

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

*Если Вы владеете знаниями,
дайте другим зажечь от него
свои светильники*

Маргарет Фуллер

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Освоить алгоритм метода ветвей и границ применительно к решению задач целочисленного программирования.
2. Приобрести навыки введения дополнительных ограничений в систему для обеспечения условия целочисленности переменных.
3. Закрепить навыки решения ЗЛП двойственным симплекс-методом.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача линейного целочисленного программирования (ЛЦП) является частным случаем задач дискретного математического программирования [8, 10, 12] в постановке

$$\begin{aligned} C^T X &\rightarrow \max, \\ AX &\leq B = A_0, \\ x_i &\in D, \quad i = 1, \bar{n}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Известны [12] задачи (8.1) с неделимостями (о рюкзаке), экстремальные комбинаторные задачи (о назначениях, коммивояжёра), о покрытиях и др.

Одним из часто применяемых методов решения задач дискретного программирования, является метод ветвей и границ [3, 16, 17]

Для нужд целочисленного программирования метод приспособлен следующим образом. Так как оптимальное решение ищется на ограниченной области, то о любой переменной, входящей в оптимальное решение, можно сказать, что её значение удовлетворяет двойному неравенству

$$X_j^{\min} \leq X_j^{opt} \leq X_j^{\max}.$$

Наложение на это неравенство условия целочисленности вида

$$I_j = \lceil X_j^{opt} \rceil,$$

где $\lceil \dots \rceil$ — операция округления по недостатку, приведёт к тому, что оптимальное целочисленное значение X_j на числовой оси будет находиться либо слева от оптимального нецелочисленного значения X_j , либо справа.

Указанные соображения отражаются в виде нестрогих неравенств, соответственно:

$$X_j^{opt\text{ ЦЕЛОЕ}} \leq I_j, \quad (8.2)$$

$$-X_j^{opt\text{ ЦЕЛОЕ}} \leq -(I_j + 1). \quad (8.3)$$

Неравенства (8.2) и (8.3) являются дополнительными ограничениями по отношению к исходной ЗЛП, которые необходимо вводить при получении оптимального нецелочисленного решения для одной из переменных.

В результате применения границ (8.2) и (8.3), происходит разветвление текущей задачи на две подзадачи, каждая из которых получается модификацией таблицы оптимального нецелочисленного решения. Указанная таблица дополняется по следующим правилам.

1. Вводятся строка и столбец, соответствующие канонической форме представления (8.2) или (8.3). При этом дополнительная переменная, соответствующая ограничению, будет входить в число базисных переменных.

2. Формируется так называемая “выводная” строка симплекс-таблицы, при этом дополнительной переменной не вводится.

Пусть i -ая строка нецелочисленной симплекс-таблицы, соответствующая основной переменной задачи, на которую налагается ограничение целочисленности, описывается выражением

$$A_i \Rightarrow x_j^{opt} : a_{i,0}^{opt} = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_j + \dots + a_{i,r} \cdot x_r + \dots \quad (8.4)$$

При использовании ограничения (8.2), из канонической формы представления (8.2) необходимо вычесть (8.4) и поместить результат в таблицу.

При построении ветви с использованием (8.3), к канонической форме представления (8.3) следует прибавить (8.4).

3. Получающиеся задачи решаются с применением итерационной процедуры двойственного симплекс-метода до получения оптимума либо факта неразрешимости. В литературе [3, 9] этот шаг называется “большой итерацией”

4. В зависимости от того, является ли текущее решение целочисленным или нет, вводятся новые ограничения (8.2) и (8.3), приводящие к дальнейшему ветвлению задачи, либо процесс вычислений завершается.

5. Когда все возникающие задачи оказываются решёнными, из результатов, соответствующих оптимальным целочисленным решениям, выбирается решение, целевая функция в котором наиболее отвечает условиям оптимальности, то есть самая максимальная или самая минимальная.

Подробно ход решения представлен в пособии [5, с. 34 – 41]

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В качестве варианта к выполнению лабораторной работы использовать ранее выданное к лабораторной работе № 1 задание.

2. Задействовать в качестве оптимального нецелочисленного решения результаты выполнения одной из лабораторных работ №№ 2 или 3.

3. Сформулировать, используя неравенства (8.2) и (8.3) пару задач, построить соответствующие симплекс-таблицы и приступить к решению.

Напоминание: применение неравенств (8.2) и (8.3) допускается, в пределах одного шага алгоритма, только к одной переменной (одной строке симплекс-таблицы). Обычно, в качестве переменных для выполнения ветвления, используются основные переменные математической модели.

4. Построить дерево решений, обозначив на нём ситуации неразрешимости задач и узлы, в которых было достигнуто оптимальное целочисленное решение.

5. Выбрать наилучшее решение из оптимальных целочисленных.

6. Построить чертёж области ограничений и обозначить на ней оптимум.

7. Оформить отчет, сделать содержательные выводы и защитить результаты выполнения работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сходства и различия терминов «дискретный» и «целочисленный»?

2. Опишите, в самом общем виде, алгоритм метода ветвей и границ.

3. Почему алгоритм получил такое название, что является ветвями, а что — границами?

4. Поясните сущность и неравенств (8.2) и (8.3).

5. Почему в ходе решения ЛЦП используется двойственный симплекс-метод?

6. В каких случаях задача ЛЦП не будет иметь решения?

7. Как вы думаете, оптимальное решение ЛЦП будет единственным? Обоснуйте свои соображения по этому поводу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Деордица Ю. Ф. Исследование операций в планировании управления / Ю. Ф. Деордица, Ю. М., Нефедов. – Киев : Вища школа, 1991. – 196 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций : учебное пособие / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа, 1979. – 392 с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: сборник задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Киев : Вища школа, 1990. – 239 с.
4. Карлусов В. Ю. Исследование операций и методы оптимизации : учебное пособие / В. Ю. Карлусов ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2018. – 315 с.
5. Методическое пособие к решению задач линейного программирования по дисциплине «Методы исследования операций» для студентов направлений подготовки 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 – «Прикладная информатика» всех форм обучения / Севастопольский государственный университет ; сост.: В. Ю. Карлусов, Е. Н. Заикина. – Севастополь : СевГУ, 2021. – 59 с.
6. Методическое пособие к выполнению лабораторно - вычислительного практикума по дисциплине «Методы исследования операций». Часть 3: «Параметрическое программирование», «Квадратичное программирование», «Линейное целочисленное программирование» для студентов профилей 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 – «Прикладная информатика» всех форм обучения / Севастопольский государственный университет ; сост.: Е. Н. Заикина, В. Ю. Карлусов – Севастополь : СевГУ, 2016. – 46 с.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИЗДАНИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПО ПОДПИСКЕ СЕВГУ

7. Горлач, Б. А. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б. А. Горлач. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4865>. — Загл. с экрана.
8. Ржевский, С. В. Исследование операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/32821>. — Загл. с экрана.

9. Есипов, Б. А. Методы исследования операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. А. Есипов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/68467>. — Загл. с экрана.
10. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Л. Акулич. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 352 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2027>. — Загл. с экрана.
11. Балдин К. В. Математическое программирование / Балдин К. В., Брызгалов Н. А., Рукосуев А. В., — 2-е изд. — М.: Дашков и К, 2018. — 218 с. — Режим доступа : <http://znanium.com/catalog/product/415097>. — ISBN 978-5-394-01457-4