Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Формальные языки и автоматы
Методичка для сдающих и пересдающих

Может, зайдет кому-нибудь

Оглавление

Предисловие

Однажды я сдавал формалки. Не самый приятный опыт в моей жизни. Когда я ждал результатов, я сказал, что если не сдам, напишу методичку по этому чудесному предмету.

Как несложно догадаться, я тогда не сдал.

По формалкам уже есть отличное руководство в виде решений задач от Тани (не знаю, кто это, но если бы ее не было, статистика сдаваемости была бы гораздо хуже, я уверен, Таня, спасибо, что ты есть), и казалось бы - зачем я это делаю?
Ну во-первых, я сказал, что напишу.
Во-вторых, это довольно знатный способ подготовки к пересдаче, который потенциально поможет каким-нибудь людям после меня.
В-третьих, наверное, есть смысл восполнить пробел в нормальном "печатном"пособии по формальным языкам. Ахо Ульмана я не читал (а он, может быть, и норм), но "Теорию Построения Компляторов" читать совершенно невозможно.

В этой методичке я в меру своих возможностей постараюсь не только подробно расписать решения различных задач (это уже есть у Тани), но и более-менее человеческим языком расписать, как применяемые алгоритмы работают (потому что выучить алгоритм, если есть примерное понимание работы, гораздо проще)

За кривой русский язык извиняйте - я ЕГЭ сдал на 30 баллов.

Глава 1

Немного теормина

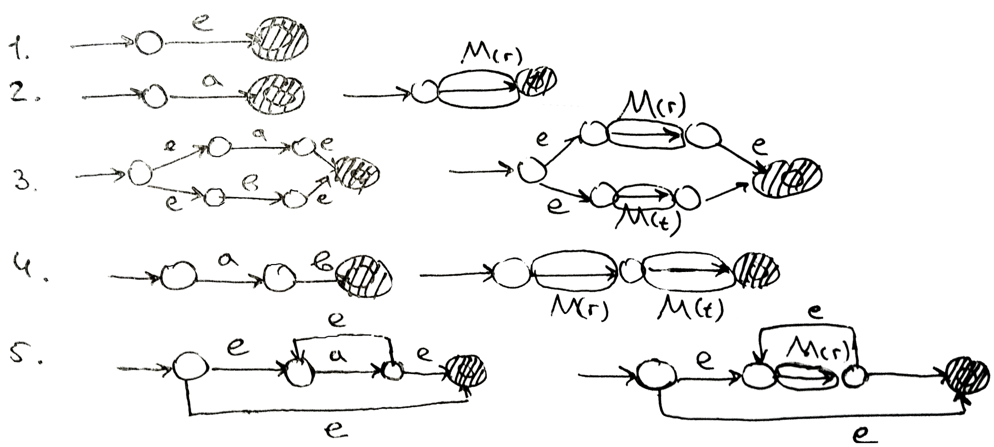
Недетерменированный конечный автомат - НКА

Глава 2

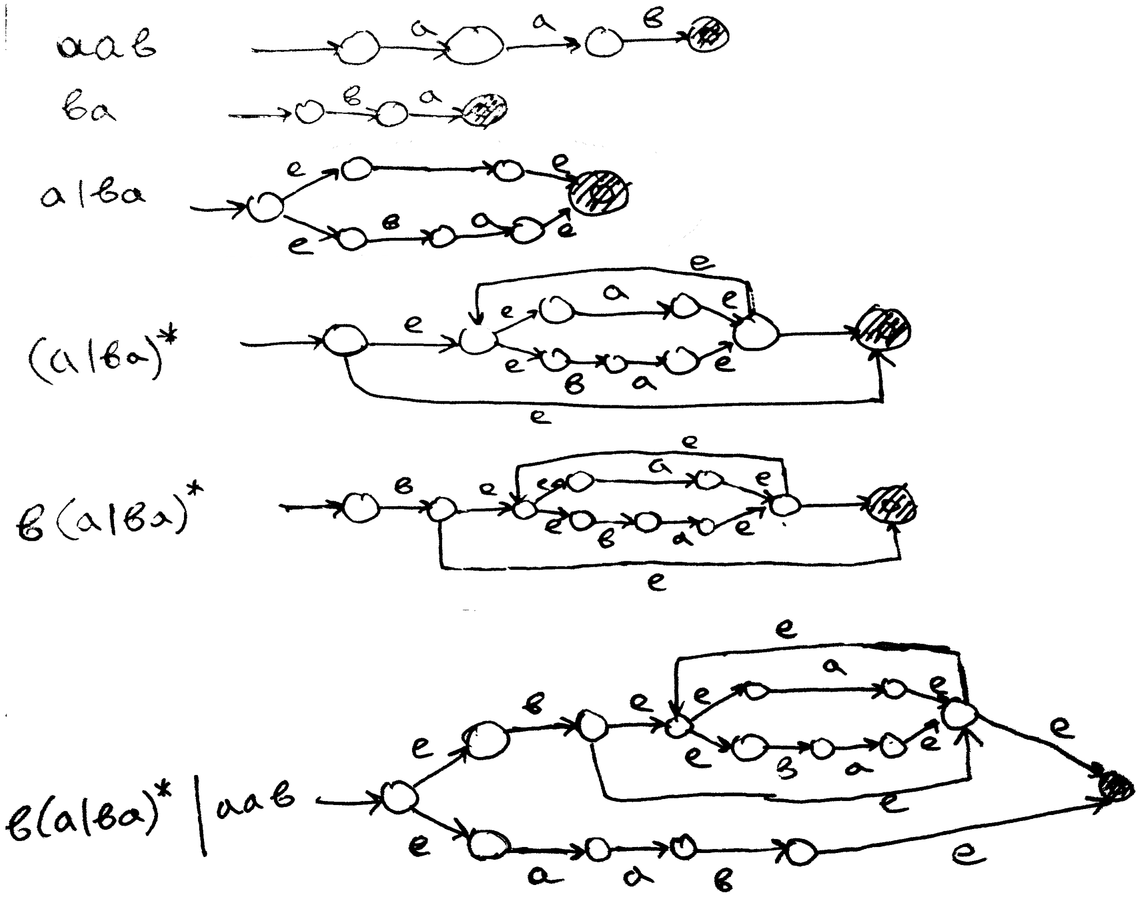
НКА по регулярному выражению

Алгоритм

Построение НКА по РВ делается по определенным правилам
Каждое РВ можно разбить на подвыражения, а для простейших подвыражений автомат строится довольно просто
На рисунке далее
1. Е-переход
2. Переход по символу a
3. Переход по $a|b$ (a или b)
4. Переход по ab (сначала a, потом b)
5. Переход по $a*$ (сколько угодно символов a, в т.ч. 0)
Справа от простейших НКА нарисованы общие НКА, когда переход совершается по некоторому РВ, где r - РВ, а $M(r)$ - НКА, построенный по нему.



На рисунке изображено построение НКА для РВ $b(a|ba)*|aab$



Почему это работает

Правильность таких построений довольно очевидна, но если не верится, можно походить по полученным НКА по дугам и убедиться, что ничего кроме того, что описано в РВ, по ним составить нельзя.

Глава 3

ДКА по НКА

Глядя на НКА, полученные по РВ может показаться, что там слишком много лишних е-переходов, и они бесят. Также НКА это вам не ДКА: есть неопределенности которые бесят (хотя процесс детерминирования бесит больше). В любом случае существует алгоритм, позволяющий из большого, но красивого НКА получить маленький и очень некрасивый ДКА.

Алгоритм

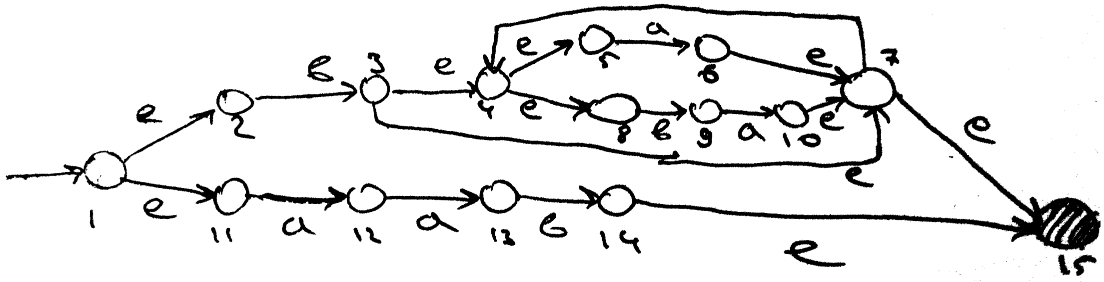
Введем некоторые обозначения:

1. $e\text{-}closure(R)$ (эпсилон-замыкание состояния R) - множество состояний, в которые можно попасть из состояния R по символу e. Стоит отметить, что "скачков"может быть больше одного, то есть, если в состояние Q можно попасть из P по e, а из Q можно по e попасть в R, то $R \in e\text{-}closure(Q)$. На языке умных людей это называется транзитивностью, но я тут не сложными словами щеголять пришел.

2. $move(R, a)$ (достижимые из R по a) - множество состояний, в которые можно попасть из состояния R по символу a. (тут скачок должен быть только один)

В качестве примера рассмотрим уродца из предыдущей главы: НКА по РВ
$b(a|ba) * |aab$

1. Для начала все состояния надо пронумеровать



На самом деле нумеровать их необязательно, главное дать им такие обозначения, чтобы вы сами могли отличить одно состояние от другого (ну и чтобы проверяющий экзаменатор не охерел, поэтому арабская вязь, наверное, не лучшее решение) - тут есть простор для фантазии, но на мой взгляд цифры вполне удобны (хотя между ними и приходится ставить запятые, если выписывать их в ряд).

Далее мы начинаем описывать новый автомат с новыми состояниями - тут уже традиционно используют заглавные латинские буквы. Каждое новое состояние описывается множеством старых состояний из первого автомата.

2. В качестве начального состояния нового ДКА берут $A = e\text{-}closure(1)$, в нашем случае это $A = \{1, 2, 11\}$.

3. Далее формируются следующие правила переходов:

$D(A, a) = move(A, a) + e\text{-}closure(move(A, a))$

$D(A, b) = move(A, b) + e\text{-}closure(move(A, b))$

И т.д.

Пусть вышло так, что есть состояние Q, из которого по символу b мы переходим в состояние, описываемое множеством $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 23\}$. При этом, если у такого множества уже есть имя, например W, то это попросту значит, что $D(Q, b) = W$. Если такого множества раньше не встречалось, то оно добавляется в таблицу состояний нового ДКА.

Звучит сложно и скучно, поэтому лучше посмотреть на живой пример.

$A = \{1, 2, 11\}$;

$move(A, a) = move(1, a) + move(2, a) + move(11, a)$;

$move(A, a) = \{\} + \{\} + \{12\} = \{12\}$;

$e\text{-}closure(move(A, a)) = \{\}$;

$D(A, a) = move(A, a) + e\text{-}closure(move(A, a)) = \{12\} + \{\} = \{12\}$;

Состояния $\{12\}$ у нас еще не было, поэтому добавим его в таблицу состояний и назовем его B.

Проделаем аналогичные выкладки для символа b.

$move(A, b) = move(1, b) + move(2, b) + move(11, b)$;

$move(A, b) = \{\} + \{3\} + \{\} = \{3\}$;

$e\text{-}closure(move(A, b)) = \{4, 5, 7, 8, 15\}$;

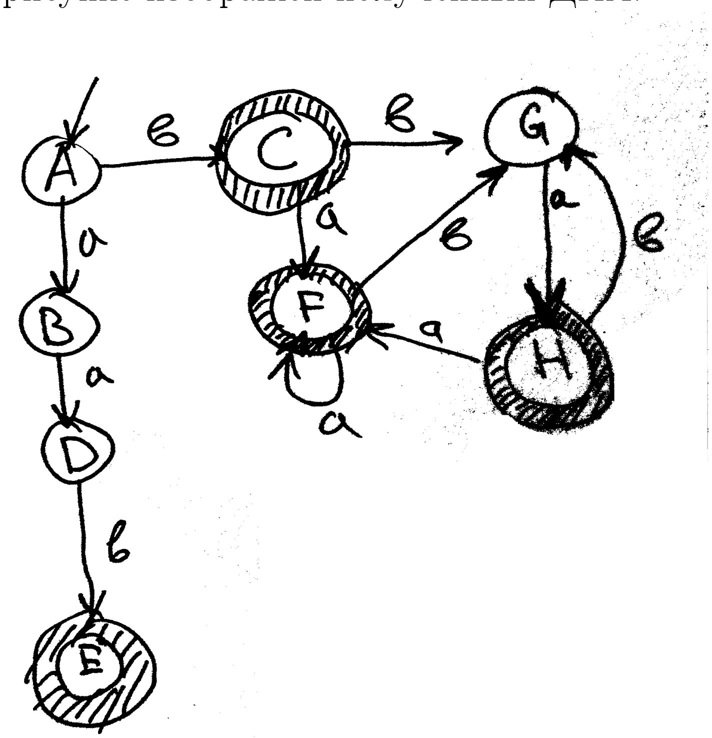
$D(A, b) = move(A, b) + e\text{-}closure(move(A, b)) = \{3\} + \{4, 5, 7, 8, 15\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 15\}$;

Состояния $\{3, 4, 5, 7, 8, 15\}$ у нас тоже еще не было, поэтому запишем его в таблицу

состояний ДКА.
Подобные вычисления надо проводить для каждого символа в алфавите, для каждого нового состояния в таблице до тех пор, пока все старые состояния не будут описаны. С виду может показать, что это очень много писанины, но на деле все эти преобразования делаются в уме и единственное, что нужно реально выписывать, это таблицу состояний.
Привожу финальную таблицу переходов для НКА из предыдущей главы.

	a	b
$A\{1, 2, 11\}$	B	C
$B\{12\}$	D	x
$*C\{3, 4, 5, 7, 8, 15\}$	F	G
$D\{13\}$	x	E
$*E\{14, 15\}$	x	x
$*F\{4, 5, 6, 7, 8, 15\}$	F	G
$G\{9\}$	H	x
$*H\{4, 5, 7, 8, 10, 15\}$	F	G

Внимательный читатель заметит, что некоторые состояния отмечены звездочками и спросит, что это. Отвечаю: звездочками помечены конечные состояния. И это следующее правило алгоритма построения:
4. Конечными состояниями нового ДКА помечаются такие состояния, которые содержат в себе конечное состояние старого НКА.
В данном случае конечным состоянием является 15, поэтому все состояния, имеющие в себе 15 становятся конечными.
На рисунке изображен полученный ДКА.



Почему это работает

Работа алгоритма строится на двух мыслях:
1. Если из одного состояния по e можно перейти в несколько других, то зачем нам эти другие состояния, если по сути состояние одно, просто разибитое на несколько частей? (незачем)
Грубо говоря, мы стягиваем за e-дуги много состояний в одно, как за веревки.
2. Если после стягиваний состояний, две дуги, раньше шедшие в два разных состояния, теперь идут в одно стянутое, то действительно ли между этими дугами есть разница? (нет)