



# 厦门大学《线性代数》课程试卷

信息学院 \_\_\_\_\_ 系 2020 年级 计算机类 专业

学年学期: 20211 主考教师: 线性代数教研组 A 卷(√) B 卷()

注:  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置矩阵,  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵,  $E$  是单位矩阵,  $|A|$  表示方阵  $A$  的行列式,  $R(A)$  表示矩阵  $A$  的秩

## 一、单项选择题 (每小题 2 分, 共 20 分)

1. 令  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。下列选项中, ( ) 是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  正交规范化

后的向量组。

A.  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$     B.  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C.  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$     D.  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. 设  $Ax = 0$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  对应的齐次线性方程组, 则 ( )。

A.  $Ax = 0$  只有零解时,  $Ax = b$  有一解

B.  $Ax = 0$  有非零解时,  $Ax = b$  有无穷多解

C.  $Ax = 0$  有非零解时,  $A^T x = 0$  也有非零解

D. 当  $\xi$  是  $Ax = 0$  的通解,  $\eta$  是  $Ax = b$  的特解,  $\xi + \eta$  是  $Ax = b$  的通解

3. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件是 ( )。

A.  $a = 0, b = 2$

B.  $a = 0, b$  为任意常数

C.  $a = 2, b = 0$

D.  $a = 2, b$  为任意常数

4. 与矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  合同的矩阵是 ( )。

A.  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

5. 已知 3 阶矩阵  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , 则  $2A^*$  的特征值是 ( )。

A. 1, 2, 3

B. 4, 6, 12

C. 2, 4, 6

D. 8, 16, 24

6. 已知  $\alpha = (1, -2, 3)^T$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$  的特征向量, 则 ( )。

A.  $a = -2, b = 6$

B.  $a = 2, b = -6$

C.  $a = 2, b = 6$

D.  $a = -2, b = -6$

7. 已知  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 那么与  $A$  有相同特征值的矩阵是 ( )。

A.  $A^T$

B.  $A^2$

C.  $A^{-1}$

D.  $A - E$

8. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 则  $t$  必为 ( )。

A. 2

B. 5

C. -14

D. 任意常数

9. 设  $A$  是  $4 \times 3$  矩阵,  $B$  是  $3 \times 4$  非零矩阵, 满足  $AB = O$ , 其中  $A =$

$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{pmatrix}$ , 则必有 ( )。

A. 当  $t = 3$  时,  $R(B) = 1$

B. 当  $t \neq 3$  时,  $R(B) = 1$

C. 当  $t = 3$  时,  $R(B) = 2$

D. 当  $t \neq 3$  时,  $R(B) = 2$

10. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为 3 维非零列向量, 则以下结论:

- ① 如果  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;
- ② 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  也线性相关;
- ③ 如果  $R(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = R(\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4)$ ,  
则  $\alpha_4$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出。

其中正确的个数为 ( )。

- A. 0                                  B. 1                                  C. 2                                  D. 3

## 二、 填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $a_1 = (1, 2, -1, 0)^T$ ,  $a_2 = (1, 1, 0, 2)^T$ ,  $a_3 = (2, 1, 1, a)^T$ , 若由  $a_1, a_2, a_3$  生成的向量空间维数是 2, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。
2. 设  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $(A^{-1})^2 + E$  必有特征值 \_\_\_\_\_。
3. 若二次型  $f = x_1^2 + 2tx_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$  是正定的, 则  $t$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。
4. 设 3 阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = (a, 1, 1)^T$ , 已知  $A\alpha$  与  $\alpha$  线性相关, 则  $\alpha =$  \_\_\_\_\_。
5. 设  $A$  是  $4 \times 6$  矩阵,  $R(A) = 2$ , 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系中所含向量的个数是 \_\_\_\_\_。

## 三、 计算题 (共 50 分)

1. (6 分) 设  $A$  是 3 阶实对称矩阵, 将矩阵  $A$  的 1、2 两行互换后再将 1、2 两列互换得到的矩阵是  $B$ , 试判断  $A$  与  $B$  是否等价、相似、合同?

2. (15 分) 已知  $\alpha_1 = (1, 2, -3, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (5, -5, a, 11)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -3, 6, 3)^T$ ,  $\alpha_4 = (2, -1, 3, a)^T$ 。问:
- (1) 当  $a$  为何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关;
  - (2) 当  $a$  为何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关;
  - (3) 当  $a$  为何值时,  $\alpha_4$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 并写出它的表达式。
3. (13 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 。
4. (10 分) 求出二次型  $f = (-2x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_3)^2$  的标准形及相应的可逆线性变换。
5. 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的各行元素之和均为 3, 向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是方程组  $Ax = 0$  的两个解, 求  $A$  的特征值和对应的特征向量。(6 分)

#### 四、证明题 (每题 5 分, 共 15 分)

1. 设有两个  $n$  维非零列向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ ,  $C = E - \alpha\beta^T$ , 其中  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 证明:  $C^T C = E - \beta\alpha^T - \alpha\beta^T + \beta\beta^T$  的充要条件是  $\alpha^T \alpha = 1$ 。
2. 已知  $\eta$  是  $Ax = b$  的一个特解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是对应的齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 证明: 方程组  $Ax = b$  的任一解均可由  $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$  线性表出。
3. 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 已知矩阵  $B = \lambda E + A^T A$ , 证明: 当  $\lambda > 0$  时, 矩阵  $B$  为正定矩阵。