

# ΦΙΛΤΡΑ FIR

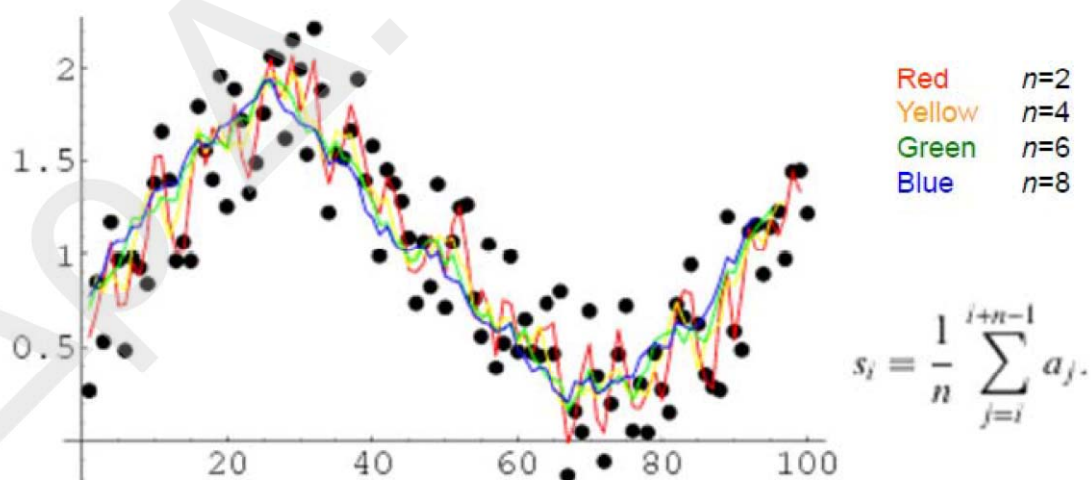
Δημήτρης Κ. Ιακωβίδης

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η μελέτη των **φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response, FIR)**. Ένα φίλτρο είναι ένα σύστημα που επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου και παράγει στην έξοδό του ένα σήμα εξόδου με διαφορετικά χαρακτηριστικά.

## 6.1 Φιλτράρισμα

Για τη μείωση του θορύβου του ψηφιακού σήματος που εικονίζεται γραφικά στο Σχ. 1 (μαύρες βούλες) μπορούμε να λαμβάνουμε διαδοχικά τμήματα (παράθυρα) του σήματος, μήκους  $n$ , από αριστερά προς τα δεξιά, και από κάθε παράθυρο να λαμβάνουμε μια μέση τιμή. Όλες οι τιμές που λαμβάνονται με αυτό τον τρόπο σχηματίζουν ένα νέο σήμα το οποίο έχει μικρότερη διακύμανση από το αρχικό, περιορίζοντας έτσι το φαινόμενο του θορύβου. Όσο μεγαλύτερο είναι το  $n$  τόσο μεγαλύτερος ο περιορισμός του θορύβου και η εξομάλυνση του σήματος. Η τεχνική αυτή, για ένα ψηφιακό σήμα εικονίζεται και Σχ.2 με ένα αριθμητικό παράδειγμα, και ονομάζεται **φιλτράρισμα κινητού μέσου** (moving average filter).



Σχήμα 1. Φιλτράρισμα κινητού μέσου - γραφικά.

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

$n$	$n < -2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$n > 7$
$x[n]$	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
$y[n]$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	2	4	$\frac{14}{3}$	4	2	$\frac{2}{3}$	0	0

Σχήμα 2. Φιλτράρισμα κινητού μέσου - αριθμητικά.

## 6.2 Φίλτρα FIR

Ένα φίλτρο όπως αυτό που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να γενικευτεί, λαμβάνοντας διαφορετικούς συντελεστές για κάθε όρο του αθροίσματος στην εξίσωση του Σχ.2. Δηλ. αντί για συντελεστές  $1/3$  σε όλους τους όρους, να έχουμε συντελεστές  $b_1, b_2, b_3$  για κάθε όρο του αθροίσματος αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνεται ένα φίλτρο που μπορεί γενικά να εκφραστεί ως:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση διαφορών** (difference equation) του φίλτρου και για διαφορετικούς συντελεστές  $b_k$  υλοποιεί διαφορετικού τύπου επεξεργασία στο σήμα  $x[n]$ . Ένα τέτοιο φίλτρο ονομάζεται φίλτρο **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (finite impulse response, FIR)** τάξης  $M$ , και μήκους  $L (=M+1)$ . Ονομάζεται έτσι γιατί τα όρια του αθροίσματος είναι πεπερασμένα (όχι άπειρα), και συνεπώς η απόκρισή του (δηλ. η έξοδος του δηλαδή) όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται η κρουστική συνάρτηση  $\delta[n]$ , είναι πεπερασμένη.

## 6.3 Κρουστική απόκριση

**Κρουστική απόκριση (impulse response)** ονομάζεται η έξοδος ενός φίλτρου όταν στη είσοδό του παρουσιάζεται η κρουστική συνάρτηση  $\delta[n]$ . Η έξοδος αυτή είναι ένα σήμα  $h[n]$  με τιμές ίσες με τους συντελεστές  $b_k$  του φίλτρου.

Η πράξη που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών (1) ονομάζεται **συνέλιξη ή συγκερασμός (convolution)** και χαρακτηρίζει τα FIR φίλτρα. Μαθηματικά συμβολίζεται ως πράξη με ένα αστεράκι  $*$ , δηλαδή

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (2)$$

Στο Matlab υλοποιείται με τη συνάρτηση **conv**:

**y = conv(h, x);**

όπου x ένας πίνακας με το σήμα εισόδου του φίλτρου και h ένας πίνακας με τους συντελεστές του φίλτρου. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η συνάρτηση **filter** η οποία είναι πιο γενική (χρησιμοποιείται και για την υλοποίηση φίλτρων **άπειρης κρουστικής απόκρισης – infinite impulse response, IIR**). Η παρακάτω κλήση της **filter** είναι ισοδύναμη με την κλήση της **conv**:

**y = filter(h, 1, x);**

Στο Σχ.3 εικονίζεται η χρήση της **conv** για την υλοποίηση ενός φίλτρου κινητού μέσου μήκους 8 (έχει συντελεστές 1/8 γιατί πρέπει να υπολογιστεί η μέση τιμή από 8 όρους).

#### 6.4 Απόκριση συχνότητας

Η απόκριση συχνότητας (**frequency response**) περιγράφει την έξοδο ενός φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται ένα μιγαδικό ημιτονοειδές σήμα. Η απόκριση συχνότητας  $H(\omega)$  είναι ο μετασχηματισμός Φουριέ της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$ .

Η μαθηματική έκφραση της απόκρισης συχνότητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k} \quad (3)$$

Η απόκριση συχνότητας μας δείχνει πως αποκρίνεται το φίλτρο σε διαφορετικές συχνότητες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό των φίλτρων ώστε να «κόβουν» ή να «επιτρέπουν» τη διέλευση σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων.

Στο Matlab η απόκριση συχνότητας υλοποιείται με τη συνάρτηση **freqz** η οποία καλείται ως εξής<sup>1</sup>:

**H = freqz(h, 1, w);**

όπου w είναι πίνακας με τις τιμές της ψηφιακής συχνότητας για τις οποίες επιθυμούμε να γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας, και το οποίο επιλέγεται συνήθως στο  $[-\pi, \pi]$ . Στο Σχ.3 εικονίζεται η χρήση της **freqz**. Το πρόγραμμα του Σχ.3 δείχνει επίσης τους μετασχηματισμούς Φουριέ του σήματος πριν και μετά το φιλτράρισμα, οπότε αξίζει να

---

<sup>1</sup> Πρέπει να υπάρχει εγκατεστημένο στο Matlab το Signal Processing Toolbox.

παρατηρήσετε τη σχέση ανάμεσα στην απόκριση συχνότητας και το φάσμα του σήματος εξόδου.

```
1  % A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
2  % Filter noise from a sinusoid
3
4  fs = 100;
5  Ts = 1/fs;
6  t = 1:Ts:100;
7
8  f = 10;
9  x1 = sinusoidFun(t, 10, f, 0);
10 x2 = noiseSignalFun(t, 5);
11 x3 = x1 + x2;
12
13 % Generate a noisy signal
14 subplot(5,1,1);
15 plot(x3);
16 grid on;
17 title('Noisy Signal');
18 sound(x3); % to listen to the signal
19
20 % Plot the spectrum of the noisy signal
21 [fre, mag, pha] = fftFun(x3, fs);
22 subplot(5,1,2);
23 plot(fre, mag);
24 grid on;
25 title('Noisy Signal Spectrum');
26
27 % FIR filtering of the signal (moving average)
28 firFilter = [1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8];
29 x4 = conv(firFilter,x3);
30 subplot(5,1,3);
31 plot(x4);
32 grid on;
33 title('Filtered Signal');
34 sound(x4); % listen to the signal, otherwise deactivate it
35
36 % Frequency Response of the Filter
37 w = -pi:(pi/100):pi;
38 frere = freqz(firFilter, 1, w);
39 subplot(5,1,4);
40 plot(w, frere);
41 grid on;
42 title('Frequency Response of Filter');
43
44 % Spectrum of the Filtered Signal
45 [fre, mag, pha] = fftFun(x4, fs);
46 subplot(5,1,5);
47 plot(fre, mag);
48 grid on;
49 title('Filtered Signal Spectrum');
50
51 % The following functions are necessary
52 % (use different files to implement them)
53
54 function [x] = sinusoidFun(t, A, f, phi)
55 x = A*cos(2*pi*f*t + phi);
```

```

56
57 function [x] = noiseSignalFun(t, A)
58 x = A*randn(1,length(t));
59
60 function [frequency, magnitude, phase] = fftFun(x, fs)
61 y = fft(x);
62 m = length(y);
63 frequencyAxis = (0:m)*fs/m;
64 fftMagnitude = abs(y);
65 fftPhase = angle(y);
66 frequency =
67 [- (frequencyAxis(m)-frequencyAxis(m/2:m))
68 frequencyAxis(1:m/2)];
69 magnitude = [fftMagnitude(m/2:m) fftMagnitude(1:m/2)];
70 phase = [fftPhase(m/2:m) fftPhase(1:m/2)];

```

Σχήμα 3. Παράδειγμα υλοποίησης φίλτρου κινητού μέσου σε Matlab.

## 6.5 Σχεδιασμός φίλτρων FIR

Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα FIR φίλτρο έτσι ώστε να μπορούμε να επιλέξουμε τα εύρη συχνοτήτων που επιθυμούμε να αποκόψουμε από ένα σήμα εισόδου. Αυτό γίνεται σχεδιάζοντας την επιθυμητή **απόκριση συχνότητας του φίλτρου**. Έχοντας την απόκριση συχνότητας μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του φίλτρου, άρα μπορούμε να το υλοποιήσουμε. Στο Σχ.4 διακρίνονται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα διαφορετικών τύπων φίλτρων (οι αποκρίσεις συχνότητάς τους). Στο Σχ.5 παρουσιάζεται σχηματικά η διαδικασία σχεδιασμού ενός FIR φίλτρου.

