dodatek na temat kąta

Było
$$\sin(\sphericalangle \dot{z}, \overline{z}).$$
Ma być
$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = |z||\dot{z}| \sin\left(\sphericalangle(z, \dot{z})\right).$$

Powrót do residuów w nieskończoności

Dostaliśmy na Wykładzie 18
$$a_n = -\frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) z^{n-1} dz.$$
Wielkość
$$-a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\partial K(0,t) \\ t > \frac{1}{r}}} f(z) dz$$
nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności.

Stwierdzenie 1. *Niech f - holomorficzna na $\mathbb{C}$ z wyjątkiem punktów $z_1, \ldots, z_k$, ale z_i - biegun p_i rzędu (nie ma punktów istotnie osobliwych). Wówczas*
$$\sum_{\mathrm{Res}\, f + \mathrm{Res}\, \infty} f = 0.$$

Dowód. Niech z_i takie, że
$$\exists_{A} \ \forall_{i} \ z_i \in A.$$
Wówczas
$$-\int\limits_{\partial A} f + \sum_i \int\limits_{\partial K(z_i, r_i)} = 0.$$
□

Pytanie 1. *Jak obliczyć a_1?*

Zauważmy, że gdy rozwiniemy

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

w szereg Laurenta wokół zera, to $g(z)$ przyjmuje postać

$$g(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

Zauważmy, że

$$\frac{g(z)}{z^2} = -\frac{a_2}{z^4} + \frac{a_{-1}}{z^3} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \ldots.$$

Zatem

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}.$$

Przykład 1.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = \sum_{\substack{\mathrm{Res}\,\frac{1}{8} \\ (-1)}} f = -\operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Ale

$$f(z) = \frac{1}{(z^8+1)^2}.$$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^8 + 1\right)^2} = \frac{z^{16}}{(1+z^8)^2}$$

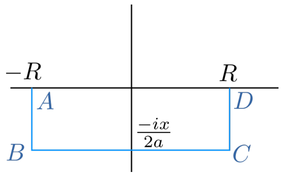
i liczymy $\operatorname*{Res}_{0} \quad \frac{g(z)}{z^2}$ *Ale*

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \cdot z^{14}}{(1+z^8)^2} = 0.$$

Więc całka też 0.

Przykład 2. *Sytuacja jak na rys.* **??**

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-at^2} dt, \quad a \geqslant 0.$$



Rysunek 0.1: w20-1

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[(t-\frac{ix}{2a})^2+\frac{x^2}{4a^2}\right]}dt = e^{-a\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-\frac{ix}{2a})^2}dt.$$

Liczymy teraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2}dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-a\left(t-\frac{ix}{2a}\right)^2}dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R-\frac{ix}{2a}}^{R-\frac{ix}{2a}} e^{-as^2}ds.$$

Niech $f(z) = e^{-az^2}$

$$\int_{AB} f + \int_{BC} f + \int_{CD} f + \int_{DA} f = 0.$$

BC już mamy, więc

$$\int_{BC} f = -\int_{DA} f - \int_{BA} f - \int_{CD} f.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{CD} f = 0.$$

Parametryzacja $CD := \left\{z = R + iy, -\frac{x}{2a} \leqslant y \leqslant 0\right\}$

$$\int_{CD} f = \int_{-\frac{x}{2a}}^{0} idy \cdot e^{-a(R+iy)^2} = i \int_{-\frac{x}{2a}}^{0} dy \cdot e^{-aR^2}e^{-2Riya}e^{ay^2}.$$

$$\left|\int\limits_{CD} f\right| \leqslant e^{-aR^2}\left|\frac{x}{2a}\right|\cdot\left|e^{-2Riya}\right|\cdot\max_{-\frac{x}{2a}\leqslant y\leqslant 0}\left|e^{ay^2}\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

I tak samo będzie z całką po AB. Jeszcze zostało DA

$$\lim_{R\to+\infty} -\int\limits_{DA} f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Zatem

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Transtormata Fouriera

Obserwacja: Rozwińmy $f(z)$ w $R(0,a,b)$, $a,b<1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\partial K(0,t)\\ a<t<b}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Wstawmy $z=e^{ix}$

$$g(z) = f\left(e^{ix}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{mx}.$$

Ale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(0,t)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \begin{matrix} z=e^{ix} \\ dz = ie^{ix}dx\end{matrix} = \frac{1}{2\pi i}i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{ix}\right)}{e^{(ix)(n+1)}}e^{ix}dx.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}dx.$$

Definicja 1. *Transformatą Fouriera funkcji f nazywamy wielkość*

$$\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi xt} f(t)dt.$$

Uwaga: transformatę Fouriera możemy zdefiniować też tak

Definicja 2. *(inne notacje)*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\sigma xt} f(t)dt,$$

gdzie $m = \{1, 2\pi\}$, $q = \{-1, 1\}$, $\sigma = \{1, 2\pi\}$.
Konwencja u nas:

- $m = 1$
- $q = -1$
- $\sigma = 2pi$

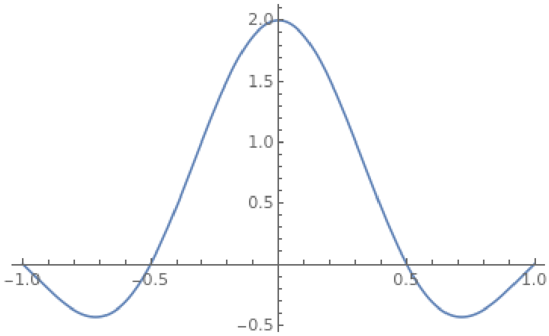
Przykład 3.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi tx}dt = \int\limits_{-a}^{+a} e^{-i2\pi tx}dt = -\frac{1}{2\pi ix} e^{-i2\pi tx}\Big|_{-a}^{a} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi ix}\left[e^{-i2\pi ax} - e^{i2\pi ax}\right] = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}.$$

Czyli jak na rys. **??**

Definicja 3. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że*



Rysunek 0.2: Wynik przefourierowania f

- *f - klasy L_1, jeżeli*

$$\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty.$$

- *f - klasy L_2, jeżeli*

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < +\infty.$$

Przykład 4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & x > 1 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$

Zbadać, czy f jest klasy L_1 lub (i) L_2 i czy g jest klasy L_1 lub (i) L_2