## Ostatnio

Była rozmaitość $M$ z wymiarem $\dim M = n$, krzywa

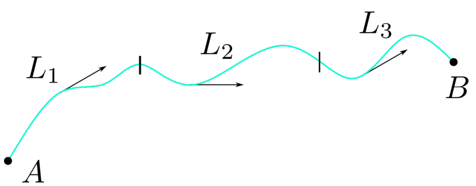
$$L : \{[a,b] \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n\},$$

jednoforma $\omega \in \Lambda^1 M$ i zastanawialiśmy się jak obliczyć

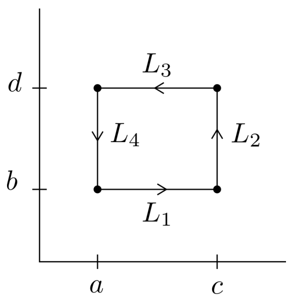
$$\int_L \omega = \int_a^b \left\langle \varphi^\star \omega, \pm \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Wyszło nam dla $\omega = ydx$, (rys 0.1)

$$\int_{C_1} \omega = 2, \quad \int_{C_2} \omega = -2.$$




Rysunek 0.1: W każdym momencie chcemy wiedzieć, w którą stronę chcemy iść. $L_1 + L_2 + L_3 = L$




Rysunek 0.2: $\dim M = 2$

**Przykład 1.**

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \in \Lambda^1 M.$$

*Trzeba te krzywe sparametryzować:*

$$L_1 = \{(x,b), a \leqslant x \leqslant c\}\,.$$

$$L_2 = \{(c,y), b \leqslant y \leqslant d\}\,.$$

$$L_3 = \{(x,d), a \leqslant x \leqslant c\}\,.$$

$$L_4 = \{(a,y), b \leqslant y \leqslant d\}\,.$$

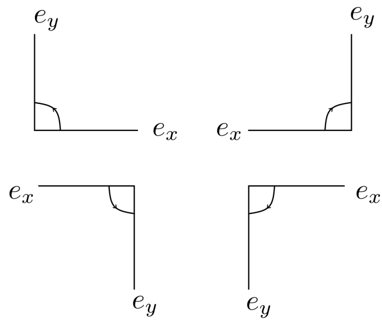
$$\begin{aligned}\int\limits_L \omega = \int\limits_{L_1} \omega + \int\limits_{L_2} \omega + \int\limits_{L_3} \omega + \int\limits_{L_4} \omega = \\
= \int\limits_a^c \left\langle \varphi_1^\star \omega, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int\limits_b^d \left\langle \varphi_2^\star \omega, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle dy + \\
+ \int\limits_a^c \left\langle \varphi_3^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle dx + \int\limits_b^d \left\langle \varphi_4^\star \omega, -\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \\
= \int\limits_a^c A(x,b)dx + \int_b^d B(c,y)dy + \\
- \int\limits_a^c A(x,d)dx - \int\limits_b^d B(a,y)dy.\end{aligned}$$

(rys 0.3)


Rysunek 0.3: Tramwaj nie ma za dużo możliwości, jedynie przód, tył i ewentualnie szybciej - na rolkach

dla $\dim M = \mathbb{R}^1$. Niech $\varphi : T_pM \to T_pM$, $\varphi(v) = a \cdot v$ ($\varphi$ - liniowe).
$a > 0$ - nie zmienia orientacji (kierunku)
$a < 0$ - zmienia kierunek wektora.
(rys 0.4)

**Definicja 1.** *Niech $B_1$, $B_2$ - bazy uporządkowane w $V$ - przestrzeń wektorowa. Mówimy, że $B_1$ i $B_2$ należą do tej samej klasy orientacji, jeżeli wyznacznik odwzorowania liniowego z $B_1$ do $B_2$ jest większy od zera.*



Rysunek 0.4: Różne orientacje na $\mathbb{R}^2$, czy można to jakoś pogrupować?

*Wybór klasy orientacji nazywamy zorientowaniem $V$.*

**Definicja 2.** *Orientacją standardową na $\mathbb{R}^n$ nazywamy wybór zgodny z bazą standardową, tzn.*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_3 = \ldots.$$

**Definicja 3.** *Niech $M$ - rozmaitość zorientowana, $\dim M = n$ i $S = \{[a,b] \times [c,d] \ni (t_1, t_2) \to \varphi(t_1, t_2) \in M\}$ - powierzchnia sparametryzowana, $\Lambda^2 M \ni \omega$ - dwuforma. Wówczas*

$$\int_S \omega \overset{def}{=} \int_a^b \int_c^d \left\langle \varphi^\star \omega, \quad \underbrace{\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{\partial}{\partial t_2}}_{\textit{zgodne z orientacją}} \right\rangle dt_1 dt_2.$$

**Przykład 2.** *weźmy $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ i obliczmy $\iint\limits_P d\omega$.*

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix} \right\}.$$

*Wtedy mamy*

$$\int\int\limits_P d\omega = \int\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} \left\langle d\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} dx - \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \frac{\partial A}{\partial y} =$$

$$= \int\limits_c^d dy(B(b,y) - B(a,y)) - \left[ \int\limits_a^b dx \left( A(x,d) - A(x,c) \right) \right] =$$

$$= \int\limits_a^b A(x,c)dx + \int\limits_c^d B(b,y)dy - \int\limits_a^c A(x,d)dx - \int\limits_c^d B(a,y)dy =$$

$$= \int\limits_{L_1} \omega + \int\limits_{L_2} \omega + \int\limits_{L_3} \omega + \int\limits_{l_4} \omega.$$

*Czyli*

$$\int\int\limits_P d\omega = \int\limits_L \omega,$$

*to kiedyś będzie twierdzenie Stokesa*

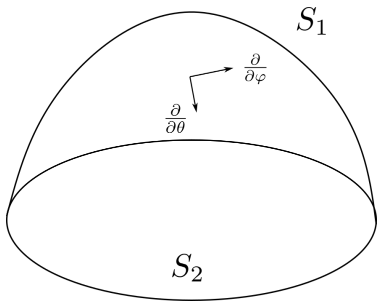
**Przykład 3.** *niech (sytuacja jak na rys 0.5)* $S = S_1 \cup S_2$, *gdzie*

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0 \right\},$$
$$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0 \right\},$$

$\alpha \in \Lambda^2 M$.

$$\int\limits_S \alpha = \int\limits_{S_1} \alpha + \int\limits_{S_2} \alpha.$$

**Definicja 4.** *Atlasem zorientowanym nazywamy taki zbiór otoczeń i map* $(U_1, \varphi_1)$, *że dla każdej pary* $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ *takiej, że* $U_i \cap U_j \neq \phi$, *odwzorowanie* $\det \left( \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \right)' > 0$.




Rysunek 0.5: Tak to wygląda

**Definicja 5.** *Rozmaitość składająca się z atlasu zorientowanego nazywamy orientowalną.*

**Definicja 6.** *Po wyborze orientacji, rozmaitość nazywamy zorientowaną.*