02_ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Математическое введение (Повторение)

Операции с оператором Набла (∇)

1. Градиент (применение к скалярной функции f):

$$\nabla f = \mathrm{grad}\ f$$

Результат: Вектор. Характеризует направление наибыстрейшего роста.

2. Дивергенция (скалярное произведение с вектором $\vec{v}$):

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = \mathrm{div}\ \vec{v}$$

Результат: Скаляр. Удельная мощность источника (исток/сток).

3. Ротор (векторное произведение с вектором $\vec{v}$):

$$[\nabla \times \vec{v}] = \mathrm{rot}\ \vec{v}$$

Результат: Вектор, совпадающий с компонентами ротора. Характеризует завихренность.

Основные интегральные теоремы

Теорема Остроградского-Гаусса (переход от потока к объёму):

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}_{\mathrm{div}\ \vec{v}} dV$$

Теорема Стокса (переход от циркуляции к потоку ротора):

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \underbrace{[\nabla \times \vec{v}]}_{\mathrm{rot}\ \vec{v}} \cdot d\vec{S}$$

> *Примечание:* Поверхность S не замкнута — «опирается» на контур L, как шапка (колпак).

---

2. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

2.1. Интегральная форма

Поток вектора напряжённости $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

2.2. Учёт объёмной плотности заряда

Если заряд распределён непрерывно, вводим ρ — объёмную плотность:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \Rightarrow \quad \sum q_i = \int_V \rho\, dV$$

Тогда:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

2.3. Дифференциальная форма (через теорему Остроградского-Гаусса)

Применим теорему О-Г к левой части:

$$\int_V \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{\mathrm{div}\,\vec{E}} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

Объём произволен, значит, равны подынтегральные выражения:

$$\boxed{\underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{\mathrm{div}\,\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

> 💡 **Физический смысл:**
> Дивергенция — **удельная мощность источника** в данной точке.
>
> - $\rho > 0$ — **исток** (линии выходят).
> - $\rho < 0$ — **сток** (линии входят).
>   **Заряды являются источниками электростатического поля.**

---

3. Работа и потенциал

Работа по перемещению пробного заряда $+q$ из точки 1 в точку 2:

$$A_{1\to 2} = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

С другой стороны, работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{1\to 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Приравнивая и сокращая q:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

---

4. Циркуляция и ротор электростатического поля

4.1. Консервативность поля

Электростатическое поле консервативно (как и гравитационное).
Работа по замкнутому контуру равна нулю → **циркуляция равна нулю**:

$$\Gamma_{\vec{E}} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

> 💡 **Аналогия лектора:**
> Работа по подъёму стула с 1-го на 5-й этаж зависит только от Δh, а не от траектории. Если вернуть стул обратно — суммарная работа ноль.

4.2. Ротор поля

Возьмём некоторую поверхность, которая опирается на контур L.
(Сюда вставить фото поверхности, опирающейся на контур)

Применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \underbrace{[\nabla \times \vec{E}]}_{\text{rot } \vec{E}} \cdot d\vec{S} = 0$$

Так как поверхность произвольна, подынтегральное выражение равно нулю:

$$\boxed{\underbrace{[\nabla \times \vec{E}]}_{\text{rot } \vec{E}} = 0}$$

> 💡 **Вывод:**
>
> - Электростатическое поле — **безвихревое (потенциальное)**.
> - Невозможно построить **вечный двигатель** на чисто электростатическом поле — оно не может поддерживать вращение (для этого нужно магнитное поле).

---

5. Связь напряжённости и потенциала

Этого не было на лекции

Из условия $\text{rot } \vec{E} = 0$ следует, что $\vec{E}$ можно выразить через градиент скалярного потенциала:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Знак «минус»: вектор $\vec{E}$ направлен в сторону **убывания** потенциала.

---

6. Диэлектрики в электростатическом поле

Диэлектрики (изоляторы) — вещества, **не способные проводить электрический ток**.

> 💡 *Примечание лектора:* Идеальных диэлектриков в природе не существует.

Вакуум — состояние, когда в сосуде молекула летит от стенки до другой стенки и **не встречает других молекул**.

Итог: основные уравнения электростатики (вакуум, дифф. форма)

1. **Теорема Гаусса (источники):**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. **Теорема о циркуляции (потенциальность):**

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$