現代数理統計学の基礎 1章

Miya

問 1

　まず $A\Delta B = A^c\Delta B^c$ を示す。$A\Delta B$ は定義より

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

また差集合は

$$A \setminus B := A \cap B^c$$

よって、$A\Delta B$ と $A^c\Delta B^c$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ A^c\Delta B^c &= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

以上により $A\Delta B = A^c\Delta B^c$ を示せた。
　つぎに $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を示す。上記より

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup B) \cup (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) && \because (A \cup A^c = \Omega, B \cup B^c = \Omega) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c && \because (\text{ドモルガンの法則}) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

つぎに $P(A\Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ を示す。

$$\begin{aligned} P(A\Delta B) &= P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \\ &= P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap (A \cap B)) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \end{aligned}$$

よって示せた。

問 2

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))
\end{aligned}
$$

ここで $P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$ は

$$
\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) &= P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) \\
- P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

問 3

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times \cdots \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\
\times P(A_2 | A_1) P(A_1)
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示す。任意の自然数 k に対して

$$
X_k = A_1 \cap \cdots \cap A_k
$$

とおくと、$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ は

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_n \cap X_{n-1}) \\
&= P(A_n | X_{n-1}) P(X_{n-1}) \\
&= P(A_n | X_{n-1}) P(A_{n-1} \cap X_{n-2}) \\
&= P(A_n | X_{n-1}) P(A_{n-1} | X_{n-2}) P(X_{n-2}) \\
&= \cdots \\
&= P(A_n | X_{n-1}) \times \cdots \times P(A_3 | X_2) \times P(A_2 | A_1) P(A_1) \\
&= P(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times \cdots \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_2 | A_1) P(A_1)
\end{aligned}
$$

よって示せた。

問 4

(1)

以下の等式が成り立たない例は $B \subset A$ のときである。

$$P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$$

なぜならば

$$\begin{aligned} &P(A|B^c) \neq 0 \\ &1 - P(A|B) = 0 \end{aligned}$$

よって成り立たないことが示せた。

(2)

以下の等式が成り立たない例は $A \subset C$ かつ $B \subset C$ の時である。

$$P(C|A \cup B) = P(C|A) + P(C|B) \qquad (\text{ただし } A \cap B = \emptyset)$$

なぜならば

$$\begin{aligned} &P(C|A \cup B) \leq 1 \\ &P(C|A) + P(C|B) = 2 \end{aligned}$$

よって成り立たないことが示せた。

問 5

0 を受信する事象を A、間違いが起こる事象を X、0 を送信する事象を B とおく。
このとき $P(X) = 1/10, P(B) = 1/3, P(B^c) = 2/3$ である。

(1)

0 を受信する確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B \cap X^c) + P(B^c \cap X) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{11}{30}} \end{aligned}$$

(2)

0 を受信したとするとき、それが間違って受信した確率は

$$\begin{aligned} P(X|A) &= \frac{P(A|X)P(X)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B^c \cap X)}{P(A)} \\ &= \frac{2}{30} \times \frac{30}{11} = \mathbf{\frac{2}{11}} \end{aligned}$$

また、1 を受信したときに、間違って受信する確率は

$$\begin{aligned} P(X|A^c) &= \frac{P(A^c|X)P(X)}{P(A^c)} \\ &= \frac{P(B \cap X)}{P(A^c)} \\ &= \frac{1}{30} \times \frac{30}{19} = \mathbf{\frac{1}{19}} \end{aligned}$$

問 6

陽性反応がでる事象を A、疾患がある事象を X とおく。

このとき $P(A|X^c) = 1/5, P(A^c|X) = 1/10, P(X) = 1/10$ である。陽性反応が出たとき、病気にかかっている確率は $P(X|A)$ で表せるから、Bayes の定理を用いると

$$\begin{aligned} P(X|A) &= \frac{P(A|X) \cdot P(X)}{\sum_{x \in \chi} P(A|x)P(x)} \\ &= \frac{P(A|X) \cdot P(X)}{P(A|X)P(X) + P(A|X^c)P(X^c)} \\ &= \frac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{9}{10}} = \mathbf{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

問 7

薬を服用している事象を A_1、薬を服用していない事象を A_2、治癒した事象を B_1、治癒しなかった事象を B_2 とおく。

(1)

薬の服用と病気の治癒の間に因果関係がないとは $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ であるということだから

$$\begin{cases} a = c \times d \\ (1-b) \times c = \dfrac{1}{9} \\ b \times (1-c) = \dfrac{4}{9} \\ (1-c)(1-b) = d \end{cases}$$

が成り立つ。よってこの連立方程式を解くと $a = 2/9, b = 2/3, c = 1/3, d = 2/9$ である。

(2)

薬の服用と病気の治癒の間には独立性が成り立っていないとすると、$P(A \cup B) = \sum_{x \in \chi} P(A|x)$ を用いて

$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{9} = c \\ a + \dfrac{4}{9} = c \\ d + \dfrac{4}{9} = 1 - c \\ d + \dfrac{1}{9} = 1 - b \end{cases}$$

よって a,b,c を d を用いて表すと $a = \frac{4}{9} - d, b = \frac{8}{9} - d, c = \frac{5}{9} - d$ のように表せる。

問 8

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c)$$

これを示す。ここで

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) \end{aligned}$$

を拡張して

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

となるから以上より

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) &= 1 - P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c) \end{aligned}$$

よって示せた。