1. Wann heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar? Wie lässt sich die Ableitung geometisch interpretieren?

   Answer: If the $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ exists, then we call the function f differentiable in the x_0 point. We call the value of $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ the derivative of the function f in point x_0 and we denote it with $f'(x_0)$. Whenever the derivative of a function exists, it's unique.

   The value of the $f'(x_0)$ is the coefficient of x in the best linear approximation of f at point x_0, and it's the slope of the tangent line drawn to the function at the point $(x_0, f(x_0))$.

2. Gib Beispiele für Funtionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die

   (a) stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar;
   (b) differenzierbar, aber nicht gleichmäßig stetig;
   (c) differenzierbar, aber in $x_0 = 0$ nicht stetig differenzierbar sind

   Answer:

   (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = x^2$
   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3. Was bedeuten die Landau-Symbole $\mathcal{o}(h)$, $\mathcal{O}(h^2)$ und $\mathcal{o}(1)$? Wie lassen sich Stetigkeit und Differenzierbarkeit mit ihrer Hilfe ausdrücken?

   Answer:

   (a) $f(h) = \mathcal{o}(h) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$
   (b) $f(h) = \mathcal{O}(h^2) \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{h^2}\right| < \infty$
   (c) $f(h) = \mathcal{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(h) = 0$

   If there is a number $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + \mathcal{o}(h)$, then we say that the function f is differentiable in the x_0 point.

   We say that f is continuous in x_0 if $f(x_0+h) = f(x_0) + \mathcal{o}(1)$

4. Für welche reellen α ist $|x|^\alpha$ in $x = 0$ reell differenzierbar?

   Answer:

5. Wie lautet die Produktregel für Ableitungen? Warum gilt sie (Beweis)?

   Answer:

   Consider two functions f and g that are both differentiable in some x_0 point of their domain. Then the fg function is also differentiable in x_0 and $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

   Proof:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x)g(x_0+h) + f(x)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x))g(x_0+h) + f(x)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h}
\end{aligned}$$

Since g is continuous in x_0 and the $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ and $\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x)}{h}$ exist, thus the above limit also exists and

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} g(x_0+h) + f(x)\frac{g(x_0+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

6. Wie lauten Quotienten- und Kettenregel für Ableitungen?

   Answer:

   Division: Suppose that both f and g functions are differentiable in x_0 and furthermore suppose that $g(x_0) \neq 0$. Then the function $\frac{f}{g}$ is also differentiable in x_0 and $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

   Chain rule: Suppose that g is differentiable in some x_0 point and f is differentiable in $y_0 = f(x_0)$. Then $f \circ g$ is also differentiable in x_0 and $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

7. Was sind die Ableitungen folgender Funktionen nach x?

   $$e^x \sin x \qquad \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \exp(-x^2) \qquad \log\frac{1+x}{1-x} \qquad x^x$$

   Answer:

   (a) $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$ from the product rule because $\exp' = \exp$ and $\sin' = \cos$
   (b) Suppose that $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Then $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ from the rule of division
   (c) $(\exp(-x^2))' = -2x\exp(-x^2)$ from the chain rule
   (d) For $x > 1$: $(\log\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}(\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1-x}{1+x}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}$
   (e) For $x > 0$: $(x^x)' = (\exp(x\log x))' = x^x(\log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$

8. Wann besitzt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion f^{-1}?

   Answer: (VERIFY) Suppose that f is differentiable everywhere and either strict monotone increasing or decreasing on $\mathbb{R}$. Then f is continuous (from the differentiability) and its inverse exists (because it's continuous and strict monotone increasing).

   The inverse function f^{-1} will be differentiable in some $y_0 = f(x_0)$ point if $f'(x_0) \neq 0$ and in this case $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

9. Wie lautet der Mittelwertsatz (der Differentialrechnung)? Wie lautet der Satz von Rolle?

   Answer:

   Mean Value Theorem: Consider some continuous function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ which is differentiable on (a,b). Then $\exists c \in (a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

   Rolle: Consider some continuous function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ which is differentiable on (a,b), and suppose that $f(a) = f(b)$. Then $\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = 0$

10. Warum gilt der Satz von Rolle (Beweisskizze)?

    Answer: TODO

11. Wie lauten die Regeln von de l'Hôpital?

    Answer: CHECK Consider two functions f, g that are differentiable in some x_0 point. If $f(x_0) = g(x_0) = 0$ and $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ exists, then $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ exists as well and $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

12. Welche Werte haben die stetigen Fortsetzungen folgender Funktionen in $x = 0$?

$\frac{\sin x}{x}$ $\qquad$ $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{\log(1+x)}{x}$ $\qquad$ $\frac{x}{e^x - 1}$

Answer:

13. Berechne

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Answer:

14. Wie lauten die Ungleichungen von Young und Hölder?

Answer:

15. Skizziere die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, beschreibe ihre Nullstellen, Ableitungen, Monotonie, Konvexität und Konkavität, und erläutere unsere Definition von π.

Answer:

16. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Welche (notwendige) Bedingung ist erfüllt, wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum besitzt? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum?

Answer:

17. Wann heißt eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex? Wann heißt sie strikt konvex?

Answer:

18. Die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal diferenzierbar. Wie lassen sich Konvexität und strikte Konvexität durch Bedingungen an die zweite Ableitung ausdrücken?

Answer:

19. Wieviele Minima bzw. Maxima kann eine strikt konvexe Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ haben? (Gib alle möglichen Zahlen an.)

Answer:

20. Wo sind (reelle) Potenzreihen differenzierbar? Wie lautet die Ableitung?

Answer:

21. Wie ist der Raum $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert? Was bedeutet seine Vollständigkeit für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung einer Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Answer:

22. Wie lautet das n-te Taylor-Polynom? Wie kann das Restglied ausgedrückt werden?

Answer:

23. Wann (und wo) wird eine reelle Funktion durch ihre Taylor-Reihe dargestellt? Gib ein Beispiel und ein Gegenbeispiel.

Answer:

24. Wie lauten die Taylor-Reihen folgender Funktionen in $x_0 = 0$?

$$e^x,\ \sin x,\ \arctan x,\ (1+x)^\alpha,\ \log(1+x)$$

Answer: