ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ, ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΣΗΜΑΤΑ

Δημήτρης Κ. Ιακωβίδης

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η εισαγωγή στα περιοδικά και στα μιγαδικά ημιτονοειδή σήματα. Επίσης, παρουσιάζονται παραδείγματα σημάτων που προκύπτουν ως γινόμενο ημιτονοειδών, και σημάτων μεταβλητής συχνότητας.

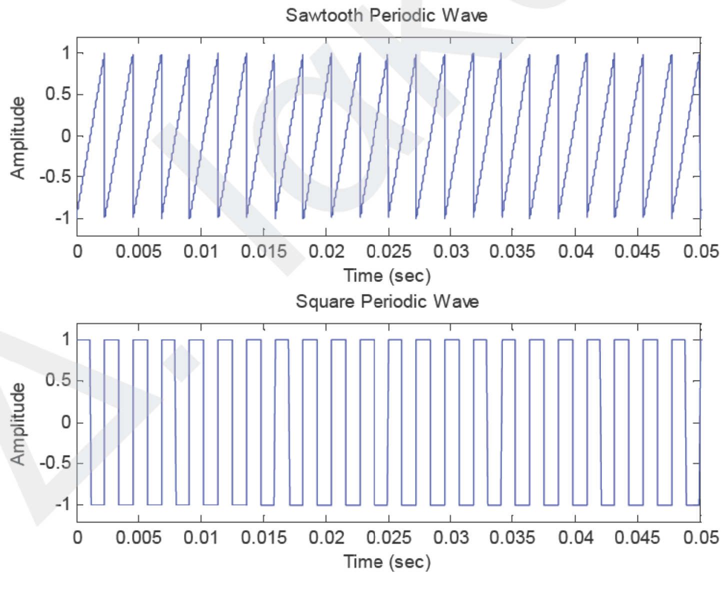
4.1 Περιοδικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση x(t) ονομάζεται περιοδική αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$x(t) = x(t+T) \tag{1}$$

όπου Τ η περίοδος της.

Ένα ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδική συνάρτηση γιατί ικανοποιεί αυτή τη σχέση για Τ=2π.



Σχήμα 1. Περιοδικά σήματα που προκύπτουν ως τραίνα πριονωτών (άνω) και τετραγωνικών (κάτω) παλμών.

4.2 Τραίνα παλμών

Το Matlab παρέχει συναρτήσεις για την παραγωγή ακολουθιών τετραγωνικών (square) και πριονωτών (sawtooth) παλμών, δημιουργώντας έτσι περιοδικά σήματα επιθυμητής διάρκειας, όπως εικονίζεται στο Σχ.1. Ο κώδικας Matlab με τον οποίο παράγεται το σχήμα αυτό εικονίζεται στο Σχ.2.

Οι βασικές συναρτήσεις με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι η sawtooth και η square, οι οποίες λαμβάνουν ως όρισμα τη συχνότητα παραγωγής των παλμών f, με τη μορφή 2πft.

```
% A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
% Pulse train generation

fs = 44100;
t = 0:1/fs:1;

% Train of sawtooth pulses
x1 = sawtooth(2*pi*440*t);
subplot(211);
plot(t,x1);
axis([0 0.05 -1.2 1.2]);
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Sawtooth Periodic Wave');

% Train of square pulses
x2 = square(2*pi*440*t);
subplot(212);
plot(t,x2);
axis([0 0.05 -1.2 1.2]);
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Square Periodic Wave');
```

Σχήμα 2. Ο κώδικας Matlab με τον οποίο παράγονται τα σήματα του Σχ. 1.

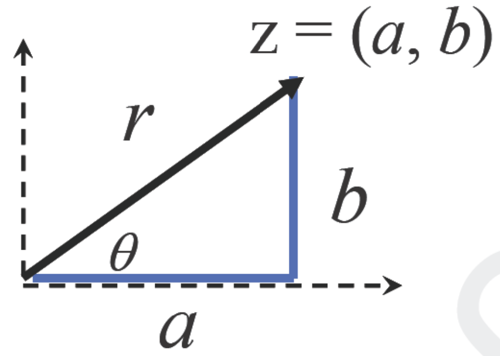
Η εντολή **axis** χρησιμοποιείται για την υποβοήθηση της απεικόνισης και είναι προαιρετική. Ο ρόλος της είναι να περιορίσει το γράφημα στο διάστημα από 0 έως 0.05 στον άξονα του χρόνου και από -1.2 έως 1.2 στον κάθετο άξονα του πλάτους του σήματος.

4.3 Μιγαδικά εκθετικά σήματα

Ένας μιγαδικός αριθμός είναι της μορφής

$$z = a + bi \qquad \textbf{(2)}$$

όπου α και b ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, και $\mathbf{i^2 = -1}$. Το a = Re(z) ονομάζεται πραγματικό (real) μέρος και το b = Im(z) ονομάζεται φανταστικό (imaginary) μέρος του μιγαδικού αριθμού. Ένας τέτοιος αριθμός αποτελεί ουσιαστικά μια διαφορετική μορφή συμβολισμού ενός σημείου ***(a, b)*** στο επίπεδο (Σχ.3).



Σχήμα 3. Γεωμετρική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού z ως σημείο στο επίπεδο.

Στο Matlab ένας μιγαδικός αριθμός σημειώνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που σημειώνεται και στα μαθηματικά. Μάλιστα μπορεί ισοδύναμα να χρησιμοποιηθεί και το σύμβολο **j** αντί του **i**, όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία των μηχανικών.

Έστω **z = 5+3i** τότε η συνάρτηση του Matlab

real(z)

επιστρέφει το πραγματικό μέρος του z, δηλαδή το 5, και η συνάρτηση

imag(z)

επιστρέφει το φανταστικό μέρος του z, δηλαδή το 3.

Από το Σχ. 3 μπορεί κανείς να παρατηρήσει με απλή τριγωνομετρία ότι:

$$\alpha = r\cos(\theta) \tag{3}$$

$$b = r\sin(\theta) \tag{4}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 \tag{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}(b/a) \tag{6}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να αναπαραστήσει έναν μιγαδικό αριθμό ως ένα ζεύγος **(r, θ)**, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως **πολικές συντεταγμένες** (polar coordinates).

Ο γνωστός μαθηματικός Euler πρότεινε πως η πολική αναπαράσταση του μιγαδικού μπορεί να συμβολιστεί με τη σημειογραφία $e^{i\vartheta}$:

$$\mathbf{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)} \qquad \textbf{(7)}$$

δηλαδή

$$\mathbf{z = r\,e^{i\theta} = r\,(\,\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\,)} \qquad \textbf{(8)}$$

Το **r** αναφέρεται ως **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού και υπολογίζεται από την εξίσωση (5) και η γωνία **θ** αναφέρεται ως **φάση** του μιγαδικού αριθμού και υπολογίζεται από την εξίσωση (6). Με τη χρήση των εξισώσεων (3)-(4) μπορεί κανείς να υπολογίσει τα *α* και *b* αν δίνονται το μέτρο και η φάση.

Στο Matlab το μέτρο υπολογίζεται με τη συνάρτηση

abs(z)

και η φάση με τη συνάρτηση

angle(z)

Σύμφωνα με τα παραπάνω ένα ημιτονοειδές σήμα x(t) = Acos(2πft + φ) μπορεί να αναπαρασταθεί γενικά ως

$$x(t) = \mathrm{Re}\,(\,A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi ft+\varphi)}\,) \qquad \textbf{(9)}$$

επομένως, για λόγους ευκολίας στις πράξεις η αναπαράσταση των ημιτονοειδών σημάτων προτιμάται να γίνεται με τη μιγαδική εκθετική μορφή:

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi ft+\varphi)} \qquad \textbf{(9)}$$

π.χ. είναι ευκολότερος ο υπολογισμός του $\mathbf{e^{i(\vartheta 1+\vartheta 2)} = e^{i\vartheta 1}e^{i\vartheta 2}}$ από τον υπολογισμό του **cos(θ1+θ2)** (το τελευταίο απαιτεί γνώσεις τριγωνομετρίας ενώ το πρώτο απλές πράξεις).

Στο Matlab το μιγαδικό εκθετικό σήμα y(t) της εξίσωσης (9) μπορεί να υλοποιηθεί με τη συνάρτηση του Σχ. 4. Στο Σχ. 5 παρουσιάζεται η χρήση της συνάρτησης αυτής για την κατασκευή γραφικών αναπαραστάσεων του Σχ. 6 και 7.

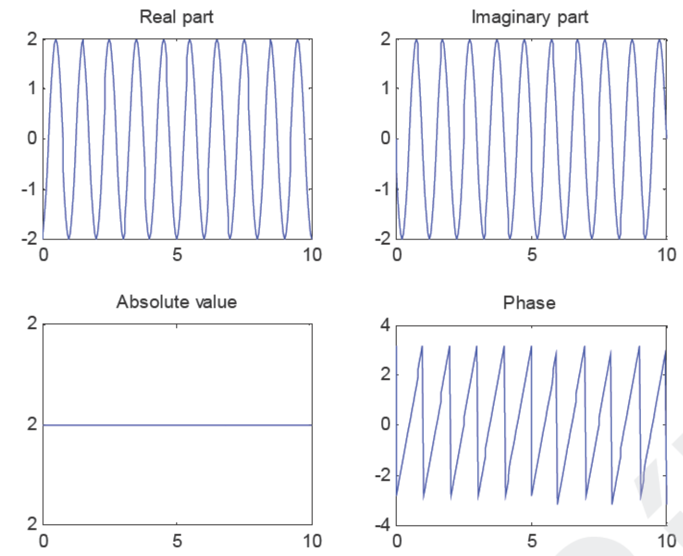
```
% A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
% Complex exponential function

function [x] = complexExpFun(A, f, t, phi)
x = A*exp( j*(2*pi*f*t+phi) );
```

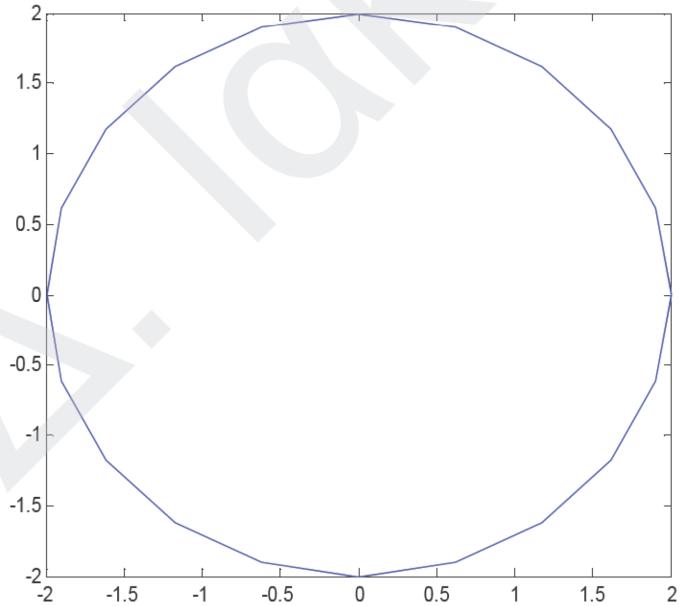
Σχήμα 4. Συνάρτηση μιγαδικού εκθετικού σήματος.

```
1   % A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
2   % Usage of the complex exponential function
3
4   fs = 20;            % sampling frequency
5   Ts = 1/fs;          % sampling period
6   tmin = 0;           % time axis min value
7   tmax = 10;          % time axis max value
8   t = tmin:Ts:tmax;   % time axis sampled every Ts
9
10  % Calculate complex exponential function
11  A = 2;
12  f = 1;
13  phi = pi;
14  x = complexExpFun(A, f, t, phi);
15
16  % Plot the real and imaginary part of the complex
17  exponential
18  figure;
19  subplot(2,2,1);
20  plot(t,real(x));
21  title('Real part');
22  subplot(2,2,2);
23  plot(t,imag(x));
24  title('Imaginary part');
25  subplot(2,2,3);
26  plot(t,abs(x));
27  title('Absolute value');
28  subplot(2,2,4);
29  plot(t,angle(x));
30  title('Phase');
31
32  % Plot real vs. imaginary part of the complex exponential
33  figure;
34  plot(x);
```

Σχήμα 5. Ο κώδικας Matlab με τον οποίο παράγεται ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα. Το σήμα παράγεται στη γραμμή 14.



Σχήμα 6. Γραφικές παραστάσεις του πραγματικού και φανταστικού της μέρους της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης του Σχ. 5, του μέτρου και της φάσης της συναρτήσει του χρόνου.

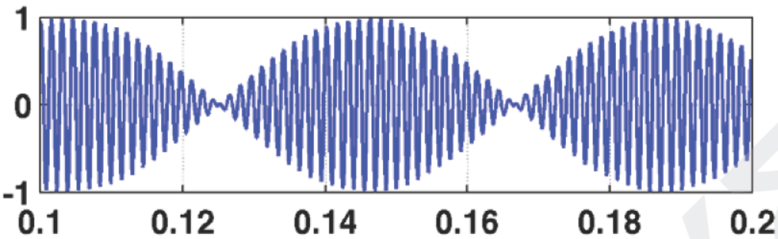


Σχήμα 7. Γραφική παράσταση του φανταστικού (στον κάθετο άξονα) και του πραγματικού (στον οριζόντιο) άξονα, μέρους της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης που παράγεται από τον κώδικα του Σχ. 5.

4.4 Γινόμενα ημιτονοειδών και διακροτήματα

Ένα διακρότημα παράγεται ως γινόμενο δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων. Για παράδειγμα το διακρότημα του Σχ.8 παράγεται από τη σχέση (10).

$$\cos(2\pi(660)t)\sin(2\pi(12)t) \tag{10}$$



Σχήμα 8. Διακρότημα παραγόμενο από τη σχέση (10).

4.5 Σήματα μεταβλητής συχνότητας

Η συχνότητα ενός σήματος μπορεί να μεταβάλλεται στο χρόνο. Ένα τέτοιο σήμα χαρακτηρίζεται ως **μη στατικό** (σε αντίθεση με τα **στατικά** σήματα τα οποία έχουν σταθερή συχνότητα στην πορεία του χρόνου). Ένα ημιτονοειδές σήμα του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται βάσει μιας συνάρτησης ψ(t) έχει τη μορφή της σχέσης (11) και χαρακτηρίζεται ως chirp (τιτίβισμα). Η γωνιακή συχνότητα *ω* (και κατά συνέπεια η συχνότητα *f*) ενός τέτοιου σήματος υπολογίζεται ως **«στιγμιαία συχνότητα»**, από την παράγωγο της ψ(t):

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\psi(t)) \\ \Rightarrow \omega_i(t) &= \tfrac{d}{dt}\psi(t) \end{aligned} \tag{11}$$

Η συχνότητα *f*(*t*) ενός chirp που μεταβάλλεται γραμμικά στο χρόνο έχει τη μορφή

$$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T_2} t + f_1 \tag{12}$$

όπου f_1 και f_2 οι επιθυμητή αρχική και τελική συχνότητα και T_2 η χρονική διάρκεια κατά την οποία πραγματοποιείται η μεταβολή. Η συνάρτηση ψ(t) στην περίπτωση αυτή προκύπτει έπειτα από ολοκλήρωση της στιγμιαίας συχνότητας f_i ως προς *t*:

$$\psi(t) = \left((f_2 - f_1)/T_2 \right) \pi t^2 + 2 f_1 \pi t + \varphi \tag{13}$$

όπου *φ* μια οποιαδήποτε σταθερά.

