1. Was ist ein normierter Raum? Wann sagt man, dass ein normierter Raum Banach ist?

   Answer: Let V be a vector space over $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) and $\|.\| : V \to \mathbb{R}$. The pair $(V, \|.\|)$ called a normed vectorspace if $\|.\|$ satisfies the following properties:

   (a) $\forall v \in V\colon \|v\| \geq 0$ and $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
   (b) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}\colon \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$
   (c) $\forall u, v \in V\colon \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

   We call furthermore $(V, \|.\|)$ normed space a Banach space, if it's complete, that is: every Cauchy sequence has a limit in V.

2. Wann sagt man, dass eine Funktion zwischen zwei normierten Räumen stetig ist?

   Answer: Condider $(U, \|.\|_U)$ and $(V, \|.\|_V)$ normed spaces, $A \subset U$ and a function $f\colon A \to V$. f is continuous in $a \in A$, if $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A\colon \|x - a\|_U < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_V < \varepsilon$. f is continuous on A, if it's continuous in every point of A.

3. Seien X und Z normierte Räume. Was ist die Operatornorm $\|L\|$ einer linearen Abbildung $L\colon X \to Z$? Was kann man über $\|L\|$ sagen, wenn L stetig ist?

   Answer: $\|L\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Z = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Lx\|_Z}{\|x\|_X}$. Linear operators are continuous if and only if they are bounded.

4. Was ist eine Regelfunktion? Welche äquivalenten Charakteriesierungen gibt es (wenigstens 2)?

   Answer: Let V be a Banach space ($\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ included). The set $\mathcal{R}([a, b], V)$ of regulated functions is the closure of the set $\mathcal{T}([a, b], V)$ of step functions with regards to the set $B([a, b], V)$ of bounded functions under the $\|.\|_{\text{sup}}$ norm. Equivalently:

   (a) $f \in B([a, b], V)$ is a regulated function $\Leftrightarrow \forall c \in [a, b]\colon \exists \lim_{x \to c^+} f(x), \lim_{x \to c^-} f(x)$
   (b) $f \in B([a, b], V)$ is a regulated function $\Leftrightarrow \exists (f_n) \in \mathcal{T}([a, b], V)$ uniformly convergent sequence of stepfunctions such that $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ (in $B([a, b], V)$)

5. Gib je zwei Beispiele an für

   (a) Regelfunktionen und
   (b) Funktionen, die keine Regelfunktionen sind.

   Answer:

   (a) Regelfunktionen:
      i. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$
      ii. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   (b) Keine Regelfunktionen:
      i. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
      ii. $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. Wie ist das Integral einer Regelfunktion definiert?

   Answer: Let V be a Banach space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Consider any $f \in \mathcal{R}([a,b],V)$ regulated function, and $f_n \in \mathcal{T}([a,b],V)$ sequence of step functions, that converge uniformly to f. Let furthermore $P_n = \{p_0, \ldots, p_{k_n}\}$ be such a partition of $[a,b]$ for which $f_n \big|_{[p_i,p_{i+1}]} = c_i \in V$ constant (with the potential exception of the endpoints). Let the $\int_a^b : \mathcal{T}([a,b],V) \to V$ linear operator be defined as $\int_a^b f_n = \sum_{i=0}^{k_n} c_i(p_{i+1} - p_i)$. Since $\mathcal{T}([a,b],V)$ is a subspace of $\mathcal{R}([a,b],V)$, there exists a unique continuous continuation $\overline{\int_a^b} \colon \mathcal{R}([a,b],V) \to V$ of the linear operator $\int_a^b$ such that their values stays the same on $\mathcal{T}([a,b],V)$. Since $\overline{\int_a^b}$ is continuous, it "commutes" with the limit. Let thus $\int_a^b f := \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

7. Wie hängen Integration und Differentiation zusammen?

   Answer: Let V be a Banach space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and $f \colon [a,b] \to V$ function. Let furthermore $F(x) = \int_a^x f$. If f is continuous in $c \in [a,b]$, then F is differentiable in c, and $F'(c) = f(c)$. Furthermore if f is continuous, and F is such a function, that $F' = f$, then $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, and we call F the primitive function of f.

8. Welchen elementaren Funktionen entsprechen folgende unbestimmte Integrale?

   $$\int \sin t\, dt \qquad \int \frac{dt}{t} \qquad \int \sqrt[n]{t+1} \qquad \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad \int t^\alpha\, dt \ (\alpha \neq -1)$$

   Answer:

   - $\int \sin t\, dt = \cos t$
   - $\int \frac{dt}{t} = \log t$
   - $\int \sqrt[n]{t+1} = \frac{n}{n+1}(t+1)^{1+\frac{1}{n}}$
   - $\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t$
   - $\int t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \ (\alpha \neq 1)$

9. Wie lauten die Regeln für partielle Integration und Substitution? Gib außerdem jeweils ein nicht-triviales Beispiel an.

   Answer: TODO Check, Example

   Partial Integration: Consider $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{K})$ with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Then $\int f'g = fg - \int fg'$

   Substitution: Consider $f, g \in C([a,b],\mathbb{K})$ with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Then $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt$

10. Wie integriert man rationale Funktionen? Welche elementaren Integrale muss man dazu kennen?

    Answer: Consider $p, q \in \mathbb{K}[x]$ polynomials over $\mathbb{K}$ with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

11. Was sagt das Riemann-Lebesgue Lemma? Skizziere einen Beweis für das Lemma.

    Answer:

12. Wann dürfen Regelintegral und Grenzwert einer Funktionenfolge vertauscht werden?

    Answer: Consider $f_n \in \mathcal{R}([a,b],V)$ with V Banach space. If f_n converge uniformly to some $f \in \mathcal{R}([a,b],V)$, then $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

13. Wie ist das Riemann-Integral definiert?

    Answer: Consider the interval $[a,b]$, a function $f \colon [a,b] \to \mathbb{K}$ (with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), and for any partition $P = \{a = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = b\}$ of $[a,b]$ let $L(f,P) = \sum_{i=1}^n \inf_{x\in(p_{i-1},p_i)} f(x)(p_i - p_{i-1})$

and $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in(p_{i-1},p_i)} f(x)(p_i - p_{i-1})$. Let furthermore $U^*(f) = \inf_P U(f,P)$ and $L^*(f) = \sup_P L(f,P)$. If $U^*(f) = L^*(f)$, then we say that f is Riemann integrable, and $\int_a^b f = U^*(f) = L^*(f)$.

14. Was ist eine Lebesgue-Nullmenge?

    Answer: $A \subset \mathbb{R}$ is a null set, if $\forall \epsilon > 0$ there is an at most countable collection of open intervals $I = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ such that $A \in \cup_{I_i\in I} I_i$ and $\sum_{I_i\in I} |I_i| < \epsilon$

15. Wie ist das Lebesgue-Integral definiert?

    Answer:

16. Gib je ein Beispiel für eine Funktion an, die

    (a) Riemann integrierbar ist, aber ist keine Regelfunktion.

    (b) Lebesgue integrierbar ist, aber nicht Riemann integrierbar.

    Answer:

    (a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

    (b) The Dirichlet function

17. Was sagt der Satz von Beppo Levi über monotone Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen?

    Answer:

18. Was sagt der Satz zur majorisierten Konvergenz über die Vertauschbarkeit von Lebesgue-Integral und Grenzwert einer Funktionenfolge?

    Answer:

19. Wie lautet die Hölder-Ungleichung für integrierbare Funktionen?

    Answer: