

# Wykłady z Analizy III

Jakub Korsak

X 2019 - II 2020

## Spis treści

Spis treści	ii
Wstęp	iii
1 04.10.2019, przypomnienie i całka z jednoformy	1
2 07.10.2019, całka po kostce, rozmaitości zorientowane i prawie twierdzenie Stokesa	9
3 11.10.2019, wstęga Moebiusa i dowód twierdzenia Stokesa (1/2)	15
4 14.10.2019, dowód twierdzenia Stokesa (2/2), agitacja na temat lematu Poincare i iloczyn wewnętrzny	21
5 18.10.2019, brzeg rozmaitości i dalsza agitacja lematu Poincare	27
6 21.10.2019, dowód lematu Poincare, przykłady	31
7 25.10.2019, domkniętość i zupełność formy, długość krzywej i zastosowania twierdzenia Stokesa	35
8 28.10.2019, zastosowania twierdzenia Stokesa, holomorficzność funkcji i wzory Cauchy-Riemanna	41
9 04.11.2019, warunek Cauchy-Riemanna, wzór Cauchy i twierdzenie Liouville (1/2)	47

10	08.11.2019, <i>twierdzenie Liouville (2/2), Zasadnicze Twierdzenie Algebry i początek Szeregów Laurenta</i>	53
11	15.11.2019, <i>zabawa z Szeregiem Laurenta, związki z szeregiem Taylora</i>	59
12	22.11.2019, <i>przedłużenie analityczne funkcji punkty osobliwe i bieguny</i>	65
13	18.11.2019, <i>punkt izolowany, osobliwość istotna, twierdzenie o residuach</i>	71
14	25.11.2019, <i>fajność residuów i Transformata Legendre geometrycznie</i>	77
15	29.11.2019, <i>Lemat Jordana, funkcja wokół punktu istotnie osobliwego i twierdzenie Weierstrass</i>	83
16	02.12.2019, <i>sumowanie szeregów</i>	89
17	06.12.2019, <i>twierdzenie Rouche, Zasadnicze Twierdzenie Algebry v2.0, sumowanie szeregów v2.0, residuum w <math>+\infty</math> (1/3)</i>	95
18	09.12.2019, <i>przygotowanie do twierdzenia Kasner-Arnold, krzywizna, odwzorowania konforemne, residuum w <math>+\infty</math> (2/3)</i>	101
19	13.12.2019, <i>twierdzenie Kasner-Arnold</i>	107
20	16.12.2019, <i>residuum w <math>+\infty</math> (3/3) + super twierdzenie, transformata Fouriera</i>	113
21	20.12.2019, <i>własności transformaty Fouriera i transformata odwrotna</i>	119
22	09.01.2020, <i>Splot, wchodzenie z granicą pod całkę i równanie przewodnictwa</i>	125
23	10.01.2020, <i>Iloczyn skalarny, unitarność transformaty Fouriera, nierówność Heisenberga</i>	133
24	13.01.2020, <i>Dystrybucje - własności, delta Diraca</i>	139
25	17.01.2020, <i>Wzór Greena, <math>\Delta \frac{1}{r} = \delta</math></i>	145
26	20.01.2020, <i>Skąd się bierze Prawo Coulumba, Przestrzeń Schwartz, dystrybucje temperowane, dwa daszki to ptaszek</i>	151

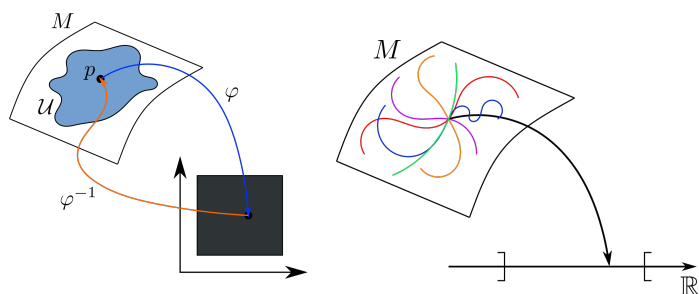


## Wstęp

Niniejszy dokument zawiera moje notatki z wykładu Analiza III wygłoszonego przez dr Marcina Kościeleckiego na Wydziale Fizyki UW w semestrze zimowym roku akademickiego 2019/2020.



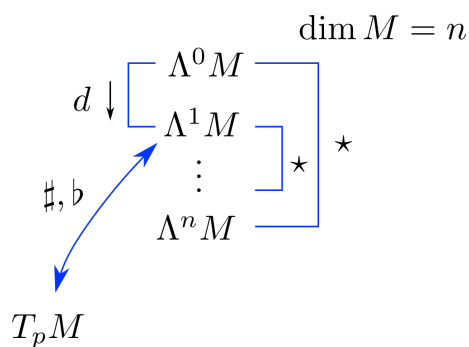
## Przypomnienie



Rysunek 1.1: Przypomnienie

Niech  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_p M$ , to wtedy

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \left| \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_k) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{bmatrix} \right|.$$



Rysunek 1.2: Przypomnienie c.d.

$$\langle v|w\rangle = [v]^T [g_{ij}] \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}.$$

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^n g_{nn} dx^n,$$

(gdy  $g_{ij}$  - diagonalna)

$$A^i g_{ij} dx^j.$$

### To jak to było z tymi wektorami?

Niech  $A \in T_p M$ ,  $A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + A^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $B \in T_p M$ ,  $B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^k}$ .  
Jaka jest interpretacja geometryczna wielkości

$$\langle A^\sharp, B \rangle, \quad (g_{ij} \text{ - diagonalna}).$$

$$A^\sharp = A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k.$$

$$\begin{aligned} \langle A^\sharp, B \rangle &= \left\langle A^1 g_{11} dx^1 + \dots + A^k g_{kk} dx^k, B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \\ &= g_{11} A^1 B^1 + \dots + g_{kk} A^k B^k = A \cdot B. \end{aligned}$$

Czyli gdyby  $\|B\| = 1$ , to  $\langle A^\sharp, B \rangle$  byłoby długością rzutu  $A$  na kierunek  $B$ .  
Niech  $\dim M = 3$ ,  $\Lambda^2 M \ni A$ ,

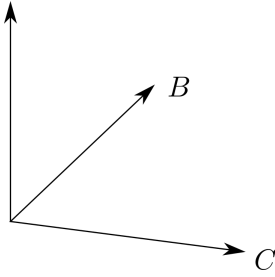
$$A = A^1 dx^2 \wedge dx^3 + A^2 dx^3 \wedge dx^1 + A^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

$$B = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad C = C^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + C^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in T_p M.$$



$$\begin{aligned}
 \langle A, B, C \rangle &= A^1 \langle dx^2 \wedge dx^3, B, C \rangle + A^2 \langle dx^3 \wedge dx^1, B, C \rangle + A^3 \langle dx^1 \wedge dx^2, B, C \rangle = \\
 &= A^1 \left[ \begin{matrix} \langle dx^2, B \rangle & \langle dx^3, B \rangle \\ \langle dx^2, C \rangle & \langle dx^3, C \rangle \end{matrix} \right] + A^2 \left[ \begin{matrix} \langle dx^3, B \rangle & \langle dx^1, B \rangle \\ \langle dx^3, C \rangle & \langle dx^1, C \rangle \end{matrix} \right] + \\
 &+ A^3 \left[ \begin{matrix} \langle dx^1, B \rangle & \langle dx^2, B \rangle \\ \langle dx^1, C \rangle & \langle dx^2, C \rangle \end{matrix} \right] = \\
 &= A^1 \begin{bmatrix} B^2 & B^3 \\ C^2 & C^3 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} B^3 & B^1 \\ C^3 & C^1 \end{bmatrix} + A^3 \begin{bmatrix} B^1 & B^2 \\ C^1 & C^2 \end{bmatrix} = \\
 &= A^1 (B^2 C^3 - B^3 C^2) + A^2 (B^3 C^1 - B^1 C^3) + A^3 (B^1 C^2 - B^2 C^1) = \\
 &= "A^1(B \times C)_1 + A^2(B \times C)_2 + A^3(B \times C)_3" = "A \cdot (B \times C)" \\
 &= \left| \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{bmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

Wychodzi tak jak na (rys 1.3)



Rysunek 1.3: Się okazuje, że wychodzi z tego coś jak iloczyn wektorowy

## Problem

$\dim M = 3$ , mamy

$$\Lambda^1 M \ni F = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3$$

oraz krzywą  $S$  w  $\mathbb{R}^3$  (np. spiralę) (rys 1.3). Chcemy znaleźć pracę związaną z przemieszczeniem z punktu  $A$  do  $B$ .

1. sparametryzujemy kształt  $S$ , np.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), t \in [0, 4\pi] \\ z = t \end{array} \right\}.$$

2. możemy na spirali wygenerować pole wektorów stycznych.

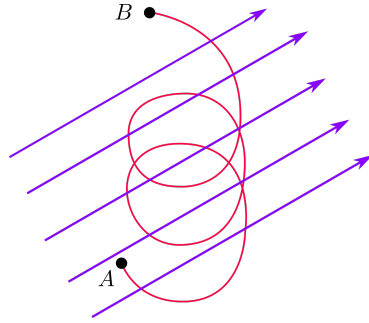
$$\text{Jeżeli } p = \left[ \begin{array}{c} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{array} \right] \bigg|_{t=t_0}, \text{ to}$$

$$T_p M = \left\langle \left[ \begin{array}{c} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{array} \right] \right\rangle \bigg|_{t=t_0}.$$

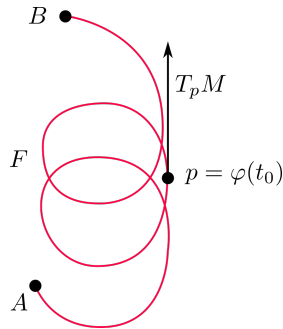
(rys 1.4)

3. Niech  $T_p M \ni v = -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ . (rys 1.5)  
Możemy policzyć np.

$$\begin{aligned} \int \langle F, v \rangle &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \left\langle F, \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle dt = \int_0^{4\pi} \left\langle \varphi^* F, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$



Rysunek 1.4: Mrówka (albo koralik) na spirali + jakieś pole wektorowe (grawitacyjne albo mocny wiatrak)



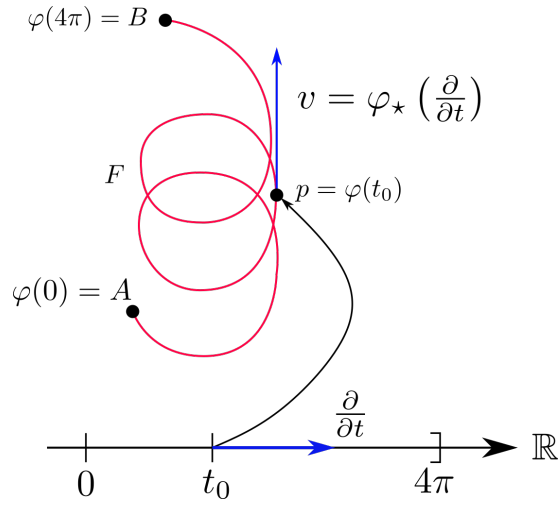
Rysunek 1.5: można jakoś to sparametryzować przez  $\varphi$

**Definicja 1.** Niech  $M$  - rozmaitość,  $L$  - krzywa na  $M$ ,  $w \in \Lambda^1 M$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  - parametryzacja krzywej  $L$ , czyli

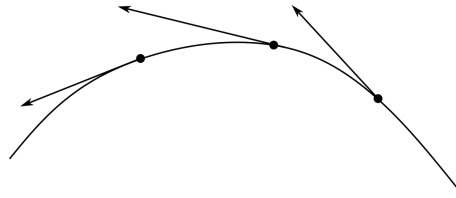
$$L = \{\varphi(t), t \in [a, b]\}.$$

Całką z jednoformy po krzywej nazywamy wielkość (rys 1.6)

$$\int_a^b \left\langle \varphi^* w, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$



Rysunek 1.6



Rysunek 1.7: Cała sztuka polega na takim kolekcjonowaniu wektorków stycznych

**Przykład 1.** *niech (rys 1.7)*

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

*i*

$$\omega = ydx = \left( y \frac{\partial}{\partial x} \right)^\#.$$

Wtedy mamy  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ ,  $\varphi^*\omega = \left| \begin{matrix} x=t-1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = (2t-1)dt$

$$\left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (2t-1)dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2t-1$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi^*\omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_1^2 (2t-1)dt = [t^2 - t]_1^2 = 2$$

.

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \varphi_1(u) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 5-2u \end{bmatrix}.$$

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 \left\langle \varphi_1^*\omega, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du,$$

ale  $\frac{x=2-u}{dx=-u}$  i mamy

$$\varphi^*\omega = (5-2u)(-du) = (2u-5)du.$$

Ostatecznie

$$\int_{C_2} \omega = \int_1^2 (2u-5)du = [u^2 - 5u]_1^2 = -6 + 4 = -2.$$



## Wykład 2. 07.10.2019, całka po kostce, rozmaitości zorientowane i prawie twierdzenie Stokesa

### Ostatnio

Była rozmaitość  $M$  z wymiarem  $\dim M = n$ , krzywa

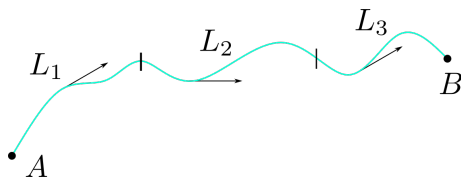
$$L : \{[a, b] \ni t \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

jednoforma  $\omega \in \Lambda^1 M$  i zastanawialiśmy się jak obliczyć

$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^* \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla  $\omega = ydx$ , (rys 2.1)

$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$



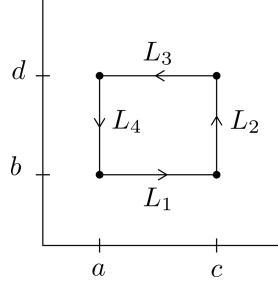
Rysunek 2.1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść.  $L_1 + L_2 + L_3 = L$

### Przykład 2. (rys 2.2)

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \in \Lambda^1 M.$$

Trzeba te krzywe sparametryzować:

$$L_1 = \{(x, b), a \leq x \leq c\}.$$

Rysunek 2.2:  $\dim M = 2$ 

$$L_2 = \{(c, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$L_3 = \{(x, d), a \leq x \leq c\}.$$

$$L_4 = \{(a, y), b \leq y \leq d\}.$$

$$\begin{aligned} \int_L \omega &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega = \\ &= \int_a^c \left\langle \varphi_1^* \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_2^* \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \\ &+ \int_a^c \left\langle \varphi_3^* \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int_b^d \left\langle \varphi_4^* \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy = \\ &= \int_a^c A(x, b) dx + \int_b^d B(c, y) dy + \\ &- \int_a^c A(x, d) dx - \int_b^d B(a, y) dy. \end{aligned}$$

(rys 2.3)

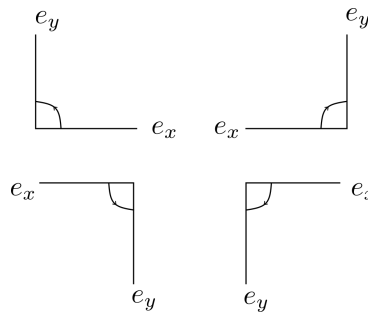
dla  $\dim M = \mathbb{R}^1$ . Niech  $\varphi : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $\varphi(v) = a \cdot v$  ( $\varphi$  - liniowe).  
 $a > 0$  - nie zmienia orientacji (kierunku)  
 $a < 0$  - zmienia kierunek wektora.





Rysunek 2.3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

(rys 2.4)



Rysunek 2.4: Różne orientacje na  $\mathbb{R}^2$ , czy można to jakoś pogrupować?

**Definicja 2.** Niech  $B_1, B_2$  - bazy uporządkowane w  $V$  - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że  $B_1$  i  $B_2$  należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z  $B_1$  do  $B_2$  jest większy od zera. Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem  $V$ .

**Definicja 3.** Orientację standardową na  $\mathbb{R}^n$  nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \dots$$

**Definicja 4.** Niech  $M$  - rozmaitość zorientowana,  $\dim M = n$  i  $S = \{[a, b] \times [c, d] \ni (t_1, t_2) \rightarrow \varphi(t_1, t_2) \in M\}$  - powierzchnia sparametryzowana,  $\Lambda^2 M \ni \omega$  - dwuforma. Wówczas

$$\int_S \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^* \omega, \underbrace{\pm \frac{\partial}{\partial t_1}, \pm \frac{\partial}{\partial t_2}}_{\text{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

**Przykład 3.** weźmy  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  i obliczmy  $\int_P d\omega$ .

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix} \right\}.$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \int_P d\omega &= \int_{[a, b] \times [c, d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dy = \\ &= \int_c^d dy (B(b, y) - B(a, y)) - \left[ \int_a^b dx (A(x, d) - A(x, c)) \right] = \\ &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy - \int_a^c A(x, d) dx - \int_c^d B(a, y) dy = \\ &= \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega + \int_{L_3} \omega + \int_{L_4} \omega. \end{aligned}$$

Czyli

$$\int_P d\omega = \int_L \omega,$$

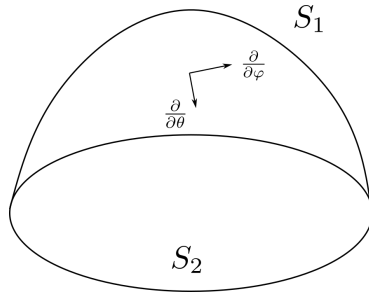
to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa

**Przykład 4.** niech (sytuacja jak na rys 13)  $S = S_1 \cup S_2$ , gdzie

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$ .

$$\int_S \alpha = \int_{S_1} \alpha + \int_{S_2} \alpha.$$



Rysunek 2.5: Tak to wygląda

**Definicja 5.** *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map  $(U_1, \varphi_1)$ , że dla każdej pary  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  takiej, że  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , odwzorowanie  $\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})' > 0$ .*

**Definicja 6.** *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy zorientowaną.*

**Definicja 7.** *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*

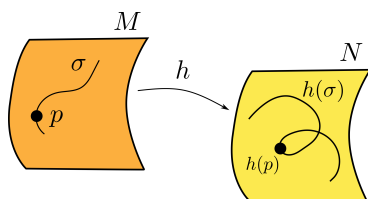


Wykład 3. 11.10.2019, *wstęga Moebiusa i dowód twierdzenia Stokesa (1/2)*

**Przypomnienie**

(rys 1)

Dla  $v \in T_p M$ , jest



Rysunek 3.1: Przypomnienie

$$h_* v = \frac{d}{dt} h(\sigma(t)) = h'(\sigma(t)) \sigma'(t),$$

czyli  $v = [\sigma] = \frac{d}{dt} \sigma(t)$ ,

$$h_* v = \underset{\text{macierz kwadratowa}}{h'(\sigma(t))} v.$$

**Przykład 5.** *Niech*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$U_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\} \cap S^2.$$

$$U_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < 0\} \cap S^2.$$

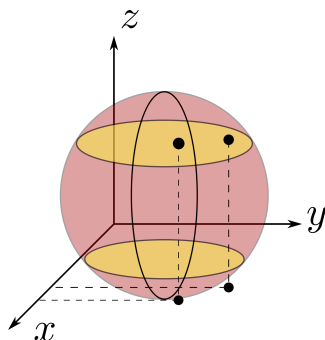
$$U_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\} \cap S^2.$$

$$U_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y < 0\} \cap S^2.$$

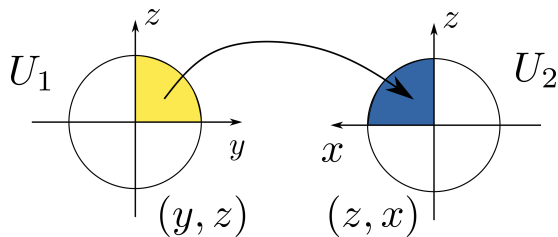
$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\} \cap S^2.$$

$$U_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\} \cap S^2.$$

*Te mapy przerzucają (rys 2) na np. (rys 3).*



Rysunek 3.2: fig3-2



Rysunek 3.3: fig3-3

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$z = z$$

$$(x > 0, z > 0).$$

$$(z, x) \rightarrow h(z, x) = \left[ \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \right]$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) & \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - z^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (z) & \frac{\partial}{\partial x} (x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} & \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - z^2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det h' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} > 0, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ z > 0 \end{matrix}.$$

**Przykład 6.** Wstęga Moebiusa zbudowana z walca o wysokości  $2L$  i promieniu  $R$ . (rys 4)

$$\begin{aligned}x(\theta, t) &= \left(R - t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \sin \theta \\y(\theta, t) &= \left(R - t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cos \theta \\z(\theta, t) &= \left(t \cos \frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

*To jeszcze nie jest bijekcja - potrzebna druga mapa.  
Mamy  $\theta'$  i  $t'$ .*

$$\begin{aligned}x'(\theta', t') &= \left(R - t' \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right) \cos \theta' \\y'(\theta', t') &= -\left(R - t' \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right)\right) \sin \theta' \\z'(\theta', t') &= t' \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta'}{2}\right).\end{aligned}$$

*Obszary wspólne: (rys 5)*

$$\begin{aligned}W_1 &= \left\{0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\pi < \theta' < 2\pi\right\} \\W_2 &= \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\} = \left\{0 < \theta' < \frac{3}{2}\pi\right\}.\end{aligned}$$

*Dla  $W_1$*

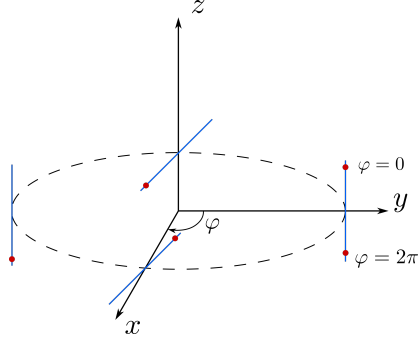
$$\begin{cases} \theta' &= \theta + \frac{3}{2}\pi \\ t' &= -t, \end{cases}$$

*dla  $W_2$*

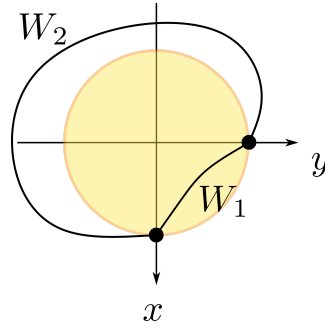
$$\begin{cases} \theta' &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ t' &= t. \end{cases}$$

*Szukamy macierzy przejścia*

$$\begin{aligned}\varphi'_1(\theta, t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi'_2(\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \det \varphi'_1 &< 0 \quad \det \varphi'_2 > 0.\end{aligned}$$



Rysunek 3.4: Gdzie wyląduje biedronka idąc prosto po wstędze?



Rysunek 3.5: Obszary wspólne

**Chcemy dojść do twierdzenia Stokesa na kostce w  $\mathbb{R}^n$**

1. Niech  $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \in \mathbb{R}^n$  (np. rys 6)

Wprowadźmy oznaczenia:

$$I_{(i,0)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$

$$I_{(i,1)}^n := \{ (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x^j \leq 1 \}.$$

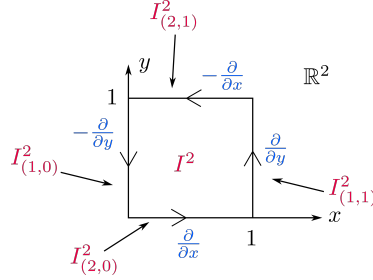
(odpowiednio: ścianka tylna i przednia)

$$\partial I^2 \stackrel{\text{def}}{=} I_{(2,0)}^2 = "I_{(1,1)}^2" + " - I_{(2,1)}^2" + " - I_{(1,0)}^2,$$

(tutaj przepis na dodawanie na rysunku 6)

- ścianki takie zawsze będą przeciwnej orientacji.





Rysunek 3.6: fig3-6

Zdefiniujemy "zbiór"

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} I_{i,\alpha}^n,$$

który nazwiemy brzegiem zorientowanym kostki  $I^n$ .

Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$ ,  $I^n \in M$ . Niech  $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ . Chcemy obliczyć  $\int_{\partial I^n} \omega$ . Dowolna  $n-1$  forma z  $\Lambda^{n-1}(M)$  ma postać

$$\begin{aligned} \omega = & f_1(x^1, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \\ & + f_2(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ & + f_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\int_{\partial I^n} \omega$  rozbije się na  $n$  składników, wystarczy, że udowodnimy Tw. Stokesa dla

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I^n(j,\alpha)} \left\langle f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n = \\
 &= \delta_{ij} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{j,\alpha}^n} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^{j-1} dx^{j+1} \dots dx^n.
 \end{aligned}$$

Wykład 4. 14.10.2019, dowód twierdzenia Stokesa (2/2), agita-  
cja na temat lematu Poincare i iloczyn wewnętrzny

**Końcówka dowodu (Stokesa na kostce)**

*Dowód.* mamy definicję ścianki:

$$\partial I = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} I_{(j,\alpha)},$$

dla  $I^n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ ,  $\omega = f(x^1, \dots, x^n) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ . Wtedy dla  $x = (x^1, \dots, x^n)$  i  $d\tilde{x} = dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n$

$$\begin{aligned} \int_{I(j,\alpha)} \left\langle f(x) d\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle &= \\ &= \delta_{ij} \int_{I(i,\alpha)} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) d\tilde{x} = \\ &= \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^n f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Przechodzimy do sumy

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I(j,\alpha)} \omega = \\ &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) = \\ &= (-1)^{i+0} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) + \\ &+ (-1)^{i+1} \int_{I^n} f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n = \\
&= (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+1} \int_{I^n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1, \dots, dx^n, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle = \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^{i-1} \int_0^1 dx^{i+1} \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\quad \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] \\
&= (-1)^{i+1} \int_0^1 dx^1 \dots \int_0^1 dx^i \dots \int_0^1 dx^n \cdot \\
&\quad \cdot [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)] = \\
&= (-1)^{i+1} \int_{I^n} [f(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)].
\end{aligned}$$

$$LHS = RHS.$$

□

**Uwaga:** Większą kostkę (w sensie długości krawędzi) możemy zawsze podzielić na sumę zorientowanych wspólnie kostek  $I^n$ . Całki na tych ścianach kostek, które się stykają dadzą w efekcie zero.

**Przykład 7.** Niech  $[a, b] \in \mathbb{R}^1$  i  $f \in \Lambda^0([a, b])$ . Wtedy twierdzenie Stokesa wygląda tak ( $xD$ ):

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} df = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

**Przykład 8.** Niech  $\gamma$  - krzywa na  $M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $f \in \Lambda^0 M$ .

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

**Przykład 9.**  $\dim M = 2$ , niech  $\alpha = xydx + x^2dy$ . Policzmy  $\int_{\partial S} \alpha$ .

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_{C_1} \alpha + \int_{C_2} \alpha + \int_{C_3} \alpha,$$

ale

$$\int_{C_1} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

$\varphi$  - parametryzacja  $C_1$ . Jeżeli weźmiemy sobie

$$\int_{C_3} \left\langle \varphi_3^* \alpha, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

$\varphi_3$  - parametryzacja  $C_3$ .

$$C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

zatem  $\varphi_2^* \alpha$  przy  $x = \cos \theta \implies dx = -\sin \theta d\theta$ ,  $y = \sin \theta \implies dy = \cos \theta d\theta$ , mamy

$$\varphi_2^* \alpha = \cos \theta \sin \theta (-\sin \theta d\theta) + (\cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta.$$

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\langle \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle,$$

ale np. tw. Stokesa:  $\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha$ .

$$d\alpha = xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy.$$

$$\int_{\square} \left\langle xdx \wedge dy, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x = \int_0^1 dx \cdot x \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Przykład 10.** Niech  $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Lambda^1(M)$ ,  $\partial K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta, 2\pi \right\}$

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \varphi^* \alpha, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle d\theta.$$

$$\varphi^* \alpha = -\sin \theta (-\sin \theta) d\theta + \cos \theta \cos \theta d\theta = d\theta.$$

Czyli mamy

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ale z drugiej strony dla

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left[ \left( -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy \wedge dx + \left( \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy \right] = \\ &= \left( \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

wyjdzie, że twierdzenie Stokesa się złamało.

Wiemy, że

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A).$$

Niech  $\alpha = x^2 dx + xy dy + 2dz$ .  $\alpha$  jest potencjalna, jeżeli

$$\exists_{\eta \in \Lambda^0 M} d\eta = \alpha \implies d(d\eta) = 0,$$

(rotacja gradientu równa zero)

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} d\eta = \eta(B) - \eta(A).$$

**Definicja 8.** Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = n$ ,

$$i_v : T_p M \times \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k-1} M$$

zdefiniowana następująco:

1.  $i_v f = 0$ , jeżeli  $f \in \Lambda^0 M$
2.  $i_v dx^i = v^i$ , jeżeli  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$
3.  $i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^{st\omega} \omega \wedge i_v(\theta)$ .

Operację  $i_v$  nazywamy iloczynem zewnętrznym i oznaczamy poprzez

$$i_v(\omega) \stackrel{ozn}{=} v \lrcorner \omega.$$

**Obserwacja:**  $i_v(i_v \omega) = 0$  (w domu)

**Przykład 11.** Niech  $v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ ,

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dx.$$

$$v \lrcorner \omega = \langle dx, v \rangle \wedge dy + (-1)^1 dx \langle dy, v \rangle + \langle dz, v \rangle \wedge dx + (-1)^1 dz \wedge \langle dx, v \rangle.$$

**Przykład 12.**

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

$$j = e \frac{\partial}{\partial t} + ev^x \frac{\partial}{\partial x} + ev^y \frac{\partial}{\partial y} + ev^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$j \lrcorner F = ?.$$





Wykład 5. 18.10.2019, brzeg rozmaitości i dalsza agitacja lematu Poincare

Sprawdzić, że

$$j \lrcorner F = "e \cdot E + e(v \times B)".$$

**Przykład 13.** Niech  $X = \dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}(t) \frac{\partial}{\partial p}$ ,  $\omega = dx \wedge dp \in \Lambda^2(M)$ ,

$$\Lambda^0 M \ni H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2.$$

Niech  $M$  - rozmaitość,  $\dim M = 2$ . Co oznacza napis

$$X \lrcorner \omega = dH?$$

$$\begin{aligned} X \lrcorner \omega &= \dot{x} (\partial_x \lrcorner (dx \wedge dp)) + \dot{p} (\partial_p \lrcorner (dx \wedge dp)) = \\ &= \dot{x} (\langle \partial_x, dx \rangle \wedge dp + dx \wedge \langle \partial_x, dp \rangle) + \\ &+ \dot{p} (\langle \partial_p, dx \rangle \wedge dp + dx \wedge \langle \partial_p, dp \rangle) = \\ &= \dot{x} dp - \dot{p} dx = dH = \frac{p}{m} dp + kx dx. \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie

$$\dot{x} dp - \dot{p} dx = \frac{p^2}{m} dp + kx^2 dx.$$

To wypływa na wyjściu równania ruchu

$$m \frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -kx.$$

## Rozmaitość z brzegiem

### Obserwacja:

Niech  $I = [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ , (metryka  $d(x, y) = |x - y|$ ) czy  $I$  jest otwarty w  $\mathbb{R}$ ?  
chyba nie.

Niech  $I = [0, 1[ \subset [0, 2]$ , czy  $I$  jest otwarty w  $[0, 2]$ ?  
chyba tak.

$$B(0, 1) = \{x \in [0, 2], \quad d(0, x) < 1\} = [0, 1[.$$

**Definicja 9.**

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, x^m), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}, \quad x^m \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0), \quad x^1, \dots, x^{m-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Niech  $M$  - rozmaitość, jeżeli atlas rozmaitości  $M$  składa się z takich map  $\varphi_\alpha$ , że

$$\varphi_\alpha(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}_+^m,$$

( $\mathcal{O}$  - otwarty w  $M$ ), gdzie  $\varphi_\alpha(\mathcal{O})$  - otwarte w  $\mathbb{R}_+^m$ , to  $M$  nazywamy rozmaitością z brzegiem. Jeżeli  $p \in M$  i  $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}_0^m$ , to mówimy, że  $p$  należy do brzegu  $M$ .

(brzeg rozmaitości  $M$  oznaczamy przez  $\partial M$ )

**Pytanie 1.** Co to jest różniczkowalność  $\varphi^{-1}$ , jeżeli dziedziną  $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}_+^m$ , który nie jest otwarty w  $\mathbb{R}^m$ ?

Mówimy wówczas tak:

**Definicja 10.** Niech  $U \subset \tilde{U}$ ,  $\tilde{U}$  - otwarty w  $\mathbb{R}^m$ ,  $U$  - otwarty w  $\mathbb{R}_+^m$ .  $\varphi$  jest klasy  $\mathcal{C}^r$  na  $U$ , jeżeli istnieje  $\tilde{\varphi}$  klasy  $\mathcal{C}^r$  na  $\tilde{U}$  i  $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ .

**Pytanie 2.** Czym jest  $\partial S$ , jeżeli  $S$  - okrąg?

Odp.  $\partial S = \{\phi\}$ .

Jeszcze takie uzasadnienie:

sześcian  $\xrightarrow{\partial}$  boki sześcianu  $\xrightarrow{\partial}$  rogi sześcianu,

kula  $\xrightarrow{\partial}$  sfera  $\xrightarrow{\partial} \{\phi\}$ .

**Obserwacja:**

Zbiór  $\partial M$  wraz z mapami  $\varphi_\alpha|_{\partial M}$  i otoczeniami obciętych do  $\mathcal{O}|_{\partial M}$  jest rozmaitością o wymiarze  $m - 1$ , jeżeli  $\dim M = m$ .

**Definicja 11.** Niech  $p \in \partial M$ ,  $\langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$  - baza  $T_p \partial M$ , wybierzmy orientację na  $M$ .

Niech  $\sigma$  - krzywa na  $M$  taka, że

$$\varphi_\alpha \sigma = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}_+^m,$$

niech  $\bar{n} = [\sigma]$ . Mówimy, że orientacja  $\partial M$  jest zgodna z orientacją  $M$ , jeżeli orientacja  $\langle \bar{n}, f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$  jest zgodna z orientacją  $M$ .

**Stwierdzenie 1.** Całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji.

*Dowód.* Niech  $M$  - rozmaitość,  $U \subset M$ ,  $\dim M = n$ ,  $\omega \in \Lambda^k M$ ,

$\varphi_1 : U_1 \rightarrow T$  - parametryzacja  $T$  oraz

$\varphi_2 : U_2 \rightarrow T$  - parametryzacja  $T$ . Z własności funkcji  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  wiemy, że

$$\exists h : \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n \implies \varphi_2 = \varphi_1 \circ h.$$

Wówczas

$$\int_T \omega = \int_{U_1} \varphi_1^* \omega = \int_{U_2} h^* (\varphi_1^* \omega) \stackrel{?}{=} \int_{U_2} (\varphi_1 \circ h)^* \omega = \int_{U_2} \varphi_2^* \omega.$$

$$\langle (kL)^* \omega, v \rangle = \langle \omega, (kL)_* v \rangle = \langle k^* \omega, L_* v \rangle = \langle L^* k^* \omega, v \rangle,$$

ale jeżeli  $v = [\sigma(t)]$ ,  $v = \frac{d}{dt} \bar{\sigma}$  to

$$(kL)_* v = \frac{d}{dt} (k(L(\bar{\sigma}(t)))) = k'(L' \cdot \sigma'(t)) = k_* L_* v.$$

**Wniosek:** całka z formy po rozmaitości nie zależy od wyboru parametryzacji

□

**Lemat Poincare**

Mieliśmy  $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$ , wiemy, że  $d\omega = 0$ .

**Pytanie 3.** *czy istnieje  $\eta$  taka, że  $\omega = d\eta$ ?*

Wówczas wiemy, że  $d\omega = d(d\eta) = 0$ .

**Obserwacja:**

$$\eta = \arctg \frac{x}{y}, \quad d\eta = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} dx - \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy = \omega$$

Wykład 6. 21.10.2019, dowód lematu Poincare, przykłady

**Definicja 12.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ . Zbiór  $\mathcal{O}$  nazywamy *ściągłym* (gwiaździstym), jeżeli istnieje  $p \in \mathcal{O}$  i odwzorowanie  $h(p, x, t)$  takie, że

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \begin{matrix} h(p, x, 0) = p \\ h(p, x, 1) = x \end{matrix}, \quad \forall_{t \in [0,1]} \quad h(p, x, t) \in \mathcal{O}, \quad h(p, x, t) - \text{ciągła}.$$

**Twierdzenie 1.** (Lemat Poincare)

Niech

$$\left( \begin{matrix} \mathcal{O} - \text{zbiór ściągły} \\ \dim \mathcal{O} = n \\ \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \\ d\omega = 0 \end{matrix} \right) \implies \left( \begin{matrix} \exists_{\eta} d\eta = \omega \\ \eta \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}) \end{matrix} \right).$$

*Dowód.* Załóżmy, że zbiór  $\mathcal{O}$  jest zbiorem gwiaździstym, czyli

$$\exists_{p \in \mathcal{O}} \quad \forall_{x \in \mathcal{O}} \quad \left( \begin{matrix} \text{zbiór punktów postaci} \\ pq_1 + xq_2 : q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 > 0 \end{matrix} \right) \text{ (jest zawarty w } \mathcal{O} \text{)}.$$

**Obserwacja:** gdyby istniał operator

$$T : \Lambda^p(\mathcal{O}) \rightarrow \Lambda^{p-1}(\mathcal{O}), \quad p = 1, 2, \dots, n-1,$$

taki, że

$$Td + dT = id,$$

to twierdzenie byłoby prawdziwe. (bo dla  $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{O})$  mielibyśmy  $Td(\omega) + d(T\omega) = \omega$ ).

Więc, gdy

$$d\omega = 0,$$

to

$$d(T\omega) = \omega,$$

czyli przyjmując

$$\eta = T\omega,$$

otrzymujemy

$$d(\eta_i) = \omega.$$

Łatwo sprawdzić, że operator

$$T_1(\omega) = \int_0^1 (t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx)) ,$$

$x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$  spełnia warunek  $Td + dT = id$ .

**Przykład 14.**  $\omega \in \Lambda^1(M)$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\omega = xdx + ydy + zdz$ . Wówczas, gdy  $(\bar{x} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$  jest

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \int_0^1 t^{1-1} \left\langle \underbrace{(xt)dx + (yt)dy + (zt)dz}_{\omega(tx)}, \bar{x} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^1 t^0 (tx^2 + ty^2 + tz^2) dt = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \eta. \end{aligned}$$

Zauważamy, że  $d\eta = \omega$  i działa (dla takiego radialnego pola wektorowego znaleźliśmy potencjał).

**Przykład 15.**  $\omega = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz$ ,  $\omega \in \Lambda^2(M)$ ,  $\dim M = 3$ . Co to jest  $T\omega$ ?

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{2-1} x \lrcorner (xtdx \wedge dy + ytdy \wedge dz + ztdx \wedge dz) dt = \\ &= \int_0^1 t^1 (xtxdy - xtydx + ytydz - ytzdy + ztxdz - ztzdx) dt = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 dy - xydx + y^2 dz - yzdy + zxdz - z^2 dx) = \eta. \end{aligned}$$

Niech

$$T\omega = \int_0^1 t^{p-1} x \lrcorner \omega(tx) dx,$$

gdzie  $x = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ .

Chcemy pokazać, że

$$dT\omega + Td\omega = \omega,$$

gdzie

$$\omega(x) = \sum_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

$$\omega = \overset{\omega_{12}}{x} d \overset{i_1=1}{x} \wedge d \overset{i_2=2}{y} + \overset{\omega_{23}}{y} d \overset{i_1=2}{y} \wedge d \overset{i_2=3}{z} + \overset{\omega_{13}}{z} d \overset{i_1=1}{x} \wedge d \overset{i_2=3}{z}.$$

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Liczymy

$$\begin{aligned} Td_{p+1 \text{ forma}} \omega &= \int_0^1 t^{p+1-1} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \int_0^1 t^p dt \frac{\partial \omega(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} (-1)^\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\omega &= \int_0^1 t^{p-1} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \lrcorner \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 dt \quad t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) x^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT\omega &= \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \sum_{k=1}^p \int_0^1 dt t^{p-1} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^\alpha} \cdot t \cdot x^{i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Zatem dodajemy do siebie  $Td\omega + dT\omega$  i wychodzi

$$\begin{aligned} Td\omega + dT\omega &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 dt \cdot t^p \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n)}{\partial x^j} x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\ &+ \int_0^1 dt p \cdot t^{p-1} \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \underbrace{(\cdot) + (\cdot)}_{\text{równa się zero}} = \\ &= \int_0^1 dt \left( \frac{d}{dt} (t^p \omega_{i_1, \dots, i_p}(tx^1, \dots, tx^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \right) = \\ &= t^p (\omega(tx^1, \dots, tx^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega. \end{aligned}$$

□





Wykład 7. 25.10.2019, domkniętość i zupełność formy, długość krzywej i zastosowania twierdzenia Stokesa

**Definicja 13.** Jeżeli  $\alpha \in \Lambda^k(M)$  taka, że  $d\alpha = 0$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest domknięta. Jeżeli  $\exists$  taka, że  $d\eta = \alpha$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest zupełna.

**Przykład 16.**  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} = -\nabla f(x, y, z)$ .

Dla  $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ , jest  $d\omega = 0$ . Było, że  $\eta = \text{arctg}(\frac{x}{y})$ ,  $d\eta = \omega$ . Problem leży w punkcie  $(0, 0)$  bo nie należy do dziedziny.

### Zastosowania twierdzenia Stokesa (przypomnienie)

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Dostaliśmy wektor  $\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$ , który jest w koszarnej bazie  $A^1 i_1 + A^2 i_2 + A^3 i_3$ , ale

można go zamienić na coś fajniejszego  $A^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}$ .

Dla trójki wektorów  $v_1, v_2, v_3$ , ich  $|v_1, v_2, v_3|$  to objętość. Paweł wprowadził taki napis

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

i zdefiniował objętość tak:

$$\text{vol}(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{G(v_1, v_2, v_3)}.$$

$$A = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Teraz

$$\begin{aligned}
 (\det A)^2 &= (\det A) (\det A) = \det(A) \det(A^T) = \\
 &= \det(A^T A) = \det \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \\
 &= G(v_1, v_2, v_3).
 \end{aligned}$$

**Definicja 14.** Niech  $M$  - rozmaitość i  $\gamma$  krzywa na  $M$ .

$$\gamma = \{\gamma(t) \in M, t \in [a, b]\}.$$

Wówczas

$$\|\gamma\| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt,$$

dla

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}.$$

**Przykład 17.**  $M$  takie, że  $\dim M = 2$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in M, t \in [a, b] \right\}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} dt.$$

dla zmiany parametryzacji jest

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \in M, x_0 \leq x \leq x_1 \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle}.$$

I zmiana na biegunowe

$$\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{bmatrix} \in M, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \right\}.$$

$$\gamma = \int_A^B \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| d\varphi, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix}.$$

Wektorek styczny jest taki

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \left( \begin{bmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} r'(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ale my wiemy, że  $\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j$ , dalej jest

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = r^2 + \left( \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

I w związku z tym możemy podać od razu

$$\|\gamma\| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi.$$

W powietrzu wisi **NIEZALEŻNOŚĆ OD WYBORU PARAMETRYZACJI**, ale to po przerwie.

Niech  $M = \mathbb{R}^3$ ,

$$D = \left\{ \begin{matrix} D^1(t^1, t^2) \\ D^2(t^1, t^2) \\ D^3(t^1, t^2) \end{matrix} \mid a \leq t_1 \leq b, \quad c \leq t_2 \leq d \right\}.$$

$$\|D\| = \int \text{vol} \left( \frac{\partial}{\partial t^1}, \frac{\partial}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2.$$

**Przykład 18.** Niech

$$D = \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \right).$$

Liczmy  $\text{vol}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{bmatrix}.$$

$$\text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \right\|}.$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left\| \begin{bmatrix} 1 + (f_{,x})^2 & (f_{,x})(f_{,y}) \\ (f_{,x})(f_{,y}) & 1 + (f_{,y})^2 \end{bmatrix} \right\| = (1 + (f_{,x})^2)(1 + (f_{,y})^2) - (f_{,x})^2(f_{,y})^2.$$

$$\|D\| = \int_a^b \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}_{ds} dx dy.$$

Wracamy do napisu

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Niech  $A$  - wektor w bazie ortonormalnej. Dla  $\dim M = 3$ ,  $g = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$ ,

$$A = A^1 \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

niech  $\alpha = A^\sharp \in \Lambda^1(M)$ ,  $\gamma$  - krzywa na  $M$ .

$$\alpha = g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} dx^1 + g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} dx^2 + g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} dx^3.$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \left\langle \varphi^\star \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt = \int_\gamma \left\langle \alpha, \frac{\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}}{\|\varphi_\star \frac{\partial}{\partial t}\|} \right\rangle \left\| \varphi_\star \frac{\partial}{\partial t} \right\| dt.$$

Niech  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ .

**Pytanie:** czym jest  $\langle \alpha, v \rangle$ ?

$$\langle \alpha, v \rangle = A^1 \sqrt{g^{11}} g_{11} v^1 + A^2 \sqrt{g^{22}} g_{22} v^2 + A^3 \sqrt{g^{33}} g_{33} v^3.$$

czyli mamy

$$\int_{\gamma} A^{\sharp} = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{t}_{st} dL}_{d\mathbf{L}}.$$

Znowu wracamy do Stokesa.

Niech  $V \subset M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\dim V = 3$ . Wtedy tw. Stokesa znaczy

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega, \quad \omega \in \Lambda^2(M).$$

Niech  $S \subset M$ ,  $\dim M = 3$ ,  $\dim S = 2$ .

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^1(M).$$

**Pytanie 4.** Niech  $\alpha = A^{\sharp}$ , czym jest  $\int_S dA^{\sharp}$ ?

$$\begin{aligned} dA^{\sharp} &= \underbrace{\left( \left( g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,2} - \left( g_{22} A^2 \sqrt{g^{22}} \right)_{,3} \right)}_{D_1} dx^2 \wedge dx^3 + \\ &+ \underbrace{\left( \left( g_{11} A^1 \sqrt{g^{11}} \right)_{,3} - \left( g_{33} A^3 \sqrt{g^{33}} \right)_{,1} \right)}_{D_2} dx^3 \wedge dx^1 + \underbrace{(\dots)}_{D_3} dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S dA^{\sharp} &= \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle + \left\langle D^2 dx^3 \wedge dx^1, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle + \\ &+ \left\langle D^3 dx^1 \wedge dx^2, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle = \\ &= \int \left\langle D^1 dx^2 \wedge dx^3, \frac{\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|} \right\rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\|}_{ds} dx^2 dx^3 + \dots \end{aligned}$$

Pamiętamy, czym była  $\text{rot}(A) = (\star dA^{\sharp})^{\flat} = \int (\text{rot}(A)) \mathbf{n} ds$



Wykład 8. 28.10.2019, zastosowania twierdzenia Stokesa, holomorficzność funkcji i wzory Cauchy-Riemanna

**W ostatnim odcinku**

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{t}_{st} dL}_{d\vec{L}}.$$

$$dA^{\sharp} = \left( \overbrace{(\cdot), -(\cdot)}^{D_1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots$$

$$\int_S dA^{\sharp} = \int D^1 \left\langle dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^2 dx^3 + \int D^2 dx^3 dx^1 + \int D^3 dx^1 dx^2.$$

Przypomnijmy sobie czym jest rotacja wektora (takiego fizycznego)

$$rot(\vec{A}) = \left( \star \left( d\vec{A}^{\sharp} \right) \right)^{\flat},$$

ale

$$\star(dx^2 \wedge dx^3) = g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1,$$

$$\star(dx^3 \wedge dx^1) = g^{11} g^{33} \sqrt{g} dx^2,$$

$$\star(dx^1 \wedge dx^2) = g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

Więc

$$\star dA^{\sharp} = D^1 g^{22} g^{33} \sqrt{g} dx^1 + D^2 g^{33} g^{11} \sqrt{g} dx^2 + D^3 g^{11} g^{22} \sqrt{g} dx^3.$$

$$\begin{aligned} (\star dA^{\sharp})^{\flat} &= D^1 g^{11} g^{22} g^{33} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 g^{22} g^{33} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 g^{33} g^{11} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^3} = \\ &= D^1 \sqrt{g^{22} g^{33}} \sqrt{g^{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + D^2 \sqrt{g^{11} g^{33}} \sqrt{g^{22}} \frac{\partial}{\partial x^2} + D^3 \sqrt{g^{11} g^{22}} \sqrt{g^{33}} \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Czyli dla  $\vec{A}$  - wektor w bazie ortonormalnej jest

$$rot \vec{A} = \begin{bmatrix} D^1 \frac{1}{\sqrt{g^{22} g^{33}}} \\ D^2 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{33}}} \\ D^3 \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \end{bmatrix}.$$

ale  $\text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} = D^1 \frac{1}{g_{22}g_{33}}$ , ale

$$\left(\text{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}\right) \cdot d\vec{s} = D^1 \frac{1}{g_{22}g_{33}} \sqrt{g_{22}g_{33}} dx^2 dx^3,$$

zatem

$$\int_S dA^\sharp = \int_S (\text{rot}\vec{A}) \cdot \vec{n} ds.$$

Czyli teraz mamy tak

$$\int_\gamma A^\sharp = \int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

$$\int_S dA^\sharp = \int_{\partial S} A^\sharp.$$

$$\int_S (\text{rot}\vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t}_{st} dL.$$

**Przykład 19.**  $\dim M = 3$ ,  $V \subset M$ ,  $\dim V = 3$

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp.$$

**Pytanie 5.** *czym jest  $\int_{\partial V} \star A^\sharp$ ?*

$$\star(dx^1) \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\star(dx^2) \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1,$$

$$\star(dx^3) \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2,$$

**Odpowiedź:**

$$\begin{aligned} \star A^\sharp &= A^1 g_{11} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} g^{11} dx^2 \wedge dx^3 + A^2 g_{22} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} g^{22} dx^3 \wedge dx^1 + \\ &+ A^3 g_{33} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} g^{33} dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

następuje cudowne skrócenie i jest

$$A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \quad dx^2 \wedge dx^3 + A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \quad dx^3 \wedge dx^1 + A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad dx^1 \wedge dx^2.$$



Całka z tego interesu:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \star A^\sharp &= \int A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \, dx^2 dx^3 + \int A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}} \, dx^3 dx^1 + \\ &+ \int A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}} \, dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

ale

$$\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot ds = A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}} \, dx^2 dx^3.$$

Czyli ostatecznie

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds.$$

**Pytanie 6.** Jak wygląda  $\int_V d \star A^\sharp$ ?

$$\begin{aligned} \int_V d \star A^\sharp &= \\ &= \int_V \left\langle (A^1 \sqrt{g_{22}g_{33}})_{,1} + (A^2 \sqrt{g_{11}g_{33}})_{,2} + \right. \\ &\quad \left. + (A^3 \sqrt{g_{11}g_{22}})_{,3}, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Dywergencja to było coś takiego:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \star d (\star A^\sharp),$$

wiemy, że

$$\star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \sqrt{g} g^{11} g^{22} g^{33} = \sqrt{g^{11} g^{22} g^{33}},$$

więc

$$\operatorname{div} \vec{A} \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \, dx^1 dx^2 dx^3 = \operatorname{div} \vec{A} \, dV.$$

Zatem ze zdania

$$\int_{\partial V} \star A^\sharp = \int_V d \star A^\sharp$$

wiemy, że

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV.$$

## Analiza Zespółona

(podobno bardzo przyjemny dział analizy)

Można się zastanowić nad taką funkcją:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(t) = e^{iat}; \quad a > 0,$$

(kółko)

$$f(t) = e^{bt}e^{iat}; \quad a, b > 0.$$

(spiralka)

**Definicja 15.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarty.  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Mówimy, że  $f$  jest holomorficzna na  $\mathcal{O}$  jeżeli  $\forall_{z \in \mathcal{O}}$  istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z),$$

gdzie  $f'(z)$  jest funkcją ciągłą.

**Uwaga:** jeżeli nie zostanie to podkreślone, to wszystkie niezbędne struktury przenosimy z  $\mathbb{R}^2$ .

**Uwaga:** dowolną funkcję z  $\mathbb{C}$  możemy zapisać jako  $f(z) = P(x, y) + Q(x, y) \cdot i$ , gdzie  $z = x + iy$  a  $P(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $Q(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

**Przykład 20.**  $f(z) = \cos x + i \sin(xy)$ ,  $z = x + iy$

**Pytanie 7.** Co to znaczy różniczkowalność?

ma istnieć granica (dla  $h \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h, y) + iQ(x+h, y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{h} = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ale jeżeli np.  $h = it$ , to wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x, y+t) - P(x, y)}{it} + i \frac{Q(x, y+t) - Q(x, y)}{it} = \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Czyli jeżeli  $f$  - holomorficzna, to znaczy, że (wzory Cauchy-Riemanna)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned}$$

**Przykład 21.** (jak mogła by wyglądać funkcja różniczkowalna?)

$$f(z) = \underbrace{x}_{P(x,y)} - i \underbrace{y}_{Q(x,y)}.$$

Czy  $f$  jest różniczkowalna?

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -1,$$

czyli coś nie gra, bo jak to ma nie być różniczkowalne

**Przykład 22.**

$$\alpha = Q(x, y)dx + P(x, y)dy,$$

gdzie  $P, Q$  są takie, że  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  jest holomorficzna.

$$d\alpha = \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

**Pytanie 8.** Niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ ,  $f$  - holomorficzna. Co ciekawego można powiedzieć o zbiorach

$$P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P(x, y) = c \in \mathbb{R}\}.$$

$$Q_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q(x, y) = d \in \mathbb{R}\}.$$



Wykład 9. 04.11.2019, *warunek Cauchy-Riemanna, wzór Cauchy i twierdzenie Liouville (1/2)*

## Refleksja

Czy to

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}$$

jest fajne?

### Przykład 23.

$$\begin{aligned}\nabla P &= \left[ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right], \\ \nabla Q &= \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y} \right],\end{aligned}$$

to możemy zrobić takie coś:

$$(\nabla P \cdot \nabla Q) = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

**Twierdzenie 2.**  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  - otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  - spełnia warunek Cauchy-Riemanna.

Dowód.  $\Rightarrow$  było

$\Leftarrow$  Zauważmy, że skoro  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  spełniają warunki Cauchy-Riemanna, to znaczy, że funkcja

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix},$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest różniczkowalna na  $U \subset \mathbb{R}^2$ , czyli dla  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$  jest

$$\underbrace{F(x + h_1, y + h_2) - F(x, y)}_{\Delta F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

$$\frac{r(x, y, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Czyli

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(x + h_1, y + h_2) - P(x, y) \\ Q(x + h_1, y + h_2) - Q(x, y) \end{bmatrix}}_{\Delta Q} \stackrel{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h),$$

zatem

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

to wygląda trochę jak obrót. Dalej

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{bmatrix} + r(x, y, h).$$

Ale

$$\begin{aligned} f(z + h) - f(z) &= P(x + h_1, y + h_2) + iQ(x + h_1, y + h_2) - (P(x, y) + iQ(x, y)) = \\ &= \Delta P + i\Delta Q = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2) + r = \\ &= (a + ib)(h_1 + ih_2) + r, \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = a + ib + \frac{r}{h}.$$

A jak przejdzie się z  $h$  do 0, to  $\frac{r}{h} \rightarrow 0$ , więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

□

**Stwierdzenie 2.** Niech  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , a  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  - holomorficzna na  $U$ . Wówczas  $g \circ f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ .

*Dowód.*

$$\begin{aligned}(g \circ f)' &= g'(f)f' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - a_1b \\ a_1b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aa_1 - bb_1 & -(a_1b + ab_1) \\ a_1b + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

a tak wygląda macierz pochodnej  $f$  - holomorficznej (traktowanej jako funkcja z  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).  $\square$

## Oznaczenia

niech  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\langle dx, dy \rangle = T_p^*M$ . Wprowadźmy

$$\begin{aligned}dz &= dx + i dy \\ d\bar{z} &= dx - i dy.\end{aligned}$$

Jeżeli  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , to

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) = \\ &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z}.\end{aligned}$$

**Obserwacja:** niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ , wówczas

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}.\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right)\end{aligned}$$

**Przykład 24.**  $f(z) = z^2 = z \cdot z$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

a  $g(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = z \neq 0.$$

Czyli  $g$  - nie jest holomorficzna

**Przykład 25.** Obliczmy całkę:

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = \left| \frac{z = re^{i\theta}}{dz = rie^{i\theta} d\theta} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

**Stwierdzenie 3.** Jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$  i  $\Omega \subset \mathcal{O}$ , to

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\Omega} d(f dz) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

**Twierdzenie 3.** (wzór Cauchy)

Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $\xi \in \Omega$ . Wówczas

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\Omega} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$



**Obserwacja:** jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $\Omega$ , to

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

Wynik  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{z} = 1$  otrzymamy dla  $\xi = 0$  i  $f(z) = 1$

*Dowód.* niech

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - \xi}.$$

zatem wiemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\epsilon} g(z) &= \int_{\Omega} dg(z). \\ \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi} dz + \int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz &= \int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned}$$

**Pytanie:** co się dzieje, jak przejdziemy z  $\epsilon \rightarrow 0$  Oznacza to, że chcemy zbadać zachowanie takiej całki

$$\int \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z - \xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

dla  $z = \epsilon e^{i\theta} + \xi$ , ale

$$\frac{1}{\epsilon e^{i\theta} + \xi - \xi} = \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon},$$

a całka  $\int \int_{\Omega_\epsilon} d\bar{z} \wedge dz \approx \underbrace{\epsilon d\epsilon d\theta}_{\text{element powierzchni}}$ . Oznacza, to że

$$\frac{1}{z - \xi} d\bar{z} \wedge dz \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon,$$

czyli w  $\epsilon = 0$  nie wybuchnie!

Ale

$$\int_{\partial K(\xi, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = .$$

Trzeba wrzucić twierdzenie o wartości średniej

$$= if(c) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi if(c) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -2\pi if(\xi),$$

gdzie  $c \in \partial K(\xi, \epsilon)$ .

Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - \int_{\Omega} \frac{1}{z-\xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2\pi i f(\xi).$$

□

**Twierdzenie 4.** (*Liouville*)

*Jeżeli  $f$  - ograniczona i holomorficzna na całym  $\mathbb{C}$ , to  $f$  jest stała.*

**Obserwacja:** a co z sinusem?  $f(x) = \sin(x)$ , ale trzeba zastanowić się nad  $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Dla np.  $z = it$ ,

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i},$$

czyli oczywiście sinus ograniczony nie jest.

Wykład 10. 08.11.2019, *twierdzenie Liouville (2/2)*, *Zasadnicze Twierdzenie Algebry i początek Szeregów Laurenta*

**Twierdzenie 5.** (*Liouville*)  
 Jeżeli  $f$  - holomorficzna i ograniczona na  $\mathbb{C}$ , to  $f$  - stała.

*Dowód.* Wiemy, że

$$\exists_{M>0} \quad \forall_{z \in \mathbb{C}} \quad |f(z)| < M.$$

Skoro  $f$  - holomorficzna, to znaczy, że dla  $\xi \in \mathbb{C}$ ,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

(Wzór Cauchy)

Zauważmy, że skoro  $f$  - jak wyżej, to

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(\xi, r)} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz.$$

(Absolutnie nieoczywiste lol. Uzasadnienie później)

Wówczas możemy oszacować  $f'$

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \max_{z \in \partial K(\xi, r)} \left| \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} \right| \cdot |\text{długość okręgu } K(\xi, r)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|(\xi + re^{i\varphi} - \xi)^2|} |2\pi r| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad \forall_{r>0}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\forall_{r>0} \quad |f'(\xi)| < \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem  $|f'(\xi)| = 0$ , czyli

$$f(z) = \text{const.}$$

□

**Przykład 26.**  $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  jest holomorficzna na  $\mathbb{C}$ , ale nie jest na  $\mathbb{C}$  ograniczona (tylko dla  $z \in \mathbb{R}$ ).

**Wniosek:** (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

Niech  $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ .

Założmy, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad w(z) \neq 0.$$

Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{1}{w(z)} \text{ jest na } \mathbb{C} \text{ holomorficzna i ograniczona.}$$

Jest więc stała. Co oznacza, że  $w(z)$  jest stała i sprzeczność.  $\square$

(PS oznacza to, że  $\exists_{z_0 \in \mathbb{C}}$ , że  $w(z_0) = 0$ , czyli  $w(z) = (z - z_0)w_1(z)$ . Biorąc funkcję  $f_1(z) = w_1(z) \dots$  pokażemy, że wielomian stopnia  $n$  nad  $\mathbb{C}$  ma  $n$  pierwiastków.  $\square$ )

## Szeregi Laurenta

**Przykład 27.** Niech

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}.$$

Zauważmy, że

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1-i}{z-i} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{z+i}.$$

Jeżeli

$$|z+2i| < 3,$$

to

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+2i}{3i}} = \\ &= -\frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+2i}{3i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} (z+2i)^n. \end{aligned}$$

Jeżeli  $|z + 2i| > 1$ , to

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z+2i-i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{z+2i}} = \\ &= \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{z+2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{(z+2i)^n} + \frac{i-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^n} (z+2i)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

gdzie

$$dk = \begin{cases} \frac{1+i}{2} \cdot (i)^{-k-1} & k < 0 \\ \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^k} & k \geq 0 \end{cases}.$$

Niech

$$R(2i, 1, 3) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z+2i| < 3 \wedge |z+2i| > 1\}$$

- pierścień otwarty o środku  $2i$  i promieniach  $1$  i  $3$ .

Dla  $|z+2i| < 1$ ,

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+2i-i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2i}{i}} = -\frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+2i}{i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} \frac{(z+2i)^n}{1}.$$

Zatem dla  $z \in R(-2i, 0, 1)$ ,

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i)^{n+1}} (z+2i)^n - \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}} \cdot (z+2i)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z+2i)^k,$$

gdzie

$$d_k = -\frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{(i)^{n+1}} - \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{(3i)^{n+1}}.$$

dla  $|z+2i| > 3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z+2i-3i} = \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3i}{z+2i}} = \\ &= \frac{1}{z+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3i)^n \cdot \frac{1}{(z+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{(z+2i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n}. \end{aligned}$$

I wtedy dla  $z \in R(-2i, 3, +\infty)$ , jest

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1+i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{(z+2i)^n} + \frac{1-i}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^{n-1}}{(z+2i)^n} = \sum_{k=-1}^{-\infty} d_k (z+2i)^k.$$

**Twierdzenie 6.** (Laurent)

Niech  $f(z)$  - holomorficzna na pierścieniu  $R(z_0, r_1, r_2)$ ,

$$R(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| > r_1 \wedge |z - z_0| < r_2\}.$$

Wówczas  $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

$$r_1 < r < r_2$$

*Dowód.* Zauważmy, że  $\forall_{z \in R(z_0, r_1, r_2)}$  znajdziemy takie  $r'_1 > r_1$  i  $r'_2 < r_2$ , że  $z \in R(z_0, r'_1, r'_2)$ . Ze wzoru Cauchy wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right].$$

ale

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z},$$

a dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$  i  $z \in K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

więc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.\end{aligned}$$

więc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

A dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$  i  $z$  takich, że  $|z - z_0| > r'_2$ , wiemy, że

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

itd.

□





Wykład 11. 15.11.2019, *zabawa z Szeregiem Laurenta, związki z szeregiem Taylora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(z_0, r'_1, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

1. Jeżeli  $z \in K(z_0, r'_2)$  i  $\xi \in \partial K(z_0, r'_2)$

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}}$$

i wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

2. Jeżeli  $|z - z_0| > r'_1$ , to mamy, że dla  $\xi \in \partial K(z_0, r'_1)$

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\xi - z_0}{z_0 - z}} = \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - z_0)^n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}, \\ d_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \end{aligned}$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzna na pierścieniu  $R(z_0, r_1, \infty)$ , to jak wyglądało by rozwinięcie  $f(z)$ ?

Zauważmy, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r'_2 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi}) d\varphi}{(r'_2 e^{i\varphi})^{n+1}}.$$

Zatem

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \cdot \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| \cdot 2\pi,$$

ale jeżeli  $f$  ograniczona poza kołem  $K(z_0, r'_1)$ , to znaczy, że

$$\forall_{r'_2 > r'_1} |f(z_0 + r'_2 e^{i\varphi})| < M.$$

Czyli

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{(r'_2)^n} \xrightarrow{r'_2 \rightarrow \infty} 0,$$

więc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

**Obserwacja:** Gdyby  $f$  była holomorficzną na  $R(z_0, 0, r_2)$ , to jak wyglądałoby rozwinięcie?

Wiemy, że

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r'_1 i e^{i\varphi} f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi}) (r'_1 e^{i\varphi})^{n-1} d\varphi.$$

$$|d_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot r_1^n \cdot \max_{\substack{\exists: |f(z)| < M, \\ z \in K(z_0, r_1)}} |f(z_0 + r'_1 e^{i\varphi})| \cdot |2\pi|.$$

Czyli dla  $z \in K(z_0, r_2)$ ,  $f$  - holomorficzną na  $K(z_0, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

**Pytanie 9.** Jak rozwinięcie ma się do rozwinięcia Taylora? Tzn. jak ma się  $a_n$  do  $\frac{f^n(z_0)}{n!}$ ?

**Koniec obserwacji, wracamy do dowodu**

**Pytanie 10.** Czy wzory na  $a_n$  i  $d_n$  można uprościć?

**Przypomnienie:** jeżeli  $f$  - holomorficzną na  $\Omega$ , to

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 = \int_{\partial\Omega_1} f - \int_{\partial\Omega_2} f.$$

(minus przez orientację) Czyli

$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f.$$

Zauważmy, że  $f(z)$  - holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , a funkcja  $\frac{1}{(z - z_0)^n}$  - też jest holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , to wtedy

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- też jest holomorficzną na  $R(z_0, r_1, r_2)$ , czyli

$$\int_{\partial K(z_0, r'_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

To samo możemy powiedzieć o  $d_n$

$$\int_{\partial K(z_0, r'_1)} f(\xi)(z - z_0)^{n-1} d\xi = \int_{\partial K(z_0, r)} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi, \quad \forall_{r_1 < r < r_2}.$$

Możemy zatem podać zwartą postać wzoru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

O taką:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} d_{-n}(z - z_0)^n,$$

$$\text{ale } d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2 \quad \square$$

**Twierdzenie 7.** Niech  $C$  - krzywa na  $\mathbb{C}$  (zamknięta lub nie) i niech  $f(z)$  - ciągle na  $C$ . Wówczas funkcja

$$\varphi(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^p} d\xi$$

jest holomorficzna na  $\mathbb{C} \setminus C$  dla  $p \in \mathbb{Z}$  i

$$\varphi'(z) = p \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi.$$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $z_0 \notin C$ . Chcemy pokazać, że

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \quad (*)$$

Zatem

$$(*) = \int_C \frac{d\xi f(\xi)}{(z - z_0)} \left[ \frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(z - z_0)^p} \right] - p \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{p+1}} = \quad (11.1)$$

$$= \int_C d\xi f(\xi) \left[ \underbrace{\frac{\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p}}{z - z_0}}_{(\Delta)} - \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}} \right]. \quad (\Delta\Delta)$$

Ale  $(\Delta)$  - iloraz różnicowy funkcji

$$g(z) = \frac{1}{(\xi - z)^p}.$$

$$(\Delta) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Wiemy, że  $g(z)$  - holomorficzna dla  $z \notin C$ , czyli

$$g'(z) = -\frac{p(-1)}{(\xi - z)^{p+1}},$$

czyli

$$(\Delta) = \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego, niż } (z - z_0).$$

Zatem

$$(11.1) = \int_C d\xi f(\xi) \left[ \frac{p}{(\xi - z)^{p+1}} + \text{mała rzędu wyższego niż } (z - z_0) - \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}} \right].$$

$$|(11.1)| \leq \left| \max_{\xi \in C} f(\xi) \right| \cdot |\text{długość } C| \cdot |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

□

**Wniosek:** dla krzywej zamkniętej wiemy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

zatem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Wiemy, że  $f'(z)$  - też jest holomorficzna (bo wzór na  $\varphi$  z  $p = 2$ )



Wykład 12. 22.11.2019, przedłużenie analityczne funkcji punkty  
osobliwe i bieguny

Jeżeli  $f$  - holomorficzna na  $R(z_0, 0, r_2)$ , to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r_1 < r < r_2.$$

ale możemy zauważyć, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

**Przykład 28.** Policzyc

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} dz.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\cos(z)}{(1 + z^2)^2} = \frac{\cos(z)}{(1 + iz)^2(1 - iz)^2}.$$

Niech  $f(z) = \frac{\cos(z)}{(1 - iz)^2}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $K(i, 1)$ . W związku z tym piszemy

$$I = \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z)}{(1 + iz)^2} dz = \frac{1}{(i)^2} \int_{\partial K(i, 1)} \frac{f(z) dz}{(z - i)^2} = (i)^2 \cdot 2\pi i f'(z)|_{z=i}.$$

**Przedłużenie analityczne (oho)**

Mieliśmy np.  $\sin(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i pytanie skąd my wiemy, że  $\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$ , dla  $z \in \mathbb{C}$

**Twierdzenie 8.** Niech  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ ,  
 $z_n \in \mathcal{O}$  - ciąg z  $\mathcal{O}$  taki, że  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$   $\forall_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = 0$ .

Wówczas

$$\exists_{r>0} \quad \forall_{z \in K(z_0, r)} \quad f(z) = 0.$$

*Dowód.* przez sprzeczność ( $\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$ ).

Założmy, że  $\exists_{z \in K(z_0, r)} f(z) \neq 0$  i założenia twierdzenia są spełnione. Skoro  $f$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , to możemy zapisać, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

i wiemy, że  $f(z) \neq 0$ , czyli  $\exists k$  takie, że

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0. \quad (\star)$$

Weźmy najmniejszy indeks, dla którego  $(\star)$  jest prawdziwe. Oznaczmy ten indeks przez  $j$ . Oznacza to, że

$$f(z) = (z - z_0)^j \left( \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} + \frac{f^{(j+1)}(z_0)}{(j+1)!} (z - z_0) + \dots \right).$$

Czyli

$$f(z) = (z - z_0)^j g(z), \quad f(z) \neq 0,$$

czyli  $g(z) \neq 0$ . Skoro  $f$  - holomorficzna, to  $g(z)$  też jest holomorficzna na  $\mathcal{O}$ , czyli między innymi  $g(z)$  jest ciągła na  $\mathcal{O}$ . Ale wiemy, że  $f(z_n) = 0$ , czyli  $g(z_n) = 0$  i  $g$  - ciągła na  $\mathcal{O}$ . Oznacza to, że

$$0 = g(z_n) \xrightarrow{z_n \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$$

i sprzeczność, bo  $g(z_n)$  jest ciągiem samych zer, a  $g(z_0) \neq 0$ , bo

$$\frac{f^{(j)}(z_j)}{j!} \neq 0.$$

□



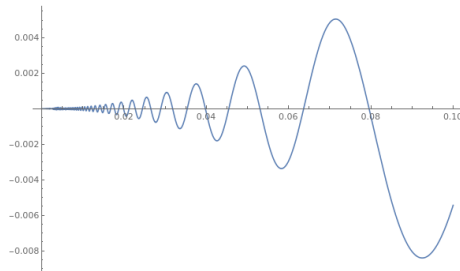
**Obserwacja:** Weźmy funkcję

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Widzimy, że dla ciągu  $a_n \rightarrow 0$ ,

$$f(a_n) \rightarrow 0$$

i  $f(x) \neq 0, \quad x \neq a_n$



Rysunek 12.1:  $f(x)$

**Twierdzenie 9.** Niech  $f(z), g(z)$  - holomorficzne na  $\mathcal{O}$ ,

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = g(z_n)$$

a ciąg  $z_n \rightarrow z_0$ . Wówczas

$$f(z) = g(z) \quad \forall_{z \in \mathcal{O}}.$$

*Dowód.* Niech

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Wówczas  $h(z_n) = 0$  i  $z_n \rightarrow z_0$ . Skoro  $h(z)$  - holomorficzna, to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oraz

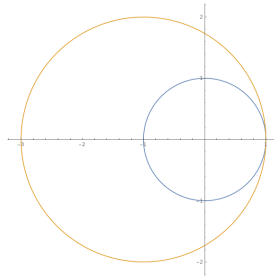
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n$$

i dowodzimy tak jak wcześniej. □

**Przykład 29.**

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$g(z) = 1 + \left(\frac{z+1}{2}\right) + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \dots \quad \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$



Rysunek 12.2:  $f$  i  $g$

**Definicja 16.** Niech  $f$  - holomorficzna na  $U_1$  i  $g$  - holomorficzna na  $U_2$  i

$$\exists z_0 \in U_1 \cap U_2 \implies \exists r : K(z_0, r) \subset U_1 \cap U_2$$

oraz

$$\forall_{z \in U_1 \cap U_2} f(z) = g(z).$$

Mówimy wówczas, że  $f$  jest przedłużeniem holomorficznym (analitycznym funkcji  $g$ ).

**Przykład 30.** *Co się stanie jak będziemy przedłużać aż do kółka*

$$\begin{aligned} \ln(z) &= (z-1) - \frac{1}{z}(z-1)^2 + \dots \\ \ln(re^{i\varphi}) &= \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi \end{aligned}$$

### Punkty osobliwe

**Definicja 17.** *Punkt w którym  $f(z)$  nie jest holomorficzna nazywamy punktem osobliwym.*

**Definicja 18.** *Niech  $f(z)$  - taka, że*

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_N}{(z-a)^N}$$

*i  $\varphi(z)$  - holomorficzna na  $\mathcal{O}$  i  $f(z)$  - holomorficzna na  $\mathcal{O} - \{a\}$ .  
O takiej funkcji powiemy, że ma w punkcie  $a$  biegun rzędu  $N$ .*

**Pytanie:** czy  $f$  może nie być holomorficzna np. na krzywej  $\gamma \subset \mathbb{C}$ ?

**Odpowiedź:** gdyby  $f$  nie była holomorficzna na  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , to

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

a to oznacza, że  $g(z) \equiv 0$  także dla  $z \notin \gamma$ .



Wykład 13. 18.11.2019, *punkt izolowany, osobliwość istotna, twierdzenie o residuach*

**Przykład 31.**

$$U_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, r > 0, -\frac{5\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$U_1 \cap U_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$(\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi)$$

Niech

$$f_1(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_1$$

$$f_2(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_2$$

$$f_3(z) = \ln r + i\varphi, \quad z \in U_3$$

.

Zauważmy, że dla  $z \in U_1 \cap U_2$  mamy

$$f_1(z) = f_2(z).$$

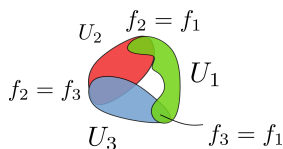
Mówimy zatem, że  $f_2$  jest przedłużeniem analitycznym  $f_1$ . Dla  $z \in U_1 \cap U_3$  wychodzi

$$f_1(z) = f_3(z),$$

czyli  $f_3$  jest przedłużeniem analitycznym  $f_1$ . Ale

$$f_2(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi$$

$$f_3(-1) = \ln(e^{-i\pi}) = -i\pi.$$



Rysunek 13.1: Tracimy jednoznaczność funkcji ale chyba worth it

### Klasyfikacja

Niech  $f(z)$  - holomorficzna na pierścieniu  $R(z_0, 0, r_1)$ , ( $f(z)$  może nawet nie być określona w  $z_0$ ).

Wiemy, że (działa wzór Laurenta):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wyróżniamy trzy przypadki:

1.  $(\Delta)$   $a_n = 0, n < 0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Oznacza to, że przyjmując  $f(z_0) = a_0$  otrzymamy funkcję holomorficzną na  $K(r_0, r)$ .

2.  $(\Delta\Delta)$   $\exists_{k < 0} a_n = 0, n < k$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

O punkcie  $z_0$  mówimy, że jest punktem osobliwym, izolowanym rzędu  $|k|$ . (albo, że jest biegunem rzędu  $|k|$ , np.  $\frac{\cos(z)}{z}$  ma w  $z_0 = 0$  biegun rzędu pierwszego).

3.  $(\Delta\Delta\Delta)$

$$\forall_{k < 0} \exists_{n < k} a_n \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

O punkcie  $z_0$  powiemy, że jest punktem osobliwym (izolowanym) (albo, że  $f(z)$  ma w  $z = z_0$  osobliwość istotną).

**Przykład 32.** ( $\Delta$ )

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

jeżeli przyjmiemy, że  $f(0) = 1$ , to jest

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

**Przykład 33.** ( $\Delta\Delta$ )

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z)^{2n-1}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{a_{-1}} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

**Przykład 34.** ( $\Delta\Delta\Delta$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

**Definicja 19.** Liczbę  $a_{-1}$  z rozwinięcia funkcji  $f(z)$  w szerege Laurenta w pierścieniu  $R(z_0, 0, r)$  nazywamy **residuum** funkcji  $f(z)$  w  $z_0$  i oznaczamy

$$a_{-1} \equiv \text{Res}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{K(z_0, r), \\ 0 < r < r_1}} f(\xi) d\xi$$

**Uwaga:** mówimy (na razie) o osobliwościach izolowanych

**Przykład 35.**

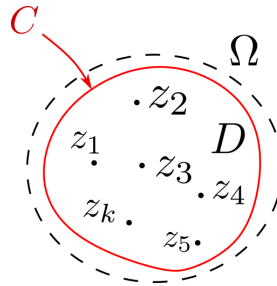
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Zauważmy, że  $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \iff z_n = \frac{1}{n}$ , więc

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| \rightarrow \infty,$$

Więc  $z_0 = 0$  nie jest osobliwością izolowaną, bo

$$\forall_{r>0} \quad \exists_n \quad z = \frac{1}{n} \in K(0, r).$$



Rysunek 13.2

**Twierdzenie 10.** Niech  $\Omega$  - otwarty,  $D \subset \Omega$ ,  $z_1, \dots, z_k \subset D$ ,  $z_i \cap \partial D = \{\phi\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $f$  - holomorphyzna na  $\Omega - \{z_1, \dots, z_k\}$  i  $z_i$  - bieguny funkcji  $f$ .

Wówczas

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}_{z=z_n} \{f(z)\}$$

*Dowód.* Rozważmy zbiór  $P$  taki, jak na rys ???. Zauważmy, że  $f(z)$  jest na  $P$  holomorphyzna. to znaczy, że

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 0 = \int \partial D f(z) dz + \sum_{n=1}^k \left[ \int_{\partial K(z_n, r_n)} f(z) dz \right],$$

czyli

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}_{z=z_n} f(z).$$



□

**Pytanie:** czy umiemy znaleźć współczynnik  $a_{-1}$  bez roz funkcji  $f$  w szereg Laurenta?

**Odpowiedź:** Jeżeli  $f$  ma w  $z_0$  biegun rzędu  $n$ , to znaczy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \dots$$

$$\text{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dz} ((z - z_0)^n f(z))$$

**Przykład 36.** Policzyc całkę

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a \cos(x) + a^2)}$$

Zauważmy, że

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = 1 - 2a \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) + a^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{z} (z - a)(1 - az)$$



Wykład 14. 25.11.2019, *fajność residuów i Transformata Legendre geometrycznie*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

**Przykład 37.**

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos(x) + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Niech  $z = e^{ix}$ ,  $dz = ie^{ix} dx$ .

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = \frac{1}{z} (z - az^2 - a + a^2 z) = \frac{1}{z} (1 - az)(z - a).$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{z dx}{(1 - az)(z - a)} = \int_{\partial K(0,1)} \frac{z}{(1 - az)(z - a)} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

ale

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Zauważmy, że  $(z - a)f(z)$  jest regularne w  $z = a$ , bo wynosi  $\frac{1}{1 - az}$ .  
Zatem

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{(z - a)(1 - az)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

Wychodzi

$$J = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

*Czyli jest ładnie i słodko*

Wiemy, że jeżeli  $f$  ma biegun stopnia  $n$  w  $z = z_k$ , to

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)^n f(z)$$

będzie wielkością skończoną, bo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_k)^n + \frac{a_{-1}}{(z - z_k)} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_k)^n}$

**Pytanie 11.** Jak zachowuje się funkcja gdy  $z_0$  jest punktem istotnie osobliwym?

**Przykład 38.** Weźmy

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Zbadamy

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z).$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(re^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{re^{i\varphi}}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-i \cdot \frac{1}{r} \sin \varphi} \cdot e^{\frac{1}{r} \cos \varphi}.$$

A to dla  $\cos \varphi > 0$  idzie do  $+\infty$ , dla  $\cos \varphi < 0$  idzie do 0, a dla  $\cos \varphi = 0$  nie wiadomo. Stąd wiadomo, że granica nie istnieje.

**Przykład 39.**

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx,$$

gdzie  $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że

1.  $R(z)$  nie ma biegunów na osi rzeczywistej

2.  $z \cdot R(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$

np.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Obszar - półokrąg o promieniu  $r$ . Policzmy

$$\int_{-r}^r R(x) dx.$$

Weźmy funkcję  $R(z)$  i policzmy

$$\int_{\partial D} R(z) dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \text{Res } f(z).$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) dz \rightarrow 0$$

to będzie z głowy.

$$\int_{C_r} R(z) dz = \int_0^\pi r e^{i\varphi} R(r e^{i\varphi}) d\varphi = J_1,$$

ale

$$|J_1| \leq \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |r R(r e^{i\varphi})| \pi \rightarrow 0,$$

bo założyliśmy, że  $zR(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Przykład 40.** Transformata Legendre'a geometrycznie niech np.  $f(x) = x^2$ .

Wiemy, że

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad x = \frac{p}{2}$$

$$p = \frac{f(x) - \psi(p)}{x}$$

$$px = f(x) - \psi(p)$$

$$\psi(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - p\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$y = px - \frac{p^2}{4}.$$

I ogólnie

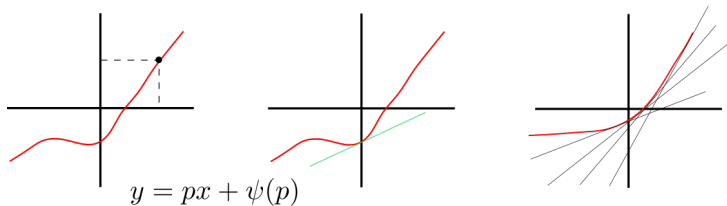
$$f(x) \rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \rightarrow x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p).$$

Więc

$$\psi(p) = f(x(p)) - px(p).$$

**Przykład 41.** Funkcja  $L(q, \dot{q})$ .

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \implies (\dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{-1}(p).$$



Teraz szukamy  $\psi(p)$ , ale  $\psi$  to jest  $H$ .

$$H(q, p) = L(q, \dot{q}) - p \cdot \dot{q}.$$

**Przykład 42.**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}.$$

Jeżeli  $\psi(p) = f(x(p)) - px(p)$ , to

$$d\psi(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - x(p) - p \frac{\partial x}{\partial p} \right) dp,$$

ale  $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ , czyli

$$d\psi(p) = -x(p)dp.$$

Ale zazwyczaj jest tak

$$d\psi(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp.$$

czyli powinno być

$$-x(p) = \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Wracając do przykładu 4, mamy  $\psi(p) = -\frac{p^2}{4} \implies -x(p) = -\frac{p}{2} \implies p = 2x$ .  
Ale

$$\psi(p) = f(x) - px \implies f(x) = \frac{-(2x)^2}{4} + 2xx = -x^2 + 2x^2 = x^2.$$

**Przykład 43.** Mamy gaz i funkcję stanu  $U(V, N, S)$ . Możemy zrobić z niej jednoformę

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial N} dN + \frac{\partial U}{\partial S} dS.$$

*Albo nawet dd*

$$ddU = \left( \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right) \right) ds \wedge dv = 0.$$

*Można jeszcze dalej, zupgradować którąś pochodną na zmienną niezależną. Niech  $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ . Dostajemy nową funkcję (energia swobodna Helmholtza)  $F(V, N, T) = U - T \cdot S$ .*

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p, \quad H(p, N, S) = U + pV.$$

*I później wychodzi*

$$-\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial T}{\partial V} = 0.$$





Wykład 15. 29.11.2019, *Lemat Jordana, funkcja wokół punktu istotnie osobliwego i twierdzenie Weierstrass*

**Przykład 44. Całka**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res} f(z).$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)).$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots$$

Jak przemnożymy przez  $(x^2 + 1)^3$  to dostaniemy wyrażenie regularne.

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( (z-i)^3 \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \right).$$

Ale

$$\left( \frac{1}{(z+i)^3} \right)'' = \left( -\frac{3}{(z+i)^4} \right)' = \frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}.$$

Dostajemy

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} (-3)(-4) \frac{1}{(z+i)^5} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{1}{i}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \frac{3}{2^4 i} = \frac{3\pi}{8}.$$

**Przykład 45.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx.$$

Taka, że  $|zR(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$

np.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = J, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2i(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{iax} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + b^2} e^{-iax} dx.$$

Chcemy policzyć całkę typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

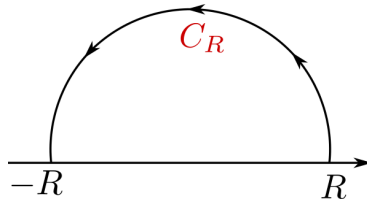
**Twierdzenie 11.** (*Lemat Jordana*)

Niech  $f(z)$  - określona w górnej półpłaszczyźnie (rys ??) taka, że

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0.$$

Wówczas

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0.$$



Dowód.

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \cdot e^{iaRe^{i\varphi}} d\varphi \right|.$$

Ale

$$e^{iaRe^{i\varphi}} = e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi}.$$

Czyli

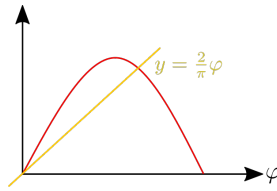
$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} \cdot e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \underbrace{R \cdot \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi}_J.$$

Stąd

$$J = \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \right| \leqslant 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = 2 \left. \frac{-\pi}{2aR} e^{-aR \frac{2}{\pi} \varphi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}).$$

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leqslant \sup_{\varphi \in [0, \pi]} |f(Re^{i\varphi})| \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

□



Rysunek 15.1: w15-2

**Zachowanie funkcji wokół punktu istotnie osobliwego**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

**Twierdzenie 12.** (*Lemat*)

Niech  $f$  - holomorficzna i ograniczona na  $R(a, 0, r)$ . Wówczas możemy przedłużyć  $f$  do funkcji holomorficzej na  $K(a, r)$ . Czyli

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots, \text{ gdzie } c_0 = f(a).$$

*Dowód.* Niech

$$H(z) = \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & a = a \end{cases}.$$

Pokażemy, że  $H(z)$  jest holomorficzna na  $K(a, r)$ . Wystarczy pokazać, że  $H(z)$  jest holomorficzna w  $z = a$ .

Policzmy  $H'(a)$ .

$$H'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(a+h) - H(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)^2 f(a+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h f(a+h)$$

Ale skoro  $f$  - ograniczona na  $R(a, 0, r)$ , to  $0 \leq |h f(a+h)| \leq hM \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , czyli  $H'(a) = 0$ , więc  $H(z)$  jest holomorficzna na  $K(a, r)$ .

$$H(z) = c_0 + c_1(z - a)^1 + c_2(z - a)^2 + \dots$$

Czyli (bo  $c_0 = 0$  i  $c_1 = 0$ , bo  $H'(0) = 0$ )

$$(z - a)^2 f(z) = c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots$$

Co oznacza, że nasz  $f(z)$  da się przedstawić w postaci

$$f(z) = c_2 + c_3(z - a)^1 + \dots$$

Jak położymy  $c_2 \equiv f(a)$ , to wtedy  $f$  - holomorficzna na  $K(a, r)$  □

**Twierdzenie 13.** (*Weierstrass*)

Niech  $f$  - holomorficzna na  $R(a, 0, r)$ , i  $a$  - punkt istotnie osobliwy funkcji  $f$ . Wówczas

$$\forall_{r>0} \quad f(R(a, 0, r)) = \mathbb{C}.$$

*Dowód.* Chcemy pokazać, że  $f$  - ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy i

$$\forall_{r>0} \quad \forall_{c \in \mathbb{C}} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_z \quad |z-a| < r \implies |f(z)-c| < \varepsilon.$$

Przez sprzeczność.

Wiemy, że  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy oraz

$$\exists_{r>0} \quad \exists_{c \in \mathbb{C}} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_z \quad |z-a| < r, |f(z)-c| \geq \varepsilon.$$

Pokażemy, że wyżej wymienione zdanie jest sprzeczne z tym, że  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy.

Jeżeli

$$\forall_z \quad |z-a| < r, |f(z)-c| \geq \varepsilon,$$

to znaczy, że funkcja  $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$  jest ograniczona i holomorficzna na  $R(a, 0, r)$ .

Oznacza to, że możemy przedłużyć  $g(z)$  do funkcji holomorficznego na  $K(a, r)$ .

Czyli możemy rozwinąć  $z$  w szereg Laurenta na  $K(a, r)$ .

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

i) Jeżeli  $a_0 \neq 0$ , to znaczy, że  $g(a) \neq 0$ , czyli

$$0 \neq a_0 = \frac{1}{f(a)-c},$$

to znaczy, że  $f(a)-c = \frac{1}{a_0} \implies f(a) = c + \frac{1}{a_0}$  i sprzeczność, bo jeżeli  $f$  ma w  $a$  konkretną wartość a na  $R(a, 0, r)$  jest holomorficzną to wtedy możemy zapisać

$$f(z) = c + \frac{1}{a_0} + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots,$$

a skoro  $f$  ma w  $a$  punkt istotnie osobliwy, to jej rozwinięcie powinno wyglądać tak:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{(z-a)^k}.$$

i) Jeżeli  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , to znaczy, że

$$g(z) = (z-a)^n \left( c_0 + \underbrace{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}_{\varphi(z)} \right), \quad c_0 \neq 0.$$

Zauważmy, że  $\varphi(z)$  jest holomorficzna i  $\varphi(a) \neq 0$ , możemy więc rozwinąć  $\frac{1}{\varphi(z)}$  w  $K(a, r)$ , bo  $\frac{1}{\varphi(z)}$  - też jest holomorficzna na  $K(a, r)$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots$$

Zatem

$$\frac{1}{f(z) - c} = g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

czyli

$$f(z) - c = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot (d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots),$$

czyli

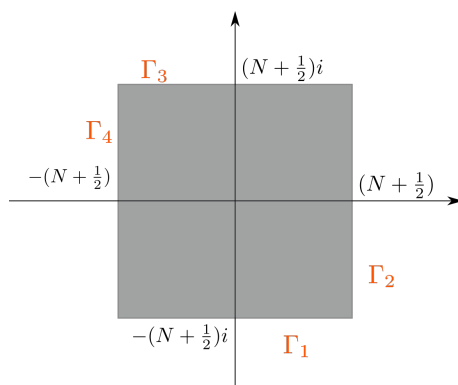
$$f(z) = c + \frac{d_0}{(z - a)^n} + \frac{d_1}{(z - a)^{n-1}} + \frac{d_2}{(z - a)^{n-2}} + \dots$$

i sprzeczność, bo wtedy wiemy, że  $f(z)$  miałaby w  $z = a$  biegun  $n$ -tego rzędu, a  $f(z)$  ma w  $z = a$  punkt istotnie osobliwy.

□

## Wykład 16. 02.12.2019, *sumowanie szeregów*

### Sumowanie szeregów



Rysunek 16.1: Kontur  $\Gamma$

**Stwierdzenie 4.** Niech  $\Gamma$  - kontur przechodzący przez wierzchołki

$$\left(N \pm \frac{1}{2}\right)(1 \pm i) \quad (\text{Rysunek 16.1}).$$

I niech  $f(z)$  - taka, że

$$\exists_M \quad \forall_{|z| > M} \quad |f(z)| < \frac{\text{const}}{|z|^2},$$

$f(z)$  nie ma biegunów na  $\Gamma$  oraz nie ma biegunów dla  $z \in \mathbb{Z}$ . Wówczas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 0.$$

*Dowód.* Oszacujemy  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ .

Dla  $z \in \Gamma$

a) Jeżeli  $z \in \Gamma_4$  lub  $\Gamma_2$ , to

$$\Gamma_2 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = N + \frac{1}{2} + iy \right\}.$$

$$\Gamma_4 = \left\{ y \in \left[ -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \right], z = -(N + \frac{1}{2}) + iy \right\}.$$

$$|\operatorname{ctg}(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \cdot \left| \frac{2i}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2}+iy)}} \right|.$$

Dalej mamy dla  $|e^{iN\pi}| = 1$

$$\left| \frac{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} + e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}}{e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-y\pi} - e^{-i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{y\pi}} \right| \quad (\Delta)$$

**Obserwacja:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} |(\Delta)| &\leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi N} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} \leq \\ &\leq \frac{2 \left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|}{\left| e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \cdot e^{-2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{i\pi(N+\frac{1}{2})} \right|} < \operatorname{const}. \end{aligned}$$

b) Analogicznie pokażemy, że  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  jest ograniczony dla  $z \in \Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_3$ . Zatem

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz \right| \leq \left| \max_{z \in \Gamma} f(z) \right| \cdot |8N + 4| \cdot \operatorname{const} \underset{N > M}{\leq} \frac{\operatorname{const}}{N^2} (8N + 4) \cdot \operatorname{const} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

□



**Wniosek:**

Niech  $b$  - zbiór wszystkich biegunów  $f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) dz = 2\pi i \sum_b \operatorname{Res}(f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)) = 0.$$

**Pytanie 12.** *W jakich punktach  $\operatorname{ctg}(\pi z)$  ma bieguny i którego rzędu?*

Zauważmy, że

$$\frac{(\pi z - 0\pi) \cos(\pi z)}{\pi \sin(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi}.$$

A np.

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{(z - n) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos(\pi z) - (z - n)\pi \sin(\pi z)}{\pi \cos(\pi z)} \xrightarrow{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi}.$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0,$$

czyli

$$0 = \sum_c \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) + \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

gdzie  $c$  - bieguny  $\operatorname{ctg}(\pi z)$ ,  $d$  - bieguny  $f(z)$ . Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \sum_d \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

**Przykład 46.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

Wiemy, że

$$\sum_b \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Rozdzielmy sobie sumę na dwie:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} f(n) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} f(n)}_{\text{bieguny } \operatorname{ctg}(\pi z) \text{ bez } 0} + \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} n^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{n^2} \right) = - \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}.$$

**Obserwacja:** Niech  $P = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$ . Niech  $D$  - zbiór biegunów  $f(z)$  na  $\Omega$  i  $f$  - holomorphyzna na  $\Omega - D$ . Wówczas  $\frac{f'}{f}$  ma na  $\Omega$  bieguny pierwszego rzędu dla  $z \in P \cup D$

*Dowód.* Niech  $z_0 \in P$ . Oznacza to, że

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

gdzie  $k \geq 1$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{ka_k(z - z_0)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k + \dots}{a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z - z_0) + \dots}{a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots}. \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)f'}{f} &= k. \end{aligned}$$

Czyli  $\frac{f'}{f}$  ma w  $z_0 \in P$  biegun pierwszego rzędu i wynosi  $k$ . □

Niech  $z_1 \in D$ ,  $f$  ma w  $z = z_1$  biegun  $n$  - tego rzędu. Oznacza to, że

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_1)^{n-1}} + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\frac{-na_{-n}}{(z-z_1)^{n+1}} + \frac{-(n-1)a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^n} + \dots}{\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_1)^{n-1}} + \dots} = \\ &= \frac{1}{(z-z_1)} \frac{[-na_{-n} + -(n-1)a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots]}{[a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-z_1) + \dots]}.\end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \frac{f'}{f}(z - z_1) = -n.$$

**Wniosek:**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} = \sum_{z \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_1 \in P} \frac{f'}{f}.$$



Wykład 17. 06.12.2019, *twierdzenie Rouché, Zasadnicze Twierdzenie Algebry v2.0, sumowanie szeregów v2.0, residuum w  $+\infty$  (1/3)*

**Twierdzenie 14.** *Niech  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  - otwarty i spójny,  $A \subset \Omega$ . Niech  $D \subset A$  - zbiór zer funkcji  $f(z)$  na  $A$ . Niech  $P \subset A$  - zbiór biegunów funkcji  $f$  na  $A$  oraz*

$$\partial A \cap \partial D = \emptyset, \quad \partial A \cap P = \emptyset.$$

Wówczas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'}{f} = N_Z - N_B,$$

gdzie  $N_Z$  - suma krotności wszystkich zer funkcji  $f$  na  $A$ , a  $N_B$  - suma stopni wszystkich biegunów  $f$  na  $A$ .

*Dowód.* Wiemy, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'}{f} = \sum \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \sum_{z_i \in D} \frac{f'}{f} + \sum_{z_k \in P} \frac{f'}{f},$$

jest sumą krotności wszystkich zer plus sumą krotności wszystkich biegunów, bo jeżeli  $z_i \in D$  - zero rzędu  $k$ , to  $\operatorname{Res} \frac{f'}{f} = k$ , a jeżeli  $z_j \in P$  - biegun rzędu  $n$ , to

$$\operatorname{Res}_{z_j} \frac{f'}{f} = -n.$$

□

**Twierdzenie 15.** (Rouche)

Niech  $A \subset \Omega$ ,  $\Omega$  - otwarty i spójny,  $f, g$  - holomorficzne na  $\Omega$  i taka, że

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

dla  $z \in A$ ,  $f(z) \neq 0$ ,  $z \in \partial A$ . Wówczas funkcja  $f(z) + g(z)$  ma taką samą ilość zer (wraz z krotnościami), co funkcja  $f(z)$ .

*Dowód.* Niech  $a \in [0, 1]$ . Rozważmy

$$h_a(z) = f(z) + a \cdot g(z).$$

Wówczas

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{h'_a(z)}{h_a(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'(z) + ag'(z)}{f(z) + ag(z)}.$$

Zauważmy, że  $N(a)$  jest ciągła ze względu na  $a$  (jako całka z parametrem). Z drugiej strony,

$$N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_z \text{ funkcji } f.$$

Skoro wartość  $N(0)$  jest liczbą naturalną, a  $N(a)$  jest funkcją ciągłą, to znaczy, że  $N(0) = N(a) = N(1)$ , a

$$N(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f' + g'}{f + g} = N_z \text{ funkcji } (f + g).$$

□

**Przykład 47.** (Dowód zasadniczego twierdzenia algebry v2.0)

Niech  $f(z) = a_0 z^n$  i  $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ .

Zauważmy, że

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Możemy zatem wybrać taki zbiór  $A$ , dla którego  $|g(z)| < |f(z)|$ ,  $z \in \partial A$ , w którym zawarte będą wszystkie zera funkcji  $g(z)$ .

Zauważmy, że funkcja  $f(z)$  ma zero  $n$  - tego stopnia, czyli  $N_z = n$  dla funkcji  $f$ . Oznacza to, że ilość zer wraz z krotnościami (na mocy tw. Rouche) funkcji  $f + g$  wynosi  $n$ . □

**Przykład 48.** (Sumowanie szeregów v2.0)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ile to będzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}?$$

Niech

$$f(z) = \frac{1}{a^2 - z^2}, \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2} + \operatorname{Res}_{z=-a} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{a^2 - z^2}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) &= \operatorname{Res} \frac{1}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{(a-z)(a+z)} \operatorname{ctg}(\pi z) = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a}. \end{aligned}$$

Analogicznie  $\frac{1}{a^2 - z^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\operatorname{ctg}(-\pi a)}{2a}$ . Zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{\operatorname{ctg}(\pi a)}{a}.$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \frac{1}{a} = -\operatorname{ctg}(\pi a) \quad (\star)$$

Ale

$$\frac{a}{a^2 - n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n} \right).$$

$$\sum_{n=1}^{-\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 - n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}.$$

Zatem

$$(\star): \quad \dots + \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a-(n-1)} + \dots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a+n} + \dots = \operatorname{ctg}(\pi a).$$

Wyrażenie po prawej stronie jest funkcją okresu 1.

**Residuum w  $+\infty$**

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z^{-1}} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

**Przykład 49.** (bijekcja szprychowa - rys 17.1)

i) Chcemy aby  $f(x) = \frac{1}{x}$  (na  $\mathbb{R}$ ) była ciągła w  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\frac{1-y'}{x'} = \frac{y'}{x-x'} \implies x - x' - xy' + y'x' = y'x' \implies x(1-y') = x'.$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{1-y'} \\ (x')^2 + (y')^2 = 1 \end{cases}.$$

Uzwarzenie aleksandrowe  $\mathbb{R} \sim 0$ ,  $\overline{\mathbb{R}} \sim 0$  - zamknęliśmy nieskończoności w zerze.

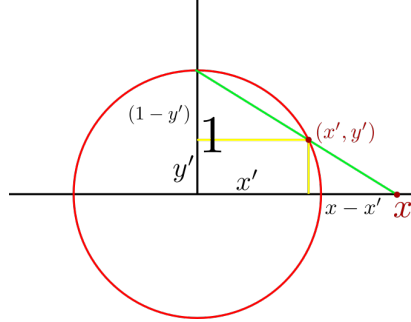
**Definicja 20.**

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + (0, 0, 1).$$

Mówimy, że  $f(z)$  jest holomorficzna w  $z = \infty$ , jeżeli funkcja  $g(z) = f(\frac{1}{z})$  jest holomorficzna w  $z = 0$ .

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad K(0, R).$$





Rysunek 17.1: Taka szprycha niech przecina nam okrąg

**Definicja 21.** Jeżeli  $g(z)$  w rozwinięciu  $R(0, 0, r)$  ma postać

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z,$$

to mówimy, że  $f(z)$  ma w  $z = \infty$  biegun rzędu  $k$ .

**Definicja 22.** Jeżeli  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$  nie istnieje, to mówimy, że  $f(z)$  ma w  $z = \infty$  osobliwość istotną.

**Obserwacja:** Jeżeli

$$g(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

to

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_{-k} z^{k-1} + \dots + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$



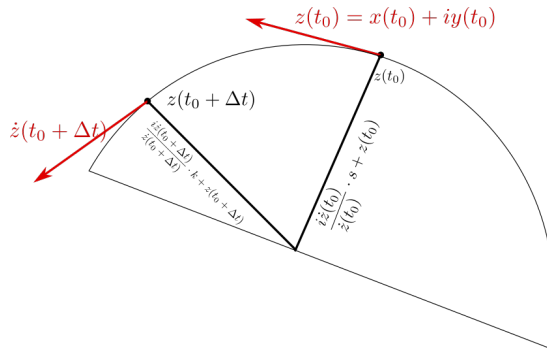
Wykład 18. 09.12.2019, przygotowanie do twierdzenia Kasner-Arnold, krzywizna, odwzorowania konforemne, residuum w  $+\infty$  (2/3)

Przygotowanie podłoża do tw (...)

Krzywizna

Pytanie 13. Jak policzyć przyspieszenie dla nie-okręgów?

Odpowiedź: A jaki jest promień tego aktualnego kółka? Mamy jakąś krzy-



Rysunek 18.1: Liczymy na chłama promień krzywizny

wą (rys 18.1)

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Szukamy tego punktu przecięcia z (rys 18.1):  $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\frac{i\dot{z}(t_0 + \Delta t)}{|z(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + z(t_0 + \Delta t) = \frac{i\dot{z}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + z(t_0).$$

i) Część urojona (wyrażamy  $k$  przez  $s$ )

$$\frac{\dot{x}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + y(t_0 + \Delta t) = \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + y(t_0).$$

Wyliczamy z tego  $k$ :

$$k = \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)).$$

ii) Część rzeczywista

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot k + x(t_0 + \Delta t) &= \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \cdot s + x(t_0). \\ \frac{-\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|} \cdot \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t) + x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) &= . \\ &= s \cdot \left( \frac{-\dot{y}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} + \frac{\dot{y}(t_0 + \Delta t)}{\dot{z}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{|\dot{z}(t_0 + \Delta t)|}{\dot{x}(t_0 + \Delta t)} \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{|\dot{z}(t_0)|} \right). \end{aligned}$$

iii) Mnożymy wszystko przez  $\dot{x}(t_0 + \Delta t)$

$$\begin{aligned} -\dot{y}(t_0 + \Delta t) (y(t_0) - y(t_0 + \Delta t)) + (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) \dot{x}(t_0 + \Delta t) &= \\ = \frac{s}{|\dot{z}(t_0)|} (-\dot{y}(t_0)(\dot{x}(t_0 + \Delta t) + \dot{y}(t_0 + \Delta t) \cdot x(t_0))) &= \end{aligned}$$

iv) Dalej

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_0 + \Delta t) (y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)) + \dot{x}(t_0 + \Delta t) (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)) &= \\ = \frac{s}{|\dot{z}(t)|} (\dot{x}(t_0) [\dot{y}(t_0 + \Delta t) - \dot{y}(t_0)] - \dot{y}(t_0) [\dot{x}(t_0 + \Delta t) - \dot{x}(t_0)]) &= \end{aligned}$$

v) dzielimy wszystko przez  $\Delta t$  i bierzemy granicę  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\dot{y}(t_0) \cdot \dot{y}(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot \dot{x}(t_0) = \frac{s}{\left( (\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2 \right)^{\frac{1}{2}}} (\dot{x}(t_0) \cdot \ddot{y}(t_0) - \dot{y}(t_0) \cdot \ddot{x}(t_0)).$$

vi) Zatem dostajemy wzór na krzywiznę  $s$ :

$$\frac{1}{s} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\left( (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

### Inna fajna forma

Zauważmy, że  $\bar{z}(t) \cdot \ddot{z}(t) = (\dot{x}(t) - i\dot{y}(t)) + (\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)) = \dots + i(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}(t))$ , czyli mając  $z(t)$ , policzymy krzywiznę tak:

$$\frac{1}{s} = \frac{Im(\bar{z}\ddot{z})}{|\dot{z}|^3}.$$

**Przykład 50.** Krzywa:  $z(t) = 2e^{it}$ ,  $\dot{z}(t) = 2ie^{it} = 2e^{i(t+\frac{\pi}{2})} \implies \bar{\dot{z}}(t) = 2e^{-i(t+\frac{\pi}{2})}$ ,  $\ddot{z}(t) = -2e^{it}$ .

$$\bar{\dot{z}}\ddot{z} = -4e^{i(t-t-\frac{\pi}{2})} = -4 \cdot (-i).$$

$$\frac{1}{s} = \frac{\operatorname{Im}(4i)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Czyli okrąg o promieniu 2 ma promień równy 2.

### Odwzorowania konforemne

**Definicja 23.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  - spójny,  $F$  - różniczkowalna na  $\Omega$ . Mówimy, że

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

jest odwzorowaniem konforemnym, jeżeli  $F'$  jest proporcjonalna do macierzy ortogonalnej.

$$F'(x) = f(x) \cdot R(x),$$

gdzie  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , a  $R(x)$  - macierz  $n \times n$  taka, że

$$R(x)^{-1} = (\overline{R(x)})^T, \quad \det R(x) = 1.$$

**Stwierdzenie 5. (Wniosek:)** odwzorowanie konforemne zachowuje kąt między stycznymi do krzywych.

*Dowód.* Weźmy dwie krzywe sparametryzowane

$$x_1(t), \quad t \in ]-a, a[$$

$$x_2(t), \quad t \in ]-b, b[$$

i

$$x_1(0) = x_2(0).$$

Wówczas ( $\gamma$  - kąt między krzywymi)

$$\cos \gamma = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|_{t=0}}.$$

Policzmy kąt między stycznymi do krzywych  $F(x_1(t)), F(x_2(t))$

$$\cos \gamma' = \frac{\left\langle \frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} \middle| \frac{d}{dt}F(x_2(t))_{t=0} \right\rangle}{\|\dots\| \|\dots\|},$$

ale my wiemy, że

$$\frac{d}{dt}F(x_1(t))_{t=0} = F'(x_1(t)) \frac{d}{dt}x_1(t)_{t=0} =$$

$F$  - konforemna, więc

$$= f(x_1(t))R(x_1(t))\dot{x}_1(t)_{t=0}.$$

Pamiętamy, że jeżeli  $R$  - ortogonalna, to  $\langle x|y \rangle = \langle Rx|Ry \rangle$ , zatem

$$\cos \gamma' = \frac{\langle f \cdot R\dot{x}_1 | f \cdot R\dot{x}_2 \rangle_{t=0}}{\|f \cdot R\dot{x}_1\| \|f \cdot R\dot{x}_2\|_{t=0}} = \frac{\langle \dot{x}_1 | \dot{x}_2 \rangle}{\|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|_{t=0}} = \cos \gamma.$$

□

**Pytanie 14.** *A co z funkcjami zespolonymi?*

**Odpowiedź:** Niech

$$f(z) = f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y),$$

taka, że  $f$  - holomorficzna. Możemy zatem badać funkcję

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \stackrel{\text{C-R}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} & -\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Jeżeli  $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  i  $R$  - ortogonalna, to znaczy, że  $R^{-1} = \overline{R}^T$  i  $\det R = 1$

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies d = a \wedge -b = c.$$

Czyli

$$F'(x, y) = (a^2 + b^2) \frac{1}{a \cdot a - (-b) \cdot b} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

### Powrót do residuów w nieskończoności

mamy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in R(0, 0, r).$$

Oznacza to, że

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Zauważmy, że  $a_n$  w rozwinięciu  $g(z) \dots$  jest dany wzorem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ 0 < t < r}} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz.$$

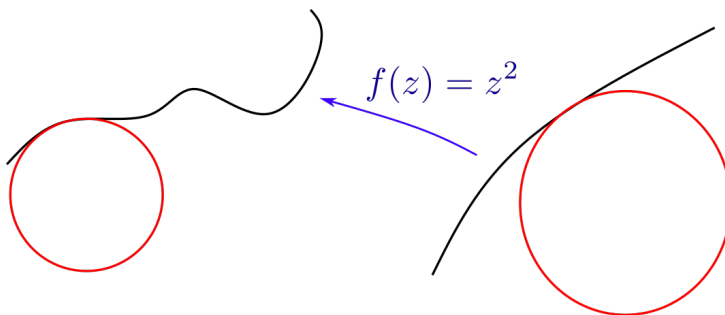
Zamieniamy zmienne:  $z = \frac{1}{z'}$ ,  $dz = -\frac{1}{(z')^2}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0, \frac{1}{r}) \\ 0 < t < r}} \frac{g\left(\frac{1}{z'}\right)}{\left(\frac{1}{z'}\right)^{n+1}} \cdot \frac{-1}{(z')^2} dz' = \int_{\substack{\partial K(0, \frac{1}{r}) \\ 0 < t < r}} f(z')(z')^{n-1} dz'.$$





Wykład 19. 13.12.2019, *twierdzenie Kasner-Arnold*



Rysunek 19.1

**Sprawdzamy jak zmienia się promień krzywizny przy transformacji  $f(z)$**

(rys 19.1).

$$\frac{1}{s} = \frac{\operatorname{Im}(\ddot{z}\bar{\dot{z}})}{|\dot{z}|^3}.$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{\operatorname{Im}\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}(z(t))^2 \overline{\frac{d}{dt}|z(t)|}\right)\right)}{\left|\frac{d}{dt}(z(t))^2\right|^3}.$$

$$\tilde{z}(t) = (z(t))^2.$$

$$(\dot{\tilde{z}}(t))' = (2(z(t)(\dot{z}(t))))' = 2\dot{z}(t)\dot{z}(t) + 2z(t)\ddot{z}(t).$$

$$(\bar{\tilde{z}})' = (\bar{z}(t)\bar{\tilde{z}}(t))' = 2\bar{z}(t)\bar{\ddot{z}}(t).$$

$$\ddot{\tilde{z}} \cdot \bar{\ddot{\tilde{z}}} = (2(\dot{z}(t))^2 + 2z(t)\ddot{z}(t)) (2\bar{z}(t)\bar{\ddot{z}}(t)) = 4\bar{z}(t)|\dot{z}|^2\ddot{z}(t) + 4|z(t)|^2\bar{\ddot{z}}(t) \cdot \ddot{z}(t).$$

Ale

$$\frac{\operatorname{Im}(\ddot{\tilde{z}}\bar{\ddot{\tilde{z}}})}{|\dot{\tilde{z}}(t)|^3} = \frac{\operatorname{Im}(4\bar{z}(t)|\dot{z}(t)|^2 \cdot \ddot{z}(t))}{8|z(t)|^3|\dot{z}(t)|^3} + \frac{\operatorname{Im}(4|z(t)|^2\bar{\ddot{z}}(t)\ddot{z}(t))}{8|z(t)|^3|z(t)|^3}.$$

Zatem

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{\operatorname{Im}(\bar{z}(t)\dot{z}(t))}{|z(t)|^2|z(t)|} + \frac{1}{s} \right).$$

Ale

$$\bar{z}(t)\dot{z}(t) = (x(t) - iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} + i(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}(t)\dot{z}(t)) = x\dot{y} - y\dot{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{bmatrix} = |\bar{z}(t)| \cdot |\dot{z}(t)| \sin(\angle(\dot{z}, \bar{z})).$$

$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{|z(t)||\dot{z}(t)|}{|z(t)|^2 \cdot |\dot{z}(t)|} \sin(\angle(\dot{z}, \bar{z})) + \frac{1}{s} \right).$$

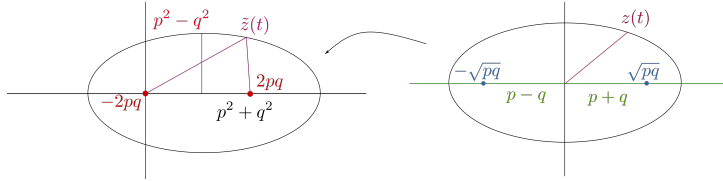
$$\frac{1}{\tilde{s}} = \frac{1}{2|z(t)|} \left( \frac{\sin(\angle(\dot{z}, \bar{z}))}{|z(t)|} + \frac{1}{s} \right).$$

### Już prawie twierdzenie Kasner-Arnold

Rozważmy ruch na  $\mathbb{R}^2$ , pod wpływem siły  $F = -r$ , czyli na  $\mathbb{C}$

$$\ddot{z}(t) = -z(t), \text{ gdzie } (m = 1, k = 1).$$

Trajektoria wygląda tak:



Rysunek 19.2: przed i po

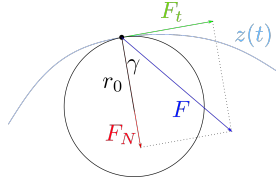
$$z(t) = pe^{it} + qe^{-it} = (p+q)\cos(t) + i(p-q)\sin(t).$$

$$(x(t), y(t)) = ((p+q)\cos(t), (p-q)\sin(t)).$$

Jak rozpoznać siłę typu  $F = -\frac{1}{r^2}$  od  $F = -r$ ? Trajektoria wychodzi taka sama, ale dla tej drugiej siła jest zaczepiona w środku elipsy. Co się stanie jak przepuścimy tę elipsę przez  $f(z) = z^2$ ? Dostaniemy

$$\tilde{z}(t) = (pe^{it} + qe^{-it})^2 = p^2e^{2it} + 2pq + q^2e^{-2it} = (p^2 + q^2)\cos(2t) + 2pq + i(p^2 - q^2)\sin(2t)$$

taką przesuniętą elipsę jak na rys. 19.2



Rysunek 19.3

**Pytanie 15.** Jeżeli  $F = -r$ , To jaka jest  $\tilde{F}$ ? (sytuacja jak na rys. 19.3)

$\cos \gamma = \frac{F_N}{F}$ ,  $F = \frac{F_N}{\cos \gamma}$ , ale  $F_N = \frac{v^2(t)}{r_0}$ . My wiemy, że czasami zachowany jest moment pędu

$$\bar{r} \times \bar{v}(t) = r \cdot v \sin(\angle r, v) = rv \cos \gamma = \text{const} = A.$$

Czyli

$$v = \frac{A}{r \cos \gamma}.$$

$$F = \frac{F_N}{\cos \gamma} = \frac{1}{r_0} \frac{A^2}{r^2 (\cos \gamma)^3}.$$

I dostaliśmy taki związek. Dla ruchu po okręgu  $\gamma = 0$ ,  $r = r_0$  i wtedy

$$F = \frac{1}{r^3} A^2 = \frac{1}{r^3} (rv)^2 = \frac{v^2}{r}.$$

Znowu spróbujemy przepuścić taki ruch przez  $f(z) = z^2$ . Przypuszczamy, że będą takie zmiany:

$$\begin{aligned} A &\sim \tilde{A} \\ r &\sim \tilde{r} \\ r_0 &\sim \tilde{r}_0 \\ \gamma &\sim \gamma \quad (\text{bo } f(z) \text{ - koforemna}) \\ v &\sim \tilde{v} \\ F &\sim \tilde{F}. \end{aligned}$$

Ale

$$F = \frac{A^2}{r_0} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(\cos \gamma)^3}.$$

Zatem

$$\tilde{F} = \frac{1}{\tilde{r}_0} \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \cdot \frac{1}{(\cos \gamma)^3}.$$

$A$  i  $\tilde{A}$  się nie przejmujemy, ale za to  $r_0$  już tak

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\sin(\angle(\dot{z}, \bar{z}))}{r} \right).$$

Z tego co wcześniej napisaliśmy, mamy

$$\frac{1}{r_0} = \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos \gamma)^3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\cos \gamma}{r} + \frac{F}{(A)^2} r^2 (\cos \gamma)^3 \right). \\ \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{1}{r} \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} r \left( \frac{(A)^2}{2r^2 (\cos \gamma)^2} + \frac{Fr}{2} \right). \\ \frac{1}{\tilde{r}_0} &= \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{Fr}{2} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy  $F \sim r$ , to

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r^2 = E.$$

(Energia całkowita ruchu po elipsie, przed przepuszczeniem przez  $f(z) = z^2$  )

$$\frac{1}{\tilde{r}_0} = \frac{(\cos \gamma)^3}{(A)^2} \cdot E.$$

Zatem podstawiając do wcześniej wyliczonego  $\tilde{F}$  mamy

$$\tilde{F} = \frac{(\cos \gamma)^3 E}{(A)^2} \cdot \frac{(\tilde{A})^2}{\tilde{r}^2} \frac{1}{(\cos \gamma)^3} = \left( \frac{\tilde{A}}{A} \right)^2 \frac{E}{\tilde{r}^2} = \frac{const}{\tilde{r}^2}.$$

To jest dowód Kasnera - Arnolda w przypadku  $f(z) = z^2$ . Siły grawitacji i te  $\sim r$  okazują się być w jakiejś "dualności" względem  $z^2$ .

**Twierdzenie 16.** (*Kasner-Arnold*)

Jeżeli  $F_1 \sim r^A$ , a  $F_2 \sim r^{\tilde{A}}$  i

$$(A+3)(\tilde{A}+3)=4$$

i  $m = \frac{A+3}{2}$ , to transformacja  $f(z) = z^m$  przeprowadza ruch (trajektorię i cały ten posag) pod wpływem siły  $F_1$  w ruch pod wpływem siły  $F_2$ .

**Przykład 51.** sprężyna -  $A = 1$ ,  $\tilde{A} = -2$ ,  $m = \frac{1+3}{2} = 2$

$$(1+3)(-2+3)=4.$$

Wtedy nasz  $f$  wynosi  $f(z) = z^2$ .



Wykład 20. 16.12.2019, *residuum w  $+\infty$  (3/3) + super twierdzenie, transformata Fouriera*

**dodatek na temat kąta**

Było

$$\sin(\angle z, \bar{z}).$$

Ma być

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = |z| |\dot{z}| \sin(\angle(z, \dot{z})).$$

**Powrót do residuów w nieskończoności**

Dostaliśmy na Wykładzie 18

$$a_n = -\frac{2}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) z^{n-1} dz.$$

Wielkość

$$-a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) dz$$

nazywamy residuum funkcji  $f$  w nieskończoności.

**Stwierdzenie 6.** Niech  $f$  - holomorficzna na  $\mathbb{C}$  z wyjątkiem punktów  $z_1, \dots, z_k$ , ale  $z_i$  - biegun  $p_i$  rzędu (nie ma punktów istotnie osobliwych). Wówczas

$$\sum_{\text{Res } f + \text{Res } \infty} f = 0.$$

*Dowód.* Niech  $z_i$  takie, że

$$\exists_A \quad \forall_i \quad z_i \in A.$$

Wówczas

$$-\int_{\partial A} f + \sum_i \int_{\partial K(z_i, r_i)} f = 0.$$

□

**Pytanie 16.** *Jak obliczyć  $a_1$ ?*

Zauważmy, że gdy rozwiniemy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

w szereg Laurenta wokół zera, to  $g(z)$  przyjmuje postać

$$g(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Zauważmy, że

$$\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{a_2}{z^4} + \frac{a_{-1}}{z^3} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \dots$$

Zatem

$$\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_0 \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}.$$

**Przykład 52.**

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8 + 1)^2} = \sum_{\substack{\operatorname{Res} \frac{1}{8} \\ (-1)}} f = -\operatorname{Res}_{\infty} f(z).$$

*Ale*

$$f(z) = \frac{1}{(z^8 + 1)^2}.$$

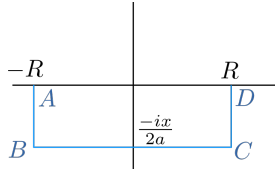
$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^8 + 1\right)^2} = \frac{z^{16}}{(1 + z^8)^2}$$

*i liczymy  $\operatorname{Res}_0 \frac{g(z)}{z^2}$  Ale*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot z^{14}}{(1 + z^8)^2} = 0.$$

*Więc całka też 0.*





Rysunek 20.1: w20-1

**Przykład 53.** *Sytuacja jak na rys. 20.1*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt, \quad a \geq 0.$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left[ \left( t - \frac{ix}{2a} \right)^2 + \frac{x^2}{4a^2} \right]} dt = e^{-a \frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left( t - \frac{ix}{2a} \right)^2} dt.$$

Liczymy teraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left( t - \frac{ix}{2a} \right)^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-a \left( t - \frac{ix}{2a} \right)^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R - \frac{ix}{2a}}^{R - \frac{ix}{2a}} e^{-as^2} ds.$$

Niech  $f(z) = e^{-az^2}$

$$\int_{AB} f + \int_{BC} f + \int_{CD} f + \int_{DA} f = 0.$$

$BC$  już mamy, więc

$$\int_{BC} f = - \int_{DA} f - \int_{BA} f - \int_{CD} f.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{CD} f = 0.$$

Parametryzacja  $CD := \{z = R + iy, -\frac{x}{2a} \leq y \leq 0\}$

$$\int_{CD} f = \int_{-\frac{x}{2a}}^0 idy \cdot e^{-a(R+iy)^2} = i \int_{-\frac{x}{2a}}^0 dy \cdot e^{-aR^2} e^{-2Ri ya} e^{ay^2}.$$

$$\left| \int_{CD} f \right| \leq e^{-aR^2} \left| \frac{x}{2a} \right| \cdot |e^{-2Ri ya}| \cdot \max_{-\frac{x}{2a} \leq y \leq 0} |e^{ay^2}| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

I tak samo będzie z całką po  $AB$ . Jeszcze zostało  $DA$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} - \int_{DA} f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

## Transformata Fouriera

**Obserwacja:** Rozwińmy  $f(z)$  w  $R(0, a, b)$ ,  $a, b < 1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial K(0,t) \\ a < t < b}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Wstawmy  $z = e^{ix}$

$$g(z) = f(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Ale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,t)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{z=e^{ix}}^{z=ie^{ix}} \frac{1}{2\pi i} i \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ix})}{e^{(ix)(n+1)}} e^{ix} dx.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

**Definicja 24.** *Transformatą Fouriera funkcji  $f$  nazywamy wielkość*

$$\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xt} f(t) dt.$$

**Uwaga:** transformatę Fouriera możemy zdefiniować też tak

**Definicja 25.** *(inne notacje)*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\sigma xt} f(t) dt,$$

gdzie  $m = \{1, 2\pi\}$ ,  $q = \{-1, 1\}$ ,  $\sigma = \{1, 2\pi\}$ .

Konwencja u nas:

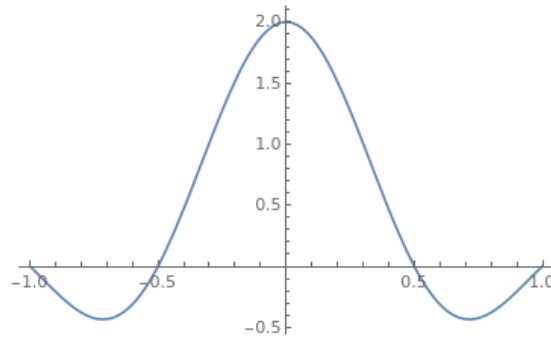
- $m = 1$
- $q = -1$
- $\sigma = 2\pi i$

**Przykład 54.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi tx} dt = \int_{-a}^{+a} e^{-i2\pi tx} dt = -\frac{1}{2\pi ix} e^{-i2\pi tx} \Big|_{-a}^a = \\ &= -\frac{1}{2\pi ix} [e^{-i2\pi ax} - e^{i2\pi ax}] = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Czyli jak na rys. 20.2

Rysunek 20.2: Wynik przefourierowania  $f$ 

**Definicja 26.** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że

- $f$  - klasy  $L_1$ , jeżeli

$$\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty.$$

- $f$  - klasy  $L_2$ , jeżeli

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < +\infty.$$

**Przykład 55.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & x > 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Zbadać, czy  $f$  jest klasy  $L_1$  lub (i)  $L_2$  i czy  $g$  jest klasy  $L_1$  lub (i)  $L_2$

## Wykład 21. 20.12.2019, własności transformaty Fouriera i transformata odwrotna

Do pytania o  $L_1$  i  $L_2$ .

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f| &= \int_0^1 (x)^{-\frac{2}{3}} = 3 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 &= \int_0^1 (x)^{-\frac{4}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g| &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} \text{ nie istnieje} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 &= \int_1^{+\infty} (x)^{-\frac{2}{3}} = 3\end{aligned}$$

Czyli  $f$  - klasy  $L_1$ ,  $g$  - klasy  $L_2$

### Własności (transformaty Fouriera)

1. Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $f, g$  - klasy  $L_1$ , wówczas

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g.$$

(z liniowości całki)

2. Niech  $f, g$  - klasy  $L_1$ , wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

*Dowód.* (z twierdzenia Fubiniiego)

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \hat{f}(k) dk.$$

□

**Obserwacja:** chcemy rozwiązać równanie:

$$(f(t))'' + \omega^2 f(t) = g(t).$$

Załóżmy, że nasz  $f$  :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Dajmy na to, że

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f'(t) = -2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

$$f''(t) = (-2\pi i k)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-2\pi i k t} dk.$$

Po podstawieniu do oscylatora, uzyskujemy napis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(-2\pi i k)^2 h(k) + \omega^2 h(k) - w(k)] e^{-2\pi i k t} dk = 0,$$

co by oznaczało tyle, że

$$(-4\pi^2 k^2 + \omega^2) h(k) = w(k).$$

Czyli

$$h(k) = \frac{w(k)}{-4\pi^2 k^2 + \omega^2}.$$

Ale wiemy, że

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(k)}{\omega^2 - 4\pi^2 k^2} e^{-2\pi i k t} dt.$$

**Obserwacja:** Jeżeli  $f$  - klasy  $L_1$  i  $f'$  - klasy  $L_1$ , to  $\mathcal{F}(f')(x) = 2\pi i x (\mathcal{F}f)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(k) e^{-2\pi i k x} dk = f(k) e^{-2\pi i k x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-2\pi i x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk}_{\mathcal{F}(f)}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$ , to znaczy, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , oraz skoro  $f'$  - klasy  $L_1$ , to

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(k) dk.$$

Skoro  $f'$  - klasy  $L_1$ , to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - f(0)| \leq \left| \int_0^{+\infty} f'(k) dk \right| \leq M.$$

Widzimy zatem, że  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \leq M$  znaczy, że jeżeli  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < +\infty$ , to znaczy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \square$$

Zatem

$$\mathcal{F}(f')(x) = (2\pi i x)(\mathcal{F}f)(x),$$

(jeżeli  $f, f', \dots, f^{(m)}$  - klasy  $L_1$ ) i ogólniej

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi i x)^m (\mathcal{F}f)(x).$$

**Obserwacja:** Niech  $f$  - klasy  $L_1$ , wówczas  $\frac{d}{dx}(\mathcal{F}f)(x) = -2\pi i \mathcal{F}(xf)$

*Dowód.*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{F}f)(x+h) - (\mathcal{F}f)(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f(k)e^{-2\pi i k(x+h)} - f(k)e^{-2\pi i kx} \right) dk = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-2\pi i kx} \left( \frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \right) dt. \quad (\star)
 \end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i kh} - 1}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\pi i k e^{-2\pi i kh}}{1} = -2\pi i k.$$

Zatem dalej mamy

$$(\star) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi i k f(k) e^{-2\pi i kx} dk = -2\pi i (\widehat{xf}).$$

□

## Transformata odwrotna

1. policzmy  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} dk.$$

Wcześniej napisaliśmy  $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$ . No to weźmy  $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i kx} dk$ , ale to jeszcze nie teraz, bo taka całka jeszcze nie istnieje. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dk = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i kx} e^{-\varepsilon|x|} dx.
 \end{aligned}$$



Policzmy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i k x} e^{-\varepsilon|x|} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i k x} e^{-\varepsilon|x|} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i k x} e^{\varepsilon|x|} dx = \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-2\pi i k + \varepsilon)x} dx = \\
 &= \frac{1}{-2\pi i k - \varepsilon} e^{(-2\pi i k - \varepsilon)x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} e^{(-2\pi i k + \varepsilon)x} \Big|_{-\infty}^0.
 \end{aligned}$$

(★★)

Ale  $e^{-2\pi i k x} \cdot e^{-\varepsilon x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$(\star\star) = \frac{-1}{-2\pi i k - \varepsilon} + \frac{1}{-2\pi i k + \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon + 2\pi i k} + \frac{1}{\varepsilon - 2\pi i k} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2}.$$

Zatem

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (2\pi k)^2} dk.$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\varepsilon L)^2} \cdot \varepsilon \cdot dL = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{2\varepsilon^2 dL}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon)} \cdot$$

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{2\varepsilon L}{2\pi}\right) \frac{1}{1 + L^2} dL = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{dL}{1 + L^2} = \frac{2f(0)}{2\pi} (\arctg(L))_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \frac{f(0)}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{f(0)}{\pi} \cdot \pi = f(0) \quad \square.
 \end{aligned}$$

Niech  $f_L(x) = f(x + L)$ . Wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_L(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(k) e^{-2\pi i k x} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(L + k) e^{-2\pi i k x} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k') e^{-2\pi i x(k' - L)} dk' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x L} f(k') e^{-2\pi i x k'} dk' = \\ &= e^{2\pi i x L} (\mathcal{F}f).\end{aligned}$$

Policzmy całkę  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f_L)(x)$ . Wiemy, że

$$f_L(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f_L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i L} \mathcal{F}f.$$

Czyli

$$f(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{2\pi i L} dL.$$

Mamy wzór na transformatę odwrotną, czyli wiemy, że jeżeli  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-2\pi i k x} dk$ , to  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} dk$

Wykład 22. 09.01.2020, *Splot, wchodzenie z granicą pod całkę i równanie przewodnictwa*

**Definicja 27.** Jeżeli  $f$  - klasy  $L^1$  na  $\mathbb{R}$  i  $g$  - klasy  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ , to wielkość

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt$$

nazywamy *splotem (konwolucją) funkcji  $f$  i  $g$*  i oznaczamy

$$h(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} (f \star g)(x).$$

*bonus:*

$$\|f_1 \star f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

**Przykład 56.**

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = e^x.$$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{x-t}dt.$$

**Uwaga:**  $h(x)$  też jest klasy  $L_1$  na  $\mathbb{R}$ , bo

*Dowód.*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)g(x-t)dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dt. \end{aligned}$$

□

**Przykład 57.** (np. rozkład ładunku elektrycznego)

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \rho(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) &= \frac{1}{\|\bar{x}\|}. \\ (f \star g)(\bar{x}) &= \int d^3 \bar{x}' \frac{\rho(\bar{x}')}{\|x - x'\|}. \end{aligned}$$

**Przykład 58.** (związek z Rezolwentą z drugiego semestru)

$$x(t) = \int R(t-s)b(s)ds.$$

**Stwierdzenie 7.**

$$\mathcal{F}(f \star g)(x) = (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x).$$

*Dowód.*

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt. \\ \hat{h}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{-2\pi i k x} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-2\pi i k x} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)g(k-t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k-t)e^{-2\pi i k x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k - t &= s \\
 dk &= ds \\
 k &= s + t \\
 \implies \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x(s+t)} &= \\
 = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-2\pi i x t} \int_{-\infty}^{\infty} ds g(s) e^{-2\pi i x s} &= \\
 = \hat{f}(x) \hat{g}(x).
 \end{aligned}$$

**Uwaga:** analogicznie,

$$\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(x) = (\mathcal{F}^{-1}f)(x) (\mathcal{F}^{-1}g)(x).$$

□

**Pytanie 17.** *Kiedy możemy wejść z granicą pod całkę?*

**Twierdzenie 17.** *Niech*

1.  $A, B \subset \mathbb{R}$
2.  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$
3.  $x \in A, y \in B, f(x, y) \in \mathbb{R}$ .

*Jeżeli*

$$\forall_{y \in B} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$$

*oraz istnieje  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  - całkowalna na  $B$  oraz*

$$\forall_{x \in A} \quad \forall_{y \in B} |f(x, y)| < |g(y)|,$$

*to*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_B f(x, y) dy = \int_B f(x_0, y) dy.$$

$|g(y)|$  nazywamy **majorantą**, a ten warunek zbieżnością **zmajoryzowanąą**.

*Dowód.* brak : (

□

**Przykład 59.** *Niech*

1.  $B = ]0, \infty[$
2.  $f(x, y) = xe^{-xy}$

$$\int_0^{\infty} dy xe^{-xy} = x \cdot \frac{-1}{x} e^{-xy} \Big|_0^{\infty} = -e^{-xy} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} xe^{-xy} dy = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} xe^{-xy} dy = \int_0^{\infty} 0 dy = 0.$$

Czy  $f(x, y)$  jest majoryzowalna?

$$\forall_{x \in A} \quad \forall_{y \in B} |f(x, y)| < |g(y)|.$$

$$h(x) = xe^{-xy}h'(x) = e^{-xy} + x(-ye^{-xy}).$$

$$e^{-xy}(1 - xy) \text{ ma robi } h'(x) = 0, \text{ gdy } xy = 1 \implies x = \frac{1}{y}.$$

$$h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}e^{-\frac{1}{y}y} = \frac{1}{y}e^{-1}.$$

Czy istnieje  $g$  - całkowalna na  $]0, \infty[$ , taka, że

$$\left| \frac{1}{ey} \right| < |g(y)|?$$

**Odpowiedź:** nie.

### Równanie przewodnictwa

Szukamy funkcji  $U(x, y) : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , takiej, że

1.  $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , dla  $t > 0$
2.  $U(x, 0) = f(x)$
3.  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Załóżmy, że istnieją funkcje  $\tilde{U}(\omega, t)$  i  $\tilde{f}(\omega)$  takie, że

- $U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega, t) e^{-2\pi i \omega x} d\omega$
- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega x}$ , czyli  $f(x) = \mathcal{F}(\tilde{f})(x)$ .

Podstawiamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} e^{-2\pi i \omega x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-2\pi i \omega)^2 \tilde{U}(\omega, t) e^{-2\pi i \omega x}$$

do naszego równania przewodnictwa i mamy

$$\forall_{x \in ]-\infty, +\infty[} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-2\pi i a x} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - a^2 (-2\pi i \omega)^2 \tilde{U}(\omega, t) \right) = 0.$$

To oznacza, że skoro rozwiązanie ma być dla całej szyny, to wyrażenie podcałkowe ma być równe 0. Czyli

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = -(2\pi i a \omega)^2 \tilde{U}(\omega, t) \implies \tilde{U}(\omega, t) = C(\omega) e^{-(2\pi a \omega)^2 t}.$$

Równanie jest rozwiązane, ale trzeba dopracować szczegóły. Znajdźmy  $C(\omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega, 0) &= C(\omega) \\ \tilde{U}(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{U}(\omega, 0) e^{-2\pi i \omega x} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C(\omega) e^{-2\pi i \omega x}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony,  $\tilde{U}(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega$ . Stąd  $C(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ .

Ostatecznie

$$\tilde{U}(\omega, t) = \tilde{f}(\omega) e^{-(2\pi a)^2 \omega^2 t}.$$

Nasze  $U(x, t)$  jest transformatą Fouriera tego napisu względem zmiennej  $\omega$  (**nie czasu!**).

$$U(x, t) = \mathcal{F} \left( \tilde{U}(\omega, t) \right).$$

Wiemy, że

$$\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f).$$

Niech

$$\tilde{g}(\omega, t) = e^{-(2\pi a)^2 \cdot t \cdot \omega^2}.$$

Znajdźmy funkcję  $g$  taką, że

$$\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g).$$

Chcemy wyznaczyć  $U(x, t)$  bez konieczności liczenia  $\tilde{f}$  i  $\tilde{g}$ , czyli w języku  $f$  i  $g$ . Policzymy najpierw  $g$ .

$$g = \mathcal{F}(\tilde{g}).$$



My już kiedyś policzyliśmy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad a > 0 \quad (\Delta)$$

Czyli

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(2\pi a)^2 t \omega^2} e^{-2\pi i \omega x}.$$

Przekładamy tę całkę  $(\Delta)$  na nasze literki

$$(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i \spadesuit \omega} e^{-\clubsuit \omega^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\clubsuit}} e^{-\frac{(\spadesuit)^2}{4\clubsuit}} \quad \clubsuit > 0.$$

Czyli mamy  $g$

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 \cdot t}} e^{\frac{-(-2\pi x)^2}{4(2\pi a)^2 t}}.$$

Wiemy, że

- $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$
- $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(g)$
- $U(x, t) = \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g})$ .

Jeżeli  $\alpha, \beta$  - funkcje klasy  $L_1$ , to

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta) = \mathcal{F}^{-1}(\alpha) \mathcal{F}^{-1}(\beta).$$

Teraz obustronnie fourierujemy

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)).$$

Czyli

$$\alpha \star \beta = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\alpha) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\beta)).$$

Jeżeli

- $\mathcal{F}^{-1}(\alpha) = \tilde{f}$

- $\alpha = \mathcal{F}(\tilde{f}) = f$
- $\mathcal{F}^{-1}(\beta) = \tilde{g}$
- $\beta = \mathcal{F}(\tilde{g}) = g,$

to

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = f \star g = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds. \end{aligned}$$

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi a)^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) \cdot e^{-\frac{(2\pi)^2 \cdot (x-s)^2}{(2\pi)^2 \cdot 4a^2 t}} = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}.$$

Wykład 23. 10.01.2020, *Iloczyn skalarny, unitarność transformaty Fouriera, nierówność Heisenberga*

**Przypomnienie**

Niech  $V$  - przestrzeń funkcji nad  $\mathbb{R}$  o wartościach w  $\mathbb{C}$ . Odwzorowanie

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli:

1.  $\forall_{x \in V} \langle x|x \rangle \geq 0, \langle x|x \rangle = 0 \iff x = 0$
2.  $\forall_{x,y \in V} \forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \langle \lambda x|y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle$
3.  $\forall_{x,y \in V} \langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$
4.  $\forall_{x,y,z \in V} \langle x+y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$

**Uwaga:**

a)  $\langle x|\lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y|x \rangle} = \overline{\lambda \langle y|x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x|y \rangle$

b) Niech  $f, g \in V$  - klasy  $L_2(\mathbb{R})$ , wówczas  $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$  spełnia warunki 1-4

$$\langle f|f \rangle = \int f \bar{f} = \int |f|^2.$$

c) Nierówność Schwarza:

$$\forall_{u,w \in V} \|u\|^2 \|w\|^2 \geq |\langle u|w \rangle|^2.$$

(moduł z prawej strony, bo to zespolone jest, a kwadraty, żeby uniknąć pierwiastków)

**Twierdzenie 18.** (*Wzór Plancherela, Parsevala*)

Niech  $f$  - klasy  $L_2$ , wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\lambda)|^2 d\lambda.$$

*Dowód.* W naszym języku ten warunek to

$$\langle f|f \rangle = \langle \mathcal{F}f|\mathcal{F}f \rangle.$$

Czy  $\mathcal{F}$  jest operatorem unitarnym?

Prawa strona:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\lambda)|^2 d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (\mathcal{F}f)(\lambda) \cdot \overline{(\mathcal{F}f)(\lambda)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2\pi i x \lambda} \cdot \overline{\int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) e^{-2\pi i s \lambda}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2\pi i x \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} ds \overline{f(s)} e^{2\pi i s \lambda} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \overline{f(s)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (\mathcal{F}f)(\lambda) e^{2\pi i s \lambda} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \overline{f(s)} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \overline{f(s)} f(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds |f(s)|^2. \end{aligned}$$

□

**Stwierdzenie 8.** Niech  $f$  - klasy  $L_2$ , wówczas zachodzi nierówność Heisenberga

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\widehat{f(\lambda)}|^2 d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f(\lambda)}|^2 d\lambda} \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

**Przypomnienie:** jeżeli  $|\psi(x)|^2$  jest gęstością prawdopodobieństwa, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1, \quad x_{\text{śr}} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{śr}})^2 |\psi(x)|^2 dx.$$

Dla  $x_{\text{śr}} = 0$ , mamy  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

*Dowód.* (Heisenberg)

Założmy, że  $x_{\text{śr}} = \int x |f(x)|^2 dx = 0$ , przypadek ogólny omówimy później. Pamiętajmy, że

$$1. \quad \widehat{f'(\lambda)} = 2\pi i \lambda \widehat{f(\lambda)}, \text{ czyli } \lambda \widehat{f(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \widehat{f'(\lambda)}$$

2. Jeżeli  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , to

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\Re(z_1 \overline{z_2}).$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \\ (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) &= \\ &= 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = 2\Re(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

3. Jeżeli  $z \in \mathbb{C}$ , to

$$|z| \geq |\Re(z)|.$$

$$4. \quad \forall_{u, v \in V} \|u\|^2 \|v\|^2 \geq |\langle u | v \rangle|^2$$

Mamy

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\widehat{f(\lambda)}|^2 d\lambda \geq \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda \widehat{f(\lambda)}|^2 d\lambda = . \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \widehat{f'(\lambda)} \right|^2 d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'(\lambda)}|^2 d\lambda = . \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(\lambda)|^2 d\lambda. \quad \text{Plancherel}
 \end{aligned}$$

Jeżeli  $xf(x)$  nazwiemy  $u$ , to cała pierwsza całka, to  $\langle u|u \rangle = \|u\|^2$ . Dalej, druga całka to  $\|v\|^2$ . Stąd

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi)^2} \|u\|^2 \|v\|^2 \geq \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2 \underset{(3)}{\geq} \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left( \underset{z_1}{xf(x)} \overline{\underset{z_2}{f'(x)}} \right) dx \right|^2 \underset{(2)}{=} \\
 & \quad \quad \quad |\langle u|v \rangle|^2 \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \overline{f'(x)} + \overline{xf(x)} f'(x) dx \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} (f(x) \overline{f(x)}) dx \right|^2 = . \\
 & \quad \quad \quad \underset{\text{przez części}}{=} \frac{1}{16\pi^2} \left| x |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right|^2 = .
 \end{aligned}$$

Wiemy, że  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2$  istnieje, więc

$$\begin{aligned}
 & x |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \\
 & = \frac{1}{16\pi^2} \left| - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = .
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f(x)}_{\text{Plancherel}} \right|^2 d\lambda.$$

□

Co się dzieje w przypadku ogólnym? Zauważmy, że

$$\widehat{f(x+L)} = e^{2\pi i x L} \widehat{f(x)}.$$

Wówczas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_{\text{sr}})^2 \left| \widehat{f(\lambda)} \right|^2 d\lambda &\stackrel{t=\lambda-\lambda_{\text{sr}}}{\implies} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left| \widehat{f(t+\lambda_{\text{sr}})} \right|^2 dt = . \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left| e^{2\pi i t \lambda_{\text{sr}}} \widehat{f(t)} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left| \widehat{f(t)} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Analogicznie,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{sr}})^2 |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\text{sr}})^2 \left| \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{f(x)} \right) \right|^2 dx = \\ &= \text{jakieś przejście} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 |f(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

**Pytanie 18.** *A ile wynosi  $\mathcal{F}(1)$ ?*

Warunek  $A = 0$  można postawić bardziej naturalnie:

$$\forall_{\varepsilon > 0} |A| < \varepsilon.$$

Warunek  $\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = g(x)$ , tak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - g(x)) dx = 0.$$

Albo tak:

$$\forall_{h(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) h(x) dx.$$

To nas doprowadzi do pojęcia dystrybucji, ale dopiero jutro.





## Wykład 24. 13.01.2020, Dystrybucje - własności, delta Diraca

### Dystrybucje

**Definicja 28.** Niech  $D$  - przestrzeń funkcji klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$  o zwartym nośniku. Czyli

$$\exists_{K \subset \mathbb{R}}, K \text{ - domknięty, } \forall_{\varphi \in D} \quad \forall_{x \notin K} \varphi(x) = 0.$$

Przestrzeń  $D$  nazywamy przestrzenią funkcji próbnych.

**Przykład 60.**  $\varphi \in D$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Przestrzeń dualną do  $D$  oznaczmy przez  $D^*$

**Definicja 29.** Funkcjonał liniowy z przestrzeni  $D^*$  nazywamy dystrybucją. **Oznaczenia:** jeżeli  $T \in D^*$ ,  $\varphi \in D$ , to

$$T(\varphi) \stackrel{\text{ozn}}{=} \langle T, \varphi \rangle.$$

**Przykład 61.** Niech

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

$T_\theta$  jest dystrybucją. Wówczas

$$\langle T_\theta, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Oznacza to, że jeżeli  $f$  - funkcja na  $\mathbb{R}$ , to możemy z nią związać dystrybucję  $T_f \in D^*$  taką, że

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

**Definicja 30.** Niech  $T \in D^*$ , wówczas przez  $T'$  oznaczymy dystrybucję o następującej własności

$$\forall_{\varphi \in D} \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle.$$

**Uwaga:** powyższa definicja spełnia warunek

$$(T_f)' = T_{f'},$$

bo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Dalej

$$\langle T_f', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

**Definicja 31.** Niech  $\delta \in D^*$ . Dystrybucję  $\delta$  nazywamy deltą Diraca i definiujemy tak:

$$\langle \delta, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0).$$

Analogicznie,

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a).$$

**Definicja 32.** Czasami pojawiają się takie oznaczenia (konwencje):

$$\begin{aligned}\delta &= \delta(x) \\ \delta_a &= \delta(x - a) \\ \langle \delta, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx \\ \langle \delta_a, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Mozna też znaleźć takie napisy:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

**Obserwacja:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} 7\delta(x) dx = 1 \neq 7 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 7,$$

a ona miała być elementem przestrzeni liniowej.

Policzmy  $(T_\theta)'$ .

$$\langle T'_\theta, \varphi \rangle = -\langle T_\theta, \varphi' \rangle.$$

Prawa strona:

$$\begin{aligned}-\langle T_\theta, \varphi' \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^\infty = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

$$(T_\theta)' = \delta.$$

$${}''\theta' = \delta''.$$

Ale to nie ma sensu, ale na poziomie

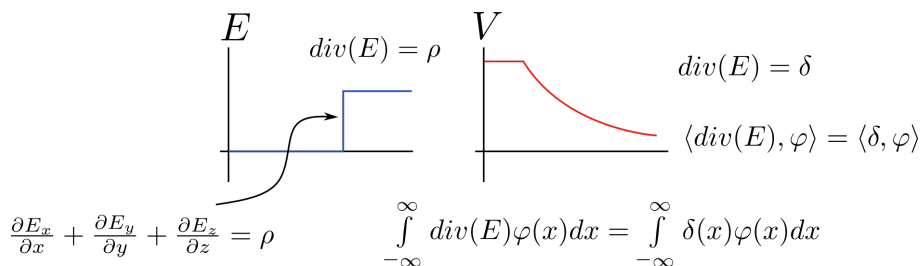
$$\forall_{\varphi \in D} \langle T_{\theta'}, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

też nie, ale trochę mniej.

$$\langle (T_{\theta})', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

sens ma, ale w literaturze pojawiają się wszystkie 3 napisy.

**Przykład 62.** Niech  $E$  - pole elektryczne.



Rysunek 24.1: Dlaczego fizycy lubią deltę Diraca?

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

**Definicja 33.** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , taka, że dla  $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sigma.$$

(Kiedyś poważniejszą wersję tego nazywaliśmy wahaniami funkcji)

Policzmy  $(T_f)'$

$$\begin{aligned}
 \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\
 &= -\int_a^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx = \\
 &= -f(x) \varphi(x) \Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx + \\
 &\quad -f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^a + \int_{-\infty}^a f'(x) \varphi(x) dx = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \varphi(x) + \\
 &\quad + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx}_{\text{bez } x = a'} = \sigma \varphi(a) + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx}_{\clubsuit} = \\
 &= \langle \sigma \cdot \delta + T_{\{f'\}}, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Czyli niepoprawnie piszemy tak:

$$f' = \sigma \cdot \delta + \{f'\}$$

i rozumiemy w sensie  $\clubsuit$

**Przykład 63.** Rozwiązać równanie

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = \delta(x - a).$$

Bierzemy dwie funkcje:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= A_1 \sin(\omega x) + B_1 \cos(\omega x) & x < a \\
 f_2(x) &= A_2 \sin(\omega x) + B_2 \cos(\omega x) & x > a \\
 f_1(a) &= f_2(a) \\
 \lim_{x \rightarrow a} f_2'(x) - f_1'(x) &= 1.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega a) + B_1 \cos(\omega a) &= A_2 \sin(\omega a) + B_2 \cos(\omega a) \\ \omega A_1 \cos(\omega a) - B_1 \omega \sin(\omega a) &= \omega A_2 \cos(\omega a) - B_2 \omega \sin(\omega a) - 1. \end{aligned}$$

W szczególności ( $B_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ )

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega a) &= B_2 \cos(\omega a) \\ \omega A_1 \cos(\omega a) &= -B_2 \omega \sin(\omega a) - 1. \end{aligned}$$

Więc

$$f(x) = \begin{cases} - & x > a \\ - & x < a \end{cases}.$$

## Zastosowania

Mamy coś takiego

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = h(t). \quad (\star)$$

Wiemy, że  $f''(t) + \omega f(t) = \delta(x - a)$ . Niech

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds = \langle T_f, h_t \rangle.$$

Czym jest  $\dot{x}(t)$ ?

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}(t), \varphi \rangle &= \langle T_{f'}, \varphi \rangle, \\ \langle \ddot{x}(t), \varphi \rangle &= \langle T_{f''}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \langle x'' + \omega x', h \rangle &= \langle T_{f'} + \omega^2 T_f, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ((f'' + \omega^2 f)h) = \\ &= \langle \delta(t, a), h \rangle = h(t). \end{aligned}$$

Wykład 25. 17.01.2020, Wzór Greena,  $\Delta_r^{-1} = \delta$

**Przykład 64.**

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \partial_{t^2} u + \omega^2 u = \delta(t - a).$$

$$\langle \partial_{t^2} u + \omega^2 u, \varphi \rangle = \langle \delta(t - a), \varphi \rangle.$$

Ale to jest całka po  $a$ , czy po  $t$ ? Dla

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, a) f(a) da$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u(t, a) f(a) da$$

$$\ddot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{t^2} u(t, a) f(a) da.$$

Czyli

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_{t^2} u(t, a) + \omega^2 u(t, a)) f(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(a) da = \underset{(\star)}{-f(t)}.$$

**Uwaga:** Jak pozbyć się minusa w  $(\star)$ ?

Trzeba rozstrzygnąć problem

a)  $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(t - a)$

b)  $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(a - t)$

c)  $\partial_{t^2} u + \omega^2 u = -\delta(t), x(t) = (u \star f)$

Funkcja  $u$  nazywa się czasem **funkcją Greena**.

**Przykład 65.** Czasem problem

$$L\varphi = \rho(x)$$

możemy rozwiązać problemem

$$Lu = \delta.$$

**Przykład 66.** Wiemy, że  $\operatorname{div}(E) = \rho(x)$ . Mamy też napis  $E = -\nabla\varphi$ . Czyli

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\varphi)) &= \rho(x). \\ \Delta\varphi &= -\rho(x). \end{aligned}$$

Spróbujemy poradzić sobie z minusem. Traktujemy to równanie jako dystrybucyjne.

$$\Delta u = \delta \longrightarrow \langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Wtedy  $\varphi = (u \star \rho)$

$$\varphi(x_0) = \left( \frac{1}{\|x\|} \star \rho \right) = \int_V \frac{\rho(x') d^3 x'}{\|x_0 - x'\|}.$$

## Wzór Greena

**Twierdzenie 19.** Niech  $U, V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $U, V \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Niech  $M$  - rozmaitość,  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Wówczas

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_{\partial M} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} v - v \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) dS.$$

Gdzie  $\frac{\partial}{\partial \eta} v$  - pochodna wzdłuż wektora normalnego do powierzchni  $\partial M$ .  
Czyli  $\frac{\partial}{\partial \eta} v = (\nabla u) \cdot \eta$

*Dowód.* Wiemy, że jeżeli  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ , to

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Zatem, jeżeli  $\omega = \star du$ , to znaczy, że

$$\int_M d(v \star du) = \int_{\partial M} v \star du \tag{A}$$

A jeżeli  $\omega = u \star dv$

$$\int_M d(u \star dv) = \int_{\partial M} u \star dv \tag{B}$$



Odejmując (B) od (A) otrzymamy

$$\int_M du \wedge \star dv + ud \star dv - dv \wedge \star du - vd \star du = \int_{\partial M} u \star dv - v \star du.$$

Zauważmy, że jeżeli  $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$  i  $B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$ , to

$$\star A = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy.$$

$$\star B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

Zatem

$$A \wedge \star B = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$B \wedge \star A = (B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Oznacza to, że

$$du \wedge \star dv - dv \wedge \star du = 0.$$

Zatem

$$\int_M ud \star dv - vd \star du = \int_M u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial M} u \star dv - v \star du.$$

Zauważmy, że jeżeli  $v(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,

$$dv = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

$$\star dv = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy.$$

Weźmy sobie kostkę z  $\mathbb{R}^3$ . Wtedy

$$\int_{\partial M} \star dv = \sum_{i=1}^6 \int \left\langle \star dv, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \int_{\partial M} (\nabla v) n dS.$$

Zatem, przechodząc od form do całek po funkcjach, otrzymujemy

$$\int_M (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial M} \left( u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS.$$

□

**Stwierdzenie 9.** Jeżeli  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , to w sensie dystrybucyjnym

$$\Delta \frac{1}{r} = \delta \longleftarrow \left\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

*Dowód.* Zauważmy, że

$$\left\langle \Delta \left( \frac{1}{r} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \varphi \right\rangle = - \left\langle \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \nabla \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \right\rangle.$$

Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varphi \in D} \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Od lewej:

$$\left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{1}{r} \Delta \varphi \right) dV.$$

Wiemy, że  $\varphi$  ma nośnik zwarty, więc zamiast po  $\mathbb{R}^3$ , możemy całkować po objętości  $V$  (Jak  $V$  ma się do nośnika  $\varphi$ , to zobaczymy).

$$\int_V \left( \frac{1}{r} \Delta \varphi \right) dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V \setminus K(0, \varepsilon)} \left( \frac{1}{r} \Delta \varphi \right) dV.$$

Odpalamy wzór Greena. Niech  $u = \frac{1}{r}$ ,  $v = \varphi$ ,  $M = V \setminus K(0, \varepsilon)$ . Wtedy

$$\int_{V \setminus K(0, \varepsilon)} \left( \frac{1}{r} \Delta \varphi - \varphi \Delta \frac{1}{r} \right) dV = \int_{\partial(V \setminus K(0, \varepsilon))} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS \quad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że  $\Delta \frac{1}{r}$ , gdy  $(x, y, z) \in V \setminus K(0, \varepsilon)$  wynosi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) = \\ & = -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} + \frac{3y^2}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{V \setminus K(0, \varepsilon)} \frac{1}{r} \Delta \varphi = \int_{\partial(V \setminus K(0, \varepsilon))} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS.$$

Ale

$$\int_{\partial(V \setminus K(0, \varepsilon))} () = \int_{\partial V} () + \int_{\partial K(0, \varepsilon)} ().$$

(**uważać na orientację**) Wybierzemy  $V$  na tyle duże, żeby nośnik  $\varphi \subset V$ .

Oznacza to, że  $\varphi(x) \Big|_{x=\partial V} = 0$  i  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\partial V} = 0$ . Zatem

$$\int_{V \setminus K(0, \varepsilon)} \frac{1}{r} \Delta \varphi = - \int_{\partial K(0, \varepsilon)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS.$$

Ale znamy twierdzenie o wartości średniej

$$\int_{\partial K(0, \varepsilon)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_c \cdot \int_{\partial K(0, \varepsilon)} \frac{1}{r} dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_c \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Teraz mamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial K(0, \varepsilon)} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) dS &= \varphi_{(c)} \int_{\partial K(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \right) = \varphi_{(c)} \int_{\partial K(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= \varphi_{(c)} \int_{\partial K(0, \varepsilon)} -\frac{1}{r^2} = -\varphi_{(c)} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 = -4\pi \varphi_{(c)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi \varphi(0). \end{aligned}$$

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V \setminus K(0, \varepsilon)} \frac{1}{r} \Delta \varphi = -4\pi \varphi(0) = -4\pi \langle \delta, \varphi \rangle.$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta.$$

□



Wykład 26. 20.01.2020, *Skąd się bierze Prawo Coulumba, Przestrzeń Schwartza, dystrybucje temperowane, dwa daszki to ptaszek*

Z ostatniego odcinka wiemy, że

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta.$$

$$\left\langle \Delta\left(\frac{1}{r}\right), \varphi \right\rangle = -4\pi \langle \delta, \varphi \rangle.$$

$$\Delta \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} = -4\pi\delta(\bar{r} - \bar{r}_0).$$

Były też kiedyś równania Maxwella

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E) &= \rho(\bar{r}) \\ E &= -\operatorname{grad}(\varphi) \\ \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{rot}(E) &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Jak to złożymy, to będzie

$$\Delta\varphi = -\rho(x).$$

$$\int_V (U\Delta V - V\Delta U) dV = \int_{\partial V} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS.$$

$$V = \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}.$$

$$U = \varphi(\bar{r}).$$

Czyli

$$\int_V \varphi(\bar{r}) \Delta \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} d\bar{r} - \int_V \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \Delta \varphi d\bar{r} = \int \int_{\partial V} \left( \varphi(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} - \frac{1}{|r - r_0|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

$$-4\pi \int_V \varphi(r) \delta(\bar{r} - \bar{r}_0) d\bar{r} - \int_V \frac{-\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} d\bar{r} = \int_{\partial V} \left( \varphi(\bar{r}) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \right) - \frac{1}{|r - r_0|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

$$\varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} d\bar{r} + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi(r) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \right) dS.$$

Druga całka znika czasami w  $V \rightarrow \infty$  i wtedy zostaje Prawo Coulomba.

**Równanie**  $xT = 0$

$$xT = 0, \quad T \in D^*.$$

To znaczy, że

$$\forall_{\varphi \in D} \langle xT, \varphi \rangle = 0.$$

Zauważmy, że

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0.$$

Oznacza to, że dystrybucja  $T$  zeruje się na wszystkich funkcjach postaci  $x\varphi$ ,  $\varphi \in D$ .

**Pytanie 19.** Czy oznacza to, że  $T$  zeruje się na każdej funkcji, która w  $x = 0$  wynosi zero?

Załóżmy, że  $T$  istnieje i

$$\exists_{\psi \in D} \langle T, \psi \rangle = 0.$$

Oznacza to, że

$$\left\langle xT, \frac{\psi}{x} \right\rangle = 0.$$

Czyli jeżeli  $\psi \in D$ , to  $\frac{\psi}{x}$  też musi należeć do  $D$ .

**Pytanie 20.** Ile wynosi  $\psi(0)$ ?

Gdyby  $\psi(0) \neq 0$ , to wtedy  $\frac{\psi(x)}{x}$  nie byłoby ograniczone w  $x = 0$ , czyli  $\frac{\psi}{x} \notin D$ . Zauważmy, że

$$\frac{\psi(x)}{x} = \int_0^1 \psi'(xt) dt.$$

Czyli jeżeli  $\psi \in D$ , to znaczy, że  $\psi' \in D$ . Niech  $\varphi(x)$  - dowolne  $\in D$  i niech  $\alpha(x)$  takie, że  $\alpha(0) = 1$ ,  $\alpha \in D$ . Wówczas

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \alpha(x)\varphi(0) + \alpha(x)\varphi(0).$$

Wówczas

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x) - \alpha(x)\varphi(0) \rangle + \langle T, \alpha(x)\varphi(0) \rangle.$$

to pierwsze daje zero, bo liczymy  $T$  na funkcji, która w zerze daje zero. Zatem

$$\forall_{\varphi \in D} \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha(x) \rangle \varphi(0).$$

Czyli  $\langle T, \varphi \rangle = C_\alpha \varphi(0) = \langle C_\alpha \delta, \varphi \rangle$ , czyli  $T = C_\alpha \delta$ .

**Pytanie 21.** Czy  $C_\alpha$  rzeczywiście zależy od wyboru funkcji  $\alpha(x)$ , czy jest stałą uniwersalną?

## Transformata Fouriera dystrybucji

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

$$T \in S^*, \quad \forall_{\varphi \in S}.$$

### Definicja 34. (Przestrzeń Schwartza)

Przestrzeni Schwartza ( $S$ ) nazywamy zbiór takich  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , że

1.  $\forall_{L, m \geq 0} x^L \varphi^{(m)}$  - ograniczone (w sensie  $\|\cdot\|$ )
2.  $\forall_{L, m \geq 0} (x^L \varphi)^{(m)}$  jest całkowalna

**Motywacja:**

$$\mathcal{F}(\varphi') \sim x \mathcal{F}\varphi$$

$$\mathcal{F}'(x\varphi) \sim \mathcal{F}'(\varphi).$$

**Definicja 35.** Przestrzeń dualną do  $S$  oznaczamy, przez  $S^*$ , odwzorowania liniowe z  $S^*$  nazywamy dystrybucjami temperowanymi.

Policzmy nareszcie  $\mathcal{F}\delta$

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k \cdot 0} \varphi(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(k) dk = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Zatem  $\mathcal{F}\delta = 1$ . A ile wynosi  $\mathcal{F}\delta(x - a)$ ?

$$\langle \mathcal{F}\delta(x - a), \varphi \rangle = \langle \delta(x - a), \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k a} \varphi(k) dk = \langle e^{-2\pi i x a}, \varphi \rangle.$$

**Obserwacja:**

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= \delta. \\ \mathcal{F}(\ddot{f} + \omega^2 f) &= \mathcal{F}\delta. \\ (-2\pi i t)^2 \mathcal{F}f + \omega^2 \mathcal{F}f &= \mathcal{F}\delta. \\ -4\pi^2 t^2 \mathcal{F}f + \omega \mathcal{F}f &= 1. \\ \hat{f} &= \frac{1}{\omega^2 - 4\pi^2 t^2}. \end{aligned}$$

**Pytanie 22.** A ile to  $\mathcal{F}1$ ?

$$\mathcal{F}1 = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i k x} dk = -\frac{1}{2\pi i x} e^{-2\pi i k x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = ????$$

Tego napisu nie wolno traktować w sensie transformaty funkcji. A dystrybucji?

**Wniosek:**  $\mathcal{F}1$  należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym, czyli

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Pamiętamy, że

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (2\pi i x)^n \mathcal{F}(f).$$



Czyli

$$\mathcal{F}(f') = 2\pi i x \mathcal{F}(f).$$

Jeżeli  $f = 1$ , to

$$0 = \mathcal{F}(0) = 2\pi i x \mathcal{F}(1).$$

Czyli  $x\hat{1} = 0$ . Wiemy, że jeżeli  $xT = 0$ , to

$$T = C_\alpha \delta.$$

Czyli

$$\hat{1} = C_\alpha \delta.$$

Pozostało policzyć ile to jest  $C_\alpha$ . Wiemy, że

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

$$\langle C_\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

$$C_\alpha \langle \delta, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

W szczególności dla

$$\varphi = e^{-ax^2}, \quad \mathcal{F}(\varphi) = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right).$$

Jeżeli  $\varphi = e^{-x^2}$ ,  $a = 1$ ,  $\mathcal{F}(\varphi) = e^{-(\pi^2 x^2)} \sqrt{\pi}$ , to

$$C_\alpha \langle \delta, e^{-x^2} \rangle = \sqrt{\pi} \langle 1, e^{-\pi^2 x^2} \rangle.$$

$$C_\alpha e^0 = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-\pi^2 x^2} dx.$$

$$C_\alpha = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2}} = 1.$$

$$\mathcal{F}1 = \delta \implies \mathcal{F}\delta = 1.$$

**Definicja 36.**

$$\check{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(-x).$$

**Twierdzenie 20.**

$$\hat{f}(x) = \check{f}(x).$$

*Dowód.*

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-2\pi i k x} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-2\pi i s k} f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-2\pi i k(x+s)} f(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-2\pi i k(x+s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) \langle e^{-2\pi i k(x+s)}, 1 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) \delta(x+s) = f(-x). \end{aligned}$$

□

**Pytanie 23.** *A ile to będzie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x n}?$$

No tyle

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(x-n).$$