Векторное уравнение прямой линии в пространстве

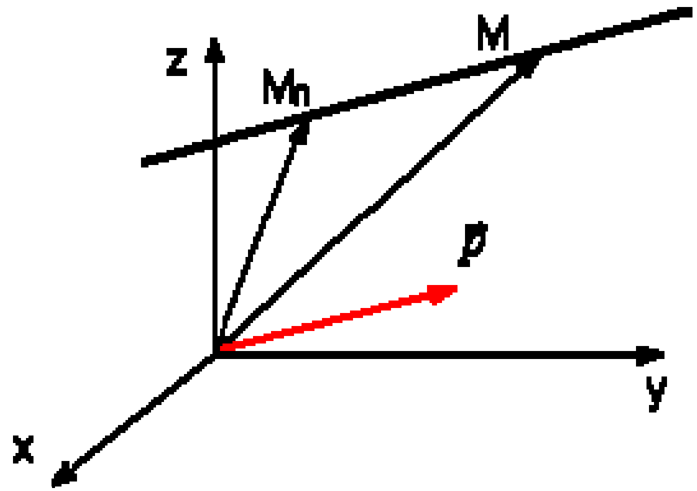
Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\boldsymbol{p}$ (l, m, n). Составить в векторном виде уравнение прямой линии l, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{p}$.

Дано:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in L,$$

$$\mathbf{p} = (l, m, n) \parallel L$$

L-?



Пусть М (x, y, z) - текущая точка прямой. Тогда векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны. По условию коллинеарности векторов можно записать

$$\mathbf{M_0M} = t \cdot \mathbf{p}, \quad (-\infty < t < +\infty) \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является уравнением прямой линии в векторном параметрическом виде.

Параметрическое уравнение прямой линии

Векторное уравнение (2.1) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases} \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.4) называется параметрическим уравнением прямой линии в пространстве.

Каноническое уравнение прямой линии в пространстве

Исключив t из уравнения (2.2), разрешив их сначала относительно t, а затем, приравняв правые части равенств, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{n} = t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется каноническим уравнением прямой линии в пространстве.

Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две заданные точки

Пусть заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые должна проходить прямая линия.

Примем за направляющий вектор прямой вектор

$$\mathbf{p} = \mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Поэтому уравнение (2.4) примет вид

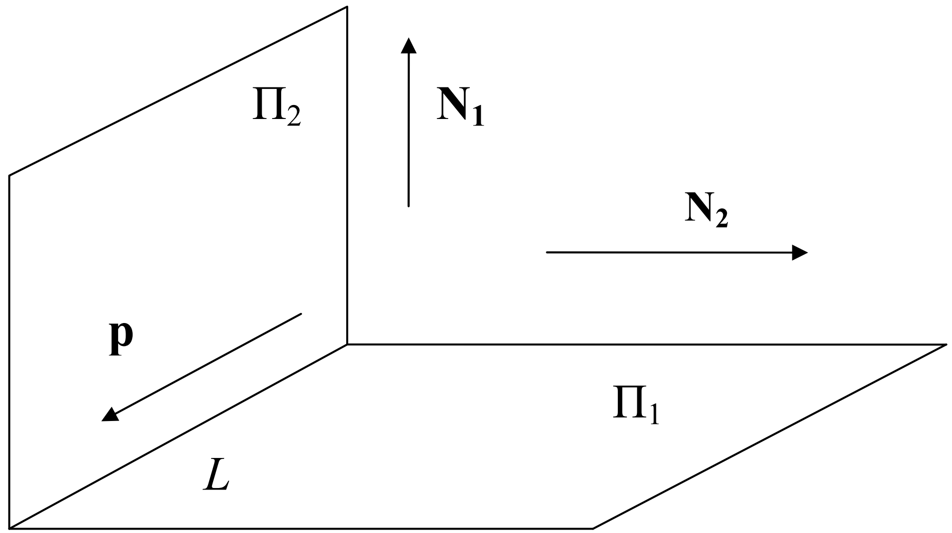
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2.5}$$

Общее уравнение прямой линии в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана также как пересечение двух плоскостей, если плоскости не параллельны:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Все формы задания прямой в пространстве взаимосвязаны.



