1. Was ist eine Metrik? Gib drei verschiedene Beispiele!

   Answer: Consider E arbitrary set. The function $d : E \times E \to \mathbb{R}$ is a metric, if satisfies the following conditions:

   - $\forall x, y \in E\colon d(x, y) \geq 0$ and $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   - $\forall x, y \in E\colon d(x, y) = d(y, x)$
   - $\forall x, y, z \in E\colon d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

2. Wie sind offene Teilmengen eines metrischen Raumes definiert, wie abgeschlossene Teilmengen?

   Answer: Consider (E, d) metric space, and let $x \in E$. $\forall \varepsilon > 0$ let's define $B_\varepsilon(x) := \big\{y \in E \;\big|\; d(x, y) < \varepsilon\big\}$, the open ball of radius ε centered around x. The $A \subset E$ set is open, if $\forall x \in A\colon \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset A$. The $B \subset E$ set is closed, if its complement $E \setminus B$ is open.

3. Sind $\left\{\begin{array}{c}\text{endliche}\\ \text{abzählbare}\\ \text{beliebige}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\text{Durchschnitte}\\ \text{Vereinigungen}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\text{offener}\\ \text{abgeschlossener}\end{array}\right\}$ Mengen wieder offen bzw. abgeschlossen?

   Answer: Arbitrary union of open sets is open. Finite intersection of open sets is open. Arbitrary intersection of closed sets is closed. Finite union of closed sets is closed.

4. Wie sind Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes definiert?

   Answer: Consider (E, d) metric space, and let $A \subset E$.

   The closure of A is $\overline{A} = \big\{x \in E \;\big|\; \forall \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\big\}$

   The inner of A is $\mathring{A} = \big\{x \in A \;\big|\; \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset A\big\}$

   The boundary of A is $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

5. Was sind Abschluss, Inneres und Rand folgender Teilmengen der reellen Zahlen (mit deren Standardmetrik)?

   $$\mathbb{Z} \qquad\qquad \mathbb{Q} \qquad\qquad \cup_{k\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k}\right)$$

   Answer:

6. Wann ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes dicht?

   Answer:

7. Wann ist ein metrischer Raum zusammenhängend?

   Answer:

8. Wie sind Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes definiert? Wann heißt ein metrischer Raum total unzusammenhängend?

   Answer:

9. Sind $\left\{\begin{array}{c}\text{endliche}\\ \text{abzählbare}\\ \text{beliebige}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\text{Durchschnitte}\\ \text{Vereinigungen}\end{array}\right\}$ zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend?
   Gib gegebenfalls ein Gegenbeispiel!

   Answer:

10. Sind $\left\{\begin{array}{c}\text{endliche}\\ \text{abzählbare}\\ \text{beliebige}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\text{Durchschnitte}\\ \text{Vereinigungen}\end{array}\right\}$ kompakter Mengen wieder kompakt? Gib gegebenfalls ein Gegenbeispiel!

    Answer:

11. Warum ist in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge?(Beweise!)

    Answer:

12. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?

    Answer:

13. Was sind generische Mengen?

    Answer:

14. Wie lautet der Satz von Baire?

    Answer:

15. Wann heißt ein metrischer Raum perfekt?

    Answer:

16. Zeige, dass jeder nichtleere, vollständige, perfekte metrische Raum überabzählbar ist.

    Answer:

17. Was versteht man unter einer Cantor-Menge? Gib ein Beispiel an!

    Answer:

18. Wann heißt eine Folge in einem metrischen Raum konvergent? Wann heißt sie Cauchy-Folge?

    Answer:

19. Wann heißt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig? Gib vier verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen!

    Answer:

20. Sind unter einer stetigen Abbildung $f : E \to E'$ zwischen metrischen Räumen die $\left\{\begin{array}{c}\text{Bilder}\\ \text{Urbilder}\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c}\text{offener}\\ \text{abgeschlossener}\\ \text{vollstängiger}\\ \text{zusammenhängender}\\ \text{kompakter}\end{array}\right\}$ Teilmengen wieder $\left\{\begin{array}{c}\text{offener}\\ \text{abgeschlossener}\\ \text{vollstängiger}\\ \text{zusammenhängender}\\ \text{kompakter}\end{array}\right\}$? Gib gegebenfalls ein Gegenbeispiel!

    Answer:

21. Wann heißen zwei Metriken äquivalent?

    Answer:

22. Wann heißen zwei Normen äquivalent?

    Answer:

23. Sei E ein metrischer Raum. Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen $f\colon E \to \mathbb{R}$

    Answer:

24. Gib drei verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen von kompakten metrischen Räumen! Gib außerdem je ein Beispiel eines kompakten und eines nicht kompakten Raumes!

    Answer:

25. Sei E ein metrischer Raum. Wann heißt eine Teilmenge $A \subset E$ relativ kompakt?

    Answer:

26. Wie lassen sich die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ charakterisieren?

    Answer:

27. Wie lautet der Satz von Arzela-Ascoli?

    Answer:

28. Wann sagt man, dass eine Abbildung Lipschitz-stetig ist? Wann ist eine Lipschitzstetige Abbildung eine Kontraktion?

    Answer:

29. Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?

    Answer:

30. Sei E ein metrischer Raum und $f\colon E \to E$ stetig. Wann sagt man, dass $\emptyset \neq A \subset E$ selbstähnlich ist? Was ist ein *iterated function system*?

    Answer: