

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет экономический

Кафедра применения математических методов в экономике

Направление подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Лапочкин Дмитрий Алексеевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Формирование инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения

**«К защите допущен»**

Заведующий кафедрой,

д.э.н., профессор

Мкртчян Г.М./.....

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

**Научный руководитель**

к.т.н., доцент кафедры

финансов и кредита ЭФ НГУ

Перфильев А.А./.....

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Новосибирск

2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ.....	5
1.1. Проблемы частных инвесторов при осуществлении инвестиционной деятельности ....	5
1.2. Анализ подходов к определению инвестиционного портфеля и управлению портфелем ценных бумаг .....	7
1.3. Типы инвесторов, формализация отношения инвестора к риску .....	11
1.4. Портфельная теория Г. Марковица .....	13
1.5. Модели оценки капитальных активов .....	17
1.6. Оценка стоимости финансовых активов с помощью регрессионных моделей .....	22
1.7. Оценка эффективности инвестиционного портфеля.....	25
ГЛАВА 2. МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ В ФОРМИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ .....	30
2.1. Понятие и классификация машинного обучения.....	30
2.2. Обзор методов машинного обучения, применяемых в процессе формирования инвестиционного портфеля .....	32
2.3. Технология формирования инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения .....	43
ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ.....	47
3.1. Подготовка данных .....	47
3.2. Процесс формирования инвестиционного портфеля.....	52
3.3. Тестирование оптимального инвестиционного портфеля .....	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	69
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	70
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	76
Программный код .....	76

## ВВЕДЕНИЕ

Как показывают результаты исследований, в России наблюдается рост числа частных инвесторов, а также их доли в совокупном объеме торгов на фондовом рынке. Это явление характерно не только для России: в последние годы данная тенденция характерна для многих стран. При этом общий уровень инвестиционной финансовой грамотности среди населения остается низким.

Операции с ценными бумагами сопряжены с инвестиционным риском, который представляет собой вероятность полной или частичной утраты вложенных денежных средств или неполучения ожидаемого дохода. Существует прямая зависимость между доходностью финансового инструмента и риском, связанным сложениями в данный инструмент. Минимизация инвестиционного риска достигается за счет формирования инвестиционного портфеля как способа диверсификации инвестиций в ценные бумаги.

Современные подходы к формированию инвестиционного портфеля, как правило, основаны на научных работах Г. Марковица, У. Шарпа, Дж. Л. Трейнора и др. Однако данные подходы имеют ряд допущений и недостатков, затрудняющих их применение на практике. Развитие цифровых технологий и методов искусственного интеллекта привело к тому, что во многих современных научных работах, посвященных вопросам формирования инвестиционного портфеля, заметную популярность приобрели методы машинного обучения. Основными преимуществами методов машинного обучения являются их способность обучаться на большом объеме сложных данных и высокая эффективность в решении широкого спектра задач.

С учетом существующей тенденции к увеличению числа индивидуальных инвесторов, обладающих недостаточным опытом для принятия рисковых инвестиционных решений, применение методов машинного обучения в процессе формирования инвестиционного портфеля на текущий момент представляет собой **актуальное** направление для исследований.

**Объект исследования** — инвестиционный портфель.

**Предметом исследования** являются методы формирования инвестиционного портфеля.

**Цель работы** — предложить технологию формирования инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения.

Для достижения данной цели были определены и решены следующие **задачи**:

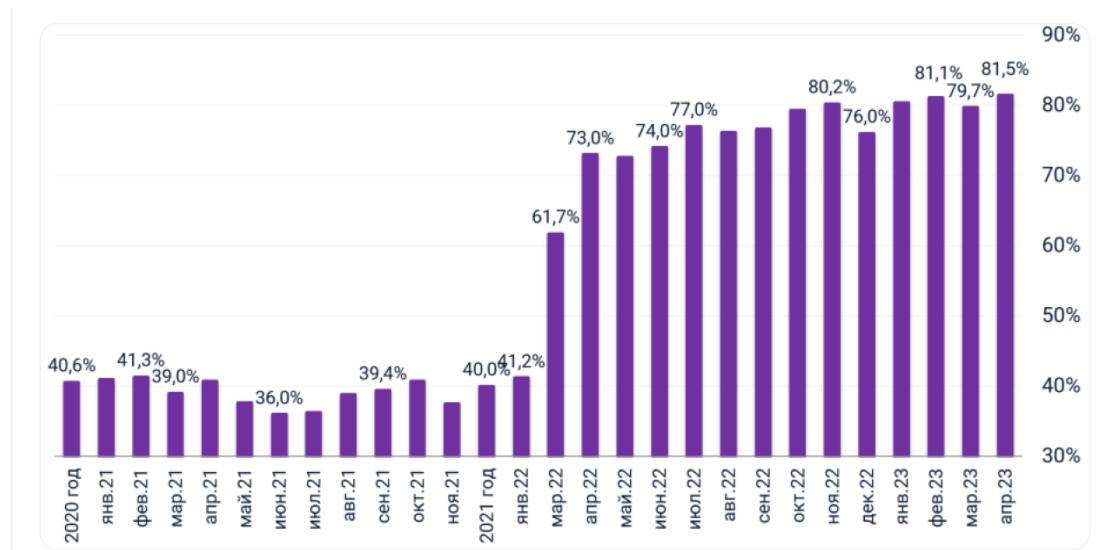
1. Проанализировать существующие подходы к формированию инвестиционного портфеля и оценке финансовых активов.
2. Предложить технологию формирования инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения.
3. Реализовать предложенную технологию формирования инвестиционного портфеля.

**Структура работы** включает в себя введение, три главы, заключение, список использованной литературы и приложение. В первой главе рассмотрены теоретические основы портфельного инвестирования, проанализированы современные подходы к формированию инвестиционного портфеля и оценке финансовых активов. Вторая глава посвящена обзору методов машинного обучения применительно к формированию инвестиционного портфеля. Также во второй главе предлагается технология формирования инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения. В третьей главе обосновывается эффективность предложенной технологии.

## **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ**

## **1.1. Проблемы частных инвесторов при осуществлении инвестиционной деятельности**

Как показывают последние отчеты Банка России, а также данные группы БКС, за последние годы на фондовом рынке России существует тенденция к росту частных инвесторов, то есть лиц, которые инвестируют собственные денежные средства в различные финансовые инструменты. Растет и доля индивидуальных инвесторов в совокупном объеме торгов на фондовом рынке, особенно в объеме торгов акциями (рис. 1)<sup>12</sup>.



*Источник: Как меняется доля частных инвесторов на Мосбирже. График // <https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/kak-menyaetsia-dolia-chastnykh-investorov-na-mosbirzhe-grafiki> (дата обращения: 31.05.2024).*

Рисунок 1 — Доля частных инвесторов в объеме торгов акциями на Московской бирже

Схожая тенденция характерна и для многих других стран мира. Например, по данным инвестиционного банка Goldman Sachs, доля частных инвесторов в общем объеме торгов на фондовом рынке США имеет возрастающий тренд с 2010 года (рис. 2)<sup>3</sup>. С данной точки зрения вопрос о проблемах, с которыми сталкиваются частные инвесторы в рамках осуществления инвестиционной деятельности, становится все более актуальным.

<sup>1</sup>Обзор ключевых показателей профессиональных участников рынка ценных бумаг. URL: [https://www.cbr.ru/analytics/rcb/review\\_rcb](https://www.cbr.ru/analytics/rcb/review_rcb) (дата обращения: 31.05.2024).

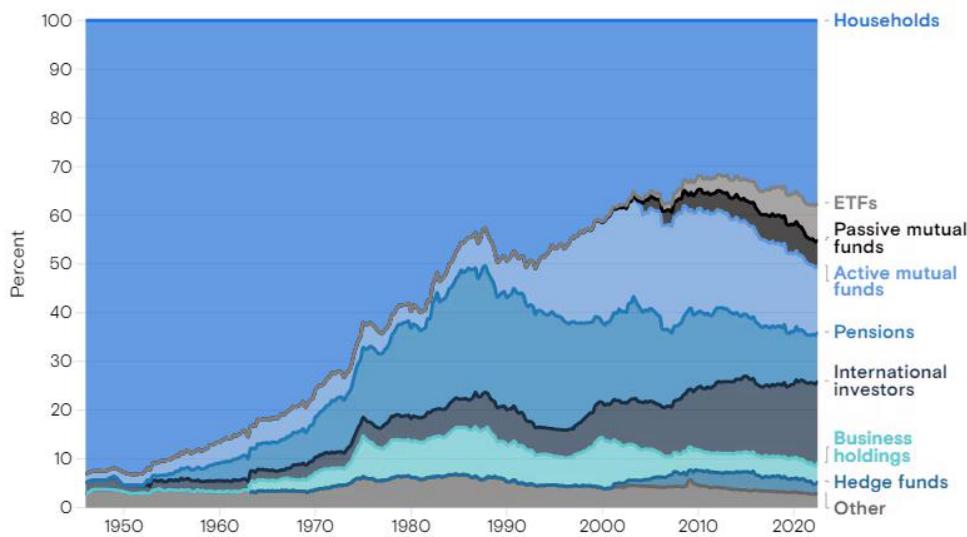
<sup>2</sup>Как меняется доля частных инвесторов на Мосбирже. График.

[URL: https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/kak-menjaetsia-dolja](https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/kak-menjaetsia-dolja)

<sup>3</sup>US Stocks are Forecast to Have Less Pain but No Gain in 2023

URI : <https://www.goldmansachs.com/intelligence/pages/us-stocks>

URL: <https://www.goldmansachs.com/intelligence/pages/us-stocks-are-forecast-to-have-less-pain-but-no-gain-in-2023.html> (дата обращения: 31.05.2024).



*Источник: US Stocks are Forecast to Have Less Pain but No Gain in 2023 // <https://www.goldmansachs.com/intelligence/pages/us-stocks-are-forecast-to-have-less-pain-but-no-gain-in-2023.html> (дата обращения: 31.05.2024).*

Рисунок 2 — Доли инвесторов по основным категориям в объеме торгов ценными бумагами на фондовом рынке США

Используя результаты статистического исследования Банка России, проведенного в 2022 году, можно составить портрет среднестатистического клиента российского брокера. Доля мужчин среди клиентов составляет 59%, средний возраст — 37,4 года, причем 49% от общего числа клиентов имеют возраст от 20 до 40 лет. Средняя доля клиентов с пустыми счетами составляет 64,6%, в то же время малую инвестиционную активность (от 0 до 5 сделок за полгода) проявляют около 83% клиентов с непустыми счетами. Доля активов клиентов со счетами от 100 тыс. до 6 млн. рублей в общем объеме активов составляет 32%. Количество активов в среднем портфеле составляет 10,8 инструментов, однако высокий уровень диверсификации в большей степени свойственен для клиентов с активами выше 6 млн. рублей (16,3 инструмента). Клиенты с активами менее 100 тыс. рублей в среднем имеют в портфеле от 7,2 до 8,1 инструментов, что свидетельствует о недостаточной диверсификации портфелей данной категории инвесторов<sup>4</sup>.

Согласно опросам Банка России, для инвесторов характерен недостаток уровня знаний относительно инвестирования и его особенностей. Многие инвесторы, особенно среди молодых слоев населения (18 лет — 22 года), имеют ошибочные представления относительно инвестирования: 30% не понимают принципа диверсификации, 18% считают, что если

<sup>4</sup>Портрет розничного инвестора.

URL: [https://www.cbr.ru/analytics/rcb/port\\_inv](https://www.cbr.ru/analytics/rcb/port_inv) (дата обращения: 31.05.2024).

стоимость акций росла в прошлом, то она будет расти и в будущем, и лишь 44% осознают, что при вложениях на фондовом рынке риски потерь больше, чем при вкладах в банке<sup>5</sup>.

С точки зрения индивидуального инвестора процесс инвестирования предполагает приобретение финансовых активов и управление ими (покупка и продажа активов) в течение определенного периода для достижения инвестиционных целей. В процессе управления финансовыми активами ключевую роль играет инвестиционная стратегия. Выбор подходящей инвестору инвестиционной стратегии осложняется множеством факторов. К таким факторам можно отнести нестабильное состояние рынка, сложность биржевых технологий, большое число финансовых инструментов, противоречивую и асимметричную информацию относительно финансовых активов, ограниченный доступ к аналитическим финансовым инструментам, недостаточность свободного времени для проведения полноценного исследования финансового рынка, а также эмоциональные факторы. В данных обстоятельствах частный инвестор зачастую руководствуется не анализом показателей ценных бумаг, а иными соображениями. Причинами для выбора финансового инструмента могут служить простота финансового инструмента, рекламная кампания эмитента, низкая стоимость инвестиционного инструмента, степень того, насколько для инвестора «привычен» финансовый инструмент и др.

Успех в управлении инвестициями зависит от понимания инвестором структуры его инвестиционного портфеля и того, как он работает. С данной точки зрения необходимо рассмотреть подходы к определению инвестиционного портфеля и управлению им.

## **1.2. Анализ подходов к определению инвестиционного портфеля и управлению портфелем ценных бумаг**

В экономической литературе термин «инвестиционный портфель» применяется для описания совокупности как реальных (недвижимость, оборудование и др.), так и финансовых инвестиций (ценные бумаги и производные финансовые инструменты), находящихся в собственности инвестора [Руткаускас, 2019]. В рамках данной работы под инвестиционным портфелем понимается набор ценных бумаг, принадлежащих частному или корпоративному инвестору и сформированный в соответствии его с инвестиционными целями.

Каждый из объектов инвестирования обладает рядом характеристик, образующих его инвестиционные качества. С этой точки зрения суть портфельного инвестирования состоит в том, чтобы улучшить инвестиционные качества всего портфеля в целом путем консолидации

---

<sup>5</sup>Исследование уровня финансовой грамотности: четвертый этап.

URL: [http://www.cbr.ru/analytics/szpp/fin\\_literacy/fin\\_ed\\_4](http://www.cbr.ru/analytics/szpp/fin_literacy/fin_ed_4) (дата обращения: 31.05.2024).

качеств каждого объекта в отдельности. Таким образом, сочетание объектов инвестирования позволяет достичь таких результатов инвестиционной деятельности, которые недостижимы для каждого объекта в отдельности [Руткаускас, 2019]. Для ценных бумаг выделяют такие инвестиционные качества, как доходность, риск и ликвидность [Бородина, 2017].

Инвестиционный портфель является инструментом, посредством которого достигаются наиболее приоритетные для инвестора цели инвестиционной деятельности. В качестве целей могут выступать следующие [Руткаускас, 2019]:

1. Максимизация роста капитала.
2. Максимизация роста дохода.
3. Минимизация риска.
4. Обеспечение требуемой ликвидности портфеля.

Управление инвестиционным портфелем представляет собой применение к совокупности различных видов ценных бумаг конкретных методов, направленных на сохранение первоначально инвестированных финансовых средств, достижение максимального уровня дохода, обеспечение инвестиционной направленности портфеля [Скрипниченко, 2016]. Процедура управления инвестиционным портфелем может быть сформулирована следующим образом:

1. Определение целей инвестора.
2. Формулирование инвестиционной стратегии.
3. Анализ рынка ценных бумаг.
4. Формирование инвестиционного портфеля.
5. Пересмотр портфеля ценных бумаг.
6. Оценка эффективности портфеля ценных бумаг.

Выделяют две стратегии управления инвестиционным портфелем [Скрипниченко, 2016]:

1. Активная стратегия — стратегия управления, которая предполагает постоянный мониторинг рынка ценных бумаг, отслеживание экономической конъюнктуры в целях продажи имеющихся ценных бумаг или оперативного приобретения инструментов, отвечающих целям инвестиционного портфеля, быстрое изменение структуры инструментов, входящих в него.

Использование данной стратегии сопряжено с высокими финансовыми затратами на информационный, аналитический, экспертный анализ рынка ценных бумаг.

2. Пассивная стратегия, предполагающая формирование инвестиционного портфеля с высокой степенью диверсификации на длительный промежуток времени. Использование пассивной стратегии оправдано лишь в условиях достаточной эффективности рынка ценных бумаг и стабильной конъюнктуры рынка. Преимуществом стратегии считается низкий уровень накладных расходов.

Процесс формирования инвестиционного портфеля включает в себя принятие решения относительно распределения денежных средств между активами. Задача, решаемая на данном этапе, связана с условием ограниченности инвестиционных ресурсов инвестора и наличием множества финансовых активов, совокупная стоимость которых превышает имеющиеся в распоряжении ресурсы [Руткаускас, 2019]. Процесс формирования портфеля опирается на следующие принципы [Скрипниченко, 2016]:

1. Соответствие целям разработанной и принятой инвестиционной стратегии.
2. Соответствие структуры и объема инвестиционного портфеля источникам для поддержания ликвидности и устойчивости.
3. Оптимальное соотношение доходности, риска и ликвидности инвестиционного портфеля.
4. Диверсификация портфеля с целью повышения надежности и снижения риска вложений.
5. Обеспечение реализуемости инвестиционного портфеля.

В соответствии с инвестиционной стратегией инвестора инвестиционные портфели разделяют на следующие группы [Руткаускас, 2019]:

1. Портфель роста.
2. Портфель дохода.
3. Консервативный портфель.
4. Портфель высоколиквидных объектов инвестирования.

Портфель роста формируется за счет объектов инвестирования, которые обеспечивают высокие темпы роста капитала, то есть курсовой стоимости входящих в него ценных бумаг. В то же время допускается получение дополнительного дохода в виде дивидендов небольшого

размера [Севумян, 2011]. Данная группа портфелей характеризуется высоким относительно прочих групп уровнем риска, который, тем не менее, может варьироваться в зависимости от структуры портфеля. С этой точки зрения портфели роста можно разделить на несколько видов:

1. Портфель агрессивного роста. Как правило, состоит из акций молодых быстрорастущих компаний. В перспективе такой портфель способен принести инвестору максимальный доход за счет наибольших темпов роста курсовой стоимости акций, что сопряжено с высоким уровнем риска.
2. Портфель консервативного роста. В основном состоит из акций компаний с небольшими, но устойчивыми темпами роста курсовой стоимости, за счет чего достигается наименьший среди портфелей роста уровень риска.
3. Портфель среднего роста пользуется среди инвесторов наибольшей популярностью и представляет собой сочетание портфелей агрессивного и консервативного роста. Данный вид портфелей характеризуется средним уровнем дохода при умеренном риске, что достигается за счет включения в портфель акций как стабильных, так и быстрорастущих компаний.

В портфель дохода включаются финансовые активы, обеспечивающие высокий доход на единицу вложенного капитала, где под доходом прежде всего подразумеваются дивидендные и процентные выплаты. Объектами инвестирования для портфелей дохода выступают акции с высоким отношением дивиденда к курсовой стоимости и облигации или другие ценные бумаги с высокими текущими выплатами. Выбор надежных активов позволяет достичь высокий уровень текущего дохода при уровне риска, соответствующем минимальной степени риска, приемлемого для консервативного инвестора [Севумян, 2011].

Консервативный портфель формируется за счет активов с низким уровнем риска. Такие активы характеризуются низкими темпами прироста рыночной стоимости или текущего дохода по сравнению с портфелями роста или портфелями дохода соответственно. В качестве объектов инвестирования для данной группы портфелей могут выступать, например, низкодоходные государственные ценные бумаги.

Портфель высоколиквидных объектов инвестирования предполагает возможность быстрой конвертации объектов инвестирования в денежные средства без существенной потери их стоимости. В портфели данного вида могут быть включены и некоторые виды денег [Руткаускас, 2019].

Таким образом, с позиции данной работы инвестиционный портфель представляет собой набор ценных бумаг, который формируется исходя из целей инвестора, характеризуется показателями доходности и риска и предусматривает активное или пассивное управление своей структурой.

### **1.3. Типы инвесторов, формализация отношения инвестора к риску**

Выделяют три основных типа инвесторов в зависимости от цели инвестирования и отношения к риску [Севумян, 2011]:

1. Консервативный инвестор. Преследует цель защиты своих денежных средств от инфляции. Заинтересован в получении стабильного, но в то же время низкого дохода в течении длительного периода времени. В качестве объектов инвестирования в данном случае, как правило, выступают государственные ценные бумаги, а также акции и облигации крупных надежных эмитентов.

2. Умеренно-агрессивный инвестор. Рассчитывает на получение дохода за счет роста капитала в длительной перспективе. Готов пойти на вложения в высокодоходные ценные бумаги, однако подстраховывает себя вложениями в защитные активы. Портфель такого инвестора в большой степени состоит из акций и облигаций крупных и средних эмитентов с длительной рыночной историей. Включаются в портфель и государственные ценные бумаги, но в небольшом количестве.

3. Агрессивный инвестор. Ожидает получить максимальный доход в короткий срок за счет спекулятивных вложений в такие высокодоходные, но рискованные ценные бумаги, как облигации и акции небольших эмитентов и венчурных компаний.

Инвестор определяет структуру инвестиционного портфеля исходя из цели инвестиционной деятельности и объектов инвестирования в зависимости от собственных предпочтений. Таким образом, возможно установить соответствие между типом инвестора и видами инвестиционных портфелей. Консервативному инвестору соответствует низкодоходный портфель с низким уровнем риска (консервативный портфель), умеренно-агрессивному — диверсифицированный портфель со средней доходностью при умеренном риске (например, портфель среднего роста или портфель дохода), а агрессивному — высокодоходный рискованный портфель (например, портфель агрессивного роста) [Севумян, 2011].

Существующие методологические подходы к принятию инвестиционных решений могут быть обобщены до двух основных:

1. Рациональный подход, который предполагает проведение количественных расчетов показателей ценных бумаг, оценку вероятности получения прибыли и потенциального убытка, а также выбор того инвестиционного решения, которое обеспечивает наилучшие количественные показатели с точки зрения дохода и риска.
2. Иррациональный подход, который учитывает субъективную сторону инвестиционного процесса. В рамках иррационального подхода предполагается, что инвестиционные решения принимаются с учетом субъективной оценки качественных и количественных характеристик ценных бумаг. К данному подходу можно отнести такие теории, как теория перспектив Канемана и Тверски, шумовая теория Блэка, теория рефлексивности Сороса и др.

В рамках данной работы предлагается представлять склонность инвестора к риску в виде кривых безразличия, что является одним из методов рационального подхода к принятию инвестиционных решений. Семейство кривых безразличия описывается функцией полезности. Одной из таких функций является уровневая функция полезности Неймана-Моргенштерна:

$$U(E(r_p), \sigma_p^2) = E(r_p) - A\sigma_p^2, \quad (1)$$

где  $E(r_p)$  — ожидаемая доходность портфеля,  $\sigma_p^2$  — дисперсия доходностей портфеля,  $A$  — коэффициент, описывающий склонность инвестора к риску [Богочаров, 2021].

Если  $A = 0$ , инвестор считается нейтральным к риску. Если  $A$  положителен, то инвестор не склонен к риску (рискофоб). Отрицательный  $A$  говорит о том, что инвестор склонен к риску (рискофил).

