

# Rešavanje problema p-hab medijane neograničenih kapaciteta

Petar Košanin

Septembar 2019.

# 1 Uvod

Mreže sa habovima su široko rasprostranjene u modernim transportnim i telekomunikacionim sistemima. Umesto korišćenja direktne veze izvor-destinacija, protok se uspostavlja preko habova. Protok od izvora se šalje do prvog haba, zatim se transportuje između habova, i konačno do cilja. Manja cena transporta između habova utiče na ukupno smanjenje cene protoka. Problem koji nastaje je izbor habova, kao i način povezivanja ostalih čvorova mreže sa njima.

U zavisnosti kako povezujemo ne-habove sa habovima, postoji više tipova hab lokacijskih problema. U slučaju da je broj habova fiksni, to je p-hab lokacijski problem. Svaki ne-hab može biti povezan sa jednim ili više habova, pa razlikujemo p-hab lokacijski problem sa jednostrukom ili višestrukom alokacijom. Dodatno, mogu postojati različita ograničenja kapaciteta habova.

U ovom radu biće razmatran problem p-hab medijan neograničenog kapaciteta sa jednostrukom vezom (USApHMP). Svaki čvor u mreži je povezan sa tačno jednim habom i sav protok iz tog čvora ide preko dodeljenog haba. Broj habova je fiksni ( $p$ ) i ne postoje dodatna ograničenja kapaciteta. USApHMP pripada klasi NP-teških problema (Kratka, Stanimirović, Tošić, & Filipović, 2007).

## 2 Matematička formulacija problema

Koristimo formulaciju zadatu u (Kratice et al., 2007). Promenljiva  $H_{ij} \in \{0, 1\}$  ima vrednos 1 ako je čvor  $i$  povezan sa habom  $j$ , 0 inače.  $H_{kk} = 1$  implicira da je čvor  $k$  hab.

Cilj USApHMP problema je određivanje tačno  $p$  habova i minimizovanje ukupne cene transporta. To zapisujemo kao:

$$\min \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l W_{ij} (\chi C_{ik} H_{ik} + \alpha C_{kl} H_{kl} + \delta C_{lj} H_{lj}) \quad (1)$$

uz ograničenja:

$$\sum_k^n H_{kk} = p \quad (2)$$

$$\sum_k^n H_{ik} = 1, \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$H_{ik} < H_{kk}, \forall i, k = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$H_{ik} \in \{0, 1\}, \forall i, k = 1, \dots, n \quad (5)$$

Ciljna funkcija (1) minimizuje sumu transporta izvor-hab, hab-hab i hab-cilj pomnožene sa faktorima  $\chi, \delta$  koji predstavljaju cene sakupljanja i distribucije transporta, dok  $\alpha$  predstavlja popust transporta između habova. Ograničenje (2) obezbedjuje alociranje tačno  $p$  habova, ograničenja (3) i (5) obezbedjuju da su ne-hab čvorovi povezani sa tačno jednim habom. Ograničenje (4) obezbedjuje da se transport vrši isključivo preko habova.

## 3 Genetski Algoritam

Genetski Algoritam (u daljem tekstu GA) je metaheuristika zasnovana na prirodnoj evoluciji koji ima široku primenu za rešavanje NP-teških problema. Osnovna struktura GA je **populacija** jedinki. Svakoј jedinki je pridružena **funkcija prilagodjenosti** (eng. fitness function). Iz jedne populacije, kroz proces **selekcije**, biraju se jedinke koje će učestvovati u stvaranju nove populacije, tj učestvovati u **reprodukciji**. Sa ciljem da se izbegnu lokalni ekstremumi, GA koristi operator **mutacije**, gde se određenom verovatnoćom menja sadržaj jedinke (uglavnom je verovatnoća mutacije mala, npr. 0.05).

### 3.1 Reprezentacija jedinki

Genetski kod jedinke sastoji se od  $n$  gena, po jedan za svaki čvor u mreži. Gen se sastoji iz 2 bita, gde prvi bit uzima vrednost 1 u slučaju da je taj čvor hab, a drugi bit indeks haba sa kojim je povezan (koristi se pomocni niz dužine  $p$  koji sadrži habove; ovaj niz je sortiran u rastućem poretku) (Kratice et al., 2007). U koliko prvi bit ima vrednost 1, drugi bit se ignoriše.

