

Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

Przykład 1. Niech $X = \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p}$, $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2.$$

Niech M - rozmaitość, $\dim M = 2$. Co oznacza napis

$$x \lrcorner \omega = dH?$$

$$\left\langle dx, x(t) \frac{\partial}{\partial x} + p(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dp - \left\langle dp, \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle dx = dH,$$

a teraz coś takiego:

$$x(t)dp - p(t)dx = \frac{p^2}{m}dp + kx^2dx.$$

To wypływa na wyjściu równania ruchu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}, & \dot{p}(t) &= -kx \\ m \frac{dx}{dt} &= p, & \frac{dp}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

0.1 Rozmaitość z brzegiem

Obserwacja:

(rys 5-1) Niech $I = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, (metryka $d(x, y) = |x - y|$) czy I jest otwarty w \mathbb{R} ? *chyba nie*.

Niech $I = [0, 1[\subset [0, 2]$, czy I jest otwarty w $[0, 2]$? *chyba tak*.

$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

Definicja 1.

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Niech M - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości M składa się z takich map φ_α , że

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}_+^m,$$

(\mathcal{O} - otwarty w M), gdzie $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$ - otwarte w \mathbb{R}_+^m , to M nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli $p \in M$ i $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}_0^m$, to mówimy, że p należy do brzegu M .
(brzeg rozmaitości M oznaczamy przez ∂M)

Pytanie 1. Co to jest różniczkowalność φ^{-1} , jeżeli dziedzina $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}_+^m$, który nie jest otwarty w \mathbb{R}^m ?

Mówimy wówczas tak:

Definicja 2. Niech $U \subset \tilde{U}$, \tilde{U} - otwarty w \mathbb{R}^m , U - otwarty w \mathbb{R}_+^m . φ jest klasy C^r na U , jeżeli istnieje $\tilde{\varphi}$ klasy C^r na \tilde{U} i $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$.

(rys 5-3)

Pytanie 2. Czym jest ∂S , jeżeli S - okrąg?

Odp. $\partial S = \{\phi\}$.
Jeszcze takie uzasadnienie: (rys 5-4)

sześcián $\xrightarrow{\partial}$ boki sześciánu $\xrightarrow{\partial}$ rogi sześciánu,

kula $\xrightarrow{\partial}$ sfera $\xrightarrow{\partial} \{\phi\}$.

Obserwacja:

Zbiór ∂M wraz z mapami $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ i otoczeniami obciętych do $\mathcal{O}|_{\partial M}$ jest rozmaitością o wymiarze $m-1$, jeżeli $\dim M = m$.

Definicja 3. Niech $p \in \partial M$, $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ - baza $T_p \partial M$, wybierzmy orientację na M (rys 5-5).

Niech σ - krzywa na M taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

niech $\bar{n} = [\sigma]$. Mówimy, że orientacja ∂M jest zgodna z orientacją M , jeżeli orientacja $\langle \bar{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$ jest zgodna z orientacją M .

(rys 5-6) Niech M - rozmaitość, $U \subset M$, $\dim M = n$, $\omega \in \Lambda^k M$, $\varphi_1 : U_1 \rightarrow T$ - parametryzacja T oraz $\varphi_2 : U_2 \rightarrow T$ - parametryzacja T . Z własności funkcji φ_1 i φ_2 wiemy, że

$$\exists h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^* \omega = \int_{U_2} h^* (\varphi_1^* \omega) \stackrel{(\Delta)}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^* \omega = \int_{U_2} \varphi_2^* \omega.$$

(Δ) - (rys 5-7)

$$\langle (kL)^* \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_* v \rangle = \langle k^* \omega, L_* v \rangle = \langle L^* k^* \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli $v = [\sigma(t)]$, $v = \frac{d}{dt} \bar{\sigma}$ to

$$(kL)_* v = \frac{d}{dt} (k(L(\bar{\sigma}(t)))) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_* L_* v.$$

Wniosek: całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

0.2 Lemat Poincare

Mieliśmy $\omega = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$, wiemy, że $d\omega = 0$. **Pytanie:** czy istnieje η taka, że $\omega = d\eta$? Wówczas wiemy, że $d\omega = d(d\eta) = 0$.

Obserwacja:

$$\eta = \arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$