1. Wann heißt eine Reihe konvergent, wann absolut konvergent?

   Answer: The series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges when the sequence of partial sums $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converges. The series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges absolutely, when the series $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converges.

2. Für welche komplexen q existiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$? Welchen Wert hat die Summe?

   Answer: It exists for $|q| < 1$, and $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

   $$s_n = s_{n-1} + 1, s_{n-1} = s_n - q^n \Rightarrow s_n = q(s_n - q^n) + 1$$

   thus $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. s_n converges exactly when $|q| < q$.

3. Warum divergiert die harmonische Reihe?

   Answer: For a similar argument that is used in the proof of the Verdichtungs-Kriterium: $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > \sum_{k=0}^{n} 2^n \frac{1}{2^n} = n$ (note: indexes might be off-by-one, but this is the main idea).

4. Wann konvergiert eine Reihe positiver Summanden?

   Answer: When sequence of partial sums is bounded.

5. Wie lauten Cauchy-, Majoranten-, Verdichtungs- und Leibniz-Kriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?

   TODO: only from the top of my head, compare it against the lecture notes Answer:

   - Cauchy-criterium: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges exactly if $\forall \epsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall m, n > N\colon\ \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon$
   - Majorant: consider two nonnegative series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. If $0 \geq a_n \leq b_n$ for almost all $n \in \mathbb{N}$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges, then so is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   - Verdichtungs: Consider $(a_n) \geq 0$ monoton decreasing terms. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges exactly when $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$
   - Leibniz: Consider $(a_n) \geq 0$ monoton decreasing. Then $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges.

   TODO: only from the top of my head, compare it against the lecture notes

6. Wie lauten Wurzel- und Quotientenkriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?

   Answer:

   - Root-test: if $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
   - Ratio-test: if $a_n = 0$ for at most finitely many $n \in \mathbb{N}$ and $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.

7. Bei welchen der folgenden Reihen gibt das Quotientenkriterium Aufschluss über Konvergenz oder Divergenz?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$$

   Answer:

   - $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{n!}{n^n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|^n = 1/e < 1 \Rightarrow$ converges
   - $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| = 1 \Rightarrow$ inconclusive
   - $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(3+(-1)^n)^n}{(3+(-1)^{n+1})^{n+1}}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{4^n}{2^{n+1}}\right| = 1 \Rightarrow$ inconclusive

8. Wie lautet der kleine Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?

   Answer: Consider any $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut convergent series and $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutation. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau^{-1}(n)}$ is also absolutely convergent and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau^{-1}(n)}$ **TODO: only from the top of my head, compare it against the lecture notes**

9. Wie lautet der große Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?

   Answer:TODO

10. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

   Answer:

   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges (Verdichtungs-Kriterium)
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converges (Leibniz), but not absolutely, see previous point
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converges absolutely, since $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges (Verdichtungs-Kriterium)

- if $x \neq 0$ then $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/(n)!}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 \Rightarrow$ converges (from Quotientenkriterium). If $x = 0$ then it's converges trivially

11. Für welche reellen/komplexen s konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s}$ der Riemannschen ζ-Funktion?

    Answer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n)^{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-q})^n$ which converges for $1 < q \in \mathbb{R}$ (from geometric series), and we don't know for $q \in \mathbb{C}$

12. Was ist eine Potenzreihe? Was ist ihr Konvergenzradius? Wie berechnet er sich?

    Answer:

13. Wann ist das Produkt zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe? Wie lautet sie? Wie hängen die Konvergenzradien der Potenzreihen und ihres Produktes zusammen?

    Answer:

14. Wie lauten die Dastellungen von $\exp(x), \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x)$ als Potenzreihen?

    Answer:

15. Wie hängen $e^z, \sin(z), \cos(z), \sinh(z), \cosh(z)$ im Komplexen zusammen?

    Answer: