1. Was ist ein normierter Raum? Wann sagt man, dass ein normierter Raum Banach ist?

   Answer: Let V be a vector space over $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) and $\|.\| : V \to \mathbb{R}$. The pair $(V, \|.\|)$ called a normed vectorspace if $\|.\|$ satisfies the following properties:

   (a) $\forall v \in V\colon\ \|v\| \geq 0$ and $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
   (b) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}\colon\ \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$
   (c) $\forall u, v \in V\colon\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

   We call furthermore $(V, \|.\|)$ normed space a Banach space, if it's complete, that is: every Cauchy sequence has a limit in V.

2. Wann sagt man, dass eine Funktion zwischen zwei normierten Räumen stetig ist?

   Answer: Condider $(U, \|.\|_U)$ and $(V, \|.\|_V)$ normed spaces, $A \subset U$ and a function $f\colon A \to V$. f is continuous in $a \in A$, if $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A\colon\ \|x - a\|_U < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_V < \varepsilon$. f is continuous on A, if it's continuous in every point of A.

3. Seien X und Z normierte Räume. Was ist die Operatornorm $\|L\|$ einer linearen Abbildung $L\colon X \to Z$? Was kann man über $\|L\|$ sagen, wenn L stetig ist?

   Answer: $\|L\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Z = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Lx\|_Z}{\|x\|_X}$. Linear operators are continuous if and only if they are bounded.

4. Was ist eine Regelfunktion? Welche äquivalenten Charakteriesierungen gibt es (wenigstens 2)?

   Answer: Let V be a Banach space (including $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$). The set $\mathcal{R}([a,b], V)$ of regulated functions is the closure of the set $\mathcal{T}([a,b], V)$ of step functions with regards to the set $B([a,b], V)$ of bounded functions under the $\|.\|_{\text{sup}}$ norm. Equivalently:

   (a) $f \in B([a,b], V)$ is a regulated function $\Leftrightarrow \forall c \in [a,b]\colon \exists \lim_{x \to c^+} f(x), \lim_{x \to c^-} f(x)$
   (b) $f \in B([a,b], V)$ is a regulated function $\Leftrightarrow \exists (f_n) \in \mathcal{T}([a,b], V)$ uniformly convergent sequence of stepfunctions such that $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ (in $B([a,b], V)$)

5. Gib je zwei Beispiele an für

   (a) Regelfunktionen und
   (b) Funktionen, die keine Regelfunktionen sind.

   Answer:

   (a) Regelfunktionen:
      i. $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$
      ii. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   (b) Keine Regelfunktionen:
      i. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
      ii. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. Wie ist das Integral einer Regelfunktion definiert?

   Answer: Let V be a Banach space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Consider any $f \in \mathcal{R}([a,b],V)$ regulated function, and $f_n \in \mathcal{T}([a,b],V)$ sequence of step functions, that converge uniformly to f. Let furthermore $P_n = \{p_0, \dots, p_{k_n}\}$ be such a partition of $[a,b]$ for which $f_n \big|_{[p_i, p_{i+1}]} = c_i \in V$ constant (with the potential exception of the endpoints). Let the $\int_a^b : \mathcal{T}([a,b],V) \to V$ linear operator be defined as $\int_a^b f_n = \sum_{i=0}^{k_n} c_i(p_{i+1} - p_i)$. Since $\mathcal{T}([a,b],V)$ is a subspace of $\mathcal{R}([a,b],V)$, there exists a unique continuous continuation $\overline{\int_a^b} \colon \mathcal{R}([a,b],V) \to V$ of the linear operator $\int_a^b$ such that their values stays the same on $\mathcal{T}([a,b],V)$. Since $\overline{\int_a^b}$ is continuous, it "commutes" with the limit. Let thus $\int_a^b f := \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

7. Wie hängen Integration und Differentiation zusammen?

   Answer: Let V be a Banach space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and $f \colon [a,b] \to V$ function. Let furthermore $F(x) = \int_a^x f$. If f is continuous in $c \in [a,b]$, then F is differentiable in c, and $F'(c) = f(c)$. Furthermore if f is continuous, and F is such a function, that $F' = f$, then $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, and we call F the primitive function of f.

8. Welchen elementaren Funktionen entsprechen folgende unbestimmte Integrale?

   $$\int \sin t\, dt \qquad \int \frac{dt}{t} \qquad \int \sqrt[n]{t+1} \qquad \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad \int t^\alpha\, dt \ (\alpha \neq -1)$$

   Answer:

   - $\int \sin t\, dt = \cos t$
   - $\int \frac{dt}{t} = \log t$
   - $\int \sqrt[n]{t+1} = \frac{n}{n+1}(t+1)^{1+\frac{1}{n}}$
   - $\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t$
   - $\int t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$ $(\alpha \neq 1)$

9. Wie lauten die Regeln für partielle Integration und Substitution? Gib außerdem jeweils ein nichttriviales Beispiel an.

   Answer:

   Partial Integration: Consider $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{K})$ with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Then $\int_a^b f'(t)g(t)\, dt = f(t)g(t) \big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\, dt$

   Example: $\int \log x\, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x\log x - x$

   Substitution: Consider $[a,b] \subset I_1, I_2$ intervals, Z Banach space, and $f : I_2 \to Z$ continuous, and $g \colon I_1 \to I_2$ continuously differentiable. Then $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt$

   Example: Consider $\int_a^b \tan x\, dx$ and let $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \cos x$. Then $\int_a^b \tan x\, dx = \int_a^b \tan x\, dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{f(a)} f(x)\, dx = \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x}\, dx = \log x \big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} = \log(\cos(b)) - \log(\cos(a))$

10. Wie integriert man rationale Funktionen? Welche elementaren Integrale muss man dazu kennen?

    Answer: **TODO** Consider $p, q \in \mathbb{K}[x]$ polynomials over $\mathbb{K}$ with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

11. Was sagt das Riemann-Lebesgue Lemma? Skizziere einen Beweis für das Lemma.

Answer: Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuously differentiable. Then $\lim_{|\omega|\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(\omega t)\,dt = 0$. *Proof:*

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(\omega t)\,dt\right| &= \left|-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} f(t)\,\Big|_a^b + \frac{1}{\omega}\int_a^b \cos(\omega t) f'(t)\,dt\right| \\
&< \left|\frac{1}{\omega}\right| \left(|\cos(\omega b) f(b)| + |\cos(\omega a) f(a)| + \int_a^b \left|\cos(\omega t) f'(t)\right|\,dt\right) \\
&\overset{\text{cos bounded}}{<} \left|\frac{1}{\omega}\right| \left(|\cos(\omega b) f(b)| + |\cos(\omega a) f(a)| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\,dt\right) \overset{|\omega|\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

12. Wann dürfen Regelintegral und Grenzwert einer Funktionenfolge vertauscht werden?

    Answer: Consider $f_n \in \mathcal{R}([a,b],V)$ with V Banach space. If f_n converge uniformly to some $f \in \mathcal{R}([a,b],V)$, then $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$

13. Wie ist das Riemann-Integral definiert?

    Answer: Consider the interval $[a,b]$, a function $f\colon [a,b]\to\mathbb{K}$ (with $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), and for any partition $P=\{a=p_0<p_1<\dots<p_n=b\}$ of $[a,b]$ let $L(f,P)=\sum_{i=1}^n \inf_{x\in(p_{i-1},p_i)} f(x)(p_i-p_{i-1})$ and $U(f,P)=\sum_{i=1}^n \sup_{x\in(p_{i-1},p_i)} f(x)(p_i-p_{i-1})$. Let furthermore $U^*(f)=\inf_P U(f,P)$ and $L^*(f)=\sup_P L(f,P)$. If $U^*(f)=L^*(f)$, then we say that f is Riemann integrable, and $\int_a^b f = U^*(f)=L^*(f)$.

14. Was ist eine Lebesgue-Nullmenge?

    Answer: $A\subset\mathbb{R}$ is a null set, if $\forall\epsilon>0$ there is an at most countable collection of open intervals $I=\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ such that $A\in\cup_{I_i\in I} I_i$ and $\sum_{I_i\in I}|I_i|<\epsilon$

15. Wie ist das Lebesgue-Integral definiert?

    Answer:

16. Gib je ein Beispiel für eine Funktion an, die

    (a) Riemann integrierbar ist, aber ist keine Regelfunktion.

    (b) Lebesgue integrierbar ist, aber nicht Riemann integrierbar.

    Answer:

    (a) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto \begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1)\\ 0 & x=0\end{cases}$

    (b) The Dirichlet function

17. Was sagt der Satz von Beppo Levi über monotone Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen?

    Answer:

18. Was sagt der Satz zur majorisierten Konvergenz über die Vertauschbarkeit von Lebesgue-Integral und Grenzwert einer Funktionenfolge?

    Answer:

19. Wie lautet die Hölder-Ungleichung für integrierbare Funktionen?

    Answer:

20. Wie lautet der Schrankensatz? Warum gilt der Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) nicht in höheren Dimensionen?

