

1. Wie lautet das *Wohlordnungsprinzip*?

**Answer:** Any nonempty subset of the natural numbers has a unique smallest element, that is:  
 $\forall M \subset \mathbb{N} (\emptyset \neq M) \exists! m \in M: \forall n \in M: m \leq n$

2. Was ist *Vollständige Induktion*?

**Answer:** Consider a subset  $A \subset \mathbb{N}$ . If  $1 \in A$  and  $(n \in A) \Rightarrow (n+1) \in A$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$ ), then  $A = \mathbb{N}$ . This is the same theorem as in the lecture, applied to the truth set of a predicate.

3. Zeige mittels Vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Answer:**

- $n = 1$ :

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

- $n \Rightarrow n+1$ :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

4. Was ist die *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl  $n$  zur Basis  $b$ ?

**Answer:** Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $b \geq 2$ . Then there are some unique numbers  $k \in \mathbb{N}$  and  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, \dots, b-1\}$  with  $a_k \neq 0$  such that  $\sum_{i=0}^k a_i b^i = n$

5. Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wann nennt man eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  *injektiv*, wann *surjektiv*, wann *bijektiv*?

**Answer:**

- *injective*:  $\forall a, b \in A: f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
- *surjective*:  $\forall b \in B: \exists a \in A: f(a) = b$
- *bijjective*: whenever  $f$  is injective and surjective

6. Was sind die *Binomialkoeffizienten*  $\binom{n}{k}$ , und welche Rekursionsformel erfüllen sie? Wie lässt sich die Rekursionsformel *kombinatorisch* (d.h. als Abzählung von Teilmengen) interpretieren?

**Answer:** The binomial coefficients of  $n$  are the coefficients that occur when raising two numbers  $x, y \in \mathbb{R}$  to the  $n^{\text{th}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) power:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Combinatorically  $\binom{n}{k}$  is the number of different subsets of size  $k$  of a set of size  $n$ .

For  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  holds  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ , where  $\binom{n}{0} = 1$  and  $\binom{n}{n} = 1$ . The binomial coefficient furthermore fulfills the following:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

7. Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n ?$$

**Answer:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}: (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$  where  $x^0 = 1, 0^0 = 1, 0! = 1$

With  $x = y = 1: 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

8. Was ist eine *rekursiv* definierte Folge? Gib Beispiele an.

**Answer:** A sequence  $(x_n) \in \mathbb{R}$  is defined recursively if there is a  $k \in \mathbb{N}$ , a function  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  and initial elements  $x_1, x_2, \dots, x_k$  such that  $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1})$  ( $\forall n > k$ ). A recursively defined sequence is well defined. This definition is equivalent to the one given in the lecture with  $k = 1$ .

With  $k = 2, x_1 = 1, x_2 = 2$  and  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  with  $f(a, b) = a + b$  consider the  $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$  sequence, known as the Fibonacci-sequence.

9. Was sind *endliche, abzählbare* bzw. *überabzählbare* Mengen? Gib Beispiele an.

**Answer:** A set  $B$  has a cardinality of  $n \in \mathbb{N}$  when there is a bijection between  $B$  and  $\{1, 2, \dots, n\}$ . We call a set  $B$

- (a) finite, whenever  $(B) = n \in \mathbb{N}$ . Example:  $B = \{42\}$
- (b) countable, whenever there is a bijection  $\phi: B \rightarrow \mathbb{N}$ . Example:  $B = \mathbb{Q}$
- (c) uncountably infinite, whenever neither 9a or 9b holds. Example:  $B = [0, 1]$

10. Zeige, dass  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist.

**Answer: TODO from Lecture 05**

11. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Was ist eine *obere Schranke* für  $A$ ? Wann heißt  $A$  nach oben beschränkt?

**Answer:**  $a \in \mathbb{R}$  is an upper bound of  $A$  if  $\forall x \in A: x \leq a$ .  $A$  is bounded above if it has an upper bound. Notation:  $A \leq a$

12. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Wie sind *Supremum* und *Infimum* von  $A$  definiert? Wann besitzt  $A$  ein Supremum, wann ein Maximum?

**Answer:** Supremum is the lowest upper bound.  $\alpha = \sup A$  if  $\alpha$  is an upper bound and for any other  $a$  upper bound of  $\alpha \leq a$ . Every  $A$  set that is bounded above has a lowest upper bound.  $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$  and whenever  $\max A$  exists  $\max A = \sup A$ .

13. Sei  $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Bestimme  $\inf B$  und  $\sup B$ .

**Answer:**  $\sup B = 1, \inf B = 0$

14. Gib ein Beispiel einer Menge reeller Zahlen an, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

**Answer:**  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$

15. Was ist ein *Dedekindscher Schnitt*?

**Answer:** Consider  $\emptyset \neq L, R \subset \mathbb{R}$ .  $(L|R)$  is called a Dedekind-cut in  $\mathbb{R}$  whenever the following conditions are both satisfied:

- $L < R$

- $L \cup R = \mathbb{R}$

A  $t \in \mathbb{R}$  number is called *Trennzahl* of  $(L|R)$  if  $L \leq t \leq R$  holds.

The above is also defined in  $\mathbb{Q}$ .

16. Wie lautet das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen?

**Answer:** Every  $(L|R)$  Dedekind-cut in  $\mathbb{R}$  has one and only one *Trennzahl* (in  $\mathbb{R}$ ). In comparison not every Dedekind-cut in  $\mathbb{Q}$  has a *Trennzahl* in  $\mathbb{Q}$ .

17. Definiere die *komplexen Zahlen* als Paare reeller Zahlen mit geeigneten Additions- und Multiplikationsregeln.

**Answer:** For  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  we obtain a (commutative) field with the following addition and multiplication operations:

- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}: (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}: (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

18. Was ist der *Betrag* einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$ ?

**Answer:**  $\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \ (a, b \in \mathbb{R}): |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$

19. Was ist die zu  $z$  *komplex konjugierte* Zahl  $\bar{z}$ ?

**Answer:**  $\forall z \in \mathbb{C}: \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$

20. Wie hängen  $z$  und  $\bar{z}$  mit  $|z|$  zusammen?

**Answer:**  $\forall z \in \mathbb{C}: |z|^2 = z\bar{z}$

21. Wie lautet der *Fundamentalsatz der Algebra*?

**Answer:** Every polynomial of degree  $n$  in one variable with complex coefficients has exactly  $n$  (counted with multiplicities) complex roots. If  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  ( $a_n \neq 0$ ) and the roots are  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  then we get through polynomial division  $p(x) = a_n \prod_{k=0}^n (x - z_k)$  ( $\forall x \in \mathbb{C}$ )

22. Wie hängen komplexe Zahlen  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit Drehstreckungen in  $\mathbb{R}$  zusammen?

**Answer:** Consider  $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ , the set of rotation-dilation matrices, with the standard matrix operations (addition, multiplication). Then with  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow C$  bijection where  $\phi(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix}$  we get an isomorphism between  $C$  and  $\mathbb{C}$ .

23. Was sind Quaternionen?

**Answer:** Consider  $Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ , the set of quaternions. Through the standard matrix operations on  $Q$  we obtain a non-commutative field.