Przypomnienie

Niech V - przestrzeń funkcji nad $\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{C}$. Odwzorowanie

$$V \times V \to \mathbb{C}$$

nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli:

1. $\underset{x\in V}{\forall} \langle x|x\rangle \geqslant 0,\ \langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\underset{x,y\in V}{\forall} \quad \underset{\lambda\in\mathbb{C}}{\forall} \langle \lambda x|y\rangle = \lambda \langle x|y\rangle$
3. $\underset{x,y\in V}{\forall} \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$
4. $\underset{x,y,z\in V}{\forall} \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

Uwaga:

a) $\langle x|\lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y|x\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y|x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle$

b) Niech $f, g \in V$ - klasy $L_2(\mathbb{R})$, wówczas $\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ spełnia warunki 1-4

$$\langle f|f\rangle = \int f\overline{f} = \int |f|^2.$$

c) Nierówność Schwarza:

$$\underset{u,w\in V}{\forall} \|u\|^2 \|w\|^2 \geqslant |\langle u|w\rangle|^2 .$$

(moduł z prawej strony, bo to zespolone jest, a kwadraty, żeby uniknąć pierwiastków)

Twierdzenie 1. *(Wzór Plancherela, Parsevala)*
Niech f - klasy L_2, wówczas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\lambda)|^2\, d\lambda.$$

Dowód. W naszym języku ten warunek to

$$\langle f|f\rangle = \langle \mathcal{F}f|\mathcal{F}f\rangle\,.$$

Czy $\mathcal{F}$ jest operatorem unitarnym?
Prawa strona:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\lambda)|^2\,d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\,(\mathcal{F}f)(\lambda)\cdot\overline{(\mathcal{F}f)(\lambda)} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-2\pi i x\lambda}\cdot\overline{\int_{-\infty}^{\infty} ds f(s)e^{-2\pi i s\lambda}} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-2\pi i x\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} ds\overline{f(s)}e^{2\pi i s\lambda} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds\overline{f(s)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda(\mathcal{F}f)(\lambda)e^{2\pi i s\lambda} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds\overline{f(s)}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\overline{f(s)}f(s) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds\,|f(s)|^2\,.
\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 1. *Niech f - klasy L_2, wówczas zachodzi nierówność Heisenberga*

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,|f(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\left|\widehat{f(\lambda)}\right|^2 d\lambda}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f(\lambda)}\right|^2 d\lambda} \geqslant \frac{1}{16\pi^2}.$$

Przypomnienie: jeżeli $|\psi(x)|^2$ jest gęstością prawdopodobieństwa, to

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1, \quad x_{\text{śr}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,|\psi(x)|^2\,dx.$$

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{śr}})^2\,|\psi(x)|^2\,dx.$$

Dla $x_{\text{śr}} = 0$, mamy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\psi(x)|^2\,dx$

Dowód. (Heisenberg)
Załóżmy, że $x_{\text{śr}} = \int x\,|f(x)|^2\,dx = 0$, przypadek ogólny omówimy później. Pamiętamy, że

1. $\widehat{f'(\lambda)} = 2\pi i\lambda\widehat{f(\lambda)}$, czyli $\lambda\widehat{f(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\widehat{f'(\lambda)}$
2. Jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to
$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\Re(z_1\overline{z_2}).$$
$$\begin{aligned} &z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \\ &\quad(x_1+iy_1)(x_2-iy_2) + (x_1-iy_1)(x_2+iy_2) = \\ &\quad= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\Re(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$
3. Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, to
$$|z| \geqslant |\Re(z)|\,.$$
4. $\underset{u,v\in V}{\forall}\ \|u\|^2\,\|v\|^2 \geqslant |\langle u|v\rangle|^2$

Mamy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,|f(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\left|\widehat{f(\lambda)}\right|^2 d\lambda \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\lambda\widehat{f(\lambda)}\right|^2 d\lambda = .$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2\pi i}\widehat{f'(\lambda)}\right|^2 d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f'(\lambda)}\right|^2 d\lambda = .$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 \, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|f'(\lambda)|^2}_{\text{Plancherel}} d\lambda.$$

Jeżeli $xf(x)$ nazwiemy u, to cała pierwsza całka, to $\langle u|u\rangle = \|u\|^2$. Dalej, druga całka to $\|v\|^2$. Stąd

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \|u\|^2 \|v\|^2 \geqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{f'(x)}dx \right|^2}_{|\langle u|v\rangle|^2} \underset{(3)}{\geqslant} \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Re \left(\underbrace{xf(x)}_{z_1} \underbrace{\overline{f'(x)}}_{z_2} \right) dx \right|^2 \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{f'(x)} + \overline{xf(x)}f'(x)dx \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left(f(x)\overline{f(x)} \right) dx \right|^2 = .$$

$$\underset{\text{przez części}}{=} \frac{1}{16\pi^2} \left| x\,|f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right|^2 = .$$

Wiemy, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |f(x)|^2$ istnieje, więc

$$x\,|f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \left| -\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = .$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \underbrace{\widehat{f(x)}}_{\text{Plancherel}} \Big|^2 d\lambda.$$

$\square$

Co się dzieje w przypadku ogólnym? Zauważmy, że

$$f\widehat{(x+L)} = e^{2\pi i x L} \widehat{f(x)}.$$

Wówczas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_{\text{śr}})^2 \left|\widehat{f(\lambda)}\right|^2 d\lambda \underset{t=\lambda-\lambda_{\text{śr}}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left|\widehat{f(t+\lambda_{\text{śr}})}\right| dt = .$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left|e^{2\pi i t\lambda_{\text{śr}}}\widehat{f(t)}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left|\widehat{f(t)}\right|^2 dt.$$

Analogicznie,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{śr}})^2 \left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{śr}})^2 \left|\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f(x)}\right)\right| dx =$$

$$= \underset{\text{jakieś przejścia}}{\ldots} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left|f(s)\right|^2 ds.$$

Pytanie 1. *A ile wynosi* $\mathcal{F}(1)$*?*

Warunek $A = 0$ można postawić bardziej naturalnie:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} |A| < \varepsilon.$$

Warunek $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} f(x) = g(x)$, tak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - g(x))\, dx = 0.$$

Albo tak:

$$\underset{h(x)}{\forall} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)dx.$$

To nas doprowadzi do pojęcia dystrybucji, ale dopiero jutro.