Введение в непрерывные математические модели

Математическое моделирование – широкая область научных знаний и приемов, в основе которых лежит замена объекта исследования его математической моделью – представлением реальной системы с некоторой степенью детализации. Изучение математической модели позволяет предсказывать поведение описываемой системы, открывать новые свойства, а также ставить вычислительные эксперименты, проведение которых на реальной системе невозможно. Математические модели можно разделить на две группы по характеру величин, с которыми они работают: дискретные и непрерывные. Дискретная модель рассматривает объекты как дискретные, такие как частицы в молекулярной модели или состояния в статистической модели; в то время как непрерывная модель непрерывно представляет объекты, такие как поле скоростей жидкости, температура и механическое напряжение в твердом теле, электрическое поле.

Истоки непрерывных математических моделей восходят к описанию движения небесных тел. Законы Кеплера, открытые в 1609–1619 годах, позволили описать характер движения планет солнечной системы. Иоганн Кеплер на основе данных, полученных датским астрономом Тихо Браге за несколько лет наблюдений, вывел 3 знаменитых закона: планеты двигаются по эллиптическим орбитам; площади, заметаемые радиус-вектором между Солнцем и планетой за одинаковое время, равны; квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет. Следующим важным этапом в истории математического моделирования является открытие закона всемирного тяготения и законов Ньютона, опубликованных в труде «Математические начала натуральной философии». Исаак Ньютон разработал дифференциальное и интегральное исчисления, являющиеся математическими основами при работе с непрерывными моделями. Законы Ньютона обобщали предыдущие достижения: все три закона Кеплера могли быть выведены при помощи законов Ньютона. Параллельно развивался математический аппарат. Немецкий ученый Вильгельм Лейбниц заложил основы математического анализа.В 1675 году завершил работу над трудом по математическому анализу, заложив символику и терминологию, применяемую в математике по сей день. К 1718 году Иоганн Бернулли стал рассматривать функцию как любое выражение, состоящее из переменной и некоторых констант, в то время как Алексис Клод Клеро (примерно в 1734 году) и Леонард Эйлер ввели знакомую запись «$f(x)$» для обозначения функции.

Одной из первых математических моделей на современном математическом языке является модель Мальтуса («Мальтузианская модель роста»), описанная английским демографом и экономистом Томасом Мальтусом в 1798 году. Модель задается дифференциальным уравнением первого порядка, решение которого прогнозирует экспоненциальный закон роста размера населения:

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{dt} = rP, \\ &P(0) = P_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где P – численность населения, r – темп прироста, t – время, а P_0 – изначальная численность популяции (начальное условие). Решение уравнения модели Мальтуса:

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \tag{2}$$

В рамках этой модели была поставлена проблема о «Мальтузианской ловушке» – при линейном росте средств существования популяции экспоненциальный рост размера населения должен привести к кризису продовольствия на планете. На основе работ Мальтуса бельгийский математик Пьер Ферхюльст разработал модель численности населения в условиях ограниченности ресурсов. В дифференциальное уравнение модели Мальтуса было добавлено слагаемое, отвечающее за ограниченность ресурсов:

$$\begin{aligned} &dP/dt = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \\ &P(0) = P_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где K – максимальный размер популяции для данных ресурсов среды. Решением уравнения модели Ферхюльста является логистическая функция, позволяющая предсказывать размер населения.

Широкое распространение для описания математических моделей получили уравнения системной динамики. Описываемая система разделяется на несколько составляющих: уровни — характеризуют накопленные значения величин внутри системы; потоки — отвечают за скорости изменения уровней; функции решений (вентили) — функции зависимости потоков от уровней; каналы информации, соединяющие вентили с уровнями. Разделение сложных систем на составляющие с добавлением взаимодействия между частями позволило создать аппарат для описания множества систем, вплоть до моделирования производственных процессов в больших корпорациях. Классический пример использования уравнений системной динамики в математическом моделировании является SIR-модель («Susceptible — Infected — Recovered») динамики заболевания в популяции. В ней при помощи систем дифференциальных уравнений описывается динамика групп восприимчивых, инфицированных и выздоровевших индивидов. Модель позволяет имитировать процесс распространения заболеваемости гриппа и других вирусных инфекций. Модернизация подобных моделей позволяет описывать и другие процессы, например распространение информации в популяции.

Математический аппарат в непрерывных математических моделях в первую очередь состоит из алгебраических уравнений, однородных дифференциальных уравнений, систем однородных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, краевых задач, а также интегральных уравнений. Аналитические решения уравнений для описания моделей могут быть получены только в редких и простых случаях, поэтому для нахождения приближенных решений активно применяются численные методы.

Область применимости непрерывных математических моделей ограничивается несколькими важными факторами:

- Непрерывность – интерпретация величин в модели как вещественные числа может приводить к нереалистичным сценариям (количество заболевших равно 10.5, численность населения составила 1500.6 человек).

- Детерминированность – не воспроизводятся некоторые важные эффекты, имеющие стохастическую природу. Кроме того, детерминированные модели описывают средние значения (точечная оценка), но ничего не говорят об их дисперсии (интервальная оценка).

- Аналитическое исследование может быть затруднено в силу сложности системы дифференциальных уравнений.