

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA  
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA**

**DANIEL KOSLOPP**

**TALITA TOBIAS CARNEIRO**

**DESENVOLVIMENTO DE UM VEÍCULO MONOCICLO AUTOBALANCEÁVEL**

**PONTA GROSSA  
2015**

**DANIEL KOSLOPP**

**TALITA TOBIAS CARNEIRO**

## **DESENVOLVIMENTO DE UM VEÍCULO MONOCICLO AUTOBALANCEÁVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica, do Departamento de Eletrônica do Câmpus Ponta Grossa da UTFPR

Orientador: Prof. Dr. Maurício dos Santos Kaster

**PONTA GROSSA**  
**2015**



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Câmpus Ponta Grossa**  
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA ELÉTRICA**

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

Título do Trabalho de Conclusão de Curso N° 1/2015

### **DESENVOLVIMENTO DE UM VEÍCULO MONOCICLO AUTOBALANCEÁVEL**

por

**Daniel Koslopp**  
**Talita Tobias Carneiro**

Este trabalho de conclusão de curso foi apresentado às 16 horas do dia 29 de junho de 2015 como requisito parcial para a obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA ELETRÔNICA. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

**Profª Drª Fernanda Cristina Corrêa (UTFPR)**    **Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset (UTFPR)**

**Prof. Dr. Mauricio dos Santos Kaster**  
**(UTFPR)**  
*Orientador*

Visto do Coordenador:

**Prof. Dr. Claudinor Bitencourt Nascimento (UTFPR)**  
Coordenador do PPGE

## **AGRADECIMENTOS - TALITA TOBIAS CARNEIRO**

Acima de tudo agradeço a Deus o criador, que nos proporcionou a vida e o amor como o conhecemos.

Agradeço aos meus pais Nilceia de F. T. Carneiro e Jorge Tobias Carneiro e aos meus irmãos Gisele T. Malucelli e Everton T. Carneiro pelo amor e apoio incondicional, em especial, ao meu pai que infelizmente não pode realizar o sonho de me ver formada.

Agradeço ao meu parceiro deste trabalho, parceiro de curso, parceiro de vida, e amor Daniel Koslopp pelo amor, apoio, estudos, alegrias e tristezas compartilhadas.

Agradeço ao nosso orientador Maurício dos Santos Kaster pela orientação e dedicação em tudo o que precisamos.

Agradeço aos companheiros de estudos e aos amigos pelo apoio e vitórias compartilhadas.

Agradeço ao Leandro Camargo Claro dos Santos e ao SENAI - Ponta Grossa pelo kit LEGO MINDSTORMS EV3 sem o qual não conseguiríamos desenvolver a parcela experimental deste trabalho.

Também agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao corpo docente, pela minha formação de excelência.

Enfim, dedico este trabalho aos meus pais, foi por vocês!

## **AGRADECIMENTOS - DANIEL KOSLOPP**

Acima de tudo agradeço a Deus o criador, que nos proporcionou a vida e o amor como o conhecemos.

Agradeço aos meus pais Silvio Koslopp e Maria E. G. Koslopp e meu irmão Denilson Koslopp pelo amor e apoio incondicional em todas as etapas e escolhas da minha vida.

Agradeço ao meu amor e parceira neste trabalho Talita Tobias Carneiro, por todo apoio e amor, tanto na alegria quanto na tristeza, em todos momentos que passaram e pelos que ainda estão por vir.

Agradeço ao nosso orientador Maurício dos Santos Kaster pela orientação e dedicação em tudo o que precisamos.

Agradeço aos companheiros de estudos e aos amigos pelo apoio e vitórias compartilhadas.

Agradeço ao Leandro Camargo Claro dos Santos e ao SENAI - Ponta Grossa pelo kit LEGO MINDSTORMS EV3 sem o qual não conseguiríamos desenvolver a parcela experimental deste trabalho.

Também agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao corpo docente, pela minha formação de excelência.

Enfim, dedico este trabalho a minha família, amo vocês!

## RESUMO

CARNEIRO, Talita Tobias; KOSLOPP, Daniel. **Desenvolvimento de um Veículo Monociclo Autobalanceável**. 2015. 85f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharelado em Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2015.

Diante do problema do caos do trânsito das cidades brasileiras, a tecnologia, em especial a engenharia do controle, proporciona uma possível solução. Um veículo monociclo autobalanceável que apresente autonomia, segurança e seja portátil, constitui uma alternativa para usuários em grandes centros urbanos. As nuances de controladores lineares e não lineares são apresentadas para este veículo, que pode ser caracterizado como o estudo do problema do pêndulo invertido sobre roda. Dentre os controladores lineares, projetou-se e se obteve as respostas simuladas para um controlador PID e compensador. Já entre os não lineares, encontram-se o SDRE e o SMC. Apresentam-se os parâmetros do Gyroboy e do motor *Large Motor* EV3<sup>®</sup> do kit LEGO<sup>®</sup> MINDSTORMS<sup>®</sup> EV3<sup>®</sup>, bem como os métodos utilizados para sua obtenção. Devido à variação das características dos usuários e por se tratar de um sistema embarcado, a robustez e o consumo energético são requisitos importantes. Dessa forma, o desempenho de todas as técnicas de controle em cada requisito é confrontado diante de cinco cenários de parâmetros. O principal elemento para escolha do controle com o melhor desempenho mostrou-se ser o motor de acionamento da roda do monociclo, que pode variar dependendo do equipamento. Assim nada pode ser afirmado sem esta informação.

**Palavras-chave:** Monociclo autobalanceável; SMC; SDRE; PID; LEGO MINDSTORMS EV3;

## ABSTRACT

CARNEIRO, Talita Tobias; KOSLOPP, Daniel. **Development of a Self-Balancing Monocycle Vehicle**. 2015. 85s. Bachelors monograph – Bachelors in Electronics Engineering, Federal University of Technology, Paraná. Ponta Grossa, 2015.

Due to the problem of chaos on traffic in Brazilian cities, technology, in special the control engineering, provides a possible solution. A self-balancing monocycle vehicle that provides autonomy, safety and portability, represents an alternative for users in big cities. The differences among linear and nonlinear controllers are presented for this vehicle, which may be characterized as a study of the one-wheeled inverted pendulum. Among the linear controllers, the design and simulation answers were obtained for PID and compensator controllers. For the nonlinear techniques, there are SDRE and SMC. The parameters of Gyroboy and of Large Motor EV3 from the LEGO® MINDSTORMS® EV3® set are shown, as well as the methods used to derive them. Since the users' characteristics varies and due to being an embedded system, the robustness and energetic consumption are important requirements. Thus, the performances of all control techniques are compared for each requirement in five different parameters scenarios. The main element for choosing the best control technique proved to be the motor, which will act on the wheel of the vehicle, that depend on the hardware. Therefore nothing can be assumed without this information.

**Keywords:** Self-balancing Monocycle; SMC; SDRE; PID; LEGO MINDSTORMS EV3;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico. ....	22
Figura 2	– Representação mecânica do MWIP. ....	24
Figura 3	– Diagrama de blocos do sistema compensado. ....	29
Figura 4	– Gyroboy. ....	34
Figura 5	– Bloco do <i>encoder</i> no Simulink®. ....	35
Figura 6	– Bloco do giroscópio no Simulink®. ....	35
Figura 7	– Bloco do motor no Simulink®. ....	36
Figura 8	– LGR da função de transferência entre $\theta_b$ e $\tau$ . ....	40
Figura 9	– LGR da função de transferência entre $\theta_b$ e $\tau$ controlado via PID. ....	41
Figura 10	– Resposta do sistema para o controlador PID utilizado. ....	42
Figura 11	– LGR da função de transferência entre $\theta_b$ e $\tau$ controlado via compensador. ....	43
Figura 12	– Resposta do sistema controlado via compensador. ....	44
Figura 13	– Resposta do sistema controlado por SDRE. ....	46
Figura 14	– Resposta do sistema controlado por SMC. ....	51
Figura 15	– Respostas da posição angular $\theta_b$ para cada caso de variação nos parâmetros, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE. ....	54
Figura 16	– Respostas da velocidade angular $\omega_w$ para cada caso de variação nos parâmetros, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE. ....	55
Figura 17	– Consumo de energia de cada técnica para: (a) caso AP; (b) caso AL; (c) caso BP; (d) caso BL; (e) caso MD. ....	56
Figura 18	– Diagrama de blocos do controle com o motor. ....	57
Figura 19	– Resposta do sistema para o controlador PID com motor. ....	57
Figura 20	– Resposta do sistema para o controlador compensador com motor. ....	58
Figura 21	– Resposta do sistema para o controlador SDRE com motor. ....	59
Figura 22	– Resposta do sistema para o controlador SMC com motor. ....	60
Figura 23	– Respostas da posição angular $\theta_b$ para cada caso de variação nos parâmetros com a presença do motor, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE. ....	61
Figura 24	– Respostas da velocidade angular $\omega_w$ para cada caso de variação nos parâmetros com a presença do motor, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE. ....	62
Figura 25	– Consumo de energia de cada técnica para: (a) caso AL; (b) caso MD; (c) caso BP; (d) caso BL. ....	63
Figura 26	– Esquema eletromecânico do motor de corrente contínua. ....	64
Figura 27	– Estrutura de controle do motor de corrente contínua. ....	67
Figura 28	– Carga constante aplicada ao motor. ....	69
Figura 29	– Torque de referência e estimado do controle do motor. ....	70
Figura 30	– Velocidade angular real e estimada do motor. ....	71
Figura 31	– Posição angular real e estimada do motor. ....	72
Figura 32	– Resposta do torque do motor para um degrau. ....	73
Figura 33	– Resposta do torque do motor para um degrau. ....	73
Figura 34	– Curva obtida ajustando-se o parâmetro $l$ . ....	74
Figura 35	– Estrutura para estimação do parâmetro $D_w$ . ....	75
Figura 36	– Estrutura para estimação do parâmetro $D_w$ . ....	75
Figura 37	– Tensão aplicada ao motor durante estimação de $D_w$ . ....	76
Figura 38	– Velocidade angular real e estimada do motor durante estimação de $D_w$ . ....	77



Figura 39 – Posição angular real e estimada do motor durante estimação de  $D_w$ ..... 78

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Variáveis do modelo do sistema OWV.....	24
Quadro 2 – Variáveis do motor de corrente contínua .....	65

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Valores dos parâmetros $m_b$ e $l$ para cada caso de usuários. ....	52
Tabela 2	–	Valores dos parâmetros $m_b$ e $l$ para cada caso do Gyroboy. ....	53
Tabela 3	–	Parâmetros do motor de corrente contínua <i>Large Motor EV3</i> . ....	68
Tabela 4	–	Valores dos parâmetros do sistema OWV. ....	77

## LISTA DE SIGLAS

UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
TWV	<i>Two-Wheeled Vehicles</i>
OWV	<i>One-Wheeled Vehicles</i>
MWIP	<i>Mobile-Wheeled Inverted Pendulum</i>
CET	Companhia de Engenharia de Tráfego
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
BIBO	<i>Bounded-Input Bounded-Output</i>
PID	Proporcional - Integral - Derivativo
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
FSF	<i>Full State Feedback</i>
SDRE	<i>State Dependent Riccati Equation</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SDC	<i>State-Dependent Coefficient</i>
HMI	<i>Human Machine Interface</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
ZOH	<i>Zero Order Holder</i>
IMC	Índice de Massa Corpórea
AP	Alto Pesado
AL	Alto Leve
MD	Médio
BP	Baixo Pesado
BL	Baixo Leve

## LISTA DE SÍMBOLOS

$CG$	Centro de gravidade do pêndulo
$l$	Distância entre a extremidade acoplada à roda e o centro de gravidade do pêndulo
$r$	Raio da roda
$m_b$	Massa do pêndulo
$m_\omega$	Massa da roda
$I_b$	Momento de inércia do pêndulo
$I_\omega$	Momento de inércia da roda
$D_b$	Atrito entre a roda e a superfície de contato
$D_\omega$	Atrito a roda e o pêndulo
$\tau$	Torque aplicado à roda
$\theta_b$	Posição angular do pêndulo
$\omega_b$	Velocidade angular do pêndulo
$\theta_\omega$	Posição angular da roda
$\omega_\omega$	Velocidade angular da roda
$\phi$	Ângulo de inclinação do terreno
$g$	Aceleração da gravidade
$x_1$	Variável de estado
$x_2$	Variável de estado
$x_3$	Variável de estado
$Df(p)$	Matriz Jacobiana de $f$ no ponto $p$
$A(x)$	Matriz dos estados na representação em espaço de estados
$B(x)$	Matriz das entradas na representação em espaço de estados
$T_a$	Tempo de acomodação
$M_{vu}$	Máximo valor percentual de ultrapassagem
$\xi$	Coeficiente de amortecimento para um sistema de segunda ordem
$\omega_n$	Frequência natural de amortecimento para um sistema de segunda ordem
$J$	Função custo do controle SDRE
$Q(x)$	Matriz de peso dos estados do controle SDRE
$R(x)$	Matriz de peso da entrada do controle SDRE
$P(x)$	Solução da <i>State-Dependent Riccati Equation</i>
$M_C(x)$	Matriz de controlabilidade
$x_T$	Decomposição do vetor de estado $x$ para seguidor de referência
$r_c$	Comando de referência
$x_N$	Decomposição do vetor de estado $x$ que vão para origem
$x_I$	Integral dos estados $x_T$
$\tilde{x}$	Vetor de estados ampliado de $x$
$\alpha$	Escalar variável da parametrização SDC

$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha)$	Matriz dos estados aumentada
$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})$	Matriz das entradas aumentada
$\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{x}})$	Solução da equação de Ricatti aumentada
$\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{x}})$	Matriz de peso da entrada aumentada
$s$	Superfície deslizando do controle SMC
$\mathbf{x}_e$	Erro entre estado e referência
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor de pesos da superfície deslizando
$\eta$	Condição de alcançabilidade do SMC
$\mathbf{u}$	Controle SMC
$\mathbf{u}_{eq}$	Controle equivalente SMC
$\mathbf{u}_{ch}$	Controle chaveado SMC
$\theta_b^*$	Variável de referência de $\theta_b$
$\mathbf{x}^*$	Referência e estado de equilíbrio desejado
$\omega_b^*$	Variável de referência de $\omega_b$
$\omega_\omega^*$	Variável de referência de $\omega_\omega$
$\bar{x}_2$	Real valor de equilíbrio do estado $x_2$
$\mathbf{A}_L$	Matriz dos estados linearizada
$\mathbf{B}_L$	Matriz das entradas linearizada
$\mathbf{C}_L$	Matriz das saídas linearizada
$\mathbf{D}_L$	Matriz <i>feedforward</i> linearizada
$K_i$	Ganho integrativo do PID
$K_d$	Ganho derivativo do PID
$K_p$	Ganho proporcional do PID
$\mathbf{w}$	Vetor de estado do controle SDRE
$\mathbf{z}$	Vetor de estado do controle SMC
$\tau_{eq}$	Torque equivalente do SMC
$\tau_{ch}$	Torque chaveado do SMC
$k(\mathbf{z})$	Parâmetro do controle SMC
$F(\mathbf{z})$	Limite de distúrbio e variação paramétrica do SMC
$\gamma$	Constante limite de erros dos parâmetros do SMC
$\mathbf{q}$	Vetor de estado do controle SMC
$\Psi(\mathbf{q})$	Vetor de estado linearizado do controle SMC
$u(t)$	Tensão de armadura
$i(t)$	Corrente de armadura
$R$	Resistência de armadura
$L$	Indutância de armadura
$e_b(t)$	Tensão contra eletromotriz
$\tau_m$	Torque do motor
$\tau_l$	Torque da carga

$\theta_m$	Posição angular do rotor
$\omega_m$	Velocidade angular do rotor
$K_t$	Coeficiente de torque
$K_b$	Coeficiente de tensão contra eletromotiz
$J$	Momento de inércia do rotor
$B$	Coeficiente de resistência viscosa do rotor
$A_r$	Atrito dinâmico do rotor
$\tau_{est}$	Torque estimado

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1	PROBLEMA .....	19
1.2	OBJETIVOS .....	19
1.2.1	Objetivo Geral .....	19
1.2.2	Objetivos Específicos .....	19
1.3	JUSTIFICATIVA .....	20
1.4	METODOLOGIA .....	21
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>22</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	22
2.2	SISTEMAS DE CONTROLE .....	22
2.2.1	Estabilidade .....	23
2.2.2	Robustez .....	23
2.3	MODELO MATEMÁTICO DO PÊNDULO INVERTIDO .....	23
2.4	LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS .....	26
2.5	TÉCNICAS DE CONTROLE .....	27
2.5.1	Controle Linear .....	28
2.5.2	Controle SDRE .....	29
2.5.2.1	Estabilidade do controle SDRE .....	30
2.5.2.2	SDRE como seguidor de comando .....	31
2.5.3	Controle SMC .....	32
2.5.3.1	Estabilidade do controle SMC .....	32
2.6	HARDWARE PARA APLICAÇÃO .....	32
2.6.1	Especificações Técnicas do LEGO® MINDSTORMS® .....	33
2.6.2	Características Gyroboy .....	34
2.6.3	Comunicação Entre Gyroboy e Simulink® .....	35
<b>3</b>	<b>TÉCNICAS DE CONTROLE .....</b>	<b>37</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	37
3.2	FUNCIONAMENTO E REQUISITOS DO OWV .....	37
3.3	LINEARIZAÇÃO DO MODELO DO OWV .....	38
3.4	CONTROLE LINEAR - PID .....	39
3.5	CONTROLE LINEAR - COMPENSADOR .....	41
3.6	CONTROLE SDRE .....	42
3.6.1	SDRE Aumentado Para Seguidor de Comando .....	45
3.6.2	Estabilidade e Controlabilidade do SDRE .....	45
3.6.3	Simulação do Controle SDRE .....	45
3.7	CONTROLE SMC .....	46
3.7.1	Estabilidade do Controle SMC .....	48
3.7.2	Simulação do Controle SMC .....	50
3.8	ROBUSTEZ .....	51
3.9	CONSUMO ENERGÉTICO .....	53
3.10	DESEMPENHO DOS CONTROLES COM MOTOR .....	55
3.10.1	Robustez com motor .....	58
3.10.2	Consumo Energético com Motor .....	60



<b>4</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>64</b>
4.1	MODELO E PARÂMETROS DO MOTOR	64
4.1.1	Modelo do Motor de Corrente Contínua	64
4.1.2	Ajuste de Parâmetros e Resultados Experimentais do Motor	67
4.2	PARÂMETROS DO GYROBOY	71
4.2.1	Massas ( $m_b$ e $m_w$ ) e Raio da Roda ( $r$ )	71
4.2.2	Distância Entre Roda e o Centro de Gravidade do Pêndulo ( $l$ )	71
4.2.3	Atritos Dinâmicos ( $D_w$ e $D_b$ )	72
4.2.4	Momentos de Inércia ( $I_b$ e $I_w$ )	75
4.3	PARÂMETROS ESTIMADOS	76
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>79</b>
	REFERÊNCIAS	<b>83</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A situação caótica do trânsito é observada principalmente em grandes centros, afirmativa que não exclui cidades medianas e pequenas. Mesmo uma cidade considerada pequena pode apresentar problemas de mobilidade urbana. Segundo Scaringella (2001), a mobilidade urbana é um desafio tecnológico, político e administrativo.

Diante deste cenário, cabe à engenharia o papel de desenvolver tecnologias e métodos alternativos de locomoção para a população. Assim, se faz necessário o entendimento dos motivos que tornam o trânsito, na maioria das vezes, impraticável.

Um destes motivos é a quantidade de carros utilizados diariamente para locomoção. Se o problema é a quantidade, a alternativa é a diminuição do número de carros nas ruas.

Considerando-se que a grande maioria dos veículos utilizados diariamente são “caixas com quatro rodas” (BALOH; PARENT, 2003), não é difícil entender que em grandes quantidades, quilômetros de congestionamentos tornam-se rotina.

Dessa forma, os avanços tecnológicos na engenharia de controle e eletrônica tornam possível o desenvolvimento de veículos alternativos auto balanceáveis (*self balancing vehicle*), como é o caso dos biciclos (*Two-Wheeled Vehicles – TWV*) (BHAVSAR; KUMAR, 2012) e monociclos (*One-Wheeled Vehicles – OWV*) (SOLOWHEEL, 2014), que utilizam-se do princípio do controle do pêndulo invertido com rodas (*Mobile-Wheeled Inverted Pendulum – MWIP*).

Muitos modelos que solucionam o problema do MWIP já foram implementados em veículos auto balanceáveis e encontram-se no mercado. Como exemplo destes produtos podem ser citados o TWV Segway (SEGWAY, 2014) e os OWV's Solowheel (SOLOWHEEL, 2014), Legway (LEGWAY, 2014) e Ryno (RYNO, 2014).

As contribuições deste tipo de veículo para a sociedade norteiam dois pontos de extrema importância:

- Melhora das condições de trânsito e redução dos congestionamentos pelo uso de um veículo pequeno;
- Promove a redução da poluição, por sua natureza elétrica (BALOH; PARENT, 2003);

Apesar destes produtos serem relativamente novos, uma vez que os mesmos já existem, o foco torna-se o aprimoramento das suas especificações, capacidades e otimização dos recursos para torná-los mais acessíveis ao público. Fatores como autonomia, capacidade de carga e desempenho em terrenos não ideais ou inclinados tornam-se importantes para que este tipo de produto ganhe espaço no mercado e efetivamente mude o cenário do transporte em todo o mundo.

Além da utilização de materiais mais leves e componentes mais eficientes, o controle tem influência direta nos fatores mencionados. O aprimoramento do controle utilizado é também o meio mais conveniente para aprimorar o desempenho destes veículos com pequena ou ne-

nhuma elevação de custo. Esta afirmativa normalmente não é verdadeira para materiais e componentes.

## 1.1 PROBLEMA

Segundo Scaringella (2001), ao utilizar a cidade de São Paulo como exemplo, dados sobre o trânsito podem causar grande preocupação. De acordo com o mesmo autor “num período de cinco anos (entre 1992 e 1997), a média de quilômetros de congestionamento medidos pela Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) no sistema viário principal da cidade passou de 40 km, na hora de pico da tarde, para 120 km”.

Para Oliveira (2014), os problemas de mobilidade urbana são causados em sua grande maioria pelo elevado grau de urbanização das cidades brasileiras, bem como pela falta de políticas públicas. Dessa forma, a utilização da infraestrutura de transporte apresenta-se em sua capacidade limite.

Assim como para Oliveira (2014), Costa (2003) afirma que o aumento do número de pessoas que vivem nas cidades e consequentemente o número de carros, resultam em impactos ao meio ambiente e na deterioração da qualidade de vida nas cidades.

O desenvolvimento de um veículo alternativo, como os veículos auto balanceáveis OWV e TWV, contribui com a solução para o problema socioeconômico e ambiental de transporte e mobilidade urbana.

Como então desenvolver um veículo atrativo quanto a autonomia utilizando a engenharia de controle?

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo propor uma alternativa atraente de transporte. Para isto pode-se admitir dois grandes objetivos: O primeiro relacionado ao estudo das estratégias de controle. O segundo à construção de um protótipo que valide a utilização da estratégia de controle escolhida.

### 1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver o protótipo de um veículo auto balanceável OWV com especificações atraentes para o usuário, através do estudo das estratégias de controle do pêndulo invertido.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudo do modelo matemático do pêndulo invertido;
- Elaboração de modelos computacionais visando simulações;
- Definição das possíveis estratégias de controle;

- Simulação em ambientes computacionais das estratégias de controle;
- Definição do *hardware* e programação;
- Construção do protótipo;
- Validação dos resultados;

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Atualmente, por causa da crescente preocupação com a poluição global, crises de energia e problemas de infraestrutura de tráfego, a melhor alternativa para o transporte individual não é mais automóveis ou motocicletas.

A ideia de utilizar veículos portáteis apresenta-se como uma solução prática e viável para o dia a dia de grande parte da população brasileira e mundial. A facilidade no uso de tais dispositivos apresenta grande motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

Desse modo, o desenvolvimento de novos veículos leves e inovadores é uma tendência. A preocupação de pesquisadores com este tópico vem crescendo (HUANG et al., 2010). Isto pode ser verificado pela grande gama de trabalhos relacionados com tais veículos: (PATHAK; FRANCH; AGRAWAL, 2005) que apresenta controle de velocidade e posição para um TWV. (SALERNO; ANGELES, 2004) cujo artigo compara a robustez do controle por alocação de pólos com *Linear-Quadratic Regulator* (LQR) para um TWV com grande variação de cargas. (HA; YUTA, 1994) discute o controle de trajetória para um veículo TWV autônomo. (REN; CHEN; CHEN, 2008) apresenta um controle e análise de estabilidade para um TWV.

O grau de complexidade dos veículos TWV's é elevado, devido à necessidade de sincronização das duas rodas simultaneamente com o controle de trajetória e balanço. Para resultados satisfatórios há necessidade de alto número de sensores, o que além de complicar o sistema, aumenta o custo (HUANG, 2010).

O uso de uma única roda, como no caso dos OWV's, simplifica o controle, diminui o custo e torna o produto final mais compacto e leve, contribuindo assim também para os resultados de consumo e autonomia do veículo (HUANG, 2010). Para os autores, a diminuição do custo, aumento da autonomia e portabilidade são consideradas características cruciais para aumentar a atratividade do produto no mercado.

Mesmo com o extenso estudo abordando TWV's, os números de estudos referentes aos OWV's ainda são insuficientes (HUANG, 2010). Assim, as características dos OWV's e a necessidade de um estudo mais profundo, constituem a motivação para o desenvolvimento de um veículo auto balanceado de uma roda.

Por fim, a melhora da qualidade de vida da sociedade como um todo, apresenta-se como justificativa irrevogável para qualquer avanço tecnológico, observando-se todas as questões de ética pertinente.

## 1.4 METODOLOGIA

Por sua natureza exploratória, esta pesquisa pode ser dividida em duas partes principais: a exploração dos métodos de controle e a implementação prática.

Para revisão bibliográfica serão utilizados artigos principalmente nas plataformas Science-Direct, IEEE e Scielo, bem como em livros relacionados ao tema.

Na primeira etapa do projeto, ainda durante a revisão de literatura, a escolha da estratégia de controle será feita, observando-se dois critérios: o primeiro é a partir da comparação entre as estratégias de controle para o pêndulo invertido revisado na literatura e o segundo com relação ao comportamento em simulações computacionais dos métodos escolhidos de acordo com o critério anterior.

Pode-se observar que as etapas relacionadas à primeira divisão desta pesquisa não podem ser subdivididas, visto que não há uma ordem a ser fielmente seguida.

Uma vez escolhido o método de controle e com as simulações feitas, a etapa de adequação e atendimento aos requisitos de controle deve ser completada.

O hardware escolhido para aplicação será definido de acordo com o método de controle escolhido.

A segunda etapa do projeto será o desenvolvimento do software de acordo com o hardware escolhido, para finalmente construir o protótipo necessário à análise e validação da estratégia de controle.

O último passo é, portanto a validação dos resultados esperados no protótipo construído. É importante ressaltar que por mais que a revisão de literatura seja classificada em uma etapa, esta será imprescindível durante todo o desenvolvimento do presente trabalho.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 INTRODUÇÃO

O controle de um monociclo pode ser visto como controle de um pêndulo invertido conectado a uma roda. A haste do pêndulo neste caso representa o usuário e é importante que o controle seja robusto perante a variação de parâmetros, uma vez que a variação da altura e peso do usuário pode ser grande.

Este sistema do pêndulo invertido é instável, de 4ª ordem, multivariável e altamente acoplado, isto o torna complexo e comumente utilizado como caso de estudo em aplicações de teoria de controle moderno (BHAVSAR; KUMAR, 2012)

Na revisão de literatura apresenta-se primeiramente o modelo matemático do pêndulo invertido e possíveis simplificações que deverão ser testadas. Várias técnicas de controle aplicadas são então apresentadas juntamente com os resultados obtidos pelos autores. Finalmente uma visão geral do *hardware* a ser utilizado é revisto.

No decorrer deste trabalho, alguns padrões para representação de variáveis matemáticas serão adotadas: Matrizes e vetores são representados em negrito; O símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  representa um parâmetro estimado; O símbolo  $*$  caracteriza uma referência; O símbolo  $-$  indica um valor verdadeiro (não estimado).

### 2.2 SISTEMAS DE CONTROLE

Um sistema de controle é composto por subsistemas e processos (plantas), que dada uma entrada o objetivo é obter uma saída com o desempenho desejado (NISE, 2004). A figura 1 mostra um sistema de controle básico.

Existem basicamente duas configurações de sistemas de controle: malha aberta e malha fechada (realimentação).

Além de serem controlados somente com base na entrada, os sistemas de malha aberta não corrigem efeitos de perturbações adicionadas ao sinal do controlador (NISE, 2004).

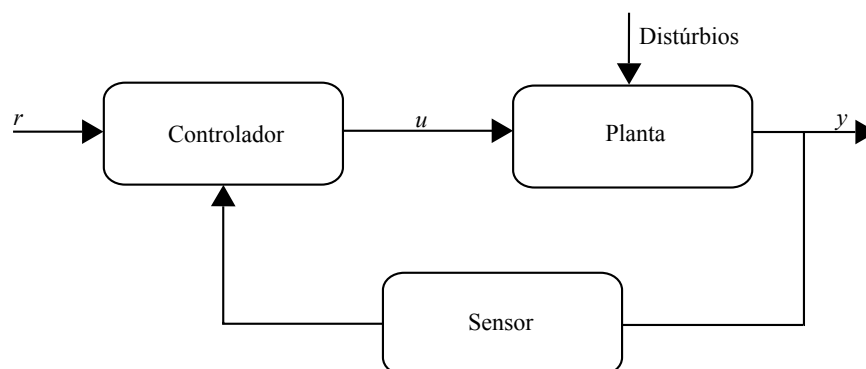


Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico.

Assim, sistemas de controle geralmente são baseados no princípio da realimentação (malha fechada), onde o sinal a ser controlado é comparado com o sinal de referência e a diferença entre os dois sinais (erro) é usada para calcular uma ação de controle corretiva (DOYLE JOHN E FRANCIS; TANNENBAUM, 1990).

Segundo Nise (2004), o sistema de controle realimentado mais simples tem três componentes: A planta; Um sensor para medir a saída da planta ( $y$ ); Um controlador que gera a entrada para a planta ( $u$ ). Um exemplo de tal sistema é mostrado na figura 1, onde a referência do controlador é  $r$ .

### 2.2.1 Estabilidade

Geralmente um controle é desenvolvido para atender aos requisitos desejados para certo sistema. A estabilidade é a especificação de sistema mais importante. Existem várias definições para estabilidade que dependem do tipo de sistema e da técnica de controle.

Se limitados a sistemas lineares e invariantes no tempo e considerando-se que a resposta de um sistema é a soma das respostas natural e forçada, pode-se definir um sistema estável aquele em que a resposta natural se aproxima de zero à medida que o tempo se aproxima do infinito (NISE, 2004). Assim, esta definição de estabilidade implica que somente a resposta forçada permanece quando a resposta natural se aproxima de zero.

Entretanto, ao considerar a resposta total do sistema, e não somente a natural, uma definição alternativa de estabilidade é formada. Dessa forma, um sistema é estável se toda entrada limitada resulta em uma saída limitada, também conhecida como BIBO (*Bounded-input, Bounded-output*) (NISE, 2004).

### 2.2.2 Robustez

A figura 1 mostra a inserção de distúrbios atuando sobre a planta. A natureza desses distúrbios é diversa, podendo ser intrínseca ao sistema com a incerteza da dinâmica da planta ou distúrbios externos (DOYLE JOHN E FRANCIS; TANNENBAUM, 1990).

Segundo DORF e BISHOP (1998), “Um sistema robusto apresenta o desempenho desejado a despeito da presença de incertezas consideráveis sobre o processo a controlar”.

No trabalho apresentado neste documento, a robustez do sistema tem um papel fundamental no desempenho final, visto que, variáveis como altura e peso do usuário não podem ser definidos com exatidão.

## 2.3 MODELO MATEMÁTICO DO PÊNDULO INVERTIDO

A modelagem do OWV é representada por um pêndulo invertido que rotaciona no eixo da roda.

A figura 2 apresenta a estrutura deste sistema OWV. A haste do pêndulo representa o usuário que deve ser equilibrado. A inclinação do corpo, o ângulo  $\theta_b$ , é a variável de interação





Lagrange, que resulta na equação (2.1), (HUANG et al., 2010).

$$\begin{cases} m_{11}\dot{\omega}_w + (m_{12} \cos \beta) \dot{\omega}_b = \tau - D_w \omega_w + D_b (\omega_b - \omega_w) + m_{12} \omega_b^2 \sin \beta - \tilde{M} \\ (m_{12} \cos \beta) \dot{\omega}_w + m_{22} \dot{\omega}_b = -\tau - D_b (\omega_b - \omega_w) + G_b \sin \theta_b \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo

$$\begin{aligned} \beta &= (\theta_b + \phi) \\ \omega_b &= \frac{d\theta_b}{dt} \\ \omega_w &= \frac{d\theta_w}{dt} \end{aligned}$$

onde  $g$  representa a aceleração da gravidade e os parâmetros  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{22}$ ,  $G_b$  e  $\tilde{M}$  são dados por:

$$\begin{aligned} m_{11} &= (m_b + m_w) r^2 + I_w \\ m_{12} &= m_b l r \\ m_{22} &= m_b l^2 + I_b \\ G_b &= m_b g l \\ \tilde{M} &= (m_b + m_w) r g \sin \alpha \end{aligned}$$

O modelo (2.1) pode ser retratado na forma de equações no espaço de estados como no sistema (2.2), sendo  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_b & \omega_w & \omega_b \end{bmatrix}^T$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b(x)}{\bar{M}(x)} + \frac{M_2(x) \tau}{\bar{M}(x)} \\ \dot{x}_3 = -\frac{a(x)}{\bar{M}(x)} - \frac{M_1(x) \tau}{\bar{M}(x)} \end{cases} \quad (2.2)$$

Para maior simplicidade, as equações em (2.2) apresentam os termos  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$  e  $\bar{M}(x)$  explicitados abaixo:

$$\begin{aligned}
a(x) &= -[m_{12}(D_b + D_w) \cos(\beta) + m_{11}D_b]x_2 + [m_{11} + m_{12} \cos(\beta)]D_b x_3 \\
&\quad + (m_{12}x_3)^2 \cos(\beta) \sin(\beta) - m_{11}G_b \sin(x_1) - m_{12} \cos(\beta) \tilde{M} \\
b(x) &= [m_{22}(D_b + D_w) + m_{12}D_b \cos(\beta)]x_2 - [m_{22} + m_{12} \cos(\beta)]D_b x_3 \\
&\quad - m_{12}m_{22}x_3^2 \sin(\beta) + m_{12}G_b \sin(x_1) \cos(\beta) + m_{22}\tilde{M} \\
\bar{M}(x) &= m_{11}m_{22} - (m_{12} \cos(\beta))^2 \\
M_1(x) &= m_{11} + m_{12} \cos(\beta) \\
M_2(x) &= m_{22} + m_{12} \cos(\beta)
\end{aligned}$$

A representação do sistema em espaço de estados será um passo importante para a linearização do modelo, a partir das definições apresentadas na subseção 2.4.

## 2.4 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS

Como o OWV é um sistema não linear não é possível a aplicação de controles lineares diretamente. A linearização entretanto torna possível o uso destas técnicas, como o controlador PID (Proporcional - Integral - Derivativo). Tipicamente utiliza-se a linearização nos pontos de operação do sistema através da análise Jacobiana (ABABNEH, 2011).

Segundo Alligood (1996), se  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ , e  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ , a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  para o ponto  $\mathbf{p}$ , denotada por  $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$ , é a matriz de derivadas parciais calculada para o ponto  $\mathbf{p}$  e dada por (2.3).

$$\mathbf{J}_{ac} = \mathbf{Df}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dado um vetor  $\mathbf{p}$  e um pequeno vetor  $\mathbf{h}$ , o incremento em  $\mathbf{f}$  devido a  $\mathbf{h}$  é aproximadamente a matriz Jacobiana multiplicada pelo vetor  $\mathbf{h}$  (como mostrado na equação (2.4)), onde o erro da aproximação é proporcional a  $|\mathbf{h}|^2$  para pequenos valores. Dessa forma, enquanto  $\mathbf{h}$  for pequeno, a aproximação ainda é válida e a dinâmica perto do ponto  $\mathbf{p}$  é essencialmente a mesma do que no sistema linear.

$$\mathbf{f}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) \approx \mathbf{Df}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} \quad (2.4)$$

A aproximação linear em espaço de estados, onde  $\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{p})$  é dada pelo sistema em (2.5).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.5 TÉCNICAS DE CONTROLE

O pêndulo invertido atrai diversos pesquisadores devido às suas características não lineares. Um resumo sobre os trabalhos que podem ser encontrados na literatura sobre o controle deste sistema é dado a seguir, juntamente com as observações sobre possíveis benefícios e dificuldades da aplicação das mesmas técnicas no OWV.

Segundo reportado por Vendramini e Silva (2010) a linearização e decomposição do sistema MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*), resultando em dois sistemas SISO (*Single Input, Single Output*), torna a utilização de um clássico controle PID possível e o mesmo apresenta resultados satisfatórios. A abordagem realizada obteve erro estacionário nulo tanto para a plataforma quanto para a deflexão angular e respeitou os requisitos de sobressinal e tempo de assentamento. Porém, o desempenho pode denegrir com a variação de parâmetros, ou seja, o controle não apresentou robustez. Como mencionado, um controle robusto é essencial para OWV, uma vez que o perfil do usuário pode sofrer grandes variações.

Vinodh Kumar e Jerome (2013) apresenta um controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e compara o mesmo com um FSF (*Full State Feedback*) cujos pólos são alocados via fórmula de Ackerman. É importante notar que um controle FSF pode-se tornar inviável na prática, pois necessita-se medir todas as variáveis ou estimá-las, conseqüentemente os custos aumentam e/ou a precisão destes sensores ou estimadores podem deteriorar o desempenho (NISE, 2004).

Mesmo em um cenário ideal, Vinodh Kumar e Jerome (2013) apresenta que o controle LQR obtém melhores resultados frente ao FSF. O controle LQR também mostrou-se robusto perante distúrbios. Porém sendo o controle LQR um PD ótimo, ele pode não apresentar erro nulo em regime permanente, visto que o mesmo não possui componente integral.

Outros casos que obtiveram sucesso na abordagem por LQR são reportados por Chanchareon, Sangveraphunsiri e Chantranuwathana (2006) e Naveh, Bar-yoseph e Halevi (1999). Neste segundo, o controle por LQR é comparado com o controle SDRE (*State Dependent Riccati Equation*). O controle SDRE é similar ao LQR, porém a equação de Riccati é solucionada continuamente (ou em controles discretos, a cada amostragem) o que aumenta a demanda computacional mas tem demonstrado resultados mais robustos (KORAYEM; IRANI; Rafee Nekoo, 2011).

Em Naveh, Bar-yoseph e Halevi (1999) o modelo do pêndulo inclui também o movimento lateral do monociclo, tornando-o mais complexo, assim o controle SDRE demonstrou melhores

resultados que o LQR. A priori neste trabalho o movimento lateral será omitido.

Huang et al. (2010) apresenta dois controles por modo deslizante (SMC - *Sliding Mode Control*) para controle da velocidade do OWV e verifica a estabilidade assintótica destes. Ambos controles apresentados mantiveram o sistema estável mesmo com parâmetros errôneos e em presença de distúrbios. Porém o primeiro controle apresenta erro em estado estacionário quando os parâmetros são incorretamente estimados. Este problema é solucionado no segundo controle. Neste trabalho, entretanto, estamos interessados no controle do ângulo  $\theta_b$  e não na velocidade  $\omega_w$ , uma vez que a velocidade deve se adaptar ao ângulo no qual o usuário se encontra.

### 2.5.1 Controle Linear

A resposta dinâmica do sistema depende intimamente da posição dos pólos da função de transferência em malha fechada (OGATA, 2003). A literatura para plantas cuja função de transferência possui um ou dois pólos e nenhum zero é ampla e fórmulas foram derivadas para cálculo das respostas dinâmicas, como tempo de acomodação e máximo percentual de ultrapassagem (sobressinal) (OGATA, 2003; NISE, 2004). Porém, para os demais sistemas estas fórmulas não podem ser utilizadas. O projeto para controle de um sistema de terceira ordem ou superior, como o caso do OWV, torna-se então trabalhoso (OGATA, 2003).

Entretanto, em certas condições pode-se aproximar estes sistemas a um de segunda ordem onde somente dois pólos complexos são considerados dominantes<sup>1</sup>, de maneira que tais fórmulas podem ser utilizadas (NISE, 2004).

Portanto, deve-se projetar o controlador de modo que a equação característica possa ser representada como em (2.6), onde a ordem do sistema é  $i$ .

$$(s + p_i)(s + p_{i-1}) \dots (s + p_3)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \quad (2.6)$$

sendo

$$\Re(p_i), \Re(p_{i-1}), \dots, \Re(p_3) \gg \xi\omega_n.$$

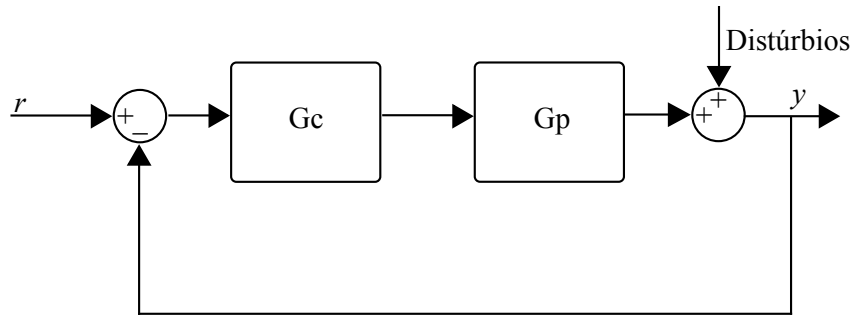
Assumindo-se então que a equação (2.6) é satisfeita, o tempo de acomodação ( $T_a$ ) e máximo percentual do valor de ultrapassagem ( $M_{vu}$ ) podem ser determinados por (2.7) (NISE, 2004).

$$T_a = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (2.7a)$$

$$M_{vu} = e^{(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}/100 \quad (2.7b)$$

<sup>1</sup> O termo “pólos dominantes” é em geral utilizado para referir-se aos pólos cuja resposta é muito mais lenta que os demais, ou seja, os pólos mais próximos ao zero. (OGATA, 2003)

A figura 3 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle, onde a função de transferência é representada por  $G_p$  e o controlador por  $G_c$ .



**Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema compensado.**

Muitas vezes, torna-se mais fácil o projeto de um controlador através do método gráfico Lugar Geométrico das Raízes (LGR). Este método permite a visualização do movimento dos pólos com a variação de algum parâmetro, normalmente um ganho proporcional. Ao utilizar-se o LGR, pode-se prever os efeitos sobre a localização dos pólos em malha fechada devido à variação do ganho ou inserção de pólos ou zeros pelo controle (OGATA, 2003). É interessante notar que se a equação (2.6) for satisfeita, pode-se determinar regiões onde os pólos dominantes devem estar localizados de modo a garantir os requisitos na equação (2.7).

### 2.5.2 Controle SDRE

Uma crescente gama de aplicações não lineares que utilizam a técnica de controle SDRE foram desenvolvidas na última década, como pilotos automáticos, controle e estimadores de espaçonaves e satélites, sistemas de levitação magnética, entre outros (CLOUTIER; STANSBERRY, 2002). Esta técnica tornou-se atrativa pelo método sistemático e eficiente com o qual o controle é desenvolvido, permitindo que as não linearidades sejam consideradas enquanto oferece uma grande flexibilidade no projeto das matrizes de controle (ÇIMEN, 2010).

Em outras palavras, a técnica de controle SDRE consiste na fatoração do sistema não linear na forma de coeficientes de estado dependentes (SDC - *State-Dependent Coefficient*). Esta forma é não-única, o que cria maior flexibilidade e pode ser utilizada para melhorar o desempenho do controlador. Com o sistema na forma SDC, a equação algébrica de Riccati é então resolvida em tempo real para fornecer a sub ótima solução em cada instante (ou amostra) que minimiza a função custo (ÇIMEN, 2010).

Conforme Cloutier e Stansbery (2002), a função custo a ser minimizada é dada por (2.8).

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt \quad (2.8)$$

Os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  representam os estados e o atuador, respectivamente, no sistema não

linear que é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.9)$$

onde as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Condição 1:  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  para qualquer  $\mathbf{x}$ .
- Condição 2:  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  é continuamente diferenciável por  $\mathbf{x}$ .
- Condição 3:  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

A matrizes de peso  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  proporcionam grande flexibilidade no projeto do controlador, uma vez que elas alteram diretamente o custo dos estados e do esforço do controle. Resumidamente, quanto maior  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ , mais rápida a resposta transitória do sistema, porém maior será o esforço do controle para tanto, já o inverso ocorre para  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ .

Pode-se então resumir a técnica SDRE para obtenção de uma solução sub ótima do problema representado pelas equações (2.8)-(2.9) em três passos (CLOUTIER; STANSBERRY, 2002).

1. Usa-se parametrização direta para transformar o sistema não linear (2.9) no formato SDC como em (2.10):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ . A matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  pode ser fatorada em infinitos fatores como  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ . O vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  deve ser escolhido de forma a obter uma solução valida do SDRE, em outras palavras, o par  $\{\mathbf{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{B}(\mathbf{x})\}$  deve ser pontualmente estabilizável (controlável).

2. Soluciona-se então a equação de Riccati (2.11) para obter-se  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

3. Obtém-se então o sinal de controle  $\mathbf{u}$  como em (2.12).

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (2.12)$$

#### 2.5.2.1 Estabilidade do controle SDRE

Para garantir que o controle SDRE obtenha uma solução e o sistema seja estável, é suficiente checar se a matriz de controlabilidade (2.13) possui  $\text{rank}(\mathbf{M}_C(\mathbf{x})) = n$  (*full-rank*) para todo domínio de  $\mathbf{x}$ , onde  $n$  é o número de estados do sistema (ÇIMEN, 2010).

$$\mathbf{M}_C(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{x}) & \mathbf{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})\mathbf{B}(\mathbf{x}) & \cdots & \mathbf{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})^{n-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Segundo Çimen (2010), se a matriz de controlabilidade  $\mathbf{M}_C(\mathbf{x})$  é uma matriz *full-rank*, o sistema é controlável e consequentemente estável. Para sistemas com uma única entrada,  $\mathbf{M}_C(\mathbf{x})$  resulta em uma matriz quadrada, neste caso a matriz é controlável se  $\det(\mathbf{M}_C(\mathbf{x})) \neq 0$ .

### 2.5.2.2 SDRE como seguidor de comando

Utilizando o método previamente descrito, o controle SDRE levará todos os estados para a origem. Neste trabalho, entretanto, deseja-se que o controle possa seguir um comando de referência. Isto pode ser alcançado se ampliarmos o vetor de estados  $\mathbf{x}$ , como demonstrado por Cloutier e Stansbery (2002).

Para isto, primeiramente decompõe-se o vetor  $\mathbf{x}$  como em (2.14).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_T \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Deseja-se aqui que as componentes do vetor  $\mathbf{x}_T$  sigam o comando de referência  $\mathbf{r}_c$ , enquanto as componentes do vetor  $\mathbf{x}_N$  vão para a origem.

O vetor de estado é então ampliado com os estados  $\mathbf{x}_I$ , que consistem na integral dos estados  $\mathbf{x}_T$ :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_T \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

O sistema ampliado, simbolizado pelo sinal til acima das variáveis, agora é dado por (2.16):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha)\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u} \quad (2.16)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, \alpha) = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{x}, \alpha) & \end{array} \right], \quad \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Finalmente, o sinal de controle então é dado por

$$\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})^T\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{x}}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I - \int \mathbf{r}_c dt \\ \mathbf{x}_T - \mathbf{r}_c \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.5.3 Controle SMC

O objetivo da técnica de controle por modos deslizantes (SMC) é definir uma superfície assintoticamente estável, de modo que todas as trajetórias do sistema converjam para esta superfície e “deslizem” nela até que o ponto desejável seja atingido (ASHRAFIUON; ERWIN, 2004). A técnica SMC é pouco sensível à variações paramétricas e distúrbios, tornando o controle altamente robusto (WANG et al., 2004).

Para o projeto do controle SMC, primeiramente define-se a superfície deslizante ( $s$ ), que pode ser descrita como uma combinação ponderada do erro da trajetória da posição e velocidade, como mostrado em (2.19) (HUANG et al., 2010),

$$s = \lambda \mathbf{x}_e \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{x}^*$  representa a referência.

Segundo Spurgeon (2014), para assegurar que o controle alcance e mantenha-se na superfície deslizante é necessário que o problema de alcançabilidade seja solucionado. Existem diversas condições de alcançabilidade na literatura, porém neste trabalho será utilizado a condição de alcançabilidade  $\eta$ , dada por (2.20), onde  $\eta$  é uma constante positiva.

$$s\dot{s} \leq -\eta |s| \quad (2.20)$$

O controle então pode ser definido como  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_{ch}$ . Onde  $\mathbf{u}_{eq}$  é denominado controle equivalente e é definido de forma a manter o sistema na superfície deslizante quando  $\dot{s} = 0$ . Já  $\mathbf{u}_{ch}$  é denominado controle chaveado e é escolhido de modo a satisfazer (2.20).

#### 2.5.3.1 Estabilidade do controle SMC

Em sistemas totalmente atuados, onde o número de atuadores é igual ao número de graus de liberdade, é provado que o controle SMC é assintoticamente estável se a condição de alcançabilidade (2.20) é satisfeita. Porém o mesmo não pode ser dito para um sistema subatuado, como é o caso do OWV, ou seja, em sistemas subatuados, uma vez que a superfície é alcançada, não se pode garantir que o sistema ficará na posição desejada (ASHRAFIUON; ERWIN, 2004).

Para verificar a estabilidade do controle, Ashrafiuon e Erwin (2004) lineariza o sistema para o ponto de equilíbrio desejado, de modo que o critério de estabilidade local pode ser reduzido ao critério de estabilidade de Hurwitz. Como mostrado por Huang et al. (2010), a estabilidade é então garantida pela correta escolha de  $\lambda$  na equação (2.19).

## 2.6 HARDWARE PARA APLICAÇÃO

Por motivos de simplicidade escolheu-se o kit LEGO® MINDSTORMS® Education EV3 como *hardware* para aplicação, visto que a dificuldade em construir um protótipo é extrema-



mente grande com relação a tempo e recursos.

O conjunto LEGO® MINDSTORMS® EV3 pode ser programado pelo Simulink® do MATLAB®. Neste trabalho esta modalidade foi utilizada tanto para programação como para execução do algoritmo de controle.

Nesta seção serão apresentados as especificações técnicas do kit LEGO® MINDSTORMS®, a interação com o Simulink® e as características do Gyroboy, o modelo de robô utilizado como um OWV.

### 2.6.1 Especificações Técnicas do LEGO® MINDSTORMS®

O conjunto de desenvolvimento LEGO® MINDSTORMS® é composto por sensores e atuadores, há duas versões deste kit, a comercial e a educacional. Ao kit educacional, utilizado neste estudo, adiciona-se um giroscópio e uma bateria recarregável.

Os componentes principais presentes no kit são o EV3 *Brick*, utilizado como a central de processamento do robô, HMI (*Human Machine Interface*) e bateria, bem como dois tipos de motores, o EV3 *Large Motor* e o *Medium Motor*, onde cada motor inclui seu encoder, além de quatro sensores, sendo um sensor de cor, um sensor de infravermelho, um sensor de toque, além de um giroscópio, o *Gyro Sensor*.

Para a implementação de um OWV é necessária a utilização de dois motores (EV3 *Large Motor*) para movimentação das rodas juntamente com a utilização do encoder de cada motor para controle do atuador. O único sensor utilizado é o giroscópio (EV3 *Gyro Sensor*), necessário para medição do ângulo de inclinação do corpo do robô. Este ângulo é o objetivo de controle do projeto, como explicado no decorrer deste estudo. Os blocos utilizados para esta aplicação serão explicados em maiores detalhes posteriormente.

O EV3 *Intelligent Brick* utiliza um microprocessador ARM9 de 300MHz, utilizando como sistema operacional o LINUX. Apresenta memória *Flash* de 16MB, memória RAM de 64MB, tem suporte a cartão de memória até 32GB e à conexão USB. Há duas portas USB neste bloco, uma Mini-USB 2.0 utilizada para conexão do EV3 *Brick* com um computador, com velocidade até 480 Mbit/s, e outra USB 1.1 que pode ser utilizada para adicionar um adaptador USB Wi-Fi (NETGEAR WiFi dongle WNA1100 Wireless-N 150) para conexão com uma rede sem fio, ou para conexão com até quatro EV3 *Bricks* juntos (LEGO, 2013).

No EV3 *Brick* há quatro portas de entrada usadas para conexão dos sensores e outras quatro portas de saída para conexão dos motores. Os conectores utilizados são RJ12. Além disso, este bloco se comporta como uma HMI, com *display* e botões para interface com o usuário. Os botões também podem ser programados para atuar na aplicação (LEGO, 2013).

O EV3 *Large motor* é um motor de corrente contínua que possui um sensor de rotação (encoder) com resolução de 1 grau. Ele funciona entre 160-170 rpm, com um torque em regime de 0,02 N · m e torque inicial (*stall torque*) de 0,04 N · m. *Stall torque* é o torque contínuo do motor em velocidade zero (LEGO, 2013).

O EV3 *Gyro Sensor* é um giroscópio digital que detecta o movimento angular em apenas um eixo. Este sensor retorna a taxa de rotação em graus por segundo de um eixo. A máxima taxa de rotação que pode ser medida é de 440 graus por segundo. O ângulo de rotação total em graus também é dado pelo sensor. Para utilização correta do sensor, é necessário que ele esteja completamente parado enquanto é conectado no EV3 *Brick*. Caso contrário, apresentará erros de medição, com uma taxa constante no valor de retorno (LEGO, 2013).

### 2.6.2 Características Gyroboy

O Gyroboy é um robô autobalanceável de duas rodas, ou seja, um TWV, similar ao SEGWAY (2014). Como o objetivo é a implementação de um OWV, é necessária a caracterização de um TWV em um OWV. Para tal, é essencial que a sincronia das duas rodas seja garantida.

Para construção do Gyroboy utilizou-se dois motores (EV3 *Large Motor*) para acionamento das duas rodas, o giroscópio para realimentação da taxa de variação do ângulo do corpo do robô e o EV3 *Brick* para controle direto deste ângulo através do controle dos motores.

A figura 4 mostra o Gyroboy construído e utilizado para implementação.

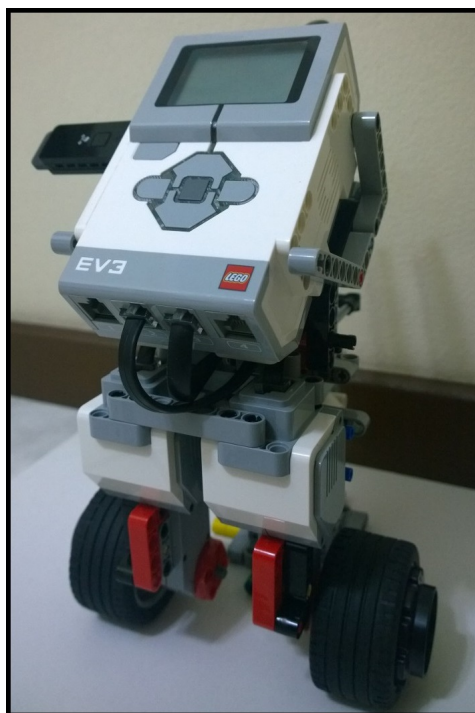


Figura 4 – Gyroboy.

O Gyroboy original, um dos personagens de exemplo apresentados pelo LEGO, é montado com dois braços. O Gyroboy da figura não tem os dois braços, pois estes não seriam utilizados e deixariam o conjunto mais pesado. Dessa forma, com um conjunto mais pesado, o torque deveria ser maior e por consequência a tensão aplicada ao motor. Além da questão peso, como os braços são móveis, eles mudariam o centro de gravidade do robô, o que ocasionaria erros de leitura e acionamento.

### 2.6.3 Comunicação Entre Gyroboy e Simulink®

O Simulink® apresenta um pacote de suporte ao LEGO® MINDSTORMS® EV3. Com ele é possível programar por blocos, já que o pacote de suporte inclui uma biblioteca para o Simulink®. Dessa forma, cada sensor e atuador do kit tem um bloco que pode ser configurado e acessado. Como dito anteriormente, os sensores utilizados foram o giroscópio e o *encoder* do motor, já como atuador utilizou-se o acionamento do motor. Os blocos destes componentes correspondentes no Simulink® serão explicados em detalhes no decorrer desta subseção.

O bloco LEGO® MINDSTORMS® EV3 *encoder* é mostrado na figura 5. Ele apresenta a medição da rotação da roda de um EV3 *Motor* em graus. A direção do movimento indica se há um incremento ou decremento da medição, respectivamente para frente e para trás. A saída do bloco fornece valores como int32 (32 bits de resolução). Neste bloco pode-se mudar os parâmetros da porta de saída a ser utilizada no EV3 *Brick*, ou seja, qual motor utilizado, também a opção de *reset* da medição e o modo, além da taxa de amostragem. É possível zerar o bloco a cada amostragem ou ao enviar qualquer valor (selecionado nas opções do bloco) para a entrada (MATHWORKS, 2015).



Figura 5 – Bloco do *encoder* no Simulink®.

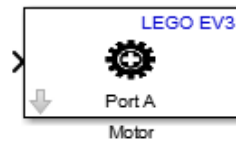
O bloco LEGO® MINDSTORMS® EV3 *Gyro Sensor* apresentado na figura 6 apresenta as medições da taxa de rotação do EV3 *Gyro Sensor* em graus por segundo. A saída do bloco fornece valores como int32. As opções do bloco são a porta de entrada do EV3 *Brick* que é conectada a este sensor e a taxa de amostragem (MATHWORKS, 2015).



Figura 6 – Bloco do giroscópio no Simulink®.

O último bloco apresentado é o LEGO® MINDSTORMS® EV3 *Motor* na figura 7, ele controla a potência e direção de um EV3 *Motor*. A entrada do bloco aceita valores da limitação do PWM (*Pulse Width Modulation*) de 100 a -100, sendo de 1 a 100 para frente de mínima para máxima potência e de -1 a -100 de modo reverso da mínima a máxima potência e 0 representa o não acionamento do motor. A única informação necessária para utilização deste bloco é a porta de saída do EV3 *Brick* a que o motor está conectada (MATHWORKS, 2015).

Há duas formas de execução do algoritmo criado no *hardware*, o *External Mode* (Modo Externo) e o *Deploy to Hardware* (Implementado no Equipamento).



**Figura 7 – Bloco do motor no Simulink® .**

O *External Mode* tem suporte a medições em tempo real, neste modo é possível mudar os parâmetros e monitorar o modelo enquanto o mesmo é executado em *hardware*. A cada mudança de parâmetros não é necessário executar novamente o modelo. Em contrapartida, em *Deploy to hardware* o algoritmo é implementado no *hardware* e só então executado, não sendo possível a mudança de parâmetros, nem a leitura de variáveis (MATHWORKS, 2015).

### 3 TÉCNICAS DE CONTROLE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as propostas de técnicas de controle para o sistema do OWV. Os resultados simulados para cada uma destas técnicas são apresentados e então compara-se a robustez e o consumo de energia exigido da bateria.

Para as simulações realizadas neste capítulo utilizou-se os parâmetros do Gyroboy apresentados na tabela 4. Os métodos pelos quais estes parâmetros foram obtidos encontram-se no capítulo 4.

#### 3.2 FUNCIONAMENTO E REQUISITOS DO OWV

Para que estas técnicas atuem de forma eficiente é necessário compreender como o usuário sobre o OWV se comporta e atua no sistema.

Para atuar na velocidade do dispositivo o usuário atua diretamente na própria referência de  $\theta_b$ , de modo que este torna-se o “acelerador” e “freio” do equipamento. De uma forma geral, quando o usuário inclina-se para frente, o controle aplicará torque na roda para levar  $\theta_b$  à sua referência ( $\theta_b^*$ ). Este torque aumenta a velocidade do veículo e uma vez que o ângulo foi corrigido esta aceleração torna-se nula e a velocidade constante. Similarmente, o veículo é desacelerado quando o usuário inclina-se para trás.

Outros requisitos importantes são o tempo de estabilização e máximo valor de ultrapassagem. Para que o usuário trafegue sobre o produto de forma confortável, estima-se que o tempo máximo de acomodação ( $T_a$ ) é de 5 segundos (com o critério de 5%) e o máximo percentual do valor de ultrapassagem ( $M_{vu}$ ) é de 5%. Entretanto isto são estimativas, uma vez que estas informações não estão disponíveis, e foram obtidas após varias simulações. Imagina-se que estes valores sejam ideais para que o usuário sinta-se confortável e seguro, o que só pode ser verificado na prática, com um usuário embarcado em um produto real.

Como já mencionado, para segurança do usuário e desempenho do equipamento, o controle também deve ser robusto à variação dos parâmetros como peso ( $m_b$ ) e altura ( $l$ ). O erro nos parâmetros deve ser analisado com cuidado durante o desenvolvimento dos controladores, uma vez que é impossível estimá-los com total precisão.

Para melhor compreensão do problema, analisa-se o comportamento do sistema (2.1) em estado estacionário. Supondo que  $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix}$  representa a referência e o estado de equilíbrio desejado do sistema (2.2), estes relacionam-se entre si como em (3.1).

$$x_1^* = \theta_b^* \quad (3.1a)$$

$$x_2^* = \omega_w^* = \frac{1}{\hat{D}_w} \left( \hat{G}_b \sin(x_1^*) - \hat{M} \right) \quad (3.1b)$$

$$x_3^* = \omega_b^* = 0 \quad (3.1c)$$

Sabendo que para controle de posição  $x_1^*$  é dado antecipadamente pelo usuário,  $x_2^*$  pode ser estimado pela equação (3.1b) e utilizado como referência, porém este valor é consequentemente errôneo. O real valor de equilíbrio ( $\bar{x}_2$ ) é dado pela equação (3.2), onde os parâmetros reais são utilizados.

$$\bar{x}_2 = \bar{\omega}_w = \frac{1}{D_w} \left( G_b \sin(x_1^*) - \tilde{M} \right) \quad (3.2)$$

Assim, torna-se impossível para o controle manter-se neste estado de equilíbrio uma vez que  $x_2^* \neq \bar{x}_2$ . Consequentemente um erro de estado estacionário é obtido e/ou reduz-se a qualidade do controle. Este efeito ocorre pois os valores de referências estimados não correspondem ao verdadeiro ponto de equilíbrio do sistema, assim o controle tenderá a exigir um esforço extra do motor para que o ponto de equilíbrio estimado seja obtido, o que deve ser levado em consideração durante o desenvolvimento dos controladores.

### 3.3 LINEARIZAÇÃO DO MODELO DO OWV

Utilizando-se os conceitos apresentados na seção 2.4, obtém-se a linearização do modelo apresentado. Este procedimento é feito ao considerarmos a posição e velocidades angular do pêndulo e motor ( $\theta_b, \omega_b, \omega_w$ ) iguais a zero.

A linearização do sistema (2.2) é apresentada em (3.3) no formato de espaço de estados (2.5).

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_{12}Gb}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} & \frac{-m_{22}(D_b + D_w) - m_{12}D_b}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} & \frac{(m_{22} + m_{12})D_b}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} \\ \frac{m_{11}Gb}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} & \frac{m_{12}(D_b + D_w) + m_{11}D_b}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} & \frac{-(m_{11} + m_{12})D_b}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_{22} + m_{12}}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} \\ -\frac{m_{11} + m_{12}}{(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_L = 0$$

### 3.4 CONTROLE LINEAR - PID

Para projeto do controle PID obtém-se primeiramente as funções de transferência no domínio de Laplace, ignorando-se os termos de acoplamento do sistema linearizado na equação (3.3), como mostrado na equação (3.4).

$$\frac{\theta_b(s)}{\tau(s)} = \frac{147,2s + 144,5}{s^3 + 2,977s^2 - 70,95s - 154,4} \quad (3.4a)$$

$$\frac{\omega_w(s)}{\tau(s)} = \frac{-299,7s^2 + 16,47 \times 10^3}{s^3 + 2,977s^2 - 70,95s - 154,4} \quad (3.4b)$$

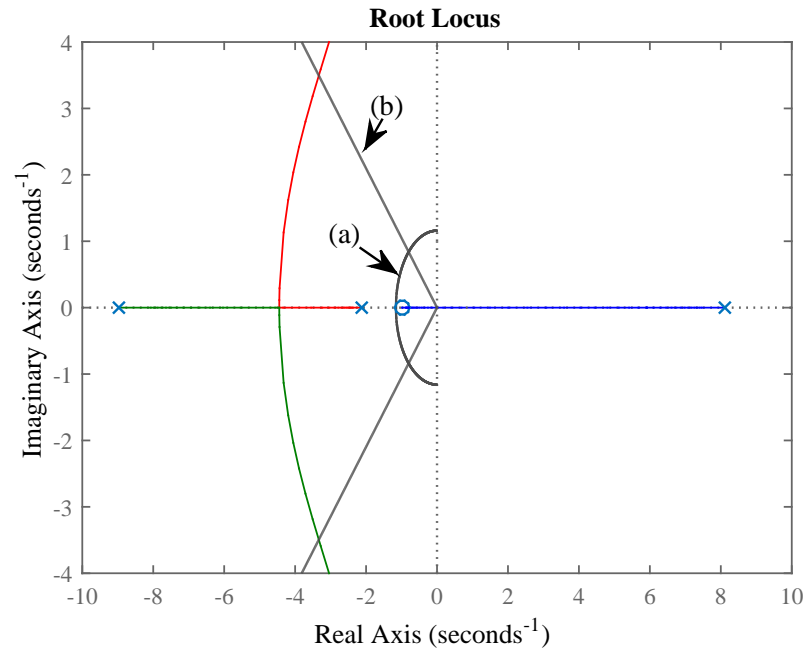
$$\frac{\omega_b(s)}{\tau(s)} = \frac{147,2s^2 + 144,5s}{s^3 + 2,977s^2 - 70,95s - 154,4} \quad (3.4c)$$

Observando o problema devido a variação dos parâmetros apresentado no final da seção 3.2, verifica-se que o sistema deve controlar  $\theta_b$ , de modo que a velocidade  $\omega_w$  varie de acordo com o ângulo proporcionado pelo usuário. Ou seja, simplesmente ignora-se o controle da variável  $\omega_w$ , uma vez que se controlarmos eficientemente  $\theta_b$  e este for constante de modo que (3.1c) seja satisfeita,  $\omega_w$  consequentemente tenderá a um valor constante e próximo de  $\omega_w^*$ .

Assim, basta projetar o PID para controle do ângulo  $\theta_b$  em (3.4a). Nesta situação a função de transferência (3.4a) é a planta, representada por  $G_p$  na figura 3, e o controlador PID é  $G_c$ .

Se anularmos os ganhos derivativo e integrativo do PID obtemos somente um controle proporcional P. A figura 8 mostra o LGR da planta para esta situação, mostrando todos os pólos e o zero da função de transferência (3.4a).

Além disso, duas regiões são mostradas. Elas delimitam as posições cujo os pólos devem estar alocados para que resposta esteja dentro dos requisitos apresentados na seção 3.2. Especificamente, os pólos devem ser alocados fora do semicírculo, indicado pela seta (a), para que o tempo de acomodação seja rápido suficiente e entre as duas retas, indicado pela seta (b) para que o máximo valor de ultrapassagem não exceda o limite. Contudo, a aproximação apresentada na equação (2.6) deve ser satisfeita, uma vez que estas regiões são obtidas para um sistema de segunda ordem.



**Figura 8 – LGR da função de transferência entre  $\theta_b$  e  $\tau$ .**

Encontrando as raízes da função de transferência (3.4a) verifica-se que os pólos em malha aberta localizam-se aproximadamente em  $p_1 = 8,11$ ,  $p_2 = -8,97$ ,  $p_3 = -2,12$ , e o zero em  $z_1 = -0,98$ , sendo os pólos os pontos de onde partem os ramos na figura 8.

Analisando a figura 8, com os pólos e zeros em malha aberta é possível determinar alguns fatos importantes sobre o sistema: A planta é naturalmente instável devido ao pólo no semiplano positivo ( $p_1$ ); O zero da planta ( $z_1$ ) encontra-se dentro da região onde o tempo de acomodação não atende ao requisito mínimo, de forma que algum pólo sempre tenderá a uma resposta mais lenta em ganhos elevados. Além disso, um controle proporcional pode estabilizar a planta, porém os requisitos não serão atendidos.

Desta forma, necessita-se de um controle que proporcione maior flexibilidade do que um simples controlador proporcional.

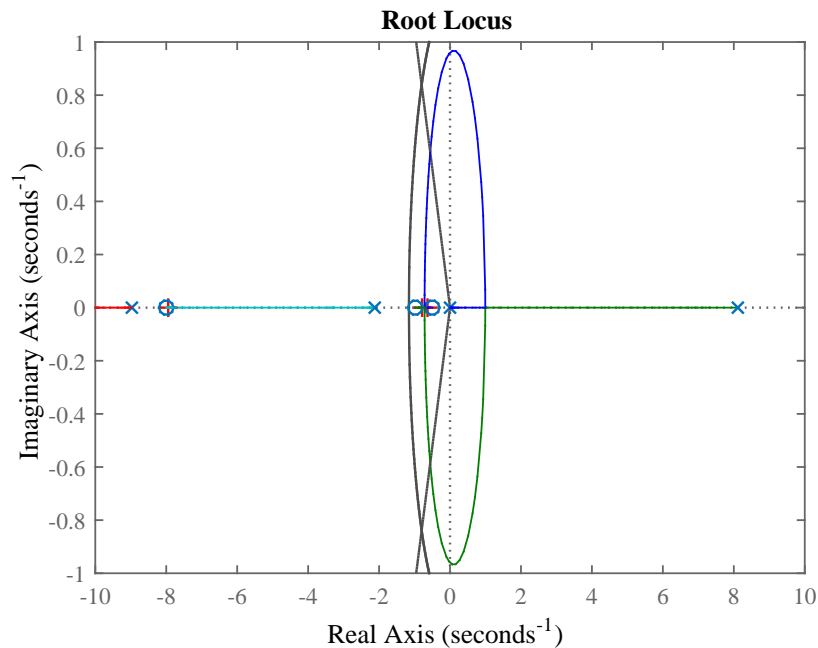
O controle PID no domínio de Laplace é descrito como  $K_d s + K_i/s + K_p$  e quando posicionado em série com a planta, como na figura 3, adiciona-se ao sistema um pólo na origem e dois zeros que podem ser posicionados de acordo com os ganhos  $K_i$ ,  $K_d$  e  $K_p$ .

Após extensa análise e testes, os ganhos definidos pelos autores que forneceram os melhores resultados podem ser visualizados na equação (3.5).

$$1,19 \left( s + \frac{4}{s} + 8,5 \right) \quad (3.5)$$

O novo LGR pode ser visualizado na figura 9, na qual a localização exata dos pólos para o ganho de 1,19 são marcadas por sinais '+' vermelhos.





**Figura 9 – LGR da função de transferência entre  $\theta_b$  e  $\tau$  controlado via PID.**

Analisando a posição dos pólos com o controle verifica-se que dois destes estão localizados dentro da região inapropriada e a equação (2.6) não foi satisfeita. Assim, como esperado, os requisitos mínimos não foram atingidos.

A figura 10 mostra a resposta do sistema com o controle PID a um degrau em  $\theta_b^*$  de 0,08 radianos, equivalente à  $4,58^\circ$ . O tempo de acomodação é de aproximadamente 2 segundos, dentro limite do requisito, e o máximo valor de ultrapassagem é de aproximadamente 50%.

Portanto, o controlador PID puro não apresentou flexibilidade suficiente para solucionar este problema com relação ao sobressinal.

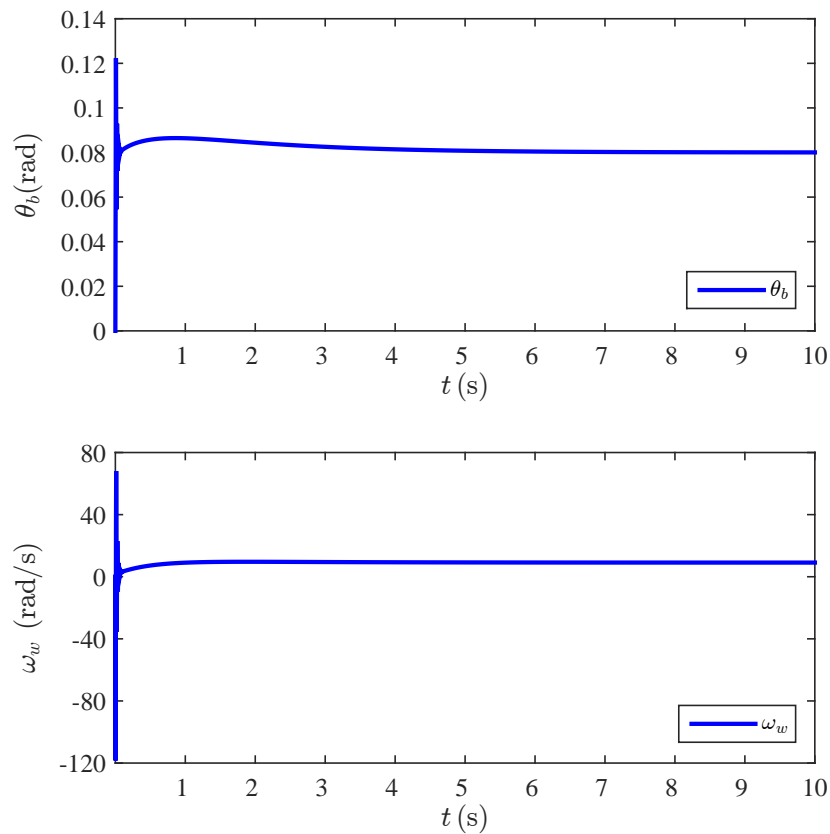
### 3.5 CONTROLE LINEAR - COMPENSADOR

A resposta do sistema pode ser razoavelmente melhorada com a inserção de mais um pólo no controlador. A equação (3.6) apresenta a função de transferência deste compensador.

$$8,254 \frac{(0,097s + 1)(s + 1)}{s(0,0043s + 1)} \quad (3.6)$$

O LGR obtido com este compensador é apresentado na figura 11. Aqui nota-se que os pólos não satisfazem a equação (2.6) e dois deles estão dentro da região inapropriada para os requisitos. Apesar disso, os pólos mais a direita encontram-se praticamente na mesma posição que os zeros da planta e do controlador (-0,98 e -1).

Nesta situação o efeito deste pólo é anulado pelo zero, e a resposta então aproxima-se da desejada. É importante observar que este tipo de aproximação pode tornar o sistema menos



**Figura 10 – Resposta do sistema para o controlador PID utilizado.**

robusto, uma vez que com a variação de parâmetros o zero pode deslocar-se e alterar a resposta esperada (BAGEANT, 2011).

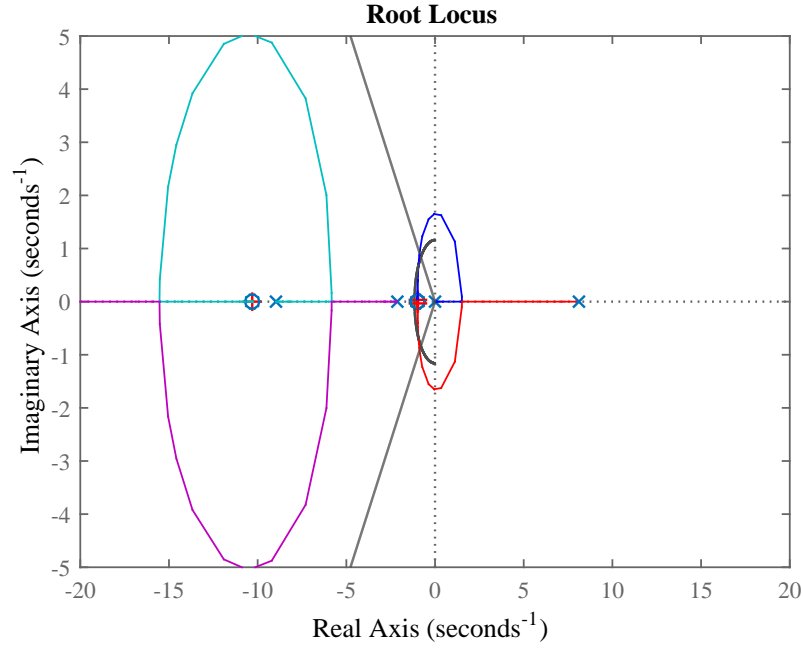
Para uma melhor visualização, os outros dois pólos não são mostrados na figura 11 visto que suas posições encontram-se muito distantes no semiplano esquerdo, assim são muito rápidos para influenciarem efetivamente na resposta do sistema.

A resposta para o controlador da equação (3.6) submetido as mesmas condições anteriores pode ser visualizada na figura 12.

Observando a figura percebe-se uma melhora tanto no máximo valor de ultrapassagem como no tempo de acomodação, sendo que este último é de aproximadamente 1,4 segundos. O máximo valor de ultrapassagem, apesar de reduzido quando comparado à resposta do PID puro, continua fora do limite, sendo aproximadamente 33%. Apesar das diversas tentativas, não foi possível apresentar um controlador linear que atendesse aos dois critérios apresentados. Portanto, o estudo de um controlador não linear torna-se necessário.

### 3.6 CONTROLE SDRE

Ao aplicar-se a teoria apresentada na subseção 2.5.2 diretamente ao sistema em espaço de estados (2.2), um erro em estado estacionário é obtido, mesmo utilizando o SDRE como



**Figura 11 – LGR da função de transferência entre  $\theta_b$  e  $\tau$  controlado via compensador.**

seguidor de comando. Isto ocorre devido ao problema de estimarmos  $\omega_w^*$ , como explicado na seção 3.2.

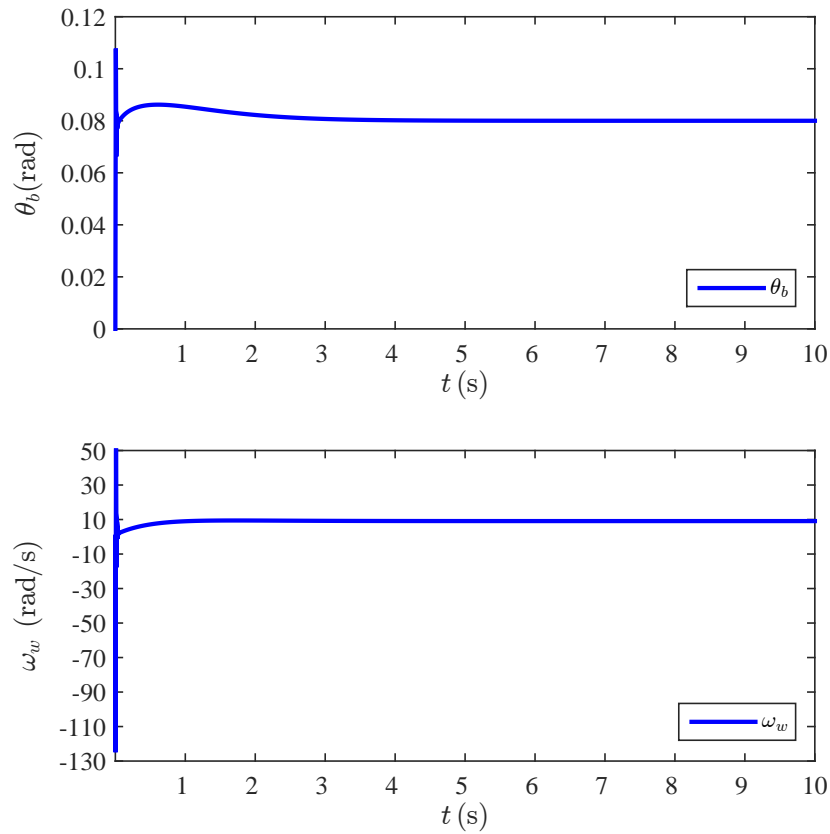
A solução encontrada para este problema é similar à realizada no desenvolvimento do controle linear 3.4, eliminando-se do controle o estado  $\omega_w$  do sistema em (2.2). Assim, obtêm-se como resultado o sistema simplificado apresentado em (3.7), onde  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_b & \omega_b \end{bmatrix}$ .

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 \\ \dot{w}_2 = -\frac{a(\mathbf{w}, \omega_w)}{\bar{M}(\mathbf{w})} - \frac{M_1(\mathbf{w})\tau}{\bar{M}(\mathbf{w})} \end{cases} \quad (3.7)$$

Nesta nova forma, nota-se que o termo  $a(\mathbf{w}, \omega_w)$  não depende somente do próprio vetor de estado  $\mathbf{w}$ , mas também do termo  $\omega_w$ . De fato, apesar da velocidade angular da roda não ser mais controlada, esta ainda precisa ser medida ou estimada para correto funcionamento do SDRE.

Seguindo agora os passos indicados para desenvolvimento do controlador na subseção 2.5.2, primeiro faz-se necessário parametrizar o sistema em (3.7) para a forma SDC. O sistema então pode ser descrito como em (3.8).

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}(\mathbf{w}, \omega_w)\mathbf{w} + \mathbf{B}(\mathbf{w})\tau \quad (3.8)$$



**Figura 12 – Resposta do sistema controlado via compensador.**

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}, \omega_{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \frac{m_{11}G_b \sin(w_1) + (m_{12} \cos(\beta) D_w M_1(\mathbf{w}) D_b) \omega_w}{w_1 \bar{M}(\mathbf{w})}$$

$$a_{22} = -\frac{(M_1(\mathbf{w}) D_b + m_{12}^2 \cos(\beta) \sin(\beta) w_2)}{\bar{M}(\mathbf{w})}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M_1(\mathbf{w})}{\bar{M}(\mathbf{w})} \end{bmatrix}$$

Percebe-se que uma singularidade ocorre na matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \omega_w)$  quando  $w_1 = 0$ . Para evitar erros matemáticos durante a simulação ou na prática, quando  $w_1$  for zero, substitui-se por um valor suficientemente pequeno diferente de zero. Esta aproximação mostra-se suficiente e não prejudica a solução ou estabilidade, como será mostrado posteriormente.

### 3.6.1 SDRE Aumentado Para Seguidor de Comando

Uma vez que neste trabalho necessita-se que o controle siga a referência dada por  $\theta_b^*$ , o sistema deve ser aumentado como indicado na subseção 2.5.2.2. O sistema aumentado para tornar-se um seguidor de comando é dado na equação (3.9), onde  $\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \int w_1 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{w}}, \omega_w) \tilde{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{w}}) \tau \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{w}}, \omega_w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_1(\mathbf{w})}{\bar{M}(\mathbf{w})} \end{bmatrix}$$

Finalmente, o sinal de controle é obtido por (3.10).

$$\tau = -\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{w}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{w}})^T \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{w}}) \begin{bmatrix} \int (w_1 - \theta_b^*) dt \\ w_1 - \theta_b^* \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.6.2 Estabilidade e Controlabilidade do SDRE

A controlabilidade e estabilidade do SDRE é verificada pelo determinante da matriz de controlabilidade  $\mathbf{M}_C(\tilde{\mathbf{w}})$  do par  $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{w}}, \omega_w)$  e  $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{w}})$ . Para que o sistema seja sempre estável,  $\det(\mathbf{M}_C(\mathbf{w})) \neq 0$  para todo domínio de  $\mathbf{w}$  e  $\omega_w$ . Com auxílio do *software* MATLAB® com solução simbólica, obtém-se que  $\det(\mathbf{M}_C(\tilde{\mathbf{w}})) = (M_1(\tilde{\mathbf{w}})/\bar{M}(\tilde{\mathbf{w}}))^3$ . Sendo que  $M_1 \neq 0$  sempre, conclui-se que o sistema é estável e controlável sempre.

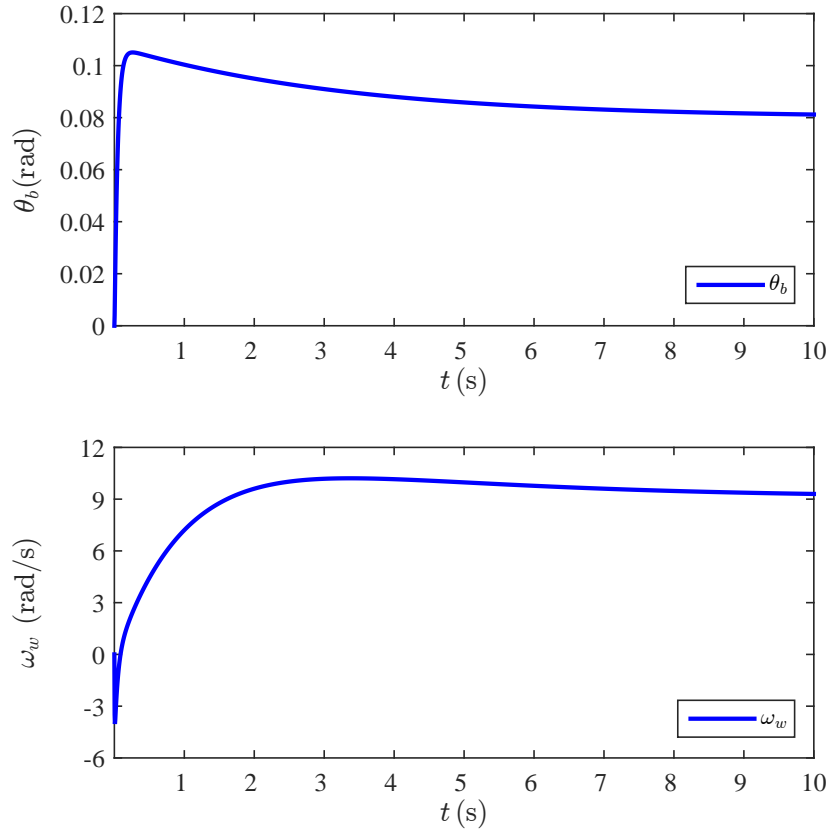
### 3.6.3 Simulação do Controle SDRE

Para verificar-se a eficácia do controle SDRE, simulou-se o sistema para o mesmo degrau, em  $\theta_b^*$  de 0,08 radianos, do controle linear. Após diversos testes, as matrizes de peso  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  que proporcionaram os melhores resultados são:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = 10^{-3}$$

A figura 13 mostra o resultado obtido. Verifica-se aqui que o máximo valor de ultrapassagem é de aproximadamente 31% e o tempo de assentamento é de 6 segundos.



**Figura 13 – Resposta do sistema controlado por SDRE.**

Além do mais, variando-se as matrizes  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  é possível diminuir o tempo de assentamento ao custo de um maior percentual de ultrapassagem, o inverso também é verdadeiro. Porém não encontrou-se uma combinação de pesos em que ambos os requisitos fossem atendidos.

### 3.7 CONTROLE SMC

Huang et al. (2010) apresenta dois controles SMC para controle da velocidade ( $\omega_w$ ) do OWV. O segundo controle apresentado é aqui modificado para controle da posição  $\theta_b$ .

Sendo o vetor de estado  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (x_1 - x_1^*) & (x_1 - x_1^*) & x_3 & x_2 \end{bmatrix}$ , onde as variáveis  $x$  são definidas na equação (2.2), a superfície  $s$  é dada por (3.12).

$$s = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + z_4 \quad (3.12)$$

O controle equivalente  $\tau_{eq}$  é definido fazendo  $\dot{s} = 0$ . Substituindo  $\dot{z}_3$  e  $\dot{z}_4$  por seus equivalentes no sistema (2.2), obtém-se (3.13), onde assume-se que  $\omega_b^* = 0$  sempre.

$$\dot{s} = \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + \lambda_3 \dot{z}_3 + \dot{z}_4 = 0$$

$$\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + \lambda_3 \left( -\frac{\hat{a}(\mathbf{z})}{\hat{M}(\mathbf{z})} - \frac{\hat{M}_1(\mathbf{z}) \tau_{eq}}{\hat{M}(\mathbf{z})} \right) + \left( -\frac{\hat{b}(\mathbf{z})}{\hat{M}(\mathbf{z})} + \frac{\hat{M}_2(\mathbf{z}) \tau_{eq}}{\hat{M}(\mathbf{z})} \right) = 0$$

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\hat{M}_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 \hat{M}_1(\mathbf{z})} \left[ \lambda_3 \hat{a}(\mathbf{z}) + \hat{b}(\mathbf{z}) - \lambda_1 \hat{M}(\mathbf{z}) z_2 - \lambda_2 \hat{M}(\mathbf{z}) z_3 \right] \quad (3.13)$$

O controle final pode ser descrito como  $\tau = \tau_{eq} + \tau_{ch}$ , onde deve-se definir o controle chaveado ( $\tau_{ch}$ ) apropriado. Dessa forma,  $\dot{s}$  é dado por:

$$\dot{s} = \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + \lambda_3 \left( -\frac{a(\mathbf{z})}{\bar{M}(\mathbf{z})} - \frac{M_1(\mathbf{z}) (\tau_{eq} + \tau_{ch})}{\bar{M}(\mathbf{z})} \right) + \left( -\frac{b(\mathbf{z})}{\bar{M}(\mathbf{z})} + \frac{M_2(\mathbf{z}) (\tau_{eq} + \tau_{ch})}{\bar{M}(\mathbf{z})} \right)$$

Substituindo  $\tau_{eq}$  dado em (3.13),  $\dot{s}$  torna-se:

$$\dot{s} = \left( \hat{f}(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) \right) + \Delta \cdot r(\mathbf{z}) + \frac{\tau_{ch}}{\bar{M}(\mathbf{z})} (M_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 M_1(\mathbf{z}))$$

onde considera-se:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \frac{\lambda_3 a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})}{\bar{M}(\mathbf{z})}, \quad \hat{f}(\mathbf{z}) = \frac{\lambda_3 \hat{a}(\mathbf{z}) + \hat{b}(\mathbf{z})}{\hat{M}(\mathbf{z})} \\ \frac{M_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 M_1(\mathbf{z})}{\bar{M}(\mathbf{z})} &= (1 + \Delta) \frac{\hat{M}_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 \hat{M}_1(\mathbf{z})}{\hat{M}(\mathbf{z})} \\ r(\mathbf{z}) &= \hat{f}(\mathbf{z}) - \lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_3 \end{aligned}$$

O erro entre os valores estimados e reais é representado por  $\Delta$ . Este erro deve estar limitado pela constante  $\gamma$ , selecionada pelo projetista como na inequação:

$$|\Delta| \leq \gamma < 1.$$

Escolhe-se então  $\tau_{ch}$  como na equação (3.14).

$$\tau_{ch} = \frac{\hat{M}(\mathbf{z})}{\hat{M}_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 \hat{M}_1(\mathbf{z})} k(\mathbf{z}) \operatorname{sgn}(s) \quad (3.14)$$

A condição de alcançabilidade (2.20) agora é dada pela expressão (3.15), onde as variações paramétricas e distúrbios do sistemas são limitados por  $F(\mathbf{z})$  que é dado pela inequação (3.16).

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s \left[ \hat{f}(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) + \Delta r(\mathbf{z}) + (1 + \Delta) k(\mathbf{z}) \operatorname{sgn}(s) \right] \\ &\leq |s| [F(\mathbf{z}) + \gamma |r(\mathbf{z})| + (1 + \gamma) k(\mathbf{z})] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\left| \hat{f}(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) \right| \leq F(\mathbf{z}) \quad (3.16)$$

Para que a condição de alcançabilidade seja satisfeita,  $k(\mathbf{z})$  deve obedecer a inequação (3.17).

$$k(\mathbf{z}) \leq -\frac{F(\mathbf{z}) + \gamma |r(\mathbf{z})| + \eta}{1 - \gamma} \quad (3.17)$$

Com as considerações acima, finalmente o controle SMC é obtido na equação (3.18).

$$\tau = \frac{1}{\hat{M}_2(\mathbf{z}) - \lambda_3 \hat{M}_1(\mathbf{z})} \left[ \lambda_3 \hat{a}(\mathbf{z}) + \hat{b}(\mathbf{z}) - \lambda_1 \hat{M}(\mathbf{z}) z_2 - \lambda_2 \hat{M}(\mathbf{z}) z_3 + \hat{M} k(\mathbf{z}) \operatorname{sgn}(s) \right] \quad (3.18)$$

### 3.7.1 Estabilidade do Controle SMC

A estabilidade pode ser verificada pela linearização do sistema para o ponto de equilíbrio desejado. Este processo pode ser simplificado considerando-se um novo vetor de estados

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^T.$$

O controle (3.18) garante que todos os estados cheguem à superfície, neste ponto  $s = \dot{s} = 0$  e a relação (3.19) pode ser obtida.

$$\begin{aligned} s &= \lambda_1 \int q_1 + \lambda_2 q_1 + \lambda_3 q_2 + q_3 = 0 \\ \dot{s} &= \lambda_1 q_1 + \lambda_2 \dot{q}_1 + \lambda_3 \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \rightarrow \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0 \\ \dot{q}_3 &= -\lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2 - \lambda_3 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com base no modelo do sistema em (2.1), a equação (3.20) pode ser obtida.

$$M_1(\mathbf{q}) \dot{q}_3 + M_2(\mathbf{q}) \dot{q}_2 = -D_w q_3 + G_b \sin(q_1 + \theta_b^*) + m_{12} q_2^2 \sin(q_1 + \theta_b^* + \alpha) - \tilde{M} \quad (3.20)$$

A partir de (3.19) e (3.20) pode-se transformar o sistema para forma vetorial como (3.21):

$$\dot{\mathbf{q}} = \Psi(\mathbf{q}) \quad (3.21)$$

sendo:



$$\Psi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{q}) & \Psi_2(\mathbf{q}) & \Psi_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T$$

$$\Psi_1(\mathbf{q}) = q_2$$

$$\Psi_2(\mathbf{q}) = N \left[ M_1(\mathbf{q}) \lambda_1 q_1 + M_1(\mathbf{q}) \lambda_2 q_2 + m_{12} q_2^2 \sin(q_1 + \theta_b^* + \alpha) - \tilde{M} \right. \\ \left. - D_w q_3 + G_b \sin(q_1 + \theta_b^*) \right]$$

$$\Psi_3(\mathbf{q}) = N \left[ -M_2(\mathbf{q}) \lambda_1 q_1 - M_2(\mathbf{q}) \lambda_2 q_2 - \lambda_3 m_{12} q_2^2 \sin(q_1 + \theta_b^* + \alpha) + \lambda_3 \tilde{M} \right. \\ \left. + \lambda_3 D_w q_3 - \lambda_3 G_b \sin(q_1 + \theta_b^*) \right]$$

onde

$$N = \frac{1}{M_2(\mathbf{q}) - \lambda_3 M_1(\mathbf{q})}$$

O sistema (3.21) é linearizado seguindo as informações apresentadas em 2.4. O ponto de equilíbrio é dado por  $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\omega}_w \end{bmatrix}^T$ , onde  $\bar{\omega}_w$  é o valor real da velocidade da roda de acordo com a equação (3.2). A matriz linearizada resultante deste processo é apresentada em (3.22).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Substituindo-se por  $\mathbf{q}^*$  obtém-se (3.23):

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde

$$\Delta_1 = N^* [M_1(\mathbf{q}^*) \lambda_1 + G_b \cos(\theta_b^*)]$$

$$\Delta_2 = N^* M_1(\mathbf{q}^*) \lambda_2$$

$$\Delta_3 = -N^* D_w$$

$$\Delta_4 = -N^* [M_2(\mathbf{q}^*) \lambda_1 + \lambda_3 G_b \cos(\theta_b^*)]$$

$$\Delta_5 = -N^* M_2(\mathbf{q}^*) \lambda_2$$

$$\Delta_6 = N^* \lambda_3 D_w$$

$$N^* = \frac{1}{M_2(\mathbf{q}^*) - \lambda_3 M_1(\mathbf{q}^*)}$$

Para que o sistema seja estável, de acordo com o critério de Hurwitz as inequações (3.24) devem ser satisfeitas, como demonstrado por Huang et al. (2010).

$$\begin{aligned} \Delta_2 + \Delta_6 &< 0 \\ \Delta_1 \Delta_6 - \Delta_3 \Delta_4 &> 0 \\ (\Delta_2 + \Delta_6)(\Delta_3 \Delta_5 - \Delta_2 \Delta_6) + \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_3 \Delta_4 &> 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir de (3.23) e (3.24) segue:

$$\begin{aligned} \Delta_2 + \Delta_6 &= N^* (M_1(\mathbf{q}^*) \lambda_2 + D_w \lambda_3) \\ \Delta_1 \Delta_6 - \Delta_3 \Delta_4 &= (N^*)^2 D_w [M_1(\mathbf{q}^*) \lambda_1 \lambda_3 - M_2(\mathbf{q}^*) \lambda_1] \\ \Delta_3 \Delta_5 - \Delta_2 \Delta_6 &= (N^*)^2 [M_2(\mathbf{q}^*) D_w \lambda_2 - M_1(\mathbf{q}^*) D_w \lambda_2 \lambda_3] \\ \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_3 \Delta_4 &= (N^*)^2 [(M_1(\mathbf{q}^*))^2 \lambda_1 \lambda_2 + M_1(\mathbf{q}^*) G_b \cos(\theta_b^*) \lambda_2 \\ &\quad + M_2(\mathbf{q}^*) D_w \lambda_1 + D_w G_b \cos(\theta_b^*) \lambda_3] \end{aligned}$$

Sabendo que  $\theta_b$  está fisicamente limitado a  $\pm\pi/2$ , consequentemente  $M_1(\mathbf{q}^*)$ ,  $M_2(\mathbf{q}^*)$ , e  $\cos(\theta_b^*) > 0$ . Assim, o critério de estabilidade (3.24) é satisfeito fazendo-se  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3$  deve ser grande o suficiente para que  $N^* < 0$ , ou seja,  $\lambda_3 > M_2(\mathbf{q}^*) / M_1(\mathbf{q}^*)$ .

### 3.7.2 Simulação do Controle SMC

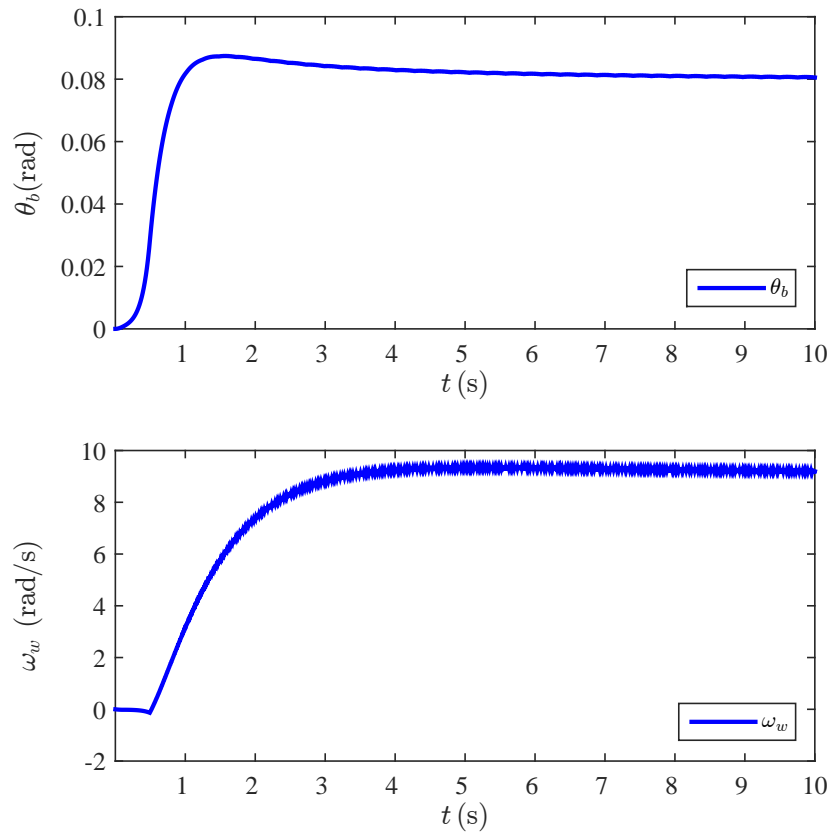
Simulou-se o controle SMC para o mesmo degrau em  $\theta_b^*$  de 0,08 radianos do controle linear. Escolheu-se os parâmetros de controle como:

$$k(\mathbf{z}) = -\frac{F(\mathbf{z}) + \gamma |r(\mathbf{z})| + \eta}{1 - \gamma} - 0,01$$

onde

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) &= 0,1 \left| \hat{f}(\mathbf{z}) \right| & \lambda_1 &= 500 \\ \gamma &= 0,5 & \lambda_2 &= 2000 \\ \eta &= 1 & \lambda_3 &= 500 \end{aligned}$$

O resultado obtido é mostrado na figura 14. O percentual de ultrapassagem mostra-se em torno 8,75% enquanto o tempo de assentamento encontra-se em torno de 3 segundos. Analisando-se os dois critérios, observa-se um conjunto de valores consideravelmente melhores que os obtidos por quaisquer das técnicas.



**Figura 14 – Resposta do sistema controlado por SMC.**

Percebe-se também na figura 14 uma alta frequência sobre o sinal de velocidade angular, esta frequência tem como origem a característica de chaveamento do controle SMC. Como neste caso o sinal obtido via simulação é solucionado a passos com uma frequência de amostragem elevada (1 kHz), a frequência de chaveamento do controle que pode ser vista em  $\omega_w$  equivale ao mesmo valor.

### 3.8 ROBUSTEZ

Como mencionado, a robustez da técnica de controle é requisito essencial para o veículo. Obter uma análise analítica entre as técnicas de modo que estas pudessem ser comparadas é uma tarefa complexa. Assim, comparou-se o comportamento de cada técnica para cinco diferentes variações nos parâmetros críticos  $m_b$  e  $l$ .

Segundo IBGE (2009), um jovem do sexo masculino com idade entre 20 e 24 anos residente do estado do Paraná possui peso e altura média de 70,4 kg e 1,74 m respectivamente. Lemos et al. (2009) apresenta que o centro de gravidade ( $CG$ ) do corpo humano está geralmente localizado à 55% da estatura do indivíduo em relação ao chão. Assim, os parâmetros de um usuário médio são  $m_b = 70,4$  kg e  $l = 0,957$  m.

Segundo WHO (2015) estes valores correspondem a uma pessoa com relação média entre altura e peso. Este tipo de classificação é feito utilizando-se o Índice de Massa Corpórea (IMC),

índice que é calculado pela equação (3.25).

$$\text{IMC} = \frac{m_b}{l^2} \quad (3.25)$$

Ainda segundo WHO (2015), um jovem passa a ser classificado como obeso para um  $\text{IMC} = 30 \text{ kg/m}^2$  e muito magro para um  $\text{IMC} = 17 \text{ kg/m}^2$ .

Leva-se em consideração os dados apresentados e também que uma criança de 10 anos tem altura média aproximada de 1,40 m (IBGE, 2009). Além disso, assume-se empiricamente que uma pessoa com 2,00 m de altura é um adulto alto.

Define-se então 4 casos como variações máxima para os parâmetros do usuário  $m_b$  e  $l$  além do já apresentado. Estes casos são classificados como: usuário de altura e peso médio (UMD); usuário alto e pesado (UAP); usuário alto e leve (UAL); usuário baixo e pesado (UBP); usuário baixo e leve (UBL).

Os valores dos parâmetros  $m_b$  e  $l$  para cada caso é apresentado na tabela 1.

**Tabela 1 – Valores dos parâmetros  $m_b$  e  $l$  para cada caso de usuários.**

<b>Caso</b>	$m_b(\text{kg})$	$l(\text{m})$	$\text{IMC}(\text{kg/m}^2)$
UAP	120	1,1	30
UAL	68	1,1	17
UMD	70,4	0,957	23,25
UBP	58,8	0,77	30
UBL	33,32	0,77	17

**Fonte: Autoria própria.**

Como neste trabalho utilizou-se o Gyroboy como modelo, faz-se necessária a adaptação dos casos apresentados. Com base nas variações dos parâmetros da tabela 1, estabeleceu-se os casos proporcionais ao Gyroboy.

Por exemplo, considera-se como caso médio os valores reais do Gyroboy. A razão entre o peso de um usuário alto e pesado com o peso médio é de  $120/70,4$ . Esta razão é mantida, assim o peso do caso alto e pesado para o Gyroboy é  $m_b = 1,097 \text{ kg}$ . O mesmo raciocínio foi utilizado para os demais parâmetros e definiu-se a tabela apresentada em 2.

Finalmente, obteve-se então as respostas do controle de  $\theta_b$  para cada técnica e cada caso na figura 15.

A figura 15a mostra as respostas providas pelo controle PID. Observa-se considerável diferença no comportamento para cada caso, principalmente com relação ao tempo de assentamento que para o pior caso aumentou de 2 para 3,8 segundos. Além disso, o sobressinal que já era elevado de 50% aumentou para 58%.

Verifica-se então que o controle PID, apesar de estável para a faixa de valores testada, neste caso não apresenta robustez satisfatória.

**Tabela 2 – Valores dos parâmetros  $m_b$  e  $l$  para cada caso do Gyroboy.**

<b>Caso</b>	$m_b$ (kg)	$l$ (m)
AP	1,097	0,1298
AL	0,6214	0,1298
MD	0,6433	0,1129
BP	0,5373	0,0908
BL	0,3045	0,0908

**Fonte: Autoria própria.**

O controle compensado aumentou o tempo de assentamento de 1,4 para 2,4 segundos no pior caso. Já o máximo percentual de ultrapassagem aumentou de 33% para 45%, como mostrado na figura 15b. Assim, similarmente ao PID, não apresenta uma robustez satisfatória.

Observando as respostas obtidas no controle SMC mostrado na figura 15c, percebe-se que houve uma variação no desempenho levemente superior do que a apresentada pelo SDRE. Para o pior caso, o tempo de assentamento passou de 3 segundos para 3,3 segundos, enquanto que o máximo percentual de ultrapassagem aumentou de 8,75% para 10%.

Porém, pode-se considerar que o controle SMC é altamente robusto, uma vez que a variação apresentada é baixa.

A figura 15d apresenta as respostas obtidas pelo controle SDRE. Verifica-se aqui que para toda faixa de valores praticamente não houve alteração no desempenho, sendo que o tempo de acomodação alterou-se somente de 6,2 para 6,4 no pior caso e o sobressinal teve um aumento de 31% para 32%. Este comportamento caracteriza um controle altamente robusto.

É interessante notar também o comportamento da velocidade angular  $\omega_w$  para os diferentes casos apresentados. A figura 16a apresenta os resultados obtidos para o controle PID, 16b os resultados do compensador, 16c do SMC e 16d do SDRE.

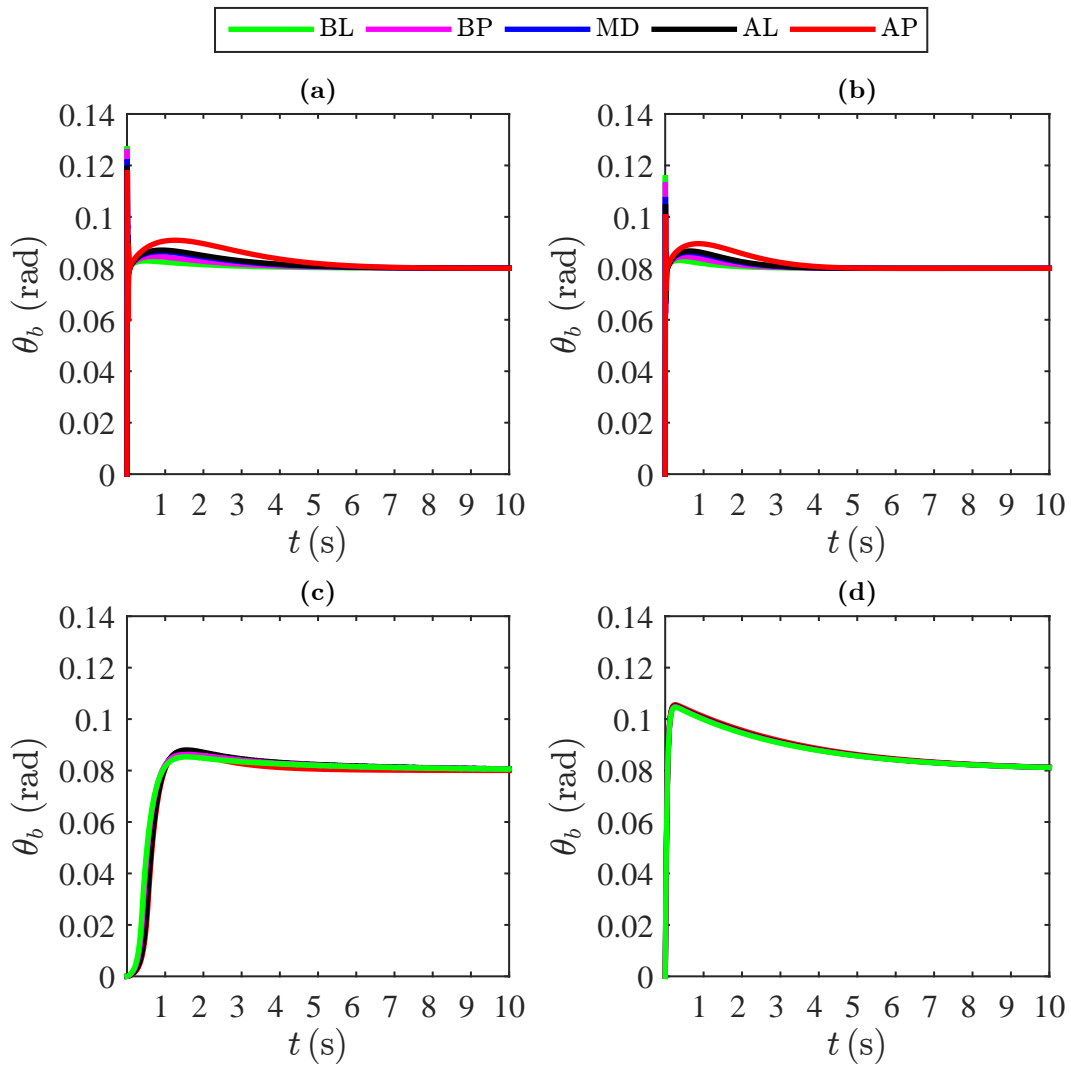
Os controladores lineares PID e compensador apresentam elevados valores de pico tanto positivo quanto negativo para a velocidade angular. Esta característica na prática é irreal e parece ser insegura para o usuário.

O controle SDRE apresenta um pico negativo na velocidade angular menor que os casos lineares. Enquanto o controle SMC é extremamente suave neste quesito.

Uma vez que todas as técnicas foram desenvolvidas para controle da posição angular, era esperado, segundo a equação (3.2) na seção 3.2, que o ponto de equilíbrio real da velocidade angular fosse alterado com a variação dos parâmetros. Esta alteração é devido à variável  $G_b$ , que é diretamente proporcional a  $m_b$  e  $l$ . Este efeito fica evidente nas figuras mencionadas.

### 3.9 CONSUMO ENERGÉTICO

Um ponto sempre importante para qualquer sistema que dependa de uma bateria como fonte de energia, é o consumo. Neste caso, quanto menor o consumo maior será a autonomia



**Figura 15 – Respostas da posição angular  $\theta_b$  para cada caso de variação nos parâmetros, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE.**

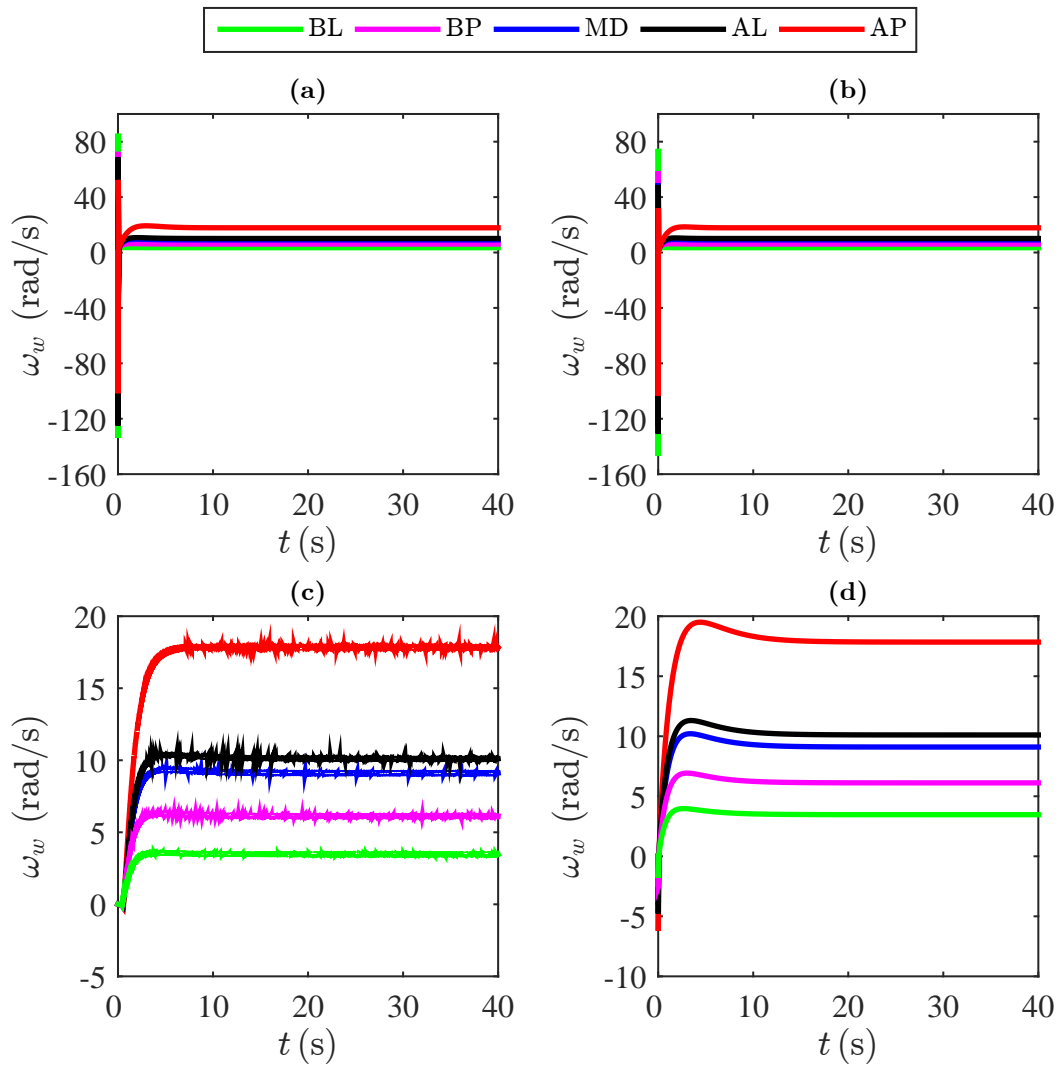
do produto e consequentemente a satisfação do cliente, além do impacto ambiental reduzido.

A energia consumida em um sistema mecânico pode ser dada pela equação (3.26). Assim, obteve-se a energia consumida por cada controle para cada uma das condições apresentadas na tabela 1.

$$W = \int_0^t \tau_m(t) \omega_w(t) dt \quad (3.26)$$

A figura 17 apresenta o consumo de energia de cada técnica e para cada caso. A figura 17a mostra os resultados referentes ao caso AP, 17b o caso AL, 17c o caso BP, 17d o caso BL e 17e o caso MD.

Analisando estas figuras fica evidente o menor consumo do SMC para toda faixa analisada. É importante observar que os gráficos da figura 17 foram tomados em uma região onde todos os controles estão em regime permanente e que, portanto, a diferença entre eles é o consumo



**Figura 16 – Respostas da velocidade angular  $\omega_w$  para cada caso de variação nos parâmetros, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE.**

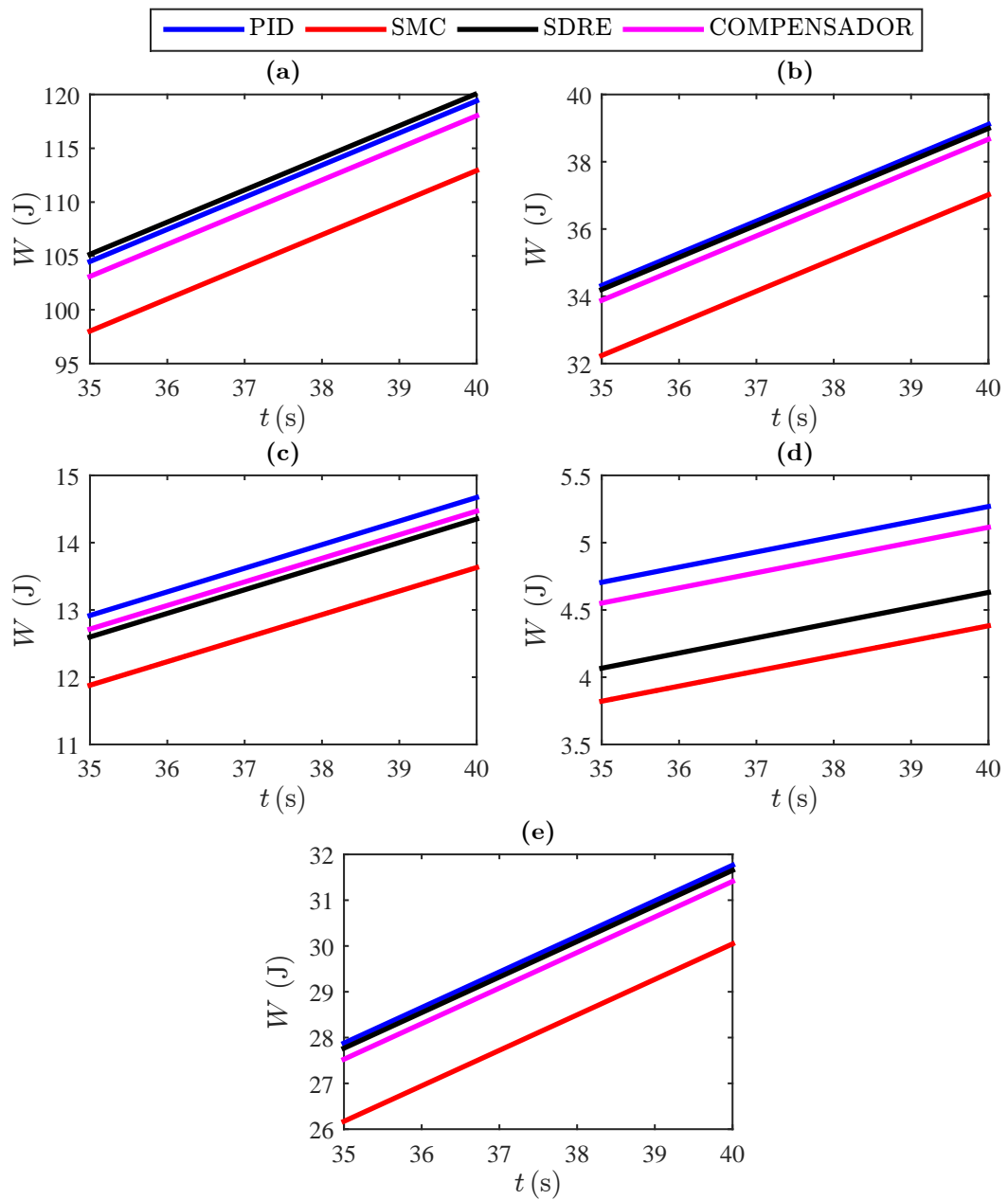
que cada controle apresenta durante o transitório. Nota-se que todas as curvas são totalmente lineares, indicando que, em regime, todos consomem a mesma energia.

### 3.10 DESEMPENHO DOS CONTROLES COM MOTOR

Todas as simulações realizadas até aqui consideraram que o sinal de torque requerido pelos controladores fosse diretamente aplicado ao modelo. Na prática este torque, gerado por um motor, é limitado e não se altera instantaneamente, o que diminui o desempenho dos controladores.

Nesta seção será apresentado o modo com que o motor descrito no capítulo 4 afeta o desempenho dos controladores.

A figura 18 apresenta a estrutura final, onde “Controle do OWV” é substituído pelo controlador PID, compensador, SDRE e SMC a ser testado em cada simulação. A realimentação



**Figura 17 – Consumo de energia de cada técnica para: (a) caso AP; (b) caso AL; (c) caso BP; (d) caso BL; (e) caso MD.**

dos três estados do OWV para o “Controle do OWV” é representada de modo geral, onde os controles lineares não utilizam todos estes sinais. O bloco “Controle do Motor” representa a estrutura apresentada na figura 27. O torque estimado é multiplicado por 2, uma vez que são dois motores presentes no Gyroboy.

O primeiro efeito ocasionado pela inserção do motor é a redução dos picos de velocidade nos controles lineares PID e compensador. As figuras 19 e 20 mostram as respostas destes controles respectivamente. Nestas figuras também é apresentada a resposta do respectivo controle sem a inserção do motor para facilitar a comparação.



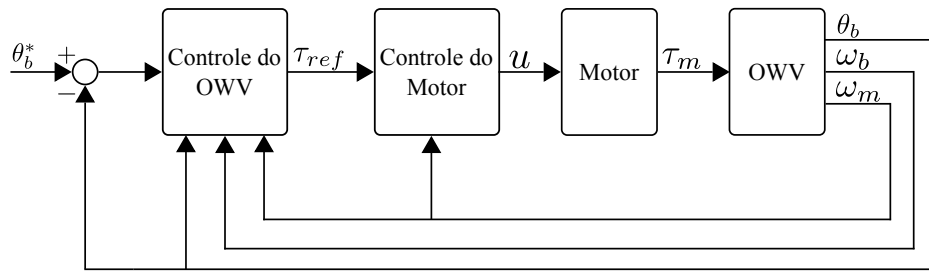


Figura 18 – Diagrama de blocos do controle com o motor.

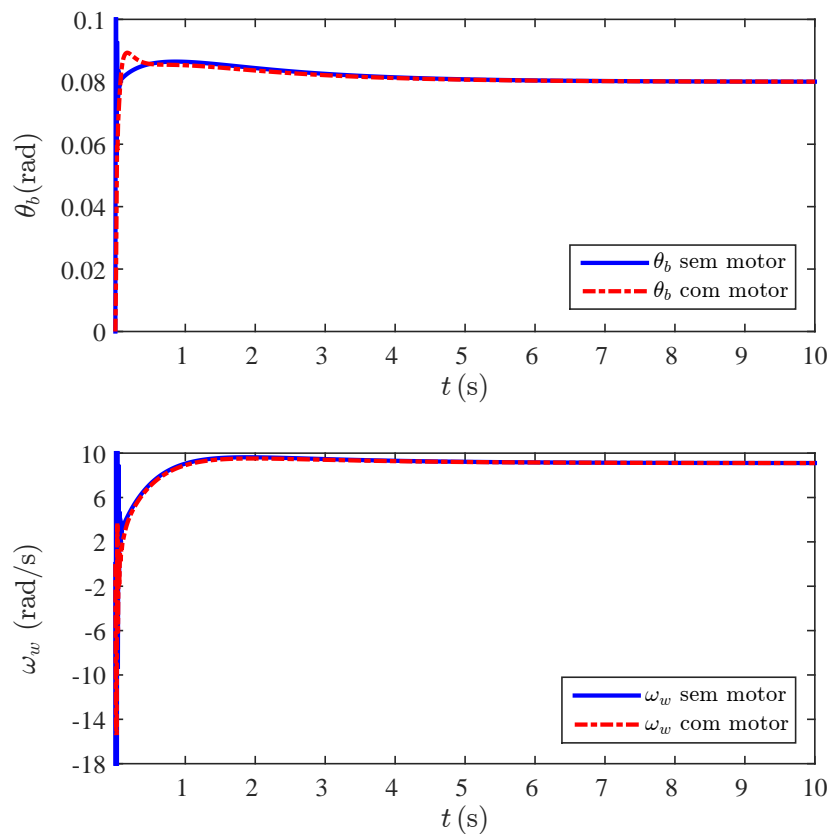
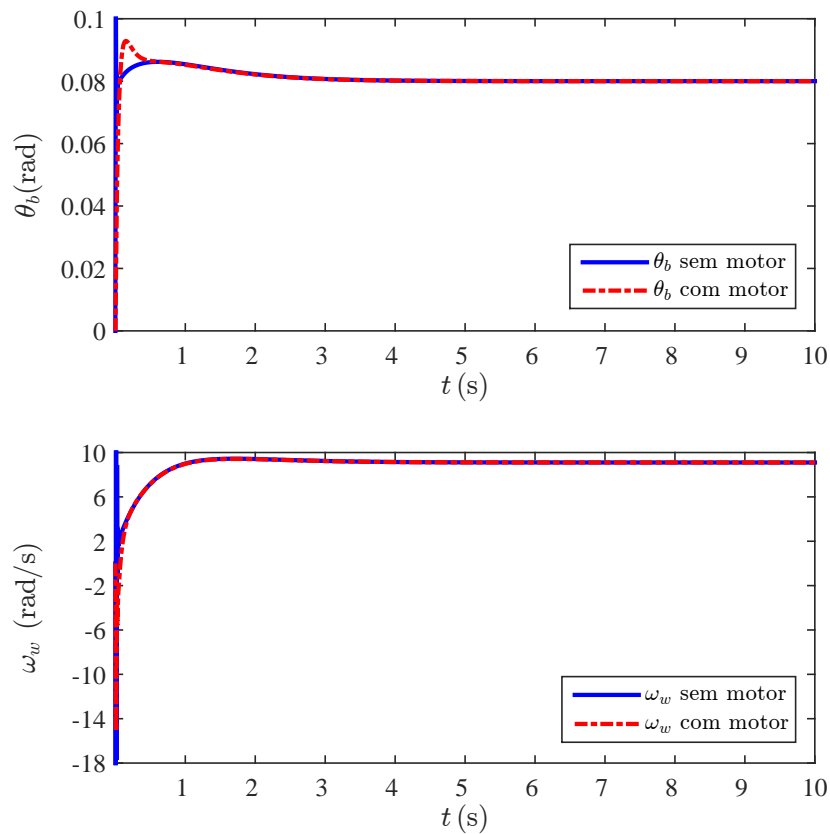


Figura 19 – Resposta do sistema para o controlador PID com motor.

Nota-se aqui que a limitação devido à presença do motor reduziu consideravelmente o máximo valor de ultrapassagem dos controles lineares. O sobressinal do PID reduziu de 50% para 11%, já o compensador melhorou seu sobressinal de 33% para 16%. Se observarmos os tempos de assentamento dos mesmos, o compensador manteve o mesmo valor de 1,4 segundos enquanto que o PID melhorou de 2 segundos para 1,7 segundos. Verificando-se a velocidade angular dos controladores lineares, uma drástica redução nos valores de pico pode ser analisada.

A figura 21 apresenta a resposta obtida pelo controle SDRE. Verifica-se um aumento no máximo valor de ultrapassagem do ângulo de 31% para 35% e nenhum efeito tanto no tempo de assentamento quanto na velocidade angular.

O mesmo é realizado para o controle SMC. A resposta deste controle para ambas situa-



**Figura 20 – Resposta do sistema para o controlador compensador com motor.**

ções, com e sem motor, podem ser visualizadas na figura 22. Nota-se aqui que a velocidade de resposta foi reduzida (3 segundos para 5,9 segundos) e aumentou-se o sobressinal de 8,75% para 13%. Como o torque no motor não varia instantaneamente, o ruído apresentado anteriormente devido ao chaveamento do controlador SMC na velocidade angular foi reduzido.

### 3.10.1 Robustez com motor

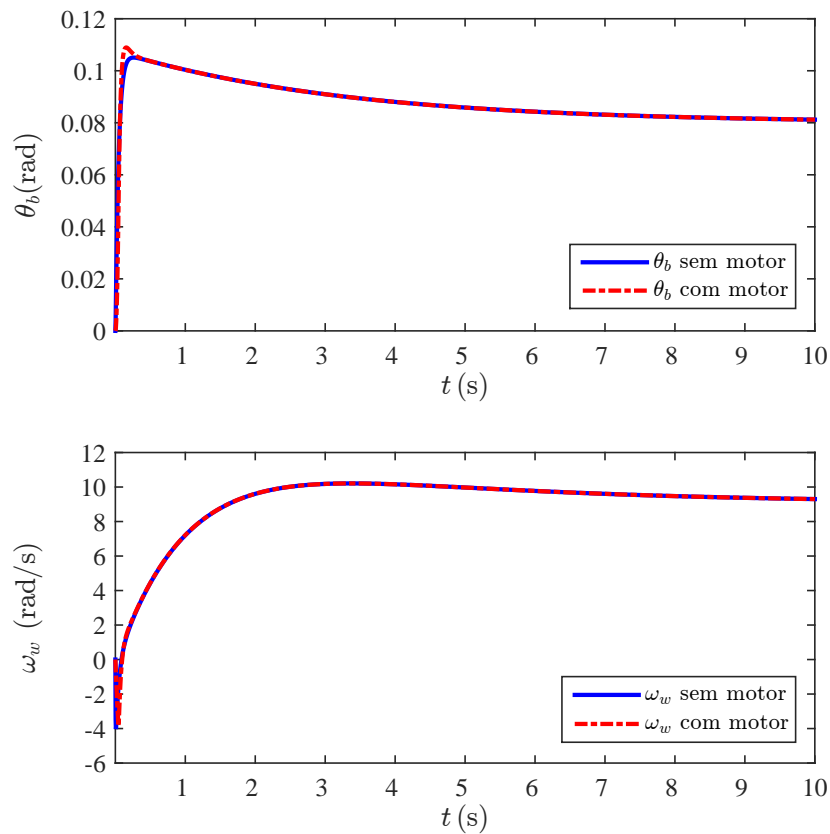
Os mesmo testes de robustez apresentados na seção 3.8 foram realizados na presença do motor para todos os casos da tabela 2.

