0.0.1 dodatek na temat kąta

Było

$$\sin(\sphericalangle \dot{z}, \overline{z}).$$

Ma być

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = |z||\dot{z}| \sin\left(\sphericalangle(z, \dot{z})\right).$$

0.0.2 Powrót do residuów w nieskończoności

Dostaliśmy na Wykładzie 18

$$a_n = -\frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) z^{n-1} dz.$$

Wielkość

$$-a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) dz$$

nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności.

Stwierdzenie 1. *Niech f - holomorficzna na $\mathbb{C}$ z wyjątkiem punktów $z_1, \ldots, z_k$, ale z_i - biegun p_i rzędu (nie ma punktów istotnie osobliwych). Wówczas*

$$\sum_{\operatorname{Res} f + \operatorname{Res} \infty} f = 0.$$

Dowód. Niech z_i takie, że

$$\underset{A}{\exists} \ \underset{i}{\forall} \quad z_i \in A.$$

Wówczas

$$-\int\limits_{\partial A} f + \sum_i \int\limits_{\partial K(z_i, r_i)} = 0.$$

□

Pytanie 1. *Jak obliczyć a_1?*

Zauważmy, że gdy rozwiniemy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

w szereg Laurenta wokół zera, to $g(z)$ przyjmuje postać

$$g(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

Zauważmy, że

$$\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{a_2}{z^4} + \frac{a_{-1}}{z^3} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \ldots.$$

Zatem

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}.$$

Przykład 1.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = \sum_{\substack{\mathrm{Res}\ \frac{1}{8} \\ (-1)}} f = -\operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Ale

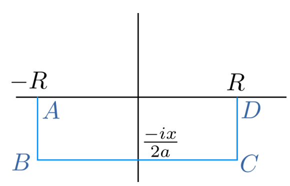
$$f(z) = \frac{1}{(z^8+1)^2}.$$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^8 + 1\right)^2} = \frac{z^{16}}{(1+z^8)^2}$$

i liczymy $\operatorname*{Res}_{0} \quad \frac{g(z)}{z^2}$ *Ale*

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \cdot z^{14}}{(1+z^8)^2} = 0.$$

Więc całka też 0.



Rysunek 1: w20-1

Przykład 2. *Sytuacja jak na rys. 1*

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2}\, dt, \quad a \geqslant 0.$$

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[(t-\frac{ix}{2a})^2 + \frac{x^2}{4a^2}\right]} dt = e^{-a\frac{x^2}{4a^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-\frac{ix}{2a})^2} dt.$$

Liczymy teraz

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{+R} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R-\frac{ix}{2a}}^{R-\frac{ix}{2a}} e^{-as^2} ds.$$

Niech $f(z) = e^{-az^2}$

$$\int\limits_{AB} f + \int\limits_{BC} f + \int\limits_{CD} f + \int\limits_{DA} f = 0.$$

BC *już mamy, więc*

$$\int\limits_{BC} f = -\int\limits_{DA} f - \int\limits_{BA} f - \int\limits_{CD} f.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{CD} f = 0.$$

Parametryzacja $CD := \left\{z = R + iy, -\frac{x}{2a} \leqslant y \leqslant 0\right\}$

$$\int\limits_{CD} f = \int\limits_{-\frac{x}{2a}}^{0} idy \cdot e^{-a(R+iy)^2} = i \int\limits_{-\frac{x}{2a}}^{0} dy \cdot e^{-aR^2} e^{-2Riya} e^{ay^2}.$$

$$\left|\int\limits_{CD} f\right| \leqslant e^{-aR^2} \left|\frac{x}{2a}\right| \cdot \left|e^{-2Riya}\right| \cdot \max_{-\frac{x}{2a}\leqslant y\leqslant 0} \left|e^{ay^2}\right| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I tak samo będzie z całką po AB*. Jeszcze zostało* DA

$$\lim_{R\to+\infty} -\int\limits_{DA} f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Zatem

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

0.1 Transtormata Fouriera

Obserwacja: Rozwińmy $f(z)$ w $R(0, a, b)$, $a, b < 1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t)\\ a<t<b}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Wstawmy $z = e^{ix}$

$$g(z) = f\left(e^{ix}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{mx}.$$

Ale

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(0,t)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \begin{matrix} z = e^{ix} \\ dz = ie^{ix}dx \end{matrix} = \frac{1}{2\pi i} i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(e^{ix}\right)}{e^{(ix)(n+1)}} e^{ix} dx.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

Definicja 1. *Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy wielkość*

$$\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xt} f(t) dt.$$

Uwaga: transformatę Fouriera możemy zdefiniować też tak

Definicja 2. *(inne notacje)*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\sigma xt} f(t) dt,$$

gdzie $m = \{1, 2\pi\}$, $q = \{-1, 1\}$, $\sigma = \{1, 2\pi\}$.
Konwencja u nas:

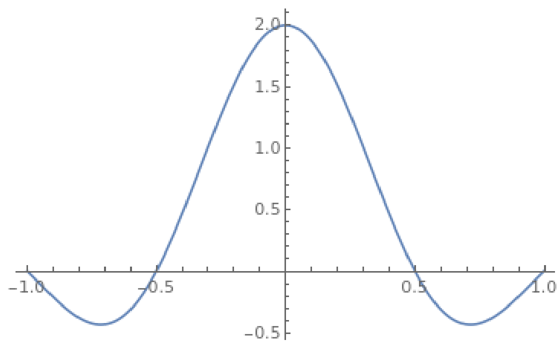
- $m = 1$
- $q = -1$
- $\sigma = 2pi$

Przykład 3.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi tx} dt = \int\limits_{-a}^{+a} e^{-i2\pi tx} dt = -\frac{1}{2\pi ix} e^{-i2\pi tx} \Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{2\pi ix} \left[e^{-i2\pi ax} - e^{i2\pi ax}\right] = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}.$$

Czyli jak na rys. 2



Rysunek 2: Wynik przefourierowania f

Definicja 3. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Mówimy, że*

- f *- klasy* L_1, *jeżeli*
$$\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty.$$
- f *- klasy* L_2, *jeżeli*
$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < +\infty.$$

Przykład 4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & x > 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$

Zbadać, czy f *jest klasy* L_1 *lub (i)* L_2 *i czy* g *jest klasy* L_1 *lub (i)* L_2