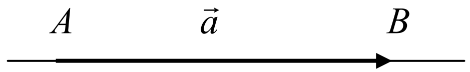
ВЕКТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть на некоторой прямой заданы две точки A и B.



Можно считать, что точка A - начало отрезка, B - конец. Тогда мы зададим так называемый направленный отрезок, определяемый упорядоченной парой точек.

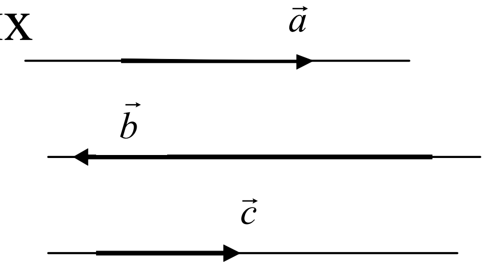
Направленный отрезок (упорядоченную пару точек) называют ***вектором***.

Вектор обозначается $\overline{AB}$ или $\vec{a}$.

Если точки A и B совпадают, то вектор $\overline{AB}$ нулевой или нуль-вектор $\vec{0}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной*** или ***модулем*** и обозначается $\left|\overline{AB}\right|, |\vec{a}|$.

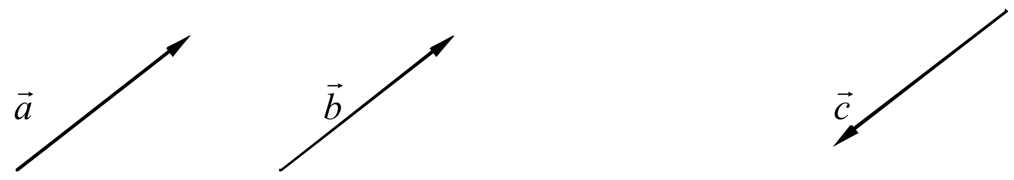
Векторы называются ***коллинеарнымми,*** если они лежат на параллельных прямых



$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}}$$

Два ненулевых коллинеарных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются одинаково ориентированными (сонаправленными) $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, если их концы C и D лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала A и B , и противоположно ориентированными $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$, если их концы лежат поразные стороны от прямой, соединяющей их начала.

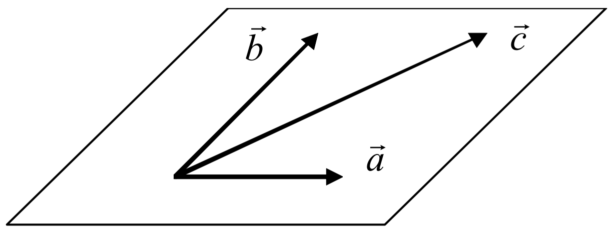
Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.



$\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

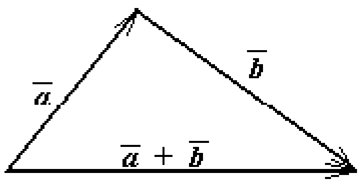
$\vec{a} \neq \vec{c}$, хотя $\vec{a} \parallel \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{c}|$, но $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Векторы называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости.

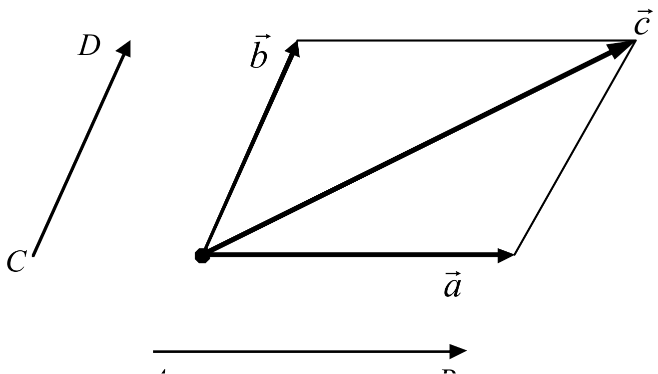


Линейные операции над векторами, их свойства.

