1. Wann heißt eine Funktion f in einem Punkt x_0 stetig? Welche äquivalente Definitionen der Stetigkeit gibt es (wenigstens drei verschiedene)?

   f is continuous in x_0 whenever one of the following equivalent conditions holds

   - $\forall (x_n) \in D\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$
   - $\forall \epsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in D, |x - x_0| < \delta\colon |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
   - for any neighbourhood V of $f(x_0)$ there is a neighbourhood U of x_0 in D such that $f(U) \subset V$

2. Wann heißt eine Funktion f auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{C}$ stetig?

   f is continuous on the set D whenever f is continuous at all points $a \in D$

3. **TODO** Sei $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge reeller Zahlen. Gib eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die auf $D = \mathbb{R} \setminus U$ stetig, auf U aber unstetig ist.

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   Since any convergent $(x_n) \in \mathbb{R}$ will only contain at most finitely many element from U, and consequently if $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, then $\lim_{n\to\infty} x_n$

4. Gib eine Fuktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nirgends stetig ist.

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. Wie lautet der Zwischenwertsatz?

   Consider any $D = [a, b] \subset R$ interval, and let $f\colon D \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f takes on any value in $[f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]$

6. **TODO** Warum hat jede durch eine stetige Funktion $g\colon [0,1] \to [0,1]$ gegebene Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ (mindestens) einen Fixpunkt?

7. Wie lässt sich unter Benutzung des Zwischenwertsatzes zeigen, dass die Gleichung $\exp(x) = -x$ eine reelle Lösung besitzt?

   Answer: Consider the $g(x) = e^x - x$ function on the $[1/e, 1]$ interval. $g(1/e) = e^{1/e} - e < e^1 - e = 0$ and $g(1) = e^1 - 1 > 2 - 1 > 0$, thus from the intermediate value theorem there must be some $c \in [1/e, 1]\colon g(c) = 0$.

8. Wann heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig?

   Answer: f is uniformly continuous if $\forall \epsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in D\colon |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

   If D is closed and bounded, and f is continuous on D, then f is also uniformly continuous on D.

9. **TODO** Welche dieser Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche gleichmäßig stetig?

   $$|x|,\ \exp(x),\ x^2,\ \sin(x),\ \tfrac{x^3+1}{x^4-1},\ \lceil x \rceil - x$$

   Hierbei bezeichnet die Gauß-Klammer, $\lceil x \rceil$, die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

   Answer:

   (a) $|x|$ is continuous and furthermore is absolute continuous: consider $\epsilon > 0$ and some $x, y \in \mathbb{R}$: $|x - y| < \epsilon$ then $\epsilon > |x - y| > |x| - |y|$ and $\epsilon > |y - x| > |y| - |x|$ and thus $||x| - |y|| < \epsilon$. So $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| < \epsilon$ and consequently it's absolute continuous.

   (b) $\exp(x)$ is continuous, since it's defined by a powerseries with convergence radius $\rho = \infty$. A powerseries is continuous at every point inside it's convergence radius. It's not absolutely continuous: consider some $\epsilon > 0$ and any point $a \in \mathbb{R}$. $\exp(a + h) \in (e^a - \epsilon, e^a + \epsilon)$

   (c) x^2 is continuous, since x is continuous, and since the multiple of two continuous function is continuous, thus so is x^2. On the other hand it's not

10. Gib stetige Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ an, die ihr Supremum annehmen, und solche, die ihr Supremum nicht annehmen. Unter welcher (hinreichenden) Bedingung nimmt eine stetige Funktion ihr Supremum an?

    Answer: Let $D = [0, 1)$ and $f\colon D \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. $sup f = 1$, but f does not take on it's supremum (because $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \notin D$).

    Let $D = [0, 1]$ and $f\colon D \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. $\sup f = \max f = 1$, thus f takes on it's supremum.

    If D is bounded and closed, then $f\colon D \to \mathbb{R}$ takes on its supremum.

11. **Answer:** Sind die Bilder von Intervallen unter stetigen Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder Intervalle? Sind stetige Bilder offener Intervalle wieder offene Intervalle?

    Answer: Yes (**Why?**). The image of $f\colon (0,1) \to R$ with $f(x) = 1$ is a closed inteval $[1,1]$.

12. Wo sind Potenzreihen stetig? Wo sind sie gleichmäßig stetig?

    Answer: Consider $p(x)$ powerseries centered at 0 with convergence radius of $\rho \in [0,\infty)$, and circle of convergence $C = \{x\colon |x| < \rho\}$. p is continuous at each point of C. Consider any $D \subset C$ that is closed and bounded. Then f is uniformly continuous on D. Contrary to the normal continuity, uniform continuity cannot be extended to the whole C by considering a closed circle of radius $0 \leq r < \rho$ inside C, and taking the limit $r \to \rho$.

13. Wann existiert die Inverse f^{-1} einer stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$? Wann ist die Inverse stetig?

    Answer: f^{-1} exists exactly when f is strictly monotonous. Whenever the inverse of a continuous function exists, it's always continuous.

14. Was ist ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$? Was ist ein Banachraum?

    Answer: Consider V vectorspace over $\mathbb{K}$. Then the $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ function is a norm, if it satisfies the following conditions ($\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$):

    - $\|x\| \geq 0$ and $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
    - $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
    - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

    A normed vectorspace is complete, if every Cauchy-sequence is convergent (both property considered under the norm). A Banach-space is a complete normed vectorspace.

15. Was bedeutet Konvergenz in einem normierten Vektorraum?

    Answer: Let V is a vectorspace with norm $\|.\| : V \to \mathbb{R}$. We say that $(x_n) \in V$ converges if $\exists v \in V\colon \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$

16. Wie ist die Supremums-Norm für beschränkte, stetige Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, definiert? Warum ist sie tatsächlich eine Norm?

    Answer: $\|f\|_{sup} = \sup\{|f(x)|\colon x \in D\}$.

The above defined $\|.\|_{sup}$ function satisfies the norm properties:
$\forall f, g : D \to \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- $\|\lambda f\| = \sup\{|\lambda f(x)| \colon x \in D\} = \sup\{|\lambda||f(x)| \colon x \in D\}$
  $= |\lambda| \sup\{|f(x)| \colon x \in D\} = |\lambda| \, \|f\|$
- $\|f + g\| = \sup\{|f(x) + g(x)| \colon x \in D\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \colon x \in D\} \leq$
  $\sup\{|f(x)| + \sup\{|g(y)| \colon y \in D\} \colon x \in D\} = \sup\{|f(x)| + \|g\| : x \in D\} =$
  $\sup\{|f(x)| \colon x \in D\} + \|g\| = \|f\| + \|g\|$

17. **TODO**Warum ist der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen, $\mathcal{BC}(D, \mathbb{R})$, mit der Supremums-Norm ein Banachraum?

    Answer:

18. Gib ein Beispiel einer Funktionenfolge $f_n \colon [0,1] \to [0,1]$ an, die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergiert.

    Answer: $f_n(x) = x^n$

19. Auf welchen (möglichst großen) Intervallen konvergieren folgende Funktionenfolgen gleichmäßig?

    $$f_n(x) = \tfrac{1}{1+n^2x^2},\; f_n(x) = \exp(-nx^2),\; f_n(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

    Answer:

20. Was ist die Umkehrfunktion von $\exp(x)$. Welche Funktionalgleichung erfüllt sie? Wo ist sie definiert? Wo ist sie stetig?

    Answer: Since exp is strictly monotonous and continuous, it's inverse exists and it's also continuous at its respective domain of definition:

    $$\log \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \log := \exp^{-1}$$

    Since it's the inverse of a continuous function, it's continuous everywhere.

21. Wie ist die allgemeine Potenz x^α für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ definiert?

    Answer: $x^\alpha = e^{\log x \alpha}$