2023 年线性代数期末模拟卷

选择题

1. a 与 b 是两个不同的非零向量，则下列命题正确的是（　　）。

   A. $[a,b]$ 表示一个向量　　B. $[a,b] \le \|a\|\|b\|$

   C. $[a,b]$ 表示一个正实数　　D. $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$

2. 若矩阵 A 与 B 相似，则下列结论可能错误的是（　　）。

   A. A 与 B 对应于相同的特征值，它们的特征向量相同

   B. A^2 与 B^2 相似

   C. A 与 B 相似于同一矩阵

   D. $|A| = |B|$

3. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 0、1、2，则下列结论不正确的是（　　）。

   A. A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价

   B. 存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   C. A 是不可逆矩阵

   D. 以 0、1、2 为特征值的 3 阶矩阵都与 A 相似

4. 以下关于正定矩阵叙述正确的是（　　）。

A. 正定矩阵的乘积一定是正定矩阵　B. 正定矩阵的行列式一定小于零

C. 正定矩阵的行列式一定大于零　D. 正定矩阵的差一定是正定矩阵

5. 若 A 为 n 阶正定矩阵，则 A 与 A^{-1} 必定（　　）。

A. 相似　B. 合同

C. 有相同的特征值　D. 正交相似

6. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（　　　）.

A. $(A^{-1})^2$　B. $2A$　C. A^5　D. A^*

7. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ 与 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 之和等于（　　　）.

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

8. 实二次型的秩与符号差（即正负惯性指数之差）的和为（　　　）.

A. 负数　B. 零　C. 奇数　D. 偶数

9. . 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，且 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，则当（　　）时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

A. $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　D. $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$

10. n 阶实对称矩阵 **A** 正定的充要条件是（　　）。

A. R(**A**)=n　B. **A** 的所有特征值非负

C. $\mathbf{A}^{-1}$ 正定　D. **A** 的主对角线元素都大于零

填空题

1. 设 $\|\alpha\|=2$，$\|\beta\|=3$，则 $[\alpha+\beta,\alpha-\beta]=$________。

2. 若 R^3的一组基为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,-1)^T$，则向量 $\beta=(1,2,1)^T$ 在此基下的坐标是________。

3. 设$\boldsymbol{\alpha}=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})^T$，$\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{1},\mathbf{0},\boldsymbol{k})^T$，若矩阵$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{k}$ =__________。

4. 设3阶方阵A的3个特征值为0、0、1，那么行列式$|2A+E|=$________________

计算题

1. （15分）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix}$，问

（1）当$\boldsymbol{t}$为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

（2）当$\boldsymbol{t}$为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（3）当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关时，将$\alpha_3$表示为$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

2. （8分）设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

3. （10 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+(m+2)x_3+4x_4=n+2, \\ 3x_1+5x_2+x_3+(m+8)x_4=5. \end{cases}$$

讨论当 m,n 为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解。

4. （10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 1、2、5，求正的常数 a 的值及可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$。

5. （15 分）请利用正交变换化将如下二次型转换为标准型。

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$

证明题

1. 设 A 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|=-1$，证明：$-E-A$不可逆。
2. 设矩阵 A 为 n 阶正定矩阵，证明：$|A+E|>1$。
3. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为三阶方阵 A 的三个不同的特征值，相应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.
4. 设 n 阶矩阵 $A\neq 0$，$A^k=0$（k 为正整数），证明 A 不能相似于对角矩阵.
5. 设 U 为可逆实矩阵，$A=U^TU$，证明 $f=X^TAX$ 是正定二次型.
6. （5 分）证明：设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i\ (1\le i\le n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$$

7. （5 分）如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩 $R(A)$ 等于矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩 $R(C)$，即 $R(A)=R(C)$。那么该线性方程组有解。

8. 设矩阵 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $\mathbf{A}^3-6\mathbf{A}^2+11\mathbf{A}-6\mathbf{E}=\mathbf{0}$，证明 A 是正定矩阵。

【注意】题目中 n 阶改为 3 阶。

9. 已知A，B是 n 阶矩阵且A可逆，证明AB和BA有相同的特征值。