Суммой двух векторов **a** и **b** называется вектор c ,который получается по следующему правилу (треугольника): от произвольной точки *A* откладывается вектор **a** ; от его конца – точки *B* откладывается вектор, равный вектору **b**. Вектор c равен вектору **AC** ,соединяющему начало первого отложенного вектора с концом второго.

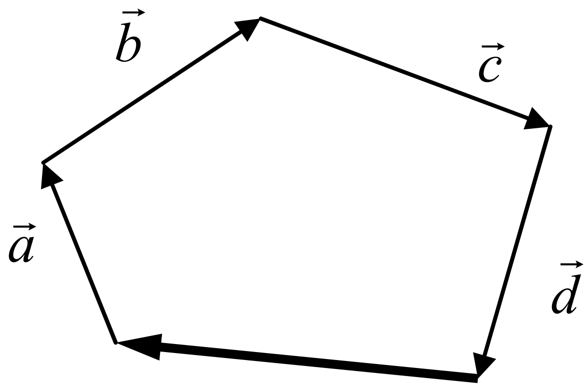


<u>Правило параллелограмма</u>: сумма двух векторов представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на равных им векторах.



$\vec{a} = AB, \vec{b} = CD$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

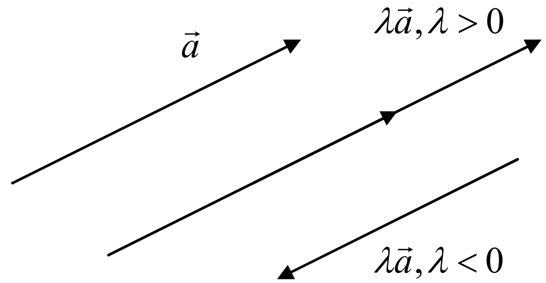
Сумма нескольких векторов определяется как вектор, замыкающий ломаную линию, звеньями которой служат векторы-слагаемые, и направленный из начала первого вектора в конец последнего.

Определение: **произведением** вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется такой вектор $\vec{b}$, что 1) $|\vec{b}| = \lambda|\vec{a}|$,

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$,

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$:

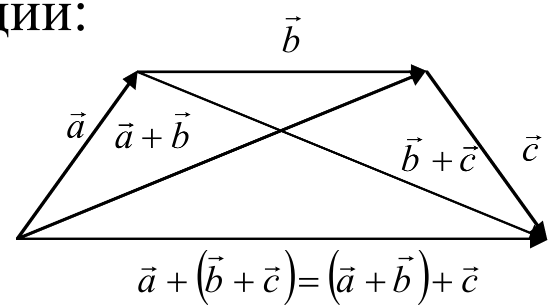
$\vec{b} \downarrow\downarrow \vec{a}$,если $\lambda > 0$, $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}$,если $\lambda < 0$.



Вектор $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$. Сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Вычитание векторов - операция, обратная сложению: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Перечислим свойства введенных нами линейных операций:



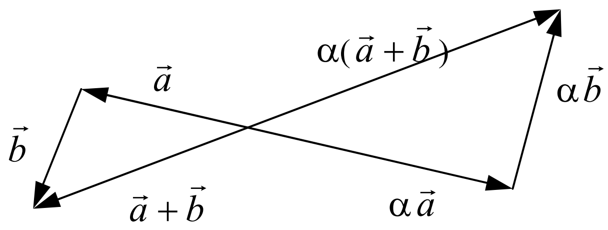
1) коммутативность сложения: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) ассоциативность сложения: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

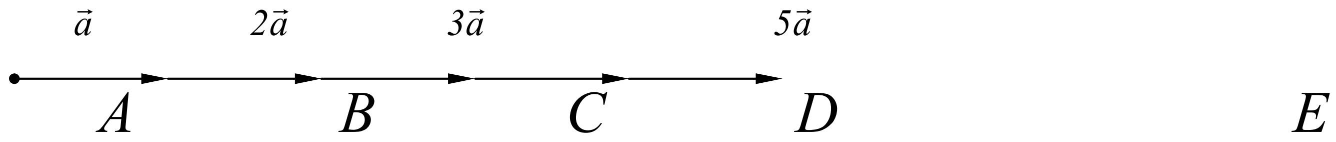
3) существование нуль-вектора: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) существование противоположного вектора: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) дистрибутивность сложения по отношению к умножению на число: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;



6) дистрибутивность сложения: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.



$$\vec{AB}=\vec{a},\ \vec{AC}=2\vec{a},\ \vec{AD}=3\vec{a},\ \vec{AE}=5\vec{a},\ \vec{AC}+\vec{AD}=\vec{AE}.$$

7) ассоциативность умножения: $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$, т.к.

$$|\alpha|\cdot|\beta\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|=|\alpha\beta|\cdot|\vec{a}|.$$

8) существование единицы: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, это следует из определения операции умножения.

Пространство, для элементов которого вводятся операции сложения и умножения на число, обладающие свойствами (1)-(8), называют *линейным* (*векторным*) пространством. Элементы линейного пространства обычно называют *векторами*.

Понятие векторного пространства.

Размерность и базис векторного пространства

Типы векторных пространств:

Векторное пространство $\mathbf{V_1}$ – множество векторов, коллинеарных некоторой прямой (множество векторов, лежащих на прямой).

Векторное пространство $\mathbf{V_2}$ – множество векторов, компланарных заданной плоскости (множество векторов, лежащих на заданной плоскости).

Векторное пространство $\mathbf{V_3}$ – множество векторов пространства.

Определение. Число $\boldsymbol{n}$ называется размерностью векторного пространства $\mathbf{V}$, если в пространстве $\mathbf{V}$ можно найти n линейно независимых векторов, а всякие $\boldsymbol{n}+1$ векторы линейно зависимы.

1. *Векторное пространство* $\mathbf{V_1}$ *является одномерным*, так как, , всякие два коллинеарные вектора линейно зависимы, и в то же время всякий ненулевой вектор образует линейно независимую систему.

2. *Векторное пространство* $\mathbf{V_2}$ *является двумерным*, так как, всякие два неколлинеарные вектора линейно независимы, а всякие три компланарные вектора уже линейно зависимы.

3. *Векторное пространство* $\mathbf{V_3}$ *является трехмерным*, так как, всякие три некомпланарные вектора линейно независимы, а всякие четыре вектора, линейно зависимы.

Определение. Система *n* линейно независимых векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{\ldots}$,$\mathbf{e_n}$ векторного пространства $\mathbf{V_n}$ называется базисом, если для всякого вектора $\mathbf{x} \in V_n \boldsymbol{x}$ найдутся такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что имеет место равенство

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Теорема. *В векторном пространстве* $\mathbf{V_n}$ *размерности* ***n*** *существует базис из* ***n*** *векторов. Более того, всякая система из n линейно независимых векторов образует базис пространства.*

Теорема. *Коэффициенты разложения вектора по базису определяются единственным образом.*

Рассмотрим на примере V_3.

Доказательство (от противного). Пусть, для вектора **x** существуют два различных разложения по базису, то есть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

где $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного *i,* тогда имеем

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = (x_1 - y_i)\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Т.к. $x_i - y_i \neq 0$, то векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы, что противоречит их определению как базисных векторов.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами вектора относительно данного базиса.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Теорема. Линейные операции над векторами сводятся к операциям над их координатами.

Рассмотрим на примере $\mathbf{V}_3$.

Дано: $\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\mathbf{c} = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$

Доказать, что $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$.

Доказательство:

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) + + \mu(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) =$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda x_3 + \mu y_3)\mathbf{e}_3$$ то есть $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Два ненулевых вектора x и y коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты относительно данного базиса пропорциональны.

Дано:

$\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$,

Доказать, что $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}$.

Необходимость.

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$, $\qquad \mathbf{b} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n$.

Если **a** и **b** коллинераны, то $\exists\alpha$, $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, то есть

$a = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n = \alpha(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n)$. Откуда $y_i = \alpha x_i$. или

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{1}{\alpha}.$$

<u>Достаточность.</u>

Пусть выполняется условие $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3} = k$, тогда $x_i = ky_i$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = ky_1\mathbf{e}_1 + ky_2\mathbf{e}_2 + \ldots + ky_n\mathbf{e}_n = k\left(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n\right) = k\mathbf{b}$$

Следовательно, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Аффинные и декартовы координаты точки

Аффинные и декартовы координаты точки на прямой

Определение. *Аффинной системой координат на прямой* называется совокупность точки O и базисного вектора $\mathbf{e}$.

Точка O называется *началом системы координат*, а сама прямая l с заданным базисным вектором $\mathbf{e}$ называется *координатной осью*.

Определение. *Аффинной координатой точки* относительно аффинной системы координат называется координата её радиус-вектора относительно базиса.

В частном случае, когда длина базисного вектора $|\mathbf{e}|=1$, базисный вектор $\mathbf{e}$ называется *ортом*, базис называется декартовым, и система координат также называется *декартовой.*

Аффинные и декартовы координаты точки на плоскости

Определение. Аффинной системой координат на плоскости называется совокупность точки O – начала системы координат и базиса $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$.

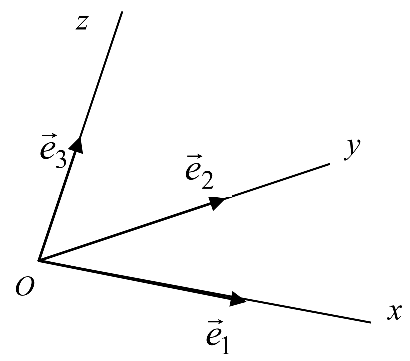
Определение. Аффинными координатами точки плоскости относительно аффинной системы координат называются координаты её радиус-вектора относительно базиса.

Определение.Аффинной системой координат в пространстве называется совокупность точки O – начала системы координат и базиса $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$$\mathbf{e_3}$

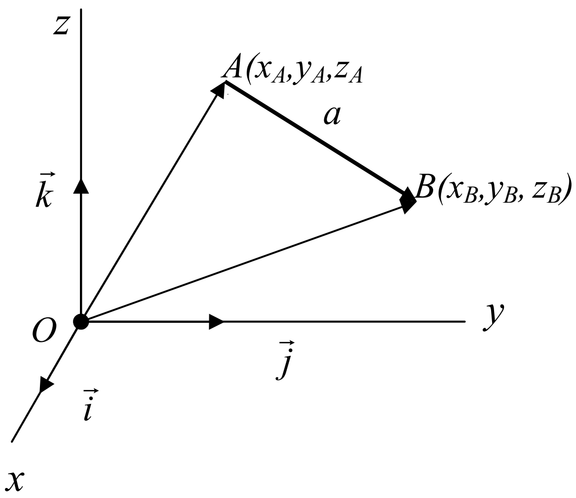
Точка *O* называется ***началом координат***,

Ox,*Oy*,*Oz* – ***координатными осями***,

Oxy,*Oyz*,*Oxz* – ***координатными плоскостями***



Декартова система координат $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, базисные векторы которой



взаимно перпендикулярны и имеют единичные длины, называется декартовой прямоугольной системой, а ее базис – ортонормированным.

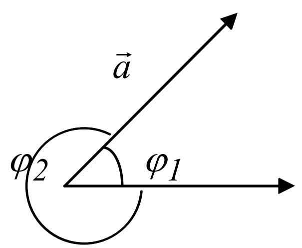
Координатами точки A в выбранной системе координат называются координаты радиус-вектора $\vec{r}_A$ этой точки в этой системе координат.

Если заданы координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, то можно найти выражение для координат вектора $\vec{a} = AB$.

Из рисунка следует, что $O\vec{A} + A\vec{B} + O\vec{B}$, тогда $\vec{a} = A\vec{B} = O\vec{B} - O\vec{A}$. Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, то $a_x = x_B - x_A, a_y = y_B - y_A, a_z = z_B - z_A$ - координаты вектора $\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов

Введем понятие угла между векторами. Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. После совмещения их начал они образуют на плоскости два угла φ_1 и φ_2 . Углом между векторами называют тот из углов, который не превосходит π .На рисунке это угол φ_1 .



Определение. ***Углом между векторами*** **a** и **b** называется наименьший угол φ на который нужно повернуть один из векторов, для того чтобы их направления совпали.

