Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = ” e \cdot E + e(v \times B) ”.$$

Przykład 1. *Niech* $X = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Niech M *- rozmaitość,* $\dim M = 2$. *Co oznacza napis*

$$x \lrcorner \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t)\frac{\partial}{\partial x} + p(t)\frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t)\frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dx = dH,$$

a teraz coś takiego:

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2 dx.$$

To wypluje na wyjściu równania ruchu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p}(t) = -kx$$
$$m\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:
Niech $I = [0,1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x,y) = |x-y|$) czy I jest otwarty w $\mathbb{R}$? *chyba nie.*
Niech $I = [0,1[\subset [0,2]$, czy I jest otwarty w $[0,2]$? *chyba tak.*

$$B(0,1) = \{x \in [0,2], \quad d(0,x) < 1\} = [0,1[.$$

Definicja 1.

$$\mathbb{R}^m_+ = \left\{(x^1,\ldots,x^{m-1},x^m), \quad x^1,\ldots,x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geqslant 0\right\},$$

$$\mathbb{R}^m_0 = \left\{(x^1,\ldots,x^{m-1},0), \quad x^1,\ldots,x^{m-1} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Niech M - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości M składa się z takich map φ_α, że

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m_+,$$

($\mathcal{O}$ - otwarty w M), gdzie $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ - otwarte w $\mathbb{R}^m_+$, to M nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli $p \in M$ i $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^m_0$, to mówimy, że p należy do brzegu M.
(brzeg rozmaitości M oznaczamy przez ∂M)

Pytanie 1. *Co to jest różniczkowalność φ^{-1}, jeżeli dziedzina $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}^m_+$, który nie jest otwarty w $\mathbb{R}^m$?*

Mówimy wówczas tak:

Definicja 2. *Niech $U \subset \tilde{U}$, $\tilde{U}$ - otwarty w $\mathbb{R}^m$, U - otwarty w $\mathbb{R}^m_+$. φ jest klasy $\mathcal{C}^r$ na U, jeżeli istnieje $\tilde{\varphi}$ klasy $\mathcal{C}^r$ na $\tilde{U}$ i $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$.*

Pytanie 2. *Czym jest ∂S, jeżeli S - okrąg?*

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie:

$$\text{sześcian} \xrightarrow{\partial} \text{boki sześcianu} \xrightarrow{\partial} \text{rogi sześcianu},$$

$$\text{kula} \xrightarrow{\partial} \text{sfera} \xrightarrow{\partial} \{\phi\}.$$

Obserwacja:
Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętymi do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m-1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 3. *Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ - baza $T_p\partial M$, wybierzmy orientację na M.*
Niech σ - krzywa na M taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \ldots, 0, t) \in \mathbb{R}^m_+,$$

niech $\overline{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M, jeżeli orientacja $\langle \overline{n}, f_1, \ldots, f_{m-1}\rangle$ jest zgodna z orientacją M.

Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \to T$ - parametryzacja T oraz $\varphi_2 : U_2 \to T$ - parametryzacja T. Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\underset{h}{\exists} h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^\star \omega = \int_{U_2} h^\star \left(\varphi_1^\star \omega\right) \overset{?}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^\star \omega = \int_{U_2} \varphi_2^\star \omega.$$

$$\langle (kL)^\star \omega, v\rangle = \langle \omega, (kL)_\star v\rangle = \langle k^\star \omega, L_\star v\rangle = \langle L^\star k^\star \omega, v\rangle,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt}\overline{\sigma}$ to

$$(kL)_\star v = \frac{d}{dt}\left(k\left(L\left(\overline{\sigma}(t)\right)\right)\right) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_\star L_\star v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.
Obserwacja:

$$\eta = arctg\frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2}\frac{1}{y}dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2}\frac{x}{y^2}dy = \omega$$