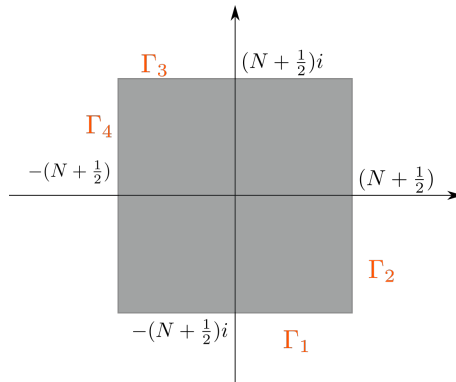


## Sumowanie szeregów



Rysunek 0.1: Kontur  $\Gamma$

**Stwierdzenie 1.** Niech  $\Gamma$  - kontur przechodzący przez wierzchołki

$$\left(N \pm \frac{1}{2}\right)(1 \pm i) \quad (\text{Rysunek ??}).$$

I niech  $f(z)$  - taka, że

$$\exists_M \quad \forall_{|z| > M} \quad |f(z)| < \frac{\text{const}}{|z|^2},$$

$f(z)$  nie ma biegunów na  $\Gamma$  oraz nie ma biegunów dla  $z \in \mathbb{Z}$ . Wówczas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0.$$

*Dowód.* Oszacujemy  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ .

Dla  $z \in \Gamma$

a) Jeżeli  $z \in \Gamma_4$  lub  $\Gamma_2$ , to

$$\Gamma_2 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = N + \frac{1}{2} + iy \right\}.$$

$$\Gamma_4 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = -(N + \frac{1}{2}) + iy \right\}.$$

$$|\operatorname{ctg}(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \cdot \left| \frac{2i}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}} \right|.$$

Dalej mamy dla  $|e^{iN\pi}| = 1$

$$\left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}} \right| \quad (\Delta)$$

**Obserwacja:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |(\Delta)| &\leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi N} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} \leq \\ &\leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} < \operatorname{const}. \end{aligned}$$

b) Analogicznie pokażemy, że  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  jest ograniczony dla  $z \in \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$ . Zatem

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz \right| \leq \left| \max_{z \in \Gamma} f(z) \right| \cdot |8N + 4| \cdot \operatorname{const} \underset{N > M}{\leq} \frac{\operatorname{const}}{N^2} (8N + 4) \cdot \operatorname{const} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

□

**Wniosek:**

Niech  $b$  - zbiór wszystkich biegunów  $f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 2\pi i \sum_b \operatorname{Res}(f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)) = 0.$$

**Pytanie 1.** *W jakich punktach  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  ma bieguny i którego rzędu?*

Zauważmy, że

$$\frac{(\pi z - 0\pi) \cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi}.$$

A np.

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{(z - n) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos(\pi z) - (z - n)\pi \sin(\pi z)}{\pi \cos(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi}.$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0,$$

czyli

$$0 = \sum_c \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) + \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

gdzie  $c$  - bieguny  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ ,  $d$  - bieguny  $f(z)$ . Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

**Przykład 1.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Rozdzielmy sobie sumę na dwie:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} f(n) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} f(n)}_{\text{bieguny } \operatorname{ctg}(\pi z) \text{ bez } 0} + \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} n^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n^2} \right) = - \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}.$$

**Obserwacja:** Niech  $P = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$ . Niech  $D$  - zbiór biegunów  $f(z)$  na  $\Omega$  i  $f$  - holomorphyzna na  $\Omega - D$ . Wówczas  $\frac{f'}{f}$  ma na  $\Omega$  bieguny pierwszego rzędu dla  $z \in P \cup D$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in P$ . Oznacza to, że

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

gdzie  $k \geq 1$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{ka_k(z - z_0)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k + \dots}{a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z - z_0) + \dots}{a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots}. \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)f'}{f} &= k. \end{aligned}$$

Czyli  $\frac{f'}{f}$  ma w  $z_0 \in P$  biegun pierwszego rzędu i wynosi  $k$ . □

Niech  $z_1 \in D$ ,  $f$  ma w  $z = z_1$  biegun  $n$  - tego rzędu. Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_1)^{n-1}} + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\frac{-na_{-n}}{(z-z_1)^{n+1}} + \frac{-(n-1)a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^n} + \dots}{\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}} + \dots} = \\ &= \frac{1}{(z-z_1)} \frac{[-na_{-n} + -(n-1)a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots]}{[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots]}.\end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \frac{f'}{f}(z-z_1) = -n.$$

**Wniosek:**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} = \sum_{z \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_1 \in P} \frac{f'}{f}.$$