Определение. ***Скалярным произведением векторов*** **a** и **b** называется **скалярная** величина $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \mathbf{a}^\wedge\mathbf{b}$

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение коммутативно: $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$;
2. Постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения: $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
3. Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов: $(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{c},\mathbf{b})$;
4. Условие перпендикулярности: если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ то $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть задан декартов базис $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$ и векторы **a** и **b**:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{b} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,\, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1y_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) + x_1y_3(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) + x_2y_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) + x_2y_3(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) + x_3y_3(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Так как $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если } i = j; \\ 0, & \textit{если } i \neq j. \end{cases}$

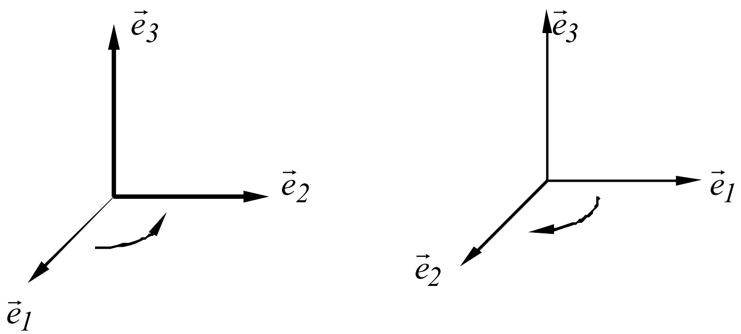
Выражение длины вектора через его координаты: $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$

Выражение косинуса угла между векторами:

$$\cos \mathbf{a}\,\hat{}\,\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}\cdot\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2}}.$$

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Три некомпланарных вектора в пространстве $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют упорядоченную тройку, если принято соглашение, что один из них является первым $(\vec{e}_1)$, другой - вторым $(\vec{e}_2)$, а оставшийся - третьим $(\vec{e}_3)$.



Правый базис Левый базис

Упорядоченная тройка векторов называется *правой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

. В дальнейшем рассматриваемые базисы будем считать правыми.

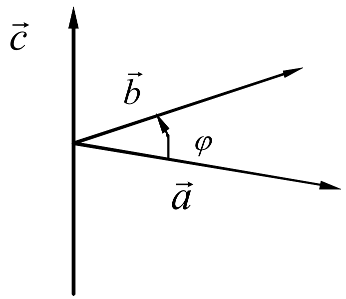
Определение и свойства векторного произведения.

Определение: ***векторным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, удовлетворяющий следующим условиям:

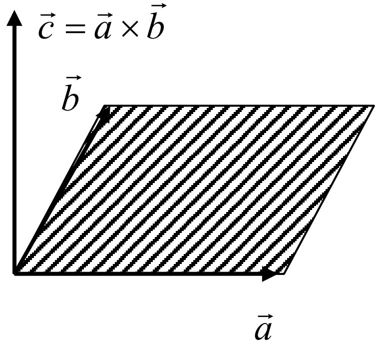
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.



Из определения векторного произведения следует, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.



$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad (2)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

<u>Алгебраические свойства векторного произведения.</u>

Векторное произведение обладает следующими алгебраическими свойствами:

1) антикоммутативность: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;

2) ассоциативность: $[(\alpha\vec{a}), \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$;

3) дистрибутивность: $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;

4) для любого вектора $\vec{a}$: $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

5) условие коллинеарности двух ненулевых векторов $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

<u>Пример</u> : найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = 10\vec{p} - 3\vec{q} \text{ и } \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q},$$

$$\text{если } |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 4, (\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}) = \frac{\pi}{6}.$$

