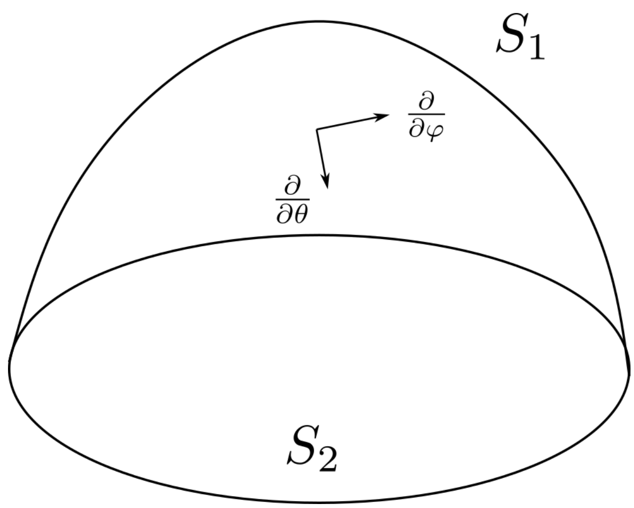
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

Przykład 4. *niech* $S = S_1 \cup S_1$, *gdzie*

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0 \right\}, \quad S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0 \right\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 13: Tak to wygląda

Definicja 5. *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* (U_1, φ_1), *że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$, *odwzorowanie* $\det \left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \right)' > 0$.

Definicja 6. *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*

Definicja 7. *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*