Стоит отметить, что функции полезности для формализации рисковых предпочтений инвестора широко используются в теоретических научных исследованиях, но значительно меньше на практике. Это объясняется сложностями при определении параметров склонности инвестора к риску. Вместо функций полезности на практике чаще используют их упрощенные аналоги, стоимостные меры риска (VaR, CVaR и др.), финансовые коэффициенты (коэффициенты Шарпа, Трейнора, Сортинго и др.) Практика оценки эффективности инвестиционного портфеля с точки зрения стоимостных мер риска и финансовых коэффициентов подробно рассмотрена в параграфе 1.7.

#### **1.4. Портфельная теория Г. Марковица**

Традиционный подход к инвестированию, преобладавший до развития теории портфельного инвестирования, обладал двумя серьезными недостатками: основное влияние уделялось анализу поведения каждого актива в отдельности, а ключевым показателем при выборе актива являлся исключительно доход, показатель риска не рассматривался [Севумян, 2010].

Ситуация изменилась в 20-30-х годах XX века, с появлением работ И. Фишера, посвященных теориям процентной ставки и приведенной стоимости. В 1952 году Гарри М. Марковиц предложил теоретико-вероятностную формализацию понятий доходности и риска. Публикация Г. Марковица под названием «Выбор портфеля» (Portfolio Selection) считается началом развития современной теории портфельных инвестиций, ключевой проблемой которой является нахождение набора финансовых активов с наибольшим уровнем доходности при наименьшем или заданном уровне рыночного риска с помощью диверсификации инвестиций, то есть выбора ценных бумаг с низкой корреляцией [Севумян, 2010].

Г. Марковиц предложил математическую модель определения структуры оптимального с точки зрения доходности и риска инвестиционного портфеля, а также описал методы построения таких портфелей при определенных допущениях [Быстрова, 2018]:

1. Инвестиционный портфель состоит исключительно из акций.
2. При формировании портфеля инвестор принимает решение только на один период. В конце инвестиционного периода инвестор продает все акции в составе портфеля.
3. Рынки ценных бумаг эффективны: инвесторы имеют доступ к информации о торгах и не могут единолично оказывать влияние на рынок, сделки с ценными бумагами осуществляются без трансакционных издержек.
4. Ожидаемая доходность каждой акции в портфеле на конец инвестиционного периода равна математическому ожиданию ее доходности за предыдущие периоды.
5. Существует запрет на продажу ценных бумаг без покрытия (запрет на короткие продажи).

Согласно теории Марковица, решение относительно структуры портфеля инвестор принимает на основе оценок доходности и риска портфеля математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением доходности соответственно. Оптимальным портфелем инвестор считает тот, что обеспечивает максимальную доходность при заданном риске или минимальный риск при заданном уровне доходности. Ключевым моментом в оценке риска

портфеля является учет взаимной корреляции между доходностями активов, входящих в портфель: наличие в портфеле активов с отрицательным коэффициентом корреляции доходностей снижает риск всего портфеля в целом за счет эффекта диверсификации [Быстрова, 2018].

Пусть рассматривается набор из  $N$  акций. Доходность  $i$ -й акции описывается случайной величиной с нормальным распределением  $r_i$ . Доля  $i$ -й ценной бумаги в портфеле (доля рыночной стоимости актива в общей стоимости портфеля) выражается числом  $\omega_i \geq 0$ , причем

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \quad (2)$$

Тогда доходность портфеля за период владения составит

$$r_p = \sum_{i=1}^N \omega_i r_i \quad (3)$$

Ожидаемая доходность портфеля рассчитывается по формуле:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \omega_i E(r_i), \quad (4)$$

где  $E(r_i)$  — математическое ожидание доходности  $i$ -й акции.

Риск в рамках теории Марковица выражается в среднеквадратичном отклонении доходности портфеля и зависит от значений коэффициента ковариации доходностей акций. Показатель риска рассчитывается следующим образом:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \sigma_i^2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij}$  — коэффициент ковариации между величинами  $r_i$  и  $r_j$ , а  $\sigma_i$  — дисперсия величины  $r_i$ .

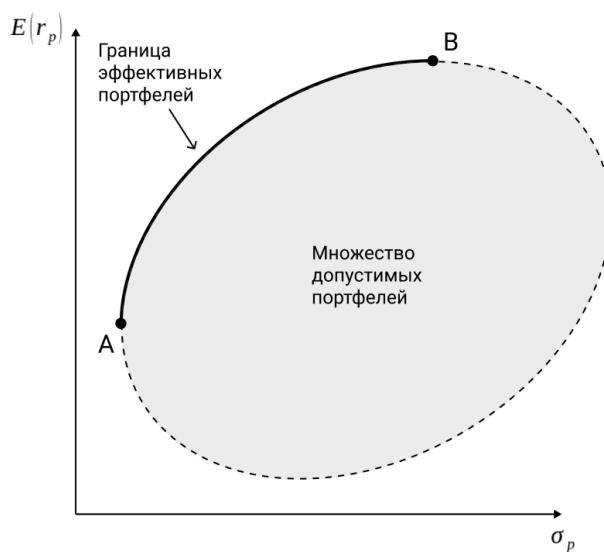
С использованием формул (2) — (5) модель Марковица формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r_p) = \sum_{i=1}^N \omega_i E(r_i) \rightarrow \max \\ \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij}} < \sigma, \\ \omega_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad (6)$$

где  $\sigma$  — приемлемое для инвестора значение риска [Быстрова, 2018].

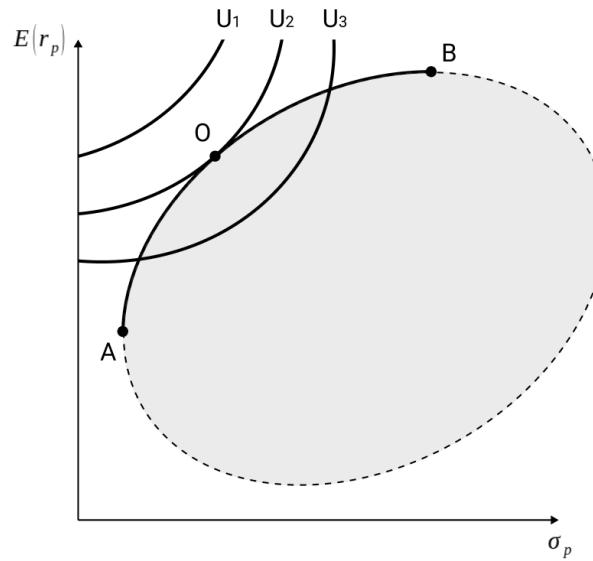
Как предполагается в теории Марковица, среди всего множества допустимых портфелей инвестор выберет только то подмножество портфелей, что обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска (или минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности), что и было математически сформулировано в формуле (6). Набор портфелей, удовлетворяющий этому условию, образует множество (границу) эффективных портфелей согласно портфельной теории Марковица (рис. 3) [Скрипниченко, 2016].

Определение оптимального портфеля в рамках теории Марковица происходит с использованием кривых безразличия инвестора: оптимальный портфель находится в точке касания одной из кривых безразличия границы эффективных портфелей (рис. 4) [Скрипниченко, 2016].



*Источник: составлено автором*

Рисунок 3 — Множество допустимых портфелей и граница эффективных портфелей (кривая между точками А и В)



*Источник: составлено автором*

Рисунок 4 — Определение оптимального портфеля (точка О) с использованием кривых безразличия инвестора ( $U_1, U_2, U_3$ )

Подводя итог, необходимо заметить, что ключевым моментом теории Г. Марковица является предположение о том, что за счет эффекта диверсификации можно сформировать портфель из множества активов таким образом, что совокупный риск портфеля будет меньше, чем сумма рисков всех активов в отдельности. Существенным ограничением теории

Марковица является гипотеза, согласно которой доходность каждой акции имеет случайный характер и равна средней арифметической величине ее доходности в предыдущие периоды. На практике доходность ценных бумаг обладает высокой изменчивостью, и как показывают эконометрические исследования, с увеличением временного интервала доля случайного фактора в изменении цены имеет тенденцию к снижению [Галанов, 2017].

### **1.5. Модели оценки капитальных активов**

Определение параметра ожидаемой доходности инвестиционного портфеля зависит от оценок будущей доходности активов, входящих в портфель. Предлагаемый Г. Марковицем способ оценки ожидаемой доходности на основе исторических данных, по мнению многих исследований, не является эффективным. В рамках дальнейшего развития классической портфельной многими авторами был предложен ряд теорий, которые обосновывают механизм формирования цены капитальных активов и предлагают методы оценки этих активов. В данном параграфе рассматриваются теории, оказавшие наиболее существенное влияние на развитие современной портфельной теории.

В 1963 году У. Шарп предложил **модель оценки стоимости капитальных активов (Capital Asset Pricing Model, CAPM)**, которая позволяет оценить справедливую рыночную стоимость финансового актива с учетом его систематического (рыночного) риска. В основе теории У. Шарпа лежат несколько предположений [Шарп, 2018]:

1. Инвесторы производят оценку инвестиционных портфелей на основе ожидаемых доходностей и стандартных отклонений.
2. При выборе между двумя портфелями инвесторы предпочтут тот, что при прочих равных условиях дает наибольшую ожидаемую доходность.
3. При выборе между двумя портфелями инвесторы предпочтут тот, что при прочих равных условиях имеют наименьшее стандартное отклонение.
4. Частные активы бесконечно делимы.
5. Существует безрисковая процентная ставка, по которой инвестор может дать взаймы (то есть инвестировать) или взять в долг денежные средства. Безрисковая ставка одинакова для всех инвесторов.
6. Налоги и трансакционные издержки несущественны.
7. Для всех инвесторов период вложения одинаков.
8. Информация свободно и незамедлительно доступна для всех инвесторов.

9. Инвесторы имеют однородные ожидания, то есть они одинаково оценивают доходность и риски.

Ключевая идея модели САРМ состоит в том, что ожидаемая доходность актива находится в прямой зависимости от бета-коэффициента данного актива, который отражает чувствительность доходности акции к изменению доходности рыночного портфеля. Под рыночным портфелем понимается портфель, состоящий из всех ценных бумаг, в котором доля каждой соответствует ее относительной стоимости в общей стоимости портфеля. Доходность актива  $i$  рассчитывается следующим образом:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f),$$

где  $E(r_m)$  — ожидаемая доходность рыночного портфеля,  $r_f$  — безрисковая процентная ставка,  $\beta_i$  — бета-коэффициент актива, отражающий чувствительность доходности ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля [Соловьев, 2012].

В рамках модели САРМ утверждается, что рынок не всегда вознаграждает инвестора более высокой доходностью за больший риск. Вознаграждается лишь та часть риска, которую невозможно диверсифицировать. Такой риск называют систематическим или рыночным. Таким образом, доходность актива, согласно У. Шарпу, прямо пропорциональна величине рыночного риска [Соловьев, 2012]. Показателем систематического риска в модели САРМ выступает бета-коэффициент, рассчитываемый по следующей формуле:

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{\sigma_m^2}, \quad (7)$$

где  $cov(r_i, r_m)$  — ковариация доходности  $i$ -й акции и доходности рыночного портфеля,  $\sigma_m^2$  — дисперсия доходности рыночного портфеля [Бухвалов, 2016].

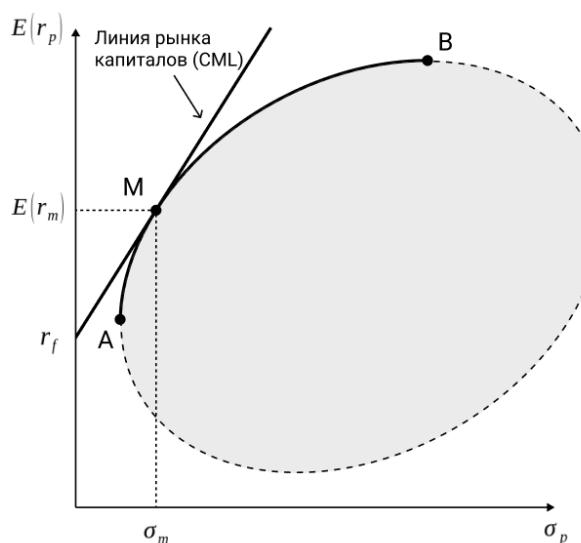
В соответствии с формулой (7), бета-коэффициент для рыночного портфеля равен единице:  $\beta_m = 1$ . Если  $\beta_i > 1$ , то рассматриваемый актив считается более рискованным, чем рынок. Если же  $\beta_i < 1$ , то утверждается, что данный актив относится к защитным активам: его риск меньше рыночного.

Определение оптимальной структуры портфеля с использованием модели Шарпа производится с помощью так называемой линии рынка капиталов (Capital Market Line, CML), имеющей следующий вид:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_p,$$

где  $E(r_p)$  и  $\sigma_p$  — ожидаемая доходность и стандартное отклонение любого портфеля, созданного на основе рыночного портфеля.

Линия CML представляет собой множество оптимальных портфелей в рамках теории CAPM, которые формируются как линейная комбинация рыночного портфеля и безрискового актива с гарантированной ставкой доходности, нулевой волатильностью и нулевой корреляцией с рынком. CML представляет собой луч, исходящий из точки  $(0; r_f)$  и касающийся границы эффективных портфелей по модели Марковица. На рис. 5 точка касания линии рынка капитала обозначена буквой М.

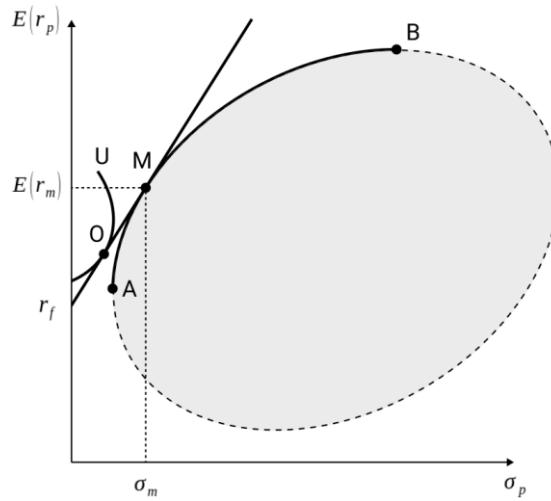


*Источник: составлено автором*

Рисунок 5 — Линия рынка капиталов

Ссудная ( $W_f > 0$ ) или заемная ( $W_f < 0$ ) доля безрискового актива  $W_f$  в смешанном портфеле определяется индивидуальным отношением инвестора к риску. Другими словами, оптимальный портфель в рамках теории CAPM определяется точкой касания его кривых безразличия линии рынка капиталов (рис. 6). Необходимо заметить, что из предположения об

однородности ожиданий инвесторов следует, что структура рисковой части оптимального портфеля инвестора совпадает со структурой рыночного портфеля М.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 6 — Определение оптимального портфель (точка О) с использованием кривой безразличия инвестора (U)

Для оценки полного риска портфеля ( $\sigma_p$ ) используется следующая формула:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2, \quad (8)$$

где  $N$  — число акций в портфеле,  $\beta_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i$ ,  $\sigma_{\varepsilon_i}^2$  — дисперсия значений независимой случайной величины  $i$ -го актива [Бухвалов, 2016].

Первое слагаемое в формуле (8) отражает систематический (рыночный) риск, второе слагаемое — несистематический риск, значение которого стремится к нулю при приближении структуры инвестиционного портфеля к структуре рыночного портфеля.

В 1962 году независимо от У. Шарпа Дж. Л. Трейнор разработал **рыночную модель оценки финансовых активов**, в рамках которой предложил использовать следующее уравнение доходности  $i$ -го актива:

$$r_i = \gamma_i + \beta_i r_I + \varepsilon_i,$$

где  $\beta_i$  — коэффициент, показывающий степень изменения доходности актива при изменении доходности рыночного индекса,  $r_I$  — доходность рыночного индекса.

Параметры  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  могут быть определены по следующим формулам:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_I)}{\sigma_I^2},$$

где  $\text{cov}(r_i, r_I)$  — ковариация доходностей  $i$ -й акции и доходности рыночного индекса,  $\sigma_I^2$  — дисперсия доходности рыночного индекса.

$$\gamma_i = \bar{r}_I - \beta_i \bar{r}_I,$$

$\bar{r}_I$  — средняя доходность рыночного индекса,  $\bar{r}_i$  — средняя доходность  $i$ -го актива.

Модификацией модели У. Шарпа стала **модель арбитражного ценообразования (arbitrage pricing model, APM)**, которая была предложена С. Россом. В теории арбитражного ценообразования предполагается, что ожидаемая доходность актива зависит от множества факторов риска. В данной теории рассматриваются все виды систематических рисков по отдельности, при этом каждый из факторов риска компенсируется при оценке стоимости актива. Ожидаемая доходность  $i$ -й акции определяется по формуле:

$$r_i = r_f + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} (r_{mk} - r_f),$$

где  $r_f$  — безрисковая ставка,  $K$  — общее число рассматриваемых факторов риска,  $\beta_{ik}$  — бета-коэффициент актива, отражающий чувствительность доходности ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля под влиянием риска  $k$ ,  $r_{mk}$  — уровень ожидаемой доходности рыночного портфеля, компенсирующий риск  $k$  [Полтева, 2017].

Еще одной модификацией модели У. Шарпа является **многофакторная модель оценки финансовых активов** Р. Мертона. Помимо систематического риска, модель Мертона позволяет также учесть несистематические риски. В рамках многофакторной модели каждый из ожидаемых видов риска рассматривается в качестве самостоятельного фактора. Ожидаемая доходность  $i$ -й акции для данной модели рассчитывается по формуле:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f) + \sum_{k=1}^K \beta_{ik}(r_{mk} - r_f),$$

где  $r_f$  — безрисковая ставка,  $\beta_i$  — бета-коэффициент актива, отражающий чувствительность доходности ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля,  $r_m$  — ожидаемая доходность рыночного портфеля в целом,  $K$  — общее число рассматриваемых факторов риска,  $\beta_{ik}$  — бета-коэффициент актива, отражающий чувствительность доходности ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля под влиянием несистематического риска  $k$ ,  $r_{mk}$  — уровень ожидаемой доходности рыночного портфеля, компенсирующей несистематический риск  $k$  [Полтева, 2017].

По сравнению с моделью У. Шарпа, модели арбитражного ценообразования и многофакторной оценки финансовых активов показывают более точную оценку доходности активов, особенно в условиях нестабильного рынка. Однако на практике они применяются редко из-за неопределенности относительно факторов риска и трудоемкости процесса оценки.

Модели оценки финансовых активов опираются на ряд гипотез, которые зачастую не соответствуют действительности, что значительно затрудняет их практическое применение. К таким гипотезам относится гипотеза эффективного рынка, существования рыночного портфеля, единой для всех инвесторов безрисковой ставки и др. Некоторые модификации CAPM позволяют избежать некоторых допущений теории У. Шарпа, однако их применение ограничивается высокой сложностью при изучении влияния макроэкономических рисков на доходность активов. Учитывая данные обстоятельства, целесообразно применение более эффективных подходов для оценки стоимости финансовых активов.

### **1.6. Оценка стоимости финансовых активов с помощью регрессионных моделей**

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы оценки капитальных активов опирались на поиск механизмов, влияющих на стоимость этих активов. Однако исследователи не пришли к консенсусу относительно наиболее эффективного метода оценки стоимости. Развитие эконометрики привело к попыткам объяснить изменение цен на финансовые активы исходя из динамики временных рядов, для которых характерен фактор случайности. Изучение финансовых рынков с волатильным и нелинейным характером движения цен активов привело к созданию таких регрессионных моделей временных рядов, как AR, MA, ARMA, ARCH, GARCH.

Применение данных моделей допускается только в условиях стационарности временных рядов, что является некоторым ограничением данного подхода, поскольку ряды

котировок ценных бумаг, как правило, не стационарны. В этом случае требуется дополнительная подготовка временных рядов путем исключения тренда, сезонной компоненты или перехода к последовательным разностям для прогнозирования прироста целевого временного ряда.

На практике для изучения случайных процессов ограничиваются слабой стационарностью временного ряда или стационарностью второго порядка. Слабо стационарный процесс имеет постоянные для всех  $t$  моменты первого и второго порядка:

$$\mu = E(x_t),$$

где  $\mu$  — среднее значение, то есть уровень, относительно которого колебляется временной ряд.

$$\sigma^2 = E(x_t - \mu)^2,$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия временного ряда.

$$\gamma_k = E(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu),$$

где  $\gamma_k$  — автоковариация порядка  $k$  [Суслов, 2005].

Далее под  $\{x_t\}$  будет пониматься слабо стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием.

**Модель авторегрессии (AR, autoregression)** порядка  $p$  описывает значение временного ряда как линейную комбинацию от конечного числа предыдущих значений ряда:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где  $x_t$  — стационарная переменная,  $\varphi_k$  — параметр модели авторегрессии,  $\varepsilon_t$  — значение белого шума, не коррелирующего со значениями ряда  $x_t$  [Суслов, 2005].

Белый шум  $\varepsilon_t$  — неавтокоррелированный слабо стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией, имеющий нормальное распределение ( $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ).

**Модель скользящего среднего (MA, moving average)** порядка  $q$  описывается уравнением:

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где  $x_t$  — уровень ряда в момент времени  $t$ ,  $\theta_k$  — параметр модели скользящего среднего [Суслов, 2005].

**Смешанный процесс авторегрессии — скользящего среднего (ARMA, модель Бокса-Дженкинса)** представляет собой сочетание моделей AR( $p$ ) и MA( $q$ ). Модель ARMA( $p, q$ ) эффективна с точки зрения оптимизации количества параметров модели: с использованием небольшого числа параметров ARMA может с достаточно большой точностью уловить характеристики исследуемого эмпирического ряда. Процесс описывается следующим уравнением:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

ARMA модели обладают существенным недостатком. Свойственная финансовому рынку неопределенность изменяется во времени, вследствие чего возникает кластеризация волатильности, которую невозможно учесть в рамках ARMA моделей из-за гипотезы о гомоскедастичности ошибок, то есть постоянства дисперсии ошибок  $\varepsilon_t$ . Для моделирования кластеризации волатильности могут использоваться ARCH и GARCH модели [Суслов, 2005].

Процесс с  $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^\infty$  является **процессом авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH)** порядка  $q$ , если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2 \end{cases}$$

где  $\Omega_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$  — предыстория процесса,  $\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1})$  — условная дисперсия.

Следует заметить, что условная дисперсия  $\sigma_t^2$  существует только в том случае, если  $\omega > 0$  и  $\gamma_1, \dots, \gamma_q \geq 0$ .