O caso AP não pôde ser controlado por nenhum dos quatro controles, mostrando que o torque produzido pelo motor não é suficiente para esta situação.

A figura 23 mostra as respostas de todas as técnicas para os casos em que o sistema foi controlado.

Observa-se o pior caso obtido pelo PID sem o motor (figura 15) melhorou drasticamente. O tempo de assentamento diminui de 3,8 para 2 segundos e o sobressinal reduziu de 58% para 12,5%, como mostra a figura 23a. A limitação dinâmica do motor limitou os valores de pico e suavizou a resposta como um todo.

Similarmente, o controle compensado na presença do motor é mostrado para os casos em que o sistema foi controlado na figura 23b. A figura mostra que a resposta foi melhorada se



**Figura 21 – Resposta do sistema para o controlador SDRE com motor.**

comparada com o caso sem motor (figura 15b), sendo que o tempo de acomodação passou, no pior caso, de 2,4 para 1,5 segundos e o sobressinal diminuiu de 45% para 16%.

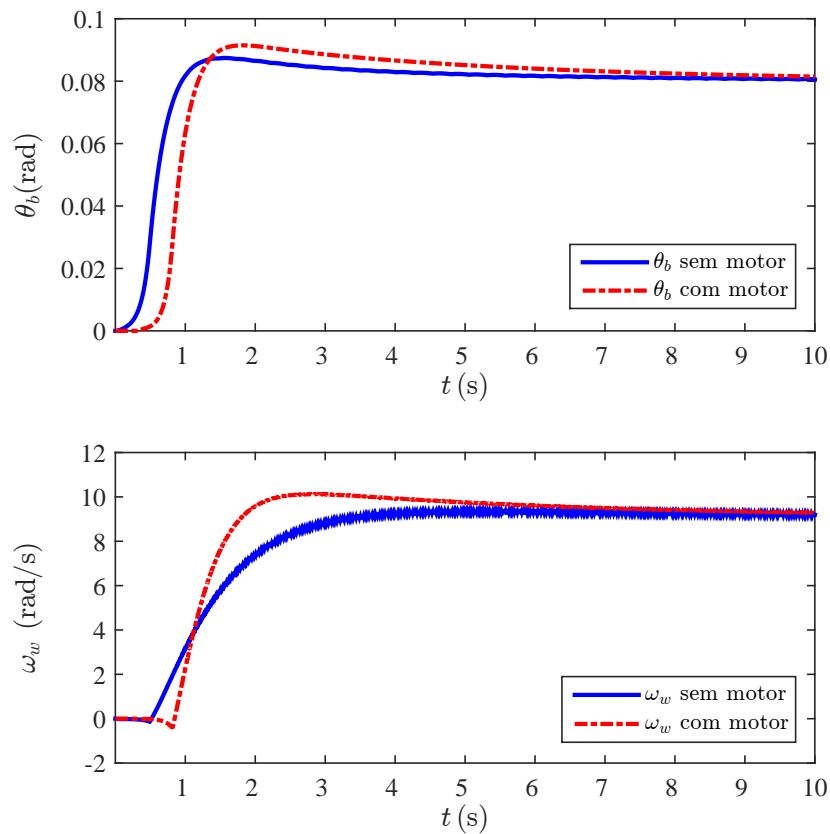
O controle SMC por sua vez teve sua robustez reduzida, apresentada na figura 15c. Se compararmos com o pior caso sem motor da figura 15, observa-se que o tempo de assentamento aumentou consideravelmente, de 3,3 para 6,5 segundos, enquanto que o máximo percentual de ultrapassagem passou de 10% para 16%.

A figura 23d apresenta as respostas obtidas pelo controlador SDRE para todos os casos, exceto o caso instável AP. Quando comparada às respostas obtidas anteriormente na figura 15d, verifica-se que a robustez do controle foi reduzida. O valor de ultrapassagem obtido para o pior caso passou de 32% para 38%, enquanto que o tempo de assentamento praticamente se manteve o mesmo de 6,4 segundos para 6,2.

A figura 24, apresenta as velocidades angulares para os casos controláveis de cada técnica de controle na presença do motor, sendo 24a para o controle PID, 24b o controle compensador, 24c o SMC e 24 o SDRE.

A maior diferença é apresentada nos picos negativos dos controladores PID e compensador, que são drasticamente reduzidos devido a já mencionada limitação apresentada pelo motor.

Mesmo reduzidos, estes valores elevados na velocidade angular prejudicam o desempenho



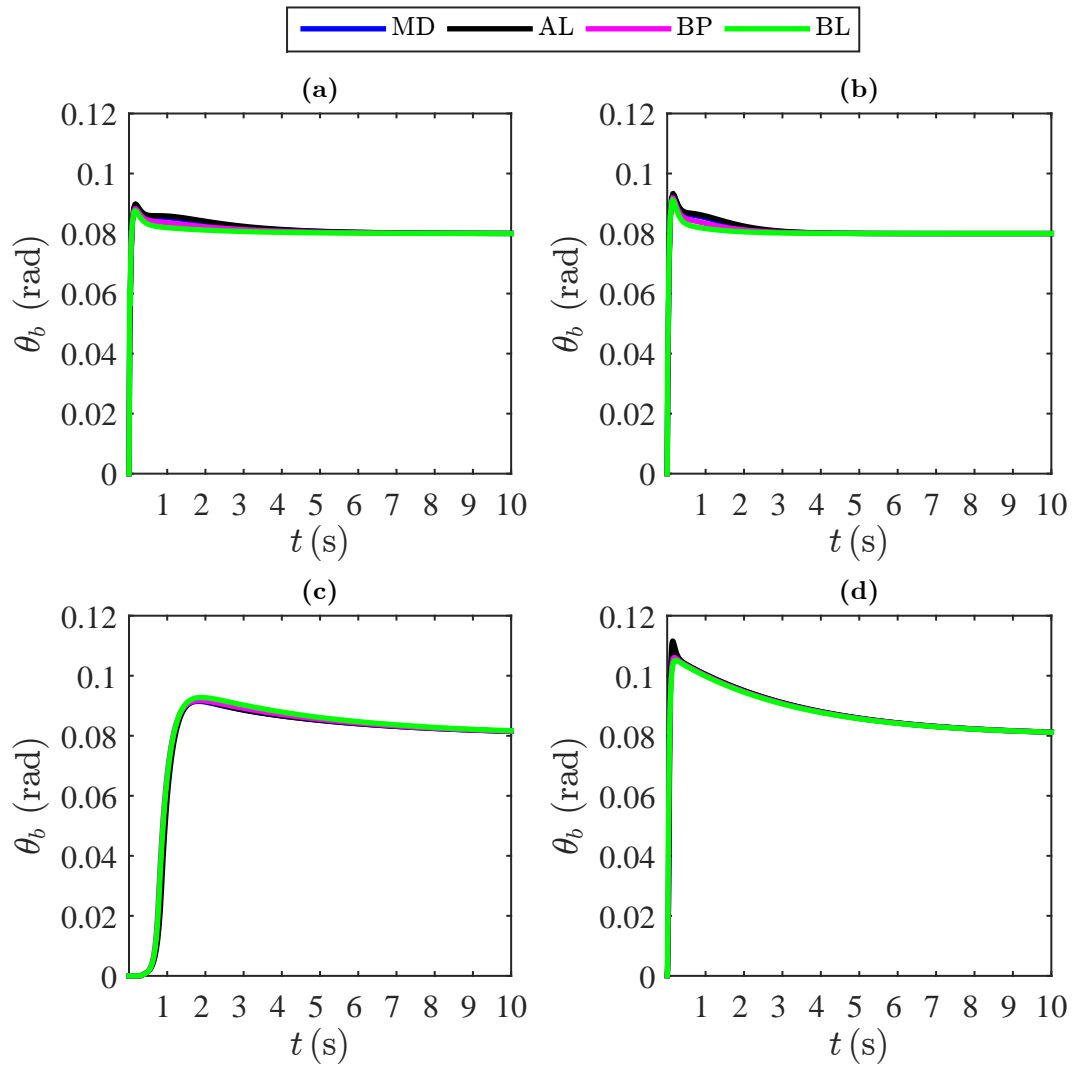
**Figura 22 – Resposta do sistema para o controlador SMC com motor.**

dos controladores. Se analisarmos a equação (4.4), verifica-se que o torque do motor é proporcional a diferença entre tensão e velocidade, no termo  $U(s) - K_b \omega_m(s)$ . Uma vez que a tensão aplicada ao motor  $U$  é limitada, uma elevada velocidade de rotação  $\omega_m$  reduz a capacidade de torque gerado pelo motor.

### 3.10.2 Consumo Energético com Motor

O consumo energético de cada técnica de controle com o motor foi obtido para os casos onde o sistema foi controlável. Assim, exclui-se aqui o caso AP, que não foi estabilizado por nenhuma das técnicas. Os resultados obtidos são expostos na figura 25, onde 25a apresenta o consumo de energia para o caso BP, 25b apresenta o mesmo consumo para o caso MD, 25c o caso BP e 25d o caso BL.

Observa-se que com a presença do motor, a diferença entre o consumo das diferentes técnicas é praticamente insignificante, com a exceção do SDRE que sempre apresenta um consumo relativamente maior.



**Figura 23 – Respostas da posição angular  $\theta_b$  para cada caso de variação nos parâmetros com a presença do motor, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE.**

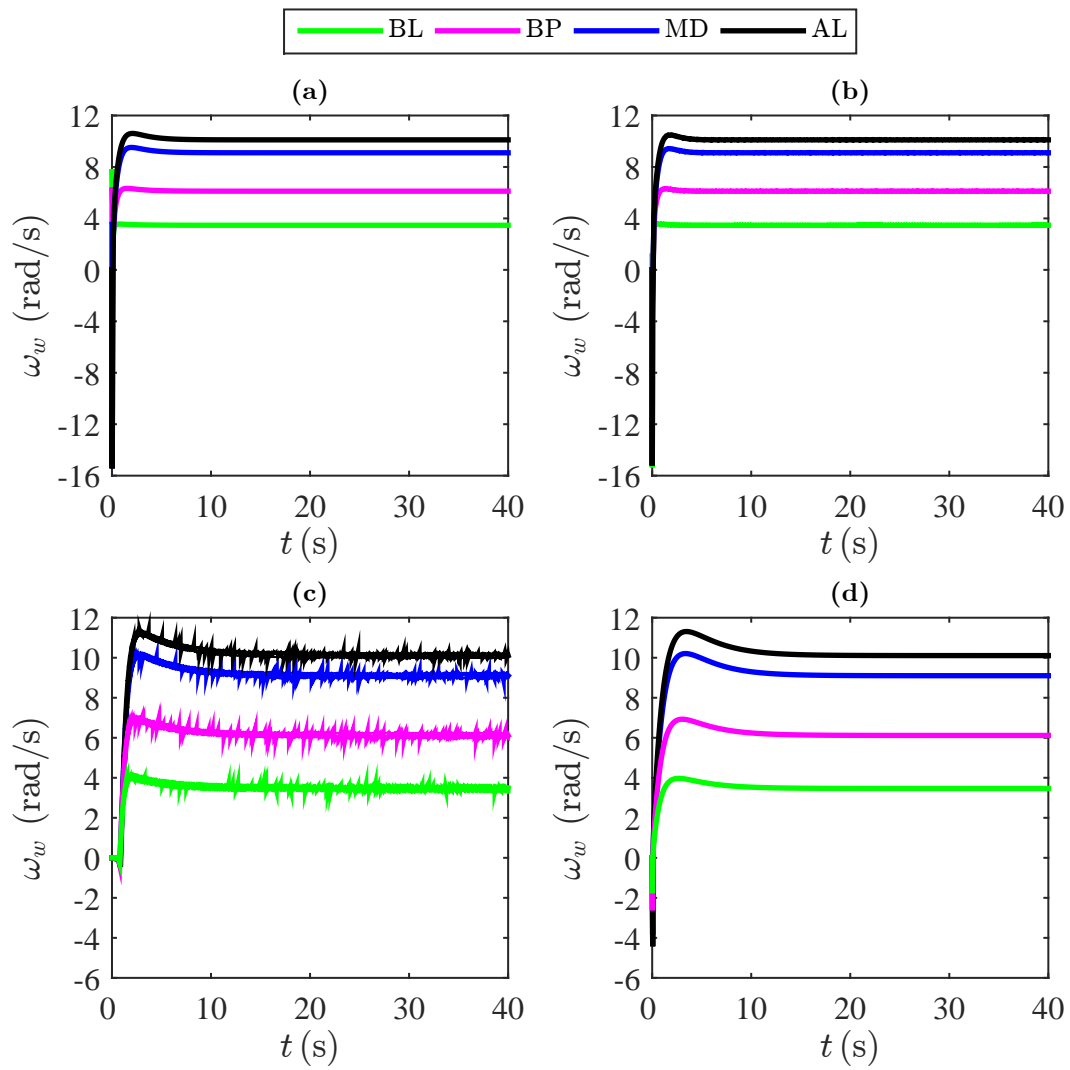


Figura 24 – Respostas da velocidade angular  $\omega_w$  para cada caso de variação nos parâmetros com a presença do motor, controlado via: (a) PID; (b) Compensador; (c) SMC; (d) SDRE.

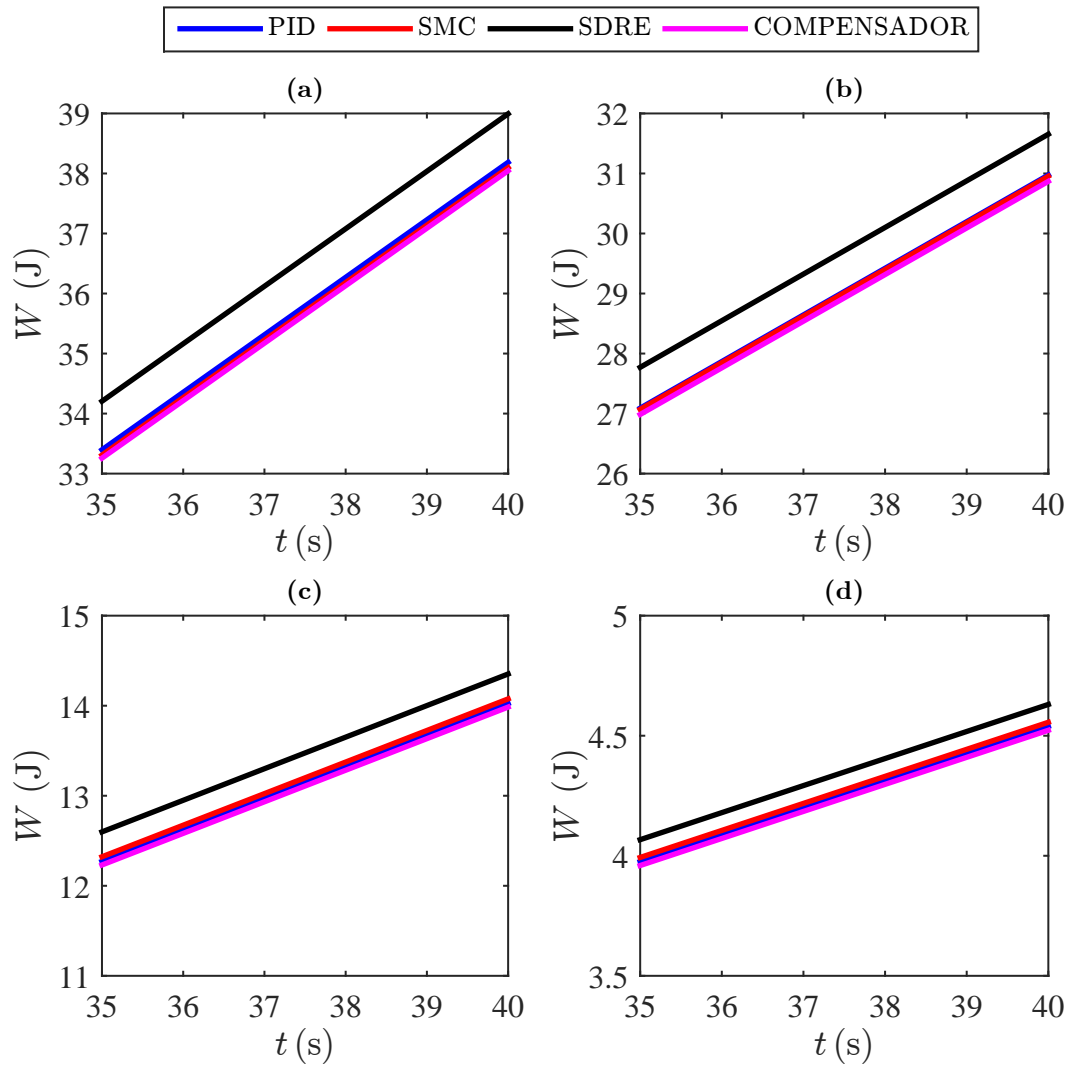


Figura 25 – Consumo de energia de cada técnica para: (a) caso AL; (b) caso MD; (c) caso BP; (d) caso BL.

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 4.1 MODELO E PARÂMETROS DO MOTOR

O Gyroboy apresentado na seção 2.6 é modelado como um robô TWV, semelhante ao Segway (SEGWAY, 2014). Ao garantirmos que as duas rodas movam-se em linha reta, o comportamento deste robô é equivalente ao de um OWV. Os dois motores presentes no Gyroboy são responsáveis pelo movimento do mesmo.

Como demonstrado no capítulo 3, a variável de entrada para todos os projetos é o torque fornecido pelo motor. Porém, a falta de um meio direto para medição do torque variável torna-se limitante e se faz necessário um estimador de torque baseado no modelo e parâmetros do motor.

De modo geral, o controle final pode ser desmembrado em dois menores. A malha externa e mais lenta determina o torque desejado que deve ser aplicado às rodas, como mostrado no capítulo 3. Com o torque desejado, a malha interna e mais rápida deve fornecer a tensão de modo que o motor aplique este torque ao sistema. Esta seção é dedicada à descrição do modelo do motor, métodos utilizados para determinação dos parâmetros deste modelo, estimação do torque do motor e o desempenho deste controle interno.

#### 4.1.1 Modelo do Motor de Corrente Contínua

O esquema eletromecânico do motor segundo Nise (2004) é apresentado na figura 26. A descrição das variáveis encontram-se no quadro 2. No motor em questão o campo fixo é gerado por um ímã.

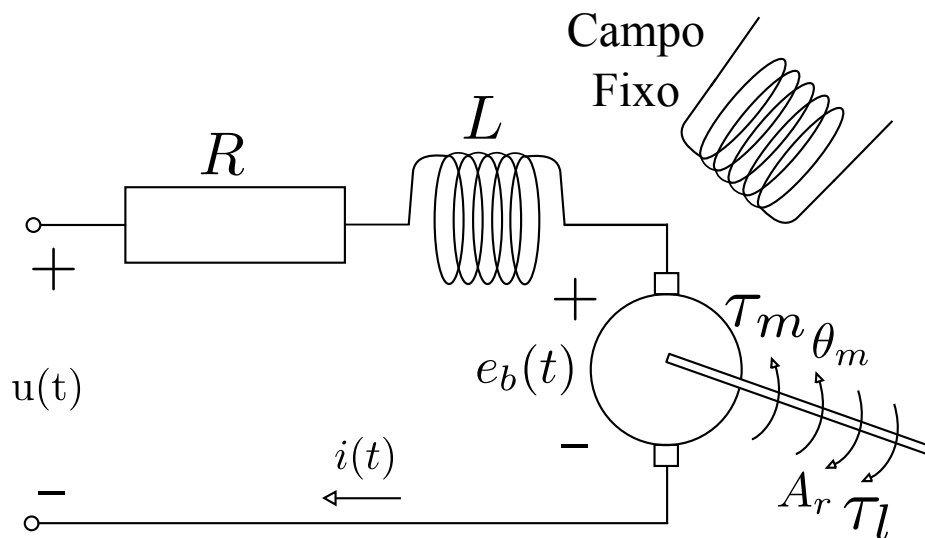


Figura 26 – Esquema eletromecânico do motor de corrente contínua.

Fonte: Autoria própria.



Símbolo	Unidade	Descrição
$u(t)$	V	Tensão de armadura
$i(t)$	A	Corrente de armadura
$R$	$\Omega$	Resistência de armadura
$L$	H	Indutância de armadura
$e_b(t)$	V	Tensão contra eletromotriz
$\tau_m(t), \tau_l(t)$	N · m	Torque do motor e da carga
$\theta_m(t)$	rad	Posição angular do rotor
$\omega_m(t)$	rad/s	Velocidade angular do rotor
$K_t$	N · m/A	Coefficiente de torque
$K_b$	V · s/rad	Coefficiente de tensão contra eletromotriz
$J$	kg · m <sup>2</sup>	Momento de inércia do rotor
$B$	N · m · s/rad	Coefficiente de resistência viscosa do rotor
$A_r$	N · m	Atrito dinâmico do rotor

**Quadro 2 – Variáveis do motor de corrente contínua**

**Fonte: Autoria própria.**

A figura 26 fornece a relação elétrica apresentada na equação (4.1).

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - e_b(t) \quad (4.1)$$

A interface entre as variáveis mecânicas e elétricas do motor de corrente contínua é representada pelos coeficientes  $K_t$  e  $K_b$  como na equação (4.2) (NISE, 2004).

$$\tau_m(t) = K_t i(t) \quad (4.2a)$$

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t) \quad (4.2b)$$

O torque aplicado à carga foi modificado a partir das equações apresentadas por Nise (2004) para incluir a descontinuidade criada pelo atrito  $A_r$ , como apresentado em Virgala, Frankovsky e Kenderová (2013).

O modelo apresentado por Nise (2004) mostrou-se insuficiente durante os experimentos. No modelo modificado a descontinuidade de  $A_r$  funciona como uma zona morta para o torque aplicado à carga, ou seja, enquanto o torque fornecido pelo motor for insuficiente para vencer

o atrito, nenhum torque é realmente aplicado à carga. Esta descontinuidade é apresentada em (4.3).

$$\tau_l(t) = \begin{cases} \tau_m - A_r & \tau_m(t) > A_r \\ 0 & -A_r \geq \tau_m(t) \geq A_r \\ -\tau_m + A_r & \tau_m(t) < A_r \end{cases} \quad (4.3)$$

Para que o controle do torque fornecido pelo motor seja preciso, é necessário estimar-se o torque aplicado à carga a cada instante. Assim, pode-se aplicar conceitos de controle em malha fechada. É importante notar que no *hardware* utilizado não é possível ter acesso à corrente, portanto, todo o controle do motor é limitado ao controle da tensão de entrada ( $u(t)$ ) e leitura da velocidade angular de saída ( $\omega_m(t)$ ).

Isolando-se a corrente  $i(t)$  e a tensão  $e_b(t)$  nas equações (4.2) e substituindo-as em (4.1), o torque gerado pelo motor pode ser estimado no domínio de Laplace como em (4.4). Nota-se aqui que o torque mecânico do motor depende de duas variáveis, a tensão de entrada e a velocidade de rotação.

$$\tau_{est}(s) = \begin{cases} \frac{K_t}{sL + R} (U(s) - K_b\omega_m(s)) - A_r & \tau_m(t) > A_r \\ 0 & -A_r \geq \tau_m(t) \geq A_r \\ -\frac{K_t}{sL + R} (U(s) - K_b\omega_m(s)) + A_r & \tau_m(t) < A_r \end{cases} \quad (4.4)$$

Com a equação (4.4) pode-se utilizar o torque estimado ( $\tau_{est}(s)$ ) para realimentar a malha fechada. O controle deve então determinar a tensão  $U(s)$  a ser aplicada ao motor. Similarmente à equação (4.4), isola-se a tensão de entrada em função do torque desejado, como na equação (4.5). Nesta equação a descontinuidade  $A_r$  é ignorada para simplificar o desenvolvimento do controlador.

$$U(s) = \tau_m(s) \frac{(sL + R)}{K_t} + K_b\omega_m(s) \quad (4.5)$$

A equação (4.5) não pode ser caracterizada como uma função de transferência entre tensão e torque pois depende de duas variáveis e é imprópria (número de pólos maior que de zeros). Para contornar este problema faz-se  $L = 0$ , como realizado por Maekawa (1999). Altera-se também a estrutura do controlador, de modo que o termo dependente de  $\omega_m(s)$  possa ser desconsiderado. Para isto, propõe-se (4.6)

$$U(s) = U_c(s) + K_b\omega_m \quad (4.6)$$

sendo:

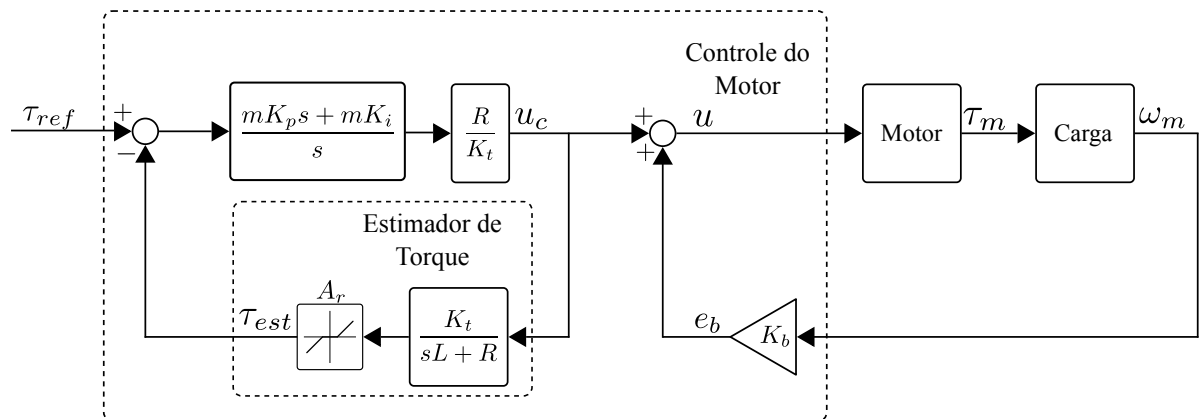
$$U_c(s) = \tau_m(s) \frac{R}{K_t} \quad (4.7)$$

Com as considerações anteriores determina-se  $U(s)$  pela soma de dois termos independentes. Substituindo a equação (4.6) em (4.4) obtém-se um novo estimador para o torque na equação (4.8).

$$\tau_{est}(s) = \begin{cases} \frac{K_t}{sL + R} U_c(s) - A_r & \tau_m(t) > A_r \\ 0 & -A_r \geq \tau_m(t) \geq A_r \\ -\frac{K_t}{sL + R} U_c(s) + A_r & \tau_m(t) < A_r \end{cases} \quad (4.8)$$

Desta maneira elimina-se a influência da velocidade da carga e o torque do motor é determinado por  $U_c(s)$ .

Finalmente, implementa-se um controlador PI que determina  $U_c(s)$  para controle do torque. A estrutura completa do controle do motor e estimador de torque pode ser visualizada na figura 27.



**Figura 27 – Estrutura de controle do motor de corrente contínua.**

**Fonte: Autoria própria.**

#### 4.1.2 Ajuste de Parâmetros e Resultados Experimentais do Motor

Para que a estrutura de controle desenvolvida e apresentada na figura 27 seja confiável, é necessário que os parâmetros do motor sejam os mais próximos possíveis dos reais, principalmente para a estimação do torque. Como ponto de partida para definição dos parâmetros utilizou-se os apresentados por Maxim (2015).

Apesar do modelo do motor em que Maxim (2015) obteve os parâmetros ser o mesmo do utilizado neste trabalho, devido a não perfeição durante processos de produção, é comum que motores de mesmo modelo possuam divergências em seus parâmetros. Assim, ajustou-se os parâmetros apresentados por Maxim (2015) de maneira que as curvas reais e simuladas

do experimento apresentado abaixo fossem as mais próximas possíveis. Estes parâmetros encontram-se na tabela 3.

**Tabela 3 – Parâmetros do motor de corrente contínua *Large Motor EV3*.**

Símbolo	Unidade
$R$	7,51597 $\Omega$
$L$	0,00494 H
$K_t$	0,30477 N · m/A
$K_b$	0,45997 V · s/rad
$J$	$1878,375 \times 10^{-6}$ kg · m <sup>2</sup>
$B$	$1562,964 \times 10^{-6}$ N · m · s/rad
$A_r$	0,0084 N · m

**Fonte: Autoria própria.**

Como mencionado anteriormente, com os equipamentos disponíveis, não foi possível aos autores medir o torque gerado na ponta do eixo do motor diretamente. Dessa forma, para verificar o desempenho do controle e precisão do estimador o seguinte experimento foi realizado.

Sabendo que os torques (do motor e da carga) e a velocidade angular relacionam-se como na equação (4.9) (NISE, 2004).

$$\tau_l(t) = \tau_{est}(t) - J\dot{\omega}_m(t) - B\omega_m \quad (4.9)$$

Pode-se estimar a velocidade angular  $\omega_m(t)$  pela função de transferência (4.10), uma vez que se conhece o torque exigido pela carga.

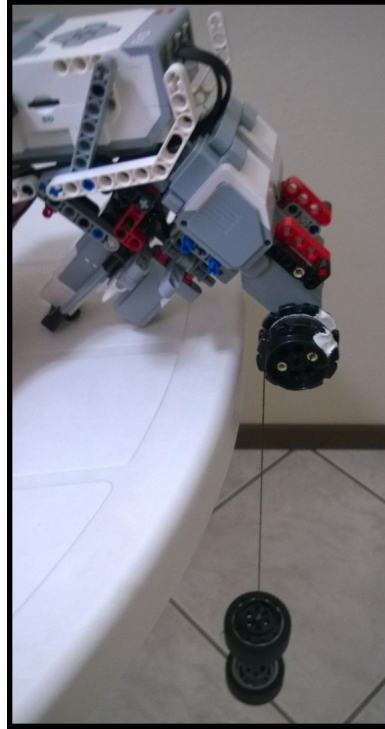
$$\omega_m(s) = (\tau_{est}(s) - \tau_l(s)) \frac{1}{sJ + B} \quad (4.10)$$

A figura 28 mostra como uma carga conhecida foi acoplada ao eixo do motor, neste caso as próprias rodas do Gyroboy. Nesta situação, o motor eleva ou abaixa as rodas conforme um fio é enrolado ou desenrolado no carretel acoplado ao eixo. Sendo o raio do carretel de 16 mm e a massa das duas rodas igual a 62,86 g, obtemos:

$$\tau_l = 0,016 \cdot 0,06286 \cdot 9,81 = 4,933 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Desta maneira é possível comparar a velocidade angular real e a simulada a partir do torque estimado.

Na prática, todo controle é realizado de modo digital, assim as funções de transferência (4.4) e (4.10) foram implementadas por suas funções discretas equivalentes utilizando o comando “c2d” do MATLAB®, com um intervalo de amostragem de 0,01 segundos e um retentor de ordem zero (ZOH).



**Figura 28 – Carga constante aplicada ao motor.**

**Fonte: Autoria própria.**

Devido ao elevado ruído na leitura da velocidade angular fornecida pelo encoder, necessitou-se também de um filtro digital de segunda ordem. O filtro no domínio discreto  $z$  é mostrado na função de transferência (4.11), sendo  $f_{sample}$  a frequência de amostragem e  $f_{corte}$  a frequência de corte do filtro. Neste filtro,  $c_1$  define a localização do pólo e  $c_2$  garante que o ganho do filtro seja unitário.

$$\frac{S}{E} = \frac{c_2^2}{(1 + c_1 z^{-1})^2} \quad (4.11)$$

onde:

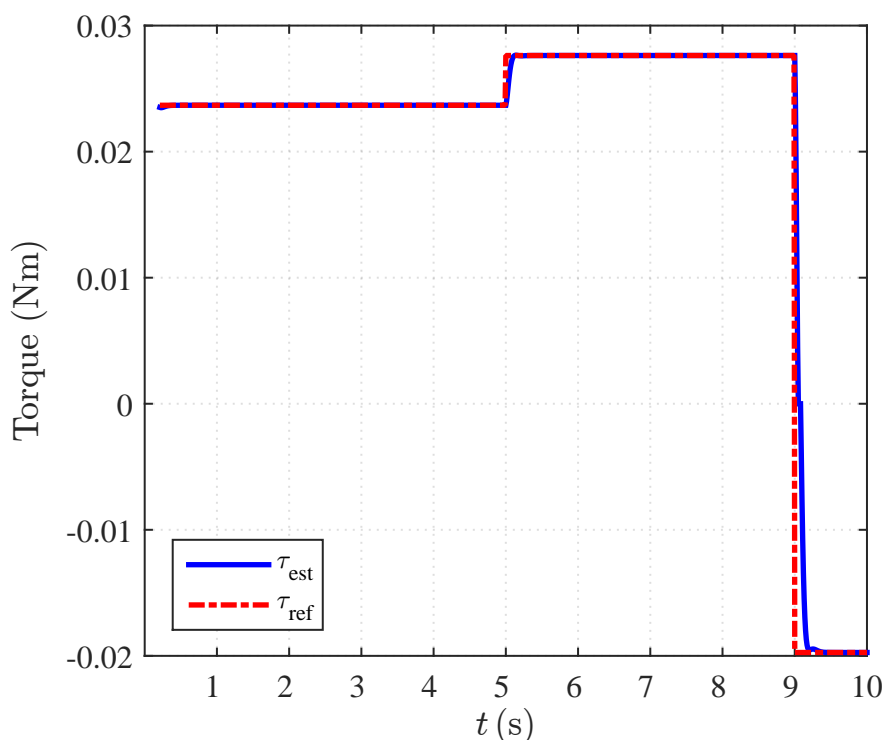
$$f_{corte} = \frac{f_{sample}}{3}$$

$$c_1 = e^{\left(-\frac{f_{corte}}{f_{sample}}\right)}$$

$$c_2 = 1 - c_1$$

Os resultados obtidos para um controle com ganhos  $mKi = 20$  e  $mKp = 1$  são mostrados nas figuras a seguir.

A figura 29 mostra a sequência de degraus aplicado à referência do torque do controle e o comportamento do torque estimado.



**Figura 29 – Torque de referência e estimado do controle do motor.**

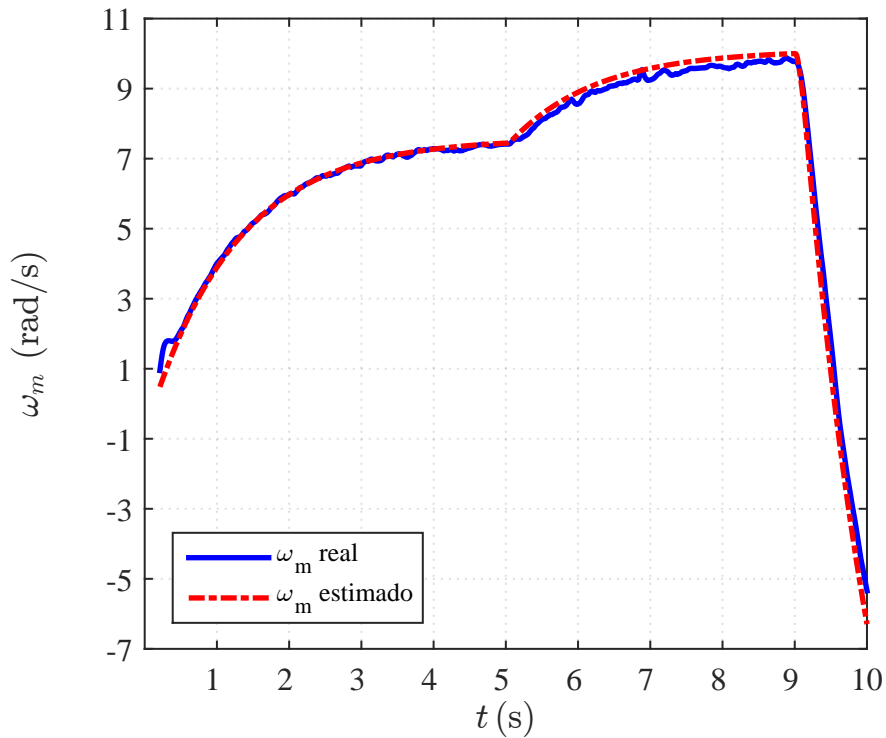
**Fonte: Autoria própria.**

As figuras 30 e 31 mostram a velocidade e posição angulares, respectivamente, previstas para o eixo do motor a partir do torque estimado e compara-as com os valores reais obtidos. Aqui nota-se então que o modelo utilizado e os valores dos parâmetros fornecidos na tabela 3 proporcionam uma boa estimativa dos valores reais.

Por fim, a figura 32 apresenta mais claramente a resposta do torque previamente apresentada na figura 29. Se considerarmos que o torque estimado está muito próximo do real, uma vez que foi possível estimar a velocidade e posição do rotor com boa precisão, verifica-se então que o controle proposto apresenta tempo de assentamento entre 0,2 e 0,3 segundos com um máximo valor de ultrapassagem mínimo.

É importante frisar que além dos parâmetros, o valor da tensão da bateria também é uma fonte de erro para o controle e o estimador de torque. No *hardware* em questão, o motor é alimentado via PWM, onde o tempo de ciclo ativo varia de -100% a 100%, assim a tensão aplicada ao motor corresponde a porções da tensão máxima fornecida pela bateria.

Os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos com a fonte de alimentação utilizada para carregar a bateria conectada. A fonte em questão fornece uma tensão de 9 V, assim, sabe-se que quando é aplicado ao motor um sinal PWM cujo tempo de ciclo ativo é 50%, o motor recebe em média 4,5 V. Porém, o Gyroboy não pode estar conectado à fonte, uma vez que o cabo cria uma força de arrasto que prejudica o sistema. Infelizmente, a biblioteca fornecida pelo MATLAB® não proporciona meios pelos quais se possa verificar o valor de tensão



**Figura 30 – Velocidade angular real e estimada do motor.**

**Fonte: Autoria própria.**

da bateria, assim não é possível aplicar nenhum tipo de correção.

## 4.2 PARÂMETROS DO GYROBOY

### 4.2.1 Massas ( $m_b$ e $m_w$ ) e Raio da Roda ( $r$ )

A massa do corpo e das rodas do robô foram medidas diretamente em uma balança de precisão. A massa do corpo obtida é  $m_b = 643,34 \times 10^{-3}$  kg e a soma da massa das duas rodas é  $m_w = 62,86 \times 10^{-3}$  kg.

O raio da roda também foi medido diretamente, sendo  $r = 0.028$  m.

### 4.2.2 Distância Entre Roda e o Centro de Gravidade do Pêndulo ( $l$ )

A distância  $l$  do Gyroboy foi obtida experimentalmente. Construiu-se uma plataforma onde o robô pudesse balançar livremente como um pêndulo, que pode ser vista na figura 33.

Nesta situação sabe-se que o período de oscilação depende de  $l$  e  $\theta_b$  inicial. Assim, se adquiriu a evolução do balanço de  $\theta_b$  quando este foi solto a um ângulo inicial de aproximadamente -137 graus. Simulou-se então diversas vezes o modelo (2.1) para as mesmas condições e o parâmetro  $l$  foi ajustado até que a curva simulada fosse equivalente à obtida experimentalmente.

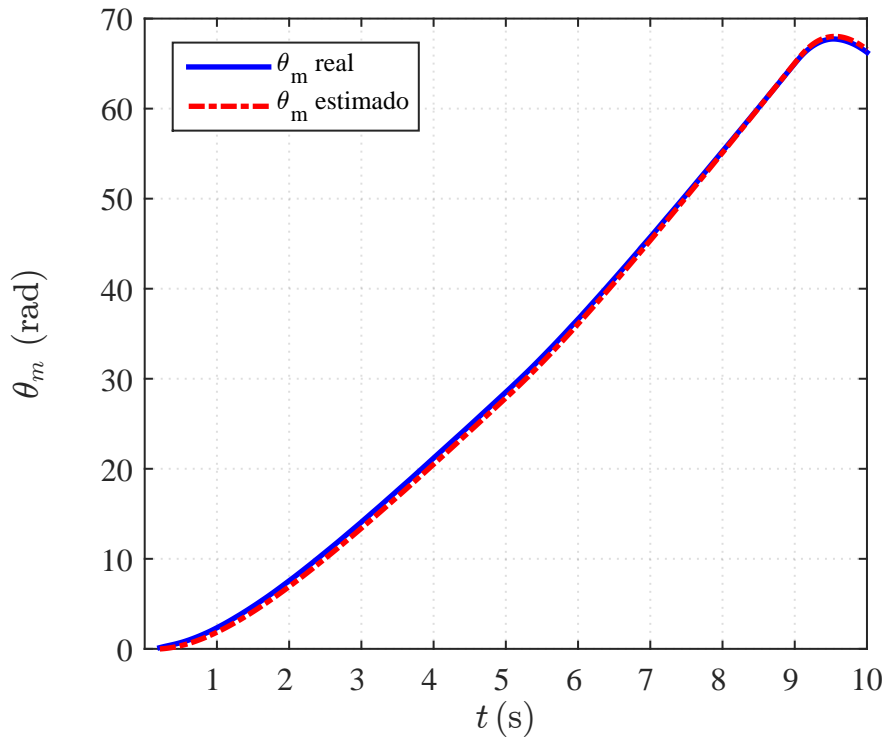


Figura 31 – Posição angular real e estimada do motor.

Fonte: Autoria própria.

A figura 34 mostra o resultado desta comparação para o valor final  $l = 112,9$  mm. Os valores apresentados na figura são convertidos de radianos para graus durante a simulação.

#### 4.2.3 Atritos Dinâmicos ( $D_w$ e $D_b$ )

O atrito dinâmico entre a roda e o pêndulo ( $D_b$ ) é na verdade o atrito interno do motor. Este valor é dado por  $D_b = 2 \cdot B = 2 \cdot 1562,964 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$  e o método utilizado para definição deste valor é explicado na seção 4.1. O atrito  $B$  tem seu valor dobrado pois o Gyroboy possui dois motores.

O parâmetro  $D_w$ , referente ao atrito dinâmico entre a roda e a superfície, é estimado de maneira similar à estimação dos parâmetros do motor. Levando em consideração as limitações apresentadas anteriormente, montou-se um experimento pelo qual o valor de  $D_w$  pudesse ser definido comparando a velocidade real e estimada do motor. Neste caso, construiu-se um robô tipo motocicleta com as mesmas rodas e peças utilizadas, de modo que esta motocicleta possuisse o mesmo peso do Gyroboy. A figura 35 mostra o robô tipo motocicleta construído.

A ideia é fazer com que a motocicleta acelere até uma velocidade constante e então remove-se a tensão aplicada ao motor, de modo que as únicas forças atuantes que o desaceleram são as perdas internas do motor (já conhecidas) e o atrito  $D_w$  entre as rodas e a superfície. Utiliza-se então a equação (4.4) para estimar o torque do motor e a equação (4.10)



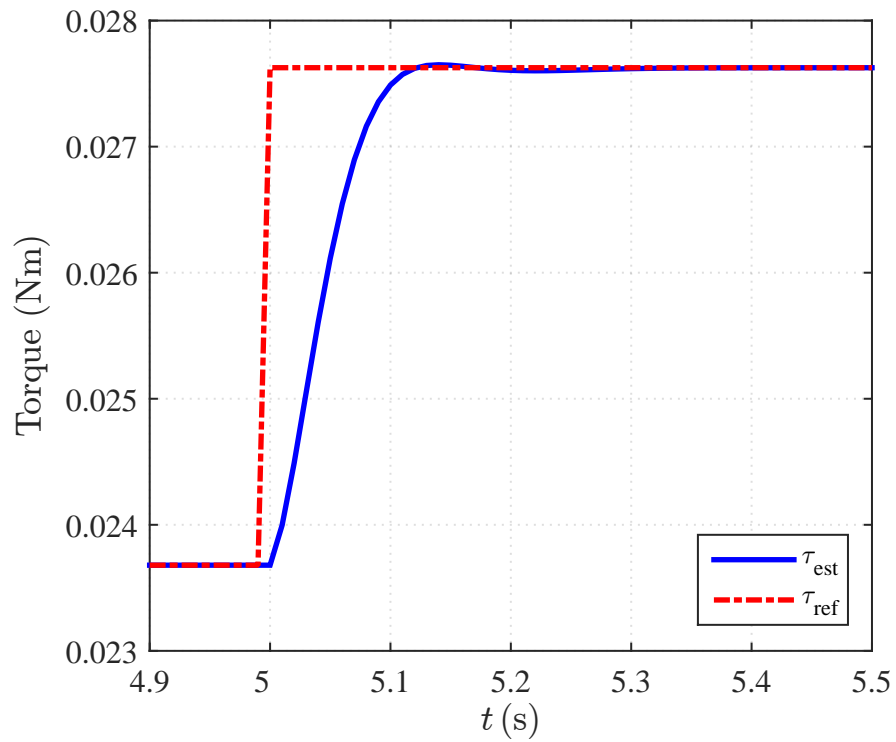


Figura 32 – Resposta do torque do motor para um degrau.

Fonte: Autoria própria.

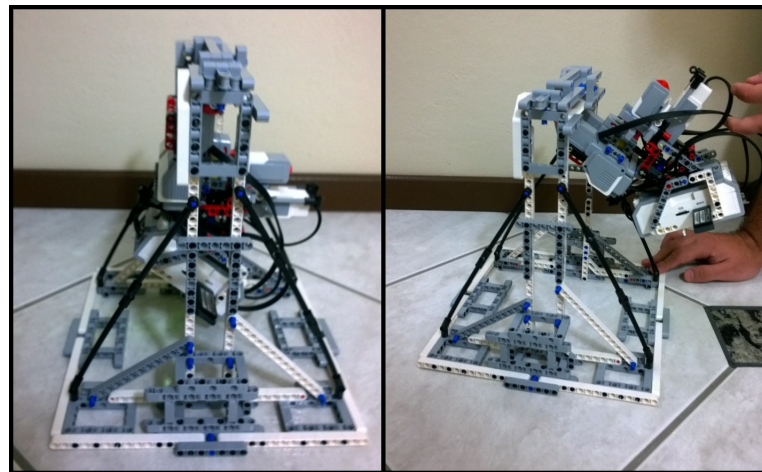


Figura 33 – Resposta do torque do motor para um degrau.

Fonte: Autoria própria.

para a velocidade angular, onde neste caso o torque da carga não é fixo, mas sim definido como:

$$\tau_l(t) = D_w \omega_m(t)$$

A estrutura desenvolvida encontra-se na figura 36. Nesta figura nota-se a presença de uma

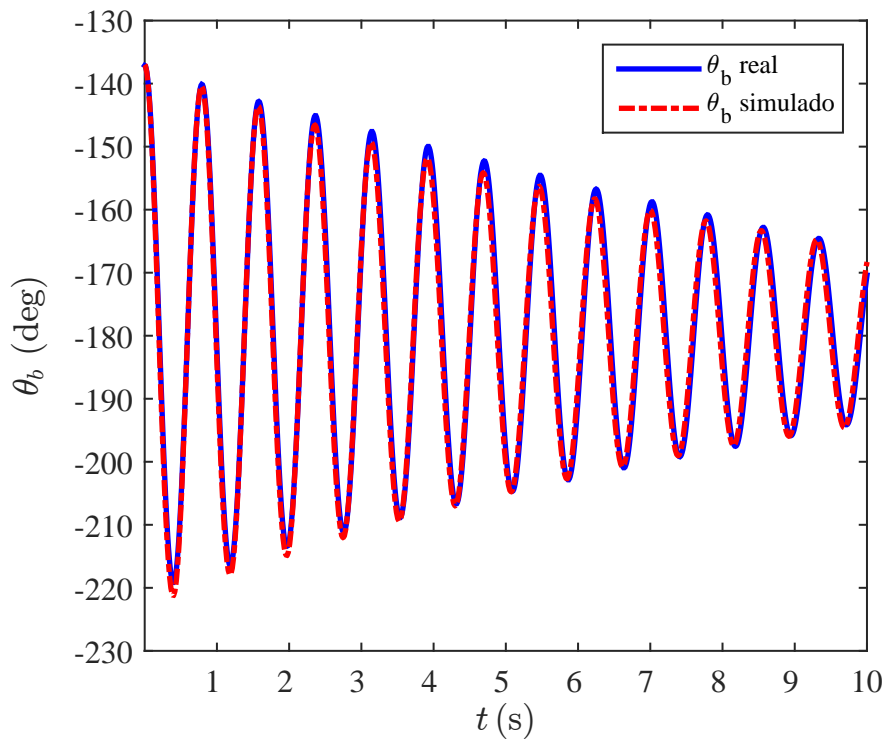


Figura 34 – Curva obtida ajustando-se o parâmetro  $l$ .

chave comutadora  $S_1$ , esta chave é acionada no momento em que a tensão  $u$  é zerada. A razão da existência deste ramo é que de fato, quando a tensão de entrada  $u$  é anulada enquanto o motor está em rotação, o torque fornecido pelo motor não é zerado, pelo contrário, um torque de frenagem é criado no motor.

Este efeito fica evidente ao analisar-se a equação (4.4). Assim, ao zerar-se  $u$  e aplicar-se uma tensão equivalente a tensão contra eletromotriz  $e_b$  gerada pelo motor, o efeito do torque de frenagem é anulado e as perdas por atrito passam a ter maior influência na desaceleração do motor. Consequentemente uma precisão maior na estimação é obtida.

Como realizado na estimação dos parâmetros do motor, neste experimento também foram implementadas as funções de transferência discretas equivalentes utilizando o comando “*c2d*” do MATLAB®, com um intervalo de amostragem de 0,01 segundos e um retentor de ordem zero (ZOH), bem como utilizou-se o filtro apresentado em (4.11) para leitura de  $\omega_m$ .

Para  $D_w = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$  as seguintes curvas foram obtidas. A figura 37 apresenta a tensão aplicada ao motor, aqui nota-se que quando o motor é desacelerado aos 6 segundos, a chave  $S_1$  é acionada e a tensão aplicada ao motor é equivalente a  $e_b$ .

As figuras 38 e 39 apresentam a velocidade e posição angular estimadas para o  $D_w$  citado. Apesar do ruído apresentado por  $\omega_m$ , verifica-se que o valor de atrito escolhido está muito próximo do real.

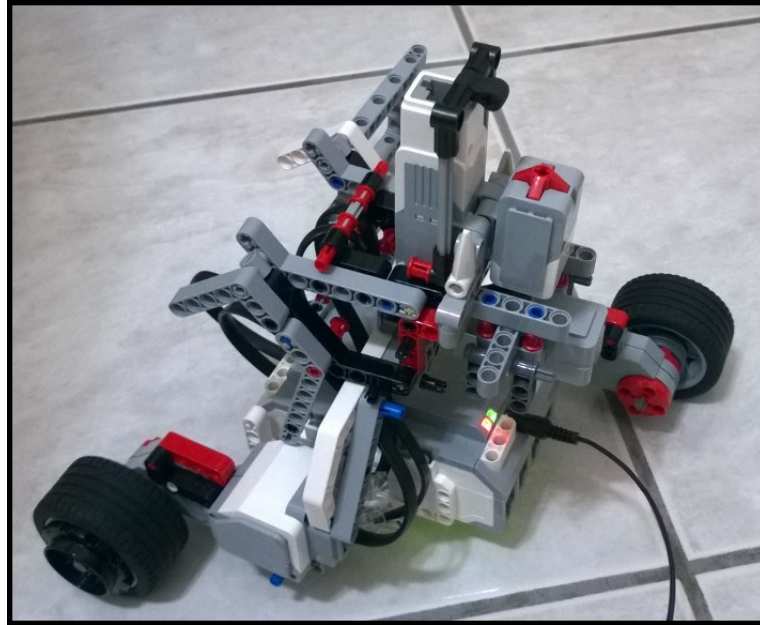


Figura 35 – Estrutura para estimação do parâmetro  $D_w$ .

Fonte: Autoria própria.

