

Przykład 1. *Całka*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots$$

Jak przemnożymy przez $(x^2 + 1)^3$ to dostaniemy wyrażenie regularne.

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \right).$$

Ala

$$\left(\frac{1}{(z+i)^3} \right)'' = \left(-\frac{3}{(z+i)^4} \right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} (-3)(-4) \frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{2^4 i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Przykład 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx.$$

Taka, że $|zR(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$
np.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = J, \quad \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0. \end{array}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2i(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{iax} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{-iax} dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

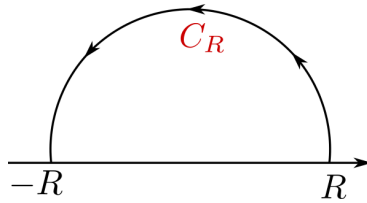
Twierdzenie 1. (*Lemat Jordana*)

Niech $f(z)$ - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys ??) taka, że

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0.$$



Dowód.

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaRe^{i\varphi}} d\varphi \right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi}.$$

Czyli

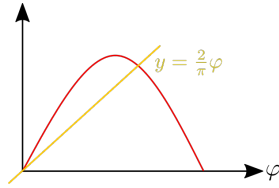
$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} \cdot e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \underbrace{R \cdot \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi}_J.$$

Stąd

$$J = \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = 2 \left. \frac{-\pi}{2aR} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

□



Rysunek 0.1: w15-2

Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Twierdzenie 2. (*Lemat*)

Niech f - holomorphyzna i ograniczona na $R(a, 0, r)$. Wówczas możemy

przedłużyć f do funkcji holomorficznego na $K(a, r)$. Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \dots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

Dowód. Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że $H(z)$ jest holomorficzną na $K(a, r)$. Wystarczy pokazać, że $H(z)$ jest holomorficzną w $z = a$.

Policzmy $H'(a)$.

$$H'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(a+h) - H(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)^2 f(a+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h f(a+h)$$

Albo skoro f - ograniczona na $R(a, 0, r)$, to $0 \leq |h f(a+h)| \leq hM \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, czyli $H'(a) = 0$, więc $H(z)$ jest holomorficzną na $K(a, r)$.

$$H(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Czyli (bo $c_0 = 0$ i $c_1 = 0$, bo $H'(0) = 0$)

$$(z-a)^2 f(z) = c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

Co oznacza, że nasz $f(z)$ da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z-a)^1 + \dots$$

Jak położymy $c_2 \equiv f(a)$, to wtedy f - holomorficzną na $K(a, r)$ □

Twierdzenie 3. (Weierstrass)

Niech f - holomorficzną na $R(a, 0, r)$, i a - punkt istotnie osobliwy funkcji f . Wówczas

$$\forall_{r>0} \quad f(R(a, 0, r)) = \mathbb{C}.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że f - ma w a punkt istotnie osobliwy i

$$\forall_{r>0} \quad \forall_{c \in \mathbb{C}} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_z \quad |z-a| < r \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.

Wiemy, że f ma w a punkt istotnie osobliwy oraz

$$\exists_{r>0} \quad \exists_{c \in \mathbb{C}} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_z |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że f ma w a punkt istotnie osobliwy.

Jeżeli

$$\forall_z |z - a| < r, |f(z) - c| \geq \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ jest ograniczona i holomorficzna na $R(a, 0, r)$.

Oznacza to, że możemy przedłużyć $g(z)$ do funkcji holomorficznego na $K(a, r)$.

Czyli możemy rozwinąć z w szereg Laurenta na $K(a, r)$.

$$g(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

i) Jeżeli $a_0 \neq 0$, to znaczy, że $g(a) \neq 0$, czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a) - c},$$

to znaczy, że $f(a) - c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$ i sprzeczność, bo jeżeli f ma w a konkretną wartość a na $R(a, 0, r)$ jest holomorficzną to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

a skoro f ma w a punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z - a)^k}.$$

i) Jeżeli $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, to znaczy, że

$$g(z) = (z - a)^n \left(c_0 + \underbrace{c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots}_{\varphi(z)} \right), \quad c_0 \neq 0.$$

Zauważmy, że $\varphi(z)$ jest holomorficzną i $\varphi(a) \neq 0$, możemy więc rozwinąć $\frac{1}{\varphi(z)}$ w $K(a, r)$, bo $\frac{1}{\varphi(z)}$ - też jest holomorficzną na $K(a, r)$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots$$

Zatem

$$\frac{1}{f(z) - c} = g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

czyli

$$f(z) - c = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot (d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots),$$

czyli

$$f(z) = c + \frac{d_0}{(z - a)^n} + \frac{d_1}{(z - a)^{n-1}} + \frac{d_2}{(z - a)^{n-2}} + \dots$$

i sprzeczność, bo wtedy wiemy, że $f(z)$ miałaby w $z = a$ biegun n -tego rzędu, a $f(z)$ ma w $z = a$ punkt istotnie osobliwy.

□