    Answer:

    Let Z Banach space and $f \in C^1([a,b], Z)$. Then $\exists \zeta \in (a,b)\colon \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\zeta)\|\,(b-a)$. The mean value theorem of $f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b-a)$ does not hold in general. Consider $Z = \mathbb{R}^3$ and $f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \varepsilon t \end{pmatrix}$ with some $\varepsilon > 0$. Then $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \varepsilon \end{pmatrix}$. Now if we consider the $[0, 2\pi]$ interval, then $f(2\pi k) - f(0) = 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \neq 2\pi f'(\zeta)$ $(\forall \zeta \in [0, 2\pi])$

21. Wie lautet die Integraldarstellung von Lagrange für das Restglied der Taylorentwicklung?

    Answer: Let $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ open interval, $n \in \mathbb{N}_0, Z$ Banach space and $f \in C^{n+1}(I, Z)$. If $x_0 \in (a,b)$, then $\forall x \in (a,b)\colon f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

22. Wie lautet die Trapezregel?

    Answer: Consider $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$. Then $\exists \zeta \in (0,1)\colon \int_0^1 f = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(\zeta)$

23. Wie lassen sich Integrale dank der Trapezregel approximieren?

    Answer: Let $f \in C^2([a,b], \mathbb{R}), C := \max_{x\in[a,b]} |f''|, n \in \mathbb{N}, h := \frac{b-a}{n}$. Then it holds that

    $$\left| \int_a^b f - \left(\frac{1}{2} f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + \frac{1}{2} f(a_n) \right) h \right| \leq \frac{1}{12} C (b-a) h^2$$

24. Was sind uneigentliche Integrale?

    Answer: Let $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ and $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ integrable over every finite $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ interval. Consider furthermore $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$ respectively monotone decreasing and increasing sequences such that $a < a_n$ and $b_n < b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ and suppose furthermore that $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. If for every such sequence the limit $\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f$ exists and has the same value, then let $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f$ and call it the improper integral of f over (a,b).

25. Für welche reellen Exponenten α konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^\alpha\,dt$, für welche das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^\alpha\,dt$?

    Answer:

    - $\int_0^1 t^\alpha\,dt = \frac{1}{\alpha+1}$ $(-1 < \alpha \in \mathbb{R})$
    - $\int_1^\infty t^\alpha\,dt = -\frac{1}{q+1}$ $(-1 > q \in \mathbb{R})$

26. Was bedeutet absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale? Gib Beispiele

    (a) absolut konvergenter;

    (b) konvergenter, aber nicht absolut konvergenter;

    (c) nicht konvergenter

    uneigentlicher Integrale.

    Answer: Consider the improper integral $\int_a^b f$. If $\int_a^b |f|$ converges, then so is $\int_a^b f$, and we call the improper integral absolulte convergent.

(a) absolute convergent: $\int_0^1 \sin \frac{1}{t}\, dt$

(b) convergent, but not absolutely: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \sin t\, dt$

(c) not convergent: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$

27. Sei $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ monoton fallend. Wie hängen $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ und $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ zusammen?

    Answer: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converges if and only if $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ converges. Furthermore

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \le \int_1^{\infty} f(t)\, dt \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

28. Welche der folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale existieren? Welche konvergieren absolut?

    - $\int_1^{\infty} \cos t\, dt$
    - $\int_1^{\infty} \cos t^2\, dt$
    - $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$
    - $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\, dt$
    - $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$
    - $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2}\, dt$

    Answer: TODO

29. Warum konvergiert die Reihe der Riemannsche ζ-Funktion $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$?

    Answer: Let $q = \operatorname{Re} s$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^s}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$ converges iif $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^q}\, dt$ converges. But this improper integral exists exactly when $1 < q \in \mathbb{R}$. Thus if $\operatorname{Re} s > 1$ then $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ is absolutely convergent, and thus also converges conditionally.

30. Wie ist die Gamma-Funktion definiert, und welche Funktionalgleichung erfüllt sie?

    Answer: Let $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0)$. Then $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ and since $\Gamma(1) = 1 = 0!$ it holds follows from a simple induction that $\Gamma(n+1) = n!$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$.

31. Wie lautet die Stirling-Formel zur Approximation von $n!$?

    Answer:

32. Wie ist die Faltung $\varphi \star f$ von zwei Funktionen $\varphi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert?

    Answer:

33. Was ist eine Dirac-Folge? Gib eine Definition und wenigstens ein Beispiel an.

    Answer:

34. Sei $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dirac-Folge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = 0$ für $|x| \ge 1$. Bestimme $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n * f)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

    Answer:

35. Wie lautet den Approximationssatz von Weierstrass?

    Answer:

36. Welche Funktionen können durch Polynome gleichmäßig approximiert werden? Mit welcher Grundidee lassen sich approximierende Polynome zu einer gegebenen Funktion f konstruieren?

    Answer:

37. Was ist ein Hilbertraum? Gib zwei unendlich-dimensionale Beispiele.

    Answer:

38. Was sind die Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$? Wie lautet die Fourier-Reihe zu f ?

    Answer:

39. Beschreibe wie 2π-periodische $f \in L^2$, die Fourier-Reihe $\hat{f}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$, und Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ miteinander zusammenhängen.

    Answer:

40. Wie hängen Fourier-Reihen mit Obertönen in der Musik zusammen?

    Answer: