Системы линейных уравнений
Лекция 5

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия

Определение. Линейным уравнением относительно неизвестных x_1, $x_2,\dots, x_n$, называется уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$.

где $a_1,a_2,\dots,$ a_n – заданные числа, называемые коэффициентами уравнения, а b – заданное число, называемое свободным членом уравнения.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Определение. Система уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены $b_i = 0$.

Определение. Система уравнений (1) называется квадратной, если число уравнений m равно числу неизвестных n .

Введем матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - основная матрица СЛУ,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Матричное уравнение $\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2)$

Для дальнейших исследований введем обозначения

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ – вектор –столбцы матицы **A**

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = [\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}]$$ – расширенная матрица СЛУ.

Определение. Решением системы (1) называется любой набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обращающий все уравнения (1) в тождества.

Определение. Система линейных уравнений (1) называется ***совместной***, или ***разрешимой***, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, или **неразрешимой**, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Каждое решение системы называется ее ***частным решением***, а все множество частных решений называется общим решением системы.

Разрешимость системы линейных уравнений.

Теорема Кронекера – Капелли

Теорема (Кронекера – Капелли). Решение системы (1) существует тогда, и только тогда, когда $Rang\,\mathbf{A} = Rang\,\widetilde{\mathbf{A}}$ (ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы).

Доказательство. *Необходимость*

Пусть система (1) совместна. Тогда существует ее решение

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots,\ x_n = c_n., \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$$

Подставим решение в СЛУ (1) получим тождества

$$\left.\begin{matrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{matrix}\right\}, \text{ или } \mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 + \ldots + \mathbf{a}_n c_n = \mathbf{b}$$

Следовательно, столбец **b** равен линейной комбинации столбцов матрицы **A**.

По свойству ранга матрицы ранг не изменится, если из матрицы удалить столбец, являющийся линейной комбинацией остальных столбцов. Но удалив из расширенной матрицы столбец свободных членов, получим основную матрицу системы. Следовательно, их ранги совпадают $Rang\ \mathbf{A} = Rang\ \widetilde{\mathbf{A}}$.

Достаточность.

Предположим теперь, что $Rang\ \mathbf{A} = Rang\ \widetilde{\mathbf{A}}$.

Выделим r базисных столбцов матрицы **A**, которые, очевидно, будут базисными и для матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Тогда столбец **b** является линейной комбинацией этих базисных столбцов, то есть существуют такие числа c_1, c_2, … , c_r что $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \mathbf{a}_r\mathbf{c}_r$.

Если положить

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots,\ x_r = c_r,\ x_{r+1} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0,$$

то уравнения системы превратятся в верные равенства.

То есть система совместна.

Теорема доказана.

Квадратные системы уравнений

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}, \qquad (3)$$

Очевидно, $Rang\ \mathbf{A} \le Rang\ \widetilde{\mathbf{A}} \le n$

Поэтому система (3) имеет одно и только одно решение тогда и только тогда, когда $Rang\ \mathbf{A} = n$, т.е. $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Запишем систему (3) в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Далее, так как $\det \mathbf{A} \neq 0$, то $\exists$ обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, тогда

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Учитывая

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Поэтому решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Формулы Крамера

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ определяется

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T .$$

Тогда

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k1} b_k \right) \\ \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k2} b_k \right) \\ \\ \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{kn} b_k \right) \end{bmatrix},$$

Тогда

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ki}}{\det A} b_k = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Или

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \det \mathbf{A}$$

Эти формулы называются **формулами Крамера.**

Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

МЕТОД ГАУССА

Число решений произвольной совместной системы

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Предположим, что система совместна. Следовательно, ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы: $rang\,\mathbf{A} = rang\,\widetilde{\mathbf{A}} = r$.

Их общее значение $\boldsymbol{r}$ будем называть рангом данной системы уравнений.

Уравнения, соответствующие базисным строкам, назовем базисными уравнениями системы.

Будем считать, что базисный минор порядка r, общий для матриц **A** и $\widetilde{\mathbf{A}}$**,** расположен в левом верхнем углу матрицы **A**:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{r1}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}.$$

Поскольку строки матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$ с номерами, большими r, представляют собой линейные комбинации первых r ее строк, то последние (m – r) уравнений являются следствиями первых r и, следовательно, могут быть отброшены.

Оставшиеся r уравнений перепишем так:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\}.$$

Неизвестные, стоящие при базисных столбцах, назовем **главными** неизвестными, все остальные неизвестные называются **свободными**. Таким образом, если ранг матрицы равен r , то базисная система состоит из r уравнений, число главных неизвестных равно r , число свободных неизвестных равно $n - r$.

Эту систему можно рассматривать как систему r уравнений с r неизвестными x_1, $x_2, \ldots, x_r$. Ее определитель, будучи базисным минором, отличен от нуля, поэтому, согласно результатам предыдущего пункта, при любой правой части, в частности при любых x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$, она имеет единственное решение.

Это означает, что числа $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно выбрать произвольно, полагая $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$, а $x_1, x_2, \ldots, x_r$ найти, например, по формулам Крамера.

Таким образом, общее решение нашей системы зависит от (n – r) произвольных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$.

Если r велико, то для решения удобнее использовать другой метод – метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Идея метода Гаусса состоит в том, что путем последовательного исключения неизвестных система уравнений превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) эквивалентную систему уравнений.

Ступенчатой системой называется система вида

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\}.$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$ $i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются главными коэффициентами системы.

Если $k=n$, то система уравнений называется треугольной. Очевидно, что треугольная система имеет единственное решение.

Если $k<n$, то система уравнений является неопределенной. При этом k первых неизвестных всегда можно принять за главные, а остальные $n - k$ – за свободные неизвестные.

Для приведения системы уравнений к ступенчатому виду используются так называемые элементарные преобразования, переводящие систему в эквивалентную:

1) перестановка любых двух уравнений;

2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же число;

3) прибавление к обеим частям уравнения соответствующих частей другого уравнения.

Система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 22, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42. \end{cases}$

Найдем ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 2 & 3 & 1 & | & 22 \\ 4 & 5 & 3 & | & 42 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

$$Rang\mathbf{A} = Rang\widetilde{\mathbf{A}} = 2$$

Вместо исходной системы рассмотрим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 - x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}, \; X_{общ} = \begin{cases} x_1 = 10 - x_3 - 2 - x_3 = 8 - 2x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ x_3 \end{cases}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Эквивалентная система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - x_3 + 3x_4 - 1 \\ x_3 = 3 + 5x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2x_4 - 4 \\ x_3 = 3 + 5x_4 \end{cases}$$

$$X_{общ} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2x_4 - 4 \\ 3 + 5x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Общее решение однородной системы линейных уравнений

Однородной системой линейных уравнений (правильнее было бы системой однородных ЛУ, а иногда говорят «**однородная линейная система**») называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется **нулевым** или **тривиальным**

Теорема. Однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа неизвестных: $R(\mathbf{A}) < n$.

Следствие 1. Если число уравнений однородной системы меньше числа неизвестных ($m < n$), то эта система имеет нетривиальное решение.

Следствие 2. Если число уравнений однородной системы равно числу уравнений ($m = n$), то эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю ($\det \mathbf{A} = 0$).

Допустим, что однородная система имеет некоторое нетривиальное решение $\mathbf{X}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$. Тогда для любого числа $k \neq 0$ набор $k \cdot \mathbf{X}_1 = (kx_1^{(1)}, kx_2^{(1)}, \ldots, kx_n^{(1)})$ тоже будет являться нетривиальным решением. Более того, для двух любых нетривиальных решений $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ их сумма $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, а вообще – и любая **линейная комбинация** $c_1 \cdot \mathbf{X}_1 + c_2 \cdot \mathbf{X}_2$ тоже являются нетривиальными решениями.

Любое решение, которое может быть выражено через линейную комбинацию других, называется **линейно зависимым**.

Если же найти **все нетривиальные линейно независимые решения** однородной системы $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_k$, то все другие нетривиальные решения будут являться их линейными комбинациями, т.е. **общее решение** системы тогда можно записать в виде $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_k\mathbf{X}_k$, где $c_1, c_2, ..., c_k$ – произвольные числа. Совокупность всех нетривиальных линейно независимых решений однородной системы $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_k$ называется ее **фундаментальной системой решений**.

Для одной и той же однородной системы можно получить разные фундаментальные системы решений: действительно, умножим $\mathbf{X}_1$, например, на 2, тогда совокупность $2\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_k$ тоже является линейно независимой, а, следовательно, может называться ФСР.

Теорема. Пусть ранг матрицы системы r меньше числа неизвестных ($r<n$). Тогда любая ее ФСР состоит из $(n-r)$ решений.

Алгоритм нахождения ФСР:

1. Найти ранг матрицы системы r. Выделить **базисный минором**. Определить r **базисных и** $n-r$ **свободных** переменных.

2. Выразить базисные переменные через свободные.

3. Задать $n-r$ линейно независимых строк вида

$x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ldots,x_n=0$

$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ x_{r+3}=0,\ldots.,x_n=0$ и т.д.

получить решения $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ldots,\ \mathbf{X}_{n-r}$

Пример.

Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Найдем $Rang(\mathbf{A})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

$Rang(\mathbf{A}) = 2.$

Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные.

Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 \end{cases},$$

откуда $\begin{cases} x_4 = \dfrac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5} \\ x_5 = \dfrac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5} \end{cases}.$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ или $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, тогда $x_4 = -0{,}2$, $x_5 = 1{,}2$.

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, или $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, при этом $x_4 = 1{,}2$, $x_5 = 3{,}8$.

3) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. , …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$, отсюда $x_4 = -0{,}8$, $x_5 = -0{,}2$.

ФСР: $$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы имеет вид: $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+c_3\mathbf{X}_3$,

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Связь между решениями неоднородной и однородной систем уравнений.

Общее решение линейной неоднородной системы

Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений $\mathbf{A \times X = B}$. Соответствующая ей однородная система уравнений $\mathbf{A \times X = 0}$ называется *приведенной системой уравнений* по отношению к системе.

Пусть $\mathbf{Y}$–решения однородной системы, $\mathbf{X}$–решения неоднородной.

1. Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения её приведенной системы вновь является решением неоднородной системы.

Действительно, пусть $\mathbf{A \times X_1 = B}$, $\mathbf{A \times Y = 0}$ и $\mathbf{X_2 = X_1 + Y}$.

Тогда $\mathbf{A \times X_2 = A(X_1 + Y) = AX_1 + AY = A + 0 = B.}$·

2. Разность двух решений неоднородной системы есть решение приведенной однородной системы. пусть $\mathbf{A \times X_1 = B}$, $\mathbf{A \times X_2 = B}$, $\mathbf{Y = X_1 - X_2}$

тогда $\mathbf{AY = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0.}$·

Из этих утверждений вытекает, что общее решение неоднородной системы $\mathbf{X}_{неод}$ есть сумма любого её частного решения $\mathbf{X}_{ч}$ и общего решения приведенной однородной системы $\mathbf{X}_{одн}$:

$$\mathbf{X}_{неод} = \mathbf{X}_{ч} + \mathbf{X}_{одн}. \qquad (*)$$

Действительно, из доказанного следует, что (*) есть решение неоднородной системы как сумма решений неоднородной и однородной систем. Далее, пусть дано какое-то конкретное решение X неоднородной системы. Тогда разность $\mathbf{X} - \mathbf{X}_{ч}$ есть частное решение однородной системы.

Пример. Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение.

Убедимся в том, что система совместна:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, Rang(A) = 2 – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3} \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3} \end{cases}.$$

ФСР:
$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем **любое** частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Положим x_3=x_4=x_5=0, тогда $x_1 = \dfrac{5}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$, $X_{частн} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы: $X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Спасибо за внимание