# 厦门大学《 线性代数 》课程试卷

信息 学院＿＿＿＿＿系 2019 年级 计算机类 专业

学年学期： 191901 主考教师： 线性代数教研组 A 卷( √) B 卷()

**注：$A^T$ 表示矩阵 $A$ 的转置矩阵，$A^*$ 表示矩阵 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 是单位矩阵，$|A|$ 表示方阵 $A$ 的行列式，$R(A)$ 表示矩阵 $A$ 的秩**

## 一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 齐次线性方程组

未知数 = 自由变量 + 非自由变量

n　　n-1　　1

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

$r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = 1$

的基础解系中含有 $n$-1 个解向量（其中 $a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,\ i = 1,2,\cdots,n$）的充要条件是（ D ）。

（A） $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$　　（B） $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$

（C） $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$　　（D） $\dfrac{a_i}{b_i} = m \neq 0,\ i = 1,2,\cdots,n$

2. 设 $A$、$B$ 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（ A ）。 AB=C

（A）$A$ 的列向量组线性相关，$B$ 的行向量组线性相关　　C行 ~ B行

（B）$A$ 的列向量组线性相关，$B$ 的列向量组线性相关　　C列 ~ A列

（C）$A$ 的行向量组线性相关，$B$ 的行向量组线性相关　$A \sim (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$　AB=C

（D）$A$ 的行向量组线性相关，$B$ 的列向量组线性相关　$B \sim \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \end{pmatrix}$ 至少1个不为0

$b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 \cdots + b_{n1}\alpha_n = 0$

3. 若 $A$ 为 4 阶非零矩阵，其伴随矩阵 $A^*$ 的秩 $R(A^*) = 0$，则 $R(A)$ 等于（ A ）。$b_{11} \cdots b_{n1}$ 至少1个不为0 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$

（A）1 或 2　　（B）1 或 3　　（C）2 或 3　　（D）3 或 4

非 $A$ ~ $A$. n-1 阶 3　　~~X~~ 1 2

4. 设向量组 $\alpha,\beta,\gamma$ 及数 $k,l,m$ 满足：$k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ 且 $km \neq 0$，则（ B ）。

（A）$\alpha,\beta$ 与 $\alpha,\gamma$ 等价　　（B）$\alpha,\beta$ 与 $\beta,\gamma$ 等价

（C）$\alpha,\gamma$ 与 $\beta,\gamma$ 等价　　（D）$\alpha$ 与 $\gamma$ 等价

$\alpha = -\frac{1}{k}(l\beta + m\gamma) \Rightarrow$ $\beta$ $\alpha$ 可由 $\beta$ $\gamma$ 线性表示　　$\alpha\beta \longleftrightarrow \beta\gamma$

$\gamma = -\frac{1}{m}(k\alpha + l\beta) \longrightarrow$ $\beta$ $\gamma$ 可由 $\alpha$ $\beta$ 线性表示

特征值 特征多项式
行列式相
迹

$\begin{cases} 10x-4y=-2 \\ 10x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-12 \end{cases}$

5. 若$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ y & x \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$相似，则（ D ）。

（A）$x=1,\ y=3$ （B）$x=3,\ y=8$

（C）$x=2,\ y=5.5$ （D）$x=-5,\ y=-12$

$A^TA=E \rightarrow |A|^2=E$

6. 设 $A$ 是正交矩阵，则下列结论错误的是（ B ）。

（A）$|A|^2$ 必为 1 ✓ （B）$|A|$ 必为 1 $-1$

（C）$A^{-1}=A^T$ （D）$A$ 的行（列）向量组是正交单位向量组

7. 设 $A$ 是一个 $n$（$n\geqslant 3$）阶方阵，下列陈述中正确的是（ B ）。

（A）若存在数 $\lambda$ 和向量 $\alpha$ 使 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $\alpha$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量 $\neq 0$

（B）若存在数 $\lambda$ 和非零向量 $\alpha$，使 $(\lambda E\text{-}A)\alpha=0$，则 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值

不同特征值特征向量线性无关

（C）$A$ 的 2 个不同的特征值可以有同一个特征向量

与 A对称矩阵 不同特征值 特征向量正交

（D）若 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 是 $A$ 的 3 个互不相同的特征值，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 依次是 $A$ 的属于 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 的特征向量，则 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 有可能线性相关 X

8. 已知三阶矩阵 $A$ 的特征值为 0、±1，则下列结论中不正确的是（ C ）。 C. 正交 A对称矩阵

（A）矩阵 $A$ 是不可逆的 ✓

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

（B）矩阵 $A$ 的主对角线元素之和为 0 迹 $a_{11}+a_{22}\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_n$

（C）1 和 -1 所对应的特征向量正交 $\lambda$

（D）$Ax=0$ 的基础解系由一个向量构成

2个非自由 1个自

9. 设 $A$ 是 3 阶实对称矩阵，$E$ 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 $x^TAx$ 的规范形为（ C ）。

正负惯性系数

$\lambda^2+\lambda=2$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ ①

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$ $\lambda_3=-2$ ②

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$ （B）$y_1^2+y_2^2\text{-}y_3^2$

（C）$y_1^2\text{-}y_2^2\text{-}y_3^2$ （D）$\text{-}y_1^2\text{-}y_2^2\text{-}y_3^2$

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A$ 与 $B$（ B ）。

合同 惯性系数相同 ✓ 特征值正负

相似 ~~特征值~~相同

正 2 负 0 2

1 1 0. 1

A. $|A+\lambda E|=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=\lambda_3=3$. 正2 负0.

（A）合同且相似　　　　　　　　（B）合同但不相似

（C）不合同但相似　　　　　　　（D）既不合同，也不相似

## 二、　填空题（每题 3 分，共 15 分）

$D=|A|\sim|\lambda|=0$. 0.

1. 已知三阶不可逆矩阵 $A$ 满足 $|A+E|=0$ 和 $|2A-E|=0$，则 $A$ 的所有特征值为 $\underline{0, -1, \frac{1}{2}}$。

$-1$ $\frac{1}{2}$

2. 已知 2 为矩阵 $A$ 的一个特征值，$B=A^2-A-2E$，则 $A^{-1}$、$A^T$、$B$ 的一个特征值分别为_______。 0 $\frac{1}{2}$ 2.

$2^2-2-2$. $2^{-1}$ 2.

0

3. 已知 $\alpha=(1\quad 3\quad 2)^T$ 和 $\beta=(5\quad 1\quad b)^T$ 是实对称矩阵 $A$ 的分别属于不同特征值的特征向量，则 $b=\underline{-4}$。

$5+3+2b=0$ 正交.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&a-9\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$4\times 3$ $3\times 4$

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&6&a\\4&8&12\end{pmatrix}$，$B$ 为 $3\times 4$ 矩阵，且 $AB=0$，$B\neq 0$，则 $a=\underline{9}$。

$r(A)+r(B)\leq 3$.

$a=9$. $r(A)=2$ $1\leq r(B)\leq 1$,

$a\neq 9$ $r(A)=3$ $1\leq r(B)\leq 0$. X.

5. 已 知 二 次 型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_1x_2+x_2^2+x_3^2$ 正 定， 则 $t$ 的 取 值 范 围为________________。

主子式 均 >0.

$$\begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}&0\\\frac{t}{2}&1&0\\0&0&1\end{vmatrix},\quad 1,\quad 1-\left(\frac{t}{2}\right)^2>0.\quad 1-\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

$t\in(-2,2)$

## 三、　计算题（共 50 分）

1. （12 分）已知 $R^3$ 的两组基

$$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\quad \alpha_2=(2,1,1)^T,\quad \alpha_3=(1,1,1)^T$$

$$\beta_1=(0,1,1)^T,\quad \beta_2=(-1,1,0)^T,\quad \beta_3=(1,2,1)^T$$

1) $\boxed{C=A^{-1}B}$

2) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\gamma$

（1）求由基 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 到 $\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$ 的过渡矩阵；（6 分）

2). 过渡矩阵

（2）求 $\gamma=(9,6,5)^T$ 在这两组基下的坐标；（6 分）

2.（10 分） 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 有三个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

（1）证明 $R(A)=2$；（5 分）

（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。（5 分）

1). $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$   $A \rightarrow \Lambda.$ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{bmatrix}$,

$|A|=0$

$R(A)=2$.

2). ① $Ax=0$ 通解   $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$. $\leftarrow$

② $Ax=\beta$ 特解   $r(A)=2$,   $3-2=1$   $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta$.

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$,   $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3.（15 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(\boxed{A^TA})x$ 的秩为 2，

（1）求实数 $a$ 的值（提示：$\boxed{R(A^TA)=R(A)}$）（3 分）

（2）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f$ 化为标准型。（12 分）

$r(A)=2$.   $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a+1\\ 0 & a+1 & 0\end{bmatrix}$.

