# ΦΙΛΤΡΑ IIR

Δημήτρης Κ. Ιακωβίδης

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η μελέτη των **φίλτρων άπειρης κρουστικής απόκρισης (Infinite Impulse Response, IIR**).

## 8.1 Φίλτρα IIR

Ένα φίλτρο IIR διαφέρει από ένα FIR στο γεγονός ότι στην είσοδό του μπορεί να δέχεται και προηγούμενες εξόδους του y[n-k]. Επιτρέπει δηλαδή την ανατροφοδότησή του (feedback). Η **εξίσωση διαφορών** ενός τέτοιου φίλτρο δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y[n] = \sum_{l=1}^{N} a_l y[n-l] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (1)$$

όπου οι όροι με τους συντελεστές $\alpha_l$ αντιστοιχούν στους συντελεστές που αφορούν την ανατροφοδότηση του φίλτρου με τις προηγούμενες εξόδους του, ενώ οι υπόλοιποι $b_k$ όροι, στο αντίστοιχο FIR φίλτρο (χωρίς ανατροφοδότηση). Η εξίσωση αυτή ανάγεται στην εξίσωση διαφορών των FIR φίλτρων αν όλοι οι συντελεστές $\alpha_l$ είναι μηδενικοί. Υπό αυτή την έννοια τα φίλτρα IIR είναι γενικότερα των FIR.

Στο Matlab η εξίσωση (1) υλοποιείται μέσω της συνάρτησης **filter**, ως εξής:

**y = filter(b, a, x);**

όπου b και a οι πίνακες με τους αντίστοιχους συντελεστές της (1), και x η είσοδος του φίλτρου.

## 8.2 Απόκριση συχνότητας

Η μαθηματική έκφραση της απόκρισης συχνότητας, η οποία είναι χρήσιμη για το σχεδιασμό ενός IIR φίλτρου, δίνεται από την ακόλουθη σχέση για z = $e^{j\omega}$ (μετασχηματισμός Z):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}} \qquad (2)$$

Η συνάρτηση (2), όπως εκφράζεται γενικότερα στο πεδίο Z ονομάζεται και **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function) **ή συστήματος** (system function).

Στο Matlab η απόκριση συχνότητας H υπολογίζεται με τη συνάρτηση **freqz** η οποία καλείται ως εξής[1]:

**H = freqz(b, a, w);**

όπου b και a οι πίνακες με τους αντίστοιχους συντελεστές της (2), και w ένας πίνακας με τις ψηφιακές συχνότητες για τις οποίες επιθυμούμε να βρούμε την απόκριση του φίλτρου, στο εύρος [-π, π]. Η ίδια συνάρτηση καλείται και ως

**[H, w] = freqz(b, a, N);**

η οποία επιστρέφει και των άξονα των συχνοτήτων w δεδομένου του πλήθους N των σημείων που θέλουμε να παραχθούν.

Η κρουστική απόκριση (impulse response) h του φίλτρου μπορεί να ληφθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

1. **[h, t] = impz(b, a);**
2. **h = ifft(H);** [2]

### 8.3 Σχεδιασμός φίλτρων IIR

Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα IIR φίλτρο έτσι ώστε να μπορούμε να επιλέξουμε τα εύρη συχνοτήτων που επιθυμούμε να αποκόψουμε από ένα σήμα εισόδου. Αυτό γίνεται σχεδιάζοντας την επιθυμητή **απόκριση συχνότητας του φίλτρου**. Έχοντας την απόκριση συχνότητας μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του φίλτρου, άρα μπορούμε να το υλοποιήσουμε (όπως γίνεται και με τα φίλτρα FIR).

Στο Matlab ένας εύκολος τρόπος για να σχεδιαστούν φίλτρα όπως αυτά του Σχ.4 είναι μέσω της συνάρτησης **yulewalk**[1] (σε αντιστοιχία με την **fir2** που χρησιμοποιείται για τα φίλτρα FIR) ως εξής:

**[b, a] = yulewalk(M, f, m);**

όπου M η τάξη του φίλτρου, f ένας πίνακας που περιέχει τις κανονικοποιημένες ψηφιακές συχνότητες στο διάστημα [0,1] (εννοείται ότι πολλαπλασιάζονται επί π), στις οποίες αλλάζει

---
[1] Πρέπει να υπάρχει εγκατεστημένο στο Matlab το Signal Processing Toolbox.
[2] Η απόκριση συχνότητας να έχει υπολογιστεί με τη freqz για δεδομένο w (πρώτη εκδοχή της freqz).

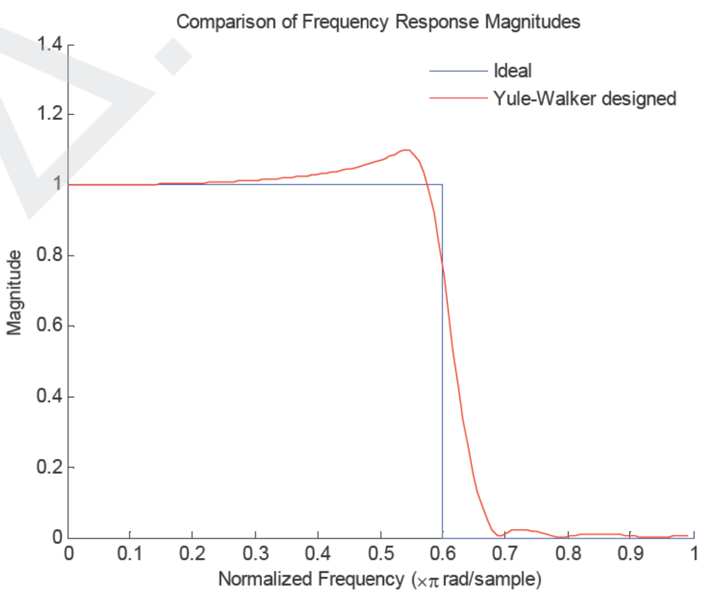
η κλήση της απόκρισης συχνότητας (σημεία άρθρωσης - frequency breakpoints), και m ένας πίνακας που περιέχει τις αντίστοιχες τιμές του πλάτους της απόκρισης συχνότητας (magnitude breakpoints). Ο πίνακας f πρέπει να ξεκινά από 0 και να τελειώνει σε 1. Στο Σχ.5 εικονίζεται ως παράδειγμα η υλοποίηση ενός βαθυπερατού (low pass) φίλτρου με τη συνάρτηση αυτή. Το αποτέλεσμα του Σχ.5 εικονίζεται στο Σχ.6, όπου παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας του IIR φίλτρου που σχεδιάζεται με τη χρήση της yulewalk συγκριτικά με την απόκριση του ιδανικού φίλτρου.

```
% A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
% IIR filter design

f = [0 0.6 0.6 1];          % frequency breakpoints
m = [1 1 0 0];              % magnitude breakpoints
[b,a] = yulewalk(8,f,m);    % get filter coefficients
[H,w] = freqz(b,a,128);     % get frequency response of FIR

hold on;
plot(f,m,'b')
plot(w/pi,abs(H),'r')
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)')
ylabel('Magnitude')
legend('Ideal','Yule-Walker designed')
legend boxoff
title('Comparison of Frequency Response Magnitudes')
hold off;
```

**Σχήμα 1.** Παράδειγμα υλοποίησης βαθυπερατού φίλτρου IIR με Matlab.




**Σχήμα 2.** Αποτέλεσμα του παραδείγματος του Σχ.1.

### 8.4 Ευστάθεια συστημάτων

**Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές (stable) όταν για φραγμένη είσοδο παράγεται φραγμένη έξοδος (Bounded Input Bounded Output – BIBO).** Την ευστάθεια ενός συστήματος IIR μπορούμε να την αξιολογήσουμε, εξετάζοντας μόνο τους πόλους της εξίσωσης (2).

- **Πόλοι** ονομάζονται οι τιμές του z που μηδενίζουν τον παρονομαστή της (2).
- **Μηδενικά** ονομάζονται οι τιμές του z που μηδενίζουν τον αριθμητή της (2).
- **Ένα σύστημα IIR είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι της (2) βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο z.**

Το Matlab προσφέρει τις εξής συναφείς συναρτήσεις:

**zplane(b, a);**

η οποία σχεδιάζει το μιγαδικό επίπεδο τους πόλους (με σύμβολα **X**) και τα μηδενικά (με σύμβολα **O**) της εξίσωσης (2), δεδομένων των αντίστοιχων συντελεστών b και a. Επίσης υπάρχει και τη συνάρτηση **roots** η οποία χρησιμοποιείται από τη **zplane** για να υπολογίσει τους πόλους και τα μηδενικά. Επομένως, με

**roots(a)**

λαμβάνουμε τους πόλους, και με

**roots(b)**

λαμβάνουμε τα μηδενικά της εξίσωσης (2).

### Ασκήσεις

1. Να υλοποιήσετε το παράδειγμα του Σχ. 1. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό που λαμβάνετε με τη χρήση της fir2 για το σχεδιασμό FIR βαθυπερατών φίλτρων. Δοκιμάστε να αλλάξετε την τάξη των IIR και FIR φίλτρων. (Υπόδειξη: παρατηρήστε για τι τάξεις φίλτρων λαμβάνουμε αποκρίσεις συχνότητας που είναι πιο κοντά σε εκείνες του ιδανικού φίλτρου).

2. Να αξιολογήσετε ως προς την ευστάθειά τους τα φίλτρα με τις ακόλουθες συναρτήσεις συστήματος (χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση zplane ή/και τη

roots). Να σχεδιαστούν οι αποκρίσεις συχνότητάς τους (μέτρο και φάση), τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών στο πεδίο z, και οι κρουστικές αποκρίσεις τους.

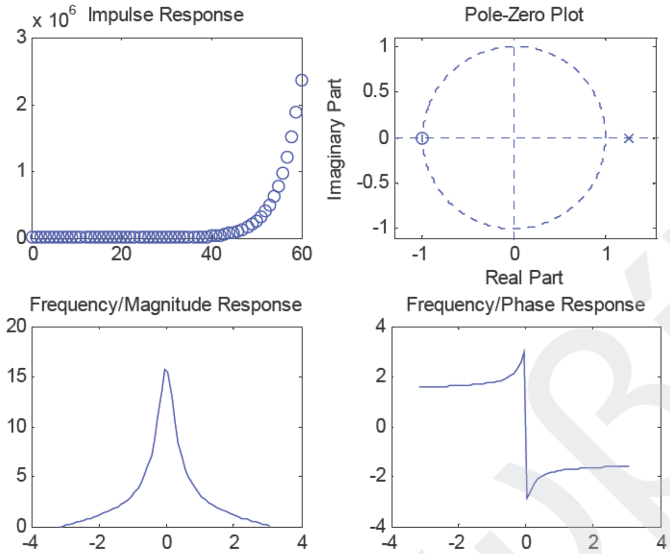
a. $$H(z)=\frac{2+2z^{-1}}{1-1.25z^{-1}}$$

b. $$H(z)=\frac{2+2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

## Άσκηση 2

(a) Ασταθές.




(b) Ευσταθές.