UNIVERSITÉ ROYALE DE
DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES
Faculté de Sciences Économiques et de Gestion

AFFECTATION DE LA RECHERCHE

MATHÉMATIQUES

POUR L'ÉCONOMIE ET LA GESTION

Exercices Corrigés

Professeur Dr. NGANN Sundet

Classe Préparatoire : Groupe 06

NITH Kosal   CHUM Veth   UNG Soksathremy

Mlle. SENG Sina   Mlle. SORN Tola   Mlle. PHANN Vannary

*Monivong Blvd, District Tonle Basac, Khan Chamkamon, Phnom Penh,
CAMBODGE, P.O.Box 842, Téléphone: (855) 23 36 26 07/21 47 03
Fax: (855) 23 21 49 53, E-mail: rector@rule.edu.kh, site web: www.rule.edu.kh*

AVANT-PROPOS

TD Mathématiques Appliquées

Université Royale de Droit et des Sciences Économiques. Faculté des Sciences Économiques et de Gestion.

Le présent ouvrage contient les notions mathématiques de base nécessaire à la compréhension et l'utilisation efficace des méthodes quantitatives appliquées aux domaines de l'économie et la gestion.

Merci Monsieur Professeur de responsable Dr. NGANN Sundet pour Affectation de la Recherche Mathématique.

Classe Préparatoire : Groupe 06
Année 2016 - 2017

Affectation de la Recherche Par :

NITH Kosal	CHUM Veth	UNG Soksathremy
Mlle. SENG Sina	Mlle. SORN Tola	Mlle. PHANN Vannary

Phnom Penh le 07 Février 2017

SOMMAIRE

Les TD d'exercice

Les TD d'exercice
&
Corrections des TD d'exercice

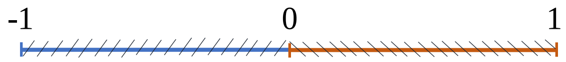
TD 1 : L'application de fonctions de plusieurs variables

Exercice 02 : Crée un graphique Pole ferme D=0 ; r=1 par la formule un ; deux et trois dans la leçon.

Solution

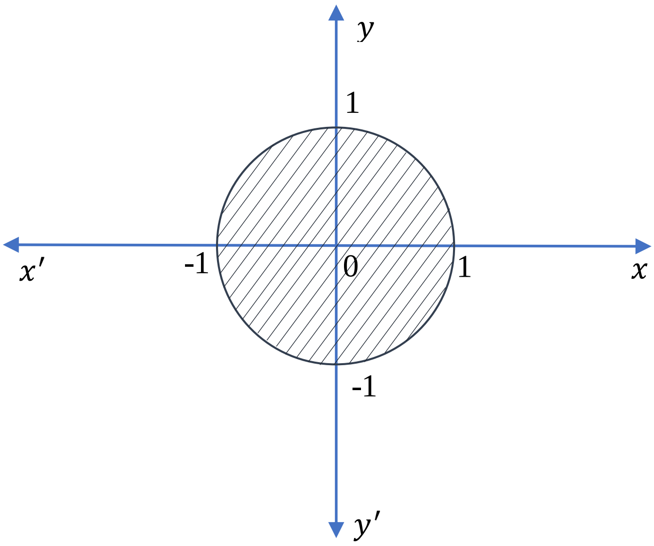
Crée un graphique Pole ferme D=0 ; r=1

- Dimensions 1 de diagonal $|d| \leq 1$



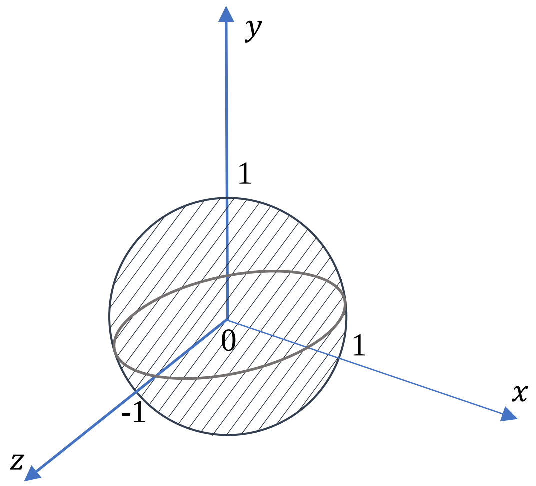
- Dimensions 2 de Circulaire fermé $r = 1$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



- Dimensions 3 de diagonal $d \leq 1$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



Exercice 04 : Si $F(K,L) = 10K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ $\quad K > 0,\ L > 0$

A. Calculer $F(1,1)$; $F(4,27)$; $F\left(9,\frac{1}{27}\right)$; $F(3,\sqrt{2})$; $F(100,1000)$ et $F(2k,2)$

B. Déterminer a : $F(tK,tL)=t^aF(K,L)$

Solution

A. Calculer $F(1,1)$; $F(4,27)$; $F\left(9,\frac{1}{27}\right)$; $F(3,\sqrt{2})$; $F(100,1000)$ et $F(2k,2)$

$$F(1,1)=10.1^{\frac{1}{2}}.1^{\frac{1}{3}}=10$$

$$F(4,27)=10.4^{\frac{1}{2}}.27^{\frac{1}{3}}=10\times2\times3=60$$

$$F\left(9,\frac{1}{27}\right)=10.9^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=10\times3\times0.33=9.9$$

$$F(3,\sqrt{2})=10.3^{\frac{1}{2}}.(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=10\times1.73\times1.12=19.376$$

$$F(100,1000)=10\times100^{\frac{1}{2}}\times1000^{\frac{1}{3}}=1000$$

$$F(2k,2)=10.(2k)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}=14.14\times k^{\frac{1}{2}}\times1.25=17.675k^{\frac{1}{2}}$$

