02_ЭЛЕКТРОСТАТИКА

02_ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПОНЯТИЯ

---

1. ПОВТОРЕНИЕ: ОПЕРАТОР НАБЛА (∇)

Векторный дифференциальный оператор (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Градиент

$$\nabla f = \operatorname{grad} f$$

- Применяется к **скалярному** полю.
- Показывает направление наискорейшего роста функции.
- Модуль равен скорости изменения в этом направлении.

Результат – вектор.

Дивергенция

$$\nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v}$$

- Применяется к **векторному** полю.
- Удельная мощность источника в точке:
  - > 0 — линии выходят (исток);
  - < 0 — линии входят (сток);
  - $= 0$ — нет источников/стоков.

Результат – число.

Ротор

$$\nabla \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

- Применяется к **векторному** полю.
- Характеризует завихренность (локальное вращение).

- Направлен вдоль оси вращения, модуль пропорционален угловой скорости.

Результат – вектор.

Две основные теоремы (математика)

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV$$

Связь потока через замкнутую поверхность с объёмным интегралом от дивергенции.

Теорема Стокса

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

Связь циркуляции по контуру с потоком ротора через натянутую поверхность.

---

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

2.1. Теорема Гаусса (интегральная форма)

Поток вектора напряжённости $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри, делённой на ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

2.2. Объёмная плотность заряда

Если заряд распределён непрерывно:

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \qquad \sum q_i = \int_V \rho \, dV$$

Тогда теорема Гаусса принимает вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

2.3. Дифференциальная форма. Уравнение Пуассона для $\vec{E}$

Применим теорему Остроградского-Гаусса к левой части:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

Равенство выполняется для любого объёма, следовательно, равны подынтегральные выражения:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{или} \qquad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Физический смысл (из лекции):
Дивергенция $\vec{E}$ в точке – удельная мощность источника.
Заряды – истоки электростатического поля.
$\rho > 0$ – линии $\vec{E}$ начинаются, $\rho < 0$ – заканчиваются.

2.4. Работа и потенциал

Работа по перемещению пробного заряда $+q$ в поле $\vec{E}$ из точки 1 в точку 2:

$$A_{1\to 2} = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

С другой стороны, работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Сокращая q, получаем связь напряжённости и потенциала:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

- φ – **скалярный потенциал** (энергетическая характеристика поля).
- $\vec{E}$ – силовая характеристика.

2.5. Циркуляция. Консервативность

Для замкнутого контура работа равна нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Это **циркуляция вектора** $\vec{E}$.

> 💡 **Пояснение:**
> Электростатическое поле – **потенциальное** (как гравитационное).
> Работа не зависит от траектории, определяется только разностью потенциалов.

2.6. Ротор электростатического поля. Безвихревой характер

По теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Поверхность S произвольна, поэтому в каждой точке:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \qquad \text{или} \qquad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$$

Вывод:

- Электростатическое поле **безвихревое** (потенциальное).
- Невозможно создать вечный двигатель на основе чисто электростатического поля – поле не способно поддерживать вращение заряда по замкнутому контуру без затрат энергии извне.

2.7. Связь напряжённости и потенциала

Из условия $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ следует существование скалярного потенциала φ, такого что:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Знак «минус»: вектор $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала.

> 💡 **Примечание:**
> В лекции данная формула не выводилась и не записывалась; добавлена для полноты изложения.

---

3. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Материал из заключительной части лекции.

Диэлектрики (изоляторы) – вещества, не способные проводить электрический ток.

Идеальных диэлектриков в природе не существует.

Вакуум – частный случай среды, в которой молекула (или атом) пролетает от стенки до стенки сосуда, не сталкиваясь с другими молекулами.
В контексте электростатики вакуум рассматривается как идеальная среда без поляризации.

ИТОГ: два фундаментальных уравнения электростатики в вакууме (дифференциальная форма)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{источники поля (теорема Гаусса)} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \ - \text{безвихревой характер (потенциальность)} \end{cases}$$