1. Wie lautet das *Wohlordnungsprinzip*?

   Answer: Any nonempty subset of the natural numbers has a unique smallest element, that is: $\forall M \subset \mathbb{N}\ (\emptyset \neq M) \exists! m \in M\colon \forall n \in M\colon m \leq n$

2. Was ist *Vollständige Induktion*?

   Answer: Consider a subset $A \subset \mathbb{N}$. If $1 \in A$ and $(n \in A) \Rightarrow (n+1) \in A\ \ (\forall n \in \mathbb{N}, n > 0)$, then $A = \mathbb{N}$. This is the same theorem as in the lecture, applied to the truth set of a prediate.

3. Zeige mittels Vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Answer:

   - $n = 1$:
     $\sum_{k=1}^{k} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
   - $n \Rightarrow n+1$:
     $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4. Was ist die *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl n zur Basis b?

   Answer: Let $n \in \mathbb{N}$ and $b \geq 2$. Then there are some unique numbers $k \in \mathbb{N}$ and $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, \ldots, b-1\}$ with $a_k \neq 0$ such that $\sum_{i=0}^{k} a_i b^i = n$

5. Seien A und B Mengen. Wann nennt man eine Funktion $f\colon A \to B$ *injektiv*, wann *surjektiv*, wann *bijektiv*?

   Answer:

   - *injective*: $\forall a, b \in A\colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
   - *surjective*: $\forall b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b$
   - bijective: whenever f is injective and surjective

6. Was sind die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$, und welche Rekursionsformel erfüllen sie? Wie lässt sich die Rekursionsformel *kombinatorisch* (d.h. als Abzählung von Teilmengen) interpretieren?

   Answer: The binomial coefficients of n are the coefficients that occur when raising two numbers $x, y \in \mathbb{R}$ to the n^{th} $(n \in \mathbb{N})$ power:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

   Combinatorically $\binom{n}{k}$ is the number of different subsets of size k of a set of size n.

   For $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ holds $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, where $\binom{n}{0} = 1$ and $\binom{n}{n} = 1$. The binomial coefficient furthermore fulfills the following: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

7. Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ ?}$$

Answer: $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ where $x^0 = 1, 0^0 = 1, 0! = 1$
With $x = y = 1$: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

8. Was ist eine *rekursiv* definierte Folge? Gib Beispiele an.

Answer: A sequence $(x_n) \in \mathbb{R}$ is defined recursively if there is a $k \in \mathbb{N}$, a function $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ and initial elements $x_1, x_2, \ldots, x_k$ such that $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1})$ $(\forall n > k)$. A recursively defined sequence is well defined. This definition is equivalent to the one given in the lecture with $k = 1$.

With $k = 2$, $x_1 = 1, x_2 = 2$ and $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ with $f(a, b) = a + b$ consider the $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ sequence, known as the Fibonacci-sequence.

9. Was sind *endliche*, *abzählbare* bzw. *überabzählbare* Mengen? Gib Beispiele an.

Answer: A set B has a cardinality of $n \in \mathbb{N}$ when there is a bijection between B and $\{1, 2, \ldots, n\}$. We call a set B

(a) finite, whenever $(B) = n \in \mathbb{N}$. Example: $B = \{42\}$
(b) countable, whenever there is a bijection $\phi : B \to \mathbb{N}$. Example: $B = \mathbb{Q}$
(c) uncountably infinite, whenever neither 9a or 9b holds. Example: $B = [0, 1]$

10. Zeige, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Answer: Consider the same bijection as in Question 7. of Sequences (Lecture 5 for details).

11. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Was ist eine *obere Schranke* für A? Wann heißt A nach oben beschränkt?

Answer: $a \in \mathbb{R}$ is an upper bound of A if $\forall x \in A\colon x \leq a$. A is bounded above if it has an upper bound. Notation: $A \leq a$

12. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wie sind *Supremum* und *Infimum* von A definiert? Wann besitzt A ein Supremum, wann ein Maximum?

Answer: Supremum is the lowest upper bound. $\alpha = \sup A$ if α is an upper bound and for any other a upper bound of $\alpha \leq a$. Every A set that is bounded above has a lowest upper bound. $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$ and whenever $\max A$ exists $\max A = \sup A$.

13. Sei $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Bestimme $\inf B$ und $\sup B$.

Answer: $\sup B = 1, \inf B = 0$

14. Gib ein Beispiel einer Menge reeller Zahlen an, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

Answer: $[0, 1) \subset \mathbb{R}$

15. Was ist ein *Dedekindscher Schnitt*?

Answer: Consider $\emptyset \neq L, R \subset \mathbb{R}$. $(L|R)$ is called a Dedekind-cut in $\mathbb{R}$ whenever the following conditions are both satisfied:

- $L < R$

- $L \cup R = \mathbb{R}$

A $t \in \mathbb{R}$ number is called *Trennzahl* of $(L|R)$ if $L \leq t \leq R$ holds.

The above is also defined in $\mathbb{Q}$.

16. Wie lautet das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen?

    Answer: Every $(L|R)$ Dedekind-cut in R has one and only one Trennzahl (in $\mathbb{R}$). In comparison not every Dedekind-cut in $\mathbb{Q}$ has a Trennzahl in $\mathbb{Q}$.

17. Definiere die *komplexen Zahlen* als Paare reeller Zahlen mit geeigneten Additions- und Multiplikationsregeln.

    Answer: For $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ we obtain a (commutative) field with the following addition and multiplication operations:

    - $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}\colon (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
    - $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}\colon (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

18. Was ist der *Betrag* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$?

    Answer: $\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \ (a, b \in \mathbb{R})\colon \ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

19. Was ist die zu z *komplex konjugierte* Zahl $\overline{z}$?

    Answer: $\forall z \in \mathbb{C}\colon \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$

20. Wie hängen z und $\overline{z}$ mit $|z|$ zusammen?

    Answer: $\forall z \in \mathbb{C}\colon \ |z|^2 = z\overline{z}$

21. Wie lautet der *Fundamentalsatz der Algebra*?

    Answer: Every polynomial of degree n in one variable with complex coefficients has exactly n (counted with multiplicities) complex roots. If $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ (a_n \neq 0)$ and the roots are $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ then we get through polynomial division $p(x) = a_n \prod_{k=0}^{n} (z - z_k) \ (\forall z \in \mathbb{C})$

22. Wie hängen komplexe Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit Drehstreckungen in $\mathbb{R}$ zusammen?

    Answer: Consider $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, the set of rotation-dilation matrices, with the standard matrix operations (addition, multiplication). Then with $\phi\colon \mathbb{C} \to C$ bijection where $\phi(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(x) \end{pmatrix}$ we get an isomorphism between C and $\mathbb{C}$.

23. Was sind Quaternionen?

    Answer: Consider $Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$, the set of quaterions. Through the standard matrix operations on Q we obtain a non-commutative field.