Применение модели ARCH на практике осложняется тем, что в своей простейшей форме ( $q = 1$ ) процесс не может моделировать достаточно длительные кластеры волатильности и порождает большое число выбросов. В то же время с увеличением  $q$  возникают проблемы при оценке параметров модели. Для решения данных проблем была предложена модель GARCH, преимущество которой состоит в ее способности моделировать длительные кластеры волатильности с небольшим числом параметров модели [Суслов, 2005].

**Обобщенная модель ARCH (GARCH, Generalized ARCH)** с параметрами  $p$  и  $q$  задается следующим уравнением:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2$$

Необходимыми условиями существования условной дисперсии  $\sigma_t^2$  являются следующие:  $\omega > 0, \delta_1, \dots, \delta_p \geq 0, \gamma_1, \dots, \gamma_q \geq 0, \sum_{j=1}^p \delta_j + \sum_{i=1}^q \gamma_i < 1$ .

При прогнозировании временных рядов высокую эффективность показывает модель, сочетающая в себе ARMA и GARCH.

Эконометрические модели опираются на множество допущений, наиболее существенной из которых является гипотеза о нормальном распределении ошибок. На практике при анализе финансовых временных рядов данная гипотеза часто нарушается, поскольку распределение ошибок в данном случае имеет большую величину куртозиса [Суслов, 2005]. Это создает определенные трудности при оценивании моделей и ухудшает качество прогноза, что ограничивает возможность применения моделей временных рядов в условиях реального рынка.

## 1.7. Оценка эффективности инвестиционного портфеля

Эффективность инвестиций зависит от того, насколько корректно инвестор оценивает соотношение доходности и риска ценных бумаг, составляющих его инвестиционный портфель.

Существует множество показателей, используемых для оценки соотношения доходности и риска портфеля.

Наиболее популярным среди инвесторов показателем на данный момент является коэффициент Шарпа, рассчитываемый по формуле:

$$S_r = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}, \quad (9)$$

где  $r_p$  — доходность портфеля,  $r_f$  — безрисковая ставка,  $\sigma_p$  — стандартное отклонение доходностей портфеля [Берзон, 2012].

Коэффициент Шарпа показывает, какую дополнительную доходность приносит актив на единицу риска. Если для инвестиционного портфеля  $S_r > 1$ , то можно сделать вывод о высокой степени эффективности управления инвестиционным портфелем. В случае, когда  $S_r < 0$  утверждается, что данное вложение нецелесообразно, поскольку доходность безрискового актива выше доходности портфельных инвестиций. Если же  $0 < S_r < 1$ , то инвестиция может оказаться прибыльной, что в то же время сопряжено с высоким риском [Печенова, 2019].

У коэффициента Шарпа есть несколько недостатков. Во-первых, данный показатель очень чувствителен к значениям доходности и риска. При низкой волатильности актива его стандартное отклонение стремится к нулю, при этом коэффициент Шарпа принимает необоснованно высокие значения. Во-вторых, коэффициент Шарпа учитывает полный риск актива, включая несистематический риск, который может быть устранен за счет диверсификации инвестиций. В-третьих, использование стандартного отклонение доходности в качестве меры риска означает, что колебания доходности актива вверх и вниз от среднего значения рассматриваются как в равной степени плохие. Таким образом, колебания доходности актива в большую сторону снижают коэффициент Шарпа, что интерпретируется как снижение эффективности вложений, несмотря на увеличение доходности актива [Берзон, 2012].

Для учета только рыночного риска актива можно использовать коэффициент Трейнора. Коэффициент Трейнора вычисляется следующим образом:

$$T_r = \frac{r_p - r_f}{\beta_p}, \quad (10)$$

где  $r_p$  — доходность портфеля,  $r_f$  — безрисковая ставка,  $\beta_p$  — бета-коэффициент, рассчитываемый по формуле (7) [Берзон, 2012].

Коэффициент Трейнора показывает, какую дополнительную доходность приносит актив на единицу систематического риска. Чем больше коэффициент Трейнора, тем более эффективно вложение в актив.

Для устранения негативного влияния доходностей выше среднего на величину риска достаточно при расчете меры риска учитывать только отклонения доходностей в меньшую сторону. Данная мысль лежит в основе методологии расчета коэффициента Сортино, в котором показатель риска (полуотклонение, downside sigma, semi-deviation) считается по формуле:

$$\sigma_i^s = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \min(r_{it} - MAR, 0)^2}{T}}, \quad (11)$$

где  $\sigma_i^s$  — полуотклонение доходностей актива  $i$ ,  $T$  — число периодов расчета,  $r_{it}$  — доходность актива  $i$  в момент времени  $t$ ,  $MAR$  (minimum acceptable return) — минимальный требуемый инвестором уровень доходности [Берзон, 2012].

Коэффициент Сортино рассчитывается основе формулы (11):

$$SO_r = \frac{r_i - MAR}{\sigma_i^s}, \quad (12)$$

где  $r_i$  — доходность актива  $i$  [Берзон, 2012].

Возможна также оценка эффективности портфельных инвестиций с точки зрения потенциальных потерь. Для этого используется стоимостная мера риска VaR (Value at Risk, стоимость под риском). VaR является обобщающим статистическим показателем, который отражает потенциальные убытки портфеля, возникающие в результате «нормальных»

движений рынка. Убытки, превышающие VaR, могут наступить с низкой доверительной вероятностью (как правило, с вероятностью от 1% до 5%).

Пусть  $X$  — случайная величина с функцией распределения  $F_X(z) = P(X \leq z)$ , характеризующая убытки. Тогда VaR величины  $X$  с уровнем значимости  $0 < \alpha < 1$  равна [Sarykalin, 2008]:

$$VaR_\alpha(X) = \min\{z | F_X(z) \geq \alpha\} \quad (13)$$

Существует несколько способов расчета VaR [Минашкин, 2011]:

1. Параметрический метод, предполагающий, что доходность акций подчиняется определенному теоретическому распределению с небольшим числом параметров. VaR определяется как квантиль заданной доверительной вероятности для распределения с оцененными параметрами. На практике метод применяется редко, поскольку не всегда можно с достаточной точностью оценить параметры распределения доходностей активов.
2. Метод Монте-Карло, в рамках которого оценивание распределения доходностей происходит путем генерирования большого числа случайных независимых сценариев для каждого фактора, имеющего влияние на портфель. Использование данного метода затрудняется необходимостью в значительных вычислительных мощностях оборудования.
3. Метод исторического моделирования, основанный на предположении о стационарности рынка. Метод предполагает использование статистических данных об изменении доходностей и риска активов, входящих в портфель, за предыдущие временные периоды.

В качестве альтернативы VaR может использоваться коэффициент CVaR (Conditional Value at Risk, условная стоимость под риском). CVaR измеряет потери на хвосте распределения случайной величины убытков и отражает величину потерь, которые могут возникнуть после того, как убытки превысят VaR [Гришина, 2016].

Пусть  $X$  — непрерывная случайная величина с функцией распределения  $F_X(z) = P(X \leq z)$ , характеризующая убытки. CVaR величины  $X$  с уровнем значимости  $0 < \alpha < 1$  равна [Kisiala, 2015]:

$$CVaR_\alpha(X) = E(X | X \geq VaR_\alpha(X)) \quad (14)$$

Целесообразно использовать показатели VaR и CVaR совместно, поскольку комбинация данных коэффициентов может быть применена к оценке риска для несимметричных распределений потерь (с высоким или низким коэффициентом асимметрии) [Гришина, 2016].

Представленные в данном параграфе стоимостные меры риска VaR, CVaR и финансовые коэффициенты Шарпа, Трейнора, Сортино позволяют оценить эффективность инвестиционного портфеля, а также выделить наиболее привлекательные для инвестора активы, опираясь на различные интерпретации понятий доходности и риска.

Проанализировав существующие подходы к формированию инвестиционного портфеля и оценке финансовых активов, можно сделать несколько выводов. Инвестиционный портфель характеризуется такими параметрами как структура, доходность и риск, которые определяются целями инвестора и его склонностью к риску. Инвесторы используют различные стратегии управления портфелями. Ключевыми проблемами при управлении инвестиционным портфелем являются оценка доходности и риска портфеля, адекватная формализация целевой функции инвестора. Решению этих проблем посвящены ряд финансовых теорий и методов.

Так, например, существует множество подходов к оценке ожидаемой доходности активов, каждый из которых опирается на различные гипотезы относительно того, как формируется цена финансовых активов. Однако каждый из предложенных методов обладает рядом недостатков, которые затрудняют применение данных подходов при прогнозировании стоимости активов в условиях реального фондового рынка. Таким образом, возникает необходимость в нахождении более совершенных подходов, которые сочетали бы в себе преимущества классической портфельной теории, методов оценки капитальных активов и методов эконометрического моделирования. На данный момент одним из наиболее перспективных направлений для решения данной проблемы является использование методов машинного обучения, которые рассматриваются в следующей главе.

## **ГЛАВА 2. МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ В ФОРМИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ**

### **2.1. Понятие и классификация машинного обучения**

Машинное обучение представляет собой раздел теории искусственного интеллекта, предметом которого является поиск методов решения задач путем обучения в процессе решения сходных задач [Миронов, 2018]. Теория машинного обучения решает задачи предсказания будущего поведения сложных систем, когда отсутствуют точные гипотезы о механизмах, управляющих поведением таких систем [Выюгин, 2013].

Задачи, решаемые методами машинного обучения, можно обобщить до следующих:

1. Регрессия — предсказание числовых значений признаков.
2. Классификация — предсказание того, к какому из известных классов относится объект.
3. Кластеризация — разделение большого количества объектов на кластеры — группы похожих по признакам объектов.
4. Уменьшение размерности — сведение большого числа признаков к меньшему для удобства их последующего анализа.
5. Поиск аномалий — поиск редких и необычных объектов, существенно выделяющихся из всей выборки.

Методы машинного обучения разделяют на три основные категории [Выюгин, 2013]:

1. Обучение с учителем.
2. Обучение без учителя.
3. Обучение с подкреплением.

**Обучение с учителем (контролируемое обучение, supervised learning)** представляет собой наиболее распространенную категорию задач машинного обучения. Пусть имеется набор данных  $\{(x_n, y_n), n = 1, \dots, N\}$ . Тогда задача машинного обучения с учителем сводится к воссозданию зависимости между входным значением (стимулом)  $x$  и выходным значением (ответом)  $y$  таким образом, чтобы при возникновении нового стимула  $x$  прогнозируемое значение  $\hat{y}$  совпадало с истинным значением  $y$  или было достаточно близко к нему. В качестве меры точности используется функция потерь (loss function), для оценки качества обученной модели также применяются метрики качества. Более предпочтительными считаются модели, для которых значение функции потерь меньше [Barber, 2012].

В рамках обучения с учителем весь первоначально имеющийся набор данных делится на две выборки — обучающую (тренировочную) и тестовую (валидационную). Обучающей выборкой называется выборка, на которой происходит обучение моделей. Тестовая выборка — выборка, используемая для оценки прогнозных качеств модели.

К категории методов машинного обучения с учителем относятся такие алгоритмы, как линейная регрессия, логистическая регрессия, деревья решений, случайный лес, наивный байесовский классификатор, метод k-ближайших соседей, метод опорных векторов [Ковальчук, 2022].

Среди наиболее часто применяемых функций потерь можно назвать следующие: MSE (среднеквадратическая ошибка, Mean Squared Error), RMSE (среднеквадратическое отклонение, Root Mean Squared Error), MAE (средняя абсолютная ошибка, Mean Absolute Error), MAPE (средняя абсолютная ошибка в процентах, Mean Absolute Percentage Error) [Ciampiconi, 2023].

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

где  $N$  — количество наблюдений в выборке,  $y_i$  — истинное значение  $i$ -го наблюдения,  $\hat{y}_i$  — прогнозное значение  $i$ -го наблюдения.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|$$

$$MAPE = \frac{100\%}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}$$

В качестве меры качества моделей машинного обучения при решении регрессионных задач может применяться коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2},$$

где  $\bar{y}$  — среднее значение объясняемого фактора.

Коэффициент детерминации является показателем точности аппроксимации фактических значений моделью и отражает объясненную факторами долю дисперсии зависимой переменной. Чем ближе показатель к единице, тем точнее аппроксимация. Следует заметить, что модель может иметь достаточно высокий  $R^2$  вследствие нестационарности временного ряда, что отчасти затрудняет оценку качества модели [Суслов, 2005]. Однако данный коэффициент может применяться для сравнения качества прогноза модели на обучающей и тестовой выборке.

**Суть обучения без учителя (неконтролируемое обучение, unsupervised learning)** состоит в выявлении значимых закономерностей среди имеющегося набора данных  $D = \{x_n, n = 1, \dots, N\}$  без внешнего контроля (целевая функция не используется). [Barber, 2012] Чаще всего неконтролируемое обучение используется при решении задач кластеризации, то есть задач разделения множества объектов  $D$  на подмножества (кластеры). К основным методам обучения без учителя относят метод k-средних, метод нелинейного снижения размерности и визуализации многомерных переменных, метод главных компонент и ассоциативное правило [Ковальчук, 2022].

В ходе **обучения с подкреплением (reinforcement learning)** испытуемая модель (агент) имеет возможность взаимодействовать с материальной или виртуальной окружающей средой (системой). В ответ на свои действия агент получает от системы обратную связь, так называемые сигналы подкрепления. Сигнал подкрепления будет поощрительным, если действия агента служат достижению заранее поставленной перед ним цели. Модель продолжает предпринимать действия с учетом накопленного опыта до тех пор, пока цель не будет достигнута [Barber, 2012]. Таким образом, обучение с подкреплением представляет собой частный случай обучения с учителем, при этом учителем является система, с которой взаимодействует агент. К обучению с подкреплением относят такие алгоритмы, как Q-Learning, Temporal difference, Deep Adversarial Networks [Ковальчук, 2022].

## 2.2. Обзор методов машинного обучения, применяемых в процессе формирования инвестиционного портфеля

Применение методов машинного обучения в рамках формирования инвестиционного портфеля связано с решением таких задач, как анализ финансовых данных, выявление

закономерностей, кластерный анализ и прогнозирование будущей стоимости финансовых активов.

Задача кластеризации (кластерный анализ) состоит в разделении нескольких объектов на кластеры по схожим признакам. Существует множество методов кластеризации, наиболее популярными среди которых являются следующие: метод k-средних, ЕМ-алгоритм, метод нечеткой кластеризации c-средних, генетический алгоритм, DBSCAN. Наиболее простым среди данных методов является метод k-средних, точность кластеризации которого, как правило, уступает точности более совершенных методов. Однако у метода k-средних есть существенные преимущества, которые заключаются в высокой скорости и простоте алгоритма кластеризации [Jain, 2010; Na, 2010]. Как показывают многочисленные исследования, использование метода k-средних для решения задачи кластеризации финансовых активов является достаточным и целесообразным.

**Метод k-средних (k-means)** получил широкое распространение после публикации работы Джеймса Маккуина в 1967 году. Суть метода заключается в разделении  $N$  элементов выборки  $X_{N \times P} = \{x_{ij}\}_{N \times P}$  на  $K$  кластеров  $C_1, C_2, \dots, C_K$ , где  $C_k$  — набор  $n_k$  элементов исходной выборки, путем минимизации функции расстояния [Steinley, 2007].

Пусть  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$  — центры, соответствующие кластерам  $C_1, C_2, \dots, C_K$  (центроиды) и представляющие собой векторы длины  $P$ . Исходное расположение центров определяется произвольным образом. Пошагово алгоритм представляется следующим образом [Steinley, 2007]:

1. Определить принадлежность каждого элемента имеющейся выборки к ближайшему кластеру. В качестве меры близости используется квадрат Евклидова расстояния.

$$x_n \in C_{z_n}, \text{ если } z_n = \arg \min_k \sum_{j=1}^P (x_{ij} - \mu_k)^2$$

2. Пересчитать точки центров кластеров по следующему правилу:

$$\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{x_n \in C_k} x_n$$

Алгоритм повторяется до тех пор, пока не будет достигнута точка сходимости (в этом случае центры кластеров перестают перемещаться при повторении алгоритма). Формально алгоритм может быть представлен как задача минимизации функции потерь [Steinley, 2007]:

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^K \sum_{x_n \in C_k} (x_{ij} - \mu_k)^2 \rightarrow \min$$

Параметры кластеризации должны быть равны в возможностях своего влияния на результат кластеризации, поэтому параметры кластеризации необходимо предварительно масштабировать путем нормализации. Для этого все значения в рамках каждого из параметров приводятся к отрезку от 0 до 1. Минимальное значение параметра при этом становится равным 0, максимальное — 1.

Использование метода k-средних для формирования групп ценных бумаг на этапе предварительного отбора акций является целесообразным по нескольким причинам. Во-первых, такой подход позволяет отобрать небольшой набор наиболее привлекательных по соотношению доходности и риска акций. Во-вторых, кластеризация активов может способствовать большей диверсификации оптимального портфеля. Как следствие, применение кластеризации методом k-средних позволяет сформировать более эффективные инвестиционные портфели, доходность которых, как правило, превышает доходность рыночного индекса [Тюхова, 2019].

Наиболее точно выявлять неочевидные и нелинейные закономерности среди выборочных данных позволяют искусственные нейронные сети, которые зачастую выделяют в отдельную группу методов машинного обучения — глубокое обучение (deep learning).

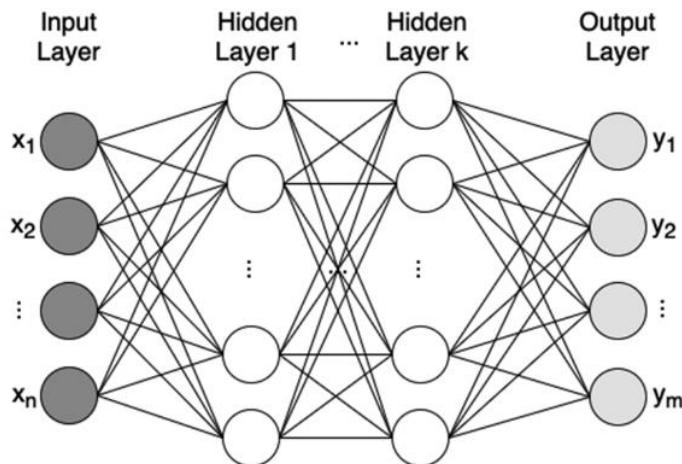
**Нейронные сети (Artificial neural network, ANN)** применяются для решения многих задач машинного обучения, но наибольший интерес с точки зрения применения нейронных сетей при формировании инвестиционного портфеля представляют их возможности по прогнозированию финансовых временных рядов.

Концепция искусственных нейронных сетей появилась в 1943 году с публикацией статьи У. Маккалока и У. Питтса о нервной активности, в которой было впервые сформулировано понятие нейронной сети и предложена модель нейронной сети на электронных схемах. Дальнейшее развитие нейронных сетей столкнулось с проблемами

недостаточных вычислительных мощностей компьютерных процессоров и отсутствия эффективных методов обучения сложных нейронных сетей [Горбачевская, 2015]. С появлением доступных для широкой аудитории микропроцессоров и развитием теоретических аспектов нейронных сетей их применение в рамках портфельного инвестирования представляется целесообразным.

Искусственная нейронная сеть представляет собой математическую модель,строенную по принципу центральной нервной системы и состоящую из простых процессоров, называемых искусственными нейронами. Искусственные нейроны принимают на вход информацию из внешней среды или от других нейронов, обрабатывают ее по определенному правилу и передают получившееся значение дальше по сети [Vui, 2013].

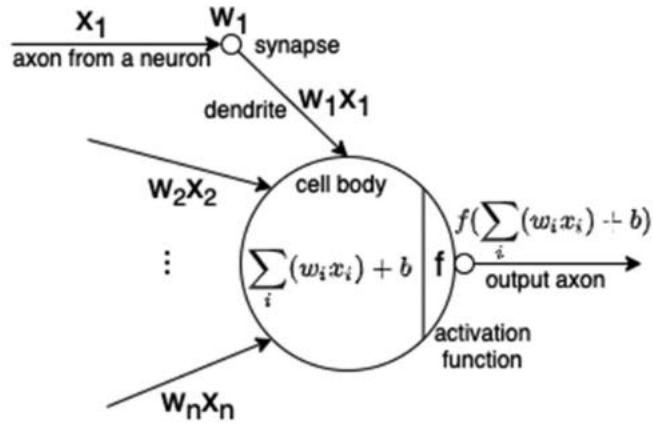
Искусственные нейронные сети состоят из нескольких слоев, в каждый из которых входит как минимум один нейрон. Как правило, нейронные сети состоят из входного слоя (input layer), одного или нескольких скрытых слоев (hidden layer), выполняющих основные вычислительные операции, и выходного слоя (output layer). Наиболее простой и распространенной архитектурой нейронной сети является многослойный перцептрон (рис. 7) [Vui, 2013].



Источник: [Srinivasan, 2021]

Рисунок 7 — Пример архитектуры многослойного перцептрана с  $k$  скрытыми слоями

Для перцептрана характерна такая схема связи между нейронами, при которой каждому нейрону следующего слоя передается взвешенная сумма выходов всех нейронов предыдущего (рис. 8). Искусственный нейрон подавляет или усиливает входной сигнал, передавая его дальше по сети, что достигается за счет предварительной обработки выходного сигнала нейрона нелинейной функции активации. Функция активации позволяет моделировать сложные зависимости внутри нейронной сети [Vui, 2013].



Источник: [Srinivasan, 2021]

Рисунок 8 — Схема искусственного нейрона

Пусть на вход нейрона поступает кортеж действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тогда выходной сигнал нейрона представляется следующим образом:

$$a = f \left( \sum_{i=1}^n w_i x_i + b \right),$$

где  $f$  — функция активации,  $b$  — смещение (bias),  $w_i$  — веса модели.

Обучение нейронной сети заключается в нахождении коэффициентов связи между нейронами, то есть определения таких  $b$  и  $w_i$ , которые обеспечивают наилучшие предсказательные способности модели [Ростовцев, 2019].

Среди наиболее часто используемых функций активаций можно назвать следующие [Ameya, 2022]:

1. Сигмоидальная функция (sigmoid function)

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

## 2. Гиперболический тангенс ( $\tanh$ )

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

## 3. ReLU (rectified linear unit)

$$ReLU(x) = \max\{0; x\}$$

В настоящее время для обучения многослойной нейронной сети применяется метод обратного распространения ошибки (error backpropagation algorithm). В рамках данного метода функция потерь минимизируется с помощью метода градиентного спуска путем изменения значений весов в сети. На первом этапе рассчитывается выходное значение сети (прогноз). После этого рассчитывается ошибка на входе в выходной слой сети, которая в то же время используется как ошибка на выходе последнего скрытого слоя. Расчет продолжается до тех пор, пока не будет подсчитана ошибка на входном слое сети. Для того, чтобы оценить, насколько сильно каждый вес влияет на выходное значение модели, рассчитываются частные производные ошибки по весам, после чего веса изменяются с учетом значения градиента (градиентный спуск):

$$w_{i+1} = w_i - \eta \frac{\partial C}{\partial w},$$

где  $w_i$  — веса модели на шаге обучения  $i$ ,  $\eta$  — неотрицательный параметр, отвечающий за скорость обучения,  $C$  — функция потерь [Созыкин, 2017; Yi, 2020].

Алгоритм обучения повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто достаточно малое значение функции потерь (приемлемое значение предварительно определяется исследователем) или не пройдет фиксированное число итераций (эпох) [Ростовцев, 2019].

Существует несколько вариантов реализации метода обратного распространения ошибки. Наиболее эффективным подходом на данный момент считается метод обратного распространения ошибки с применением метода стохастического градиентного спуска,

позволяющим производить обучение сети при обработке одного элемента или нескольких элементов обучающей выборки. Одной из самых распространенных на практике модификаций стохастического градиентного спуска является метод адаптивной оценки моментов (Adam, Adaptive Moment Estimation) [Созыкин, 2017; Yi, 2020].

Основная проблема в процессе обучения нейронной сети заключается в эффекте переобучения. Переобучение выражается в том, что с увеличением итераций погрешность обобщения (ошибка модели на тестовой выборке) снижается только до определенного предела, а затем начинает возрастать, в то время как погрешность обучения (ошибка модели на обучающей выборке) монотонно уменьшается. Считается, что эффект переобучения возникает в случае чрезмерно детальной адаптации весов нейронов к несущественным колебаниям примеров обучающей выборки, что может быть связано, например, с избыточной сложностью модели.

Одним из способов борьбы с переобучением является регуляризация, суть которой состоит в добавлении дополнительных ограничений к функции потерь. Среди основных видов регуляризации выделяют следующие [Ghojogh, 2023]:

1. L1-регуляризация (lasso regularization):

$$C_1(X, y, w) = C_0(X, y, w) + \lambda \sum_{i=1}^n |w_i|$$

где  $C_0$  — функция потерь,  $C_1$  — функция потерь с регуляризацией,  $\lambda$  — неотрицательный параметр (коэффициент регуляризации).

2. L2- регуляризация (ridge regularization, Tikhonov regularization):

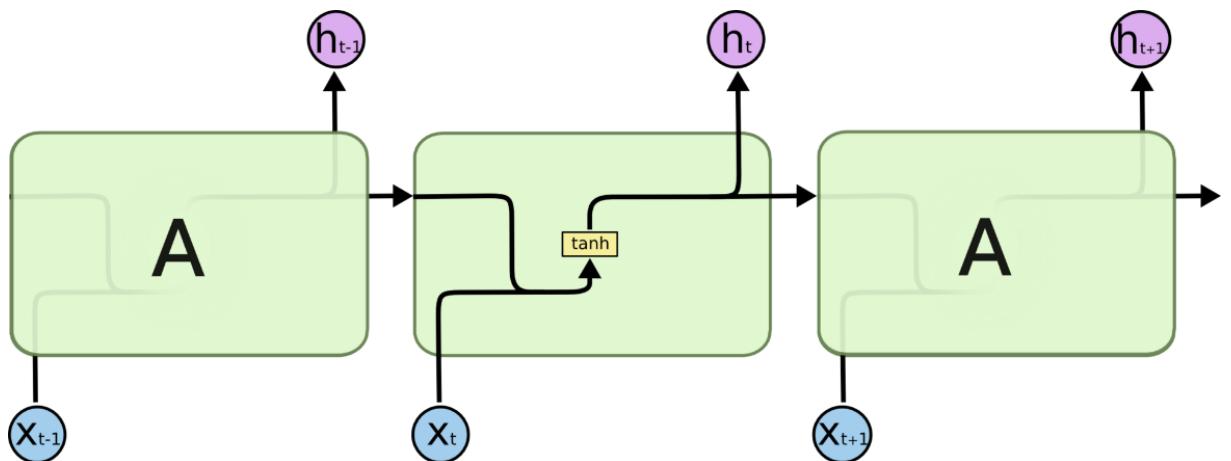
$$C_1(X, y, w) = C_0(X, y, w) + \lambda \sum_{i=1}^n {w_i}^2$$

где  $C_0$  — функция потерь,  $C_1$  — функция потерь с регуляризацией,  $\lambda$  — неотрицательный параметр (коэффициент регуляризации).

В настоящий момент широкое распространение для прогноза временных рядов приобретают рекуррентные нейронные сети (RNN) и, в частности, сети долгой краткосрочной памяти (LSTM). Среди наиболее значимых преимуществ RNN перед эконометрическими моделями временных рядов можно назвать отсутствие требования на стационарность временного ряда и способность находить сложные закономерности в последовательных пространственных цепочках.

**Рекуррентные нейронные сети (Recurrent neural network, RNN)** представляют собой один из видов нейронных сетей, в которых связи между элементами образуют направленную последовательность. Данная особенность RNN позволяет эффективно обрабатывать серии последовательных во времени событий. Кроме того, RNN могут использовать внутренние ячейки памяти для обработки последовательностей произвольной длины, что позволяет с большой эффективностью обрабатывать данные, для которых важен контекст: аудио, тексты, временные ряды [Гафаров, 2018].

На рис. 9 представлен пример нескольких модулей простой рекуррентной нейронной сети, каждый из которых состоит из одного слоя с функцией активации  $\tanh$ .



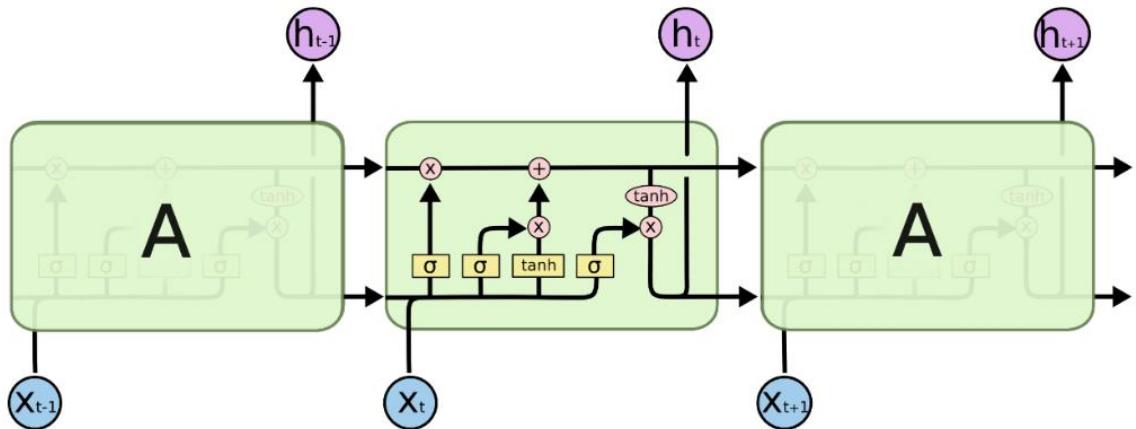
Источник: [Гафаров, 2018]

Рисунок 9 — Простая рекуррентная нейронная сеть с функцией активации  $\tanh$

Из-за рекуррентных связей для обучения рекуррентной нейронной сети метод обратного распространения ошибки необходимо модифицировать. С этой целью применяется метод обратного распространения ошибки сквозь время (error backpropagation through time). Для использования данного метода рекуррентная нейронная сеть разворачивается путем создания копий нейронов, имеющих рекуррентные связи. Разворнутая сеть может оказаться чрезмерно глубокой, из-за чего возникают проблемы исчезающего градиента (vanishing

gradient problem), когда веса в модели оказываются очень маленькими, и взрывного градиента (exploding gradient problem), когда веса в модели, наоборот, очень большие [Lillicrap, 2019].

Проблемы затухающего и взрывного градиента решаются путем применения **рекуррентных нейронных сетей с долгой краткосрочной памятью (LSTM)**, которые на данный момент являются наиболее распространенной архитектурой RNN. Пример структуры сети LSTM изображен на рис. 10.



Источник: [Гафаров, 2018]

Рисунок 10 — Сеть LSTM

Сети долгой краткосрочной памяти спроектированы таким образом, чтобы избежать проблемы долгосрочных зависимостей, которая заключается в том, что с каждым новым циклом обучения нейронной сети возрастает вероятность утраты значимости ранее полученной информации на новом цикле обучения сети. Принцип работы LSTM связан с пятью ключевыми компонентами ячеек LSTM (рис. 11) [Гафаров, 2018]:

1. Клеточное состояние.
2. Слой утраты.
3. Входной слой.
4. Слой гиперболического тангенса.
5. Выходной слой.

**Состояние клетки (cell state)** — внутренняя память ячейки, в которой хранится долгосрочная и краткосрочная память.

**Слой утраты (forget gate layer)** формирует оценочный вектор, определяющий информацию, которую необходимо выбросить из клеточного состояния.

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f),$$

где  $\sigma$  — сигмоидальная функция активации,  $W_f$  — матрица весов слоя утраты,  $h_{t-1}$  — предсказание прошлого слоя,  $x_t$  — новая входная информация,  $b_f$  — смещение слоя утраты.

**Входной слой (input gate layer)** определяет, сколько информации от новой входной информации поступит в состояние ячейки.

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i),$$

где  $W_i$  — матрица весов входного слоя,  $b_i$  — смещение входного слоя.

**Слой гиперболического тангенса (tanh-слой)** строит вектор значений, являющихся кандидатами на новые значения, которые впоследствии будут добавлены в состояние ячейки.

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C),$$

где  $W_C$  — матрица весов tanh-слоя,  $b_C$  — смещение tanh-слоя.

Перечисленные выше слои необходимы для обновления состояния клетки:

$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t,$$

где  $C_t$  — новое состояние клетки,  $C_{t-1}$  — предыдущее состояние клетки.

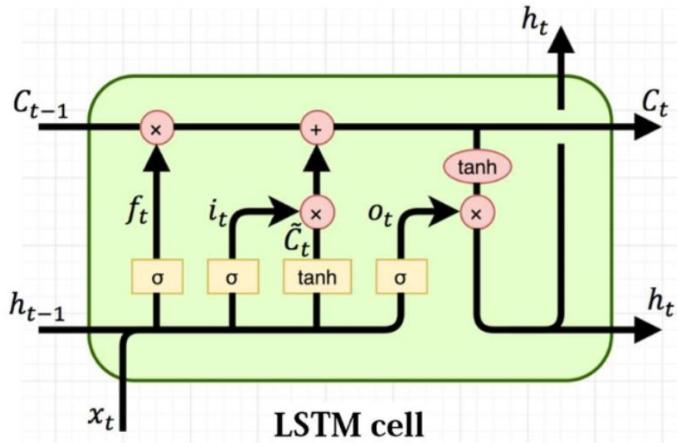
**Выходной слой (output gate layer)** определяет, сколько информации текущего клеточного состояния подать на выход ячейки.

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o),$$

где  $W_o$  — матрица весов tanh-слоя,  $b_o$  — смещение tanh-слоя.

$$h_t = o_t * \tanh(C_t),$$

где  $h_t$  — вектор выходных значений.



Источник: [Savvas, 2018]

Рисунок 11 — Схема ячейки LSTM

Существуют исследования, согласно которым наибольший прирост точности прогноза LSTM получается в результате перехода от архитектуры с одним скрытым слоем к архитектуре с двумя скрытыми слоями. Отмечается также, что модели LSTM способны достаточно точно предсказывать поведение тренда для нестационарных рядов при среднесрочном прогнозе [Горшенин, 2020].

Точность прогноза в немалой степени зависит от применяемой стратегии прогнозирования. Выделяют пять стратегий прогнозирования временных рядов с помощью RNN [Taieb, 2011]:

1. **Рекурсивная стратегия (recursive strategy).** Прогноз осуществляется путем циклического добавления полученного прогноза на вход модели на следующем шаге. Рекурсивная стратегия подходит только для прогнозов на короткий период, поскольку с каждым новым значением прогноза накапливается ошибка прогноза.

2. **Прямая стратегия (direct strategy).** Для прогноза осуществляется обучение  $H$  моделей, каждая из которых используется для прогноза на  $i$ -ое значение прогнозного периода ( $i = \{1, \dots, H\}$ ). У прямой стратегии прогнозирования отсутствует проблема накопления ошибки прогноза, однако существуют другие проблемы. Полученные модели могут ошибаться в формировании тренда, поскольку прогноз осуществляется независимо. Кроме того, метод

требует обучения  $H$  моделей вместо одной, что затрудняет его использование при ограниченных вычислительных ресурсах.

3. **DirRec стратегия** является комбинацией рекурсивной и прямой стратегии. Прогноз на каждое значение прогнозного периода осуществляется с помощью  $H$  моделей с тем изменением, что на каждом шаге прогноза набор входных данных увеличивается путем включения прогноза, полученного на предыдущем шаге.

4. **MIMO стратегия (Multi-Input Multi-Output strategy)** предполагает, что выход RNN является вектором с длиной, соответствующим прогнозному периоду. Данная стратегия прогнозирования является наиболее популярной, поскольку сохраняет стохастическую зависимость между прогнозируемыми значениями, тем самым формируя тренд и избегая проблемы накопления ошибки. Существует и недостаток: для расширения горизонта прогнозирования необходимо переобучать модель заново.

5. **DIRMO стратегия** сочетает в себе прямую стратегию и MIMO стратегию. Прогнозный период разбивается на  $H$  блоков, значения в рамках которого прогнозируются с помощью MIMO стратегии.

Как показывает сравнительный анализ стратегий прогнозирования, наилучшей точностью обладают стратегии с множественным выходом (MIMO и DIRMO). Однако существенными недостатками DIRMO стратегии являются низкая производительность и высокая чувствительность к выбору количества блоков  $H$ . Таким образом, стратегия MIMO является наиболее эффективной и популярной стратегией при построении прогноза на несколько наблюдений вперед [Taieb, 2011].

### **2.3. Технология формирования инвестиционного портфеля с использованием методов машинного обучения**

В данном параграфе предлагается технология формирования инвестиционного портфеля, которая позволяет избежать ряда проблем при осуществлении портфельного инвестирования. Эти проблемы можно сформулировать следующим образом:

1. **Отбор акций в портфель.** Проблема состоит в том, что в портфель инвестору необходимо выбрать небольшое число активов (как правило, от 10 до 20), в то время как общее их число может достигать нескольких сотен. При этом выбирать следует активы, которые обеспечивают достижение желаемого для инвестора уровня дохода при приемлемом риске.

2. **Оценка параметра доходности финансовых инструментов.** В рамках портфельной теории Г. Марковица оценкой ожидаемой доходности акции на конец инвестиционного

периода считается средняя арифметическая величина ее доходности в предыдущие периоды. Однако данный подход обладает множеством недостатков.

**3. Недостаточная эффективность диверсификации.** Согласно современной теории, несистематический риск активов в портфеле может быть устранен за счет эффекта диверсификации. Отсутствие диверсификации инвестиционного портфеля или ее недостаточность может привести к большим убыткам при негативных движениях рынка.

Для решения данных проблем в данной работе предлагается:

1. Проводить отбор финансовых активов в портфель с применением кластеризации методом k-средних по множеству параметров (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение, полуотклонение, бета-коэффициент, и параметры эффективности). Это позволит отобрать ограниченный набор наилучших по соотношению доходности и риска активов.
2. Оценивать будущую курсовую стоимость акций с помощью рекуррентных нейронных сетей долгой краткосрочной памяти (LSTM), что позволит получить более точную оценку доходности активов.
3. Определять оптимальный портфель в сочетании с классической портфельной теорией Г. Марковица или ее современными модификациями для снижения риска портфеля за счет эффекта диверсификации.

Таким образом, процедура формирования инвестиционного портфеля с использованием предлагаемых методов машинного обучения имеет следующий вид:

1. Определение целей инвестора.
2. Формулирование инвестиционной стратегии инвестора.
3. Определение структуры портфеля относительно секторов экономики с использованием метода k-средних.
4. Выбор набора акций с использованием метода k-средних в рамках каждого выбранного сектора.
5. Оценка ожидаемой доходности акций с помощью LSTM.
6. Определение корреляционных связей между доходностями рисковых активов на основе исторических данных для учета эффекта диверсификации.
7. Определение оптимального портфеля с использованием методов нелинейного программирования с учетом рискового профиля инвестора.

## 8. Тестирование параметров оптимального инвестиционного портфеля методом Монте-Карло на соответствие цели и стратегии инвестора.

Под технологией формирования инвестиционного портфеля в данной работе понимается система, включающая в себя предложенную процедуру формирования портфеля, а также инструменты, разработанные автором с использованием языка программирования Python.

Для написания и запуска программного кода использовались интерактивные среды разработки Jupyter Notebook и Visual Studio Code. В рамках работы применялись следующие библиотеки языка Python:

1. `yfinance` — для получения публичной информации об акциях индекса S&P 500.
2. `NumPy, pandas` — для обработки данных и работы с многомерными массивами.
3. `scikit-learn` — для нормализации данных и кластеризации.
4. `TensorFlow, Keras` — для построения и обучения рекуррентных нейронных сетей.
5. `SciPy` — для нелинейной оптимизации на этапе нахождения весов в оптимальном портфеле.
6. `plotly` — для визуализации данных.

Разработанный инструментарий включает в себя следующие основные элементы:

1. `load_history` — функция для получения публичной информации об акциях.
2. `calculate_measures` — функция для расчета параметров кластеризации.
3. `kmeans` — функция для кластеризации методом k-средних.
4. `plot_kmeans` — функция для визуализации кластеров.
5. `efficient_portfolio` — функция для нелинейной оптимизации параметров портфеля.
6. `optimize_portfolios` — функция для построения границы эффективных портфелей.
7. `select_portfolio` — функция для определения оптимального портфеля и визуализации данного процесса.
8. `simulate_portfolios` — функция для симуляции изменения стоимости портфеля методом Монте-Карло.
9. `test_portfolio` — функция для тестирования оптимального портфеля на устойчивость.

10. `plot_predict` — функция для визуализации базового сценария, доверительного интервала для базового сценария и прогноза накопленной доходности портфеля.

11. `plot_var` — функция для визуализации значений VaR и CVaR.

12. `plot_probability` — функция для расчета и визуализации вероятности получения ожидаемой доходности.

13. `TickerModel` — класс, используемый для подготовки данных к обучению, определения гиперпараметров LSTM, обучения моделей, сохранения и загрузки моделей, построения прогноза.

Реализация данного инструментария в виде программного кода представлена в приложении А.

## **ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ**

В данной главе представлен процесс применения предложенной технологии для формирования инвестиционного портфеля, состоящего из акций фондового индекса S&P 500, для умеренно-агрессивного инвестора.

### **3.1. Подготовка данных**

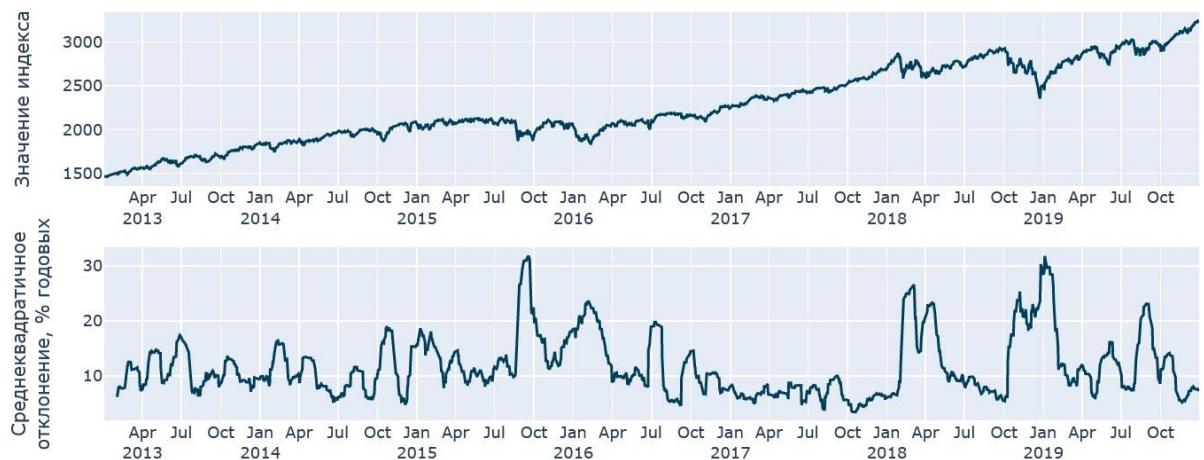
**Определение целей инвестора.** Обычно выделяют такие инвестиционные цели, как максимизация роста капитала, максимизация роста дохода, минимизация риска и обеспечение требуемой ликвидности портфеля. В данной главе рассмотрен пример инвестора, целью которого выступает максимизация роста капитала, поскольку данная цель, как правило, является наиболее приоритетной для частного инвестора.

**Формулирование инвестиционной стратегии инвестора.** Формулирование инвестиционной стратегии предполагает определение рискового профиля инвестора. В качестве примера предлагается рассмотреть случай, когда рисковый профиль инвестора является умеренно-агрессивным. Умеренно-агрессивный инвестор рассчитывает на получение дохода за счет роста капитала в длительной перспективе и готов пойти на вложения в высокодоходные ценные бумаги, однако подстраховывает себя вложениями в защитные активы. В работе рассматривается только рисковая часть инвестиционного портфеля такого инвестора. Умеренно-агрессивному инвестору соответствует портфель со средней доходностью при умеренном риске, то есть портфель среднего роста.

Для формализации рискового профиля инвестора в работе предлагается использовать кривые безразличия, задающиеся функцией полезности Неймана-Моргенштерна. По результатам нескольких экспериментов было установлено, что оптимальным значением параметра  $A$ , который отражает склонность инвестора к риску, является 100. Данное значение было выбрано с той позиции, что заданные таким образом кривые безразличия инвестора в среднем определяли оптимальный портфель со средним доходом при умеренном риске, что соответствует целям и стратегии умеренно-агрессивного инвестора.

**Определение репрезентативного периода.** При определении репрезентативного периода было принято решение исходить из гипотезы о том, что инвестор желает сформировать такой портфель, который обеспечит ему наилучшие показатели доходности и риска, при этом учитывая, что на рынке должны существовать приемлемые условия для инвестирования, отсутствовать нестабильность и экономические шоки.

Таким образом, в качестве репрезентативного периода был выбран временной интервал с 1 января 2013 года по 30 декабря 2019 года, а в качестве рынка — фондовый рынок США. Поскольку рассматривать весь фондовый рынок в целом представляется нецелесообразным и трудоемким, было решено использовать только акции, входящие в фондовый индекс широкого рынка S&P 500. Выбор данного индекса обусловлен еще и тем, что он наиболее полно отражает периоды стабильности и волнений на фондовом рынке США (рис. 10). Индекс S&P 500 состоит из 500 высоколиквидных акций, эмитентами которых выступают компании США с капитализацией не менее 8,2 млрд. долларов, имеющие положительную прибыль за последний квартал и более 50% акций в обращении.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 12 — Динамика значения и среднеквадратичного отклонения доходностей индекса S&P 500 за период с 01.01.2013 по 30.12.2019

**Определение источника и состава данных.** Источником для получения необходимых данных был выбран провайдер финансовой информации Yahoo! Finance, предоставляющий актуальную и детальную справочную информацию об акциях, представленных на фондовом рынке США. Для проведения дальнейших расчетов с помощью публичного API библиотеки yfinance для всех акций, входящих в индекс S&P 500, были получены следующие данные:

1. Общая информация об акциях и их эмитентах.
2. Ежедневные скорректированные котировки закрытия акций (с учетом дивидендов и сплитов).
3. Ежедневные объемы торгов акциями.
4. Ежедневные максимальные котировки за торговый день.

## 5. Ежедневные минимальные котировки за торговый день.

Минимальная длина исторических данных составила 152 наблюдения, максимальная (полная) — 1761 наблюдение. Поскольку размер обучающей выборки влияет на качество прогноза LSTM, было принято решение оставить только те акции, для которых имеется полный набор наблюдений (1761 наблюдение). Таким образом, в исходную выборку вошли 460 акций индекса S&P 500.

Для подсчета бета-коэффициента с помощью библиотеки yfinance также были получены ежедневные значения индекса S&P 500 за период с 1 января 2013 года по 30 декабря 2019 года (1761 наблюдение).

**Преобразование данных.** Предварительная обработка необходима для приведения исторических данных к такому виду, который позволит использовать применяемые в работе методы кластеризации и прогнозирования.

Для каждой акции индекса S&P 500, а также для самого индекса, были рассчитаны векторы доходностей с использованием следующей формулы:

$$r_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}},$$

где  $P_{i-1}$  и  $P_i$  — стоимости актива в период  $i - 1$  и  $i$  соответственно (в качестве периода использовались дневные котировки).

Для отбора акций в портфель методом k-средних для каждой акции из исходной выборки были рассчитаны показатели, используемые в качестве параметров кластеризации:

1. Средняя доходность акции за период с 28.11.2018 по 27.11.2019.
2. Стандартное отклонение доходности акции за период с 28.11.2018 по 27.11.2019.
3. Полуотклонение доходности акции за период с 28.11.2018 по 27.11.2019, рассчитанное по формуле (11), где за величину MAR было использовано значение 0.
4. Показатель VaR на уровне значимости 5% за период с 01.01.2013 по 27.11.2019, который был рассчитан по формуле (13) методом исторического моделирования.
5. Показатель CVaR на уровне значимости 5% за период с 01.01.2013 по 27.11.2019, рассчитанный по формуле (14) на основе VaR.

6. Бета-коэффициент акции, рассчитанный за период с 28.11.2018 по 27.11.2019 по формуле (7), где в качестве рыночного портфеля используется индекс S&P 500.
7. Коэффициент Шарпа, который был рассчитан по формуле (9) без учета безрисковой ставки ( $r_f = 0$ ).
8. Коэффициент Трейнора — по формуле (10) без учета безрисковой ставки.
9. Коэффициент Сортино — по формуле (12).

Также данные показатели масштабируются в соответствии с длиной прогнозного периода (21 торговый день).

Особое внимание необходимо уделить процедуре преобразования данных, используемых для обучения рекуррентных нейронных сетей и построения прогноза. Процедура преобразования зависит от выбранной стратегии прогнозирования. В данной работе используется стратегия MIMO, поскольку она позволяет достичь высокой точности прогноза при небольших затратах вычислительных ресурсов.

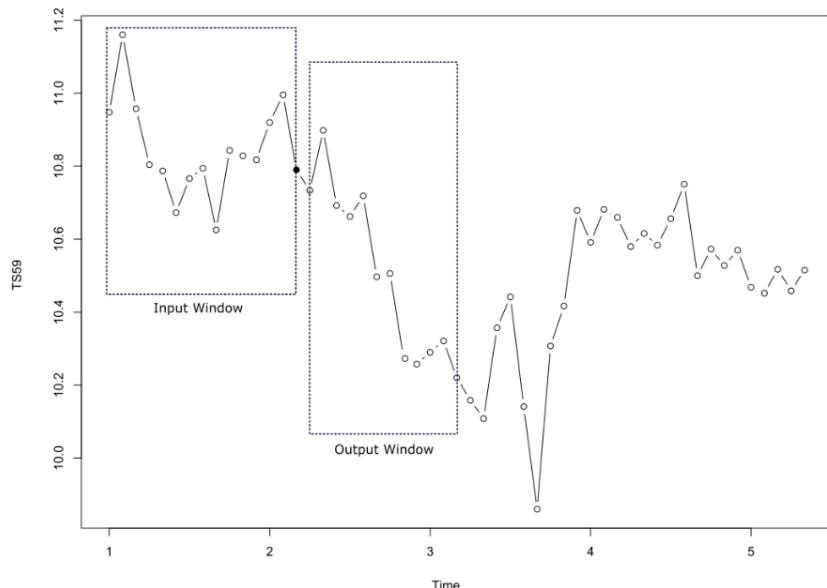
На первом шаге применяется базовое преобразование для стабилизации дисперсии значений временного ряда. В качестве базового преобразования используется функция натурального логарифма:

$$\tilde{x}_i = \ln(x_i), \quad (15)$$

где  $\tilde{x}_i$  —  $i$ -ое значение временного ряда после применения базового преобразования,  $x_i$  — исходное значение ряда.

Таким образом, исторические значения скорректированных дневных котировок, объемов торгов, максимальных и минимальных котировок для каждой акции преобразуются согласно формуле (15).

На втором шаге преобразованные значения ряда обрабатываются методом скользящего окна. Для этого временной ряд длины  $N$  преобразуется в  $N - I - O$  векторов длины  $I + O$ , где  $I$  — длина входного окна, используемого в каждом фрагменте  $i$  обучающей выборки  $X_i$ ,  $O$  — длина выходного вектора  $y_i$  (рис. 13). [Bandara, 2020]



Источник: [Bandara, 2020]

Рисунок 13 — Пример применения метода скользящего окна

В рамках данной работы значения скорректированных котировок разбиваются на фрагменты  $X_i$  и  $y_i$  длины 252 и 21 соответственно. Остальные временные ряды также разбиваются на фрагменты длины 252 и 21, однако  $y_i$  для данных временных рядов не используется, поскольку целевой переменной являются скорректированные котировки. Таким образом, входная матрица  $X$  размерности 252 на 4 задает временной лаг в 252 наблюдения. Такой временной лаг позволит LSTM учесть сезонные колебания в рамках года при прогнозе будущих котировок (252 торговых дня составляют 1 год). Длина выходного вектора в 21 наблюдение выбрана с той позиции, что период длиной в месяц, как правило, является минимальной границей для инвестиционной сделки (21 торговый день составляет 1 месяц). Если период прогноза меньше месяца, то принято говорить о трейдинге (краткосрочной спекулятивной торговле), при этом увеличение инвестиционного горизонта осложняется значительным уменьшением качества прогноза. Также необходимо отметить, что стратегия прогнозирования MIMO позволяет инвестору без переобучения моделей использовать прогноз котировок не на месяц вперед (на последнее, 21 наблюдение), а на любой день в рамках месячного прогноза (от 1 до 21 дня).

На третьем шаге выборка разделяется на обучающую и тестовую. Также предполагается выделение изолированной выборки, которая используется для демонстрации процесса формирования оптимального портфеля. В работе используется разделение выборки на обучающую и тестовую в пропорции 80% и 20% (за исключением изолированной выборки).

Таким образом, массивы  $X$  и  $y$  размерностей (1489, 252, 4) и (1489, 21) соответственно разделяются на три выборки: обучающую (1136 наблюдений), тестовую (351 наблюдение) и изолированную от двух предыдущих выборку (1 наблюдение), которая соответствует данным за период с 29.11.2019 по 30.12.2019.

На завершающем шаге данные нормализуются с использованием формулы:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \min(X)}{\max(X) - \min(X)},$$

где  $\tilde{x}_i$  —  $i$ -ое значение временного ряда после нормализации,  $x_i$  —  $i$ -ое значение временного ряда до нормализации,  $X$  — вектор значений обучающей выборки.

### 3.2. Процесс формирования инвестиционного портфеля

**Определение инструментов инвестирования.** Перед формированием инвестиционного портфеля необходимо определить набор акций, из которых он будет состоять. Было доказано, что большую долю эффекта диверсификации портфелю приносят лишь первые несколько включенных в портфель активов. С увеличением количества акций в портфеле риск снижается, но с более низкими темпами. [Elton, 1977]

Согласно предложенной процедуре формирования инвестиционного портфеля, первым этапом в выборе активов является выбор секторов экономики с использованием кластеризации методом k-средних. Акции, входящие в индекс S&P 500, сгруппированы по 11 секторам:

1. Информационные технологии (information technology).
2. Здравоохранение (health care).
3. Товары второй необходимости (consumer discretionary).
4. Коммуникационные услуги (communication services).
5. Финансовый сектор (financials).
6. Промышленный сектор (industrials).
7. Товары первой необходимости (consumer staples).
8. Коммунальный сектор (utilities).
9. Недвижимость (real estate).

10. Нефтегазовый сектор (energy).

11. Сырьевой сектор (materials).

На рис. 14 и рис. 15 представлены таблицы со средней доходностью и стандартным отклонением секторов индекса S&P 500, а также самого индекса за выбранный временной интервал. Для расчета показателей использовалось среднее значение показателей по всем акциям, относящимся к сектору.

	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2013-2019
Communication Services	53.46%	12.74%	18.40%	20.67%	22.53%	3.79%	31.53%	23.29%
Consumer Discretionary	37.54%	15.18%	9.46%	9.82%	26.48%	-5.01%	31.02%	17.77%
Consumer Staples	25.93%	18.82%	13.55%	7.44%	13.26%	-4.56%	26.88%	14.47%
Energy	35.84%	-0.24%	-25.23%	41.34%	2.42%	-19.34%	13.16%	6.85%
Financials	38.12%	12.14%	5.09%	21.87%	23.17%	-8.11%	32.49%	17.82%
Health Care	37.95%	26.80%	13.46%	4.47%	27.24%	9.04%	27.67%	20.94%
Industrials	37.40%	16.43%	-0.99%	26.12%	26.28%	-7.63%	32.78%	18.62%
Information Technology	34.65%	25.40%	4.71%	21.59%	35.43%	5.97%	44.83%	24.64%
Materials	20.04%	8.74%	-4.14%	29.07%	25.68%	-12.54%	25.20%	13.15%
Real Estate	4.49%	29.40%	9.32%	9.31%	14.27%	-0.38%	26.39%	13.26%
Utilities	13.16%	26.08%	-3.56%	19.40%	14.62%	7.46%	23.87%	14.43%
S&P 500	24.11%	11.43%	0.47%	9.96%	18.05%	-5.01%	25.97%	12.13%

*Источник: составлено автором*

Рисунок 14 — средняя годовая доходность секторов индекса S&P 500

	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2013-2019
Communication Services	27.67%	25.04%	26.49%	25.82%	21.85%	31.76%	25.96%	26.80%
Consumer Discretionary	26.15%	24.76%	27.74%	27.74%	22.79%	30.66%	27.40%	27.17%
Consumer Staples	18.43%	17.68%	20.35%	21.07%	18.13%	24.79%	21.92%	20.74%
Energy	24.53%	27.77%	35.91%	42.05%	23.66%	31.34%	31.70%	32.11%
Financials	19.38%	18.06%	21.80%	24.00%	16.48%	23.28%	21.08%	20.85%
Health Care	23.52%	23.65%	26.14%	26.85%	21.75%	27.96%	26.74%	25.59%
Industrials	21.49%	21.42%	24.82%	24.22%	19.13%	27.21%	24.31%	23.61%
Information Technology	27.78%	27.03%	30.43%	31.65%	24.03%	33.37%	30.40%	29.74%
Materials	23.38%	21.84%	29.01%	30.81%	21.19%	27.43%	26.24%	26.25%
Real Estate	20.61%	16.49%	21.34%	23.20%	16.80%	21.55%	18.07%	19.98%
Utilities	15.53%	16.84%	21.28%	19.99%	14.31%	21.15%	19.76%	19.34%
S&P 500	10.82%	11.37%	15.49%	13.09%	6.69%	17.05%	12.50%	12.81%

*Источник: составлено автором*

Рисунок 15 — стандартное отклонение секторов индекса S&P 500 в годовом выражении

Наименьшим среди представленных секторов риском обладает коммунальный сектор (19,34%), а наибольшим — сектор информационных технологий (29,74%). Доходность при этом изменяется прямо пропорционально риску (14,43% и 24,64% соответственно). Наихудшим с точки зрения доходности оказался 2018 год: доходность индекса S&P 500

составила минус 5,01%, что связано с пессимистичными настроениями на фондовом рынке США в конце 2018 года.

На рис. 16 приводится количественное распределение акций по секторам. В сумме количество акций составляет 460.

Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
18	48	35	23	68	59	68	59	25	28	29

*Источник: составлено автором*

Рисунок 16 — количественное распределение акций по секторам индекса S&P 500

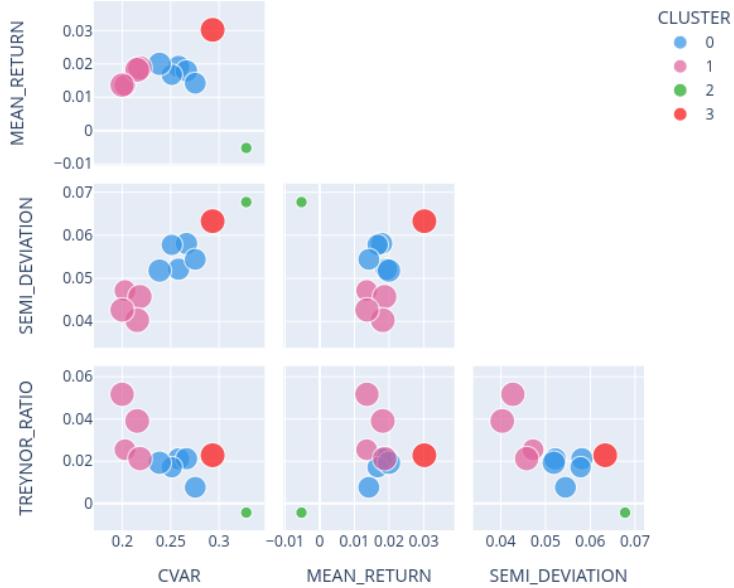
Для кластерного анализа были подсчитаны показатели, предложенные в параграфе 3.1. Расчет данных показателей для секторов проводился путем расчета среднего значения по всем акциям, входящим в сектор. Параметры эффективности используются в качестве параметров кластеризации во многих работах, посвященных кластеризации финансовых активов. Это целесообразно с той точки зрения, что их применение позволяет наилучшим образом учесть соотношение доходности и риска рассматриваемых активов. Значения параметров кластеризации (до нормализации) представлены на рис. 17.

Сектор	Ср. доходность	Ст. отклонение	Полуотклонение	VaR	CVaR	Бета	К. Шарпа	К. Трейнора	К. Сортино
Communication Services	0.019395	0.079309	0.052271	0.507905	0.258378	0.932671	0.239107	0.021186	0.390724
Consumer Discretionary	0.018028	0.083949	0.058242	0.517113	0.266579	1.014047	0.240099	0.021279	0.373125
Health Care	0.016875	0.082435	0.057941	0.485459	0.251322	0.995908	0.211106	0.017205	0.319504
Industrials	0.020177	0.075611	0.051940	0.465837	0.238648	1.102213	0.278815	0.019341	0.426791
Materials	0.014348	0.079420	0.054555	0.535140	0.275666	0.983534	0.222939	0.007685	0.343040
Consumer Staples	0.013717	0.067471	0.047293	0.389394	0.202756	0.616962	0.222179	0.025555	0.345167
Financials	0.018938	0.065555	0.045871	0.430894	0.218305	0.969726	0.297369	0.021314	0.437425
Real Estate	0.018368	0.057070	0.040397	0.425763	0.215449	0.537530	0.321778	0.039201	0.464873
Utilities	0.013791	0.060207	0.042776	0.379912	0.199783	0.332579	0.311438	0.051870	0.443664
Energy	-0.005137	0.095827	0.067903	0.660030	0.328595	1.169525	-0.023378	-0.004335	-0.024157
Information Technology	0.030405	0.093571	0.063455	0.574316	0.293661	1.356183	0.320244	0.022924	0.488649

*Источник: составлено автором*

Рисунок 17 — значения параметров кластеризации секторов

Далее полученные параметры необходимо нормализовать. После нормализации определяется число кластеров  $K$ . Оптимальное число кластеров предлагается определять визуально, для чего с помощью библиотеки plotly строится матрица точечных графиков в нескольких плоскостях. На рис. 18 представлен результат группировки секторов по 4 кластерам. Результаты кластеризации изображены в следующих плоскостях: средняя доходность, полуотклонение доходности, CVaR, коэффициент Трейнора. Размер точек на графиках прямо пропорционален коэффициенту Шарпа, цвет точек соответствует одному из кластеров.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 18 — группировка секторов по 4 кластерам методом k-средних

Исходя из результатов кластеризации, для дальнейшего рассмотрения были выбраны пять секторов, представленных на рис. 19. Выбранные кластеры, в сравнении с остальными, характеризуются наибольшей доходностью при умеренном риске, что также выражается в максимальных значениях коэффициентов Шарпа и Трейнора среди всех кластеров.

Сектор	Ср. доходность	Ст. отклонение	Полуотклонение	VaR	CVaR	Бета	К. Шарпа	К. Трейнора	К. Сортино	Номер кластера
Consumer Staples	0.013717	0.067471	0.047293	0.389394	0.202756	0.616962	0.222179	0.025555	0.345167	1
Financials	0.018938	0.065555	0.045871	0.430894	0.218305	0.969726	0.297369	0.021314	0.437425	1
Real Estate	0.018368	0.057070	0.040397	0.425763	0.215449	0.537530	0.321778	0.039201	0.464873	1
Utilities	0.013791	0.060207	0.042776	0.379912	0.199783	0.332579	0.311438	0.051870	0.443664	1
Information Technology	0.030405	0.093571	0.063455	0.574316	0.293661	1.356183	0.320244	0.022924	0.488649	3

*Источник: составлено автором*

Рисунок 19 — значения параметров кластеризации выбранных секторов

Далее осуществляется кластеризация в рамках каждого из пяти выбранных секторов (рис. 19). Количество кластеров в каждом секторе определялось с учетом числа акций, входящих в сектор, а также с помощью визуализации полученных групп. Для сектора товаров второй необходимости были выделены 7 кластеров, для финансового сектора — 10, для сектора недвижимости — 8, для коммунального сектора — 7, для сектора информационных технологий — 10. Кластеризация позволила значительно сократить число потенциальных кандидатов для добавления в портфель путем исключения акций с отрицательной доходностью, а также акций с чрезмерно высокими показателями риска. Итого было выбрано

26 наиболее оптимальных с точки зрения соотношения доходности и риска акций. Выбранные акции, а также их параметры представлены на рис. 20.

Тикер	Акция	Сектор	Ср. доходность	Ст. отклонение	Полуотклонение	VaR	CVaR	Бета	К. Шарпа	К. Трейнора	К. Сортино
TGT	Target Corporation	Consumer Staples	0.054731	0.100668	0.045775	0.457766	0.235282	0.842956	0.543679	0.064928	1.195661
BF-B	Brown-Forman	Consumer Staples	0.033316	0.058490	0.038824	0.373427	0.202412	0.724676	0.569601	0.045974	0.858137
COST	Costco	Consumer Staples	0.027460	0.058297	0.040868	0.330392	0.173660	0.850979	0.471034	0.032268	0.671908
DG	Dollar General	Consumer Staples	0.035446	0.069848	0.042743	0.427406	0.227260	0.815272	0.507479	0.043478	0.829296
EL	Estée Lauder Companies (The)	Consumer Staples	0.032666	0.085137	0.050909	0.411283	0.211527	1.101155	0.383688	0.029665	0.641658
HSY	Hershey's	Consumer Staples	0.030732	0.049458	0.031959	0.335608	0.174823	0.252192	0.621377	0.121859	0.961605
TSN	Tyson Foods	Consumer Staples	0.041218	0.074455	0.050146	0.482730	0.256372	0.510238	0.553589	0.080781	0.821947
AIZ	Assurant	Financials	0.029044	0.056154	0.034981	0.407957	0.208446	0.753392	0.517225	0.038551	0.830290
SPGI	S&P Global	Financials	0.036533	0.061988	0.040808	0.403399	0.212140	1.001199	0.589360	0.036489	0.895235
MKTX	MarketAxess	Financials	0.056642	0.088944	0.066553	0.499454	0.259218	0.530247	0.636834	0.106823	0.851094
HIG	Hartford (The)	Financials	0.032290	0.050053	0.032395	0.404715	0.208774	0.717692	0.645114	0.044991	0.996762
TDY	Teledyne Technologies	Information Technology	0.042007	0.064932	0.042552	0.420371	0.217382	0.962225	0.646941	0.043656	0.987182
SNPS	Synopsys	Information Technology	0.043584	0.075139	0.050268	0.385716	0.206770	1.306378	0.580046	0.033363	0.867033
MSFT	Microsoft	Information Technology	0.032799	0.067004	0.044879	0.427694	0.221544	1.316844	0.489514	0.024908	0.730843
FICO	Fair Isaac	Information Technology	0.065429	0.093606	0.060995	0.484325	0.250910	1.275578	0.698978	0.051293	1.072685
CDNS	Cadence Design Systems	Information Technology	0.044660	0.078766	0.054094	0.472187	0.233813	1.384267	0.566993	0.032263	0.825594
ANSS	Ansys	Information Technology	0.046194	0.074358	0.047864	0.447132	0.232974	1.346168	0.621235	0.034315	0.965091
TYL	Tyler Technologies	Information Technology	0.038642	0.064672	0.043440	0.484460	0.257625	0.897348	0.597499	0.043062	0.889538
MAA	Mid-America Apartment Communities	Real Estate	0.028633	0.049091	0.035222	0.379102	0.198872	0.441441	0.583257	0.064861	0.812907
CSGP	CoStar Group	Real Estate	0.048407	0.082986	0.047416	0.508953	0.265120	1.044002	0.583320	0.046367	1.020904
CBRE	CBRE Group	Real Estate	0.027481	0.073067	0.053222	0.521081	0.260163	1.271086	0.376112	0.021620	0.516356
ARE	Alexandria Real Estate Equities	Real Estate	0.027195	0.051244	0.035715	0.392453	0.195047	0.585410	0.530697	0.046454	0.761437
AMT	American Tower	Real Estate	0.026519	0.053676	0.036806	0.371407	0.196974	0.256389	0.494046	0.103431	0.720507
NEE	NextEra Energy	Utilities	0.025957	0.044036	0.029603	0.320950	0.172362	0.224399	0.589465	0.115675	0.876862
SO	Southern Company	Utilities	0.029774	0.042676	0.029122	0.314987	0.164179	0.237333	0.697678	0.125453	1.022399
ETR	Entergy	Utilities	0.029308	0.043975	0.028606	0.366526	0.183255	0.224237	0.666474	0.130703	1.024549

*Источник: составлено автором*

Рисунок 20 — характеристики выбранных акций

**Оценка ожидаемой доходности акций.** В качестве параметров ожидаемой доходности для выбранных акций используется прогноз доходностей акций с помощью LSTM на месяц вперед, то есть на период с 27.11.2019 на 30.12.2019. В качестве реализации моделей LSTM использовались модели и методы библиотек TensorFlow и Keras. Ниже представлено описание процесса обучения моделей LSTM и их оценки.

В рамках предварительной подготовки к обучению моделей необходимо для начала провести подготовку данных. Применяемый в работе процесс преобразования данных описан в параграфе 3.1.

Далее следует определить архитектуру нейронной сети, а также ее гиперпараметры. Процесс определения гиперпараметров осуществлялся путем перебора нескольких наборов их значений и выбора набора, обеспечивающего наименьшие значения ошибок. Для всех акций использовалась единая архитектура:

1. Слой LSTM, состоящий из 64 нейронов и принимающий на вход массив данных размерности (32, 252, 4). Размерность вывода — (32, 252, 64).

2. Слой Dropout с коэффициентом 0,2. Слои Dropout используются для борьбы с переобучением путем исключения из сети нейронов с заданной вероятностью на этапе обучения сети. Размерность вывода — (32, 252, 64).
3. Слой LSTM, состоящий из 64 нейронов. Размерность вывода — (32, 64).
4. Слой Dropout с коэффициентом 0,2. Размерность вывода — (32, 64).
5. Линейный выходной слой, состоящий из 21 нейрона с линейной функцией активации ( $f(x) = x$ ). Размерность вывода — (32, 21).

Необходимо заметить, для данной архитектуры был определен размер батча (размер пакета, batch size) — количество примеров обучающей выборки, загружаемое в память для оценки градиента. В качестве размера батча было выбрано значение 32, поскольку оно встречается во многих работах, посвященных теме прогноза курса акций с помощью LSTM.

Обучение моделей производилось путем минимизации функции среднеквадратической ошибки (MSE). Для весов LSTM применялись регуляризации L1 и L2 с параметрами 0,001. В качестве метода оптимизации функции потерь использовался метод аддитивной оценки моментов (Adam) с шагом сходимости, равным 0,001. Ограничение на количество эпох (итераций) обучения составило 100 эпох со следующими функциями обратного вызова (callbacks):

1. EarlyStopping для прекращения обучения модели в случае, когда значение функции потерь не снижается на протяжении 4 эпох.
2. ReduceLROnPlateau для уменьшения скорости обучения в случае, когда значение функции потерь не снижается на протяжении 2 эпох. Коэффициент уменьшения скорости обучения установлен на уровне 0,1.

Для оценки качества моделей на каждой эпохе обучения сети рассчитывались функции потерь RMSE, MAE, MAPE и метрика  $R^2$ . Результаты оценки качества обученных моделей на обучающей (train) и тестовой (test) выборках представлены на рис. 21.

Большинство моделей обладает высоким качеством прогноза как на обучающей, так и на тестовой выборке: показатели MSE, RMSE, MAE близки к нулю и незначительно отличаются для тестовой и обучающей выборки, значение MAPE не превышает 15,47%. Коэффициент детерминации же дает неоднозначные результаты. Значения показателя  $R^2$  на обучающей выборке для всех моделей высокие (от 82,11% до 98,46%), однако на тестовой выборке значения  $R^2$  для нескольких моделей (CBRE, EL, ETR, HSY, MAA, TGT) намного

меньше (минимальное значение — 51,42%). С учетом значений MSE, RMSE, MAE и MAPE можно сделать вывод о том, что для данных моделей характерна проблема переобучения. Повторное обучение моделей с другими параметрами не улучшило результат, поэтому было принято решение оставить модели с низкими показателями качества прогноза в рамках данного примера.

Тикер	Выборка		MSE	RMSE	MAE	MAPE, %	R <sup>2</sup>
AIZ	Train	0.001452	0.035126	0.027523	4.045486	0.950087	
	Test	0.002081	0.043168	0.035030	3.669474	0.807251	
AMT	Train	0.002279	0.044501	0.034630	7.496414	0.961215	
	Test	0.002380	0.045623	0.037088	3.027576	0.938292	
ANSS	Train	0.001982	0.044076	0.033055	15.474018	0.971074	
	Test	0.004462	0.066509	0.047146	4.924480	0.804820	
ARE	Train	0.002053	0.043022	0.032091	7.256310	0.967453	
	Test	0.001585	0.037186	0.027273	2.609078	0.895193	
BF-B	Train	0.002101	0.044026	0.032742	6.273933	0.925018	
	Test	0.002545	0.048808	0.037453	4.137666	0.838104	
CBRE	Train	0.003756	0.060548	0.044589	9.607566	0.898545	
	Test	0.004038	0.062835	0.048996	5.330784	0.692350	
CDNS	Train	0.001338	0.036446	0.027961	7.719933	0.979547	
	Test	0.002424	0.049138	0.038167	3.391641	0.896859	
COST	Train	0.001625	0.040179	0.030883	7.016333	0.960820	
	Test	0.002681	0.051677	0.038874	3.581906	0.854261	
CSGP	Train	0.001827	0.040858	0.031451	6.165708	0.942080	
	Test	0.002040	0.043387	0.033167	3.245742	0.875034	
DG	Train	0.007128	0.056846	0.042411	7.864857	0.899953	
	Test	0.009827	0.077007	0.062045	5.076274	0.777851	
EL	Train	0.002400	0.044161	0.033481	10.815852	0.961239	
	Test	0.006100	0.075167	0.062285	6.295583	0.764294	
ETR	Train	0.002185	0.046743	0.035988	13.476769	0.835963	
	Test	0.007145	0.084526	0.066431	8.108164	0.666575	
FICO	Train	0.001057	0.032372	0.023895	6.628273	0.979548	
	Test	0.001940	0.043949	0.034508	3.133342	0.893421	
HIG	Train	0.001619	0.038067	0.028957	4.623570	0.945698	
	Test	0.002127	0.044240	0.036175	4.117459	0.851435	
HSY	Train	0.162892	0.069150	0.050950	8.295292	0.821055	
	Test	0.188589	0.174580	0.136872	10.438035	0.670984	
MAA	Train	0.168014	0.055557	0.043575	9.065794	0.953677	
	Test	0.177534	0.112278	0.101207	8.844850	0.562657	
MKTX	Train	0.001076	0.031012	0.023739	4.809873	0.984642	
	Test	0.003392	0.057254	0.046549	4.066075	0.827809	
MSFT	Train	0.000915	0.029882	0.022858	4.905075	0.977172	
	Test	0.000616	0.024352	0.019308	1.853906	0.913034	
NEE	Train	0.001229	0.033158	0.026274	5.205510	0.974771	
	Test	0.000704	0.023961	0.018574	1.653343	0.957698	
SNPS	Train	0.002678	0.045038	0.035131	9.413379	0.971172	
	Test	0.003436	0.052791	0.041337	3.758661	0.893479	
SO	Train	0.008940	0.064067	0.048505	10.782195	0.924009	
	Test	0.027697	0.151202	0.123901	10.407842	0.742917	
SPGI	Train	0.000810	0.027971	0.021271	4.025930	0.975661	
	Test	0.001074	0.032351	0.023862	2.463228	0.850964	
TDY	Train	0.001524	0.037863	0.029286	8.406764	0.969196	
	Test	0.001869	0.042175	0.030939	2.989555	0.892989	
TGT	Train	0.080802	0.095425	0.068865	15.456187	0.864054	
	Test	0.125486	0.231927	0.171114	13.894383	0.514156	
TSN	Train	0.001952	0.042803	0.033087	5.269797	0.945846	
	Test	0.001817	0.041197	0.032857	3.754541	0.874446	
TYL	Train	0.001339	0.036587	0.026770	4.823720	0.957348	
	Test	0.001251	0.035362	0.025013	2.677941	0.817715	

Источник: составлено автором

Рисунок 21 — Значения показателей MSE, RMSE, MAE, MAPE, R<sup>2</sup> для обученных моделей

Для получения прогноза котировок акций прогноз на выходе моделей нуждается в обратных преобразованиях: прогнозные значения денормализуются, а затем преобразуются с помощью экспоненциальной функции ( $f(x) = e^x$ ).

В результате был составлен прогноз котировок каждой акции в портфеле на каждый торговый день в течение месяца (с 29.11.2019 по 30.12.2019). С учетом котировок акций на 27.11.2019 также был составлен прогноз доходности акций в данный период.

**Определение корреляционных связей между доходностями рисковых активов на основе исторических данных для учета эффекта диверсификации доходностей акций.** Для расчета риска портфеля была использована ковариационная матрица доходностей активов за год, предшествующий дате прогноза (с 28.11.2018 по 27.11.2019). Риск портфеля масштабируется в соответствии с длиной прогнозного периода. Для этого стандартное отклонение портфеля умножается на  $\sqrt{T}$ , где  $T$  — длина периода прогноза ( $T = 21$  для рассматриваемого случая).

**Определение оптимального портфеля с учетом рисковых предпочтений инвестора.** Определение оптимального портфеля осуществляется в соответствии с портфельной теорией Г. Марковица, но с тем изменением, что в качестве ожидаемой доходности активов используется доходность, рассчитанная по прогнозу моделей LSTM.

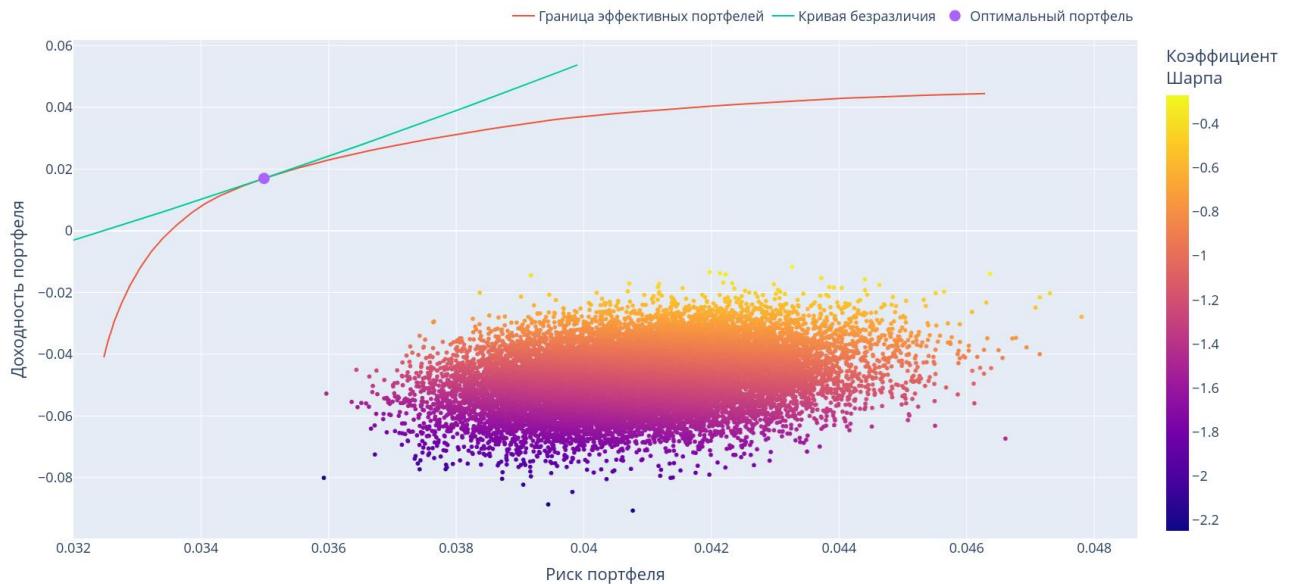
Нелинейная оптимизация параметров доходности и риска портфеля осуществлялась с помощью библиотеки SciPy. Допустимые значения долей акций в портфеле при этом были установлены в пределах отрезка от 0 до 0,3. Другими словами, для данного примера вводится запрет на короткие продажи, а также ограничение в 30% на максимальную долю одного актива в портфеле для более равномерной структуры портфеля.

Задача нелинейной оптимизации заключалась в минимизации риска портфеля для заданного уровня доходности, где уровни доходности задавались дискретно с шагом 0,01%. Также в рамках задачи оптимизации задается ограничение суммы весов (долей):

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$$

Для оптимизации использовался встроенный в библиотеку SciPy метод последовательного квадратичного программирования с ограничениями (Sequential Least Squares Programming, SLSQP).

Оптимальный инвестиционный портфель для инвестора с заданной функцией полезности ( $A = 100$ ) был определен исходя из точки касания эффективных портфелей одной из кривых безразличия. Визуализация данного процесса изображена на рис. 22.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 22 — Визуализация процесса определения оптимального портфеля

Оптимальный портфель имеет следующие ожидаемые параметры: доходность — 1,7%, стандартное отклонение — 3,5%, коэффициент Шарпа — 0,49, коэффициент Трейнора — 0,029, коэффициент Сортино — 0,47.

Из 26 акций, которые были выбраны по результатам кластерного анализа, в оптимальный портфель вошли только 10 активов в пропорциях, указанных на рис. 23 и рис. 24.

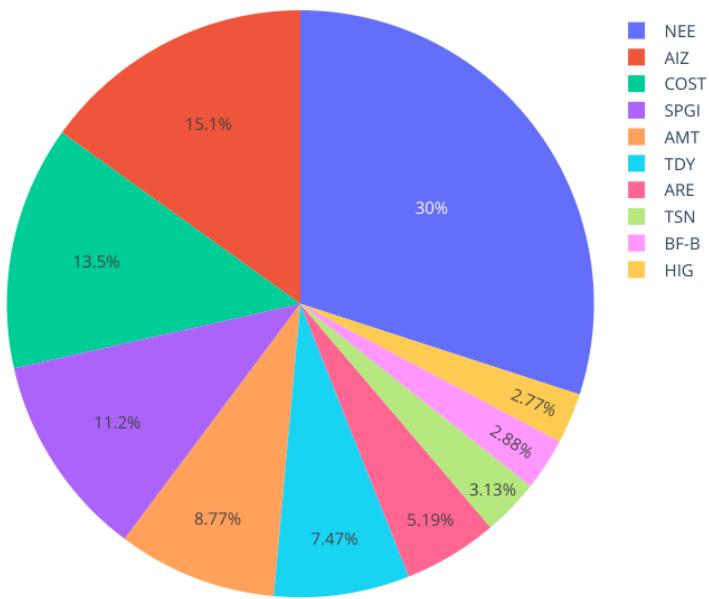
Необходимо заметить, что точки под границей эффективных портфелей на рис. 22 изображают 20 тыс. портфелей, доли активов для которых определялись случайным образом. Поскольку вероятность того, что хотя бы один из полученных случайным образом весов окажется нулевым, стремится к нулю, в каждом из данных портфелей в определенных пропорциях присутствуют все активы, в том числе с отрицательной доходностью и высоким риском. С данной точки зрения, решение задачи нелинейной оптимизации при формировании

портфеля позволяет произвести дополнительный отбор акций, обеспечивающих наилучшее соотношение доходности и риска портфеля.

Тикер	Акция	Сектор	Доля
NEE	NextEra Energy	Utilities	30.00%
AIZ	Assurant	Financials	15.08%
COST	Costco	Consumer Staples	13.45%
SPGI	S&P Global	Financials	11.25%
AMT	American Tower	Real Estate	8.77%
TDY	Teledyne Technologies	Information Technology	7.47%
ARE	Alexandria Real Estate Equities	Real Estate	5.19%
TSN	Tyson Foods	Consumer Staples	3.13%
BF-B	Brown-Forman	Consumer Staples	2.88%
HIG	Hartford (The)	Financials	2.77%

*Источник: составлено автором*

Рисунок 23 — Акции в оптимальном портфеле



*Источник: составлено автором*

Рисунок 24 — Доли акций в оптимальном портфеле

### 3.3. Тестирование оптимального инвестиционного портфеля

Тестирование параметров портфеля предлагается осуществлять с помощью имитационного моделирования методом Монте-Карло, который предполагает моделирование случайных процессов с заданными характеристиками. Для этого используется симуляция изменения стоимости оптимального портфеля в рамках прогнозного периода путем генерации множества случайных исходов.

В работе используется моделирование ценовой динамики финансовых активов с помощью процесса Ито (геометрического броуновского движения, GBM), который описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}, \quad (16)$$

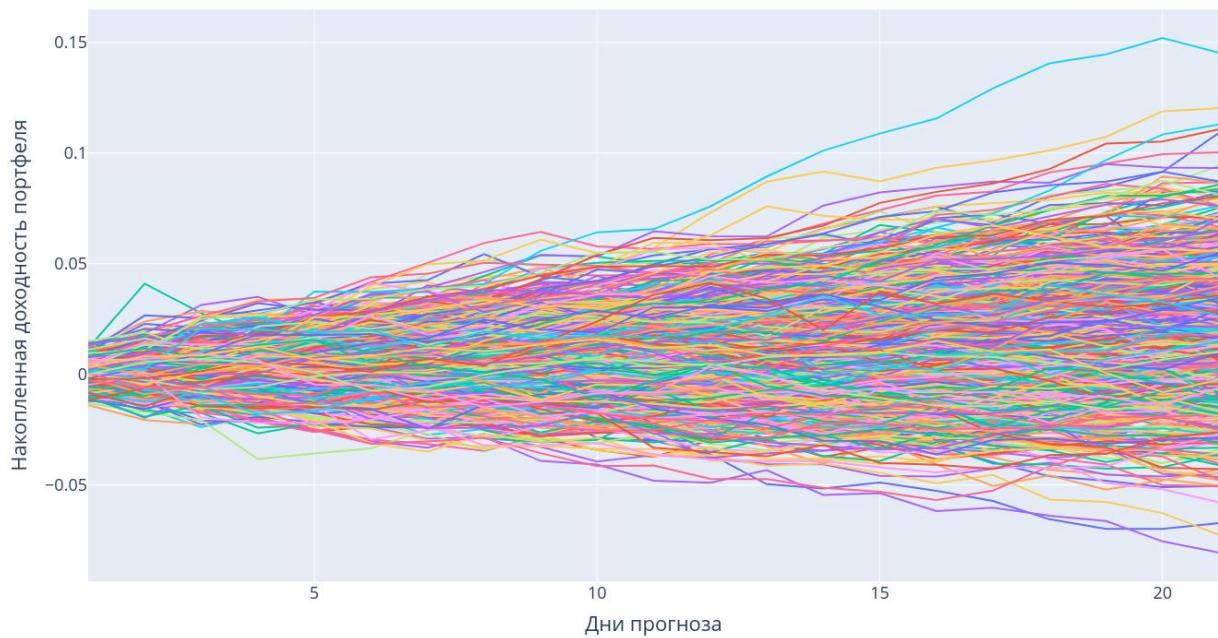
где  $S$  — цена финансового актива,  $t$  — время,  $\mu$  — математическое ожидание доходности актива (параметр тенденции),  $\sigma$  — стандартное отклонение доходности актива (параметр волатильности),  $\varepsilon$  — случайная величина со стандартным нормальным распределением [Уотшем, 1999].

Для произвольного начального значения цены актива  $S_0$  уравнение (16) имеет решение [Уотшем, 1999]:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \varepsilon} \quad (17)$$

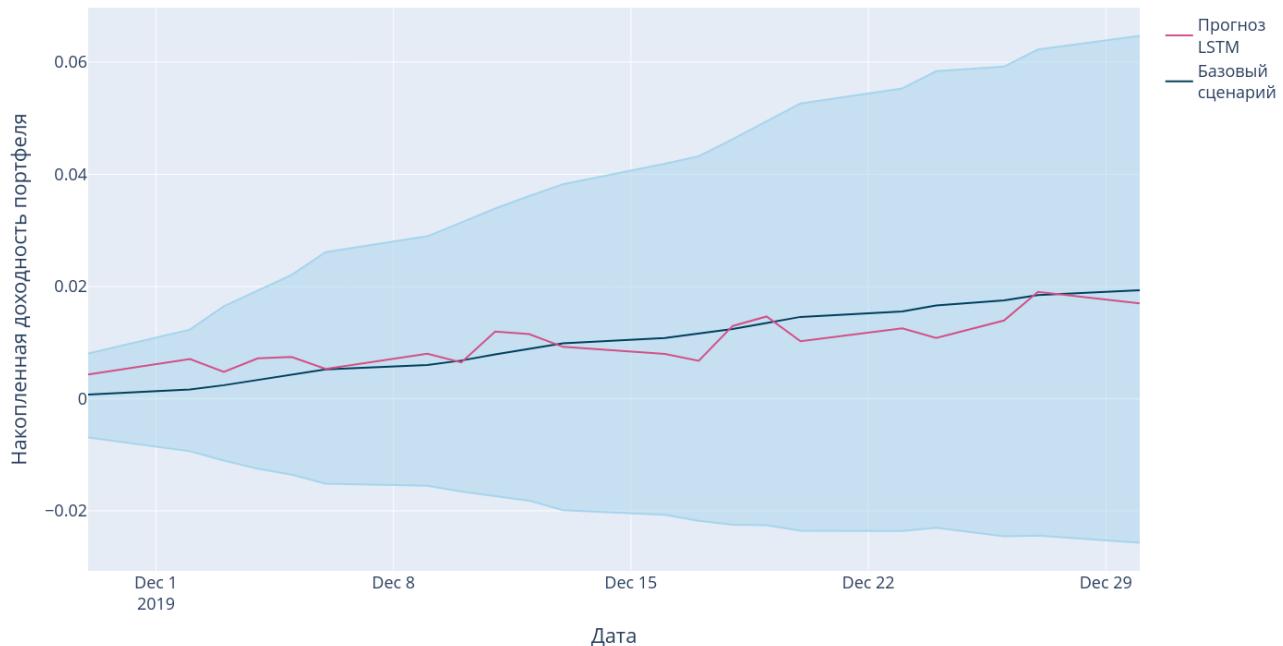
Моделирование котировок акций портфеля осуществляется на прогнозный период в соответствии с формулой (17), где за величину  $\mu$  используется средняя доходность акции за случайный временной период в прошлом, за величину  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение доходности за этот же период в прошлом. Используя полученные таким образом котировки акций, на основе доли каждой акции в оптимальном портфеле рассчитывается динамика стоимости портфеля за прогнозный период, а также накопленная доходность портфеля. На рис. 25 изображен пример накопленной доходности для 1 тыс. симуляций стоимости оптимального портфеля.

С помощью данного множества симуляций строится базовый сценарий, представляющий собой динамику накопленной доходности, которую инвестор может ожидать в среднем за инвестиционный период, а также доверительный интервал для базового сценария, ограниченный нижним и верхним квантилями распределения накопленной доходности на уровнях значимости 5% (рис. 26).



*Источник: составлено автором*

Рисунок 25 — Накопленная доходность для 1 тыс. симуляций методом Монте-Карло



*Источник: составлено автором*

Рисунок 26 — Базовый сценарий, доверительный интервал для базового сценария и прогноз динамики накопленной доходности с помощью LSTM

Прогноз стоимости оптимального инвестиционного портфеля, построенный с помощью рекуррентных нейронных сетей, находится в пределах доверительного интервала и является достаточно близким к базовому сценарию.

Для оценки уровня потенциальных потерь с помощью множества симуляций рассчитываются параметры VaR и CVaR в рамках прогнозного периода. Поскольку на практике наиболее часто применяют VaR и CVaR на уровнях значимости 1% и 5%, было принято решение использовать только данные значения уровня значимости (рис. 27). Убыток оптимального инвестиционного портфеля таким образом превысит 2,78% с вероятностью 5% и 5% — с вероятностью 1% (значения параметров  $VaR_{5\%}$  и  $VaR_{1\%}$  на 21-ый день прогноза соответственно).



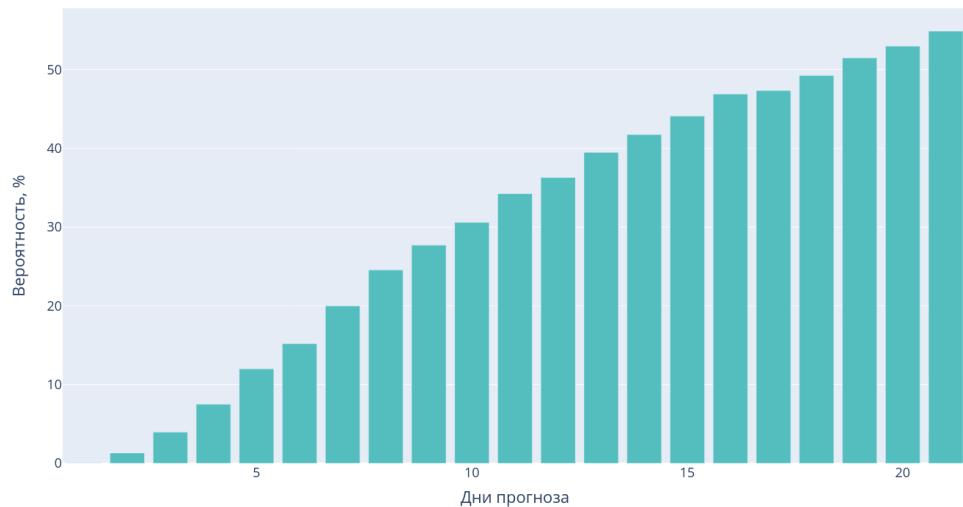
*Источник: составлено автором*

Рисунок 27 — Значения стоимостных мер риска VaR и CVaR для оптимального портфеля

Для получения точного представления относительно того, насколько доходность, предсказанная LSTM, является достижимой, предлагается рассчитывать вероятность получения инвестором ожидаемой доходности с использованием множества симуляций как отношение количества накопленных доходностей выше целевой к количеству всех наблюдений (рис. 28). Вероятность получить ожидаемую доходность 1,7% составляет 54,9%. Таким образом, исход, при котором инвестор получит доходность меньше, чем ожидаемую, менее вероятен.

Если по итогам тестирования портфеля для инвестора становится понятно, что оптимальный портфель не соответствует его целям и стратегии, предлагается пересмотреть функцию полезности инвестора путем изменения коэффициента, отвечающего за склонность

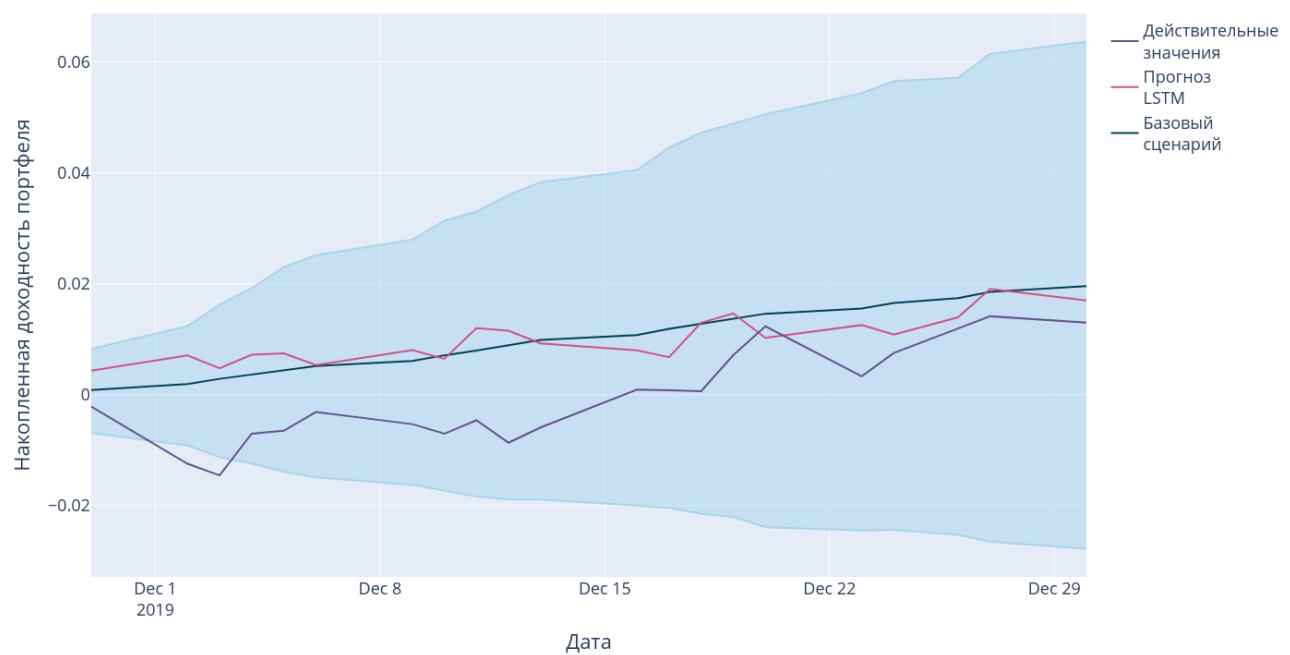
инвестора к риску. Увеличение коэффициента  $A$  позволит получить более консервативный портфель с меньшим риском, уменьшение — более рисковый портфель.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 28 — Вероятность получить ожидаемую доходность

Поскольку в рамках эксперимента известны действительные котировки акций на период с 29.11.2019 по 30.12.2019, для оценки точности прогноза была рассчитана истинная динамика накопленной доходности оптимального портфеля за прогнозный период (рис. 29).



*Источник: составлено автором*

Рисунок 29 — Базовый сценарий, доверительный интервал для базового сценария, прогноз и действительная накопленная доходность оптимального портфеля

Истинные параметры оптимального портфеля оказались следующими: доходность — 1,3%, стандартное отклонение — 2,18%, коэффициент Шарпа — 0,59, коэффициент Трейнора — 0,022, коэффициент Сортино — 0,36. Таким образом, прогноз доходности, полученный с помощью рекуррентных нейронных сетей долгой краткосрочной памяти, превышает истинную доходность на 0,4 п. п., действительный коэффициент Шарпа оптимального портфеля при этом выше прогнозного на 0,1. Коэффициенты Трейнора и Сортино оказались ниже прогнозируемых. Прогнозируемая динамика доходности близка к действительной (рис. 30).



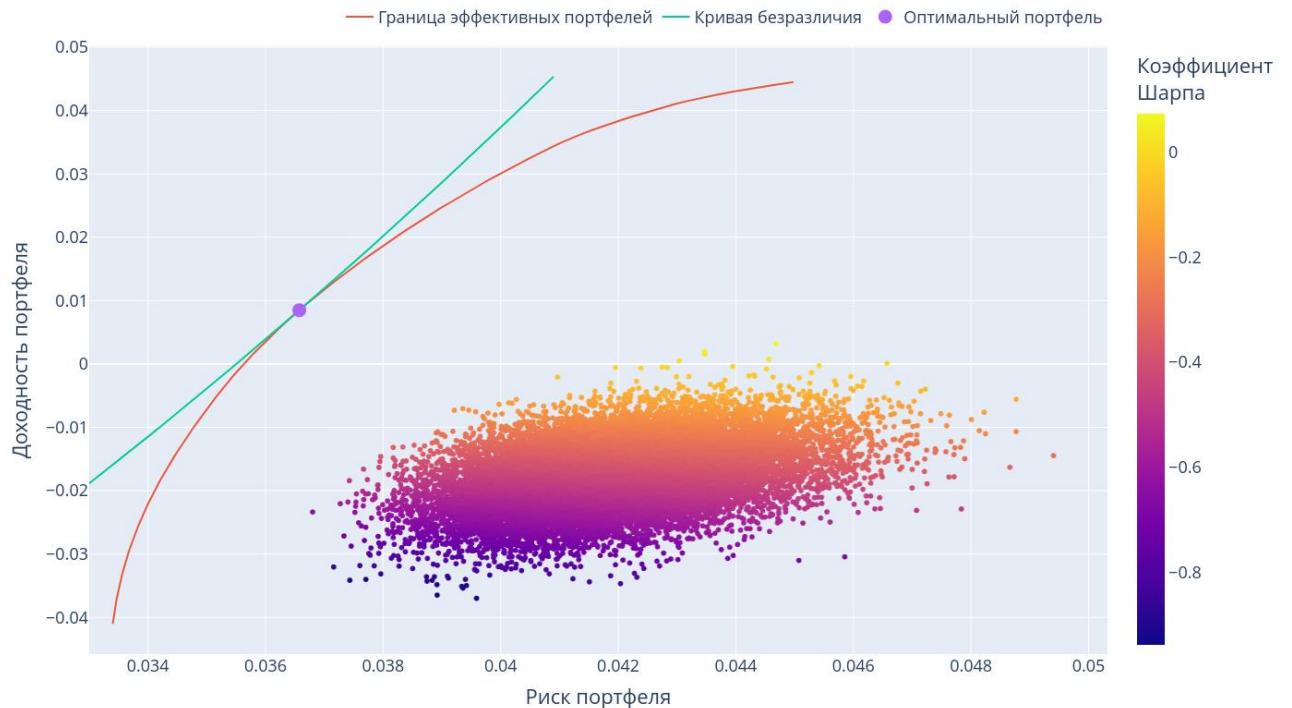
*Источник: составлено автором*

Рисунок 30 — Сравнение прогнозной и действительной динамики доходностей

Для того, чтобы оценить эффективность применения кластерного анализа методом k-средних, был составлен второй оптимальный инвестиционный портфель с идентичными исходными данными и такой же функцией рисковых предпочтений инвестора, но с измененной процедурой формирования портфеля:

1. Определение целей инвестора.
2. Формулирование инвестиционной стратегии инвестора.
3. Выбор случайного набора акций.
4. Оценка ожидаемой доходности акций с помощью LSTM.
5. Определение корреляционных связей между доходностями рисковых активов на основе исторических данных для учета эффекта диверсификации.
6. Определение оптимального портфеля с использованием методов нелинейного программирования с учетом рискового профиля инвестора.
7. Тестирование параметров оптимального инвестиционного портфеля методом Монте-Карло.

В качестве исходного набора активов для формирования портфеля случайным образом были выбраны 26 акций индекса S&P 500. После оценки ожидаемой доходности акций с использованием LSTM был определен оптимальный инвестиционный портфель согласно процедуре (рис. 31). Структура портфеля изображена на рис. 32.



*Источник: составлено автором*

Рисунок 31 — Визуализация процесса определения оптимального портфеля, состоящего из случайного набора акций

Данный оптимальный портфель характеризуется следующими ожидаемыми параметрами: доходность — 0,85%, стандартное отклонение — 3,66%, коэффициент Шарпа — 0,23, коэффициент Трейнора — 0,014, коэффициент Сортино — 0,24,  $VaR_{5\%}$  — 3,01%,  $CVaR_{5\%}$  — 4,25%,  $VaR_{1\%}$  — 5,2%,  $CVaR_{1\%}$  — 6,37%. Действительные параметры оптимального портфеля оказались лучше. Доходность составила 1,11%, стандартное отклонение — 2,24%, коэффициент Шарпа — 0,5, коэффициент Трейнора — 0,019, коэффициент Сортино — 0,31.

При эмпирическом сравнении двух оптимальных портфелей, первый из которых сформирован по предложенной в работе технологии, а второй — по измененной технологии со случайными активами, удалось выявить, что как ожидаемые, так и действительные параметры выше у первого портфеля. Необходимо также заметить, что по результатам тестирования данных оптимальных портфелей стоимостные меры риска  $VaR$  и  $CVaR$  оказались выше для второго портфеля. Таким образом, портфель со случайными активами

обладает более высоким уровнем потенциальных убытков и более низкими финансовыми показателями, чем портфель, сформированный по предлагаемой технологии.

Тикер	Акция	Сектор	Доля
IRM	Iron Mountain	Real Estate	20.36%
BRO	Brown & Brown	Financials	16.31%
NI	NiSource	Utilities	10.68%
JKHY	Jack Henry & Associates	Financials	9.62%
PARA	Paramount Global	Communication Services	7.14%
CMCSA	Comcast	Communication Services	6.15%
ABT	Abbott	Health Care	5.89%
PM	Philip Morris International	Consumer Staples	5.70%
BA	Boeing	Industrials	4.80%
KMB	Kimberly-Clark	Consumer Staples	4.67%
ORLY	O'Reilly Auto Parts	Consumer Discretionary	2.61%
GL	Globe Life	Financials	2.46%
PANW	Palo Alto Networks	Information Technology	2.42%
GM	General Motors	Consumer Discretionary	1.17%

*Источник: составлено автором*

Рисунок 32 — Акции в оптимальном портфеле, состоящем из случайного набора активов

Проведение экспериментальных расчетов позволяет сделать вывод о том, что предложенная в работе технология управления инвестиционным портфелем является эффективной с точки зрения соответствия оптимального инвестиционного портфеля целям и рисковым предпочтениям умеренно-агрессивного инвестора. Доступность технологии для инвесторов, не обладающих существенным опытом в инвестировании и программировании, обуславливается тем, что разработанный автором инструментарий может быть использован в исходном виде, без дополнительной доработки программного кода, подбора параметров моделей и проведения вычислений вручную.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенного исследования можно сделать несколько выводов. Во-первых, применение кластерного анализа при определении структуры инвестиционного портфеля позволяет отобрать лучшие по соотношению доходности и риска активы. Предложенный метод кластеризации на основе стоимостных показателей риска и финансовых коэффициентов использует преимущества моделей оценки капитальных активов, при этом учитывая также потенциальные убытки актива. Во-вторых, прогноз котировок акций, полученный с помощью рекуррентных нейронных сетей долгой краткосрочной памяти, дает точную оценку ожидаемой доходности портфеля. Однако при прогнозировании финансовых временных рядов в ситуации экономической нестабильности, а также при увеличении длины прогнозируемого периода предсказательные способности моделей неизбежно снижаются. Кроме того, точность прогноза зависит от множества других факторов: процедура предварительной обработки данных, стратегия прогнозирования, архитектура и гиперпараметры нейронной сети.

Предложенная в работе технология формирования инвестиционного портфеля, которая включает в себя процедуру и инструменты, разработанные автором, может быть использована как для формирования инвестиционных портфелей с другими исходными данными, так и для решения иных задач, связанных с управлением инвестиционным портфелем. Для дальнейшего усовершенствования предложенной технологии автором предлагается следующее:

1. Применение BI-платформы для анализа эффективности инвестиционных решений.
2. Учет фактора дискретности при формировании оптимального инвестиционного портфеля с условием ограниченного бюджета инвестора.
3. Учет фундаментальных показателей ценных бумаг при отборе активов методами кластеризации, а также при построении прогноза котировок акций с помощью LSTM.
4. Использование гибридных моделей на основе сверточных нейронных сетей (CNN) и рекуррентных нейронных сетей долгой краткосрочной памяти (LSTM) для увеличения точности прогноза за счет лучшей, по сравнению с LSTM, адаптации гибридных моделей CNN-LSTM к изменению характеристик временного ряда.
5. Использование программных средств для оптимизации гиперпараметров нейронных сетей.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

Берзон Н. И., Дорошин Д. И. Особенности применения показателей эффективности финансовых инвестиций // Финансы и кредит. 2012. № 14(494) С. 21-33. URL: <https://publications.hse.ru/articles/66996837> (дата обращения: 24.05.2024).

Богачаров М. А. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ИНДИВИДОМ С УЧЕТОМ ЕГО ОТНОШЕНИЯ К РИСКУ // Образовательные ресурсы и технологии. 2021. № 2(35). С. 57-64. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prinyatie-resheniya-individom-s-uchetom-ego-otnosheniya-k-risku> (дата обращения: 29.05.2024).

Бородина О. В., Захарова А. Ю. Инвестиционные качества ценных бумаг // Вопросы науки и образования. 2017. № 6(7). С. 62-64. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/investitsionnye-kachestva-tsennyyh-bumag-1> (дата обращения: 29.05.2024).

Бухвалов А. В. Управленческая теория фирмы: прогресс в синтезе теории финансов и стратегического менеджмента // Российский журнал менеджмента. 2016. № 4. С. 105-126. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/upravlencheskaya-teoriya-firmy-progress-v-sinteze-teorii-finansov-i-strategicheskogo-menedzhmenta> (дата обращения: 29.05.2024).

Быстрова Д. А., Грачева Д. А. ВЛИЯНИЕ ФАКТОРА ДИСКРЕТНОСТИ НА СТРУКТУРУ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ НЕИНСТИТУЦИОНАЛЬНОГО ИНВЕСТОРА // Фундаментальные исследования. 2018. № 5. С. 41-46. URL: <https://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=42140> (дата обращения: 29.05.2024).

Выюгин В. В. Математические основы машинного обучения и прогнозирования // М.: Изд. МЦНМО. 2013. 387 с.

Галанов В. А. и др. Случайное и закономерное изменение цены акции в зависимости от длины временного интервала // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2017. № 4(52). С. 228-241. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sluchaynoe-i-zakonomernoe-izmenenie-tseny-aktsii-v-zavisimosti-ot-dliny-vremennogo-intervala> (дата обращения: 29.05.2024).

Гафаров Ф. М., Галимянов А. Ф. Искусственные нейронные сети и приложения: учеб. пособие // Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 2018. 121 с.

Горбачевская Е. Н., Краснов С. С. История развития нейронных сетей // Вестник ВУИТ. 2015. № 1(23). С. 52-56. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/istoriya-razvitiya-neyronnyh-setey> (дата обращения: 29.05.2024).

Горшенин А. К., Кузьмин В. Ю. Анализ конфигураций LSTM-сетей для построения среднесрочных векторных прогнозов // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. № 1. С. 10-16.

Гришина Н. П. Сравнительный анализ асимметричных мер риска: VaR и CVaR // Конфликты в современном мире: международное, государственное и межличностное измерение: Материалы V Международной научной конференции. 8 апр. 2016 г., Саратов / ответственные редакторы: Ю. О. Бронникова, Л. В. Мясникова, Т. Г. Фирсова. Саратов: Издательство «Перо», 2016. С. 580-584.

Исследование уровня финансовой грамотности: четвертый этап. URL: [http://www.cbr.ru/analytics/szpp/fin\\_literacy/fin\\_ed\\_4](http://www.cbr.ru/analytics/szpp/fin_literacy/fin_ed_4) (дата обращения: 31.05.2024).

Как меняется доля частных инвесторов на Мосбирже. График. URL: <https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/kak-menyaetsia-dolia-chastnykh-investorov-na-mosbirzhe-grafiki> (дата обращения: 31.05.2024).

Ковальчук А. И., Разумовская Е. А. Современные методы формирования оптимального инвестиционного портфеля, методы машинного обучения // Весенние дни науки: сборник докладов Международной конференции студентов и молодых ученых. Екатеринбург: УрФУ, 2022. С. 1172-1176. URL: [https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/116744/1/978-5-91256-557-1\\_2022\\_213.pdf](https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/116744/1/978-5-91256-557-1_2022_213.pdf) (дата обращения: 29.05.2024).

Минашкин Д. В. Оценка стоимости под риском методом исторического моделирования: подходы к улучшению точности модели // Статистика и экономика. 2011. № 3. С. 144-148. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-stoimosti-pod-riskom-metodom-istoricheskogo-modelirovaniya-podhody-k-uluchsheniyu-tochnosti-modeli> (дата обращения: 29.05.2024).

Миронов А. М. Машинное обучение. Часть 1: учебник для вузов // М.: МАКС Пресс, 2018. 90 с.

Обзор ключевых показателей профессиональных участников рынка ценных бумаг. URL: [https://www.cbr.ru/analytics/rcb/review\\_rcb](http://www.cbr.ru/analytics/rcb/review_rcb) (дата обращения: 31.05.2024).

Печенова Е. А. Оценка эффективности управления инвестиционным портфелем // Московский экономический журнал. 2019. № 6. С. 163-169. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-effektivnosti-upravleniya-investitsionnym-portfelem-1> (дата обращения: 29.05.2024).

Полтева Т. В., Колачева Н. В. Модели оценки стоимости финансовых инструментов // Карельский научный журнал. 2017. Т. 6. № 1(18). С. 87-90. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modeli-otsenki-stoimosti-finansovyh-instrumentov> (дата обращения: 24.05.2024).

Портрет розничного инвестора. URL: [https://www.cbr.ru/analytics/rb/port\\_inv](https://www.cbr.ru/analytics/rb/port_inv) (дата обращения: 31.05.2024).

Ростовцев В. С. Искусственные нейронные сети : учебник // Санкт-Петербург: Лань, 2019. 216 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/122180> (дата обращения: 29.05.2024). Режим доступа: для авториз. пользователей.

Руткаускас Т. К. и др. Инвестиции и инвестиционная деятельность организаций: учебное пособие // Екатеринбург: Уральский федеральный университет. 2019. 316 с.

Севумян Э. Н. Модели портфеля ценных бумаг // Новые технологии. 2011. № 3. С. 159-162. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modeli-portfelya-tsennyyh-bumag> (дата обращения: 29.05.2024).

Севумян Э. Н. Развитие классической теории портфельных инвестиций // Новые технологии. 2010. № 4. С. 125-128. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitiye-klassicheskoy-teorii-portfelnyh-investitsiy> (дата обращения: 29.05.2024).

Скрипниченко М. В. Портфельные инвестиции: Учебное пособие // СПб: Университет ИТМО, 2016. 40 с.

Соловьев А. А. Стоимость собственного капитала компаний: сравнительный анализ модели капитальных активов (CAPM) и арбитражной модели (APM) // Экономика и управление в XXI веке: тенденции развития. 2012. № 4. С. 160-164. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/stoimost-sobstvennogo-kapitala-kompanii-sravnitelnyy-analiz-modeli-kapitalnyh-aktivov-capm-i-arbitrazhnay-modeli-apm> (дата обращения: 29.05.2024).

Суслов В. И. и др. Эконометрия // Новосибирск, Новосиб. гос. ун-т.: Изд-во СО РАН, 2005. 743 с.

Тюхова Е. М., Сизых Д. С. Использование кластерного анализа для формирования портфеля ценных бумаг в инвестиционных системах (робоэдвайзерах) // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2019): Материалы двенадцатой международной конференции. 1-3 окт. 2019 г., Москва / Под общей редакцией С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна.

Москва: Международный научно-исследовательский институт проблем управления РАН, 2019. С. 210-220.

Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов // Пер. с англ. под ред. М. Р. Ефимовой. М.: Финансы, ЮНИТИ. 1999. 527 с.

Шарп У. Ф. и др. Инвестиции // пер. с англ. А. Н. Буренина, А. А. Васина. М.: Инфра-М, 2018. 1028 с.

Ameya J., George K. How important are activation functions in regression and classification? A survey, performance comparison, and future directions. 2022. P. 48 URL: [https://www.researchgate.net/publication/363330526\\_How\\_important\\_are\\_activation\\_functions\\_in\\_regression\\_and\\_classification\\_A\\_survey\\_performance\\_comparison\\_and\\_future\\_directions](https://www.researchgate.net/publication/363330526_How_important_are_activation_functions_in_regression_and_classification_A_survey_performance_comparison_and_future_directions) (дата обращения: 29.05.2024).

Bandara K. et al. Forecasting across time series databases using recurrent neural networks on groups of similar series: A clustering approach // Expert Systems with Applications. 2020. Vol. 140. P. 33. URL: <https://arxiv.org/pdf/1710.03222.pdf>(дата обращения: 29.05.2024).

Barber D. Bayesian Reasoning and Machine Learning // Cambridge: Cambridge University Press. 2012. P. 666.

Созыкин А. В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей // Вестник ЮУрГУ. 2017. Т. 6. № 3 URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-metodov-obucheniya-glubokih-neyronnyh-setey> (дата обращения: 24.05.2024).

Ciampiconi L. et al. A survey and taxonomy of loss functions in machine learning // ArXiv. 2023. P. 29. URL: <https://arxiv.org/abs/2301.05579> (дата обращения: 30.05.2024).

Elton E. J., Gruber M. J. Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution // The Journal of Business. 1977. Vol. 50. № 4. P. 415–437. URL: [https://www.researchgate.net/publication/24102674\\_Risk\\_Reduction\\_and\\_Portfolio\\_Size\\_An\\_Analytical\\_Solution](https://www.researchgate.net/publication/24102674_Risk_Reduction_and_Portfolio_Size_An_Analytical_Solution) (дата обращения: 30.05.2024).

Ghojogh B., Crowley M. The Theory Behind Overfitting, Cross Validation, Regularization, Bagging, and Boosting: Tutorial // ArXiv. 2023. P. 23. URL: <https://arxiv.org/abs/1905.12787> (дата обращения: 24.05.2024).

Jain A. K. Data clustering: 50 years beyond K-means // Pattern Recognition Letters. 2010. Vol. 31. I. 8. P. 651-666. URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167865509002323> (дата обращения: 31.05.2024).

Kisiala J. Conditional Value-at-Risk: Theory and Applications // ArXiv. 2015. P. 96. URL: <https://arxiv.org/abs/1511.00140> (дата обращения: 24.05.2024).

Lillicrap T. P., Santoro A. Backpropagation through time and the brain // Current Opinion in Neurobiology. 2019. Vol. 55. P. 82-89. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959438818302009> (дата обращения: 24.05.2024).

Na S. et al. Research on k-means Clustering Algorithm: An Improved k-means Clustering Algorithm // Jian, China: Third International Symposium on Intelligent Information Technology and Security Informatics. 2010. P. 63-67. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5453745> (дата обращения: 30.05.2024).

Sarykalin S. et al. Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization// Tutorials in Operations Research. Hanover: INFORMS, 2008. P. 270–294.

Savvas V. et al. Designing neural network based decoders for surface codes // 2018. P. 13. URL: [https://www.researchgate.net/publication/329362532\\_Designing\\_neural\\_network\\_based\\_decoders\\_for\\_surface\\_codes](https://www.researchgate.net/publication/329362532_Designing_neural_network_based_decoders_for_surface_codes) (дата обращения: 30.05.2024).

Srinivasan S. et al. Digital Information System for Attack Reduction in Industry 4.0 // Industry 4.0 Interoperability, Analytics, Security, and Case Studies. Florida: CRC Press, 2021. Chapter 5. P. 65–81.

Steinley D., Brusco M. Initializing K-means Batch Clustering: A Critical Evaluation of Several Techniques // Journal of Classification 2007. Vol. 24. P. 99–121 URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00357-007-0003-0> (дата обращения: 30.05.2024).

Taieb S. B. et al. A review and comparison of strategies for multi-step ahead time series forecasting based on the NN5 forecasting competition // ArXiv. 2011. P. 49. URL: <https://arxiv.org/abs/1108.3259> (дата обращения: 24.05.2024).

US Stocks are Forecast to Have Less Pain but No Gain in 2023. URL: <https://www.goldmansachs.com/intelligence/pages/us-stocks-are-forecast-to-have-less-pain-but-no-gain-in-2023.html> (дата обращения: 31.05.2024).

Vui C. S. et al. A review of stock market prediction with Artificial neural network (ANN) // Penang: IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering. 2013. P. 477-482 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6720012> (дата обращения: 30.05.2024).

Yi D. et al. An Effective Optimization Method for Machine Learning Based on ADAM // Applied Sciences. 2020 Vol. 10. № 3(1073) P. 20. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/3/1073> (дата обращения: 24.05.2024).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Программный код

*Реализация функции для получения публичной информации об акциях*

```
def load_history(tickers, start, end=datetime.date.today()):
    info_table = pd.DataFrame()
    for ticker in tickers:
        ticker_ = yf.Ticker(ticker)
        info = pd.DataFrame.from_dict(ticker_.info, orient="index")
        info.reset_index(inplace=True)
        info.columns = ['Ind', 'Value']
        info['Ticker'] = ticker
    info_table = pd.concat([info_table, info])
    history = yf.download(tickers, start, end)
    history = history[['Adj Close', 'Volume', 'High', 'Low']]
    history = history.melt(ignore_index=False).reset_index()
    history = history[['Ticker', 'Date', 'Price', 'value']]
    history.columns = ['Ticker', 'Date', 'Ind', 'Value']
    return history, info_table
```

*Реализация функции для расчета бета-коэффициента акции*

```
def calculate_beta(ret, ind_ret=sp500_index_returns.values.flatten()):
    covar = np.cov(ret, ind_ret)
    beta = covar[0][1] / covar[1][1]
    return beta.squeeze()
```

*Реализация функции для расчета полуотклонения*

```
def calculate_downside_sigma(returns):
    T = len(returns)
    return np.sqrt(((returns[returns < 0]) ** 2).sum() / T)
```

*Реализация функции для расчета параметров кластеризации*

```
def calculate_measures(data, T, recent_returns, returns):
    data['MEAN_RETURN'] = recent_returns.mean() * T
    data['STD'] = recent_returns.std() * np.sqrt(T)
    data['SEMI_DEVIATION'] = recent_returns.apply(calculate_downside_sigma, axis=0) * np.sqrt(T)
    data['VAR'] = abs(returns.quantile(.05)) * T
    data['CVAR'] = abs(returns[returns < -data['VAR']/T].mean()) * T
    data['BETA'] = recent_returns.apply(calculate_beta, axis=0)
    data['SHARPE_RATIO'] = data['MEAN_RETURN'] / data['STD']
    data['TREYNOR_RATIO'] = data['MEAN_RETURN'] / data['BETA']
    data['SORTINO_RATIO'] = data['MEAN_RETURN'] / data['SEMI_DEVIATION']
    return data
```

*Реализация функции для кластеризации методом k-средних*

```
def kmeans(data, n_clusters, max_iter=1000, n_init=10, random_state=0):
    scaler = MinMaxScaler()
    if 'CLUSTER' in data.columns:
        data = data.drop('CLUSTER', axis=1)
    kmeans = KMeans(n_clusters=n_clusters, max_iter=max_iter, n_init=n_init, random_state=random_state)
    kmeans.fit(scaler.fit_transform(data[data.columns]))
    data['CLUSTER'] = kmeans.labels_.astype(int)
    data = data.sort_values(by='CLUSTER')
    data.CLUSTER = data.CLUSTER.astype(str)
    return data
```

## Реализация функции для визуализации кластеров

```
def plot_kmeans(data, dimensions, size_col, title, height=600, width=600):
    fig = px.scatter_matrix(data,
                            dimensions=dimensions,
                            color='CLUSTER',
                            title=title,
                            color_discrete_sequence=px.colors.qualitative.Dark24,
                            size=data[size_col]+abs(min(data[size_col]))+0.1)
    fig.update_traces(diagonal_visible=False, showupperhalf=False)
    fig.update_layout(height=height, width=width)
    fig.show()
```

## Реализация метода класса ModelTicker для подготовки данных к обучению моделей

```
def preprocessing(self, input_steps, output_steps, val_share, test=None):
    self.input_steps = input_steps
    self.output_steps = output_steps
    self.val_share = val_share
    self.train_point = int(len(self.data) * (1 - self.val_share))
    self.val_point = - int(len(self.data) * self.val_share)

    self.prep_data = np.log(self.data)
    self.scaler = MinMaxScaler()
    self.scaler.fit(self.prep_data.loc[:self.train_point])
    self.prep_data = self.scaler.transform(self.prep_data)

    self.X_train, self.y_train = TickerModel.to_sequences(self.prep_data[:self.train_point], input_steps, output_steps)
    self.X_validation, self.y_validation = TickerModel.to_sequences(self.prep_data, input_steps, output_steps)
    if test:
        self.X_test, self.y_test = np.array([self.X_validation[test:]]) , np.array([self.y_validation[test:]])
        self.X_validation, self.y_validation = self.X_validation[self.val_point:test], self.y_validation[self.val_point:test]
    else:
        self.X_validation, self.y_validation = self.X_validation[self.val_point:], self.y_validation[self.val_point:]
```

## Реализация метода класса ModelTicker для подготовки данных методом скользящего окна

```
def to_sequences(data, input_steps, steps_out):
    x = []
    y = []
    for i in range(len(data)-input_steps-steps_out+1):
        window = data[i:(i+input_steps)]
        windowI = data[i+input_steps:i+input_steps+steps_out]
        x.append(window)
        y.append(windowI[:, 0])
    return np.array(x), np.array(y)
```

## Реализация метода класса ModelTicker для определения архитектуры и гиперпараметров сети LSTM

```
def LSTM(self, N1, N2, batch, dropout, l1, l2):
    reg = L1L2(l1=l1, l2=l2)
    self.loss = []
    self.val_loss = []
    self.model = Sequential()
    self.model.add(LSTM(N1,
                       return_sequences=True,
                       kernel_initializer = "glorot_uniform",
                       batch_input_shape = (batch, self.input_steps, self.X_train.shape[2]),
                       bias_regularizer=reg))
    self.model.add(Dropout(dropout))
    self.model.add(LSTM(N2,
                       kernel_initializer = "glorot_uniform",
                       bias_regularizer=reg))
    self.model.add(Dropout(dropout))
    self.model.add(Dense(self.output_steps))
    self.model.compile(optimizer = tf.keras.optimizers.Adam(1e-3),
                       loss = 'mse',
                       metrics = [tf.keras.metrics.RootMeanSquaredError(),
                                  tf.keras.metrics.MeanAbsoluteError(),
                                  tf.keras.metrics.MeanAbsolutePercentageError(),
                                  RSquare()])
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для обучения модели*

```
def fit(self, batch, epochs):
    callbacks = [tf.keras.callbacks.EarlyStopping(monitor='val_loss',
                                                   patience=4,
                                                   verbose=1,
                                                   restore_best_weights=True),
                 tf.keras.callbacks.ReduceLROnPlateau(monitor='val_loss',
                                                       factor=0.1,
                                                       patience=2,
                                                       verbose=1,
                                                       min_delta=1e-5,
                                                       mode='min')]
    history = self.model.fit(self.X_train,
                             self.y_train,
                             epochs = epochs,
                             batch_size = batch,
                             validation_data=(self.X_validation, self.y_validation),
                             callbacks=callbacks)
    self.loss = self.loss + history.history["loss"]
    self.val_loss = self.val_loss + history.history["val_loss"]
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для оценки качества обученной модели*

```
def evaluate(self):
    train = self.model.evaluate(self.X_train, self.y_train, verbose = 0)
    validation = self.model.evaluate(self.X_validation, self.y_validation, verbose = 0)
    self.summary = pd.DataFrame([train, validation],
                                index = ["Train", "Test"],
                                columns = ["MSE", "RMSE", "MAE", "MAPE", "R2"])
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для сохранения модели в файл*

```
def save(self, note=''):
    self.model.save(self.ticker + str(note) + ".keras")
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для загрузки модели из файла*

```
def load(self, note=''):
    self.model = tf.keras.models.load_model(self.ticker + str(note) + ".keras")
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для построения прогноза по данным, требующим предварительной подготовки*

```
def scale_predict(self, X):
    X = np.log(X)
    X = self.scaler.transform(X)
    X, _ = TickerModel.to_sequences(X, 252, 0)
    pred = self.model.predict(X, verbose=0)
    pred = pd.DataFrame(np.tile(pred, (X.shape[2], 1))).transpose()
    pred = self.scaler.inverse_transform(pred)
    pred = np.exp(pred[:, 0])
    return pred
```

### *Реализация метода класса ModelTicker для построения прогноза по данным, не требующим предварительной подготовки*

```
def predict(self, X):
    pred = self.model.predict(X, verbose=0)
    pred = pd.DataFrame(np.tile(pred, (X.shape[2], 1))).transpose()
    pred = self.scaler.inverse_transform(pred)
    pred = np.exp(pred[:, 0])
    return pred
```

## *Реализация функции для сведения оценок качества моделей в одну таблицу*

```
def models_summary(models):
    summs = pd.DataFrame()
    for model in models:
        summ = model.summary
        summ['TICKER'] = [model.ticker, model.ticker]
        summs = pd.concat([summs, summ])
    summs['SAMPLE'] = summs.index
    summs = summs.reset_index(drop=True)
    summs = summs[['TICKER', 'SAMPLE', 'MSE', 'RMSE', 'MAE', 'MAPE', 'R2']]
    summs = summs.set_index(['TICKER', 'SAMPLE'])
    summs.columns = ['MSE', 'RMSE', 'MAE', 'MAPE', '%', 'R\u00b2']
    return summs
```

## *Реализация функций для нелинейной оптимизации параметров портфеля*

```
def portfolio_std(weights, cov, T):
    return np.sqrt(weights @ cov @ weights) * np.sqrt(T)
```

```
def portfolio_return(weights, returns):
    return weights @ returns
```

```
def efficient_portfolio(target_return, returns, cov, T, init_boundaries=(0,1)):
    init = np.ones(len(returns)) / len(returns)
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x)-1},
                  {'type': 'eq', 'fun': lambda x: x @ returns - target_return})
    result = opt.minimize(fun=portfolio_std,
                          x0=init,
                          args=(cov, T),
                          method='SLSQP',
                          bounds=tuple(init_boundaries for _ in range(len(returns))),
                          constraints=constraints
                         )
    return result['fun'], result['x']
```

## *Реализация функций для построения кривых безразличия инвестора*

```
def utility_function(return_, std, coef):
    return return_ - coef * (std ** 2)
```

```
def utility_reverse(std, U, coef):
    return U + coef * (std ** 2)
```

```
def gen_u_line(util, A, min_std, max_std, step):
    u_line = []
    u_std = np.arange(min_std, max_std, step)
    u_ret = utility_reverse(u_std, util, A)
    u_line.append(u_ret)
    u_line.append(u_std)
    u_line = pd.DataFrame(u_line)
    return u_line.transpose()
```

## *Реализация функции для построения границы эффективных портфелей*

```
def optimize_portfolios(min_return, max_return, step, returns, cov, T, A, init_boundaries=(0, 1)):
    frontier = []
    target_return = np.arange(min_return, max_return, step)
    for i in range(len(target_return)):
        std, w = efficient_portfolio(target_return[i], returns, cov, T, init_boundaries)
        frontier.append([target_return[i], std, w, utility_function(target_return[i], std, A)])
    frontier = pd.DataFrame(frontier)
    frontier.columns = ['RETURN', 'STD', 'WEIGHTS', 'UTILITY']
    frontier[SHARPE_RATIO] = frontier.RETURN / frontier.STD
    return frontier
```

*Реализация функции для определения оптимального портфеля и визуализации данного процесса*

```
def select_portfolio(frontier, pred_returns, cov, T, gen_n, A, min_std, max_std, std_step=0.0001):
    max_util = frontier.UTILITY.max()
    gen = generate(gen_n, pred_returns, cov, T)
    u_line = gen_u_line(max_util, A, min_std, max_std, std_step)
    portfolio = frontier[frontier.UTILITY == frontier.UTILITY.max()]
    fig = px.scatter(x=gen[1], y=gen[0], color=gen[2], labels = {'color': "Коэффициент<br>Шарпа"})
    fig.add_scatter(x=frontier.STD, y=frontier.RETURN, mode='lines', name='Граница эффективных портфелей')
    fig.add_scatter(x=u_line[1], y=u_line[0], mode='lines', name='Кривая безразличия')
    fig.add_scatter(x=portfolio.STD, y=portfolio.RETURN, mode='markers', name='Оптимальный портфель', marker=dict(size=15))
    fig.update_layout(
        xaxis_title='Риск портфеля',
        yaxis_title='Доходность портфеля',
        height=800,
        legend=dict(
            orientation="h",
            yanchor="bottom",
            y=1.02,
            xanchor="right",
            x=1
        ),
        font = dict(size=18)
    )
    fig.show()
    return portfolio
```

*Реализация функции для расчета значений геометрического броуновского движения*

```
def GBM(mu, sigma, dt, M, n_forecast):
    S0 = 1
    St = np.exp(
        (mu - sigma ** 2 / 2) * dt
        + sigma * np.random.normal(0, np.sqrt(dt), size=(M, n_forecast)).T
    )
    St = np.vstack([np.ones(M), St])
    St = S0 * St.cumprod(axis=0)
    return St.flatten()
```

*Реализация функций для симуляции изменения стоимости портфеля методом Монте-Карло*

```
def simulate_GBM(returns, n_forecast):
    point = np.random.randint(0, len(returns)-n_forecast)
    returns = returns[point:point+n_forecast]
    mu = returns.mean()
    sigma = returns.std()
    return GBM(mu, sigma, 1, 1, n_forecast)[1:]

def simulate_portfolio(returns, weights, n_forecast):
    simulated_GBM = []
    for col in returns:
        simulated_GBM.append(simulate_GBM(returns[col], n_forecast))
    simulated_GBM = np.array(simulated_GBM).T
    return simulated_GBM @ weights

def simulate_portfolios(returns, weights, n_forecast, n_iterations):
    simulated_portfolios = []
    for i in range(n_iterations):
        simulated_portfolios.append(simulate_portfolio(returns, weights, n_forecast).T)
    simulated_portfolios = pd.DataFrame(simulated_portfolios).transpose()
    return simulated_portfolios
```

## Реализация функции для тестирования оптимального портфеля на устойчивость

```
def test_portfolio(simulated_portfolios):
    cum_prod_simulated_portfolios = simulated_portfolios - 1
    portfolio_avg = cum_prod_simulated_portfolios.apply(lambda x : np.mean(x), axis=1)
    portfolio_5th = cum_prod_simulated_portfolios.apply(lambda x : np.percentile(x, 5), axis=1)
    portfolio_95th = cum_prod_simulated_portfolios.apply(lambda x : np.percentile(x, 95), axis=1)
    var5 = -portfolio_5th
    cvar5 = []
    for i in range(len(var5)):
        cvar5.append(calculate_cvar(np.array(cum_prod_simulated_portfolios.iloc[i]), -var5[i]))
    cvar5 = -np.array(cvar5)
    var1 = -cum_prod_simulated_portfolios.apply(lambda x : np.percentile(x, 1), axis=1)
    cvar1 = []
    for i in range(len(var1)):
        cvar1.append(calculate_cvar(np.array(cum_prod_simulated_portfolios.iloc[i]), -var1[i]))
    cvar1 = -np.array(cvar1)
    return portfolio_avg, portfolio_5th, portfolio_95th, var1, var5, cvar1, cvar5
```

## Реализация функции для визуализации базового сценария, доверительного интервала для базового сценария и прогноза накопленной доходности портфеля

```
def plot_predict(time, portfolio_avg, portfolio_low, portfolio_high, portfolio_pred):
    fig = go.Figure()
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=portfolio_low, line_color="#a7d5ed", showlegend=False))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=portfolio_high, fill='tonexty', line_color="#a7d5ed", showlegend=False))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=portfolio_pred, name='Прогноз<br>LSTM', line_color="#d45087"))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=portfolio_avg, name='Базовый<br>сценарий', line_color="#003f5c"))
    fig.update_layout(
        title='Тестирование оптимального портфеля',
        xaxis_title='Дата',
        yaxis_title='Накопленная доходность портфеля',
        height=800,
        font=dict(size=18))
    fig.show()
```

## Реализация функции для визуализации значений VaR и CVaR

```
def plot_var(time, var1, cvar1, var5, cvar5):
    fig = go.Figure()
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=cvar1 * 100, name='CVaR 1%'))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=var1 * 100, name='VaR 1%'))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=cvar5 * 100, name='CVaR 5%'))
    fig.add_trace(go.Scatter(x=time, y=var5 * 100, name='VaR 5%'))
    fig.update_layout(
        title='VaR, CVaR',
        xaxis_title='Дата',
        yaxis_title='Потенциальный убыток, %',
        height=800,
        font=dict(size=18))
    fig.show()
```

## Реализация функции для визуализации вероятности получения ожидаемой доходности

```
def plot_probability(cum_prod_simulated_portfolios, target_return):
    target_prob_port = cum_prod_simulated_portfolios.apply(
        lambda x : np.mean(x >= target_return), axis=1)
    fig = go.Figure()
    fig.add_trace(go.Bar(x=target_prob_port.index+1, y=target_prob_port.values * 100))
    fig.update_traces(marker_color="#54bebe")
    fig.update_layout(
        title='Вероятность достичь целевой доходности',
        xaxis_title='Дни прогноза',
        yaxis_title='Вероятность, %',
        height=800,
        font=dict(size=18))
    fig.show()
```