Do pytania o L_1 i L_2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f| = \int\limits_{0}^{1} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 = \int\limits_{0}^{1} (x)^{-\frac{4}{3}} \text{ nie istnieje}$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g| = \int\limits_{1}^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} \text{ nie istnieje}$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 = \int\limits_{1}^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3$$
.

Czyli f - klasy L_1, g - klasy L_2

0.1 Własności (transformaty Fouriera)

1. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. f, g - klasy L_1, wówczas
$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g.$$
(z liniowości całki)

2. Niech f, g - klasy L_1, wówczas
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

Dowód. (z twierdzenia Foubiniego)
$$\hat{g}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-2\pi ikx}dk.$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-2\pi ikx}dk = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)dk \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)\hat{f}(k)dk.$$
□

Obserwacja: chcemy rozwiązać równanie:
$$(f(t))'' + \omega^2 f(t) = g(t).$$
Załóżmy, że nasz f :
$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$
Dajmy na to, że
$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

$$f'(t) = -2\pi ik \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

$$f''(t) = (-2\pi ik)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2\pi ikt}dk.$$

Po podstawieniu do oscylatora, uzyskujemy napis

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(-2\pi ik)^2 h(k) + \omega^2 h(k) - w(k)\right] e^{-2\pi ikt}dk = 0,$$

co by oznaczało tyle, że

$$\left(-4\pi^2 k^2 + \omega^2\right) h(k) = w(k).$$

Czyli

$$h(k) = \frac{w(k)}{-4\pi^2 k^2 + \omega^2}.$$

Ale wiemy, że

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(k)}{\omega^2 - 4\pi^2 k^2} e^{-2\pi ikt}dt.$$

Obserwacja: Jeżeli f - klasy L_1 i f' - klasy L_1, to $\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = 2\pi ix(\mathcal{F}f)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(k)e^{-2\pi ikx}dk = f(k)e^{-2\pi ikx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-2\pi ix) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi ikx}dk}_{\mathcal{F}(f)}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$, to znaczy, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, oraz skoro f' - klasy L_1, to

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^x f'(k)dk.$$

Skoro f' - klasy L_1, to znaczy, że

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - f(0)| \leqslant \left| \int\limits_0^{+\infty} f'(k)dk \right| \leqslant M.$$

Widzimy zatem, że $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leqslant M$ znaczy, że jeżeli $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty$, to znaczy, że

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \square$$

Zatem

$$\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = (2\pi ix)(\mathcal{F}f)(x),$$

(jeżeli $f, f', \ldots, f^{(m)}$ - klasy L_1) i ogólniej

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi ix)^m (\mathcal{F}f)(x).$$

Obserwacja: Niech f - klasy L_1, wówczas $\frac{d}{dx}\left(\mathcal{F}f\right)(x) = -2\pi i\mathcal{F}(xf)$

Dowód.

$$\frac{d}{dx}\left(\mathcal{F}f\right)(x)=\lim_{h\to0}\frac{(\mathcal{F}f)(x+h)-(\mathcal{F}f)(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(f(k)e^{-2\pi ik(x+h)}-f(k)e^{-2\pi ikx}\right)dk=$$

$$=\lim_{h\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-2\pi ikx}\left(\frac{e^{-2\pi ikh}-1}{h}\right)dt \qquad (\star)$$

Ale

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{-2\pi ikh}-1}{h}\overset{\text{H}}{=}\lim_{h\to0}\frac{-2\pi ike^{-2\pi ikh}}{1}=-2\pi ik.$$

Zatem dalej mamy

$$(\star)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}-2\pi ikf(k)e^{-2\pi ikx}dk=-2\pi i\widehat{(xf)}.$$

□

0.2 Transformata odwrotna

1. policzmy $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathcal{F}f\right)(x)dx$

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-2\pi ikx}dk.$$

Wcześniej napisaliśmy $\int f\hat{g}=\int\hat{f}g$. No to weźmy $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-2\pi ikx}dk$, ale to jeszcze nie teraz, bo taka całka jeszcze nie istnieje. Zauważmy, że

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dk=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx.$$

Policzmy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-2\pi ikx}e^{-\varepsilon|x|}dx+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-2\pi ikx}e^{\varepsilon|x|}dx=$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{(-2\pi ik-\varepsilon)x}dx+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(-2\pi ik+\varepsilon)x}dx=\frac{1}{-2\pi ik-\varepsilon}\,e^{(-2\pi ik-\varepsilon)x}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{-2\pi ik+\varepsilon}\,e^{-2\pi ik+\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{0} \qquad (\star\star)$$

Ale $e^{-2\pi ikx}\cdot e^{-\varepsilon x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

$$(\star\star)=\frac{-1}{-2\pi ik-\varepsilon}+\frac{1}{-2\pi ik+\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon+2\pi ik}+\frac{1}{\varepsilon-2\pi ik}=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(2\pi k)^2}.$$

Zatem

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(k)\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(2\pi k)^2}dk.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\varepsilon L)^2} \cdot \varepsilon \cdot dL = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon^2 dL}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{2\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{1}{1+L^2} dL = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{dL}{1+L^2} = \frac{2f(0)}{2\pi} \left(arctg(L)\right)_{-\infty}^{+\infty} = \frac{f(0)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{f(0)}{\pi} \cdot \pi = f(0) \quad \square$$

Niech $f_L(x) = f(x+L)$. Wtedy

$$\mathcal{F}\left(f_L(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(L+k) e^{-2\pi i k x} dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k') e^{-2\pi i x (k'-L)} dk' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x L} f(k') e^{-2\pi i x k'} dk' = e^{2\pi i x L} \left(\mathcal{F} f\right).$$

Policzmy całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F} f_L)(x)$. Wiemy, że

$$f_L(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f_L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i L} \mathcal{F} f.$$

Czyli

$$f(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{2\pi i L} dL.$$

Mamy wzór na transformatę odwrotną, czyli wiemy, że jeżeli $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk$, to $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} dk$