43 билет. Ряд Фурье. Сходимость в среднем. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье.

Напомним, что
Рассматриваем пространство $L([a,b])$ кусочно-непрерывных функций, заданных на [a,b] и имеющих конечно число точек разрыва 1 рода, причем значение в точке разрыва x_0 равна полусумме односторонних пределов:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортонормированная система функций на L([a,b])
ОПР. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k ,$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента f и определяемые равенствами

$$f_k = (\, f, \varphi_k \,) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\,, \quad k = 1,2,\ldots$$

, называется общим рядом Фурье функции $f(x) \in L([a,b])$ по ортонормированной системе функций $\{\varphi_k\}$

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\varphi_k(x)$ – n-я частичная сумма ряда Фурье

$$(S_n, f) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \int_a^b \varphi_k(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

Выразим **отклонение** S_n от f (это величина $\|S_n - f\|$):

$$\|S_n - f\|^2 = (S_n - f, S_n - f) = (S_n, S_n) - 2(S_n, f) + (f, f)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2 \qquad (2)$$

$\|S_n - f\|^2 + \|S_n\|^2 = \|f\|^2$ (отметим, что это похоже на теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$) $\quad \Rightarrow S_n - f \perp S_n$

Теорема. Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортонормированная система функций на L([a,b]) и для элемента $f \in L([a,b])$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\varphi_k(x) \quad - \text{ряд Фурье по этой системе}$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx \qquad (*) - \text{неравенство Бесселя}$$

Док-во: вытекает из формулы 2:

$$0 \le \|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2$$

переходя к пределу по $n \to \infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2. \quad \text{Теорема доказана}$$

Пример: для $f(x) = x, x \in [-\pi; \pi]$ (эту функцию рассматривали в 42 билете, там ее ряд Фурье есть) неравенство Бесселя:

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left({a_k}^2 + {b_k}^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \frac{\pi^2}{6} \ (\text{вообще говоря, тут можно поставить}$$

$$=, \text{но это чисто рандом факт, ничего не значит})$$

Следствие: в силу сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ по необходимому признаку $f_k^2 \to 0$

Лемма (Римана-Лебега): Для любой функции $f(x) \in L([-\pi, \pi])$ интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

стремятся к нулю при $k \to +\infty$

(Это следует из того, что каждый интеграл можно решить как коэффициенты Фурье по ортонормированной тригонометрической системе функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx)$$

Теорема (экстремальное/минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье). Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортонормированная система функций на L([a,b]) и $S_n(x)$ – n-я частичная сумма общего ряда Фурье функции $f \in L([a, b])$, т.е.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\varphi_k(x)$$

Тогда для любого набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$\|S_n - f\| \leq \|\sigma_n - f\|, \text{где } \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

(Тут $\|S_n - f\|$ – длина перпендикуляра, $\|\sigma_n - f\|$ – длина наклонной)

Док-во: $\|\sigma_n - f\|^2 = \|\sigma_n\|^2 - 2(\sigma_n, f) + \|f\|^2 =$

$$= \|f\| + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k + \sum_{k=1}^{n} f_k^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 =$$

$$= \|S_n - f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - f_k)^2 \geq \|S_n - f\|^2.$$ Теорема доказана

Следствие: Числовая последовательность $\{\|S_n - f\|\}_{n=1,2,\dots}$ является убывающей последовательностью, это следует из того, что:

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f_k \varphi_k(x)$$

$$\sigma_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x) + 0 * \varphi_{n+1}(x)$$

А по экстремальному свойству: $\|S_{n+1}(x) - f\| \leq \|\sigma_n - f\| = \|S_n(x) - f\|$

ОПР. Ортонормированная система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется замкнутой в пространстве $L([a,b])$, если для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall f \in L([a,b])$ $\exists \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$, такая, что:

$$\|\sigma_n - f\| < \epsilon$$

Теорема. Для любой замкнутой ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$ и любого элемента $f \in L([a,b])$ справедливо:

$$\|S_n(x) - f\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

где S_n – n-я частичная сумма ряда Фурье, т.е. $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\varphi_k(x)$

Док-во: в силу экстремального свойства S_n:

$\|f - S_n(x)\| \leq \|f - \sigma_n\|$, а так как $\{\|f - S_n\|\}$ монотонно убывает, то для всех остальных $k > n$ справедлива оценка:

$$\|f - S_k(x)\| \leq \|f - S_n(x)\| \leq \|f - \sigma_n\| < \varepsilon$$

Тогда по определению предела в силу произвольности выбора ε имеем:

$$\|f - S_k(x)\| \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$ Теорема доказана.

Замечание: Утверждение теоремы можем записать так:

$$\int_a^b \|f(x) - S_n(x)\|^2 dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(Т.е. мера отклонения неравномерна)
(для замкнутой ортонормированной системы функций общий ряд Фурье функции $f \in L([a, b])$ сходится к функции f в среднем квадратичном (в среднем из-за интеграла, квадратичном из-за степени))

Следствие: Если ортонормированная система функций $\{\varphi_k\} \in L([a, b])$ замкнутая, то для $\forall f \in L([a, b])$ неравенство Бесселя превращается в равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$$