Donc: $F(1,1)=10$; $F(4,27)=60$; $F(9,\frac{1}{27})=9.9$;
$F(3,\sqrt{2})=19.376$; $F(100,1000=1000$; $F(2k,2)=17.675k^{\frac{1}{2}}$

B. Déterminer a : $F(tK,tL)=t^aF(K,L)$

On a

$$F(tK,tL)=10(tK)^{1/2}(tL)^{1/3}=10t^{1/2}K^{1/2}t^{1/3}L^{1/3}=t^{1/2+1/3}10K^{1/2}L^{1/3}=t^{5/6}F(K,L) \quad (1)$$

Hypothèse : $F(tK,tL)=t^aF(K,L)$ (2)

(1) Et (2) : $\Rightarrow$ $t^aF(K,L)=t^{5/6}F(K,L)$

$$\boxed{\text{Donc: } a=\frac{5}{6}}$$

Exercice 06 : On a fonction $f(x,y)=\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2}$

Calculer limite $f(x,y)$ quand :

A. $x\to0$; y $contente$; $y_0\neq0$
B. $y\to0$; x $contente$; $x_0\neq0$
C. Est-ce que fonction f limite quand $(x;y)\to0$?

Solution

A. Calculer limite $f(x) \to 0$; $y\ contente$; $y_0 \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{(0+2y)^2}{0^2+y^2}$$
$$= \frac{4\mathrm{y}^2}{y^2}$$
$$= 4$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2} = 4}$$

B. Calculer limite $f(y) \to 0$; $x\ contente$; $x_0 \neq 0$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{(x+2\times 0)^2}{x^2+0^2}$$
$$= \frac{x^2}{x^2}$$
$$= 1$$

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2} = 1}$$

C. Fonction f limite quand $(x;y) \to 0$?
On a la formule

$$f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x+2y)^2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{(0+2\times 0)^2}{0^2+0^2}$$
$$= \frac{0}{0}$$
$$= 0 \text{ indefinite } \forall, \theta$$

On a finalement $\boxed{f(x,y)\ est\ discontinue\ en\ (0,0)}$

Exercice 18 : On a une fonction de demande du vin $Q = 205y^{1/3}p^{-1}r^{0.7}$

- Q : Quantité de demande du vin
- P : Prix de vin dans le marché
- y : Revenu de ménage
- r : Indice général de prix pour consommateur

Déterminer l'élasticité de la demande par rapport à p, y et r

Solution

Déterminer l'élasticité de la demande par rapport à p, y et r

$Q = 205 y^{1/3} p^{-1} r^{0.7}$

Transformer à logarithme

$\ell n Q = \ell n\left(205 y^{1/3} p^{-1} r^{0.7}\right)$

$\ell n Q = \ell n 205 + \frac{1}{3} \ell n y - \ell n p + 0.7 \ell n r$

Dérivées partielles ordre 1 par rapport à p, y et r :

$\frac{\partial \ell n Q}{\partial y} = \frac{1}{3y}; \quad \frac{\partial \ell n Q}{\partial p} = -\frac{1}{p}; \quad \frac{\partial \ell n Q}{\partial r} = \frac{0.7}{r}$

La somme d'élasticité :

$e = y\frac{1}{3y} + p\left(-\frac{1}{p}\right) + r\left(\frac{0.7}{r}\right) = \frac{1}{3} - 1 + 0.7 = 0.03 \qquad |e| < 1 \Leftrightarrow -1 < e < 1$

$$\boxed{e = 0.03}$$

TD2 : Calculer les dérivées de fonction de plusieurs variables

Exercice 05 : Calculer la différentielle df

A. $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}$

B. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

C. $f(x,y,z,t) = e^x \ell n y + e^z \ell n t$

D. $f(x,y,z) = yx^z$

E. $f(x,y,z) = x^4 + x^2 y^2 - y^4$

F. $f(x,y) = x^2 \cos y + yx^2$

G. $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$

H. $f(x,y,z,t) = xe^y + ze^t$

Solution

A. $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y} - \frac{2y}{x^3}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x^2}$

Donc : $\boxed{df = \left(\frac{2x}{y} - \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)dy}$

B. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df=2xdx+2ydy+2zdz}$$

C. $f(x,y,z,t)=e^x\ell ny+e^z\ell nt$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\ell ny\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{e^x}{y}\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=e^z\ell nt\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{e^z}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df=e^x\ell ny.dx+\frac{e^x}{y}dy+\left(e^z\ell nt\right)dz+\frac{e^z}{t}dt}$$

D. $f(x,y,z)=yx^z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(yx^z\right)'=yzx^{z-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^z\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=yx^z\ell nx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df=yzx^{z-1}dx+x^zdy+yx^z\ell nxdz}$$

E. $f(x,y,z)=x^4+x^2y^2-y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y-4y^3\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df=\left(4x^3+2xy^2\right)dx+\left(2x^2y-4y^3\right)dy}$$

F. $f(x,y)=x^2\cos y+yx^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xCosy+2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x^2Siny+x^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df=\left(2xCosy+2xy\right)dx+\left(-x^2Siny+x^2\right)dy}$$

G. $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z\frac{(x^2+y^2)'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2xz}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\frac{(x^2+y^2)'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2yz}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{df = \frac{2xz}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{2yz}{2\sqrt{x^2+y^2}}dy + \sqrt{x^2+y^2}dz}$$

H. $f(x,y,z,t) = xe^y + ze^t$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y\,; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^t\,; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = ze^t$$

$$\Rightarrow \boxed{df = (e^y)dx + (xe^y)dy + (e^t)dz + (ze^t)dt}$$

Exercice 09 : Fonction $Q = 15K^{0.3}L^{0.6}$. Déterminer équation différentielle de Q quand K=30 et L=12. Imaginé réponses quand capitaux est croissance 1.5 et travail est croissance 1.3.

Solution

Déterminer équation différentielle total

On a $Q = 15K^{0.3}L^{0.6}$ et K=30, L=12

La formule de Différentielle total $\Delta U = \frac{\partial Q}{\partial K}(K,L)dK + \frac{\partial Q}{\partial L}(K,L)dL$

$$du(K,L) = (4.5K^{-0.7}L^{0.6})dK + (9K^{0.3}L^{-0.4})dL$$
$$du(30,12) = (4.5\times30^{-0.7}12^{0.6})dK + (9\times30^{0.3}12^{-0.4})dL$$
$$du(30,12) = 1.848dK + 9.24dL$$

Donc : Équation différentielle total $du(30,12) = 1.848dK + 9.24dL$

Imaginé réponses quand capitaux est croissance et travail est croissance

K=30, L=12, $\Delta K = 1.5, \Delta L = 1.3$

On a $\Delta U = 1.848\times1.5 + 9.24\times1.3$

$\Delta U = 14.784$

` Donc : Quand capitaux est croissance et travail est croissance $\Delta U = 14.784$

TD3 : Déterminer les optimums de fonctions ci-dessous

Exercice 03 : Calculer maximum et minimum de fonction $f: IR^2 \to IR$ déterminer par $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Sur contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Solution

Calculer maximum et minimum de fonction $f: IR^2 \to IR$

On a $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$

Sur contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
Dérivée :

$$f'_x = 2x - 1$$
$$f'_y = 4y$$
$$g'_x = 2x$$
$$g'_y = 2y$$

$$\begin{cases} \dfrac{f'_x}{g'_x} = \lambda \\ \dfrac{f'_y}{g'_y} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2x} = \lambda \\ \dfrac{4y}{2y} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2x} = \lambda & (1) \\ 2 = \lambda & (2) \end{cases}$$

$\lambda = 2$ Remplace dans (1) on a :

$$\frac{2x-1}{2x} = 2$$

Et sur contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2x} = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 4x & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) : $2x - 1 = 4x$
$2x - 4x = 1$
$-2x = 1$
$x = -\frac{1}{2}$ (1)

Remplace (1) dans (3) on a :

(3) : $x^2 + y^2 = 1$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$
$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$y^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$
$$y^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$y = 0.86$ $\quad Remplace\ dans\ (3) on\ a$

(3) : $x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + 0.86^2 = 1$$
$$x^2 + \frac{3}{4} = 1$$
$$x^2 = 1 - \frac{3}{4}$$
$$x^2 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x = 0.4$$

Donc : $x = 0.4, y = 0.86$ est maximum et minimum de fonction $f: IR^2 \to IR$

Exercice 11 : Déterminer maximum de fonction $u(x,y) = x^{0.5}y^{0.3}$ avec monétaire $Q = 10x + 3y = 140$.

Solution

Déterminer le profit maximum de fonction

On a $u(x,y) = x^{0.5}y^{0.3}$ et la fonction de coût total $Q = 10x + 3y = 140$

$$\Leftrightarrow \quad U(x,y) = x^{0.5}y^{0.3} = 140$$

La formule Lagrangiens : On a

$$L(x,y,\lambda) = x^{0.5}y^{0.3} - \lambda(10x + 8y - 140)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5x^{-0.5}y^{0.3} - 10\lambda = 0 & (1) \\ 0.3x^{0.5}y^{-0.7} - 3\lambda = 0 & (2) \\ 10x + 3y - 140 = 0 & (3) \end{cases}$$

Dévier : $\frac{(1)}{(2)} : \frac{0.5x^{-0.5}y^{0.3}}{0.3x^{0.5}y^{-0.7}} = \frac{10}{3}$

$$\frac{0.5x}{0.3y} = \frac{10}{3}$$
$$\frac{1.5x}{3y} = 1$$
$$x = \frac{3y}{1.5}$$

Remplacer $x = \frac{3y}{1.5}$ dans (3) : $10x + 3y - 140 = 0$

$$10\left(\frac{3y}{1.5}\right) + 3y = 140$$

$$20y + 3y = 140$$
$$y = \frac{140}{23}$$
$$y = 6.086$$

Remplacer $y = 6.086$ dans (3) : $10x + 3y - 140 = 0$

$$10x + 3(6.086) = 140$$
$$10x + 18.26 = 140$$
$$10x = 121.73$$
$$x = 12.17$$

On a $\mathrm{U}(12.17, 6.086) = 12.17^{0.5}6.086^{0.3} = 5.92$

Donc : 2 Unité $x = 12.17$ et $y = 6.086$ qui faire Maximum d'utilité : $\boxed{U(12.17, 6.086) = 5.92}$

Exercice 13 : Déterminer coût minimum pour producteur biens 434 Unités dans une entreprise, avoir fonction de produit $Q = f(K, L) = K^{0.7}L^{0.1}$. Entreprise a achète capital et travail 28\$ et 10\$.

A. Déterminer le point critique.

B. En utilisant la matrice Hessienne. Déterminer la consommation minimum.

Solution

A. Déterminer le point critique

On a $Q = f(K, L) = K^{0.7}L^{0.1}$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 0 \Rightarrow 0.7K^{-0.3}L^{0.1} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 0 \Rightarrow 0.1K^{0.7}L^{-0.9} = 0 \qquad (2)$$

Après (1) et (2)

$\Rightarrow \quad 0.7K^{-0.3}L^{0.1} = 0.1K^{0.7}L^{-0.9}$

$\Rightarrow \quad K = 7L$

$On\ a \quad Q = 434$

$\Rightarrow \quad K^{0.7}L^{0.1} = 434 \qquad (3)$

Remplacée $\quad K = 7L\ dans\ le\ (3)$

$\Rightarrow \quad (7L)^{0.7}L^{0.1} = 434$

$L = 360.91$

$\Rightarrow \quad K = 7 \times 360.91$

$K = 2526.38$

Donc le point critique est $\boxed{K = 2526.38\ \ et\ L = 360.91}$

B. Déterminer la consommation minimum

On a sous contrainte $\quad 28k + 10l = C$

On a $\quad k_0 = 2526.38\ \ et\ l_0 = 360.91$

$\Rightarrow \quad C = (28 \times 2526.38) + (10 \times 360.91)$

$C = 74347.74$

Condition second ordre

$$\frac{\partial f}{\partial k^2} = -0.21k^{-1.3}l^{0.1} = -0.006$$

$$\frac{\partial f}{\partial kl} = \frac{\partial f}{\partial lk} 0.07k^{-0.3}l^{-0.9} = 0.04$$

$$\frac{\partial f}{\partial l^2} = -0.09k^{0.7}l^{-1.9} = -0.97$$

Matrice Hessienne: $|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial k^2} ; \frac{\partial f}{\partial kl} \\ \frac{\partial f}{\partial lk} ; \frac{\partial f}{\partial l^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.006 & 0.04 \\ 0.04 & -097 \end{vmatrix} = 0.0041 > 0$

$$\text{Et } \frac{\partial f}{\partial k^2} = -0.006 < 0 \;\; et \;\; \frac{\partial f}{\partial l^2} = -0.97 < 0 \Rightarrow$$

Donc la consommation minimum utilisé pour obtenir la production maximale est de C = 74347,74

TD4 : L'application économique

Exercice 05 : Une entreprise est monopole dans les deux pays. Pays 1et Pays 2, l'entreprise produit les biens homogènes, Dans le premier pays, la fonction contraire de demande est $P_1 = -q_1 + 40$, la fonction de demande total est $TC_1 = C(q_1) = q^2{}_1$
Dans le deuxième pays, $P = -q_2+70$ et $TC_2 = C(q_2) = 2q_2{}^2$

A. On suppose que les biens circulent librement entre les deux pays. Calculer les prix et les quantités équilibres et aussi le profit.
B. De nos jours, les clients peuvent se mobilier d'un pays à l'autre pays. Calculer les prix et les quantités équilibres et le profit au point d'équilibre.

Solution

A. Calculer les prix et les quantités équilibres et aussi le profit

Le coût total : $TC = C(q)$, $q = q_1 + q_2$

Condition $1^{ère}$ ordre $\begin{cases} MR_1 = MC(q_1 + q_2) \; (1) \\ MR_2 = MC(q_1 + q_2) \; (2) \end{cases}$

(1) & (2) $\Longrightarrow MR_1(q_1) = MR_2(q_2)$ (3)

Pour le marché 1

Condition $1^{ère}$ ordre de maximiser profit

$MR_1(q_1) = MC_1(q_1)$

$TR_1(q_1) = p_1q_1 = (-q_1 + 40)q_1 = -q_1^2 + 40q_1$

$\Longrightarrow MR_1(q_1) = (-q_1^2 + 40q_1)' = -2q_1 + 40$

et $MC_1(q_1) = (q_1^2)' = 2q_1$

Pour le marché 2

Condition $1^{ère}$ ordre de maximiser profit

$TR_2(q_2) = p_2q_2 = (-q_2 + 70)q_2 = -q_2^2 + 70q_2$

$\Longrightarrow MR_2(q_2) = (-q_2^2 + 70q_2)' = -2q_2 + 70$

Et $MR_2(q_2) = (2q_2)' = 4q_2$

$$\begin{cases} MR_1 = MC(q_1 + q_2) \\ MR_2 = MC(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (4)$$

(3) & (4), On a : $MC(q_1) = MC(q_2)$

$\Leftrightarrow 2q_1 = 4q_2 \implies q_1 = 2q_2$

Et $q = q_1 + q_2 = 2q_2 + q_2 \implies q_2 = \frac{3}{2}q$; $q_1 = \frac{2}{3}q$

$$TC = TC(q_1) + TC(q_2) = q_1^2 + 2q_2^2$$

$$= (\frac{2}{3}q)^2 + 2(\frac{1}{3}q)^2 = \frac{4}{9}q^2 + \frac{2}{9}q^2 = \frac{6}{3}q^2 = \frac{2}{3}q^2 = \frac{2}{3}(q_1 + q_2)^2$$

On a ensuite

$$\begin{cases} -2q_1 + 40 = \dfrac{4}{3}(q_1 + q_2) \\ -2q_2 + 70 = \dfrac{4}{3}(q_1 + q_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2q_1 + 40 = \dfrac{4}{3}q_1 + \dfrac{4}{3}q_2 \\ -2q_1 + 70 = \dfrac{4}{3}q_1 + \dfrac{4}{3}q_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{10}{3}q_1 + \dfrac{4}{3}q_2 = 40 \\ \dfrac{4}{3}q_1 + \dfrac{10}{3}q_2 = 70 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 70 \end{bmatrix}$$

\+ Utiliser la méthode de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{10}{3} \end{vmatrix} = \frac{100}{9} - \frac{16}{9} = \frac{84}{9}$$

$$\Delta q_1 = \begin{vmatrix} 40 & \dfrac{4}{3} \\ 70 & \dfrac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{400}{3} - \frac{280}{3} = \frac{120}{3}$$

$$\implies \overline{q_1} = \frac{\Delta q_1}{\Delta} = \frac{120}{3} \times \frac{9}{84} = \frac{360}{84} = 4.29$$

$$\Delta q_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{10}{3} & 40 \\ \dfrac{4}{3} & 70 \end{vmatrix} = \frac{700}{3} - \frac{160}{3} = \frac{540}{3}$$

$$\implies \overline{q_2} = \frac{\Delta q_2}{\Delta} = \frac{540}{3} \times \frac{9}{84} = \frac{1620}{84} = 19.29$$

Le prix équilibre du marché :

+ Marché 1 : $\overline{p_1} = -4.29 + 40 = 35.71$
+ Marché 2 : $\overline{p_2} = -19.29 + 70 = 50.71$

On a finalement l'équilibre de

+ Marché : $E_1(\overline{p_1} = 35.71\,, \overline{q_1} = 4.29)$
+ Marché : $E_2(\overline{p_2} = 50.71\,, \overline{q_2} = 19.29)$

Le profit maximum de l'entreprise

$$\Pi_{max} = TR_1(q_1) + TR_2(q_2) - TC(q_1 + q_2)$$

$$= \overline{p_1}\times\overline{q_1} + \overline{p_2}\times\overline{q_2} - \frac{2}{3}(q_1 + q_2)$$

$$= 35.71\times 4.29 + 50.71\times 19.29 - \frac{2}{3}(4.29 + 19.29)$$

$$= 760.71\ um$$

$$\boxed{\Pi_{max} = 760.71\ um}$$

B. Calculer les prix et les quantités équilibres et le profit au point d'équilibre

Pays 1 : $p_1 = -q_1 + 40$ segment de prix : $p_1 \in [0,40]$

Pays 2 : $p_2 = -q_2 + 70$ segment de prix : $p_2 \in [0,70]$

On a 3 catégories de prix : $p \in [0,40]$

$p \in]40,70]$

$p > 70$

<u>1er cas</u> : $p \in [0,40]$ $p_1 = p_2 = p$

Il y a la demande tous les 2 pays

On a donc :

$$+ \begin{cases} q_1 = -p_1 + 40 \\ q_2 = -p_2 + 70 \end{cases}$$

$$q = q_1 + q_2 = -2p + 110$$

$$TR(q) = pq = \left(-\frac{1}{2}q + 55\right)q = -\frac{1}{2}q^2 + 55q$$

$$\Rightarrow MR(q) = -q + 55$$

$$TC = \frac{2}{3}q^2 \Rightarrow MC = \frac{4}{3}q$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3}q = 55 \quad \Rightarrow \quad \overline{q} = \frac{55\times4}{7} = 23.57$$

$$\text{et } \overline{p} = -\frac{1}{2}\times23.57 + 55 = 43.22$$

L'équilibre de marché commun $\overline{E}$ ($\overline{p} = 43.22$, $\overline{q} = 23.57$) le prix de marché est hors de prix d'équilibre de marché

<u>2^em^ cas</u> : le prix $p \in]40,70]$

Il y a seulement la demande dans le pays 2

$$TR = p_2q_2 = (-q_2 + 70)q_2 = -{q_2}^2 + 70q_2$$

$$\Rightarrow MR = -2q_2 + 70$$

$$MC = TC' = \frac{4}{3}q_2$$

$$MC = MR \quad \Rightarrow \quad -2q_2 + 70 = \frac{4}{3}q_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10}{3}q_2 = 70 \quad \Rightarrow \quad \overline{q_2} = \frac{70\times3}{10} = 21$$

$$\Rightarrow \overline{p_2} = -21 + 70 = 49$$

L'équilibre du marché est $\overline{E}(\overline{p} = 49, \overline{q} = 21)$

<u>3^em^ cas</u> : $p > 70$

Il n'y a pas la demande de tous les deux pays

<u>Exercice 13 :</u> Une société téléphone diviser salaire de téléphone pour trois types :

- Le jour par semaine : $Q_1 = 90 - 0.50P_1$
- Le jour par vacances : $Q_2 = 35 - 0.25P_2$
- Le jour par nuit : $Q_3 = 30 - 0.20P_3$

Fonction de coût total $TC = 25 + Q$ qui $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. On a naissance$|\varepsilon|$ de demande décroissance.

A. Calculer Output maximum de profit.
B. Calculer prix maximum de profit.
C. Calculer élasticité prix de demande dans le marché. L'utilité Cramer pour calculer et matrice Hessian pour la condition seconde ordre de profil maximum.

<u>Solution</u>

A. Calculer Output maximum de profit

$$RT = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$$
$$RT = (90.5\times44.75) + (70.5\times17.375) + (75.5\times14.9)$$
$$RT = 6399.7626$$

$TC = 25 + Q$
$TC = 25 + 44.75 + 17.375 + 14.9$
$TC = 102.025$

$\pi = RT - CT$
$\pi = 6399.7626 - 102.025$
$\pi = 6297.73$

$\boxed{\text{Donc : } \quad \pi = 6297.73 \text{ um}}$

B. Calculer prix maximum de profit

En équilibre de marcher $\begin{cases} R_{m1} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \\ R_{m2} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \\ R_{m3} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \end{cases}$

Le profit total $\pi = RT - CT$

$RT = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$

On a :

$Q_1 = 90 - 0.50P_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \dfrac{90 - Q_1}{0.50} = 180 - 2Q_1$

$Q_2 = 35 - 0.25P_2 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \dfrac{35 - Q_2}{0.25} = 140 - 4Q_2$

$Q_3 = 30 - 0.20P_3 \quad \Rightarrow \quad P_3 = \dfrac{30 - Q_3}{0.20} = 150 - 5Q_3$

$\Rightarrow \text{RT} = (180 - 2Q_1)Q_1 + (140 - 4Q_2)Q_2 + (150 - 5Q_3)Q_3$

$CT = 25 + Q \quad Qui\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$CT = 25 + Q_1 + Q_2 + Q_3$

Donc on a :

$\pi = RT - CT$

$\pi = (180 - 2Q_1)Q_1 + (140 - 4Q_2)Q_2 + (150 - 5Q_3)Q_3 - (25 + Q_1 + Q_2 + Q_3)$

$\pi = 180Q_1 - 2{Q_1}^2 + 140Q_2 - 4{Q_2}^2 + 150Q_3 - 5{Q_3}^2 - 25 - Q_1 - Q_2 - Q_3$

$\pi = 179Q_1 - 2{Q_1}^2 + 139Q_2 - 4{Q_2}^2 + 149Q_3 - 5{Q_3}^2 - 25$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 179 - 4Q_1 = 0 \\ 139 - 8Q_2 = 0 \\ 149 - 10Q_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4Q_1 = -179 \\ -8Q_2 = -139 \\ -10Q_3 = 149 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 44.75 \\ Q_2 = 17.375 \\ Q_3 = 14.9 \end{cases}$$

$On\ a \quad P_1 = 180 - 2Q_1$

$P_2 = 140 - 4Q_2$

$P_3 = 150 - 5Q_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = 180 - 2\times 44.75 \\ P_2 = 140 - 4\times 17.375 \\ P_3 = 150 - 5\times 14.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 90.5 \\ P_2 = 70.5 \\ P_3 = 75.5 \end{cases}$$

Donc : $P_1 = 90.5\ um$, $P_2 = 70.5\ um$, $P_3 = 75.5\ um$ et $Q_1 = 44.75\ um$, $Q_2 = 17.375\ um$, $Q_3 = 14.9\ um$

Exercice 14 : Une entreprise vente les billets Avion le demande d'achète les billets Avion pour trios type :

- Le demande par jour : $Q_1 = 12 - \frac{1}{12}P_1$
- Le demande par nuit : $Q_2 = 11 - \frac{1}{10}P_2$
- Le demande par attende : $Q_3 = 13 - \frac{1}{8}P_3$

Fonction de coût total $TC = 40 + 10Q + 0.5Q^2$ qui $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.
On a naissance$|\varepsilon|$ de demande décroissance.

A. Calculer Output maximum de profit.
B. Calculer prix maximum de profit.
C. Calculer élasticité prix de demande dans le marché. L'utilité Cramer pour calculer et matrice Hessian pour la condition seconde ordre de profil maximum.

Solution

A. Calculer Output maximum de profit

$$RT = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$$
$$RT = (132.4096\times1.01) + (99\times1.10) + (90.64\times1.67)$$
$$RT = 394$$

$$TC = 40 + 10Q + 0.5Q^2$$
$$TC = 40 + 10Q_1 + 10Q_2 + 10Q_3 + 0.5{Q_1}^2 + 0.5{Q_2}^2 + 0.5{Q_3}^2$$
$$TC = 40 + (10\times1.01) + (10\times1.10) + (10\times1.67)$$
$$+(0.5)1.01^2 + (0.5)1.10^2 + (0.5)1.67^2$$
$$TC = 80.3095$$

$$\pi = RT - CT$$
$$\pi = 394 - 80.3095$$
$$\pi = 313.69$$

Donc : $\pi = 313.69$ um

B. Calculer prix maximum de profit

En équilibre de marcher $\begin{cases} R_{m1} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \\ R_{m2} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \\ R_{m3} = C_m(Q_1, Q_2, Q_3) \end{cases}$

Le profit total $\pi = RT - CT$

$$RT = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$$

On a :

$$Q_1 = 12 - \frac{1}{12}P_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{12 - Q_1}{0.083} = 144.57 - 12.04Q_1$$
$$Q_2 = 11 - \frac{1}{10}P_2 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{11 - Q_2}{0.1} = 110 - 10Q_2$$

$$Q_3 = 13 - \frac{1}{8}P_3 \qquad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{13 - Q_3}{0.125} = 104 - 8Q_3$$

$$\Rightarrow \text{RT} = (144.57 - 12.04Q_1)Q_1 + (110 - 10Q_2)Q_2 + (104 - 8Q_3)Q_3$$

$$CT = 40 + 10Q + 0.5Q^2 \quad Qui\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$CT = 40 + 10(Q_1 + Q_2 + Q_3\ ) + 0.5(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2$$

$$CT = 40 + 10Q_1 + 10Q_2 + 10Q_3\ + 0.5{Q_1}^2 + 0.5{Q_2}^2 + {Q_3}^2$$

Donc on a :

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = \left(144.57 - 12.04Q_1\right)Q_1 + \left(110 - 10Q_2\right)Q_2 + \left(104 - 8Q_3\right)Q_3$$
$$-(40 + 10Q_1\ + 10Q_2 + 10Q_3\ + 0.5{Q_1}^2 + 0.5{Q_2}^2 + {Q_3}^2)$$

$$\pi = 144.57Q_1 - 12.04{Q_1}^2 + 110Q_2 - 10{Q_2}^2 + 104Q_3 - 8{Q_3}^2 - 40 - 10Q_1 - 10Q_2$$
$$-10Q_3 - 0.5{Q_1}^2 - 0.5{Q_2}^2 - 0.5{Q_3}^2)$$

$$\pi = 134.57Q_1 - 11.54{Q_1}^2 + 100Q_2 - 9.5{Q_2}^2 + 94Q_3 - 7.5{Q_3}^2 - 40$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 134.57 - 133.1716Q_1 = 0 \\ 100 - 90.25Q_2 = 0 \\ 94 - 56.25Q_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -133.1716Q_1 = -134.57 \\ -90.25Q_2 = -100 \\ -56.25Q_3 = -94 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 1.01 \\ Q_2 = 1.10 \\ Q_3 = 1.67 \end{cases}$$

$$On\ a \quad P_1 = 144.57 - 12.04Q_1$$
$$P_2 = 110 - 10Q_2$$
$$P_3 = 104 - 8Q_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 144.57 - 12.04\times 1.01 \\ P_2 = 110 - 10\times 1.10 \\ P_3 = 104 - 8\times 1.67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 132.4096 \\ P_2 = 99 \\ P_3 = 90.64 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\begin{array}{lcl} P_1 = 132.4096\ um & & Q_1 = 1.01\ um \\ P_2 = 99\ um & \text{et} & Q_2 = 1.10\ um \\ P_3 = 90.64\ um & & Q_3 = 1.67\ um \end{array}}$

TD5 : Exercice

Exercice 02 : Une entreprise il y a coût marginal $3q^2 - 60q + 400^{\$}$ dans la quantité pour les unités de produit. Coût total 2 unités première 900\$. Calculer la consommation totale de la production 5 unités dernier.

Solution

Calculer la consommation totale de la production 5 unités dernier

On a : $3q^2 - 60q + 400\$$ est fonction marginale de consommation

$\Rightarrow$ Fonction de consommation $= \int\ (3q^2 - 60q + 400)dq$

$$= q^3 - 30q^2 + 400q$$

La consommation sur la production de premier 2 unités est 900$

$\Rightarrow$ $C(2) = 900$

Supposons l'entreprise produit 7 unités

$\Rightarrow$ La consommation sur la production de premier 7 unités est :

$$C(7) = 7^3 - 30\times 7^2 + 400\times 7$$
$$C(7) = 1673$$

$\Rightarrow$ La consommation de la production de 5 unités dernier est :

$$C(7) - C(2) = 1673 - 900$$
$$C(5) = 773\$$$

Donc :la consommation totale de la production 5 unités dernier $C(5) = 773\$$

Exercice 07 : Après t semaine fond de contribution en réponse à une base dans les campagnes est venu taux $R(t) = 2000te^{-0.2t}$ $ par semaine. Combien monétaire est croissance pour 5 semaines avant ?

