現代数理統計学の基礎 2 章

Miya

目 次

問 1

(1)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned}\int_0^2 Cx^3 &= \Big[\frac{C}{4}\Big]_0^2 \\ &= \frac{C}{4} \times 16 = 1\end{aligned}$$

よって **C=1/4**。つぎに分布関数 $F(x)$ は

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{4}t^3 dt \\ &= \Big[\frac{1}{16}t^4\Big]_0^x = \frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(2)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-|x|}dx \\ &= 2C\int_0^{\infty} e^{-x}dx \\ &= 2C\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty} \\ &= 2C(0+1) = 2C = 1\end{aligned}$$

よって **C=1/2** である。つぎに分布関数 F(x) は

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt$$

x>0 のとき

$$\begin{aligned}F(x) &= 1 - \int_x^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t}dt \\ &= 1 - \Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_x^{\infty} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}\end{aligned}$$

x=<0 のとき

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t}dt \\ &= \Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_{-x}^{\infty} = \frac{1}{2}e^{x}\end{aligned}$$

以上より

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{if } x > 0, \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{if } x <= 0, \end{cases}$$

(3)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ce^{-2x} &= C\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_0^\infty \\ &= C(0 + \frac{1}{2}) = 1 \end{aligned}$$

よって **C=2** である。また分布関数 F(x) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt \\ &= \int_0^x 2e^{-2t}dt \\ &= \Big[-e^{-2t}\Big]_0^x = -e^{-2x} + 1 \end{aligned}$$

(4)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &= C\int_0^\infty e^{-x}e^{-e^{-x}}dx \\ &= C\Big[e^{-e^{-x}}\Big]_0^\infty \\ &= C(e^0 - e^{-1}) \\ &= C \times \frac{e-1}{e} = 1 \end{aligned}$$

よって $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e-1}}$ である。また分布関数 F(x) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt \\ &= \frac{e}{e-1}\int_0^x e^{-t}e^{-e^{-t}}dt \\ &= \frac{e}{e-1}\Big[e^{-e^{-t}}\Big]_0^x = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{e^{-e^{-x}}}}{\mathbf{e-1}} \end{aligned}$$

問 2

関数が分布関数であるとは $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ であること、非減少関数であること、右連続であることの 3 つが必要十分条件である。よってこの 3 つを示し、またその確率密度関数を求める。

(1)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x})^{-1} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(1+e^{-x})^{-1} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$e^{-x_1} > e^{-x_2}$$
$$1+e^{-x_1} > 1+e^{-x_2}$$
$$(1+e^{-x_1})^{-1} < (1+e^{-x_2})^{-1}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に e^{-x} は連続関数だから

$$\lim_{x\to a+}(1+e^{-x})^{-1} = (1+e^{-a})^{-1} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx}(1+e^{-x})^{-1} \\ &= (1+e^{-x})^{-2}\cdot e^{-x} \end{aligned}$$

(2)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to 1} 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$x_1^2 < x_2^2$$
$$\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$$
$$1-\frac{1}{x_1^2} < 1-\frac{1}{x_2^2}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に $\frac{1}{x^2}$ は $x > 1$ において連続だから

$$\lim_{x \to a+} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{a^2} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - x^{-2}) = 2x^{-3}$$

(3)

まず $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{1 + \log x} &= 0 \\ \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{1 + \log x} &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{\log x} + 1} = 1 \end{aligned}$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$\begin{gathered} \log x_1 < \log x_2 \\ \frac{1}{\log x_1} + 1 > \frac{1}{\log x_2} + 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{\log x_1} + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\log x_2} + 1} \\ F(X_1) < F(X_2) \end{gathered}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に $\log x$ は $x > 1$ において連続だから

$$\lim_{x \to a+} \frac{\log x}{1 + \log x} = \frac{\log a}{1 + \log a} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{logx}{1 + \log x}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{x}(1 + \log x) - \log x \cdot (\frac{1}{x})}{(1 + \log x)^2} \\ &= \frac{1}{x(1 + \log x)^2} \end{aligned}$$

(4)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, lim_{x\to\infty}F(x)=1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to 0} 1-e^{-x^2/2}=0$$
$$\lim_{x\to\infty} 1-e^{-x^2/2}=1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$e^{-x_1} > e^{-x_2}$$
$$e^{-\frac{x_1^2}{2}} > e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$
$$1-e^{-\frac{x_1^2}{2}} < 1-e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に e^{-x} は連続関数だから

$$\lim_{x\to a+} 1-e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-e^{-\frac{a^2}{2}} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}(1-e^{-\frac{x^2}{2}})=xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

問 3

$g(x)$ が確率密度関数になることは $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)=1$ になることが示せれば良い。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x) &= \int_a^{\infty} g(x)dx \\
&= \int_a^{\infty} \frac{f(x)}{1-F(a)}dx \\
&= \frac{1}{1-F(a)}\Big[F(x)+C\Big]_a^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-F(a)}\times(\lim_{x\to\infty} F(x)-F(a)) \\
&= 1 \qquad\qquad (\because \lim_{x\to\infty} F(x)=1)
\end{aligned}$$

よって g(x) は確率密度関数である。つぎに $f(x)=e^{-x}, x>0$ としたとき

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_0^x e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^x=-e^{-x}+1$$

であるから a=1 のとき $g(x)$ は

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{f(x)}{1-F(1)} \\
&= \frac{e^{-x}}{1-(1-e^{-1})} = e^{-x+1}
\end{aligned}$$

問 4

(1)

$E[(X-t)^2]$ を最小にするような t は

$$
\begin{aligned}
E[(X-t)^2] &= E[X^2 - 2tX + t^2] \\
&= E[X^2] - 2tE[X] + t^2 \\
&= (t - E[X])^2 - E^2[X] + E[X^2]
\end{aligned}
$$

よって平方完成より $t = E[X]$ のときが最小になる。

(2)

$E[|X-t|]$ が最小になるような t は

$$
\begin{aligned}
E[|X-t|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-t| f_X(x)dx \\
&= \int_{t}^{\infty} (x-t) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{t} (-x+t) f_X(x)dx \\
&= \Big(\int_{t}^{\infty} x f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{t} x f_X(x)dx \Big) - t\Big(\int_{t}^{\infty} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \Big) \\
&= \Big(E[X] - 2\int_{-\infty}^{t} x f_X(x)dx \Big) - t\Big(1 - 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \Big)
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{\partial E[|X-t|]}{\partial t} = 0$ が成り立つ時、$E[|X-t|]$ が最小になるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[|X-t|]}{\partial t} &= -2tf_X(t) - 1 + 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx + 2tf_X(t) \\
&= -1 + 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

つまり t は

$$
\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \frac{1}{2}
$$

を満たす t であり、すなわち X の確率分布の中央値である。

問 5

解法 1

h 次のモーメントが存在するとは、つまり $E[|X|^h] < \infty$ であることを示れば良い。$0 < h < k$ である k 次のモーメントが存在するから $E[|X|^k] < \infty$ が成り立つ。

$$|X|^h < |X|^k + 1$$

が成り立つから、両辺に期待値をとった

$$E[|X|^h] < E[|X|^k] + 1$$

よって $E[|X|^h] < \infty$ であることを示せたので、h 次のモーメントが存在する。

解法 2

$\phi(x) = x^m, m > 1$ となるような関数 $\phi(x)$ を考える。2 階微分した $\phi"(x) = m(m-1)x^{m-2}$ は $x > 0$ のとき $\phi"(x) > 0$ だから $x > 0$ において凸関数である。よって $Jensen$ の不等式 より

$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$$

が成り立ち、$m = k/h, X = |X|^h$ と考えると

$$E[|X|^h]^{\frac{k}{h}} \leq E[|X|^{h \cdot \frac{k}{h}}]$$
$$\therefore E[|X|^h]^{\frac{k}{h}} \leq E[|X|^k]$$

よって $E[|X|^h] < \infty$ より h 次のモーメントが存在する

(追記:)ϕ の中に入るのは有限値が入らないといけないが、今のままだと有限値を証明するために有限値を仮定して解いているので、論理的に正しくないかも。(循環論法)

問6

X は非負の整数上で確率をもつ離散型確率変数であるから、期待値 $E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{x-1} 1\Big)P(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{x-1} P(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{x=k+1}^{\infty} P(x)$$

また、$\sum_{k=0}^{\infty}\{1-F(k)\}$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{1-F(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{1-\sum_{x=0}^{k} P(x)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{x=0}^{\infty} P(x) - \sum_{x=0}^{k} P(x)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{x=k+1}^{\infty} P(x)$$

以上より

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty}\{1-F(k)\}$$

が成り立つ。

問7

(1)

X は実数直線上の連続な確率変数であるから、期待値 $E[X]$ は

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty}\Big(\int_{0}^{x} dt\Big) f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{0}\Big(\int_{x}^{0} dt\Big) f_X(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} dx f_X(x) - \int_{-\infty}^{0} dt \int_{-\infty}^{t} dx f_X(x) \\
&= \int_{0}^{\infty}\Big(\int_{t}^{\infty} f_X(x)dx\Big)dt - \int_{-\infty}^{0}\Big(\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx\Big)dt \\
&= \int_{0}^{\infty}\{1-F(t)\}dt - \int_{-\infty}^{0} F(t)dt \\
&= \int_{0}^{\infty}\{1-F(x)\}dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx
\end{aligned}$$

よって示せた。

(2)

$E[X] = \int_0^1 F^{-1}(t)dt$ が成り立つことを示す。$t = F_X(x)$ より両辺を x で微分して

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$
$$\therefore dt = f_X(x)dx$$

また分布関数の性質より

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

以上より

$$\int_0^1 F^{-1}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = E[X]$$

よって示せた。

問 8

連続確率関数 X の確率密度関数が $f(x-\mu)$ で与えられているから

$$E[X] - \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x-\mu)dx - \mu\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\mu)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x-\mu)dx$$

ここで $x - \mu = y$ とおくと $\frac{dx}{dy} = 1$ より

$$E[X] - \mu = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$$

すべての実数 y に対して $f(y) = f(-y)$ が成り立つことより関数 $yf(y)$ は奇関数。よって

$$E[X] - \mu = 0$$
$$\therefore E[X] = \mu$$

問 9

Y の上側 100α て分位点を y_α とおくと

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{y_\alpha} f_Y(y)dy$$

と式が成り立つ。ここで Y の分布関数 $F_Y(y)$ は

$$F_Y(y) = P(Y \in \{y \quad | \sigma x + \mu \leq y\})$$

よって Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dy} P(Y \in \{y \quad | \sigma x + \mu \leq y\}) \\ &= \frac{d}{dy} P(X \in \{x \quad | x \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\}) \end{aligned}$$

よって初めの等式の右辺の y を x に置換すると $\sigma > 0$ より

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{\frac{y_\alpha - \mu}{\sigma}} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f_X(x)dx$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{y_\alpha - \mu}{\sigma} &= x_\alpha \\ \therefore y_\alpha &= \sigma x_\alpha + \mu \end{aligned}$$

問 10

(1)

積率母関数 $M_X(t)$ は定義より

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x} dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \Big[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\Big]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{1-t} \qquad (t-1<0 \text{ のとき})$$

(2)

$$E[X^k] = M_X^{(k)}(0) = k!(1-t)^{-(k+1)}|_{t=0} = k!$$

(3)

$Y = g(X)$ とおくと

$$F_Y(y) = P(g(X) \le y) = P(X \in \{x|g(x) \le y\})$$

ここで $Y = g(X) = \sigma X + \mu$ より g(x) は単調増加関数であるから

$$F_Y(y) = P(X \in \{x|x \le \frac{y-\mu}{\sigma}\})$$

よって $X > 0, \sigma > 0$ より $y > \mu$, つまり $(y-\mu)/\sigma > 0$ であることに注意して

$$F_Y(y) = \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} e^{-x} dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} = 1 - \exp\{-\frac{y-\mu}{\sigma}\}$$

また確立密度関数は $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ より

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(1 - \exp\{-\frac{y-\mu}{\sigma}\}\Big) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{y-\mu}{\sigma}\}$$

ただし、$y > \mu$ のとき。$y \le \mu$ のときはそれぞれ 0

問 11

まず $f(k) = 1/2^{k+1}$ が確率関数になることを示す。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 1$$

よって示せた。つぎに確率母関数 $G_X(s)$ は

$$\begin{aligned} G_X(s) = E[s^X] &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (\frac{s}{2})^{k-1} = \frac{1}{2-s} \qquad (-2 < s < 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

また積率母関数 $M_X(t)$ は $M_X(t) = G_X(e^t)$ より

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{1}{2-e^t} \qquad (t < \log 2 \text{ のとき})$$

最後に k 次階乗モーメントは $G_X^{(k)}(1)$ で求まるから

$$E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = G^{(K)}(1) = k!(2-s)^{-(k+1)}|_{s=1} = k!$$

問 12

(1)

X の積率母関数は (t=0 のときは $M_X(0) = 1$)

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx}dx = \left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_0^1 = \frac{1}{t}(e^t - 1) \qquad (t \neq 0)$$

また $E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$ で表せられるから

$$\begin{aligned} E[X] = M'_X(0) &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{t}(e^t - 1)|_{t=0} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t + (t-1)e^t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ただし、上の式はロピタルの定理を用いた。また、

$$\begin{aligned} E[X^2] = M"_X(0) &= \frac{(e^t + (t-1)e^t)t^2 - 2((t-1)e^t + 1)t}{t^4}|_{t=0} \\ &= \frac{t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2}{t^3}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t(t^2 - 2t + 2) + e^t(2t - 2)}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

こちらもロピタルの定理を用いた。よって平均と分散はそれぞれ

$$\begin{aligned} E[X] =& \frac{1}{2} \\ Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 =& \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(2)

$Y = X^2$ としたときの確率密度関数と平均、分散を求める。まず、Y の分布関数 $F_Y(y)$ は $0 < Y < 1$ より

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^2 \leq Y) \\ &= P(X \in \{x | 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}) \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} 1dx = \sqrt{y} \end{aligned}$$

また、確率密度関数 $f_Y(y)$ は $0 < Y < 1$ において

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

ただし $Y \leq 0, Y \geq 1$ のとき $f_Y(y) = 0$ また、$E[Y], E[Y^2]$ はそれぞれ

$$E[Y] = E[X^2] = \frac{1}{3}$$
$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{5}$$

よって平均と分散はそれぞれ

$$E[Y] = \frac{1}{3}$$
$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{4}{45}$$

(3)

$Y = -\log(X)$ とした時の分布関数 $F_Y(y)$ は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(-\log X \leq y) \\ &= P(X \geq e^{-y}) \\ &= \int_{e^{-y}}^1 1dx = 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

よって確率密度関数 $f_Y(y)$ は $0 < Y$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) = e^{-y}$$

また $Y \leq 0$ のとき $f_Y(y) = 0$ である。$E[Y], E[Y^2]$ はそれぞれ

$$E[Y] = \int_0^\infty ye^{-y}dy = \Big[y \cdot -e^{-y}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$$
$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 \cdot e^{-y}dy = \Big[y^2 \cdot -e^{-y}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty y \cdot e^{-y}dy = 2$$

以上より平均と分散はそれぞれ

$$E[Y] = 1$$
$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1$$

(4)

$\sigma > 0, Y = \sigma X + \mu$ のとき Y の分布関数は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\sigma X + \mu \leq y) \\ &= P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) \\ &= \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} 1 dx = \frac{y-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

また確率密度関数は $\mu < Y < \sigma + \mu$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(\frac{y-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}$$

ただし、$Y \leq \mu, \sigma + \mu \leq Y$ のとき $f_Y(y) = 0$ また、積率母関数は

$$M_Y(t) = \int_\mu^{\sigma+\mu} e^{ty}\frac{1}{\sigma}dy = \Big[\frac{1}{\sigma t}e^{ty}\Big]_\mu^{\sigma+\mu} = \frac{e^{t\mu}}{\sigma t}(e^{t\sigma} - 1)$$

最後に $E[Y], E[Y^2]$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_\mu^{\sigma+\mu} y \cdot \frac{1}{\sigma}dy = \frac{1}{\sigma}\Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_\mu^{\sigma+\mu} = \frac{\sigma + 2\mu}{2} \\ E[Y^2] &= \int_\mu^{\sigma+\mu} y^2 \cdot \frac{1}{\sigma}dy = \frac{1}{\sigma}\Big[\frac{1}{3}y^3\Big]_\mu^{\sigma+\mu} = \frac{\sigma^2 + 3\sigma\mu + 3\mu^2}{3} \end{aligned}$$

以上より平均と分散はそれぞれ

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{\sigma + 2\mu}{2} \\ Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 &= \frac{\sigma^2}{12} \end{aligned}$$

問 13

(1)

X の確率密度関数が $f(x) = 1/2, -1 < x < 1$ で与えられている時、積率母関数は

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{-1}^{1} e^{tx}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2t}(e^t - e^{-t}) \qquad (t \neq 0 \text{ のとき})$$

ただし $t = 0$ のとき $M_X(0) = 1$ である。また、$E[X]$ と $E[X^2]$ はそれぞれ

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}dx = 0$$
$$E[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{3}$$

よって平均と分散はそれぞれ

$$E[X] = 0$$
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3}$$

(2)

$Y = X^2$ なる変数変換した時の Y の分布関数は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}dx = \sqrt{y} \end{aligned}$$

よって確率密度関数 $f_Y(y)$ は $0 < y < 1$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ただし $y \leq 0, 1 \leq y$ のとき $f_Y(y) = 0$ また、$E[Y]$ と $E[Y^2]$ はそれぞれ

$$E[Y] = E[X^2] = \frac{1}{3}$$
$$E[Y^2] = \int_{0}^{1} y^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{5}$$

以上より平均と分散はそれぞれ

$$E[Y] = \frac{1}{3}$$
$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{4}{45}$$

(3)

$Y = -\log(|X|)$ なる変数変換した時の Y の分布関数は

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(-\log(|X|) \leq y) \\
&= P(|X| \geq e^{-y}) \\
&= P(e^{-y} \leq X < 1, -1 < X \leq -e^{-y}) \qquad (-1 < X < 1 \text{ より } 0 < e^{-y} < 1) \\
&= \int_{e^{-y}}^{1} \frac{1}{2}dx + \int_{-1}^{-e^{-y}} \frac{1}{2}dx = 1 - e^{-y}
\end{aligned}$$

よって確率密度関数は $0 < y < \infty$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}f_Y(y) = e^{-y}$$

ただし、$y \leq 0$ のとき $f_Y(y) = 0$ である。また、$E[Y], E[Y^2]$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^\infty y \cdot e^{-y}dy = \Big[y \cdot -e^{-y}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y}dy = 1 \\
E[Y^2] &= \int_0^\infty y^2 \cdot e^{-y}dy = \Big[y^2 \cdot -e^{-y}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty y \cdot e^{-y}dy = 2E[Y] = 2
\end{aligned}$$

以上より平均と分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
E[Y] &= 1 \\
Var(Y) &= E[Y^2] - E[Y]^2 = 1
\end{aligned}$$

(4)

$Y = \sigma X + \mu, \sigma > 0$ を変数変換とする時 Y の分布関数は

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(\sigma X + \mu \leq y) \\
&= P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) \\
&= \int_{-1}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(\frac{y-\mu}{\sigma} + 1)
\end{aligned}$$

よって確率密度関数は $-\sigma + \mu < Y < \sigma + \mu$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2\sigma}$$

また $Y \leq -\sigma + \mu, \sigma + \mu \leq Y$ のとき $f_Y(y) = 0$ である。積率母関数は

$$M_Y(t) = \int_{-\sigma+\mu}^{\sigma+\mu} e^{ty}\frac{1}{2\sigma}dy = \frac{e^{t\mu}}{2\sigma t}(e^{t\sigma} - e^{-t\sigma})$$

最後に平均と分散はそれぞれ

$$E[Y] = E[\sigma X + \mu] = \sigma E[X] + \mu = \mu$$
$$Var(Y) = Var(\sigma X + \mu) = \sigma^2 Var(X) = \frac{1}{3}\sigma^2$$

問 14

X が $f(X) = (x+1)/2, -1 < x < 1$ で与えられるとき $Y = X^2$ の分布関数は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{x+1}{2} dx = \sqrt{y} \end{aligned}$$

よって確率密度関数は $0 < y < 1$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ただし $y \leq 0, 1 \leq y$ のとき $f_Y(y) = 0$ である。また $E[Y], E[Y^2]$ はそれぞれ

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{3}$$
$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{5}$$

以上より平均と分散はそれぞれ

$$E[Y] = \frac{1}{3}$$
$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{4}{45}$$

問 15

確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = (2/9)(x+1), -1 \leq x \leq 2$ で与えられるとき
$Y = X^2$ の分布関数は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(x+1)dx \end{aligned}$$

ここで $-1 \leq X \leq 2$ より $0 \leq Y \leq 4$ であるから X の範囲に注意して Y を場合分けすると

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(x+1)dx = \frac{4\sqrt{y}}{9} \qquad (0 < Y \leq 1 \text{ のとき})$$

$$F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(x+1)dx = \frac{y + 2\sqrt{y} + 1}{9} \qquad (1 < Y \leq 4 \text{ のとき})$$

ただし $Y \leq 0$ のとき $F_Y(y) = 0$、$4 < Y$ のとき $F_Y(y) = 1$ である。よって密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{2}{9\sqrt{y}} \qquad (0 < y \leq 1 \text{ のとき})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9\sqrt{y}} \qquad (1 < y \leq 4 \text{ のとき})$$

また $y \leq 0, 4 < y$ のとき $f_Y(y) = 0$ である。

問 16

(1)

2 つの確率変数 X と Y の間に、すべての t に対して $P(X>t) \geq P(Y>t)$ が成り立つとき

$$
\begin{aligned}
P(X>t) &= P(\Omega) - P(X \leq t) = 1 - F_X(t) \\
P(Y>t) &= P(\Omega) - P(Y \leq t) = 1 - F_Y(t)
\end{aligned}
$$

であるから $P(X>t) \geq P(Y>t)$ は

$$
\begin{aligned}
1 - F_X(t) &\geq 1 - F_Y(t) \\
F_X(t) &\leq F_Y(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで上の 2 式をそれぞれ同じ積分区間で積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty 1 - F_X(x)dx &\geq \int_0^\infty 1 - F_Y(y)dy \\
-\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx &\geq -\int_{-\infty}^0 F_Y(y)dy
\end{aligned}
$$

よって上の 2 式を足すと

$$
\int_0^\infty 1 - F_X(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \geq \int_0^\infty 1 - F_Y(y)dy - \int_{-\infty}^0 F_Y(y)dy
$$

ここで問 7(1) より

$$
E[X] = \int_0^\infty \{1 - F(x)\}dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx
$$

で表されるから

$$
E[X] \geq E[Y]
$$

(2)

$F_X^{-1}(t) \geq F_Y^{-1}(t)$ が成り立つことを示す。$x_t = F_X^{-1}(t), y_t = F_Y^{-1}(t)$ とする。
(1) より任意の t において $F_X(t) \leq F_Y(t)$ だから

$$
\begin{aligned}
F_X(y_t) &\leq F_Y(y_t) \\
&= t = F_X(x_t)
\end{aligned}
$$

よって分布関数は単調増加であるから

$$
\begin{aligned}
y_t &\leq x_t \\
\therefore F_Y^{-1}(t) &\leq F_X^{-1}(t)
\end{aligned}
$$

問 17

(1)

$h(t) = \log A(t)$ とき、$h(t)$ が単調増加であることを示す。($t \neq 0$ とする)

$$
\begin{aligned}
&h'(t) = \frac{E[X^t(\log X)]}{E[X^t]t} - \frac{\log E[X^t]}{t^2} \\
&h'(t) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{E[X^t \log X]}{E[X^t]t} \geq \frac{\log E[X^t]}{t^2} \\
&\Leftrightarrow E[X^t \log X^t] \geq E[X^t] \log E[X^t] \qquad\qquad (\text{両辺に } t^2 \text{をかける})
\end{aligned}
$$

ここで $Y = X^t$ とおくと

$$E[Y \log Y] \geq E[Y] \log E[Y]$$

ここで $g(y) = y \log y$ は $g"(y) = \frac{1}{y} > 0(y > 0$ のとき$)$ より、$y > 0$ で $g(y)$ は凸関数。
よって $Y = X^t$ で X は正の確率変数より $Y > 0$ だから $Jensen$ の不等式より

$$E[Y \log Y] \geq E[Y] \log E[Y]$$

が成り立つので、$h(t)$ は $t \neq 0$ のとき単調増加。また $t = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
h(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{\log E[X^t]}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{E[X^t \log X]}{E[X^t]} = E[\log X]
\end{aligned}
$$

よって $t \neq 0$ のとき単調増加であり、t=0 のとき連続だから h(t) は $|t| \leq 1$ で単調増加。
以上より A(t) は増加関数。

(2)

$H = (E|X^{-1}|)^{-1}, M = E[X]$ は (1) で示した増加関数 $A(t)$ にそれぞれ $t = -1, t = 1$ を代入したものであるから、$H \leq M$ である。ここで (1) より

$$
\begin{aligned}
h(0) &= E[\log X] \\
\therefore A(0) = \exp(h(0)) &= \exp(E[\log X])
\end{aligned}
$$

よって $G = A(0)$ より、$H \leq G \leq M$ である。

問 18

まず $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(m+1)t^k/(m+k+1)k!$ が成り立つことを示す。

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^1 e^{tx}(m+1)x^m dx \\
&= (m+1)\int_0^1 x^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^k}{k!}dx \\
&= (m+1)\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{m+k}}{k!}t^k dx \\
&= (m+1)\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)k!}t^k\Big]_0^1 \\
&= (m+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{(m+k+1)k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)}{(m+k+1)k!}t^k
\end{aligned}
$$

よって示せた。また、これを用いて平均分散は

$$
\begin{aligned}
M_X^{(1)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}kt^{k-1} = \frac{m+1}{m+2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}kt^{k-1} \\
M_X^{(2)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}k(k-1)t^{k-2} = \frac{m+1}{m+3} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{m+1}{(m+k+1)k!}k(k-1)t^{k-2} \\
E[X] &= M_X^{(1)}(0) = \frac{m+1}{m+2} \\
E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) = \frac{m+1}{m+3} \\
Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{m+1}{m+3} - (\frac{m+1}{m+2})^2 = \frac{m+1}{(m+3)(m+2)^2}
\end{aligned}
$$