1. Wie lautet das *Wohlordnungsprinzip*?

   Answer: Any nonempty subset of the natural numbers has a unique smallest element, that is: $\forall M \subset \mathbb{N}\ (\emptyset \neq M) \exists! m \in M : \forall n \in M : m \leq n$

2. Was ist *Vollständige Induktion*?

   Answer: Consider a subset $A \subset \mathbb{N}$. If $1 \in A$ and $(n \in A) \Rightarrow (n+1) \in A\ \ (\forall n \in \mathbb{N}, n > 0)$, then $A = \mathbb{N}$. This is the same theorem as in the lecture, applied to the truth set of a prediate.

3. Zeige mittels Vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Answer:

   - $n = 1$:
     $\sum_{k=1}^{k} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
   - $n \Rightarrow n+1$:
     $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4. Was ist die *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl n zur Basis b?

   Answer: Let $n \in \mathbb{N}$ and $b \geq 2$. Then there are some unique numbers $k \in \mathbb{N}$ and $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, \ldots, b-1\}$ with $a_k \neq 0$ such that $\sum_{i=0}^{k} a_i b^i = n$

5. Seien A und B Mengen. Wann nennt man eine Funktion $f\colon A \to B$ *injektiv*, wann *surjektiv*, wann *bijektiv*?

   Answer:

   - *injective*: $\forall a, b \in A\colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
   - *surjective*: $\forall b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b$
   - bijective: whenever f is injective and surjective

6. Was sind die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$, und welche Rekursionsformel erfüllen sie? Wie lässt sich die Rekursionsformel *kombinatorisch* (d.h. als Abzählung von Teilmengen) interpretieren?

   Answer: The binomial coefficients of n are the coefficients that occur when raising two numbers $x, y \in \mathbb{R}$ to the n^{th} $(n \in \mathbb{N})$ power:

   $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

   Combinatorically $\binom{n}{k}$ is the number of different subsets of size k of a set of size n.

   For $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ holds $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, where $\binom{n}{0} = 1$ and $\binom{n}{n} = 1$. The binomial coefficient furthermore fulfills the following: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

7. Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus, dass
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ ?$$
   Answer: $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\colon (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ where $x^0 = 1, 0^0 = 1, 0! = 1$
   With $x = y = 1$: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

8. Was ist eine *rekursiv* definierte Folge? Gib Beispiele an.

   Answer: A sequence $(x_n) \in \mathbb{R}$ is defined recursively if there is a $k \in \mathbb{N}$, a function $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ and initial elements $x_1, x_2, \dots, x_k$ such that $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1})$ $(\forall n > k)$. A recursively defined sequence is well defined. This definition is equivalent to the one given in the lecture with $k = 1$.

   With $k = 2$, $x_1 = 1, x_2 = 2$ and $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ with $f(a, b) = a + b$ consider the $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ sequence, known as the Fibonacci-sequence.

9. Was sind *endliche*, *abzählbare* bzw. *überabzählbare* Mengen? Gib Beispiele an.

   Answer:

10. Zeige, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

    Answer:

11. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Was ist eine *obere Schranke* für A? Wann heißt A nach oben beschränkt?

    Answer:

12. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wie sind *Supremum* und *Infimum* von A definiert? Wann besitzt A ein Supremum, wann ein Maximum?

    Answer:

13. Sei $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Bestimme $\inf B$ und $\sup B$.

    Answer:

14. Gib ein Beispiel einer Menge reeller Zahlen an, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

    Answer:

15. Was ist ein *Dedekindscher Schnitt*?

    Answer:

16. Wie lautet das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen?

    Answer:

17. Definiere die *komplexen Zahlen* als Paare reeller Zahlen mit geeigneten Additions- und Multiplikationsregeln.

    Answer:

18. Was ist der *Betrag* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$?

    Answer:

19. Was ist die zu z *komplex konjugierte* Zahl $\overline{z}$?

    Answer:

20. Wie hängen z und $\overline{z}$ mit $|z|$ zusammen?

    Answer:

21. Wie lautet der *Fundamentalsatz der Algebra*?

    Answer:

22. Wie hängen komplexe Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit Drehstreckungen in $\mathbb{R}$ zusammen?

    Answer:

23. Was sind Quaternionen?

    Answer: