

Do pytania o L_1 i L_2 .

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f| &= \int_0^1 (x)^{-\frac{2}{3}} = 3 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 &= \int_0^1 (x)^{-\frac{4}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g| &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3\end{aligned}$$

Czyli f - klasy L_1 , g - klasy L_2

Własności (transformaty Fouriera)

1. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. f, g - klasy L_1 , wówczas

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g.$$

(z liniowości całki)

2. Niech f, g - klasy L_1 , wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Dowód. (z twierdzenia Foubiniego)

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \hat{f}(k) dk.$$

□

Obserwacja: chcemy rozwiązać równanie:

$$(f(t))'' + \omega^2 f(t) = g(t).$$

Załóżmy, że nasz f :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Dajmy na to, że

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f'(t) = -2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f''(t) = (-2\pi i k)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Po podstawieniu do oscylatora, uzyskujemy napis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(-2\pi i k)^2 h(k) + \omega^2 h(k) - w(k)] e^{-2\pi i k t} dk = 0,$$

co by oznaczało tyle, że

$$(-4\pi^2 k^2 + \omega^2) h(k) = w(k).$$

Czyli

$$h(k) = \frac{w(k)}{-4\pi^2 k^2 + \omega^2}.$$

Ale wiemy, że

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(k)}{\omega^2 - 4\pi^2 k^2} e^{-2\pi i k t} dt.$$

Obserwacja: Jeżeli f - klasy L_1 i f' - klasy L_1 , to $\mathcal{F}(f')(x) = 2\pi i x (\mathcal{F}f)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(k) e^{-2\pi i k x} dk = f(k) e^{-2\pi i k x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-2\pi i x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk}_{\mathcal{F}(f)}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$, to znaczy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, oraz skoro f' - klasy L_1 , to

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(k) dk.$$

Skoro f' - klasy L_1 , to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - f(0)| \leq \left| \int_0^{+\infty} f'(k) dk \right| \leq M.$$

Widzimy zatem, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \leq M$ znaczy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty$, to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \square$$

Zatem

$$\mathcal{F}(f')(x) = (2\pi i x)(\mathcal{F}f)(x),$$

(jeżeli $f, f', \dots, f^{(m)}$ - klasy L_1) i ogólniej

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi i x)^m (\mathcal{F}f)(x).$$

Obserwacja: Niech f - klasy L_1 , wówczas $\frac{d}{dx}(\mathcal{F}f)(x) = -2\pi i \mathcal{F}(xf)$

Dowód.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{F}f)(x+h) - (\mathcal{F}f)(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(k)e^{-2\pi i k(x+h)} - f(k)e^{-2\pi i kx} \right) dk = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi i kx} \left(\frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \right) dk. \quad (\star)
 \end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\pi i k e^{-2\pi i kh}}{1} = -2\pi i k.$$

Zatem dalej mamy

$$(??) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi i k f(k) e^{-2\pi i kx} dk = -2\pi i (\widehat{xf}).$$

□

Transformata odwrotna

1. policzmy $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} dk.$$

Wcześniej napisaliśmy $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$. No to weźmy $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i kx} dk$, ale to jeszcze nie teraz, bo taka całka jeszcze nie istnieje. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dk = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dx.
 \end{aligned}$$

Policzmy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k x} e^{-\varepsilon|x|} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i k x} e^{-\varepsilon|x|} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i k x} e^{\varepsilon|x|} dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-2\pi i k + \varepsilon)x} dx = \\
 &= \frac{1}{-2\pi i k - \varepsilon} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} e^{-2\pi i k + \varepsilon} \Big|_{-\infty}^0.
 \end{aligned}$$

(★★)

Ale $e^{-2\pi i k x} \cdot e^{-\varepsilon x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$(??) = \frac{-1}{-2\pi i k - \varepsilon} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon + 2\pi i k} + \frac{1}{\varepsilon - 2\pi i k} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2}.$$

Zatem

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2} dk.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\varepsilon L)^2} \cdot \varepsilon \cdot dL = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon^2 dL}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon)} \cdot$$

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{2\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{1}{1 + L^2} dL = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{dL}{1 + L^2} = \frac{2f(0)}{2\pi} (\arctg(L))_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \frac{f(0)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{f(0)}{\pi} \cdot \pi = f(0) \quad \square.
 \end{aligned}$$

Niech $f_L(x) = f(x + L)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_L(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(L + k) e^{-2\pi i k x} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k') e^{-2\pi i x(k' - L)} dk' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x L} f(k') e^{-2\pi i x k'} dk' = \\ &= e^{2\pi i x L} (\mathcal{F}f).\end{aligned}$$

Policzmy całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f_L)(x) dx$. Wiemy, że

$$f_L(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f_L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i L} \mathcal{F}f.$$

Czyli

$$f(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{2\pi i L} dL.$$

Mamy wzór na transformatę odwrotną, czyli wiemy, że jeżeli $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk$, to $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} dk$