Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра алгоритмических языков

Кошовец Олег Игоревич

Разложение матрицы полиномов в произведение элементарных матриц

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
Профессор С.А.Абрамов

Москва, 2017

Оглавление

Глава 1

Введение

Иногда при решении систем дифференциальных уравнений можно установить ряд свойств решений, исследуя только матрицы дифференциальных операторов, которые описывают систему.

Условие разложимости матрицы в произведение элементарных матриц является признаком голоморфности решений. Однако в ряде случаев задача о матрицах дифференциальных операторов может быть сведена к задаче о полиномиальных матрицах.

1.1 Постановка задачи

В данной работе исследуются матрицы полиномов от одной переменной, и способы их разложения в произведение элементарных матриц. Конечная задача - написать программу, производящую разложение исходной матрицы в произведение элементарных.

Глава 2

Системы дифференциальных уравнений

2.1 Задача Коши

Пусть $A(x; D) = (a_{ij}(x; D))_{1 \leq i,j \leq N}$ - система обыкновенных дифференциальных операторов с голоморфными коэффициентам из $\Omega \subset C$, где $D = d/dx$. Пусть $T = (t_1, ..., t_n)$ - неотрицательные целые числа.
Тогда можно поставить задачу Коши $(A(x; D), T)$ следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x; D) u_j(x) = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$D^k u_i(x_0) = w_{i,k} \in C, \quad 0 \leq k < t_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

где $x_0 \in \Omega$

2.2 Свойства решений

В работе [2] Масатаке Мияке приведены и доказаны теоремы, согласно которым система имеет голоморфные решения в каждой точке $x_0 \in \Omega$ тогда и только тогда, когда система дифференциальных операторов $A(x; D)$ может быть разложена в произведение элементарных матриц.

Разложение произвольной системы дифференциальных операторов в произведение элементарных матриц - очень нетривиальная задача. Мною рассматривалось упрощение этой задачи: разложить матрицу полиномов от одной переменной в произведение элементарных матриц.

Глава 3

Канонический вид матрицы

Пусть матрица A - матрица, состоящая из элементов некоторого кольца

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1 Канонический диагональный вид

Матрица из элементов некоторого кольца называется канонической диагональной, если она имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

где элементы a_i делятся без остатка на элементы $a_{1..i-1}$

3.2 Элементарные преобразования матриц

К элементарным преобразованиям матриц относят следующие

1. Перестановка двух строк или двух столбцов
2. Умножение строки или столбца на некоторый, отличный от нуля, элемент кольца
3. Прибавление к строке или столбцу другой строки или, соответсвтенно, столбца, домноженный на некоторый элемент кольца

3.3 Алгоритм приведения

В "Теории матриц" [1] Гантмахер изложил алгоритм приведения матрицы к каноническому диагональному виду, использующий только элементарные преобразования матриц. Алгоритм состоит из нескольких частей.

1. Выделить в матрице элемент наименьшей степени и с помощью перестановок строк и столбцов сделать его элементом a_{11}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Последовательно вычесть из строк $2..m$ первую строку, домноженную на q_{s1}, где $a_{s1} = a_{11}q_{s1} + r_{s1}$, получив

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Если среди $r_{21..m1}$ есть элементы, не равные тождественно нулю, то алгоритм заново применяется к полученной матрице. В итоге получаем матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4. По аналогии с пунктом 2 поступаем со столбцами, получая матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

5. Если среди $r_{12..1n}$ есть элементы, не равные тождественно нулю, то алгоритм заново применяется к полученной матрице, начиная с пункта 4. В итоге получаем матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

6. Алгоритм применяется к $(a_{22}..a_{mn})$ подматрице полученной матрицы. На выходе получаем каноническую диагональную матрицу.

3.4 Элементарные матрицы

Каждой элементарной операции над матрицей A можно сопоставить матрицу S, которая при умножении на исходную матрицу слева или справа выполняет нужное преобразование. Действия над строками выполняются с помощью умножения слева $S * A$, а операции над столбацми - справа $A * S$. Такие матрицы называются элементарными.

Любую последовательнось элементарных преобразований можно выполнить с помощью последовательного умножения исходной матрицы с нужной стороны на соответствующие элементарные матрицы.

Глава 4

Разложение матрицы полиномов

Используя алгоритм из Гантмахера, можно привести матрицу к каноническому виду с помощью элементарных преобразований. Из этого следует, что из канонического вида некоторой матрицы можно восстановить ее исходный вид, проведя обратные элементарные преобразования в обратном порядке. Таким образом, переделав алгоритм из Гантмахера под нашу конкретную задачу, получаем

4.1 Алгоритм разложения

Пусть есть исходная матрица A размера $m * n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пусть матрица K - канонический вид матрицы A

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$(\prod_{i=1}^{q} L_i)A(\prod_{j=1}^{r} R_j) = K$$

где L_i, R_j - элементарные матрицы, приводящие исходную матрицы к каноническому виду.

Учитывая, что

$$K = (\prod_{l=1}^{s} M_l)E$$

где M_l - матрицы, описывающие умножения строки на элемент кольца,а E - матрица $m * n$, состоящая из единичной матрицы размера $r * r, r = min(m, n)$ и нулевой матрицы, можно записать выражение:

$$A = (\prod_{i=1}^{q} L_{q-i}^{-1})(\prod_{l=1}^{s} M_l)E(\prod_{j=1}^{r} R_{r-j}^{-1})$$

где матрицы L_i^{-1}, R_j^{-1}, M_l элементарные.

4.2 Модификация алгоритма

Можно заметить, что матрица S

$$\begin{bmatrix} x^{100}-1 & 0 & 0 \\ 0 & x & a(x)_{23} \\ 0 & a(x)_{32} & a(x)_{33} \end{bmatrix}$$

по алгоритму из Гантмахера должна быть приведена в матрице

$$\begin{bmatrix} x & 0 & a(x)_{23} \\ 0 & x^{100}-1 & 0 \\ a(x)_{32} & 0 & a(x)_{33} \end{bmatrix}$$

а только после этого в ней можно будет упростить первые столбец и строку. При этом есть шанс, что для полученной подматрицы элементы тоже сначала придется менять местами, а только после этого действовать дальше. При этом на выходе может оказаться, что полученная матрица не будет канонической диагональной, так как диагональные элементы не будут делиться друга на друга без остатка.

Однако для исходной матрицы S перестановки строк можно было не производить и сразу перейти к работе с подматрицей, исключив таким образом из итогового разложения несколько элементарных матриц, тем самым уменьшив его длину.

4.3 Применимость алгоритма

Алгоритм раскладывает любую квадратную невырожденную матрицу в произведение элементарных матриц. Также любую прямоугольную матрицу $m * n$ ранга $r = min(m, n)$ алгоритм раскладывает в произведение матриц, где все кроме одной являются элементарными.

Глава 5

Реализация

Предложенный выше алгоритм был реализован в системе компьютерной алгебры Maple.

5.1 Оптимизации

Алгоритм был оптимизирован с помощью улучшений, описанных выше.
Также была улучшена логика нахождения обратной матрицы: обратные матрицы создавались сразу и укладывались в список в обратном порядке, в то время как матрицы для построения канонического вида не строились вообще.

5.2 Пример

На рисунке представлен пример работы готовой программы.

```
N := Matrix([[1, x], [0, x^2 + 1], [2, 2 x], [0, 3 x]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & x^2+1 \\ 2 & 2x \\ 0 & 3x \end{bmatrix}$$

```
F := fullCycle(N);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

```
F[1].F[2].F[3].F[4].F[5].F[6].F[7]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & x^2+1 \\ 2 & 2x \\ 0 & 3x \end{bmatrix}$$

Глава 6

Итоги

6.1 Результаты

1. Изучена работа [2] Мисатаке Мияке, сформулирована задача на ее основе
2. Изучен и переделан алгоритм, представленный в "Теории Матриц" Гантмахера [1]
3. Модифицирован переделанный алгоритм
4. Изучена система компьютерной алгебры Maple
5. Реализована программа, производящая разложения матрицы полиномов в произведение элементарных матриц
6. Изучена и освоена верстка в LaTeX

6.2 Дальнейшие планы

1. Изучить работы по работе с полиномами от нескольких переменных
2. Модифицировать текущую программу для работы с матрицами полиномов от нескольких переменных

Результаты этой научной работы потенциально могут быть использованы для решения задач, сформулированных в работе [2] Мияке.

Литература

[1] Ф.Р.Гантмахер *"Теория матриц"* Издательство “Наука” 1966

[2] M.Miyake *“Remarks on the formulation of the Cauchy problem for general system of ordinary differential equations”* Tohoku Math. Journal 1979

[3] M.Monogan *“Maple 9. Introductory Programming Guide”* ISBN 1-894511-43-3

[4] *Maplesoft.com*

[5] *Mapleprimes.com*