UNIVERSITÉ ROYALE DE
DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

Faculté de Sciences Économiques et de Gestion

AFFECTATION
DE LA RECHERCHE

Résumé de la Leçon

MATHÉMATIQUES

POUR L'ECONOMIE ET LA GESTION

Professeur Dr. NGANN SUNDET

Classe Préparatoire : Groupe 06

NITH Kosal   CHUM Veth   UNG Soksathremy

Mlle. SENG Sina   Mlle. SORN Tola   Mlle. PHANN Vannary

17 Mai 2017

AVANT-PROPOS

Résumé de Cours Mathématique

Université Royale de Droit et des Sciences Économiques. Faculté des Sciences Économiques et de Gestion.

Le présent ouvrage contient les notions mathématiques de base nécessaire à la compréhension et l'utilisation efficace des méthodes quantitatives appliquées aux domaines de l'économie et la gestion.

Merci Monsieur Professeur de responsable Dr. NGANN Sundet pour Affectation de la Recherche Mathématique.

Phnom Penh, 17 Mai 2017
Classe Préparatoire : Groupe 06
Année 2016 – 2017

Affectation de la Recherche Par :

NITH Kosal	CHUM Veth	UNG Soksathremy
Mlle. SENG Sina	Mlle. SORN Tola	Mlle. PHANN Vannary

Notes et Références

- Mathématique Appliqués, Dr. NGANN Sundet, 2012
- Mathématique pour économistes et gestionnaires, Dr. Louis ESCH, 4 Édition, 2010
- Lives de Note, Étudiant Groupe 6 Classe Préparatoire

SAMMAIRE

CHAPITRE I : AUTRE SUJET DANS L'INTÉGRATION

1.1. L'accroissement de Population

Définition

Le croissement de population est fonction de taux de natalité α et le taux de mortalité β de populations en t années $N(t)$

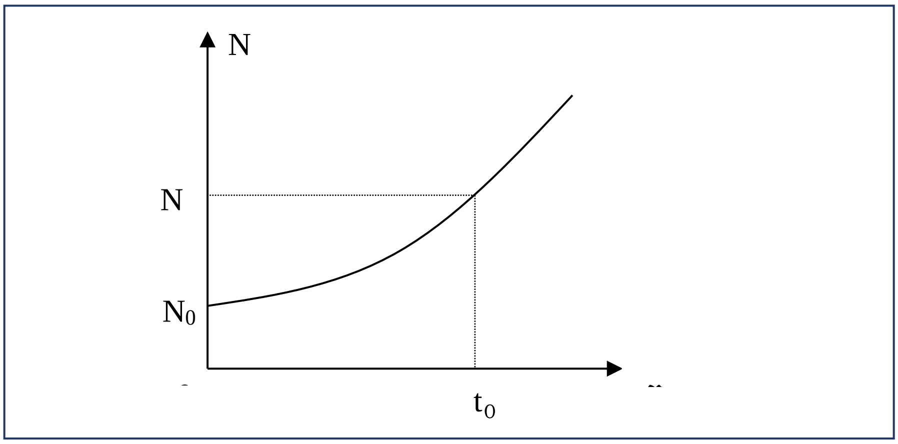


Figure 1.1. Fonction de taux de natalité α et le taux de mortalité β

Posons $N(t)$ Le nombre de population au temps t :
α Le taux de natalité
β Le taux de mortalité

- La variation de population au temps t :

$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta t} = N(\alpha - \beta)}$$

$\Rightarrow$ $N'(t) = N(\alpha - \beta)$ L'équation différentielle représente l'accroissement de population au temps t.

- L'expression $N(t)$:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{(\alpha-\beta)t} = N_0 e^{rt}}$$

Où $\alpha - \beta = r$

- Si $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \beta = r > 0$: La population est *croit*.
  On a l'expression $N(t) = N_0 e^{rt}$

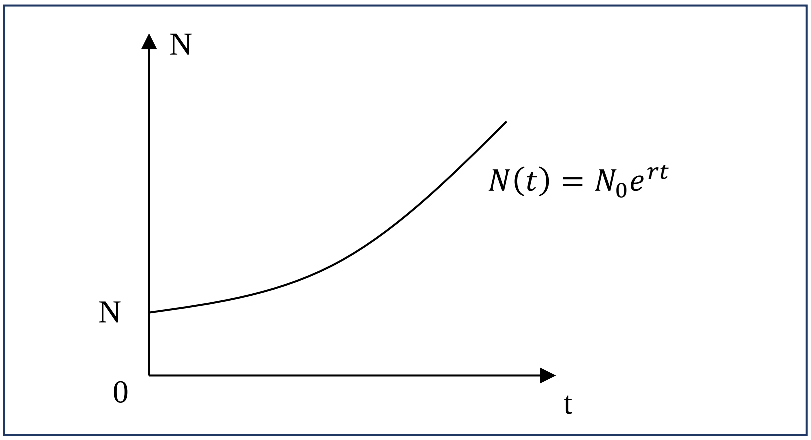


Figure 1.2. La population est crue

- Si $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta = r < 0$: La population est *décroit*.
  On a l'expression $N(t) = N_0 e^{-rt}$

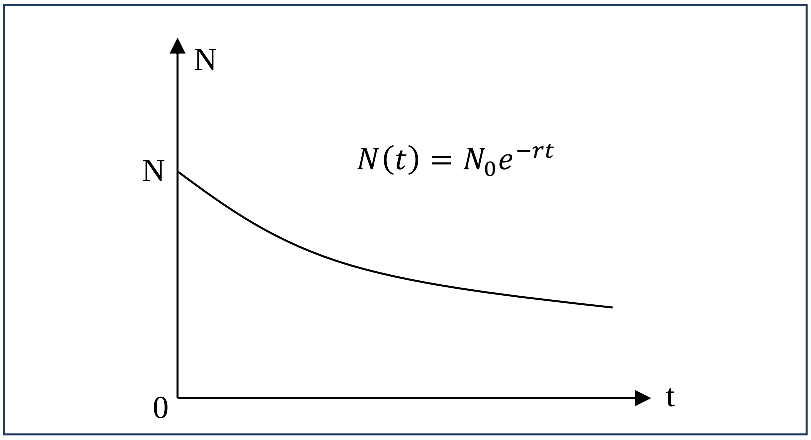


Figure 1.3. La population est décroit

- Si $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = r = 0$: La population est *stationnaire*.

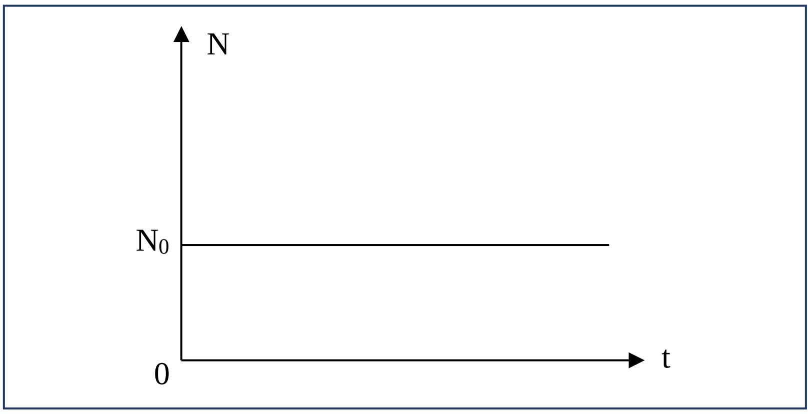


Figure 1.4. La population est stationnaire

1.2. L'Application en Économie

A. Le Surplus de Consommation

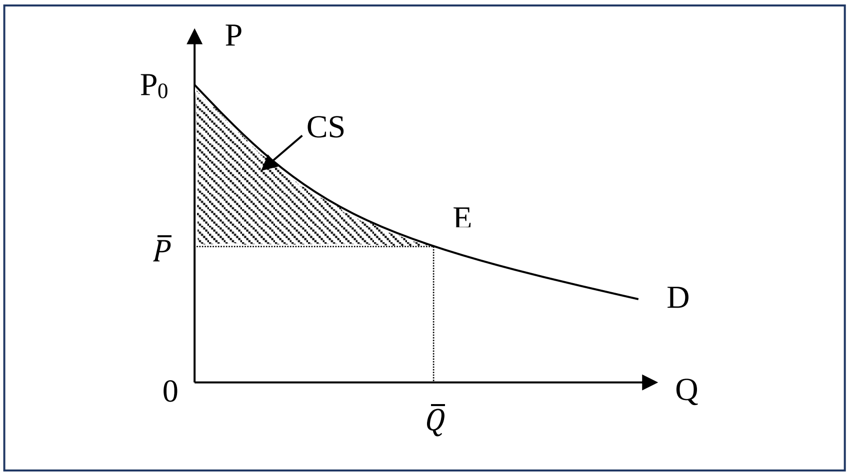


Figure 1.5. Le surplus de consommation

CS = Le projet payé – La dépense du marché

Sur le graphique, on a :

$$\text{Le projet payé} = S_{0\bar{P}E\bar{Q}} = \int_0^{\bar{Q}} D(Q)dQ$$

$$\text{La dépense du marché} = S_{0\bar{P}E\bar{Q}} = \bar{P}\bar{Q}$$

On a donc le surplus de consommateur :

$$CS = \int_0^{\bar{Q}} D(Q)dQ - \bar{P}\bar{Q}$$

B. Le Surplus de Production

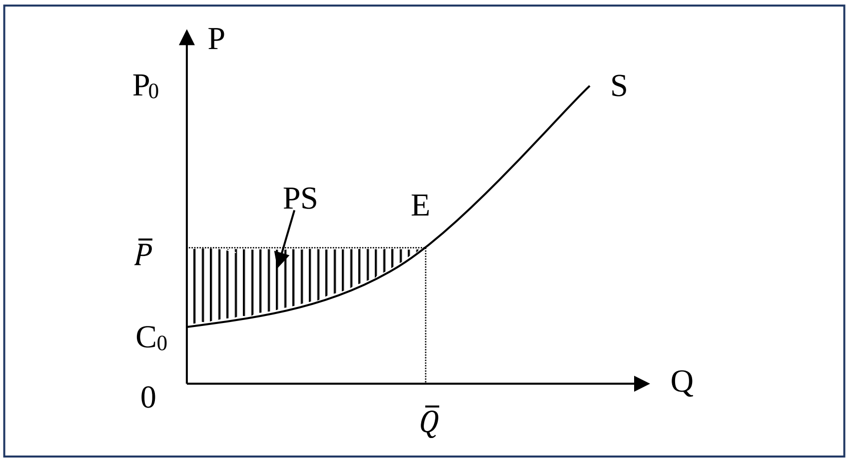


Figure 1.6. Le surplus de production

PS = Le revenu du marché – Le coût du marché

Sur le graphique, on a :

$$\text{Le revenu du marché} = S_{0\bar{P}E\bar{Q}} = \bar{P}\bar{Q}$$

$$\text{Le coût du marché} = S_{0C_0E\bar{Q}} = \int_0^{\bar{Q}} S(Q)dQ$$

On a donc le surplus de producteur :

$$PS = \bar{P}\bar{Q} - \int_0^{\bar{Q}} S(Q)dQ$$

C. Le Surplus Social

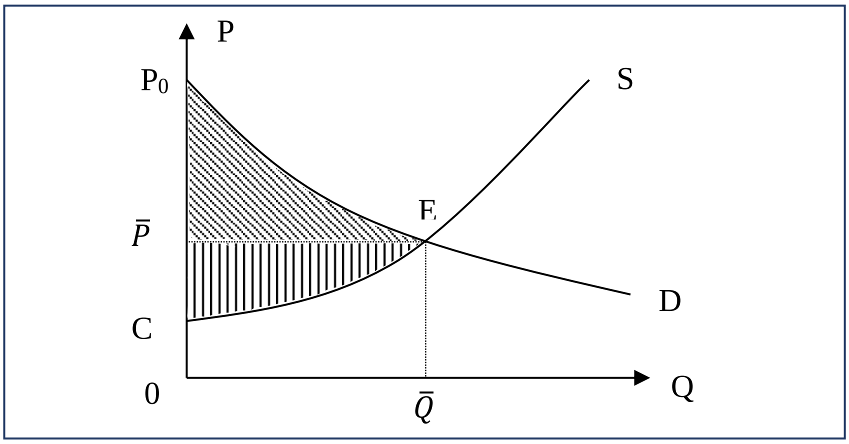


Figure 1.6. Le surplus social

On a donc le surplus social

$$SS = CS + PS$$

Où

$$SS = \int_0^{\bar{Q}} [D(Q) - S(Q)]dQ$$

CHAPITRE II : PROGRAMMATION LINÉAIRE

2.1. Présentation du Problème

Il existe de nombreuses situations en économie où on doit optimiser une fonction (minimiser un coût ou maximiser un profit par exemple) en choisissant judicieusement une combinaison de ressources (facteurs de production, durées, quantités, …) limitées. On parle, dans ce cas, de *Programmation mathématique,* si la fonction à optimiser et les relations limitatives des ressources sont linéaire, on parle de *Programmation Linéaire*.

Considérons donc une fonction de n variables à maximiser, qui soit linéaire :

$$Z(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Sachant que les variables $x_1, \dots, x_n$ ne peuvent pas prendre des valeurs négatives :

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Et doivent obéir à un certain nombre de relations linéaire d'inégalité :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

(Si des inégalités sont de sens inverse ≥, il suffit de changer le signe des deux membres).

La fonction Z porte le nom de *fonction objectif* ou *fonction économique*, et les inégalités sont les *contraintes* du problème.

Si on introduit les vecteurs C, X, B et la matrice A définis par :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Et si on introduit les inégalités au niveau des vecteurs par U ≤ V lorsque $u_i \leq v_i$; $\forall_i$, le problème de programmation linéaire peut s'exprimer comme suit[1] :

$$\boxed{Maximiser\ Z \leq C|X > sous\ contraintes\ X \geq 0, AX \leq B}$$

Exemple

Une entreprise fabrique deux produits *P_1* et *P_2*, qui lui rapportent un profit unitaire respectif de 5 et 7. La fabrication de ces produits nécessite trios matières premières *M_1, M_2,*

M_3 ; pour la production d'une unité de P_1 et d'une unité de P_2 les quantités de matières premières utilisées sont données dans le tableau suivant.

	M_1	M_2	M_3
P_1	2	3	1
P_2	5	2	4

Sachant que les stocks disponibles de M_1, M_2, et M_3 sont respectivement de 50, 42 et 36, quelle répartition de production doit-on adopter pour maximiser le profit réalisé ?

$$5x_1 + 7x_2$$

Les quantités de M_1, M_2, et M_3 utilisées seront :

$$2x_1 + 5x_2$$
$$3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + 4x_2$$

Et elles ne peuvent dépasser respectivement 50, 42 et 36. Le problème de programmation linéaire se pose donc comme suit :

$$\text{Maximiser} \quad Z = 5x_1 + 7x_2$$
$$\text{Sous contraintes} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 50$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 42$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 36$$

2.2. Aspects Géométriques

Envisageons tout d'abord les contraintes. Une équation linéaire des variables $x_1, \dots, x_n$ correspond à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. L'inéquation correspondante fournit un des deux demi-espaces limités par l'hyperplan. Par conséquent, chacune des contraintes définit un demi-espace et l'ensemble des contraintes prises simultanément limite $\mathbb{R}^n$ à un polyèdre. Il s'agit du *polyèdre des solutions réalisables* : c'est *convexe*, c'est-à-dire que s'il contient deux points, il contient tous les points du segment joignant ces deux points.

Pour la fonction objectif : $Z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

Lorsqu'on donne à Z toutes les valeurs réelles, on définit un jeu d'hyperplans parallèles. Le maximum de Z sera donc atteint lorsqu'un de ces hyperplans n'aura plus qu'un seul point en commun avec le polyèdre des solutions admissibles et qu'il sera le plus éloigné de l'origine.

Les résultats géométriques que nous venons de découvrir intuitivement peuvent se démontrer rigoureusement et s'expriment comme suit :

Proposition

Si le problème n'admet qu'une seule solution, elle correspond obligatoirement à un des sommets du polyèdre des contraintes. Si le problème admet plusieurs solutions, il s'agit nécessairement de tous les points d'une arête ou d'une facette du polyèdre des contraintes, y compris les sommets qui délimitent cette arête ou cette facette.

[1] S'il s'agit de minimiser Z, on traitera le problème de la maximisation de $-Z$.

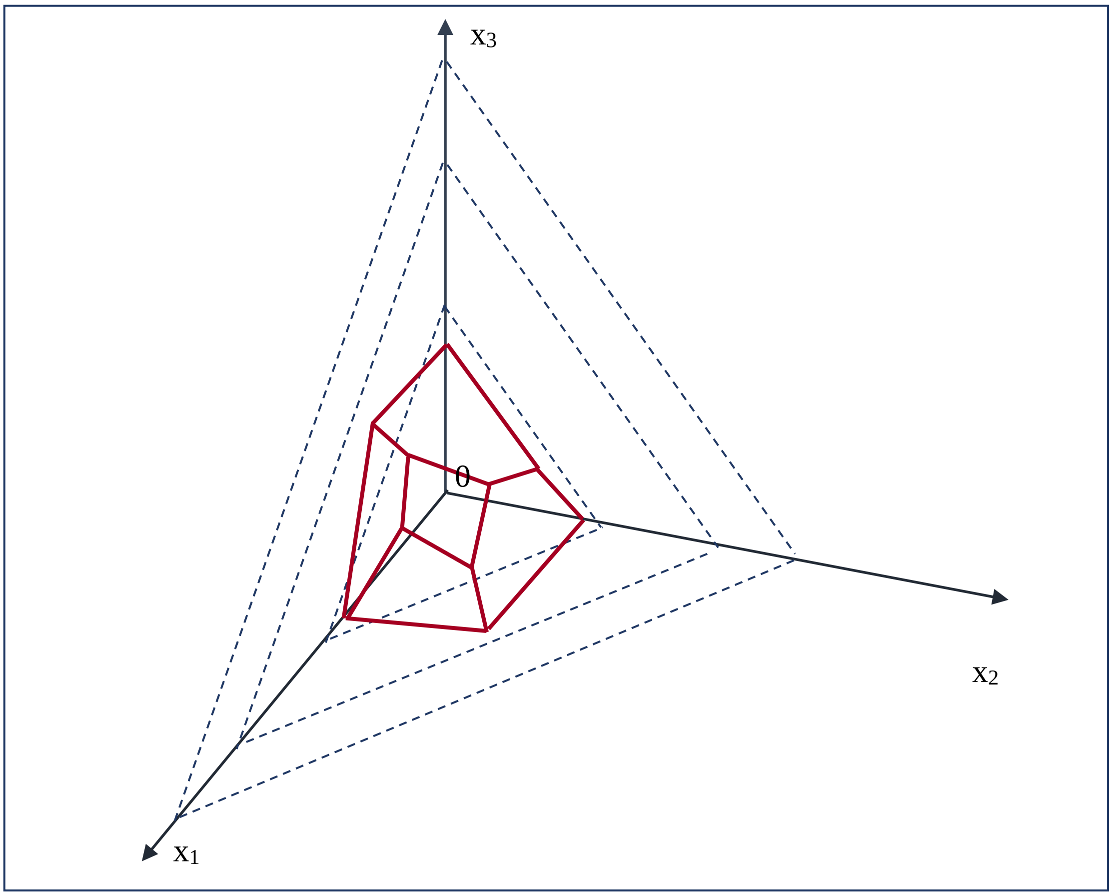


Figure 2.1. Programmation linéaire

Exemple

Reprenons l'exemple de la section précédente. Il nous permettra d'illustrer concrètement les raisonnements e les résultats ci-dessus.

Résolvons tout d'abord le système d'inéquation des contraintes :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 50 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 42 & (2) \\ x_1 + 4x_2 \leq 36 & (3) \end{cases}$$

Comme présenté à la section 1.3.4 (voir figure 2.2). La partie en grisé est le polygone des solutions admissibles.

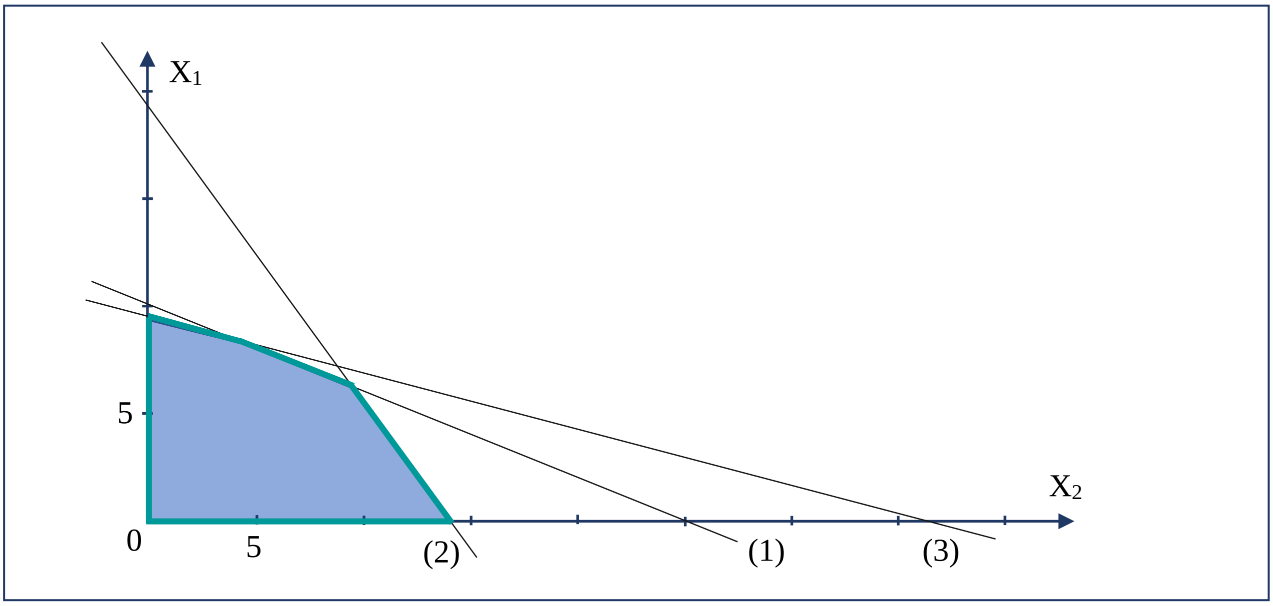


Figure 2.2. Polygone des contraintes

La fonction objectif définit, lorsqu'on donne à Z différents valeurs, un jeu de droites parallèles (voir figure 2.3.).

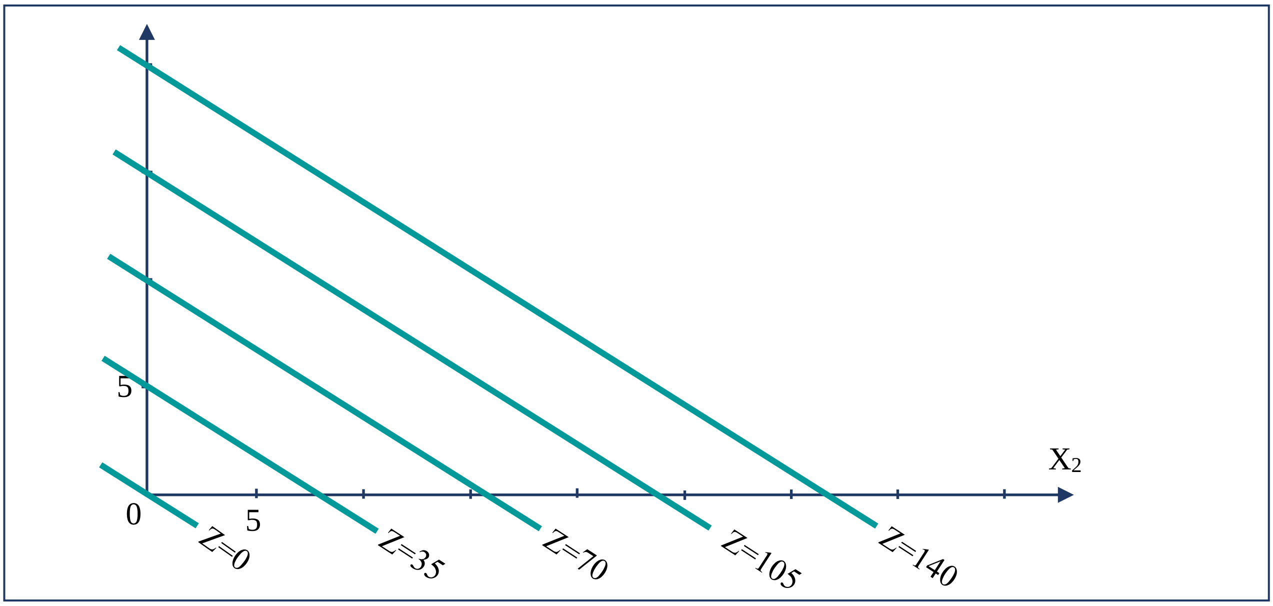


Figure 2.3. Fonction objectif

En superposant les deux graphiques on obtient la figure 2.4. La solution correspond bien à un sommet du polygone des solutions admissibles : c'est le sommet défini par :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 50 \\ 3x_1 + 2x_2 = 42 \end{cases}$$