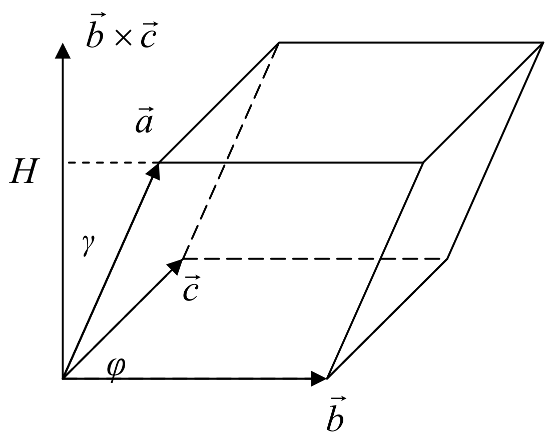
Решение: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$;

$$\vec{a} \times \vec{b} = (10\vec{p} - 3\vec{q}) \times (\vec{p} + 2\vec{q}) = 10\vec{p} \times \vec{p} + 20\vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q} =$$
$$= 20\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{q} = 23\vec{p} \times \vec{q};$$
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 23|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}) = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 92(ед^2).$$

Определение смешанного произведения. Его свойства.

<u>Определение</u>: *смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$.

Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Оно положительно, если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая, и отрицательна, если - левая.



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot(|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\sin\varphi)\cdot \mathrm{c}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = S\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\gamma = S\cdot H$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = V$$

S - площадь основания, H - высота

Смешанное произведение равно нулю в том и только в том случае, когда векторы сомножители компланарны.

<u>Доказательство</u> :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \cdot \cos\gamma = 0, \text{ если}$$

1) один из векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ нулевой, но тогда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны;

2) $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны;

3) $\cos\gamma = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (\vec{b}\times\vec{c})$,тогда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны (лежат в одной плоскости).

В силу свойств смешанного произведения $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, т.к. в левой и правой частях равенства стоят выражения, равные объему одного и того же параллелепипеда.

Имеет место соотношение:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}).$$

<u>Выражение векторного и смешанного произведения в декартовых координатах.</u>

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном правом базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т.е. имеют место соотношения:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3.$$

Для ортонормированного базиса можно записать:

$$\begin{array}{lll} [\vec{e}_1, \vec{e}_1] = \vec{0}, & [\vec{e}_2, \vec{e}_1] = -\vec{e}_3, & [\vec{e}_3, \vec{e}]_1 = \vec{e}_2, \\ [\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3, & \vec{e}_2, \vec{e}_2 = 0, & [\vec{e}_3, \vec{e}_2] = -\vec{e}_1, \\ [\vec{e}_1, \vec{e}_3] = -\vec{e}_2, & [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1, & [\vec{e}_3, \vec{e}_3] = 0. \end{array}$$

Получим выражение для координат вектора $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

$$\vec{d} = \left[(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3),(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\right] =$$
$$= a_1b_1\left[\vec{e}_1,\vec{e}_1\right] + a_1b_2\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right] + a_1b_3\left[\vec{e}_1,\vec{e}_3\right] + a_2b_1\left[\vec{e}_2,\vec{e}_1\right] + a_2b_2\left[\vec{e}_2,\vec{e}_2\right] + a_2b_3\left[\vec{e}_2,\vec{e}_3\right] +$$
$$+ a_3b_1\left[\vec{e}_3,\vec{e}_1\right] + a_3b\left[{}_2\vec{e}_3,\vec{e}_2\right] + a_3b_3\left[\vec{e}_3,\vec{e}_3\right] =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1.$$

Тогда $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ также может быть выражено через координаты этих векторов в ортонормированном базисе

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right) = \left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right) == (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 =$$
$$= c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 =$$
$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

$$, \ (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

т.е. векторное произведение двух векторов может быть представлено как определитель третьего порядка, у которого в первой строке стоят базисные векторы, а во второй и третьей строках – координаты перемножаемых векторов. Смешанное произведение представляется как определитель третьего порядка, строки которого образованы координатами перемножаемых векторов.

<u>Пример</u>. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1,1,3)$, $\vec{b}(2,0,3)$ и $\vec{c}(1,1,1)$, и длину высоты, опущенной на основание $\vec{b},\vec{c}$.

Решение:

$$V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-1-1+6=4(ед^3).$$

$$V=H\cdot S,\ H=V/S,\ S=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|.$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1&\vec{e}_2&\vec{e}_2\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3;\ \ S=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}(ед^2).$$

$$H=\frac{4}{\sqrt{6}}(ед).$$