1 Aritmetičke operacije u binarnom brojnom sistemu

Aritmetičke operacije s brojevima zapisanim u binarnom brojnom sistemu izvršavaju se po pravilima koja važe za aritmetičke operacije sa brojevima zapisanim u dekadnom brojnom ssistemu, ali uzimamo u obzir da radimo samo sa dva broja (0 i 1), a baza je 2.

1.1 Binarno sabiranje

Osnovna pravila sabiranja binarnih brojeva:

0	0	1	1
+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
= 0	= 1	= 1	= 10

U rezultatu pravila 1 + 1 = 10, zbir je 0, a cifra 1 rezultata predstavlja cifru koja se prenosi na sledeće više brojno mesto i sabira se sa ciframa višeg brojnog mesta.

Primer:

Sabrati binarne brojeve:

$(0101100)_2 + (0101010)_2$

prenos: 101000

0101100

\+ 0101010

1010110

$(0110.110)_2 + (0110.011)_2$

prenos: 110 110

0110.110

\+ 0110.011

1101.001

1.2 Binarno oduzimanje

Osnovna pravila oduzimanja binarnih brojeva:

0	0	1	1
- 0	- 1	-0	- 1
= 0	= 11	= 1	= 0

U rezultatu pravila 0 - 1 = 11, umanjenik je veći od umanjioca prva cifra 1 označava cifru koju treba oduzeti od sledećeg višeg brojnog mesta umanjioca.

Primer:

Oduzeti binarne brojeve:

$(101011)_2 - (010101)_2$

prenos: 010100

101011

\- 010101

010110

$(11100.011)_2 + (10011.101)_2$

prenos: 00011 100

11100.011

\- 10011.101

01000.110

U racunarskim sistemima oduzimanje binarnih brojeva vrsi se pomoću metode drugog komplementa.

1.3 Binarno množenje

Osnovna pravila množenja binarnih brojeva :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \times 0 & \times 1 & \times 0 & \times 1 \\ \hline = 0 & = 0 & = 0 & = 1 \end{array}$$

Pomnožite binarne brojeve: a) $(100101)_2 \times (110011)_2$, b) $(101.011)_2 \times (110.001)_2$.

```
          a)                        b)

     100101                  101.011
   × 110011                × 110.001
 ---------------          ---------------
 100101                      101011
  100101                      101011
   000000                      000000
    000000                      000000
     100101                      000000
      100101                      101011
 ------------------          ------------------
=11101011111              =100000.111011
```

Treba uočiti da je položaj binarne tačke u proizvodu jednak položaju decimalne tačke u dekadnom brojnom sistemu.

1.4 Binarno deljenje

Osnovna pravila deljenja binarnih brojeva:

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \div 1 & \div 1 \\ \hline = 0 & = 1 \end{array}$$

Deljenje sa nulom nije dozvoljeno.

```
a)
100111 ÷ 11 = 1101
- 11
= 11
- 11
= 01
- 0
= 011
- 11
= 0
```

```
b)
11000.11 ÷ 101.1 = 100.1
- 1011
= 10
- 0
= 101
- 0
= 1011
- 1011
= 0
```

1.5 Komplementi

Do sada su analizirane aritmetičke operacije sa pozitivnim brojevima, tj. brojevima s pozitivnim predznakom.

Jasno je da se u računanju pojavljuju i negativni brojevi, tj. brojevi sa negativnim predznakom. Kako se predznaci pozitivnih i negativnih brojeva u binarnom brojnom sistemu ne mogu prikazati znakovima predznaka + i -, za njihovo prikazivanje se koriste binarne cifre 0 i 1.

Kod prikazivanja brojeva s predznakom, predznak broja pokazuje krajnja leva binarna cifra. U digitalnom sistemu brojeve mozemo da prikazemo na na tri načina. Jedan od načina prikaza pozitivnih i negativnih brojeva predstavlja zapis brojeva u njihovom komplementarnom obliku.

Oduzimanje brojeva u digitalnim sistemima moguće je pojednostaviti korišcenjem komplementa broja, tj. umanjilac se zapisuje kao negativni broj (suprotni broj), a razlika se doija sabiranjem umanjenika i suprotnog broja umanjioca.

U svakom brojnom sistemu baze r, zadati broj ima dva svoja suprotna broja:

r-ti komplement (komplement baze), i r - 1 komplement (umanjeni komplement baze).

1.5.1 r-ti komplement broja

r-ti komplement $[N]_r$ broja $(N)_r$ sa n cifara i bazom r je prikazan na sledeći način:

$$[N]_r = \begin{cases} (r^n)_r - (N)_r & N \neq 0 \\ 0 & N = 0 \end{cases}$$

Jedno od pravila za dobijanje drugog komplementa binarnog broja glasi:

počevši od cifre najmanje težine i krecući se prema cifri najveće težine prepisivati cifre dok se ne prepiše i prva cifra 1.

Nakon prepisivanja prve cifre 1, prepisujući i dalje u smeru cifre najveće težine, zameniti preostale cifre 0 ciframa 1, a cifre 1 ciframa 0.

Odredite: a) deseti komplement broja $(235)_{10}$ i b) drugi komplement binarnog broja $(011010)_2$.

a) $[235]_{10} = 10^3 - 235$
$= 1000 - 235$
$= 765$

b) $[011010]_2 = 2^6 - (011010)_2$
$= (1000000)_2 - (011010)_2$
$= (100110)_2$

U primeru pod a) n=3, a baza 10, a u primeru pod b) n=6 a baza 2

Odredite drugi komplement brojeva: a) $(101101000)_2$, b) $(010101101)_2$ i c) $(01010.00100)_2$.

a) $(N)_2 = (101101000)_2$
↑ ↑
Prva cifra 1 Cifra najmanje tezine
$[N]_2 = (010011000)_2$

b) $(N)_2 = (010101101)_2$
↑
$[N]_2 = (101010011)_2$

c) $(N)_2 = (01010.00100)_2$
↑ ↑
$[N]_2 = (10101.11100)_2$

1.5.2 r - 1 komplement broja

(r - 1) komplement $[N]_{r-1}$ broja $(N)_r$ sa n cifara i bazom racuna se na sledeći način:

$$[N]_{r-1} = (r^n - 1)_r - (N)_r$$

Odredite: a) deveti komplement broja $(235)_{10}$

b) prvi komplement binarnog broja $(011010)_2$.

a) $[235]_9 = (10^3\text{-}1)\text{-}235$

$= 999\text{-}235$

$= 764$

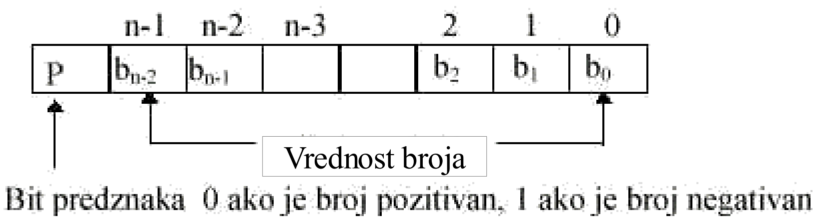
b) $[011010]_2 = (2^6\text{-}1)\text{-}(011010)_2$

$= (111111)_2 - (011010)_2$

$= (100101)_2$

1.6 Prikaz binarnog broja u formatu “predznak-vrednost”

Format “predznak-vrednost”, binarnog broja sa n cifara prikazuje slika .



Slika Prikaz binarnih brojeva s predznakom u formatu predznak-vrednost

Prikazati brojeve sa 8 cifara u formatu predznak vrednost

a) (+47) i b) (-56).

Rješenje1.2-8

a) $(47)_{10} = (0101111)_2$ Za prikaz broja potrebno je 7 bitova

$(+47)_{10} = 00101111$

↑ bit predznaka (pozitivan broj)

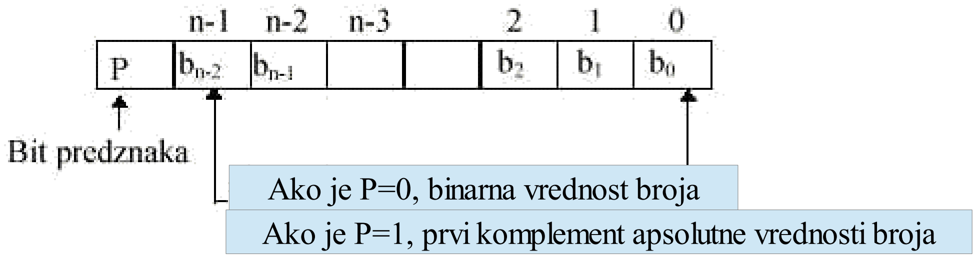
$(56)_{10} = (0111000)_2$ Za prikaz vrednosti broja potrebno je 7 bitova

$(-56)_{10} = 10111000$

↑ bit predznaka (negativan broj)

1.6.1 Format prvog komplementa

Format "prvog komplementa", binarnog broja sa n cifara prikazan je na slici



Slika Prikaz binarnih brojeva sa predznakom u formatu prvog komplementa

Brojeve iz prethodnog primera prikazati u binarnom formatu prvog komplementa sa 8 cifara

a) $(47)_{10}$ = 0101111 — Realna vrednost broja 7 bitova

$(+47)_{10}$ = 00101111

↑--------- bit predznaka (pozitivan broj)

b) Prvo treba odrediti prvi komplement apsolutne vrednosti broja (dovoljno je 7 bitova)

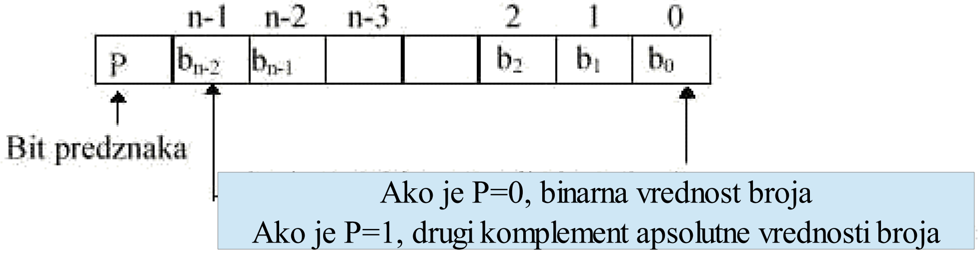
$[0111000]_2 = (1000111)_2$ — Prvi komplement apsolutne vrednosti broja

$(-56)_{10}$ = 11000111

↑--------- bit predznaka (negativan broj)

1.6.2 Format drugog komplementa

Format "drugog komplementa", binarnog broja sa n cifara prikazan je na slici.



Slika Prikaz binarnih brojeva s predznakom u formatu drugog komplementa

Brojeve iz prethodnog primera prikazati u formi drugog komplimenta sa osam cifara

Rješenje 1.2-10

a) $(47)_{10}$ = 00101111 Stvarna vredonst broja

↑--------- bit predznaka (pozitivan broj)

b) Prvo treba odrediti drugi komplement apsolutne vrednosti broja

$[0111000]_2 = (1001000)_2$ Drugi komplement apsolutne vrednosti broja

$(-56)_{10}$ = 11001000

↑---------bit predznaka (negativan broj)

Prvih pet pozitivnih i negativnih brojeva prikazanih u tri različita oblika, koristeći za prikaz binarni niz od šest cifara prikazani su tabelarno

.

Decimalni sa predznakom	Format predznak-vrednost	Format "prvog komplementa"	Format "drugog komplementa"
+ 0	000000	000000	000000
- 0	100000	111111	100000
+ 1	000001	011110	011111
- 1	100001	111110	111111
+ 2	000010	011101	011110
- 2	100010	111101	111110
+ 3	000011	011100	011101
- 3	100011	111100	111101
+ 4	000100	011011	011100
- 4	100100	111011	111100
+ 5	000101	011010	011011
- 5	100101	111010	111011

Tablica Prikaz prvih pet brojeva u raznim formatima zapisa

1.7 Aritmetičke operacije sa binarnim brojevima sa predznakom

Za aritmetičke operacije sa binarnim brojevima u formatu "predznak-vrednost" vaze ista pravila i postupci aritmetike u dekadnom brojnom sistemu. Obzirom da je za utvrđivanje predznaka rezultata potrebno uporediti predznake oba operanda što predstavlja dodatne operacije, format "predznak-vrednost" se ne koristi u aritmetici digitalnih sistema.

Zato formati "prvog komplementa" i "drugog komplementa" predstavljaju uobicajene načine prikaza i izvođenja osnovnih računskih operacija.

Većina savremenih računara za računanje koristi format "drugog komplementa".

1.7.1 Aritmetičke operacije sa brojevima zapisanim u formatu drugog komplementa

Sabiranje dva *n-to cifarska* binarna broja zapisana u formatu drugog komplementa se izvodi njihovim sabiranjem, uključujući i bit predznaka, prema pravilima sabiranja binarnih brojeva. Ako postoji prenos cifre jedinice sa mesta krajnjeg levog bita, prenos se zanemaruje.

Krajnji levi bit rezultata predstavlja predznak zbira.

Koristeci aritmetiku drugog komplementa sabrati brojeve

a)(13.75)+(-7.5) i b) (-13.75) + (7.5).

a) $(13.75)_{10} = (001101.11)_2$

$(7.5)_{10} = (000111.10)_2$

$(+13.75)_{10} \rightarrow \quad (001101.11)_2$

$+\ (-7.5)_{10} \rightarrow \quad +\ (111000.10)_2$

------------ ------------------

$= (+6.25)_{10} \quad = (1\ 000110.01)_2 \rightarrow$ Rezultat $= (000110.01)_2$

↑ ↑

prenos odbacuje se bit predznaka (pozitivan broj)

b) $(-13.75)_{10} = (110010.01)_2$

$(7.5)_{10} = (000111.10)_2$

$(-13.75)_{10} \rightarrow \quad (110010.01)_2$

$+\ (7.5)_{10} \rightarrow \quad +\ (000111.10)_2$

------------ ------------------

$= (-6.25)_{10} \quad = (111001.11)_2 \rightarrow$ Rezultat $= (111001.11)_2$

↑

Bit predznaka (negativan broj)

Oduzimanje binarnih brojeva prikazanih u formatu drugog komplementa izvodi se postupkom sabiranja, tj. A - B = A + (-B).

Dakle, razlika oduzimanja dva broja jednaka je zbiru drugog komplementa umanjioca i umanjenika.

Ako postoji cifra prenosa, ona se u rezultatu zanemaruje.

Predznak razlike je prikazan vrednošću krajnjeg levog bita razlike.

Koristeci aritmetiku drugog komplementa oduzeti sledece brojeve: a) (52)-(39); b) (9.25)-(14.5)

Rješenje 1.2-12

a) $(52)_{10} = (00110100)_2$

$(39)_{10} = (00100111)_2$

$(52)_{10} \rightarrow (00110100)_2$

$-(39)_{10} \rightarrow - (11011001)_2$

------------ ------------------

$= (13)_{10} = (1\ 00001101)_2 \rightarrow$ Rezultat $= (00001101)_2$

↑ ↑

Prenos, odbacuje se bit predznaka, pozitivan broj

b) $(9.25)_{10} = (001001.01)_2$

$(14.5)_{10} = (001110.10)_2$

$(9.25)_{10} \rightarrow (001001.01)_2$

$-(14.5)_{10} \rightarrow + (110001.10)_2$

------------ ------------------

$= (-5.25)_{10} = (111010.11)_2 \rightarrow$ Rezultat $= (111010.11)_2$

↑

bit predznaka (negativan broj)

1.7 Preskok

Preskokom se naziva stanje kada rezultat sabiranja dva binarna broja duzine n bita za svoj prikaz zahteva (n + 1) bit.

Budući memorijske jedinice , registri, mogu prikazati broj samo sa konačnim brojem bitova, registar duzine n bitova nemože prikazati broj duzine (n +1) bit.

Postojanje preskoka signalizira se postavljenjem bita preskoka u registru stanja.

Pri sabiranju binarnih brojeva bez predznaka, pojava preskoka je izražena postavljanjem bita prenosa na mestu najveće težine.

Pri sabiranju binarnih brojeva sa predznakom preskoka neće biti ako su predznaci sabiraka različiti.

Međutim do preskoka može da dodje ako su predznaci sabiraka isti.

Na primer, sabiranje dva negativna broja $(10101111)_2$ i $(10001010)_2$ prikazana u formatu drugog komplementa korišcenjem osam bitova dovodi do pojave preskoka. Takodje će i kod sabiranja dva pozitivna broja $(01011100)_2$ i $(01101111)_2$ doći do pojave preskoka.

```
Dva negativna broja    Dva pozitivna broja

Prenos cifre na vise mesto
   ↓                     ↓
   0                     1
   1 0101111             01011100
+  1 0001010          +  01101111
-----------------------------------
= 1 0 0111001         = 011001011
  ↑↑                    ↑↑ najlijeviji bit

Prelaz krajnjeg levog bita
```

Preskok se pojavljuje kada su bit prenosa i bit prelaza krajnjeg levog bita različitih vrednosti. Uslov se jednostavno ispituje koristeći isključivo ILI ili logicko kolo.