Refleksja

Czy to

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest fajne?

Przykład 1.
$$\nabla P = \left[\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right],$$
$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right],$$

to możemy zrobić takie coś:

$$\text{"}(\nabla P \cdot \nabla Q)\text{"} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Twierdzenie 1. *f - holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy f - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.*

Dowód. $\implies$ było
$\impliedby$ Zauważmy, że skoro $P(x,y)$, $Q(x,y)$ spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja
$$F(x,y) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna na $U \subset \mathbb{R}^2$, czyli dla $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ jest

$$\underbrace{F(x+h_1, y+h_2) - F(x,y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h),$$

$\frac{r(x,y,h)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$
Czyli

$$\left.\begin{bmatrix} \overbrace{P(x+h_1,y+h_2)-P(x,y)}^{\Delta P} \\ \underbrace{Q(x+h_1,y+h_2)-Q(x,y)}_{\Delta Q} \end{bmatrix}\right. \overset{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{bmatrix} + r(x,y,h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z+h)-f(z) &= P(x+h_1,y+h_2)+iQ(x+h_1,y+h_2)-(P(x,y)+iQ(x,y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i\,(bh_1+ah_2) + r = \\ &= (a+ib)\,(h_1+ih_2) + r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z h do 0, to $\frac{r}{h} \to 0$, więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$$

$\square$

Stwierdzenie 1. *Niech $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$, f - holomorficzna na $\mathcal{O}$, a $g : U \to \mathbb{C}$ - holomorficzna na U. Wówczas $g \circ f$ - holomorficzna na $\mathcal{O}$.*

Dowód.

$$\begin{aligned}(g\circ f)' = g'(f)f' &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1 b \\ a_1 b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -(a_1 b + ab_1) \\ a_1 b + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

a tak wygląda macierz pochodnej f - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). □

Oznaczenia

niech $M \subset \mathbb{R}^2$, $\langle dx, dy\rangle = T_p^* M$. Wprowadźmy

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\overline{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Jeżeli $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, to

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(dz + d\overline{z}\right) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\left(dz - d\overline{z}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} d\overline{z}. \end{aligned}$$

Obserwacja: niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\end{aligned}$$

.

Przykład 2. $f(z) = z^2 = z \cdot z$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

a $g(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = z \neq 0.$$

Czyli g - nie jest holomorficzna

Przykład 3. *Obliczmy całkę:*

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left|\begin{array}{c} z = re^{i\theta} \\ dz = rie^{i\theta} d\theta \end{array}\right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Stwierdzenie 2. *Jeżeli f - holomorficzna na $\mathcal{O}$ i $\Omega \subset \mathcal{O}$, to*

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\Omega} d(f dz) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial d\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

Twierdzenie 2. *(wzór Cauchy)*
Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, niech $\xi \in \Omega$. Wówczas

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\Omega} \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}.$$

Obserwacja: jeżeli f - holomorficzna na Ω, to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-\xi}dz.$$

Wynik $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)}\frac{dz}{z} = 1$ otrzymamy dla $\xi = 0$ i $f(z) = 1$

Dowód. niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\xi}.$$

zatem wiemy, że

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) = \int_{\Omega} dg(z).$$

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-\xi}dz + \int_{\partial K(\xi,\epsilon)}\frac{f(z)}{z-\xi}dz = \int\int\limits_{\Omega_\epsilon}\frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\wedge dz.$$

Pytanie: co się dzieje, jak przejdziemy z $\epsilon \to 0$ Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\int\int\limits_{\Omega_\epsilon}\frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}$$

dla $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$, ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka $\int\int\limits_{\Omega_\epsilon} d\overline{z}\wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$. Oznacza, to że

$$\frac{1}{z-\xi}d\overline{z}\wedge dz \overset{\epsilon\to 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon}\cdot\epsilon,$$

czyli w $\epsilon = 0$ nie wybuchnie!
Ale

$$\int_{\partial K(\xi,\epsilon)}\frac{f(z)}{z-\xi}dz = -\int_0^{2\pi}\frac{f(\xi+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\epsilon i e^{i\theta}d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= if(c)\cdot\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi i f(c) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} -2\pi i f(\xi),$$

gdzie $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$.
Zatem
$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_{\Omega} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

$\square$

Twierdzenie 3. *(Liouville)*
Jeżeli f - ograniczona i holomorficzna na całym $\mathbb{C}$, to f jest stała.

Obserwacja: a co z sinusem? $f(x) = \sin(x)$, ale trzeba zastanowić się nad $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Dla np. $z = it$,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.