厦门大学《 线性代数 》课程试卷

信息 学院 系 2020 年级 计算机类 专业

学年学期：20211 主考教师：线性代数教研组 A 卷(√) B 卷()

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$R(A)$表示矩阵 A 的秩

$b_1=a_1$ $\qquad \eta_1=\frac{b_1}{|b_1|}$

$b_2=a_2-\frac{[a_2b_1]}{[b_1b_1]}b_1$ $\qquad \eta_2=\frac{b_2}{|b_2|}$

$b_3=a_3-\frac{[a_3b_2]}{[b_2b_2]}b_2-\frac{[a_3b_1]}{[b_1b_1]}b_1$ $\qquad \eta_3=\frac{b_3}{|b_3|}$

一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。下列选项中，（ ）是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交规范化后的向量组。 B

A. $e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ B. $e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

C. $e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ D. $e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2. 设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组，则（ D ）。

唯一/无解

A不一定是方阵.

A. $Ax=0$ 只有零解时，$Ax=b$ 有一解/无解

$r(A)=n$ $\quad r(A|b)=n$ / $<n$

B. $Ax=0$ 有非零解时，$Ax=b$ 有无穷多解 无解

$r(A)<n$ $\quad r(A|b)=n$ / $<n$

C. $Ax=0$ 有非零解时，$A^Tx=0$ 也有非零解 $r(A^T)<m$

$n<l$ $\quad A_{m\times n}$ $\quad A^T_{n\times m}$ $\quad r(A)<m$

D. 当 ξ 是$Ax=0$的通解，η 是 $Ax=b$ 的特解，$\xi+\eta$ 是$Ax=b$ 的通解

非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

3. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是（ B ）。

A. $a=0$，$b=2$ B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=2$，$b=0$ D. $a=2$，b 为任意常数

相似：$P^{-1}AP=B$

特征多项式 特征值相同

↓

对角矩阵 ⇒ 为 2. b. 0.

$|A-\lambda E|=0$.

代入 2. b. 0 可得

$AX=0$

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

1、正交化、单位化

2、齐次：$r(A)=n$ 零解
$r(A)<n$ 有非0解

非齐次 $r(A)=r(A|B)<n$ 无穷解
$r(A)=r(A|B)=n$ 唯一解
$r(A)\neq r(A|B)$ 无解.

A $r(A)=n$ ↗ 唯一 ↗ 无解
$r(A \vdots b)=n$ 或 $n+1$

A可能不是方阵

3、相似：$P^{-1}AP=B$ (P可逆)
特征多项式 特征值相同.

$|A-\lambda E|=0$.
代入 2. b. 0 可得

~~$|A-\lambda E|=0$~~

特征值
对角矩阵 => 为 2. b. 0.

$Bx=\lambda x$

$(B-\lambda E)x=0$

求特征值：$|B-\lambda E|=0$

$|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|=0$

$|P^{-1}||A-\lambda E||P|=0$

$|A-\lambda E|=0$.

在 $|A-\lambda E|=0$ 中 λ代入 2. b. 0
求解即可.

$-\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b-2a^2]=0$.

$\lambda=2$. $4-2(2+b)+2b-2a^2=0$
$\lambda=b$ $b^2-b(2+b)+2b-2a^2=0$
$\lambda=0$ $0=0$

等价 $PAQ=B$ 秩

等价 → 合同 → 相似

4、合同 $P^TAP=B$ P可逆
秩、惯性系数相同

行、列做相同变换

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

惯性系数 {
合同变化为对角型
求特征值 $|A-\lambda E|=0$
转为二次型 → 标准形 $x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3$
$=x_1^2-3x_2^2+2(x_2+x_3)^2$

$Ax=b$

$A(\xi+\eta)=b.$
↓ 齐
↓ 非齐

$A\xi+A\eta=b.$
‖
0

5、根据特征多项式变化求特征值

A λ_1 λ_2 λ_3 ……

μA^k $\mu\lambda_1^k$ $\mu\lambda_2^k$ $\mu\lambda_3^k$ …… 系数、幂次.

$A^*=|A|A^{-1}$

6、定义 $A\alpha=k\alpha$

7、定义 $|A-\lambda E|=0$ 找哪个与 同解.

$|A^T-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|$

合同 $P^TAP=B$ P可逆
秩，惯性系数相同

$r(A)=3.$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-1-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3)$

1　-2　3

2正
1负

4. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（ B ）。

秩

A. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

左右乘转置矩阵

求惯性指数.
1) 合同变换为对角
2).求特征值
3)化为二次型

$x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3$
$=x_1^2-3x_2^2+2(x_2+x_3)^2$

正负惯性系数

C. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

5. 已知 3 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，则 $2A^*$ 的特征值是（ B ）。

λA^{-1}

$A^*=|A|A^{-1}$　　$=2|A|A^{-1}$

A. 1，2，3　　B. 4，6，12　　C. 2，4，6　　D. 8，16，24

$=12A^{-1}$

矩阵变换后求特征值

同

$A\alpha=\lambda\alpha$　　$Ax=\lambda x.$

6. 已知 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{pmatrix}$ 的特征向量，则（ A ）。

A^*　$|A|A^{-1}$
A^{-1}
A^2　　?
kA
A^0

$A\alpha=k\alpha$

A. $a=-2$，$b=6$　　B. $a=2$，$b=-6$

C. $a=2$，$b=6$　　$\begin{pmatrix}-4\\a+10\\-2b\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$　　D. $a=-2$，$b=-6$

计算 $|A-\lambda E|=0.$

7. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，那么与 A 有相同特征值的矩阵是（ A ）。

求特征值：$|A-\lambda E|=0$

A. A^T　　B. A^2　$|A^T-\lambda E|=0$　　C. A^{-1}　　D. $A-E$

同解.

(α_1,α_2)　$\neq 0$

8. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\t\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，若向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关，则 t 必为（ D ）。

注. 只确定 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4)$ 秩 $=3.$

一般

A. 2　　B. 5　　C. -14　　D. 任意常数

9. 设 A 是 4×3 矩阵，B 是 3×4 非零矩阵，满足 $AB=O$，其中 $A=\begin{pmatrix}t&1&1\\9&t&3\\7t-18&7-2t&1\\9+t&1+t&4\end{pmatrix}$，则必有（ B ）。

$Ax=\lambda x.$

$\begin{pmatrix}1&1&t\\3&t&9\\1&7-2t&7t-18\\4&1+t&9+t\end{pmatrix}$

A. 当 $t=3$ 时，$R(B)=1$　　B. 当 $t\neq3$ 时，$R(B)=1$

C. 当 $t=3$ 时，$R(B)=2$　　D. 当 $t\neq3$ 时，$R(B)=2$

$r(A)+r(B)\le 3.$ 2
$1\le r(B)\le 3-r(A)$

$\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-3&9-3t\\0&6-2t&3(2t-6)\\0&t-3&3(3-t)\end{pmatrix}$

8. $(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&1&1\\-2&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4\\0&3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&0\\0&0&-16\end{pmatrix}$

$r=(3)$.

三维向量组，矩阵$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$秩最大为3.

α_3取何值均可

9. $AB=0$ $\quad r(A)+r(B)\leq 3$.

$1\leq R(B)\leq 3-r(A)$

$$\begin{pmatrix}1&1&t\\3&t&9\\1&7-2t&7t-18\\4&1+t&9+t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-3&3(3-t)\\0&2(3-t)&6(t-3)\\0&t-3&3(3-t)\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{不用提未知数因式}}\begin{pmatrix}1&1&t\\0&t-3&3(3-t)\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$t=3$ $\quad r(A)=1$ $\quad 1\leq R(B)\leq 2$

$t\neq 3$ $\quad r(A)=2$ $\quad 1\leq R(B)\leq 1$

---

10. 4个3维向量，一定线性相关

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0.$ $\quad k_1\sim k_4$不全为0

$\Downarrow$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=-k_4\alpha_4$ $\quad$ 4不能由1 2 3表示 $\boxed{k_4=0.}$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ $\quad k_1\sim k_3$不全为0

b 单位阵.

$$\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

c. $R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

α_4可由1 2 3表示.

$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x=\alpha_4.$

可以+-x / 常数

不能提取含未知数的公因式 → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-3 & 3(3-t) \\ 0 & 2(3-t) & 6(t-3) \\ 0 & t-3 & 3(3-t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-3 & 3(3-t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3行维度

10. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 3 维非零列向量，则以下结论：

① 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

② 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也线性相关；

③ 如果 $R(\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3)=R(\alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_4,\ \alpha_2+\alpha_4,\ \alpha_3+\alpha_4)$，

则 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

其中正确的个数为（ C ）。

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

二、　填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由 α_1，α_2，α_3 生成的向量空间维数是 2，则 $a=$ ___6.___。

$\frac{1}{\lambda^2}+1$

2. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的特征值，则 $(A^{-1})^2+E$ 必有特征值 ________。

未a

3. 若二次型 $f=x_1^2+2tx_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3+2x_3^2$ 是正定的，则 t 的取值范围是 ___(-1 0.)___。

$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$\alpha=(a,1;1)^T$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，

则 $\alpha=$ ___-1.___。

$A\alpha=\begin{pmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2a+3=3a+4$

$a=-1$

$\alpha=a=-1$

5. 设 A 是 4×6 矩阵，$R(A)=2$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含向量的个数是 ________。4

$n=6$.

非自由变量 2.

自由变量 $6-2=4$.

三、　计算题（共 50 分）

1. （6 分）设 A 是 3 阶实对称矩阵，将矩阵 A 的 1、2 两行互换后再将 1、2 两列互换得到的矩阵是 B，试判断 A 与 B 是否等价、相似、合同？

$B=E(1.2)AE(1.2)$

二 1、 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 秩为2

2、由A特征值求解 $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+1$

3、二次型$\boxed{正定}$ $\Longleftrightarrow$ 标准形系数均 >0

规范形系数均为1

正惯性系数 $=n$

对应的矩阵 · 特征值均 >0

主子式均 >0

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1>0 \\ 1-t^2>0 & (-1,1) \\ -2t(t+1)>0 & (-1,0) \end{cases}$$

2

$1-t(2t+1)-t-1$

$-2t^2-2t$ $\quad t(t+1)<0$

$-2t(t+1)$ -1

$-1 \quad 0$

4、 $A\alpha=\begin{pmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $2a+3=3a+4$

$a=-1$

$\alpha=a=-1$

5、 $n=6$. 非自由变量 2

自由变量 $6-2=4$

三 1、等价 $PAQ=B$ $P、Q$、可逆. $E(1,2)$ 可逆

相似 $P^{-1}AP=B$ $E^{-1}(1,2)=E(1,2)$

合同 $P^{T}AP=B$. $E^{T}(1,2)=E(1,2)$

2. $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \to r=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & a & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & a-12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

线性相关 $r<4$　　$a=4$ 或 $a=12$

无关 $r=4$　　$a\neq4$ 且 $a\neq12$.

α_4 由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 表示

3) $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \alpha_4$ 有解 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

$$a=4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{行最简}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. ① 求特征值 $|A-\lambda E|=0$　　对称矩阵一定有正交矩阵 将其化为对角矩阵　对角元素为特征值

$\lambda_1=\lambda_2=-1$　　2个. 需正交化

$\lambda_3=5$　　1个

② 求各个特征值对应的特征向量

③ 为求正交矩阵 进行正交化. 单位化.

2. （15 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-3,1)^T$，$\alpha_2=(5,-5,a,11)^T$，$\alpha_3=(1,-3,6,3)^T$，$\alpha_4=(2,-1,3,a)^T$。问：

(1) 当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

(2) 当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关；

(3) 当 a 为何值时，α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，并写出它的表达式。

$|A-\lambda E|=0$ 特值 施密特 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$

3. （13 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$。

① 特征值 ② 特征向量 ③ 正交 单位化

4. （10 分）求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换。

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的两个解，求 A 的特征值和对应的特征向量。（6 分）

四、 证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 设有两个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\alpha\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$。

2. 已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，证明：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出。

$\eta^*=k_1\eta+k_2(\eta+\xi_1)$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

求

4、

4. （10 分）求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换。

$\underbrace{-2x_1+x_2+x_3}_{=y_1}$，$\underbrace{x_1-2x_2+x_3}_{=y_2}$，$\underbrace{x_1+x_2-2x_3}_{=y_3}$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}}_{\text{不可逆}}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

2种

① 全部展开，逐次配方。

$x_1^2 \quad (x_1+\cdots)^2$

$x_2x_3 \quad \begin{cases} x_2=y_1+y_2\\ x_3=y_1-y_2\end{cases}$

② $y_1=-2x_1+x_2+x_3$

$y_2=x_1-2x_2+x_3$ 　线性无关

$y_3=x_3 \longrightarrow$ 为了凑位置

$$f=y_1^2+y_2^2+(-y_1-y_2)^2=2(y_1+\tfrac{1}{2}y_2)^2+\tfrac{3}{2}y_2^2$$

$2(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)$

$y_1+\frac{1}{2}y_2 \to z_1$，$y_2 \to z_2$

线性变换 $x\to y\to z$ 　$=2z_1^2+\frac{3}{2}z_2^2$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

凑位置

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0\\ 1 & -\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的两个解，求 A 的特征值和对应的特征向量。（6 分）

5、 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=3$

$Ax=0$

$Ax=\lambda x \quad \lambda=0$

$\lambda_2=\lambda_3=0$

1. 设有两个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\alpha\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$。

2. 已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，证明：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出。

通解用 $\checkmark$ 表示

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

四.1. $C^TC=(E-\alpha\beta^T)^T(E-\alpha\beta^T)$

$=(E-\beta\alpha^T)(E-\alpha\beta^T)$

$=E-\alpha\beta^T-\beta\alpha^T+\beta\alpha^T\alpha\beta^T=E-\beta\alpha^T-\alpha\beta^T+\beta\beta^T$

$\beta\alpha^T\alpha\beta^T=\beta\beta^T$

$\beta\cdot\underbrace{\alpha^T\alpha}_{数}\beta^T=\beta\cdot\beta^T$ $\quad (\alpha^T\alpha-1)\beta\cdot\beta^T=0$

β是非0向量

$\beta\cdot\beta^T$中有非0元素

$\alpha^T\alpha-1=0$

2. 非齐次通解 = 非齐次特解 + 齐次通解

$\eta^*=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2\cdots k_{n-r}\xi_{n-r}$

$=(1-k_1-k_2\cdots k_{n-r})\eta+k_1(\eta+\xi_1)+k_2(\eta+\xi_2)\cdots k_{n-r}(\eta+\xi_{n-r})$

5、正定矩阵： $\forall x \neq 0.\ x^T A x > 0.$

$$x^T B x = x^T(\lambda E + A^T A)x$$

$$= \lambda x^T x + x^T A^T A x$$

$$= \lambda [x\ x] + [xA\ xA].$$

$$[xA, xA] \geq 0$$

x 非0 $\lambda > 0$ 时 $\lambda[x\ x] > 0.$