Przykład 1. *Całka*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots.$$

Jak przemnożymy przez $(x^2+1)^3$ *to dostaniemy wyrażenie regularne.*

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}\right).$$

Ale

$$\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \left(-\frac{3}{(z+i)^4}\right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}(-3)(-4)\frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{2^4}\cdot\frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{2^4 i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Przykład 2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx.$$

Taka, że $|zR(z)| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

np.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2} dx = J, \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}.$$

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)}{2i(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2}e^{iax}dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+b^2}e^{-iax}dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

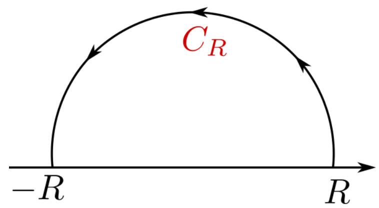
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx.$$

Twierdzenie 1. *(Lemat Jordana)*
*Niech $f(z)$ - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys **??**) taka, że*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \to 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_r} f(z)e^{iaz}dz \to 0.$$



Dowód.

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| = \left|\int\limits_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaRe^{i\varphi}}d\varphi\right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}.$$

Czyli

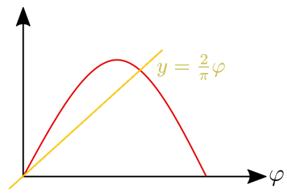
$$\left|\int\limits_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\cdot e^{iaR\cos\varphi}\cdot e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right| R\cdot \underbrace{\int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi}_{J}.$$

Stąd

$$J = \left|2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi\right| \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = 2\,\frac{-\pi}{2aR}e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right).$$

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \leqslant \sup_{p\in[0,\pi]}\left|f(Re^{i\varphi})\right| \frac{\pi}{aR}\left(1-e^{-aR}\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

□



Rysunek 1: w15-2

0.1 Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Twierdzenie 2. *(Lemat)*
Niech f - holomorficzna i ograniczona na $R(a,0,r)$. Wówczas możemy przedłużyć f do funkcji holomorficznej na $K(a,r)$. Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

Dowód. Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $H(z)$ jest holomorficzna w $z = a$.
Policzmy $H'(a)$.

$$H'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{H(a+h) - H(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h-a)^2 f(a+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 f(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} hf(a+h).$$

Ale skoro f - ograniczona na $R(a,0,r)$, to $0 \leqslant |hf(a+h)| \leqslant hM \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, czyli $H'(a) = 0$, więc $H(z)$ jest holomorficzna na $K(a,r)$.

$$H(z) = c_0 + c_1(z-a)^1 + c_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Czyli (bo $c_0 = 0$ i $c_1 = 0$, bo $H'(0) = 0$)

$$(z-a)^2 f(z) = c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots.$$

Co oznacza, że nasz $f(z)$ da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z-a)^1 + \ldots.$$

Jak położymy $c_2 \equiv f(a)$, to wtedy f - holomorficzna na $K(a,r)$ □

Twierdzenie 3. *(Weierstrass)*
Niech f - holomorficzna na $R(a,0,r)$, i a - punkt istotnie osobliwy funkcji f. Wówczas

$$\forall_{r>0} \quad f(R(a,0,r)) = \mathbb{C}.$$

Dowód. Chcemy pokazać, że f - ma w a punkt istotnie osobliwy i

$$\forall_{r>0} \ \forall_{c\in\mathbb{C}} \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{z} \quad |z-a| < r \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.
Wiemy, że f ma w a punkt istotnie osobliwy oraz

$$\exists_{r>0} \ \exists_{c\in\mathbb{C}} \ \exists_{\varepsilon>0} \ \forall_{z} \, |z-a| < r, |f(z) - c| \geqslant \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że f ma w a punkt istotnie osobliwy.
Jeżeli

$$\underset{z}{\forall} |z-a| < r, |f(z) - c| \geqslant \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ jest ograniczona i holomorficzna na $R(a, 0, r)$. Oznacza to, że możemy przedłużyć $g(z)$ do funkcji holomorficznej na $K(a, r)$. Czyli możemy rozwinąć z w szereg Laurenta na $K(a, r)$.

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots.$$

$i)$ Jeżeli $a_0 \neq 0$, to znaczy, że $g(a) \neq 0$, czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a) - c},$$

to znaczy, że $f(a) - c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$ i sprzecznośc, bo jeżeli f ma w a konkretną wartość a na $R(a, 0, r)$ jest holomorficzna to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

a skoro f ma w a punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z-a)^k}.$$

$i)$ Jeżeli $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, to znaczy, że

$$g(z) = (z-a)^n \left(c_0 + \underbrace{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}_{\varphi(z)} \right), \quad c_0 \neq 0.$$

Zauważmy, że $\varphi(z)$ jest holomorficzna i $\varphi(a) \neq 0$, możemy więc rozwinąć $\frac{1}{\varphi(z)}$ w $K(a, r)$, bo $\frac{1}{\varphi(z)}$ - też jest holomorficzna na $K(a, r)$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Zatem

$$\frac{1}{f(z) - c} = g(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

czyli

$$f(z) - c = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \left(d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots\right),$$

czyli

$$f(z) = c + \frac{d_0}{(z-a)^n} + \frac{d_1}{(z-a)^{n-1}} + \frac{d_2}{(z-a)^{n-2}} + \ldots$$

i sprzeczność, bo wtedy wiemy, że $f(z)$ miałaby w $z = a$ biegun n-tego rzędu, a $f(z)$ ma w $z = a$ punkt istotnie osobliwy.

□