$a=-1$.

1). 1) 特征值   $|A-\lambda E|=0$   $\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots$.

2) 特征向量   $(A-\lambda E)x=0$.

3). 正交化 ——— . A对称矩阵. — 不同特征值特征向量正交

单位化

4). Q

4.（13 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程的一个解，试求：

（1）方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；（10 分）

（2）该方程满足 $x_2=x_3$ 的全部解。（3 分）

1). 解代入. $\lambda=\mu$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right)$$

① $\lambda=\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta.$$

② $\lambda\neq\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right) (2\lambda-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \sim$$

特 $\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\eta^* = k_1 \xi_1 + \eta .$$

(2) $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{cases} x_2 = -3k_1 - k_2 + 1 \\ x_3 = k_1 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k_2 = -4k_1 + 1.}$$

① $\lambda \neq \frac{1}{2}$

（1）证明 $\mathrm{R}(A)=2$；（5 分）

（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。（5 分）

3.（15 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2，

（1）求实数 $\alpha$ 的值（提示：$R(A^TA)=R(A)$）（3 分）

（2）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f$ 化为标准型。（12 分）

4.（13 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程的一个解，试求：

（1）方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；（10 分）

（2）该方程满足 $x_2=x_3$ 的全部解。（3 分）

## 四、 证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $R^3$ 的一个基，证明：向量组 $\beta_1=2\alpha_1+k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$ 也是 $R^3$ 的一个基。

2. 设 $A$ 为行满秩的 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$B=AA^T$ 是正定矩阵。

3. 设 $A_{m\times n}$ 的 $m$ 个行向量是某个 $n$ 元齐次线性方程组的一组基础解系，又 $B$ 为 $m$ 阶可逆方阵，证明 $BA$ 的行向量也构成该齐次线性方程组的一组基础解系。

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $R^3$ 的一个基，证明：向量组 $\beta_1=2\alpha_1+\cancel{k\alpha_3}$ $2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$ 也是 $R^3$ 的一个基。

2. 设 $A$ 为行满秩的 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$B=AA^T$ 是正定矩阵。

3. 设 $A_{m\times n}$ 的 $m$ 个行向量是某个 $n$ 元齐次线性方程组的一组基础解系，又 $B$ 为 $m$ 阶可逆方阵，证明 $BA$ 的行向量也构成该齐次线性方程组的一组基础解系。

1. $r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=3$.

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}$$

$r=3$. $r3$.

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\sim \quad r=3.$$

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $R^3$ 的一个基，证明：向量组 $\beta_1=2\alpha_1+k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$ 也是 $R^3$ 的一个基。

2. 设 $A$ 为行满秩的 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$B=AA^T$ 是正定矩阵。

3. 设 $A_{m\times n}$ 的 $m$ 个行向量是某个 $n$ 元齐次线性方程组的一组基础解系，又 $B$ 为 $m$ 阶可逆方阵，证明 $BA$ 的行向量也构成该齐次线性方程组的一组基础解系。

2. 正定矩阵判断
- ①. 特征值均 $>0$.
- ②. 顺序主子式 $>0$
- ③ 定义：$\forall x$ $x\neq 0$ 则 $\boxed{x^TAx}>0$.

证：$B=A\cdot A^T$

$$x^TBx=x^TAA^Tx=(x^TA)(x^TA)^T=\|x^TA\|$$

$\left\{\begin{array}{l}x\neq 0\\ A\text{行满秩}\end{array}\right. \Rightarrow \|x^TA\|>0.$

3.

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $R^3$ 的一个基，证明：向量组 $\beta_1=2\alpha_1+k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$ 也是 $R^3$ 的一个基。

2. 设 $A$ 为行满秩的 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$B=AA^T$ 是正定矩阵。

3、 3. 设 $A_{m\times n}$ 的 $m$ 个行向量是某个 $n$ 元齐次线性方程组的一组基础解系，又 $B$ 为 $m$ 阶可逆方阵，证明 $BA$ 的行向量也构成该齐次线性方程组的一组基础解系。

$Cx=0$. $\quad CA^T=0$.

$CA^TB^T=0$.

$C(BA)^T=0$. ～ BA行向量是解.

证明基础解系，

A行向量是基础解系 $R(A)=m$.

m个行向量线性无关.

B可逆，

$r(A)=r(BA)=m$. BA是 $Cx=0$ 基础解系.