Solution

Calculer R pour le monétaire croissance par 5 semaines

T = 5 Semaines

$$R(5) = 2000\times 5e^{-1}$$
$$= 10000\times 0.36$$
$$R(5) = 3680$$

Donc : Le monétaire croissance par 5 semaines R (5) = 3680

Exercice 14 :

3. $\int x^5 e^{1-x^6} dx$
4. $\displaystyle\int \frac{2x^4}{x^5+1} dx$
5. $\displaystyle\int (x+1)(x^2+2x+15)^{12}\, dx$

Solution

3. $\displaystyle\int x^5 e^{1-x^6} dx$

Posons $U = 1 - x^6 \implies du = -6x^5 dx \implies -\frac{du}{6} = x^5 dx$

$$\Rightarrow \int x^5 e^{1-x^6} dx = \int \left(-\frac{e^4}{6}\right) du = -\frac{1}{6}\int e^4 du = -\frac{e^4}{6}$$

Mais $u = 1 - x^6$

$$\Rightarrow -\frac{e^4}{6} = -\frac{e^{(1-x^6)}}{6}$$

$$\Rightarrow \int x^5 e^{1-x^6} = -\frac{1}{6} e^{1-x^6} + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Donc : $\int x^5 e^{1-x^6} dx = -\frac{1}{6} e^{1-x^6} + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

4. $\int \frac{2x^4}{x^5+1}dx$

Posons $u = x^5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 5x^4dx$

$\Rightarrow \frac{du}{5} = x^4dx$

$\Rightarrow 2\int \frac{x^4}{x^5+1}dx = 2\int \frac{1}{5U}du = 2(\frac{1}{5}\int \frac{1}{4}du) = \frac{2}{5}\ln|u|$

Mais $\quad u = x^5 + 1$

$\frac{2}{5}\ln|u| = \frac{2}{5}\ln|x^5+1|$

$\Rightarrow \int \frac{2x^4}{x^5+1}dx = \frac{2}{5}\ln|x^5+1| + c, c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{Donc: \int \frac{2x^4}{x^5+1}dx = \frac{2}{5}\ln|x^5+1| + c, c \in \mathbb{R}}$$

5. $\int (x+1)(x^2+2x+15)^{12}\,dx$

Posons $u = x^2 + 2x + 15$

$\Rightarrow du = (2x+2)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = (x+1)dx$

$$\Rightarrow \int (x+1)(x^2+2x+15)^{12}\,dx = \int \frac{u^{12}}{2}du = \frac{1}{2}\int (x^2+2x+15)^{12}du$$
$$= \frac{1}{26}(x^2+2x+15)^{13}$$

$$\boxed{Donc: \int (x+1)(x^2+2x+15)^{12}\,dx = \frac{1}{26}(x^2+2x+15)^{13}}$$

TD6 : Calculer les intégrante ci-dessous

Exercice 02 : $\int xe^{\frac{x}{2}}\,dx$

Solution

On a $\quad \int xe^{\frac{x}{2}}\,dx$

Représenter $\qquad u = x \Longrightarrow du = dx$

$$dv = e^{\frac{x}{2}}dx \Longrightarrow v = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Salon la formule $\int udv = uv - \int vdu$

$$\Longrightarrow \int xe^{\frac{x}{2}}\,dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}$$

Donc : $\boxed{\int x e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}}$

Exercice 19 : $\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)dt$

Solution

On a $\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)dt$

$$= \left[2b2t + \frac{2t^2}{2} + \frac{3t^3}{3}\right]_2^5 = (10 + 25 + 125) - (4 + 4 + 8) = 160 - 16 = 144$$

Donc : $\boxed{\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)dt = 144}$

Exercice 28 : $\int_0^1 (t^3 + 1)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1dt}$

Solution

On a $\int_0^1 (t^3 + 1)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1dt}$

$$= \int_0^1 (t^3 + 1)\sqrt{(t^2 + 1)^2 dt}$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 1)(t^2 + 1)dt$$

$$= \int_0^1 (t^5 + t^3 + t^2 + 1)dt$$

$$= \left[\frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{21}{12}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \int_0^1 (t^3 + 1)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1dt} = \frac{21}{12}}$$

Exercice 29 : $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$

Solution

On a $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$

$$= \int_1^2 x^2(x^3 + 1)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (x^3 + 1)^1 (x^3 + 1)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[(x^3+1)^{-2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x^2+1)}\right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(\frac{1}{2})^3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}\right)$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$$

Donc : $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx = \frac{7}{54}$

Exercice 30 : $\int_1^{e^2} \frac{(lnx)^2}{x}dx$

Solution

On a $\int_1^{e^2} \frac{(lnx)^2}{x}dx$

$$= \int_1^{e^2} ln^2 x d lnx$$

$$= \left|\frac{ln^3 x}{3}\right|_1^{e^2}$$

$$= \frac{8}{3} - 0$$

$$= \frac{8}{3}$$

Donc : $\int_1^{e^2} \frac{(lnx)^2}{x}dx = \frac{8}{3}$

Les étudiants en Classe Préparatoire 2016-2017

Phnom Penh le 07 Février 2017