Алгебра и геометрия 2 семестр

Моисеева Светлана Петровна
доктор физ.- мат. наук, доцент
кафедра теории вероятностей и математической статистики ФПМК

Плоскость в пространстве

Лекция 1

Понятие об уравнении поверхности в пространстве

Определение. Пусть заданы:

1) декартова система координат $Oxyz$;

2) поверхность S ;

3) уравнение $F(x, y, z) = 0$,

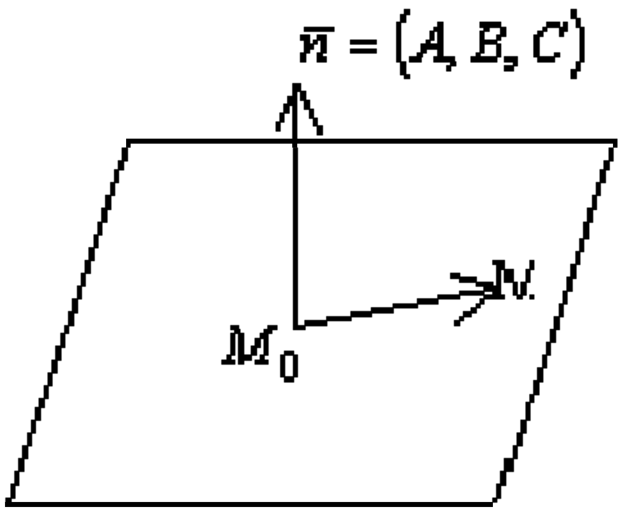
Определение. Уравнением поверхности S в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение между переменными x,y,z, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Замечание. Поверхность S можно определять разрешенным (например, относительно z , если это возможно) уравнением $z = f(x, y)$.

Уравнение плоскости в пространстве

Получим уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B,C)$.

Определение. Вектор, перпендикулярный к плоскости будем называть нормалью к плоскости или нормальным вектором.



Для любой точки плоскости $M(x,y,z)$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{\mathbf{n}} = (A, B, C)$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Получено уравнение, которому удовлетворяет любая точка заданной плоскости – **уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.**

После приведения подобных можно записать уравнение (1) в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

где $D = - Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Это линейное уравнение относительно трех переменных называют **общим уравнением плоскости**.

Уравнение плоскости заданной точкой и двумя неколлинеарными векторами

Дано:

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$,

$\mathbf{p} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \parallel \Pi$,

$\mathbf{q} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \parallel \Pi$.

Для любой точки $M(x, y, z) \in \Pi$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ компланарен векторам $\mathbf{p} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\mathbf{q} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, следовательно,

уравнение плоскости **П**:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Параметрическое уравнение плоскости

Дано:

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$, $\quad \mathbf{p} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \parallel \Pi$, $\quad \mathbf{q} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \parallel \Pi$.

Для любой точки $M(x, y, z) \in \Pi$ вектор $\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ компланарен векторам $\mathbf{p} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\mathbf{q} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то есть векторы линейно зависимы.

$$\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}, \qquad \begin{cases} x - x_0 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y - y_0 = t_1\beta_2 + t_2\beta_2 \\ z - z_0 = t_1\gamma_2 + t_2\gamma_2 \end{cases},$$

Параметрическое уравнение плоскости в координатной форме

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y = y_0 + t_1\beta_2 + t_2\beta_2 \\ z = z_0 + t_1\gamma_2 + t_2\gamma_2 \end{cases}$$

Уравнение плоскости заданной тремя точками

Дано:

$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi,$

$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Pi,$

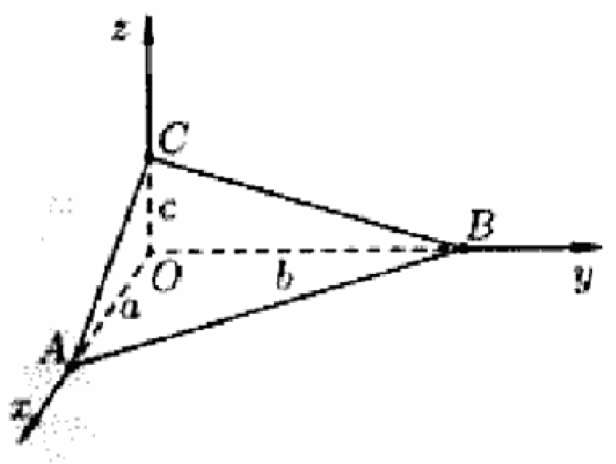
$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \Pi,$

Для любой точки плоскости $M(x, y, z) \in \Pi$ векторы $\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$ $\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарны, следовательно,

уравнение плоскости **П**: $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

Уравнение плоскости «в отрезках»

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки **A**$(a;0;0)$, **B**$(0;b;0)$ и **C**$(0;0;c)$.



Подставляя координаты этих точек в уравнение (4), получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв определитель, имеем

$$bcx - abc + abz + ayc = 0$$

или

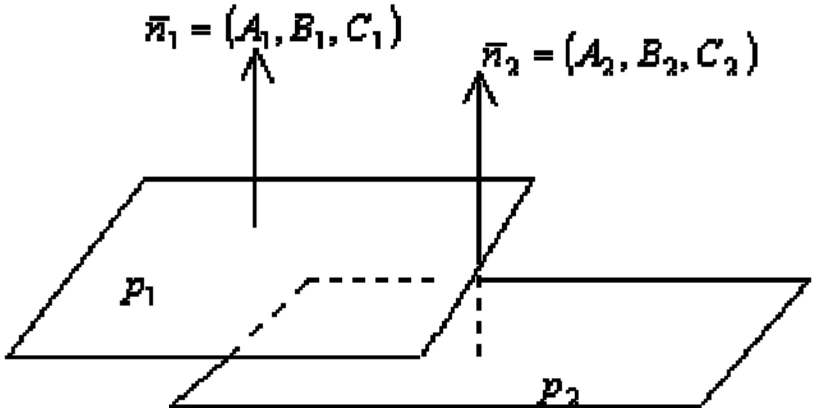
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (5)$$

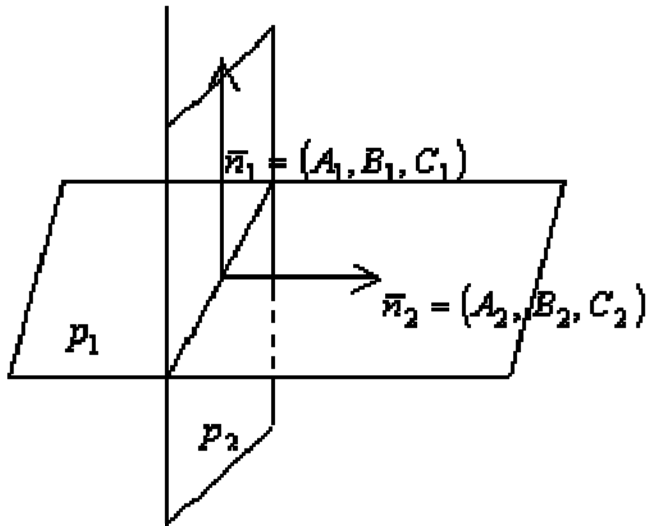
Неполные уравнения плоскости

Если хотя бы одно из чисел *A, B, C, D* равно нулю, уравнение называют неполным.

$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	проходит через начало координат
$A=0$	$By+Cz+D=0$	параллельна оси Ox
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	параллельна оси Oy
$C=0$	$Ax+By+D=0$	параллельна оси Oz
$A=B=0$	$Cz+D=0$	параллельна плоскости Oxy
$A=C=0$	$By+D=0$	параллельна плоскости Oxz
$B=C=0$	$Ax+D=0$	параллельна плоскости Oyz
$A=D=0$	$By+Cz=0$	проходит через ось Ox
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	проходит через ось Oy.
$C=D=0$	$Ax+By=0$	проходит через ось Oz
$A=B=D=0$	$z=0$	задает плоскость Oxy
$A=C=D=0$	$y=0$	задает плоскость Oxz
$C=B=D=0$	$x=0$	задает плоскость Oyz

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей





Если плоскости параллельны или перпендикулярны друг к другу, то соответственно параллельны или перпендикулярны их нормальные векторы.

Пусть

$$\Pi_1 : \quad \mathrm{A}_1 x + B_1 y + C_1 z + D_2 = 0,$$

$$\Pi_2 : \quad \mathrm{A}_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

Условие перпендикулярности

$\Pi_1 \perp \Pi_2$ $$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

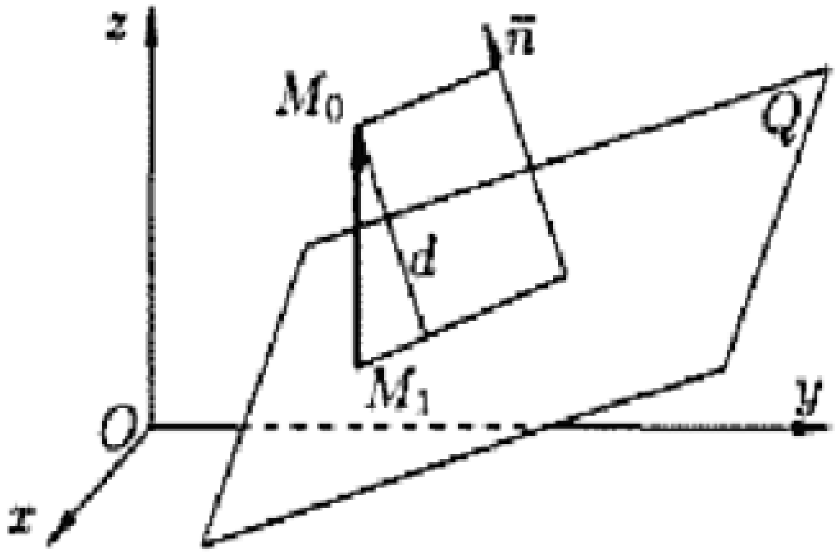
Условие параллельности

$\Pi_1 \parallel \Pi_2$ $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Совпадающие плоскости

$\Pi_1 \subset \Pi_2$ $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Расстояние от точки до плоскости

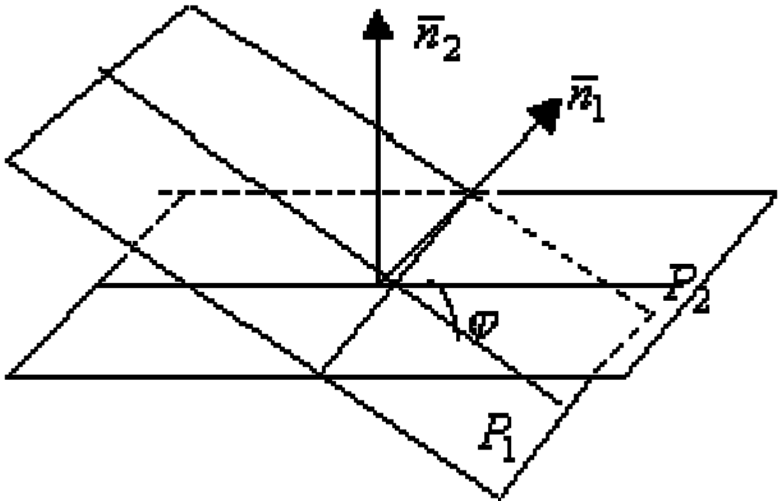


Пусть $\mathbf{M_1M_0} \perp \Pi$, тогда $\mathbf{M_1M_0} \parallel \mathbf{n}$

$$(\mathbf{M_1M_0}, \mathbf{n}) = |\mathbf{M_1M_0}| \cdot |\mathbf{n}| \cdot (\pm 1)$$

$$\rho(M_0, \Pi) = |\mathbf{M_1M_0}| = \frac{|(\mathbf{M_1M_0}, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Угол между двумя плоскостями равен углу между нормалями к плоскостям



$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

Спасибо за внимание