Primer genetskog koda:

00|10|10|10|02

Na ovom primeru vidimo da je broj čvorova  $n = 5$  i broj habova  $p = 3$ . Čvorovi 2, 3, 4 predstavljaju habove, a na osnovu drugog bita ne-habova, vidimo da je čvor 1 povezan sa 2, a čvor 5 povezan sa 4.

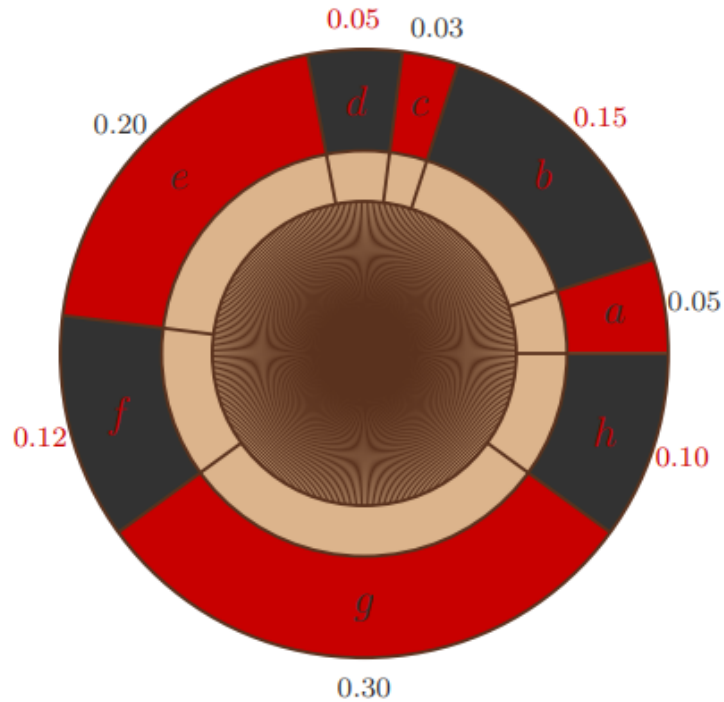
### 3.2 Selekcija

Za selekciju jedinki koje će učestvovati u fazi reprodukcije, koristi se ruletska selekcija (Janičić, 2019). Ako je  $f(i)$  funkcija prilagođenosti jedinke a  $N$  ukupan broj jedinki, tada je verovatnoća da će  $i$  biti izabrana da učestvuje u reprodukciji:

$$p_i = \frac{f(i)}{\sum_j^N f(j)} \quad (6)$$

Slika 1 predstavlja vizuelni prikaz ruletske selekcije (Janičić, 2019). Izbor  $n$  jedinki bi bilo analogno igranju  $n$  partija ruleta. Zbog uticaja poretka jedinki u populaciji na ruletsku selekciju, poredak jedinki se povremeno nasumično reorganizuje.

Korišćen je i elitizam, odnosno najboljih 100 jedinki biva prenešeno u narednu generaciju.



Slika 1: Ruletska selekcija

### 3.3 Reprodukција

Nakon izbora dva roditelja, nad njima primenjujemo operator ukrštanja. Standardni pristup jednopozicionog ukrštanja veoma lako može proizvesti nepravilne jedinke, tj. jedinke sa ukupnim brojem jedinica na prvom bitu različitim od  $p$ . Zbog toga, biće korišćen operator ukrštanja predložen u (Stanimirović, 2008). Modifikovana verzija uključuje istovremeno prolaženje sa leve ka desnoj, i desne ka levoj strani genetskog koda. Kretanjem sa desne ka levoj strani genetskog koda, ukoliko na poziciji  $j$ , roditelj1 ima vrednost na prvom bitu 1, a roditelj2 ima vrednost na prvom bitu 0, tada im zamenjujemo ceo gen. Analogno sa leve strane. U koliko na poziciji  $i$  roditelj1 ima vrednost na prvom bitu 0, roditelj2 ima vrednost na prvom bitu 1, tada im zamenjujemo ceo gen. Proces ponavljamo sve dok  $i \leq j$ . Na slici 2 prikazan je postupak ukrštanja (Stanimirović, 2008).

```

parent1: 001100110101 ---> 001100110101 --->
parent2: 011110100001      011110100001
                        ->j i<-

011100110001 ---> 011100110001 ---> 011101100001 offspring1
001101000101      001101000101      001100010101 offspring2
j          i          ->j i<-          j i

```

Slika 2: Operator ukrštanja

### 3.4 Mutacija

Operator mutacije se primenjuje nakon ukrštanja. To je operator koji sa malom verovatnoćom menja jedinku. U ovom radu, operator mutacije radi tako što sa verovatnoćom 0.05 menja ne-habove, povezujući ih sa neki drugim nasumično odabranim habom.

### 3.5 Ostali aspekti genetskog algoritma

Inicijalna populacija nastaje generisanjem 150 nasumičnih jedinki. Prilikom stvaranja inicijalnih jedinki, nakon uspostavljanja habova, ne-habovi se povezuju sa njima najbližim habovima (Kratice et al., 2007).

Najboljih 100 jedinki se kopira u novu populaciju.

## 4 Rezultati

Opisani GA je implementiran u programskom jeziku C++(17).

Za testiranje algoritma korišćen je CAB (Civil Aeronautics Board) skup podataka. Skup podataka se sastoji od 25 čvorova(do 4 haba). Cena sakupljanja i distribucije transporta su  $\chi = \delta = 1$ , dok  $\alpha$  uzima vrednosti od 0.2 do 1.

Maksimalan broj iteracija je 500, veličina populacije je 150, a verovatnoća mutacije je 0.05. U selekciji učestvuju sve jedinke. U slučaju da se najbolje rešenje ne menja u više od 200 generacija, proces se zaustavlja. Rezultati su prikazani na tabeli 1.

n	p	alpha	best
20	2	0.2	184382
20	2	0.4	200540
20	2	0.6	212234
20	2	0.8	222394
20	2	1	229359
25	2	0.2	328511
25	2	0.4	351185
25	2	0.6	373006
25	2	0.8	400290
25	2	1	414192
20	3	0.2	141785
20	3	0.4	153263
20	3	0.6	166070
20	3	0.8	186024
20	3	1	171984
25	3	0.2	254219
25	3	0.4	291539
25	3	0.6	315426
25	3	0.8	332488
25	3	1	345962
20	4	0.2	113780
20	4	0.4	129563
20	4	0.6	147657
20	4	0.8	164812
20	4	1	166048
25	4	0.2	215564
25	4	0.4	251923
25	4	0.6	272010
25	4	0.8	305854
25	4	1	322176

Tabela 1: Rezultati nad CAB instancama

## 5 Zaključak

U ovom radu prikazan je genetski algoritam za rešavanje p-hab median problema neograničenog kapaciteta. Inicijalna populacija je generisana nasumično, pri čemu su ne-hab čvorovi povezivani sa njima najbližim habovima. Genetski operatori su konstruisani tako da održavaju validnost jednog rešenja(jedinke), a u slučaju da to nije moguće, vršena je korekcija. Korišćen je elitizam pri konstrukciji nove generacije, kao i ruletska selekcija za izbor jedinki za reprodukciju.

Za budući rad, u planu je unapredjivanje vremena potrebno za izvršavanje paralelizacijom određenih operatora(eng. Master-slave parallelisation) kao i korišćenje paralelnog genetskog algoritma sa više populacija i sa operatorom migracije(Nowostawski & Poli, 1999).



## Literatura

- Janičić, P. (2019). *Veštačka inteligencija*.
- Kratica, J., Stanimirović, Z., Tošić, D., & Filipović, V. (2007). Two genetic algorithms for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 182(1), 15–28.
- Nowostawski, M., & Poli, R. (1999). Parallel genetic algorithm taxonomy. In *1999 third international conference on knowledge-based intelligent information engineering systems. proceedings (cat. no. 99th8410)* (pp. 88–92).
- Stanimirović, Z. (2008). An efficient genetic algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *Control & Cybernetics*, 37(3).