C'est -à-dire $(x_1, x_2) = (10, 6)$ et le profit réalisé vaut :

$$5 \cdot 10 + 7 \cdot 6 = 92$$

Remarquons que les contraintes relatives à M_1 et M_2 sont saturées par la solution: la totalité des matières premières est utilisée, la contrainte relative à M_3 est, quant à elle, non saturée car on n'utilise que :

$$10 + 4 \cdot 6 = 34$$

Unités de matières premières M_3 alors que 36 étaient disponibles. Géométriquement, les contraintes saturées sont celles dont l'intersection fournit la solution et les non saturées celles pour lesquelles les arêtes (ou facettes) restent ce-deçà de la droite optimale.

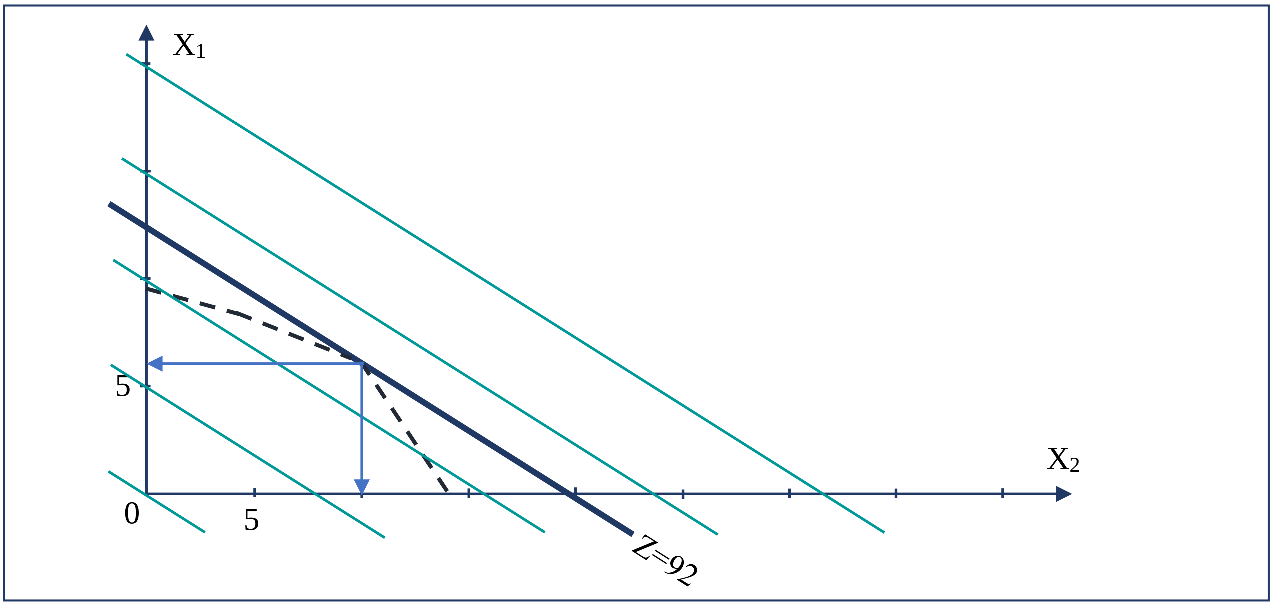


Figure 2.4. Problème de programmation linéaire

2.3. Résolution Analytique

La solution d'un programme linéaire se situant sur un sommet du polyèdre des contraintes, il suffit de passer en revue chacun de ces sommets et de voir la valeur qu'y prend la fonction objectif.

Dans $\mathbb{R}^n$, un sommet du polyèdre des solutions réalisables est l'intersection de n hyperplans. Comme il y a en tout $n + m$ contraintes (n de positivité et m inégalités), le nombre de sommets du polyèdre vaut au plus :

$$\binom{n+m}{n}$$

Et on doit donc résoudre autant de systèmes de n équations linéaire à n inconnues.

<u>Exemple</u>

Pour notre exemple, il faut envisager

$$\binom{2+3}{2} = 10$$

Systèmes d'équations linéaires :

a) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad (x_1, x_2) = (0,0)$

b) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 50 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (0{,}10)$

c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 42 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (0{,}21)$

d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 36 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (0{,}9)$

e) $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 50 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (25{,}0)$

f) $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 42 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (14{,}0)$

g) $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 36 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (36{,}0)$

h) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 50 \\ 3x_1 + 2x_2 = 42 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = (10{,}6)$

i) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 50 \\ x_1 + 4x_2 = 36 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{3}, \frac{22}{3}\right)$

j) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 50 \\ x_1 + 4x_2 = 36 \end{cases}$ $(x_1, x_2) = \left(\frac{48}{5}, \frac{33}{5}\right)$

Les seuls points satisfaisant à l'ensemble des contraintes (c'est-à-dire ceux du polygone des solutions réalisables) sont ceux des cas (a) (d) (f) (h) (i), pour lesquels la fonction économique prend les valeurs 0, 63, 70, 92, 254/3. Le maximum correspond donc au cas (h) et on retrouve :

$$(x_1, x_2) = (10{,}6) \qquad Z = 92$$

2.4. Méthode du Simplexe

La méthode de résolution présentée au paragraphe précédent devient rapidement très lourde lorsque le nombre de variables et/ou de contraintes augmente. Aussi, d'autres méthodes ont-elles été mises au point, dont la plus célèbre est *l'algorithme du simplexe* développé par DANTZIG.

Contrairement à la méthode présentée ci-avant, celle du simplexe n'envisage que des sommets effectifs du polyèdre des contraintes (c'est-à-dire des solution réalisables), et examine ceux-ci – à partir de l'origine par exemple – en suivant les arêtes et dans un ordre tel que, de pas en pas, la fonction objectif augment systématiquement. Le nombre d'espèces est donc, grâce à cette technique, considérablement réduit.

Nous allons présenter les principes de cet algorithme, sans toutefois être exhaustif quant aux différents cas d'espèces et particularité que l'on peut rencontrer.

Le problème de programmation linéaire :

$$\max Z \leq C|X >$$
$$s.c. X \geq 0, AX \leq B$$

Peut toujours s'écrire, quitte à augmenter le nombre de variables et de contraintes, sous *forme standard*, c'est-à-dire telle que les contraintes sont des égalités, sauf les contraintes de positivité (qui concernent toutes les variables) :

$$\max Z \leq C|X >$$
$$s.c. X \geq 0, AX = B$$

Il suffit en effet d'introduire une *variable d'écart* par contrainte. Ainsi, la $i^{ème}$ contrainte :

$$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$$

Sera remplacée par :

$$\left| \begin{array}{c} \sum_j a_{ij}x_j + S_i = b_i \\ S_i \geq 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des variables – celles du problème de départ (x_i) et celles d'écart (S_i) – sont, à chaque étape de l'algorithme, réparties en deux groupes : *m* variables dites *en base* et *n* variables dites *hors base*.

Au départ, il faut déterminer une *base initiale* à laquelle on puisse associer une solution réalisable. Pour ce faire, on applique la méthode d'élimination telle que présentée au paragraphe au système *AX=B* en prenant les variables en base comme pivotes. On en déduit est la solution de *base initiale* en donnant la valeur *0* aux variables hors base.

À partir de ce moment, on applique itérativement la procédure suivante :

a) Exprimer Z en fonction des variables hors base ;
b) Vérifier, en examinant le signe des différents coefficients du Z obtenu, s'il est possible d'améliorer (augmenter) la valeur de Z en faisant entrer en base une des variables qui ne l'était pas :
c) Si oui,
   - Choisir une des variables hors base améliorant la valeur de Z en entrant en base ;
   - Déterminer la variation maximale de cette variable tolérée par chacune des contraintes ;
   - Prendre comme variable sortant de base celle qui était pivot dans la contrainte la plus exigeante ;
d) Appliquer la méthode d'élimination au système en prenant, dans la contrainte la plus exigeant, la variable entrant en base comme pivot ;
e) En déduire une *solution de base courante* en annulant les variables hors base.

Si la réponse est non à la question posée au pas (b), la solution de base courante est une *solution optimale*.

Remarques

A. Il se peut qu'il n'existe pas de solution initiale de base ; le problème est alors impossible car le polyèdre des contraintes est vide.
B. Si, lors d'une étape, on constate que la variable entrant en base a un coefficient négatif ou nul dans toutes les contraintes, le problème est dit non borné : Z est améliorable à l'infini ;

C. Si, la solution optimale étant atteinte, faire entrer une variable en base garde à Z sa valeur optimale, le problème admet une infinité de solution optimales (arête ou facette du polyèdre) ;

D. Il se peut que l'algorithme « boucle «, c'est-à-dire soit entraîné à réaliser une infinité d'itérations. Il convient, dans ce cas, de modifier le choix de la variable entrant en base.

Exemple

Nous exemple peut se mettre sous la forme standard suivante :

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{S.C.} \quad \left| \begin{array}{c} 2x_1 + 5x_2 + s_1 = 50 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 42 \\ x_1 + 4x_2 + s_3 = 36 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

On peut répartir les variables en base et hors base comme suit :

$$B = \{s_1, s_2, s_3\} \qquad HB = \{x_1, x_2\}$$

Puisque le système est déjà sous la forme voulue et que la solution :

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0; 50, 42, 36)$$

Est réalisable : c'est la solution de base initiale. La fonction objectif est déjà sous la forme voulue ; elle est améliorable et on peut par exemple faire entre x_1 en base. Les contraintes sur x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} 5x_2 \leq 50 \\ 2x_2 \leq 42 \\ 4x_2 \leq 36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 9 \end{cases}$$

La troisième contrainte est la plus exigeante ; la variable pivot qui lui correspond est S_3 qui sort de la base. On a alors :

$$B = \{x_2, s_1, s_2\} \qquad HB = \{x_1, s_3\}$$

Le système des contraintes devient :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + s_1 - \frac{5}{4}s_3 = 5 \\ \frac{5}{2}x_1 + s_2 - \frac{1}{2}s_3 = 24 \\ \frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}s_3 = 9 \end{cases}$$

Et la deuxième solution de base est donnée par :

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 9; 5, 14, 0)$$

A l'aide de la troisième contrainte, on obtient :

$$Z = 5x_1 + 7(-\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_3 + 9) = \frac{13}{4}x_1 - \frac{7}{4}s_3 + 63$$

La fonction objectif est donc améliorable, en faisant entrer x_1 en base. Les contraintes sur x_1 s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 \leq \frac{20}{3} \\ x_1 \leq \frac{48}{5} \\ x_1 \leq 36 \end{cases}$$

La première contrainte est la plus exigeante ; la variable pivot qui lui correspond est s_1 qui sort de la base. On a alors :

$$B = \{x_1, x_2, s_2\} \qquad HB = \{s_1, s_3\}$$

Le système des contraintes devient :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{3}s_1 - \frac{5}{3}s_3 = \frac{20}{3} \\ -\frac{10}{3}x_1 + s_2 + \frac{11}{3}s_3 = \frac{22}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 = \frac{22}{3} \end{cases}$$

Qui conduit à la solution de base suivante :

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (\frac{20}{3}, \frac{22}{3}; 0, \frac{22}{3}, 0)$$

On peut réécrire la fonction objectif sous la forme :

$$Z = \frac{13}{4}(-\frac{4}{3}s_1 + \frac{5}{3}s_3 + \frac{20}{3}) - \frac{7}{4}s_3 + 63 = -\frac{13}{3}s_1 + \frac{11}{3}s_3 + \frac{254}{3}$$

Qui peut être améliorée en faisant entrer s_3 dans la base. Les contraintes sur s_3 s'écrivent :

$$\begin{cases} s_3 \geq -4 \\ s_3 \geq 2 \\ s_3 \geq 11 \end{cases}$$

La première inégalité n'apporte rien ; la plus exigence est la deuxième, ce qui conduit à sortir s_2 de la base :

$$B = \{x_1, x_2,\ s_3\} \qquad\qquad HB = \{s_1, s_2\}$$

Le système des contraintes devient :

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{11}s_1 + \frac{5}{11}s_2 = 10 \\ -\frac{10}{11}s_1 + \frac{3}{11}s_2 + s_3 += 2 \\ x_2 + \frac{3}{11}s_1 - \frac{2}{11}s_2 = 6 \end{cases}$$

Qui conduit à la solution de base suivante :

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (10, 6; 0, 0, 2)$$

On fonction objectif :

$$Z = -\frac{13}{3}x_1 + \frac{11}{3}(\frac{10}{11}s_1 - \frac{3}{11}s_2 + 2) + \frac{254}{3} = -s_1 - s_2 + 92$$

N'est plus améliorable (coefficients tous *<0*) et la solution du problème initial est donc $(x_1, x_2) = (10,6)\ avec\ Z = 92$.

Si on examine les solutions de base successives, on constate qu'il y a bien cheminement sur des sommets voisins : (0,0), $(0,9), \left(\frac{20}{3}, \frac{23}{3}\right) et\ (10,6)$. Notons que si, à la première modification de la base, on avait décidé de faire entre x_1 au lieu de x_2 , une itération dans l'algorithme aurait été épargnée.

CHAPITRE III : ÈQUATION DIFFÉRENTIELLE

3.1. Definition

L'équation différenciable est dite « l'équation différentielle »

3.2. Résoudre l'équation différentielle

A. L'équation différentielle sous forme $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \implies dy = g(x)dx$$

Transformer l'intégrale, on a donc :

$$\int dx = \int g(x)dx$$

$$\boxed{y = G(x) + c}$$

c : constant

$G(x)$: primitive de $g(x)$

Si est seulement si $G'(x) = g(x)$

B. L'équation différentielle séparable

La forme de celle équation est de $f(x)dx = g(y)dy$

Transformer l'intégrale $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

On a donc :

$$\boxed{F(x) = G(y) + c}$$

c : constante

$F(x)$ Et $G(y)$: les primitives respestivement de $f(x)$ et $g(y)$

3.3. L'Application en Économie

A. <u>La courbe d'apprentissage</u>

L'équation différentielle est de

$$\boxed{Q'(x) = k(B - Q)}$$

La courbe d'apprentisage est sous forme

$$\boxed{Q(t) = B - Ae^{-kt}}$$

k : constant (volume de proportionelle)

A & B : constant

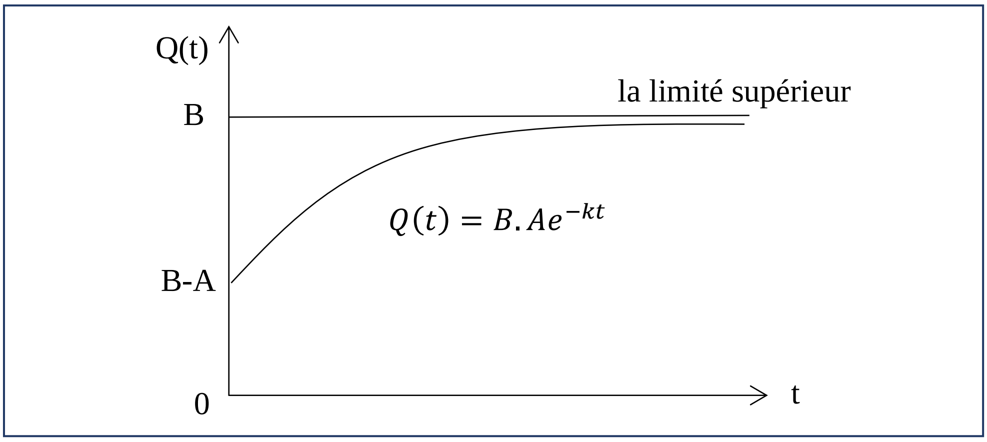


Figure 3.1. La courbe d'apprentissage

B. La courbe de logistique

L'équation différentielle représente l'accroissement en fonction du temps t :

$$\boxed{Q'(t) = KQ(B - Q)}$$

La courbe de logistique est sous forme :

$$\boxed{Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}}$$

A & B : constant

K : constant (volume de proportionnelle)

t : temps

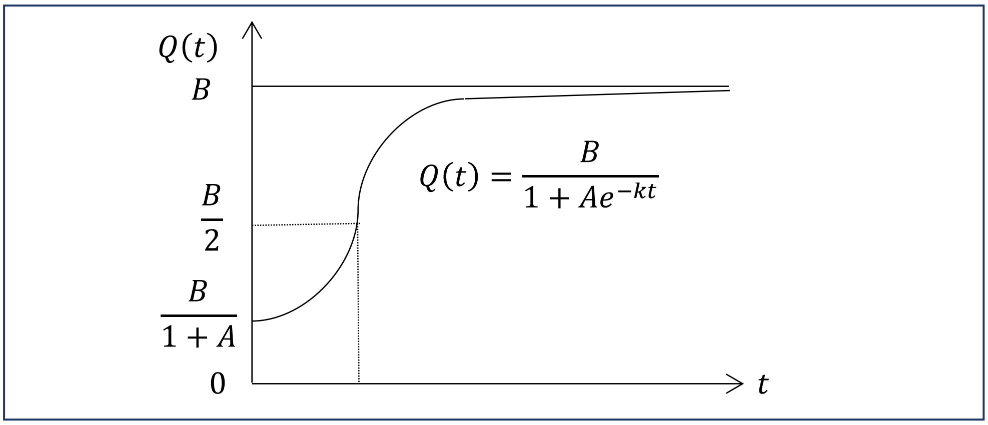


Figure 3.2. La courbe de logistique

C. Le modèle adjustement de prix

$D(P)$: Fonction de demande en temps t

$S(P)$: Fonction de l'offre en temps t

$P(t)$: Le prix unité au temps t quel conque

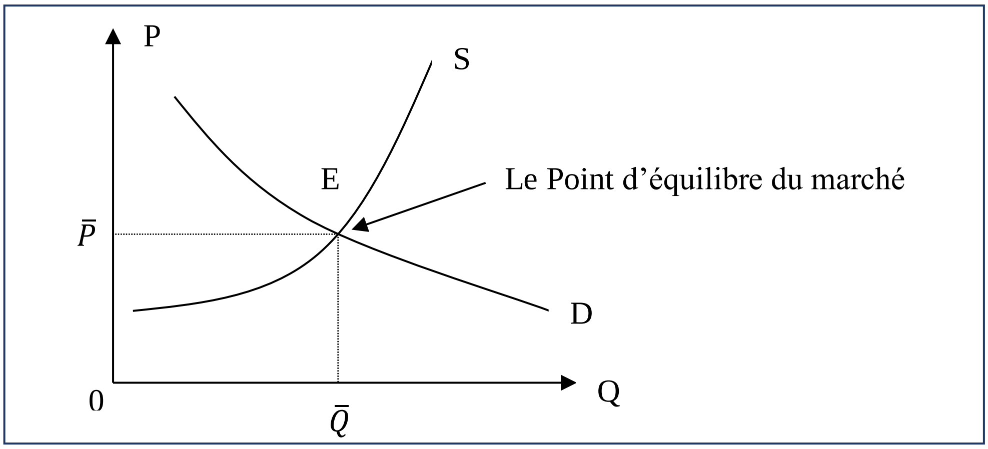


Figure 3.3. La modèle adjustement de prix

La différence entre l'offre et la demande de noté : $D(P) - S(P)$

- Si $D - S > 0$: la quantité de la demande est plus élevé que l'offre, le prix augmente
- Si $D - S < 0$: la quantité de l'offre est plus élevé que la demande, le prix diminue

L'équation différentielle dynamique de représenter la variation de prix au temps est de :

$$\boxed{P'(t) = k(D - s)}$$

D. L'équation différentielle linéaire ordre 1

La forme générale de l'équation différentielle linéaire ordre 1 de noté :

$$\boxed{y' + P(x)y = q(x)}$$

La solution générale est de noté

$$\boxed{y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)dx + c\right]}$$

c : constant

$I(x)$: fonction d'intégrale

où $I(x) = e^{\int P(x)dx}$

CHAPITRE IV : MATHÉMATIQUE FINANCIÈRE

4.1. Intérêt Simple

A. Définition

L'intérêt simple de capital Po est l'équivalant de produit le capital Po, le taux l'intérêt $i\%$ et le temps n. On note :

I : intérêt

$$\boxed{I = P_o rn}$$

n : jour

$r\% = \frac{r}{100}$; $1an = 360Jour = \frac{n}{360}an$

$\Rightarrow \quad I = P_o \frac{r}{100} \times \frac{n}{360}$

On a donc l'intérêt simple :

$$\boxed{I = \frac{P_o rn}{360}}$$

B. La valeur acquise (Future valeur : FV)

On a une valeur acquise (FV)

$$\boxed{FV = P_o + I}$$

$$\text{Ensuite} : I = \frac{P_o rn}{360}$$

$$\Rightarrow \quad FV = P_o + \frac{\mathrm{P_o rn}}{36000}$$

$$\boxed{FV = P_o\left(1 + \frac{rn}{36000}\right)}$$

$$1 + \frac{rn}{36000}$$

Est l'expression d'intérêt

C. La valeur actuelle (Présent valeur : PV)

La valeur acquise : $FV = P_o(1 + rn)$

Si le taux d'intérêt i % varie, on a une valeur actuelle (PV)

$$\boxed{PV = \frac{FV}{1 + rn}}$$

Exemple

Un investissement 15,000$ pendant 2an avec le taux d'intérêt 9% . Déterminer la valeur actuelle si le taux d'intérêt est de 8.5%.

Solution

La valeur acquise de l'investissement

$$FV = P_0(1 + rn) = 15000\times(1 + 1\times0.09) = 31350\$$$

On a la valeur actuelle de noté :

$$FV = \frac{FV}{1 + rn} = \frac{31350}{1 + 1\times0.09} = \frac{31350}{1\cdot09} = 28761.46\$$$

$$\boxed{FV = 28761.46\$}$$

4.2. Intérêt Composé

A. La valeur acquise

La formule de la valeur acquise d'intérêt composé de noté :

$$\boxed{C_n = FV = C_0(1 + i)^n}$$

- C_n : la valeur acquise
- C_0 : capital investie
- i : taux d'intérêt par an
- n : la période d'investie ≥12 mois
- $(1 + i)^n$: le facteur d'intérêt

B. La valeur actuelle (PV)

Si le taux d'accroissement i % varie, on a une valeur actuelle :

$$\boxed{PV = \frac{\mathrm{Cn}}{(1 + i)^n}}$$

L'annuité constante

Il y a deux méthodes à payer :

a) La fin de période
b) Le début de période

L'annuité constante à la fin de périodes

Posons :

- a : la somme constante à la fin de période
- i : taux d'intérêt annuel
- n : la période d'emprunt

- C_0 : capital investie

La somme de rembourser constante (la valeur acquise de l'emprunt) :

$$\boxed{FV = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

L'annuité constante à la fin de période est not :

$$\boxed{a = \frac{iFV}{(1+i)^n - 1}}$$

Ensuite : $$FV = C_0(1+i)^n$$

On a finalement :

$$\boxed{a = \frac{iC_0(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

EXERCICES

Exercice : 1

Supposons que le revenu de deux entreprises croit au type exponentiel. L'entreprise 1, le revenu total 2.35 million avec le taux d'accroissement 13.5% par an, L'entreprise2, le revenu total 3.25 millions avec le taux d'accroissement 9.35% par an, Combien de temps le revenu les deux entreprises sont égaux ?

