

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli  $z \in K(z_0, r'_2)$  i  $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli  $|z - z_0| > r'_1$ , to mamy, że dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - z_0)^n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}, \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi,$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzną na pierścieniu  $R(z_0, r_1, \infty)$ , to jak wyglądało by rozwinięcie  $f(z)$ ?

Zauważmy, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r'_2 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi}) d\varphi}{(r'_2 e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \cdot \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| \cdot 2\pi,$$

ale jeżeli  $f$  ograniczona poza kołem  $K(z_0, r'_1)$ , to znaczy, że

$$\forall_{r'_2 > r'_1} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| < M.$$

Czyli

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \xrightarrow{r'_2 \rightarrow \infty} 0,$$

więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzną na  $R(z_0, 0, r_2)$ , to jak wyglądałoby rozwinięcie?

Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r'_1 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi}) (r'_1 e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\substack{\exists: |f(z)| < M, z \in K(z_0, r_1) \\ M}} |f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi})| \cdot |2\pi|.$$

Czyli dla  $z \in K(z_0, r_2)$ ,  $f$  - holomorficzna na  $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

**Pytanie 1.** Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się  $a_n$  do  $\frac{f^n(z_0)}{n!}$ ?

**Koniec obserwacji, wracamy do dowodu**

**Pytanie 2.** Czy wzory na  $a_n$  i  $d_n$  można uprościć?

**Przypomnienie:** jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $\Omega$ , to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że  $f(z)$  - holomorficzne na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , a funkcja  $\frac{1}{(z-z_0)^n}$  - też jest holomorficzna na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzna na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , czyli

$$\int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

To samo możemy powiedzieć o  $d_n$

$$\int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(z - z_0)^{n-1} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n}(z - z_0)^n,$$

$$\text{ale } d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

**Twierdzenie 1.** Niech  $C$  - krzywa na  $\mathbb{C}$  (zamknięta lub nie) i niech  $f(z)$  - ciągła na  $C$ . Wówczas funkcja

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorficzna na  $\mathbb{C} - C$  dla  $p \in \mathbb{Z}$  i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $z_0 \notin C$ . Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \quad (*)$$

Zatem

$$(\text{??}) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z - z_0)} \left[ \frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(z - z_0)^p} \right] - p \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{p+1}} = \quad (1)$$

$$= \int_C d\xi f(\xi) \left[ \underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p}}{z - z_0}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}} \right]. \quad (\Delta\Delta)$$

Ale  $(\Delta)$  - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi - z)^p}.$$

$$(\Delta) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Wiemy, że  $g(z)$  - holomorficzna dla  $z \notin C$ , czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi - z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego, niż } (z - z_0).$$

Zatem

$$(\Delta) = \int_C d\xi f(\xi) \left[ \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego niż } (z - z_0) - \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} \right].$$

$$|(\Delta)| \leq \left| \max_{\xi \in C} f(\xi) \right| \cdot |\text{długość } C| \cdot |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

□

**Wniosek:** dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Wiemy, że  $f'(z)$  - też jest holomorficzna (bo wzór na  $\varphi$  z  $p = 2$ )