Векторы.
Лекция 8

Понятие векторного пространства. Размерность и базис векторного пространства

Типы векторных пространств:

Векторное пространство $\mathbf{V_1}$ – множество векторов, коллинеарных некоторой прямой (множество векторов, лежащих на прямой).

Векторное пространство $\mathbf{V_2}$ – множество векторов, компланарных заданной плоскости (множество векторов, лежащих на заданной плоскости).

Векторное пространство $\mathbf{V_3}$ – множество векторов пространства.

Определение. Число $\boldsymbol{n}$ называется размерностью векторного пространства $\mathbf{V}$, если в пространстве $\mathbf{V}$ можно найти n линейно независимых векторов, а всякие $\boldsymbol{n}$ +1 векторы линейно зависимы.

1. *Векторное пространство* $\mathbf{V_1}$ *является одномерным*, так как, , всякие два коллинеарные вектора линейно зависимы, и в то же время всякий ненулевой вектор образует линейно независимую систему.

2. *Векторное пространство* $\mathbf{V_2}$ *является двумерным*, так как, всякие два неколлинеарные вектора линейно независимы, а всякие три компланарные вектора уже линейно зависимы.

3. *Векторное пространство* $\mathbf{V_3}$ *является трехмерным*, так как, всякие три некомпланарные вектора линейно независимы, а всякие четыре вектора, линейно зависимы.

Определение. Система *n* линейно независимых векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …,$\mathbf{e_n}$ векторного пространства $\mathbf{V_n}$, если для всякого вектора $\mathbf{x} \in V_n \boldsymbol{x}$ найдутся такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что имеет место равенство

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Теорема. *В векторном пространстве* $\mathbf{V_n}$ *размерности* ***n*** *существует базис из* ***n*** *векторов. Более того, всякая система из n линейно независимых векторов образует базис пространства.*

Теорема. *Коэффициенты разложения вектора по базису определяются единственным образом.*

Рассмотрим на примере V_3.

Доказательство (от противного). Пусть, для вектора **x** существуют два различных разложения по базису, то есть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

где $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного *i*, тогда имеем

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = (x_1 - y_i)\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Т.к. $x_i - y_i \neq 0$, то векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы, что противоречит их определению как базисных векторов.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами вектора относительно данного базиса.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Теорема. Линейные операции над векторами сводятся к операциям над их координатами.

Рассмотрим на примере V_3.

Дано: $\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\mathbf{c} = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $\underline{\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}}$

Доказать, что $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$.

Доказательство:

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) + + \mu(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) =$$

$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda x_3 + \mu y_3)\mathbf{e}_3$$ то есть $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Два ненулевых вектора х и у коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты относительно данного базиса пропорциональны.

Дано:

$\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{b} = (y_1, y_2, ..., y_n),$

Доказать, что $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}.$

Необходимость.

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n,$ $\qquad$ $\mathbf{b} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n.$

Если **a** и **b** коллинераны, то $\exists\alpha$, $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, то есть

$a = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n = \alpha(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n)$. Откуда $y_i = \alpha x_i$. или

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{1}{\alpha}.$$

Достаточность.

Пусть выполняется условие $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = k$, тогда $x_i = ky_i$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = ky_1\mathbf{e}_1 + ky_2\mathbf{e}_2 + \ldots + ky_n\mathbf{e}_n = k\left(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n\right) = k\mathbf{b}$$

Следовательно, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Аффинные и декартовы координаты точки

Аффинные и декартовы координаты точки на прямой

Определение. *Аффинной системой координат на прямой* называется совокупность точки O и базисного вектора $\mathbf{e}$.

Точка O называется *началом системы координат*, а сама прямая l с заданным базисным вектором $\mathbf{e}$ называется *координатной осью*.

Определение. *Аффинной координатой точки* относительно аффинной системы координат называется координата её радиус-вектора относительно базиса.

В частном случае, когда длина базисного вектора $|\mathbf{e}|=1$, базисный вектор $\mathbf{e}$ называется *ортом*, базис называется декартовым, и система координат также называется *декартовой.*

Аффинные и декартовы координаты точки на плоскости

Определение. Аффинной системой координат на плоскости называется совокупность точки O – начала системы координат и базиса $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$.

Определение. Аффинными координатами точки плоскости относительно аффинной системы координат называются координаты её радиус-вектора относительно базиса.

Точку M , имеющую координаты x_1, x_2 , будем обозначать в дальнейшем как M(x_1, x_2), а саму систему координат как $R=\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$.

В случае, когда $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$, базис называется **декартовым**, а система координат $R=\{O,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$– декартовой.

Определение. Декартовыми координатами точки относительно декартовой системы координат называются координаты её радиус-вектора относительно декартова базиса.

Скалярное произведение векторов

Определение. ***Углом между векторами*** **a** и **b** называется наименьший угол φ на который нужно повернуть один из векторов, для того чтобы их направления совпали.

Определение. ***Скалярным произведением векторов*** **a** и **b** называется **скалярная** величина $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b}$

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение коммутативно: $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$;
2. Постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения: $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
3. Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов: $(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{c},\mathbf{b})$;
4. Условие перпендикулярности: если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ то $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть задан декартов базис $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{b} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1y_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) + x_1y_3(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) + x_2y_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) + x_2y_3(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) + x_3y_3(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Так как $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если } i = j; \\ 0, & \textit{если } i \neq j. \end{cases}$

Выражение длины вектора через его координаты: $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}}$

Выражение косинуса угла между векторами:

$$\cos \mathbf{a}^\wedge\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}}\cdot\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + y_3^{\,2}}}.$$

Спасибо за внимание