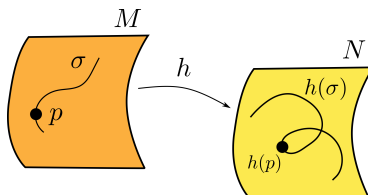


0.1 Przypomnienie

(rys 1)

Dla $v \in T_p M$, jest



Rysunek 1: Przypomnienie

$$h_* v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t)) \sigma'(t),$$

czyli $v = [\sigma] = \frac{d}{dt} \sigma(t)$,

$$h_* v = \underset{\text{macierz kwadratowa}}{h'(\sigma(t))} v.$$

Przykład 1. *Niech*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\} \cap S^2.$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\} \cap S^2.$$

Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).

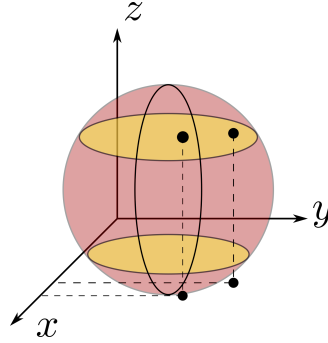
$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z \quad (z, x) \rightarrow h(z, x) = \left[\frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \right]$$

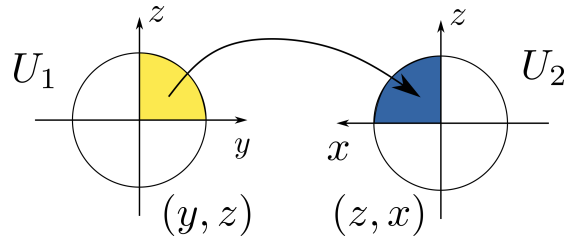
$$(x > 0, z > 0).$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) & \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (z) & \frac{\partial}{\partial x} (z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$



Rysunek 2: fig3-2



Rysunek 3: fig3-3

Przykład 2. *Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości $2L$ i promieniu R . (rys 4)*

$$\begin{aligned}x(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sin \theta \\y(\theta, t) &= \left(R - t \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cos \theta \\z(\theta, t) &= \left(t \cos \frac{\theta}{2} \right).\end{aligned}$$

*To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.
Mamy θ' i t' .*

$$\begin{aligned}x'(\theta', t') &= \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \cos \theta' \\y'(\theta', t') &= - \left(R - t' \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right) \right) \sin \theta' \\z'(\theta', t') &= t' \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2} \right).\end{aligned}$$

Obszary wspólne: (rys 5)

$$W_1 = \left\{ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\} = \left\{ 0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi \right\}.$$

Dla W_1

$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

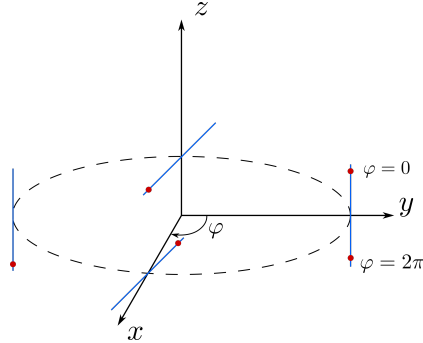
dla W_2

$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

Szukamy macierzy przejścia

$$\varphi'_1(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi'_2(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \varphi'_1 < 0 \quad \det \varphi'_2 > 0.$$



Rysunek 4: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?

0.2 Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w \mathbb{R}^n

1. Niech $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \in \mathbb{R}^n$ (np. rys 6)

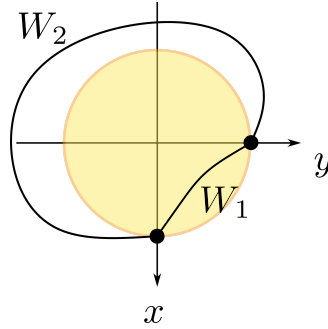
Wprowadźmy oznaczenia:

$$I_{(i,0)}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \right\}.$$

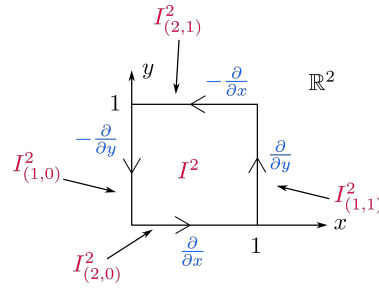
$$I_{(i,1)}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \right\}.$$

(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I_{(2,0)}^2 = "I_{(1,1)}^2" + " - I_{(2,1)}^2" + " - I_{(1,0)}^2,$$



Rysunek 5: Obszary wspólne



Rysunek 6: fig3-6

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)
- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.
Zdefiniujemy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I_{i,\alpha}^n,$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki I^n .

Niech M - rozmaitość, $\dim M = n$, $I^n \in M$. Niech $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Chcemy obliczyć $\int_{\partial I^n} \omega$. Dowolna $n-1$ forma z $\Lambda^{n-1}(M)$ ma postać

$$\begin{aligned} \omega = & f_1(x^1, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\partial I^n} \omega$ rozbije się na n składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \left\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\
&= \delta_{ij} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n_{j,\alpha}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n.
\end{aligned}$$