Zbieżność szeregów Fouriera

Rozważmy szereg
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x},$$
gdzie
$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$
Niech
$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Pytanie 1. *W jaki sposób $S_N(x)$ zbiega do $f(x)$?*

Mamy do rozważenia dwa przypadki

a) $\underset{x\in A}{\forall} S_N(x) \to f(x)$

b) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |S_N(x) - f(x)| \to 0$

Obserwacja: Niech $f \in \mathcal{C}^2(A)$. Wówczas $S_N(x) \to f(x)$ jednostronnie na A.

Dowód. Wiemy, że
$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \tag{$\star$}$$
Chcemy zcałkować to przez części.
$$(\star) = -f(x)\frac{1}{2\pi i n} e^{-2\pi i n x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi i n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$
Czyli mamy coś takiego:
$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{(2\pi i n)} c_n(f') \\ c_n(f') &= \frac{1}{(2\pi i n)} c_n(f'') \\ c_n(f) &= \frac{1}{(2\pi i n)^2} c_n(f''). \end{aligned}$$

Wychodzi na to że $c_n(f'')$ - ograniczony, bo $f \in \mathcal{C}^2 \implies \exists M : |c_n(f'') < M|$, czyli

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{M}{4\pi^2 n^2}.$$

Wrzucamy to w ten szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n e^{2\pi inx}\right| \leqslant \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Mamy majorantę, więc $S_N(x)$ jest zbieżny jednostajnie. Nie pokazaliśmy jeszcze, że $S_N(x) \to f(x)$! $\square$

Twierdzenie 1. *(Nierówność Bessela)*
Niech $f \in L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. *Wówczas*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \, dx.$$

Wniosek: Szereg $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ jest zbieżny, czyli też $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
Obserwacja: Nierówność nie oznacza zbieżności jednostajnej, bo sam fakt, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\|c_n e^{2\pi inx}\right\| < M$$

nie oznacza automatycznie istnienia majoranty.

Dowód. (Bessel)
Niech

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx},$$

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi inx} dx.$$

Chcemy pokazać, że

$$0 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\|S_N(x) - f(x)\|^2}_{\text{norma w sensie zespolonym}} dx =$$

$$\underset{\|z\|^2 = z\cdot\bar{z}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (S_N(x) - f(x)) \left(\overline{S_N}(x) - \overline{f}(x)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(S_N(x)\overline{S_N}(x) - S_N(x)\overline{f}(x) - f(x)\overline{S_N}(x) + f(x)\overline{f}(x)\right) dx. \qquad (\star\star)$$

Ale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\overline{S_N}(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n e^{2\pi i n x}} dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \bar{c_n} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n c_n.$$

Pierwszy obiekt zabezpieczony.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x} \overline{f}(x) dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n}.$$

(mamy taki fakt tutaj: $\int \overline{\square} dx = \overline{\int \square dx}$).

Teraz rozprawiamy się z pierwszym składnikiem

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_N(x)\overline{S_N}(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx}\right)\left(\sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m}\overline{e^{2\pi imx}}\right) dx =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_n\bar{c_m}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ix(n-m)}dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n\bar{c_n}.$$

Pamiętamy, że

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ix(n-m}dx = \delta_{mn}.$$

Teraz nasze ($\star\star$) przyjmuje postać

$$0 \leqslant \sum_{n=-N}^{N} \|c_n\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \|c_n\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \|c_n\|^2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|f\|^2,$$

czyli

$$\sum_{n=-N}^{N} \|c_n\|^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|f(x)\|^2 dx.$$

Jak przejdziemy z $n \to \infty$, to mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|f(x)\|^2 dx.$$

$\square$

Twierdzenie 2. *Niech f - funkcja o okresie jeden taka, że w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ma skończoną ilość nieciągłości, jest klasy $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a jej pochodna jest ograniczona i ciągła w punktach nieciągłości. Wówczas*

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x},$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) \to \begin{cases} f(x) & \text{gdy } f \text{ - ciągła w } x \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{w punkcie nieciągłości} \end{cases}$$

i zbieżność ta jest zbieżnością punktową.

Dowód. **Obserwacja:**

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i k n} e^{2\pi i n x} dk =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(k) e^{2\pi i n (x-k)} dk =$$

$x - k = -\xi, dk = d\xi$

teraz spróbujmy tego nie schrzanić

$$= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} f(x+\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi. \qquad (\star\nabla\star)$$

Zauważmy, że $(\star\nabla\star)$ jest funkcją o okresie jeden. Oznacza to, że całka

$$\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} (\star\nabla\star) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\star\nabla\star).$$

Oznacza to, że

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi.$$

Wprowadzamy funkcję (jądro Dirichleta)

$$D_N(\xi) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi i n\xi}.$$

Obserwacja: Jeżeli sobie je po prostu ładnie pogrupujemy parami, to dostaniemy cosinusy

$$D_N(\xi) = 1 + e^{-2\pi i N\xi} + e^{2\pi i N\xi} + e^{-2\pi i(N-1)\xi} + e^{2\pi i(N-1)\xi} + \ldots.$$

Ale wtedy całka tego to zawiera dużo cosinusów po okresie

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) d\xi = 1 + 0 + 0 + \ldots.$$

Z drugiej strony $D_N(x)$ możemy zapisać fajnie dla $q = e^{-2\pi i\xi}$

$$\left(\frac{1}{q}\right)^N + \left(\frac{1}{q}\right)^{N-1} + \ldots + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 + \ldots + q^N \qquad (\nabla \star \nabla)$$

Wywalamy $\frac{1}{q^N}$ przed nawias

$$(\nabla \star \nabla) = \frac{1}{q^N}\left(1 + q + \ldots + q^{2N}\right) = \frac{1}{q^N}\frac{1-q^{2N+1}}{1-q} = \frac{q^{-N} - q^{N+1}}{1-q}.$$

Czyli

$$D_N(\xi) = \frac{e^{2\pi i\xi N} - e^{-2\pi i\xi(N+1)}}{1 - e^{-2\pi i\xi}}.$$

Tym razem zaczynamy już na serio ten dowód

$$S_N(x) - \frac{f(x^-)}{2} - \frac{f(x^+)}{2} = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+\xi)e^{-2\pi i n\xi} - \frac{f(x^-)}{2} - \frac{f(x^+)}{2} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x+\xi)e^{-2\pi i n\xi} - \frac{1}{2}f(x^+) +$$

$$+ \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x+\xi)e^{-2\pi i n\xi} - \frac{1}{2}f(x^-). \qquad (\Delta \star \Delta)$$

Ale $\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(\xi) = \frac{1}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} D_N(\xi)$. Wsadzimy to tam przed $f(x^\pm)$.

$$(\Delta \star \Delta) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-N}^{N} \left(f(x+\xi)e^{-2\pi i n\xi} - f(x^+)\frac{e^{2\pi i N\xi} - e^{-2\pi i\xi(N+1)}}{1 - e^{-2\pi i\xi}} \right) +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sum_{n=-N}^{N} \left(f(x+\xi)e^{-2\pi i n\xi} - f(x^-)\frac{e^{2\pi i N\xi} - e^{-2\pi i\xi(N+1)}}{1 - e^{-2\pi i\xi}} \right) =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x+\xi) - f(x^+) \right) e^{-2\pi i n\xi} d\xi +$$

$$+ \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(f(x+\xi) - f(x^-) \right) e^{-2\pi i n\xi} d\xi.$$

(a_n) dalszy nastąpi (Analiza IV).

□