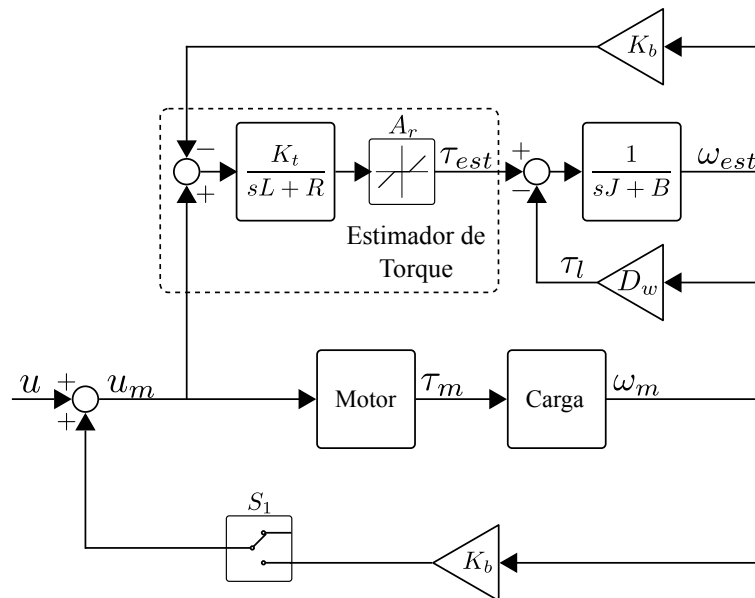


Figura 36 – Estrutura para estimação do parâmetro  $D_w$ .

Fonte: Autoria própria.

#### 4.2.4 Momentos de Inércia ( $I_b$ e $I_w$ )

Os momentos de inércia podem ser calculados aproximando-se o corpo do robô a um cilindro maciço rotacionado em sua extremidade e as rodas a um cilindro rotacionando no seu eixo de simetria. Além disso, deve-se adicionar à roda o momento de inércia dos dois motores do robô. Desta forma, o momento de inércia do corpo e da roda são apresentados nas equações

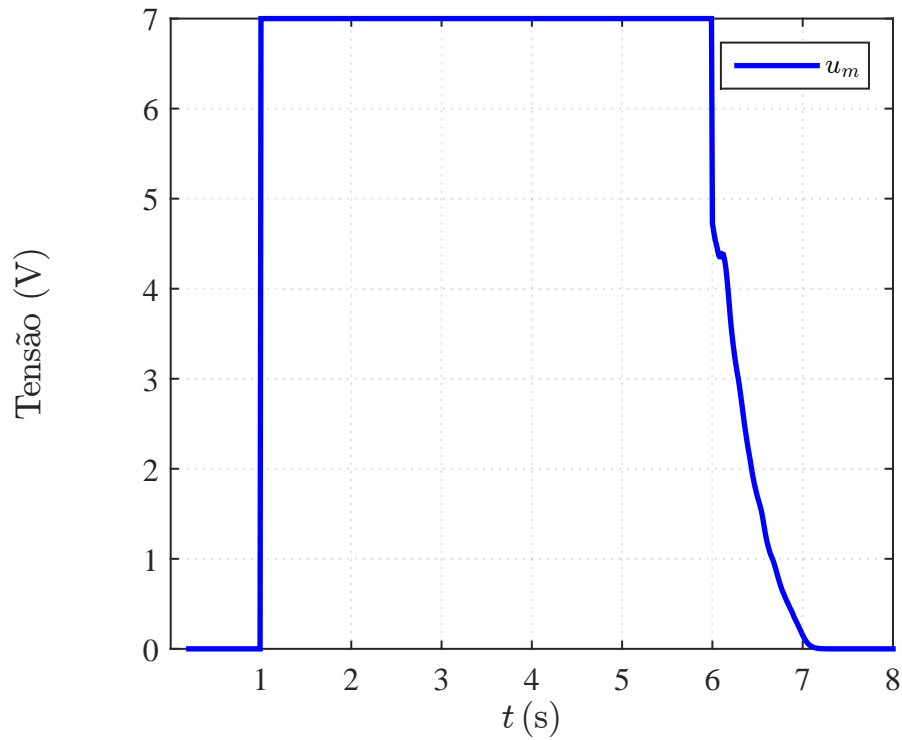


Figura 37 – Tensão aplicada ao motor durante estimação de  $D_w$ .

Fonte: Autoria própria.

(4.12) e (4.13) respectivamente.

$$I_b = \frac{m_b l^2}{3} = \frac{0,64334 \cdot 0,1129^2}{3} = 2,733 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.12)$$

$$I_w = \frac{m_w r^2}{2} + 2J = \frac{0,06286 \cdot 0,0028^2}{2} + 2 \cdot 1878,375 \times 10^{-6} = 3,757 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.13)$$

#### 4.3 PARÂMETROS ESTIMADOS

Finalmente, após as análises apresentadas neste capítulo, estimou-se todos os parâmetros do modelo OWV para o Gyrobó. Estes valores são apresentados na tabela 4.

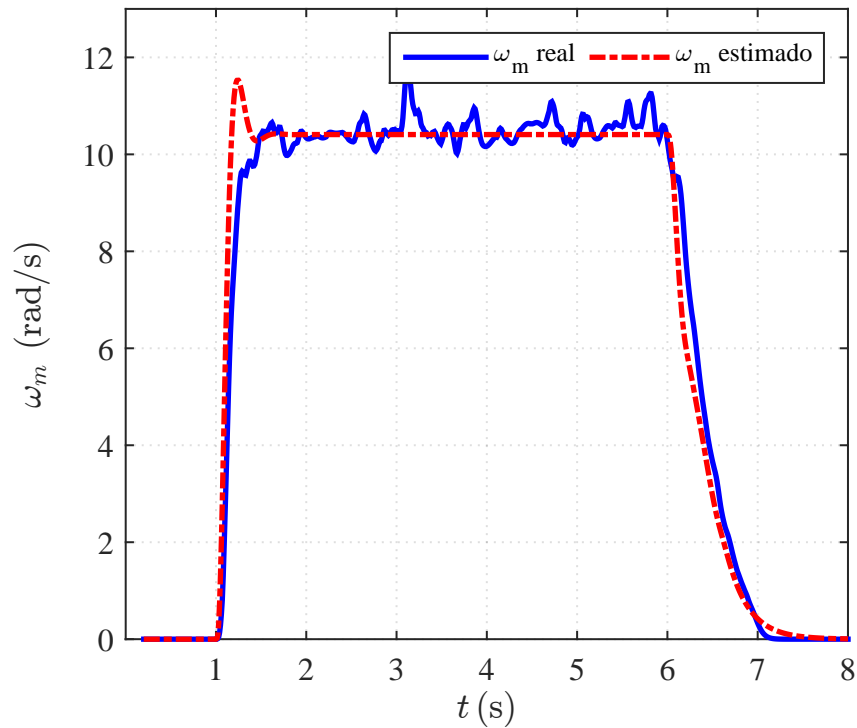


Figura 38 – Velocidade angular real e estimada do motor durante estimação de  $D_w$ .

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros do sistema OWV.

Símbolo	Valor	Descrição
$l$	0,1129 m	Distância entre centro da roda e CG
$r$	0,028 m	Raio da roda
$m_b$	0,64334 kg	Massa do pêndulo
$m_w$	0,06286 kg	Massa da roda
$I_b$	$2,733 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inércia do pêndulo
$I_w$	$3,757 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inércia da roda
$D_b$	$1,454 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$	Atrito entre a roda e o pêndulo
$D_w$	$6,25 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$	Atrito entre a roda e a superfície

Fonte: Autoria própria.

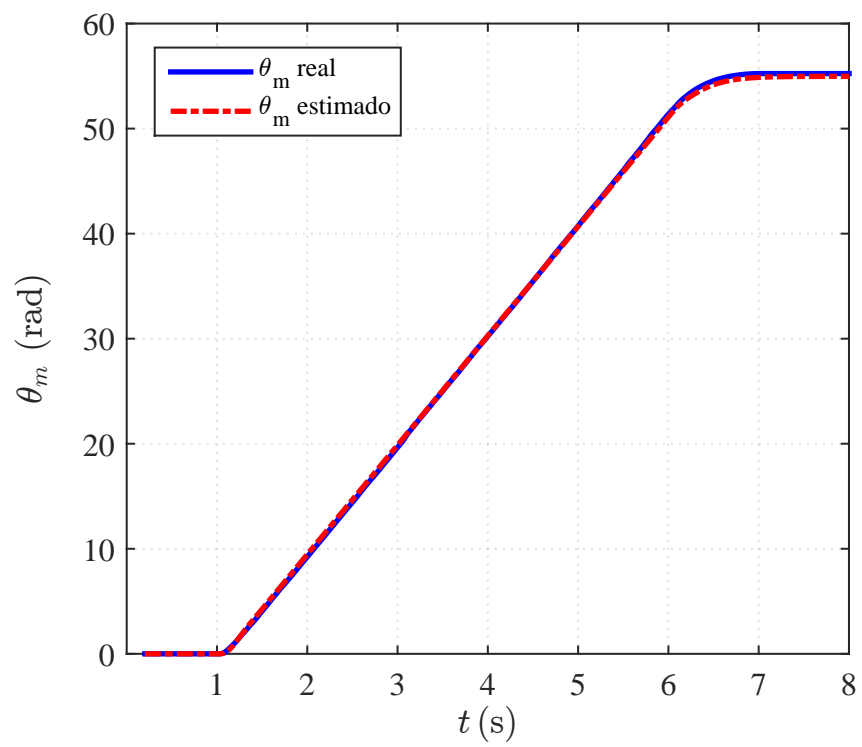


Figura 39 – Posição angular real e estimada do motor durante estimação de  $D_w$ .

Fonte: Autoria própria.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas quatro propostas de controle para um veículo monociclo autobalanceável. Duas dessas técnicas são lineares (PID e compensador) e portanto mais simples de serem projetadas. As outras duas são métodos provenientes da teoria de controle não-linear e consequentemente são mais sofisticadas e complexas. Os controles lineares mencionados, apesar de apresentarem-se mais simples na fase de projeto, devem ser totalmente refeitos a qualquer mudança de parâmetros da planta. Por outro lado, os métodos não lineares apresentados podem ser utilizados diretamente apenas atualizando-se os parâmetros.

As diferentes técnicas de controle, foram avaliadas de acordo com seu desempenho, sua robustez e consumo energético, tanto com e sem a presença de um motor na malha de controle. Neste sentido, alguns pontos devem ser destacados. Para maior clareza, primeiramente, os controles são comparados sem a presença do motor.

Com relação ao desempenho, todas as técnicas forneceram erro zero em regime estacionário. Nenhum dos métodos respeitou o requisito de máximo percentual de ultrapassagem, sendo que o PID apresentou o maior deles, enquanto os controles compensador e SDRE obtiveram um valor intermediário, o SMC apresentou o menor deles e mais próximo do requisito.

Os métodos a respeitar o tempo de assentamento estabelecido como requisito sem a presença do motor foram os PID, compensador e SMC, já o SDRE apresentou tempo superior a 6 segundos.

Um requisito que não foi previamente estabelecido mas que deve ser observado para um produto comercial é o tempo de subida. Neste caso, o SMC apresentou um valor maior quando comparado aos outros. Em grande parte dos sistemas dinâmicos esta característica pode ser avaliada como uma desvantagem, porém, a suavidade apresentada por este tempo maior, pode se apresentar como uma vantagem para o conforto e segurança do usuário em um OWV.

A robustez é uma característica difícil de ser comparada analiticamente. O método utilizado neste trabalho mostra a provável característica de cada controle, visto que cada uma das técnicas foram avaliadas para as possíveis variações máximas nos parâmetros dos usuários.

Assim, com relação a este requisito, sem a presença do motor, os controles que apresentaram maiores variações foram os lineares. O tempo de assentamento aumentou mais de 70% para o pior dos casos analisado de robustez, sendo que o sobressinal aumentou aproximadamente 10% nos dois controles. Enquanto os controles não lineares apresentaram somente 10% de aumento no tempo de assentamento e 1% a mais no sobressinal.

O consumo energético mostra-se importante principalmente por se tratar de um sistema embarcado, e estar altamente relacionado com a autonomia de um produto comercial. Para os casos sem o motor, o SMC mostrou-se claramente superior, isto deve-se ao fato da maior suavidade durante o transitório. Dessa forma, os controles lineares apresentaram maior consumo energético quanto maior os picos de velocidade durante a partida.

De forma geral, sem a presença do motor na malha, pode-se dizer que o SMC foi o con-

trole que mais se aproximou do cumprimento de todos os requisitos, tempo de assentamento, robustez e consumo, com exceção do sobressinal, entretanto, mesmo assim foi o melhor de todos. Uma característica interessante, cuja vantagem pode somente ser verificada na prática com um usuário, é a inexistência de um elevado pico negativo da velocidade angular das rodas na partida.

Na prática, o torque de entrada para a planta é necessariamente fornecido por um motor. Dessa forma, as limitações dinâmicas deste componente alteram as características dos controles.

Na presença do motor os tempos de assentamento dos controles lineares e SDRE se mantiveram praticamente os mesmos, em contrapartida o tempo de assentamento do SMC foi dobrado.

O motor atua como um filtro para as altas variações na velocidade e posição do sistema. Assim, o sobressinal dos controles lineares, PID e compensador, foram diminuídos drasticamente. Enquanto o sobressinal dos controles não lineares aumentaram.

Quanto à robustez, todos os controles se mostraram similares. Comparando-se os piores casos de cada técnica, entre os controles que respeitaram o tempo de assentamento, o PID foi o que obteve o menor sobressinal.

No requisito consumo energético com a presença do motor, com exceção do SDRE, os demais controles apresentaram praticamente o mesmo resultado com diferenças mínimas. Isto se deve a redução dos picos dos controles PID e compensador, de maneira que estes se equivalem ao consumo do SMC.

De um modo geral, na presença do motor em questão, as simulações indicam que o controle PID fornece o melhor desempenho, contrariamente ao resultado apresentado sem a presença do motor. Isto mostra que não é possível decidir entre a melhor técnica sem conhecimento do mesmo.

Quanto mais próximo do ideal for o motor, menor será a influência na resposta do sistema e consequentemente o controle SMC deve-se sobressair. Outro ponto que deve ser destacado é o fato do SMC não apresentar variações drásticas para todas as situações a que foi submetido, tanto com quanto sem motor.

O contrário pode ser afirmado para o PID, já que seu desempenho tende a piorar conforme a melhora do motor.

Por todas as observações mencionadas, segundo os autores, o SMC apresenta as melhores características, mesmo não atendendo todos os requisitos. Isto porque ele se mostrou menos sensível à presença ou não do motor e a variações paramétricas. Entende-se que os requisitos ainda possam ser parcialmente atingidos com uso de motor de maior qualidade, visto que o SMC apresentou os melhores resultados para o caso ideal.



## PROBLEMAS E SOLUÇÕES PROPOSTAS

Não seria justo nem relevante apresentar as conclusões deste trabalho sem falar dos problemas que levaram à não conclusão da implementação prática durante o decorrer deste projeto. Dessa forma, neste espaço serão considerados os principais problemas, as possíveis causas desses erros e as soluções propostas para correção dos mesmos.

A ideia original e principal da implementação do veículo autobalanceável era a construção de um no tamanho real. Estudou-se a possibilidade de adquirir-se um veículo comercial para troca do cartão de controle com o gerado por este estudo. Esta possibilidade foi descartada pela falta de tempo e recursos observados durante o projeto.

Neste sentido, a forma de implementação prática menos penosa apresentou-se na utilização de um *hardware* pronto e acessível, como o kit LEGO® MINDSTORMS® EV3®. O maior problema encontrado na utilização do kit foi a falta de flexibilidade para programação e execução do algoritmo de controle. Variáveis como corrente do motor não puderam ser medidas devido à pouca acessibilidade ao *hardware*, e nem mesmo o nível da bateria pôde ser adquirido durante a execução para compensação do valor de tensão a ser aplicada no motor.

Os dois modos para execução do *software* pelo Simulink® não foram satisfatórios. O *External Mode* apresenta grande facilidade para atualização de parâmetros e aquisição de dados diretamente do produto, porém, a um custo elevado de processamento, o que limita o tempo de amostragem. Já o modo *Run on Hardware* melhora consideravelmente o desempenho em relação ao processamento, porém os autores não encontraram uma maneira pelo qual os dados de ângulo e velocidade pudessem ser adquiridos para comparação com os resultados teóricos.

Desta forma, a aquisição de sinais a uma taxa de amostragem aceitável apresentou-se como o maior problema durante a prática. Entende-se como aceitável, um tempo de amostragem menor que 0,02 segundos, uma vez que valores superiores a este tendem a ocasionar a falha dos motores, cujo motivo é desconhecido.

Os parâmetros apresentados podem se mostrar como uma fonte de erro, visto que os métodos utilizados para medição dos mesmos são simplificados devido à pouca acessibilidade ao *hardware*.

Como utilizou-se o torque como variável de entrada da planta e não se tem acesso a uma medição direta do mesmo, necessita-se então de um estimador de torque, que se caracteriza como mais uma fonte de erros, visto que os próprios parâmetros não são exatos.

Como possível solução para o problema de leitura dos dados, poderia ser explorada a possibilidade de escrever o código em linguagem C ou similar no cartão de memória e assim seria possível utilizar duas taxas de amostragem, uma para execução do código (no caso na leitura do encoder e execução dos blocos) e outra para aquisição dos sinais (numa taxa mais lenta, sendo que a resolução de leitura pode ser menor).

## CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Este trabalho traz como principais contribuições:

- O estudo de diferentes métodos de controle comparando-os com relação a eficiência, robustez e consumo energético.
- O projeto dos controladores: PID, compensador, SDRE e SMC.
- Levantamento dos parâmetros do Gyroboy.
- Modelagem e controle do motor do EV3 *Large Motor*.

## CONTINUIDADE DO TRABALHO

Uma vez que todo o estudo teórico e as simulações em ambiente computacional foram feitas para as quatro propostas de controle, o trabalho para implementação prática fica menos trabalhoso do ponto de vista teórico. Dessa forma, a continuidade do trabalho ganha uma sobrevida com diferentes *hardwares* para implementação.

É possível a continuidade do projeto com o próprio kit EV3 ao utilizar uma biblioteca própria para comunicação ou ainda programando diretamente no cartão de memória presente no mesmo. Pode-se também utilizar-se da ideia original de inserir um cartão de controle num veículo comercial e comparar os modelos de controle.

## REFERÊNCIAS

- ABABNEH, M. Linearization of nonlinear dynamical systems: A comparative study. **Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering**, 2011.
- ALLIGOOD, K. T. **Chaos an Introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1996.
- ASHRAFIUON, H.; ERWIN, R. Sliding control approach to underactuated multibody systems. In: **American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004**. [s.n.], 2004. v. 2, p. 1283–1288. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1386750>>.
- BAGEANT, M. R. **Balancing a Two-Wheeled Segway Robot**. Dissertação (Bachelor Thesis) — Massachusetts Institute of Technology, 2011.
- BALOH, M.; PARENT, M. Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system. **The conference on computational intelligence, robotics, and autonomous systems**, p. 1–7, 2003. Disponível em: <<http://www.cybercars.org/dissemin/docs/Singapour-ciras2003.pdf>>.
- BHAVSAR, P.; KUMAR, V. Trajectory Tracking of Linear Inverted Pendulum Using Integral Sliding Mode Control. **International Journal of Intelligent Systems and Applications**, v. 4, n. June, p. 31–38, 2012. ISSN 2074904X.
- CHANCHAREON, R.; SANGVERAPHUNSIRI, V.; CHANTRANUWATHANA, S. Tracking Control of an Inverted Pendulum Using Computed Feedback Linearization Technique. **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics, Automation and Mechatronics - RAM'06**, p. 1–6, 2006.
- CLOUTIER, J.; STANSBERRY, D. The capabilities and art of state-dependent Riccati equation-based design. **Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 2002. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2002.1024785>>.
- COSTA, M. D. S. **Mobilidade Urbana Sustentável : Um Estudo comparativo e as Bases De um Sistema De Gestão para Brasil e Portugal**. 196 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2003.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S.l.]: LTC Editora, 1998.
- DOYLE JOHN E FRANCIS, B.; TANNENBAUM, A. **Feedback Control Theory**. [S.l.]: Macmillan Publishing Co, 1990.
- HA, Y.; YUTA, S. Trajectory tracking control for navigation of self-contained mobile inverse pendulum. **Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, IEEE, 1994. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/IROS.1994.407604>>.
- HUANG, C.-N. The Development of Self-Balancing Controller for One-Wheeled Vehicles. **Engineering**, v. 02, n. April, p. 212–219, 2010. ISSN 1947-3931.
- HUANG, J. et al. Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 26, n. 4, p. 750–758, 2010.

IBGE. **Dados amostrais e estimativas populacionais das medianas de altura e peso da população, por sexo, segundo a idade e os grupos de idade - Paraná - período 2008-2009**. 2009. [Online; accessed 11-fev-2015]. Disponível em: <[http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/pof/2008\\_2009\\_encaa/tabelas\\_pdf/tab3\\_21.pdf](http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/pof/2008_2009_encaa/tabelas_pdf/tab3_21.pdf)>.

ÇIMEN, T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method. **Annual Reviews in Control**, Elsevier BV, v. 34, n. 1, p. 32–51, Apr 2010. ISSN 1367-5788. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.arcontrol.2010.03.001>>.

KORAYEM, M. H.; IRANI, M.; Rafee Nekoo, S. Load maximization of flexible joint mechanical manipulator using nonlinear optimal controller. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 69, n. 7-8, p. 458–469, 2011. ISSN 00945765. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.05.023>>.

LEGO, G. **User Guide LEGO® MINDSTORMS® education EV3**. [S.l.], 2013. Disponível em: <[LEGOeducation.com](http://LEGOeducation.com)>.

LEGWAY. 2014. [Online; accessed 30-out-2014]. Disponível em: <<http://legway.hk/>>.

LEMOS, L. F. C. et al. Uma revisão sobre centro de gravidade e equilíbrio corporal. **Revista Brasileira de Ciência & Movimento**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 17, n. 4, p. 83–90, Jan 2009.

MAEKAWA, H. Compact servo driver for torque control of DC-servo motor based on voltage control. **1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (Cat. No.99TH8399)**, IEEE, 1999. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/AIM.1999.803189>>.

MATHWORKS, I. T. 2015. [Online; accessed 09-jun-2015]. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/help/supportpkg/legomindstormsev3/index.html>>.

MAXIM. **Mathematical Model of Lego EV3 Motor**. 2015. Disponível em: <<http://nxt-unroller.blogspot.com.br/2015/03/mathematical-model-of-lego-ev3-motor.html>>.

NAVEH, Y.; BAR-YOSEPH, P. Z.; HALEVI, Y. Nonlinear Modeling and Control of a Unicycle. **Dynamics and Control**, v. 9, p. 279–296, 1999. ISSN 09254668. Disponível em: <[http://www.ncbi.nlm.nih.gov/entrez/query.fcgi?db=pubmed&cmd=Retrieve&dopt=AbstractPlus&list\\_uids=15591634910199028164related:xBn-wVedYNgJ](http://www.ncbi.nlm.nih.gov/entrez/query.fcgi?db=pubmed&cmd=Retrieve&dopt=AbstractPlus&list_uids=15591634910199028164related:xBn-wVedYNgJ)>.

NISE, N. S. **Control Systems Engineering**. Fourth. [S.l.: s.n.], 2004.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.: s.n.], 2003.

OLIVEIRA, L. K. d. **Uma Revisão Sistemática da Literatura Científica em Logística Urbana no Brasil**. 2014. Acesso em 14 out. 2014. Disponível em: <[http://www.anpet.org.br/ssat/interface/content/autor/trabalhos/publicacao/2013/59\\_AC.pdf](http://www.anpet.org.br/ssat/interface/content/autor/trabalhos/publicacao/2013/59_AC.pdf)>.

PATHAK, K.; FRANCH, J.; AGRAWAL, S. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. **IEEE Trans. Robot.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 3, p. 505–513, Jun 2005. ISSN 1552-3098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TRO.2004.840905>>.

REN, T.-J.; CHEN, T.-C.; CHEN, C.-J. Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller. **Control Engineering Practice**, Elsevier BV, v. 16, n. 3, p. 365–375, Mar 2008. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2007.05.007>>.

RYNO. 2014. [Online; accessed 30-out-2014]. Disponível em: <<http://rynomotors.com/>>.

SALERNO, A.; ANGELES, J. The control of semi-autonomous two-wheeled robots undergoing large payload-variations. **IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. 2004**, IEEE, 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ROBOT.2004.1308075>>.

SCARINGELLA, R. S. a Crise Da Mobilidade Urbana Em São Paulo. **São Paulo em Perspectiva**, v. 15, p. 55–59, 2001. ISSN 0102-8839.

SEGWAY. 2014. [Online; accessed 30-out-2014]. Disponível em: <<http://www.segway.com/>>.

SOLOWHEEL. 2014. [Online; accessed 30-out-2014]. Disponível em: <<http://solowheel.com/>>.

SPURGEON, S. Sliding mode control: a tutorial. **2014 European Control Conference (ECC)**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), Jun 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ECC.2014.6862622>>.

VENDRAMINI, G.; SILVA, P. S. Controle de um Pêndulo Invertido Sobre uma Plataforma Móvel Utilizando PID E MFAC (Model-Free Adaptive Control). In: **DINCON 2010: 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 405–414.

Vinodh Kumar, E.; JEROME, J. Robust LQR controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. **Procedia Engineering**, Elsevier B.V., v. 64, p. 169–178, 2013. ISSN 18777058. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.088>>.

VIRGALA, I.; FRANKOVSKY, P.; KENDEROVÁ, M. Friction effect analysis of a dc motor. **American Journal of Mechanical Engineering**, v. 1, n. 1, p. 1–5, 2013.

WANG, W. et al. Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 151, n. 6, p. 683–690, Nov 2004. ISSN 1359-7035. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1049/ip-cta:20040902>>.

WHO, W. H. O. 2015. [Online; accessed 11-jun-2015]. Disponível em: <[http://www.who.int/growthref/who2007\\_bmi\\_for\\_age/en/](http://www.who.int/growthref/who2007_bmi_for_age/en/)>.