Στο Matlab ένα chirp υλοποιείται με τη συνάρτηση chirp η οποία συντάσσεται ως εξής:

x = chirp(t,f1,T2,f2)

Η ίδια συνάρτηση χρησιμοποιείται και για άλλου είδους chirps, τα οποία μπορείτε να μελετήσετε αξιοποιώντας τη βοήθεια (help chirp) του Matlab.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε τρία σήματα, ένα ημιτονοειδές x1, ένα τραίνο τετραγωνικών παλμών x2, και ένα τραίνο πριονωτών παλμών x3 με συχνότητα 440Hz και συχνότητα δειγματοληψίας 44100Hz.
    a. Να αναπαραστήσετε τα σήματα αυτά σε ένα γράφημα με τρία υπογραφήματα.
    b. Να κατασκευάσετε ένα σήμα x το οποίο αποτελείται από τα x1, x2, x3 τοποθετημένα διαδοχικά το ένα μετά το άλλο.
    c. Να προσθέσετε μια κατάλληλη εντολή για την αναπαραγωγή του σήματος x ως ηχητικό σήμα.

2. Να αναπαραστήσετε γραφικά το πραγματικό και το μιγαδικό μέρος του σήματος $x(t) = 10e^{i(200\pi t+\pi/4)}$, όπως επίσης και το μέτρο και τη φάση του συναρτήσει του χρόνου.

3. Να υλοποιήσετε μια συνάρτηση AMSignal που υλοποιεί την εξίσωση (10), με ορίσματα f1 και f2 που αναπαριστούν τις συχνότητες του συνημιτόνου και του ημιτόνου αντίστοιχα. Να καλέσετε την AMSignal για διαφορετικές τιμές των f1 και f2 και να παρατηρήσετε τις αλλαγές. Επίσης δοκιμάστε να αλλάξετε το ημίτονο με αντίστοιχο συνημίτονο.

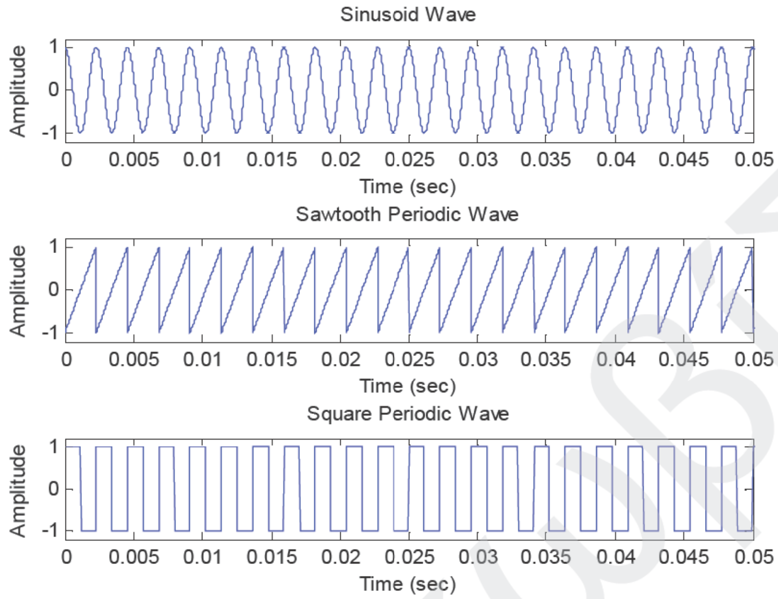
4. Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό chirp με αρχική συχνότητα f1=220Hz, και τελική συχνότητα f2=2320Hz μετά από T2=3sec χωρίς τη χρήση της συνάρτησης chirp του Matlab. Να επαληθεύσετε την ορθότητα των αποτελεσμάτων σας

χρησιμοποιώντας της συνάρτηση chirp του Matlab. Δοκιμάστε να το ακούσετε ως ηχητικό σήμα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Άσκηση 1

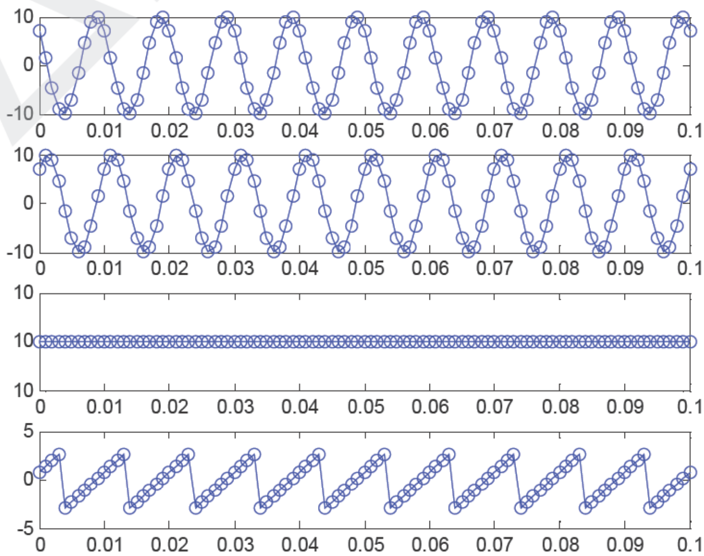
Το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος:



Στο δεύτερο ερώτημα τα παραπάνω σήματα πρέπει να τοποθετηθούν το ένα μετά το άλλο, προσέχοντας ο άξονας του χρόνου να είναι τρεις φορές μεγαλύτερος.

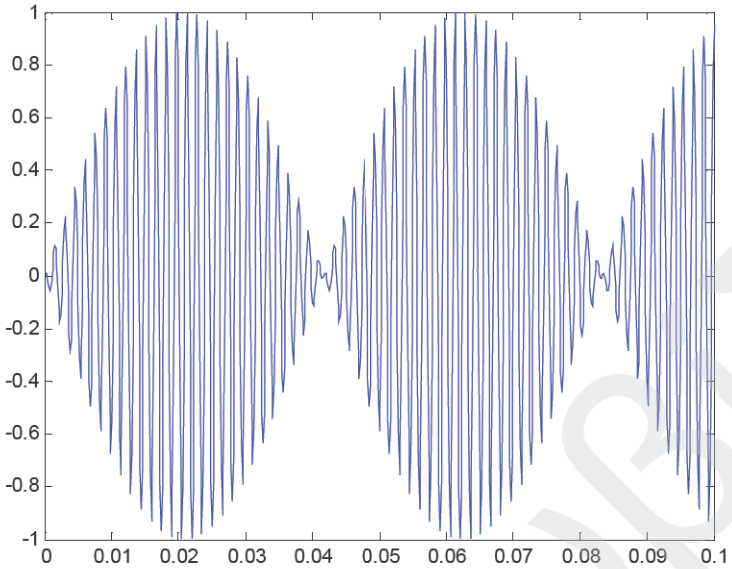
Άσκηση 2

Το αποτέλεσμα είναι το εξής



Άσκηση 3

Το αποτέλεσμα είναι το εξής



Άσκηση 4

Το chirp θα έχει την παρακάτω μορφή αν ο άξονας του χρόνου έχει εύρος από 0 έως 0.5. Όμως για να το ακούσετε το σήμα ευκρινώς ο άξονας του χρόνου πρέπει να φτάνει έως 10.