Преобразование общего уравнения прямой линии к каноническому и параметрическому виду

Пусть прямая L задана уравнением (2.6). Перейдем от общего уравнений прямой к ее каноническому уравнению. Для этого нужно найти какую-либо т. $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$на прямой и направляющий вектор **p** прямой. Координаты точки M_1 получим из системы уравнений (2.6), задав одну из них произвольно.

Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\mathbf{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$, то за направляющий вектор **p** прямой L можно принять векторное произведение $p=\left[N_1,N_2\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

Пример.

Преобразовать прямую линию заданной в общем виде $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ x + y + 3z + 2 = 0, \end{cases}$

к канонической и параметрической форме.

Для этого необходимо найти какую-нибудь точку, через которую проходит прямая линия (опорную точку). Пусть эта точка имеет координату (x, y, 0). Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению прямой, и система примет вид

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y + 2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}, \\ y = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

Итак, опорная точка имеет координаты $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Найдём направляющий вектор прямой как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\mathbf{p} = [\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x+1{,}5}{-5} = \frac{y+0{,}5}{-1} = \frac{z}{2}$$

.

Если обозначить общее значение этих дробей величиной t,

$$\frac{x+1{,}5}{-5}=\frac{y+0{,}5}{-1}=\frac{z}{2}=t$$

то, получим уравнение прямой линии в параметрической форме

$$\begin{cases} x=-5t-1{,}5, \\ y=-t-0{,}5, \\ z=2t. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть $L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$, П: $Ax + By + Cz + D = 0$

- Необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.
- Необходимым и достаточным условием параллельности прямой и плоскости является условие ортогональности нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой $A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0$.
- Необходимым и достаточным условием принадлежности прямой плоскости является выполнение условий $\begin{cases} A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$.

Пример

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2, 3, 5)$ и прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Решение. Пусть М (x, y, z) - текущая точка плоскости. В таком случае векторы $\mathbf{M_0M} = (x-1, y+1, z-2)$, $\mathbf{M_0M_1} = (3, 2, 7)$ и $\boldsymbol{p} = (2, 0, -1)$ компланарны.

Запишем условие компланарности этих векторов в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим искомое уравнение плоскости

$$-2x + 17y - 4z + 27 = 0..$$

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой линией

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскостью

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

называется угол между прямой и её проекцией на плоскость. Выражая синус угла между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, получим, что угол между прямой и плоскостью определяется выражением

$$\sin\theta=\frac{\left|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$$L_1: \qquad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\ L_2: \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

За угол между двумя прямыми принимают один из двух смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-нибудь точку пространства. Один из этих смежных углов равен углу φ между направляющими векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ данных прямых.

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\ 2}+m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{l_2^{\ 2}+m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}}}.$$

Условие параллельности и перпендикулярности прямых: $\mathbf{p_1} \| \mathbf{p_2}$ и $\mathbf{p_1} \perp \mathbf{p_2}$.

Расстояние точки до прямой линии в пространстве

Пусть дана точка M_1 (x_1, y_1, z_1) и прямая $\mathbf{M_0M} = t \cdot \mathbf{p}$. Найдем расстояние точки до прямой в предположении, что точка M_1 не лежит на прямой.

Очевидно, что расстояние $\rho(M_1, l)$ – высота параллелограмма построенного на векторах **p** и $\mathbf{M_1M_0}$. Обозначим его площадь S.

Тогда $\rho(M_1, l) = \dfrac{S}{|\mathbf{p}|} = \dfrac{|[\mathbf{M_1M_0}, \mathbf{p}]|}{|\mathbf{p}|}$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \; L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Обозначим
$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

1) Прямые пересекаются, когда $\Delta=0$ и $\dfrac{l_1}{l_2} \neq \dfrac{m_1}{m_2} \neq \dfrac{n_1}{n_2}$;

2) Прямые параллельны, когда $\Delta=0$, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ и

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{m_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{n_1}$$

3) Прямые совпадают, когда $\Delta=0$, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ и

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1}$$

4) Прямые скрещиваются, когда $\Delta \neq 0$.