現代数理統計学の基礎 2章

Miya

問 1

(1)

全確率は 1 だから

$$\int_0^2 Cx^3 = \Big[\frac{C}{4}\Big]_0^2$$
$$= \frac{C}{4} \times 16 = 1$$

よって **C=1/4**。つぎに分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
$$= \int_0^x \frac{1}{4}t^3 dt$$
$$= \Big[\frac{1}{16}t^4\Big]_0^x = \frac{1}{16}x^4$$

(2)

全確率は 1 だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-|x|}dx$$
$$= 2C\int_0^{\infty} e^{-x}dx$$
$$= 2C\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty}$$
$$= 2C(0+1) = 2C = 1$$

よって **C=1/2** である。つぎに分布関数 F(x) は

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt$$

x>0 のとき

$$F(x) = 1 - \int_x^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t}dt$$
$$= 1 - \Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_x^{\infty}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

x=<0 のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t} dt \\ &= \Big[-\frac{1}{2} e^{-t} \Big]_{-x}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{x} \end{aligned}$$

以上より

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{if } x > 0, \\ \frac{1}{2} e^{x} & \text{if } x <= 0, \end{cases}$$

(3)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} Ce^{-2x} &= C\Big[-\frac{1}{2} e^{-2x} \Big]_{0}^{\infty} \\ &= C(0 + \frac{1}{2}) = 1 \end{aligned}$$

よって **C=2** である。また分布関数 F(x) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt \\ &= \int_{0}^{x} 2e^{-2t} dt \\ &= \Big[-e^{-2t} \Big]_{0}^{x} = -e^{-2x} + 1 \end{aligned}$$

(4)

全確率は 1 だから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= C \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\ &= C\Big[e^{-e^{-x}} \Big]_{0}^{\infty} \\ &= C(e^{0} - e^{-1}) \\ &= C \times \frac{e-1}{e} = 1 \end{aligned}$$

よって $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e-1}}$ である。また分布関数 F(x) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt \\ &= \frac{e}{e-1} \int_{0}^{x} e^{-t} e^{-e^{-t}} dt \\ &= \frac{e}{e-1} \Big[e^{-e^{-t}} \Big]_{0}^{x} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{e^{-e^{-x}}}}{\mathbf{e-1}} \end{aligned}$$

問 2

関数が分布関数であるとは $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ であること、非減少関数であること、右連続であることの 3 つが必要十分条件である。よってこの 3 つを示し、またその確率密度関数を求める。

(1)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x})^{-1} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(1+e^{-x})^{-1} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$e^{-x_1} > e^{-x_2}$$
$$1+e^{-x_1} > 1+e^{-x_2}$$
$$(1+e^{-x_1})^{-1} < (1+e^{-x_2})^{-1}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に e^{-x} は連続関数だから

$$\lim_{x\to a+}(1+e^{-x})^{-1} = (1+e^{-a})^{-1} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx}(1+e^{-x})^{-1} \\ &= (1+e^{-x})^{-2}\cdot e^{-x} \end{aligned}$$

(2)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty}F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to1} 1-\frac{1}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$x_1^2 < x_2^2$$
$$\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$$
$$1-\frac{1}{x_1^2} < 1-\frac{1}{x_2^2}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に $\frac{1}{x^2}$ は $x>1$ において連続だから

$$\lim_{x\to a+} 1-\frac{1}{x^2} = 1-\frac{1}{a^2} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(1-x^{-2}) = 2x^{-3}$$

(3)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, lim_{x\to\infty}F(x)=1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1+\log x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{1+\log x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\log x}+1} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$\begin{gathered}\log x_1 < \log x_2 \\ \frac{1}{\log x_1}+1 > \frac{1}{\log x_2}+1 \\ \frac{1}{\frac{1}{\log x_1}+1} < \frac{1}{\frac{1}{\log x_2}+1} \\ F(X_1) < F(X_2)\end{gathered}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に $\log x$ は $x>1$ において連続だから

$$\lim_{x\to a+}\frac{\log x}{1+\log x} = \frac{\log a}{1+\log a} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{logx}{1+\log x}) \\ &= \frac{\frac{1}{x}(1+\log x)-\log x\cdot(\frac{1}{x})}{(1+\log x)^2} \\ &= \frac{1}{x(1+\log x)^2}\end{aligned}$$

(4)

まず $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to0} 1 - e^{-x^2/2} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} 1 - e^{-x^2/2} = 1$$

より示せた。つぎに、任意の 2 つの数 x_1, x_2 に対して $x_1 < x_2$ が成り立つ時

$$e^{-x_1} > e^{-x_2}$$
$$e^{-\frac{x_1^2}{2}} > e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$
$$1 - e^{-\frac{x_1^2}{2}} < 1 - e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$

よって非減少関数であることが示せた。最後に e^{-x} は連続関数だから

$$\lim_{x\to a+} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} = F(a)$$

より右連続であることも示せた。よって与えられた関数は分布関数である。また確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

問 3

$g(x)$ が確率密度関数になることは $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) = 1$ になることが示せれば良い。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x) &= \int_a^{\infty} g(x)dx \\
&= \int_a^{\infty} \frac{f(x)}{1-F(a)}dx \\
&= \frac{1}{1-F(a)}\Big[F(x) + C\Big]_a^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-F(a)} \times (\lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)) \\
&= 1 \qquad\qquad (\because \lim_{x\to\infty} F(x) = 1)
\end{aligned}$$

よって g(x) は確率密度関数である。つぎに $f(x) = e^{-x}, x > 0$ としたとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -e^{-x} + 1$$

であるから a=1 のとき $g(x)$ は

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{f(x)}{1-F(1)} \\
&= \frac{e^{-x}}{1-(1-e^{-1})} = e^{-x+1}
\end{aligned}$$

問 4

(1)

$E[(X-t)^2]$ を最小にするような t は

$$
\begin{aligned}
E[(X-t)^2] &= E[X^2 - 2tX + t^2] \\
&= E[X^2] - 2tE[X] + t^2 \\
&= (t - E[X])^2 - E^2[X] + E[X^2]
\end{aligned}
$$

よって平方完成より $t = E[X]$ のときが最小になる。

(2)

$E[|X-t|]$ が最小になるような t は

$$
\begin{aligned}
E[|X-t|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-t| f_X(x)dx \\
&= \int_{t}^{\infty} (x-t) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{t} (-x+t) f_X(x)dx \\
&= \Big(\int_{t}^{\infty} x f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{t} x f_X(x)dx \Big) - t\Big(\int_{t}^{\infty} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \Big) \\
&= \Big(E[X] - 2\int_{-\infty}^{t} x f_X(x)dx \Big) - t\Big(1 - 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \Big)
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{\partial E[|X-t|]}{\partial t} = 0$ が成り立つ時、$E[|X-t|]$ が最小になるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E[|X-t|]}{\partial t} &= -2tf_X(t) - 1 + 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx + 2tf_X(t) \\
&= -1 + 2\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

つまり t は

$$
\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \frac{1}{2}
$$

を満たす t であり、すなわち X の確率分布の中央値である。