Sprawozdanie z ćwiczenia 4, WSI 25Z

Yan Korzun

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zaimplementowanie algorytmu gradientu prostego oraz zastosowanie go do znalezienia minimum funkcji Ackleya w wersji jedno- i dwuwymiarowej. Dodatkowo zbadano wpływ rozmiaru kroku (współczynnika uczenia) na zbieżność algorytmu oraz jakość uzyskanego rozwiązania.

2 Funkcja Ackleya

Funkcja Ackleya jest klasyczną funkcją testową wykorzystywaną w zagadnieniach optymalizacji numerycznej. Charakteryzuje się dużą liczbą minimów lokalnych oraz jednym minimum globalnym, co czyni ją trudnym przypadkiem testowym dla prostych algorytmów optymalizacyjnych.

Minimum globalne funkcji występuje w punkcie $(x, y) = (0, 0)$.

3 Algorytm gradientu prostego

Algorytm gradientu prostego jest iteracyjną metodą optymalizacji polegającą na przemieszczaniu punktu startowego w kierunku przeciwnym do wektora gradientu funkcji. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji, natomiast jego przeciwny zwrot prowadzi do najszybszego spadku.

Ogólny wzór aktualizacji punktu ma postać:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k) \tag{1}$$

gdzie:

- $\mathbf{x}_k$ – punkt w k-tej iteracji,
- α – rozmiar kroku (learning rate),
- $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ – gradient funkcji w punkcie $\mathbf{x}_k$.

W przypadku funkcji jednowymiarowej gradient sprowadza się do pochodnej, natomiast w przypadku wielowymiarowym jest wektorem pochodnych cząstkowych. Aktualizacja wykonywana jest jednocześnie we wszystkich wymiarach, co powoduje ruch po łamanej trajektorii w przestrzeni rozwiązań.

4 Eksperymenty numeryczne

Eksperymenty przeprowadzono osobno dla funkcji Ackleya w 1D oraz 2D. Dla każdego przypadku uruchomiono algorytm gradientu prostego z różnymi wartościami współczynnika uczenia α.

4.1 Funkcja Ackleya 1D

Punkt startowy ustawiono na $x = 5$. Przetestowano następujące wartości rozmiaru kroku:

- $\alpha = 0.01$
- $\alpha = 0.1$
- $\alpha = 0.5$

W tabele przedstawiono współrzędne dla których uzyskano najlepszą wartość fukncji w zależności od parametrów. Współrzędna została wybrana jako wskaźnik jakości ponieważ dla tej fukncji minimum globalne znajduje się w zerze.

Tabela 1: Wyniki algorytmu gradientu prostego dla funkcji Ackleya 1D

$\alpha \backslash n_{iter}$	50	250	2500
0.01	4.9862	4.9862	4.9862
0.1	0.0062	0.0019	0.0001
0.5	-0.0632	0.0008	0.0008

Dla każdej wartości α zarejestrowano trajektorię algorytmu oraz najlepszą znalezioną wartość funkcji. Wyniki przedstawiono na wykresie funkcji Ackleya wraz z zaznaczonym minimum globalnym oraz ścieżkami algorytmu.

4.2 Funkcja Ackleya 2D

Punkt startowy ustawiono na $(5, 5)$. Przetestowano następujące wartości rozmiaru kroku:

- $\alpha = 0.01$
- $\alpha = 0.1$
- $\alpha = 0.2$

W tabele podaje się tylko jedna współrzędna ponieważ funkcja jest symetryczna względem zmiennych.

Tabela 2: Wyniki algorytmu gradientu prostego dla funkcji Ackleya 2D

$\alpha \backslash n_{iter}$	50	250	2500
0.01	4.986	4.986	4.986
0.1	4.986	4.986	4.986
0.2	0.0062	0.0019	0.000058

5 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów można sformułować następujące wnioski:

- Algorytm gradientu prostego poprawnie znajduje minimum funkcji Ackleya w jednym i dwóch wymiarach.
- Funkcja Ackleya stanowi trudny problem optymalizacyjny ze względu na dużą liczbę minimów lokalnych.
- Rozmiar kroku α ma istotny wpływ na działanie algorytmu:
  - zbyt małe wartości prowadzą do wolnej zbieżności,
  - zbyt duże wartości "przeskakują"zakres optimum.