

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

**Przykład 1.**

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech  $z = e^{ix}$ ,  $dz = ie^{ix} dx$ .

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = \frac{1}{z} (z - az^2 - a + a^2 z) = \frac{1}{z} (1 - az)(z - a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{z dx}{(1 - az)(z - a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że  $(z - a)f(z)$  jest regularne w  $z = a$ , bo wynosi  $\frac{1}{1 - az}$ .  
Zatem

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

*Czyli jest ładnie i słodko*

Wiemy, że jeżeli  $f$  ma biegun stopnia  $n$  w  $z = z_k$ , to

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wielkością skończoną, bo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_k)} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_k)^n}$

**Pytanie 1.** Jak zachowuje się funkcja gdy  $z_0$  jest punktem istotnie osobliwym?

**Przykład 2.** Weźmy

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-i \cdot \frac{1}{r} \sin \varphi} \cdot e^{\frac{1}{r} \cos \varphi}.$$

A to dla  $\cos \varphi > 0$  idzie do  $+\infty$ , dla  $\cos \varphi < 0$  idzie do 0, a dla  $\cos \varphi = 0$  nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.

**Przykład 3.**

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx,$$

gdzie  $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że

1.  $R(z)$  nie ma biegunów na osi rzeczywistej

$$2. \quad z \cdot R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu  $r$ . Policzmy

$$\int_{-r}^r R(x) dx.$$

Weźmy funkcję  $R(z)$  i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res } f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) dz \rightarrow 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z) dz = \int_0^\pi r e^{i\varphi} R(r e^{i\varphi}) d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leq \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |r R(r e^{i\varphi})| \pi \rightarrow 0,$$

bo założyliśmy, że  $zR(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Przykład 4.** Transformata Legendre'a geometrycznie niech np.  $f(x) = x^2$ .

Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

$$p = \frac{f(x) - \psi(p)}{x}$$

$$px = f(x) - \psi(p)$$

$$\psi(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$y = px - \frac{p^2}{4}.$$

I ogólnie

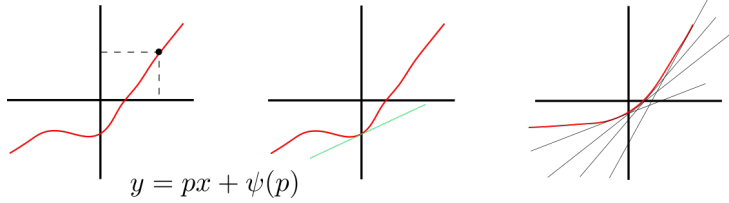
$$f(x) \rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \rightarrow x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$

**Przykład 5.** Funkcja  $L(q, \dot{q})$ .

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{-1}(p).$$



Teraz szukamy  $\psi(p)$ , ale  $\psi$  to jest  $H$ .

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

**Przykład 6.**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli  $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$ , to

$$d\psi(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p \frac{\partial x}{\partial p} \right) dp,$$

ale  $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ , czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy  $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$ .  
Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

**Przykład 7.** Mamy gaz i funkcję stanu  $U(V, N, S)$ . Możemy zrobić z niej jednoformę

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial N} dN + \frac{\partial U}{\partial S} dS.$$

*Albo nawet dd*

$$ddU = \left( \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right) \right) ds \wedge dv = 0.$$

*Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech  $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ . Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza)  $F(V, N, T) = U - T \cdot S$ .*

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

*I później wychodzi*

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$