Exercice : 2

Une fonction de demande de noté $p = \sqrt{49 - 6Q}$ et de l'offre de noté p=2Q+1. Calculer le surplus de consommateur, de producteur, et de surplus social.

Exercice : 3

Une usine fabrique deux types de jouets en bois : des soldats et des trains. Les données de ce problème sont représentées dans le tableau suivant :

	P. vente	Mat. prem.	Frais Gén.	Menuiserie	Finition
1 soldat	27DT	10DT	14DT	1h de travail	2h de travail
1 train	21DT	9DT	10DT	1h de travail	1h de travail

Par semaine l'usine dispose de toutes les matières premières nécessaires à la fabrication et ne dispose que de 100h de finition et 80h de menuiserie. La demande des trains et des soldats est illimitée. Déterminer le plan de production qui maximise le profit de l'usine.

Exercice : 4

Une petite entreprise de pétrole possède deux raffineries. Raffinerie 1 coûte 20 000 $ par jour pour fonctionner, et il peut produire 400 barils de pétrole de haute qualité et 200 barils de pétrole à faible teneur chaque jour. Raffinerie 2 est plus récente et plus moderne. Ça coûte 25 000 $ par jour pour fonctionner, et il peut produire 300 barils de pétrole de haute qualité et 500 barils de pétrole à faible teneur chaque jour.

La société a des commandes totalisant 25 000 barils de pétrole de haute qualité et 30 000 barils de pétrole à faible teneur.

Combien de jours faut-il exécuter chaque raffinerie de minimiser ses coûts et encore affiner suffisamment de pétrole pour répondre à ses ordres ?

Exercice : 5

Une industire s'entraine à fabrique les chaussures en supposant que la capacité du savoir-faire des ouvriers faire le progrés jour par jour est proportionnellement au travail restant. le premier jour, les ouvriers ont fabriqué 3 pair et 15 jour après ils ont fabriqué 5 pair par jour. le volume du travail qu'on peut faire au maximum dans un jour est de 10 pair.

Ecrivez l'équation différentielle décrivant le progrès de l'expérience professionnelle des ouvriver de cette industre.

Exercice : 6

Le nombre de bactére d'une culture passe de 600 à 1800 en 2h. En supposant que le taux de croissante est directement proportionel ou nombre de bactéries présente. On demande de trouver :

a) Une formule qui permet de calculer le nombre de bactérie au temps t
b) Le nombre de bactérie après 4h.

Exercice : 7

Un homme a un projet de retraite. Il aura reçu 3000$ par mois après l'âge 60 à 90 ans. Déterminer le constant mensuelle où il épargnera à la banque avec le taux annuelle 12.75%. S'il travaille depuis 25 âges.

Exercice : 8

On prévoit un investissement de 200,000R, la durée de vie de l'équipement étant de 3 ans. Les Cash-flow attendus sont de 30,000R pour la première année, de 70,000R pour la deuxième année, et de 50,000R pour la troisième année. On suppose que la résiduelle est 10,000R. Le taux interne d'investissement est de 8.75%.

Calculer le VAN et déterminer l'IP (l'indice de profitabilité).

SOLUTIONS

Exercice : 1 : Combien de temps le revenu les deux entreprises sont égaux ?

Au l'année n_0 , le revenu totale les deux entreprises sont égaux

$$R_1 . e^{\alpha . n} = R_2 . e^{\beta . n}$$

$$2.35 * e^{0.135n} = 3.25e^{0.0935n}$$

$$\frac{e^{0.135n}}{e^{0.0935n}} = \frac{3.25}{2.35}$$

$$e^{0.135n-0.0935n} = 1.38$$

$$e^{0.0415n} = 1.38$$

$$0.0415n = \ln|1.38|$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln|1.38|}{0.0415} = 7.76 \text{ ans}$$

Donc le revenu les deux entreprises sont égaux 7.76 ans

Exercice : 2 : Calculer le surplus de consommateur, de producteur, et de surplus social.

Selon d'équilibre entre l'offre et la demande

Demande = Offre

$$\sqrt{49-6Q} = 2Q+1$$

$$49-6Q = (2Q+1)^2$$

$$49-6Q = 4Q^2+4Q+1$$

$$4Q^2+10Q-48 = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{-10 \pm 22}{8} \begin{cases} Q_1 = 2.43 \\ Q_2 = -5 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 2 \times 2.43 + 1 = 5.86$$

- Calculer le surplus de consommateur

On a $SC = \int_0^2 \sqrt{49-6Q}\, dQ - 5.86 \times 2.43$

Posons $U = 49-6Q \Longrightarrow dU = -6dQ \Longrightarrow dQ = \frac{dU}{-6}$

$$\Rightarrow SC = \int_0^{2.43} (U)^{\frac{1}{2}} \frac{dU}{-6} - 14.23$$

$$\Rightarrow SC == \frac{1}{-6} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \left[U^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2.43} - 14.23 = \frac{-1}{9}\left[(49-6Q)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2.43} - 14.23$$

$$\Rightarrow SC = \frac{1}{-9}\left(34.42^{\frac{3}{2}} - 49^{\frac{3}{2}}\right) - 14.23 = \frac{1}{-9}(203-343) - 14.23 = 1.32$$

Donc le surplus de consommateur est 1.32 um

- Calculer le surplus de producteur

On a $SP = 14.23 - \int_0^{2.43} (2Q+1) dQ$

$\Rightarrow$ $SP = 14.23 - [\![Q^2]\!]_0^{2.43} = 14.23 - 2.43^2 = 8.32$

Donc le surplus de producteur est 8.32 um

- Calculer le surplus social

$SS = CS + SP = 1.32 + 8.32 = 9.64$

$\boxed{\text{Donc le surplus social est } 9.64\ um}$

Exercice : 3 : Déterminer le plan de production qui maximise le profit de l'usine

On note par :

x_1 : Le nombre de soldats produits chaque semaine

x_2 : Le nombre de trains produit chaque semaine

Donc on a :

Maximiser $P(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$

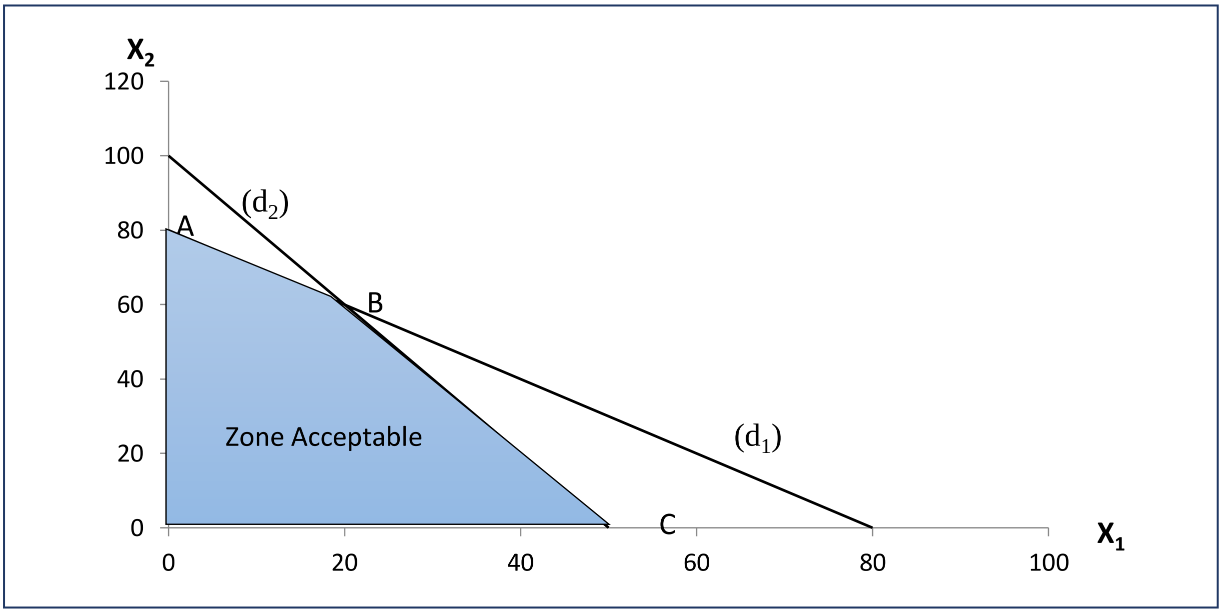
Sous contrainte $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 80 & (d_1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 100 & (d_2) \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$

(d_1)

x_1	0	80
x_2	80	0

(d_2)

x_1	0	50
x_2	100	0



<u>Représente graphique</u>

Sur le graphique, le polygone $0ABC$ es un ensemble acceptable de problème maximum.

Déterminer les coordonnés de sommés

Au point $B(0 ; 80)$

Au point $C(50; 0)$

$$A = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \end{cases} \Rightarrow A = (20; 60)$$

Le tableau d'estimation

Sommés	Coordonné		$P = 3x_1 + 2x_2$	Max
	x_1	x_2		
A	20	60	$(3\times20) + (2\times60) = 180$	180
B	0	80	$(3\times0) + (2\times80) = 160$	
C	50	0	$(3\times50) + (2\times0) = 150$	

On a finalement sur le tableau d'estimation le profit max $A(20; 60)$ avec le profit maximum $P_{max} = 180$

Exercice : 4 : Combien de jours faut-il exécuter chaque raffinerie de minimiser ses coûts et encore affiner suffisamment de pétrole pour répondre à ses ordres ?

On note par :

x_1 : Le nombre de jours de raffinerie 1

x_2 : Le nombre de jours de raffinerie 2

On a le coûte :

Minimiser $C(x, y) = 20000x_1 + 25000x_2$

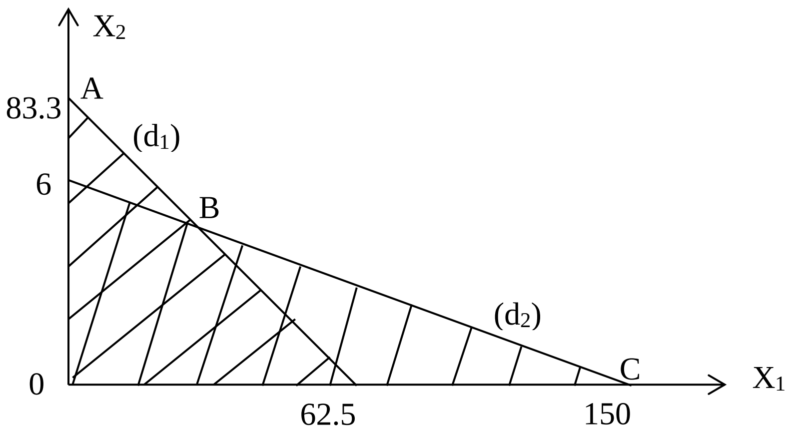
Sous contraintes
$$\begin{cases} 400x_1 + 300x_2 \geq 25000 & (d_1) \\ 200x_1 + 500x_2 \geq 30000 & (d_2) \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(d_1)

x_1	0	$\frac{125}{2}$
x_2	$\frac{250}{3}$	0

(d_2)

x_1	0	15
x_2	60	0



Déterminer les coordonnées de sommée

Au point $A\left(0\,;\frac{250}{3}\right)$

Au point $C(150{,}0)$

$$B=\begin{cases}4x_1+3x_2\geq 250\\2x_1+5x_2\geq 300\end{cases}\Rightarrow B(25\,,50)$$

Le tableau d'estimation

Sommés	Coordonnées		$C(x_1,x_2)=20000x_1+25000x_2$	Min
	x_1	x_2		
A	0	$\frac{250}{3}$	$(20000\times 0)+\left(25000\times\frac{250}{3}\right)=208333$	2083333
B	25	50	$(20000\times 25)+(25000\times 50)=1750000$	
C	150	0	$(150\times 20000)+(25000\times 0)=300000$	

On a finalement sur le tableau d'estimation le coût min $B(25,50)$ avec le coût 1 750 000$

Exercice : 5 : Ecrivez l'équation différentielle décrivant le progrès de l'expérience professionnelle des ouvriver de cette industre.

Poson $Q(t)$: la connaissance en temps t

B : volume de chaussures maximum

$B-Q$: débutant

Taux d'accroissement de connaissance est de :

$$\frac{\frac{dQ}{dt}}{B-Q}=k\iff\frac{dQ}{dt}=k(B-Q)$$

Utiliser l'équation différentielle séparable, on a

$$\int\frac{dQ}{B-Q}=\int kdt$$

$$-\ln(B-Q)=kt+c\quad,\quad c\text{: cts}$$

$$\ln(B-Q)=-kt+c$$

$$B-Q=e^{-kt-c}$$

$$Q(t)=B-e^{-kt}-e^{-c}$$

$$Q(t)=B-Ae^{-kt}\qquad\text{où}\quad A=e^{-c}>0$$

- $t=0\,,B=10\,,Q(0)=3$

  $\Rightarrow\quad 10-Ae^{-k*0}=3\qquad\Rightarrow\qquad A=7$

  $\Rightarrow\qquad Q(t)=10-7e^{-kt}$

- $t=15\,,Q(15)=5$

  $\Rightarrow\qquad 10-7e^{-415k}=5$

$$-7e^{-15k} = -5$$
$$e^{-15k} = 0.71$$
$$-15k = \ln(0.71)$$
$$k = 0.023$$
$$\Rightarrow \quad Q(t) = 10 - 7e^{-0.023t}$$

Donc l'équation différentielle est de $Q(t) = 10 - 7e^{-0.023t}$

Exercice : 6:

a) Une formule qui permet de calculer le nombre de bactérie au temps t

$Q(t)$ l'équation de taux de croissante au temps t

$\frac{Q'(t)}{Q} = k$; k : volume de proportion

$$\frac{\frac{dQ(t)}{d(t)}}{Q} = k \quad \Longrightarrow \frac{dQ}{Q} = kdt$$

Transformer l'intégrale, on a $\int \frac{dQ(t)}{Q} = \int kdt$

$$\ln|Q| = kt + c$$
$$e \ln|Q| = e^{kt+c} = e^{kt}.e^{c}$$
$$|Q| = Ae^{kt} \quad ; \ A = e^{c}$$
$$Q = Ae^{kt} \quad ; A > 0$$

- Si $t = 0, Q(0) = 600$

$$\Rightarrow Ae^{k*0} = 600$$
$$\Rightarrow \quad A = 600$$
$$\Longrightarrow \quad Q(t) = 600e^{kt}$$

- Si $t = 2, Q(2) = 1800$

$$\Rightarrow \quad 600e^{2k} = 1800$$
$$e^{2k} = 3$$
$$2k = \ln 3$$
$$k = \frac{\ln 3}{2} = 0.55$$

Donc le formule du nombre de bactérie au temps t est de $Q(t) = 600e^{0.55t}$

b) calculer le nombre de bactérie après 4h

On a $t = 4$

On obtiennet $Q(4) = 600e^{0.55*4} = 5415$

Donc le nombre de bactére après 4h est 5415

Exercice : 7 : Déterminer le constant mensuelle

$$FV = 3000 \times 12 \times 30 = 1080000\$$$

$$n = (60 - 25) \times 12 = 420 \text{ Mois}$$

$$i = \frac{0.1275}{12} = 0.0106 \text{ par mois}$$

On a donc :

$$a = \frac{i * FV}{(1+i)^n - 1} = \frac{0.0106 * 1080000}{(1+0.0106)^{420} - 1} = 138.2417\$$$

Donc le constant mensuel est de 138.2417 $

Exercice : 8 : Calculer le VAN et l'indice profitabilité

- Calculer le VAN

On a : $R_1 = 30\,000$; $i = 0{,}0875$

$R_2 = 70\,000$; $FV = 200\,000$

$R_3 = 50\,000$; $R_n = 10\,000$

On a donc

$$VAN = -k_0 + \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} + \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

$$= -200{,}000 + \frac{30{,}000}{(1.0875)} + \frac{70{,}000}{(1.0875)^2} + \frac{50{,}000}{(1.0875)^3} + \frac{10{,}000}{(1.0875)^3}$$

$$= -66573.728$$

Donc la valeur actuelle net est de -66573.728

- Déterminer l'IP

$$IP = \frac{VAN + k_0}{k_0}$$

$$IP = \frac{-66573.728 + 200000}{200000} = 0.6671$$

Donc l'indice profitabilité est de 0.6671