02_ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Математическое введение

Вспомним операторный метод записи, который понадобится для описания полей.

Оператор Набла

Векторный дифференциальный оператор (оператор Гамильтона) в декартовых координатах:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

С его помощью вводятся основные дифференциальные характеристики полей:

- **Градиент** (применяется к скалярному полю f, результат — вектор):

  $$\nabla f = \mathrm{grad}\, f$$

  Вектор градиента указывает направление наискорейшего роста функции.
- **Дивергенция** (применяется к векторному полю $\vec{v}$, результат — скаляр):

  $$\nabla \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\, \vec{v}$$

  Характеризует мощность источников поля в точке (поток вектора через бесконечно малую замкнутую поверхность).
- **Ротор** (применяется к векторному полю $\vec{v}$, результат — вектор):

  $$\nabla \times \vec{v} = \mathrm{rot}\, \vec{v}$$

  Характеризует «завихренность» поля в точке (циркуляцию вектора по бесконечно малому контуру).

Интегральные теоремы

Для перехода от локальных свойств в точке к свойствам всего объема используются две фундаментальные теоремы векторного анализа:

- **Теорема Остроградского-Гаусса:** Поток вектора через замкнутую поверхность S равен интегралу от его дивергенции по объему V, ограниченному этой поверхностью.

  $$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{v})\, dV$$

- **Теорема Стокса:** Циркуляция вектора по замкнутому контуру L равна потоку его ротора через поверхность S, натянутую на этот контур.

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{v})\, d\vec{S}$$

---

2. Электростатическое поле в вакууме

Теорема Гаусса в интегральной форме

Основной закон электростатики экспериментально устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля $\vec{E}$ и зарядами, создающими это поле. Поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную $\mathcal{E}_0$:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Если заряды распределены в пространстве непрерывно, то для описания такого распределения вводят понятие **объемной плотности заряда** ρ:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Тогда суммарный заряд внутри объема выражается интегралом:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \int_V \rho\, dV$$

Подставляя это выражение в теорему Гаусса, получаем интегральную форму для непрерывного распределения заряда:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \int_V \rho\, dV$$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Интегральная форма справедлива для любого объема, но она не дает информации о свойствах поля в конкретной точке. Чтобы получить локальное (дифференциальное) уравнение, применим к левой части теорему Остроградского-Гаусса:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E})\, dV = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \int_V \rho\, dV$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любого произвольного объема V, то равны и подынтегральные выражения. Отсюда получаем теорему Гаусса в дифференциальной форме (первое уравнение Максвелла для электростатики):

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\mathcal{E}_0}} \quad \text{или} \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\mathcal{E}_0}}$$

Физический смысл: Это уравнение говорит о том, что источниками электрического поля являются электрические заряды. Дивергенция поля в данной точке пропорциональна плотности заряда в этой точке. Там, где $\rho > 0$, линии поля начинаются (исток), а где $\rho < 0$ — заканчиваются (сток).

---

3. Работа и консервативность электростатического поля

Работа сил поля по перемещению заряда

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении пробного точечного заряда $+q$ из точки 1 в точку 2, вычисляется как криволинейный интеграл:

$$A_{1\to2} = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Эта работа также может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{1\to2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

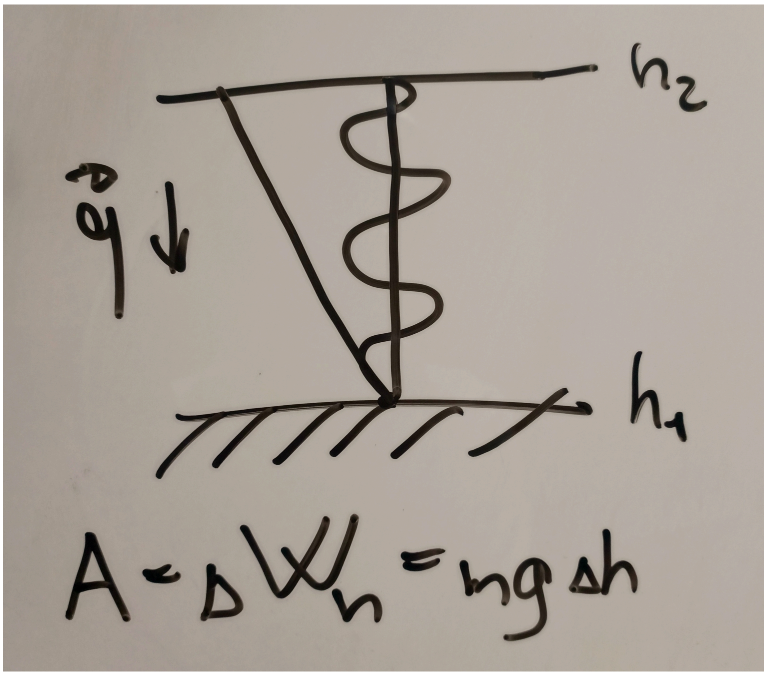
Приравнивая оба выражения и сокращая заряд q, получаем связь напряжённости поля с потенциалом:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Консервативный (потенциальный) характер поля

Опыт показывает, что работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением заряда. Это означает, что электростатическое поле является **консервативным**, подобно гравитационному полю.

Аналогия: Работа по подъёму груза массой m на высоту Δh равна $mg\Delta h$ и не зависит от того, поднимали мы его вертикально или по длинной наклонной плоскости — важна только разница высот. Если груз вернуть в исходную точку, полная работа будет равна нулю.



IMG_20260205_200032_730 1.jpg

Циркуляция вектора напряженности

Из независимости работы от пути вытекает, что работа по любому замкнутому контуру равна нулю. Интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией** вектора. Таким образом, циркуляция вектора напряжённости электростатического поля равна нулю:

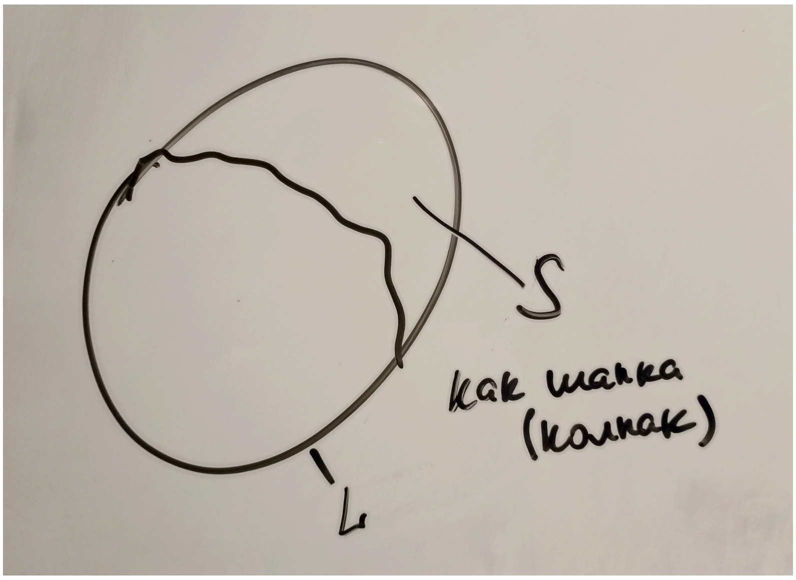
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

В сокращённой форме это записывают как:

$$\Gamma_{\vec{E}} = 0$$

Ротор электростатического поля. Условие потенциальности

Чтобы получить дифференциальную форму этого условия, применим к циркуляции **теорему Стокса**. Рассмотрим произвольную поверхность S, опирающуюся на замкнутый контур L (как «шапка» на контур). Согласно теореме Стокса:



IMG_20260205_195852_592 1.jpg

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

Левая часть равна нулю для любого контура, следовательно, и правая часть должна быть равна нулю для любой поверхности S:

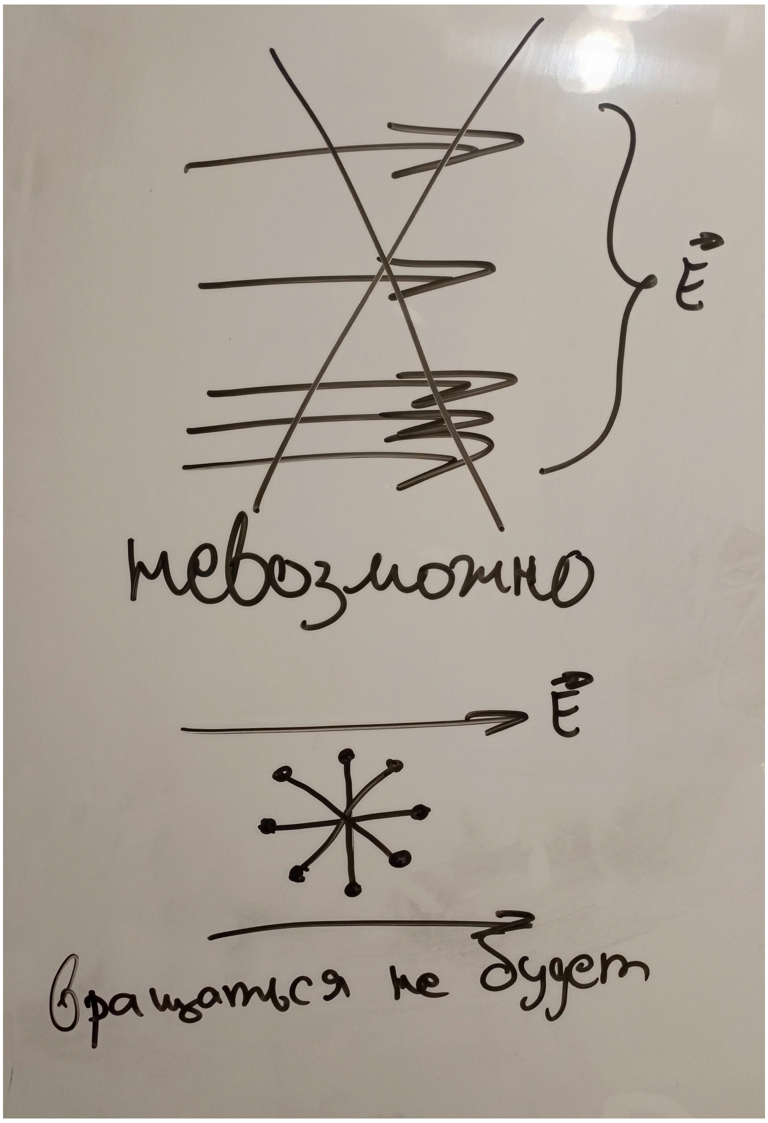
$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение тождественно равно нулю:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0}$$

Вывод: Электростатическое поле является **безвихревым (потенциальным)**. Силовые линии такого поля не могут быть замкнутыми; они всегда начинаются и заканчиваются на зарядах (или уходят в бесконечность).

Практическое следствие: Из-за отсутствия вихря невозможно создать вечный двигатель, работающий только за счёт электростатического поля. Поле не может совершать положительную работу при циклическом движении заряда — оно не способно «крутить» заряд по замкнутому контуру без подвода энергии извне.



IMG_20260205_200327_715 1.jpg

---

4. Диэлектрики в электростатическом поле

Диэлектрики (изоляторы) — это вещества, которые практически не проводят электрический ток, ~~так как в них нет свободных электрических зарядов~~, способных перемещаться на макроскопические расстояния. Идеальных диэлектриков в природе нет.

Вакуум – это среда (или её отсутствие), в которой молекула может пролететь от одной стенки сосуда до другой, не сталкиваясь с другими молекулами. ~~В электродинамике вакуум рассматривается как простейшая модель среды, где нет вещества, способного проводить ток или поляризоваться (хотя само понятие поляризации к вакууму не применяется).~~ Идеальных диэлектриков в природе не существует~~, вакуум – предельный случай~~.