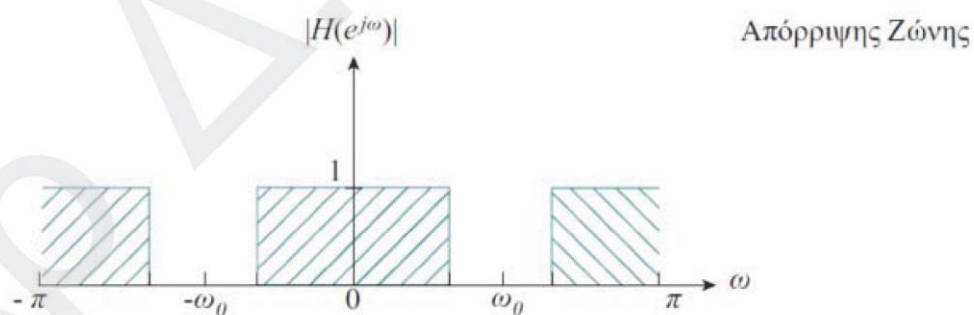
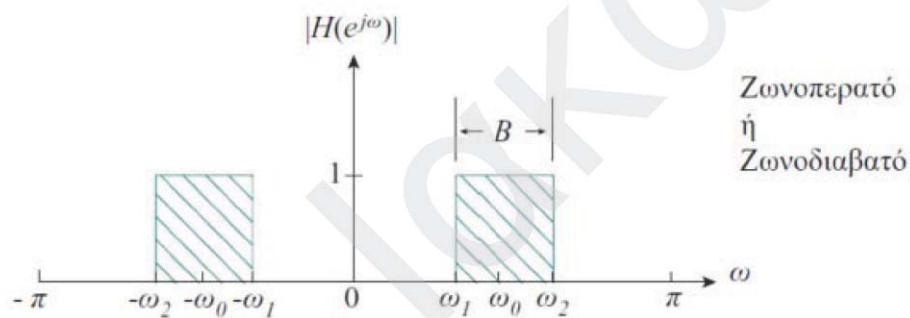
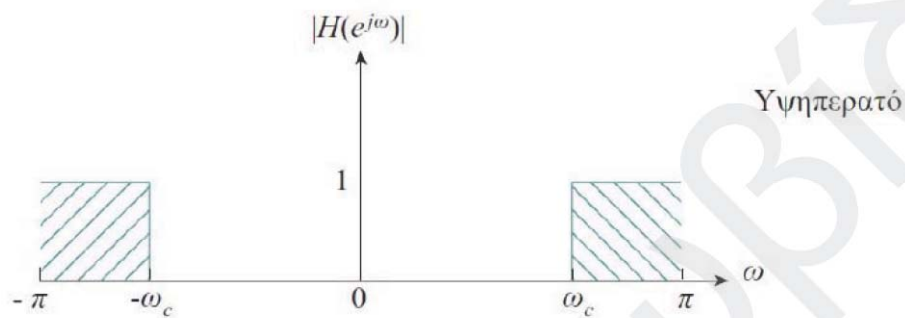
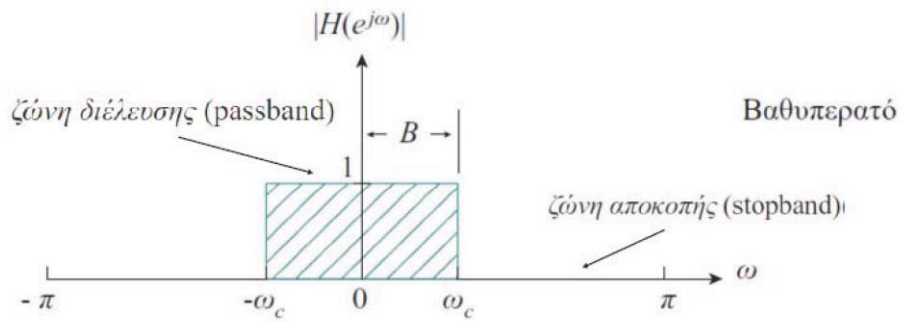
Στο Matlab ένας εύκολος τρόπος για να σχεδιαστούν φίλτρα όπως αυτά του Σχ.5 είναι μέσω της συνάρτησης **fir2**<sup>2</sup> ως εξής:

**h = fir2(M, f, m);**

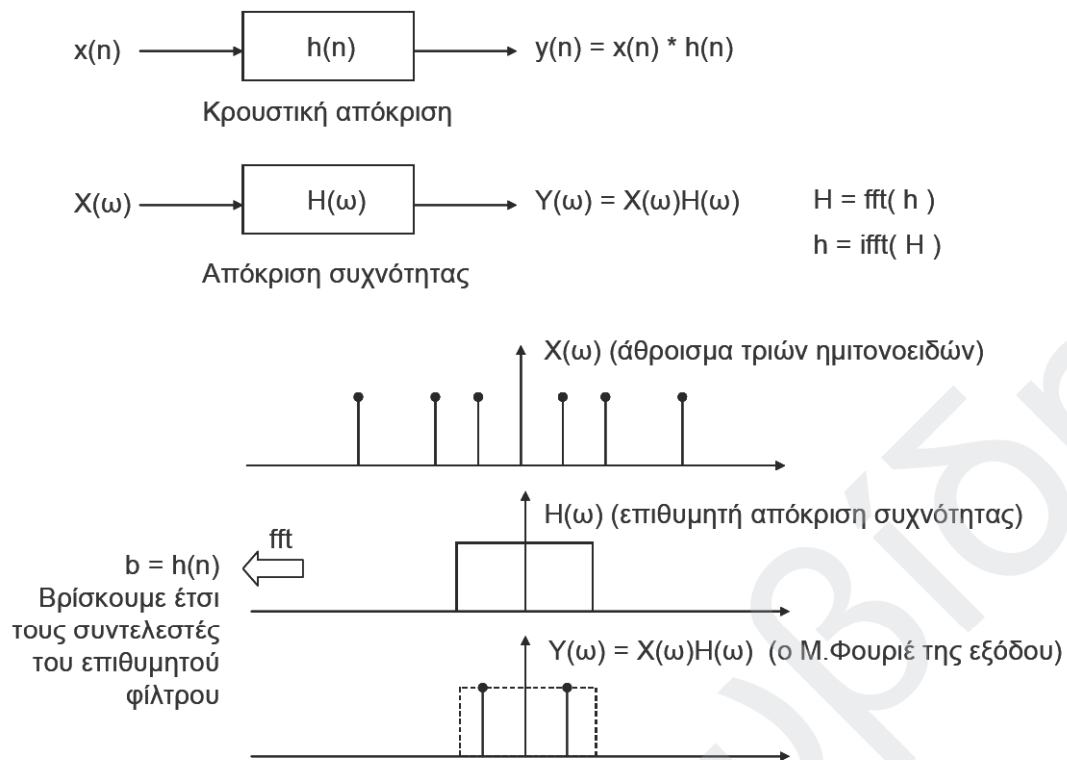
όπου M η τάξη του φίλτρου, f ένας πίνακας που περιέχει τις κανονικοποιημένες ψηφιακές συχνότητες στο διάστημα [0,1] (εννοείται ότι πολλαπλασιάζονται επί π), στις οποίες αλλάζει η κλήση της απόκρισης συχνότητας (σημεία άρθρωσης - frequency breakpoints) και m ένας πίνακας που περιέχει τις αντίστοιχες τιμές του πλάτους της απόκρισης συχνότητας (magnitude breakpoints). Ο πίνακας f πρέπει να ξεκινά από 0 και να τελειώνει σε 1. Στο Σχ.6 εικονίζεται ως παράδειγμα η υλοποίηση ενός βαθυπερατού (low pass) φίλτρου με τη συνάρτηση αυτή. Το αποτέλεσμα του κώδικα του Σχ.6 εικονίζεται στο Σχ.7.

<sup>2</sup> Πρέπει να υπάρχει εγκατεστημένο στο Matlab το Signal Processing Toolbox.





**Σχήμα 4.** Ιδανικές αποκρίσεις συχνότητας για διάφορα είδη φίλτρων. Οι περιοχές με τις διαγραμμίσεις περιγράφουν τα διαστήματα συχνοτήτων των οποίων η διέλευση επιτρέπεται μέσω του φίλτρου.



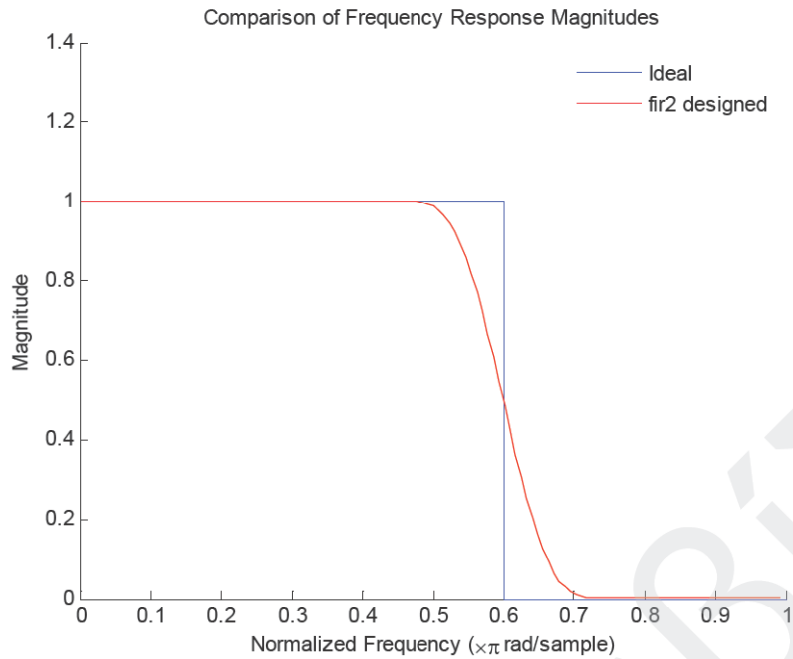
**Σχήμα 5.** Σχεδιασμός φίλτρου FIR αξιοποιώντας την έννοια της απόκρισης συχνότητας. Η απόκριση συχνότητας χρησιμοποιείται ως εργαλείο για το σχεδιασμό του φίλτρου, δηλαδή ως μέσο για να βρούμε τους συντελεστές του.

```

1  % A Matlab DSP Example by D.K. Iakovidis
2  % FIR filter design
3
4  f = [0 0.6 0.6 1];      % frequency breakpoints
5  m = [1 1 0 0];         % magnitude breakpoints
6  h = fir2(30,f,m);       % get filter coefficients
7  [H,w] = freqz(h,1,128); % get frequency response of FIR
8
9  hold on;
10 plot(f,m,'b')
11 plot(w/pi,abs(H),'r')
12 xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)')
13 ylabel('Magnitude')
14 legend('Ideal','fir2 designed')
15 legend boxoff
16 title('Comparison of Frequency Response Magnitudes')
17 hold off;

```

**Σχήμα 6.** Παράδειγμα υλοποίησης βαθυπερατού φίλτρου FIR με Matlab. Απεικονίζεται σε γράφημα η απόκριση συχνότητας του φίλτρου που παράγεται με την fir2 (H) συγκριτικά με την ιδανική απόκριση που περιγράφουν τα ζεύγη σημείων (f,m) που εισάγουμε στην fir2.



Σχήμα 7. Αποτέλεσμα του Σχ.6.

### Ασκήσεις

1. Να υλοποιήσετε το παράδειγμα του Σχ. 3.

α) Δοκιμάστε είτε να αλλάξετε τις παραμέτρους του χρόνου και της συχνότητας, είτε να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση **axis** ώστε να οπτικοποιήσετε καλύτερα το αρχικό ημιτονοειδές με το θόρυβο και το αποτέλεσμα του φίλτρου.

β) Δοκιμάστε μικρότερα και μεγαλύτερα φίλτρα κινητού μέσου (σε μήκος) και παρατηρείστε το αποτέλεσμα στο σήμα και στο φάσμα.

2. Να κατασκευάσετε ένα σήμα ως άθροισμα ημιτονοειδών συχνότητας 10,20,30 και 100 Hz. Να εφαρμόσετε: α) ένα βαθυπερατό φίλτρο για αποκόψετε τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από τα 50 Hz, β) ένα υπερπερατό φίλτρο για να αποκόψετε τις συχνότητες που είναι μικρότερες από 50Hz, γ) ένα φίλτρο που θα αποκόψετε τις συχνότητες από 15 έως 35 Hz.

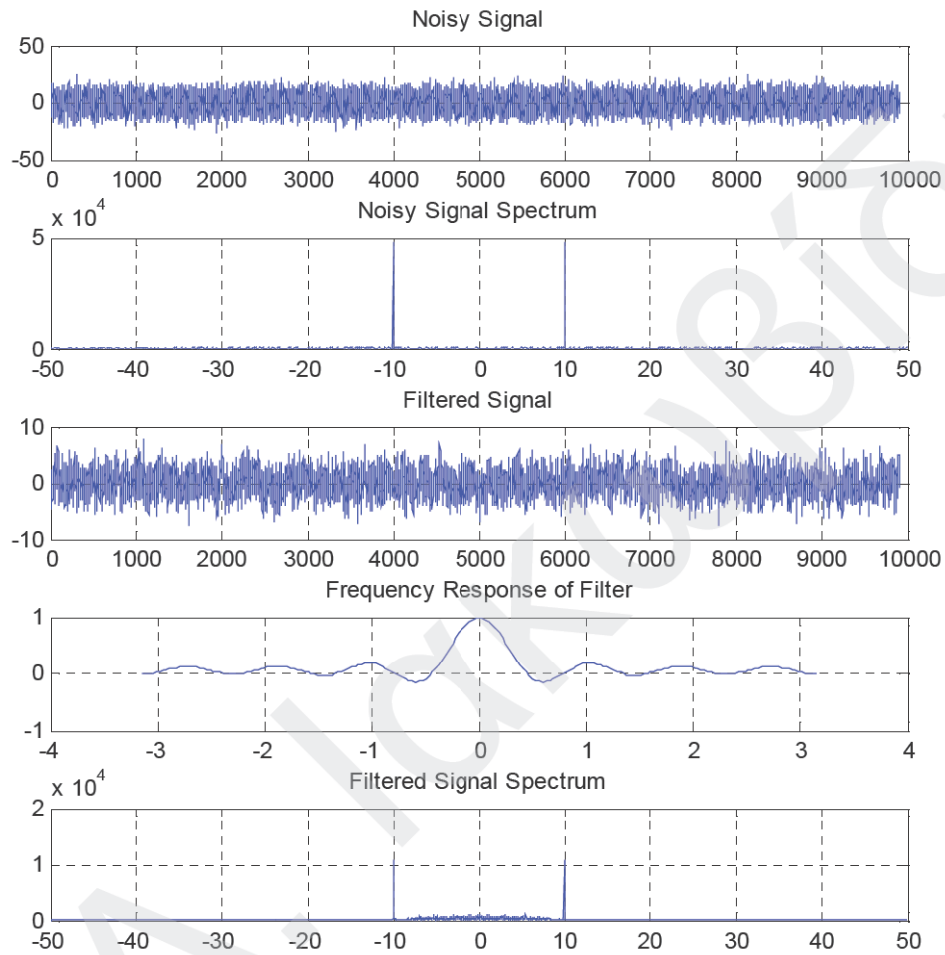
(υπόδειξη: αξιοποιήστε τον ορισμό της ψηφιακής συχνότητας για τον προσδιορισμό των σημείων άρθρωσης – breakpoints – της απόκρισης συχνότητας στη συνάρτηση fir2).



## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### Άσκηση 1

Το αποτέλεσμα του Σχ.3 είναι το ακόλουθο.



## Άσκηση 2

Το αποτέλεσμα του (α) ερωτήματος είναι το ακόλουθο. Χρησιμοποιήθηκε φίλτρο 30-στης τάξης.

