

**ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОЦЕССЫ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ**

Практикум по таким сложным разделам высшей математики, как теория вероятностей, вероятностные процессы и математическая статистика, необходим при решении вопросов, связанных с анализом случайных событий, чисел и процессов. Он состоит из 5 задач, каждая из которых при правильном решении приносит 5 баллов творческого рейтинга.

При решении практических задач следует придерживаться следующих общих правил:

1. Предлагается задание, состоящее из 5 задач.
2. Решённые контрольные задачи желательно представлять в компьютерном исполнении.
3. В конце контрольной работы необходимо привести список использованной литературы
4. Решение каждой задачи необходимо сопровождать объяснениями и ссылками на соответствующие формулы, теоремы и правила. Вычисления должны быть доведены до конечного числового результата.
5. Выводы, полученные при решении задач, должны быть достаточно подробными.

ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Предмет теории вероятностей. Значение теории вероятностей для экономической науки. Понятие теоретико-вероятностного эксперимента (испытания). Пространство элементарных событий. Свойства операций над событиями. Геометрическая иллюстрация.

Понятие вероятности. Классическое и статистическое определения вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Частотная трактовка вероятности случайного события. Экономические показатели и статистическая вероятность (в демографии, в страховании, в банковском деле и др.).

Понятие условий вероятности. Независимость событий. Вероятность произведения и суммы событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Последовательность испытаний. Схема Бернулли. Приближение формулы Бернулли по Пуассону и Лапласу.

Случайные величины и их классификация. Понятие закона распределения случайной величины. Функция распределения и ее свойства. Дискретные распределения. Ряд и многоугольник распределения. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Геометрическое, биномиальное распределения. Распределение Пуассона.

Непрерывные распределения. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Равномерное и показательное распределения. Нормальное распределение. Функция Лапласа и ее свойства. Использование функции Лапласа для определения вероятностей событий, связанных с нормально распределенной случайной величиной.

Многомерные случайные величины. Зависимость и корреляция. Функции случайных величин. Основные понятия о распределениях «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера. Применение нормального и связанного с ним распределений в экономике.

Понятие о законе больших чисел. Устойчивость относительных частот и устойчивость средних величин. Понятие о центральной предельной теореме. Значение предельных теорем для решения практических задач.

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ.

Задачи математической статистики. Основные понятия выборочного метода. Генеральная совокупность и выборка. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма и полигон частот.

Точечное оценивание параметров распределения. Несмещенность, состоятельность и эффективность оценок. Методы получения точечных оценок (метод моментов, метод максимального правдоподобия и др.). Формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии, условия их применения.

Интервальное оценивание параметра распределения. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднеквадратическом отклонении этого распределения. Учет объема выборки.

Проверка гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий проверки гипотез. Уровень значимости. Мощность критерия. Общая схема проверки гипотезы.

Проверка гипотез о равенстве средних и дисперсий. Проверка гипотез о виде закона распределения. Критерии согласия.

Элементы корреляционного и регрессионного анализа. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии и их свойства. Определение параметра линейной регрессии методом наименьших квадратов. Коэффициенты регрессии и корреляции, их свойства. Прогнозирование в экономике на основе результатов корреляционного и регрессионного анализа.

ЗАДАЧА №1.
АЛГЕБРА СОБЫТИЙ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
НЕЗАВИСИМЫХ И НЕСОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ.

Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками соответственно равны $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,9$.

Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то первый банк получит кредит в размере 60 млн. руб., второй банк – 40 млн. руб. и третий – 100 млн. руб. Введем обозначения следующих событий:

$A = \{\text{первый банк выделил кредит}\},$

$B = \{\text{второй банк выделил кредит}\},$

$C = \{\text{третий банк выделил кредит}\},$

$D = \{\text{предприятие получит кредит в размере 100 млн. руб.}\},$

$E = \{\text{предприятие получит кредит в размере не менее 140 млн. руб.}\}.$

События D и E очевидно, выражают интересы предприятия. В этих условиях требуется:

- 1) записать события D и E через события A , B , и C ;
- 2) найти вероятности событий D и E .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое событие называется случайным?
2. Когда события считаются несовместными?
3. Что такое полная группа событий?
4. Какие события называются противоположными?
5. Что понимается под суммой и произведением событий?
6. В чем суть классического и статистического определений вероятности?
7. В чем состоит частотная трактовка вероятности случайного события?
8. По каким формулам определяются вероятности произведения и суммы событий?
9. Когда события называются независимыми в совокупности?

ЗАДАЧА №2.
ФОРМУЛА «ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ». УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ.
ФОРМУЛА РЕЗЕРВИРОВАНИЯ СОБЫТИЙ.

Из 20 частных банков, работающих в городе, нарушения в уплате налогов имеют место в 12 банках. Налоговая инспекция проводит проверку трех банков, выбирая их из двадцати банков случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо один от другого. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью, $p = 0,8$. Какова вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в уплате налогов?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАДАЧЕ №2

1. Как формулируется теорема о вероятности суммы событий?
2. Чему равна вероятность суммы попарно несовместных событий?
3. Что такое условная вероятность события?
4. Как определяется вероятность произведения событий?
5. Когда случайные события считаются независимыми?
6. Что выражает формула полной вероятности?
7. Когда несколько событий будут независимы в совокупности?
8. Дайте определение термину «перестановка».
9. Определение термина «размещение» и его применение.
10. Суть понятия «сочетания» (или «комбинации»).
11. Почему сочетания называют биномиальными коэффициентами?
12. Для каких целей используется формула Байеса?
13. Что такое априорные и апостериорные величины?

ЗАДАЧА №3.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайная величина X - годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Ее плотность распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{\alpha+1}} & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & x_0 < 0, \end{cases}$$

где A - неизвестный параметр, а величины x_0 и α заданы (см. в приведенной ниже таблице свой вариант задачи).

Требуется:

- 1) определить значение параметра A ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) определить математическое ожидание m_x и среднее квадратическое отклонение σ_x ;
- 4) определить размер годового дохода x_1 , не ниже которого с вероятностью p ожидается годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

Таблица 3.1

Данные к задаче №3

x_0	α	p
1	2,5	0,5

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под законом распределения случайной величины?
2. Что такое математическое ожидание случайной величины?
3. Что такое дисперсия случайной величины?
4. Как определяется функция распределения случайной величины?
5. Каковы свойства функции распределения случайной величины?
6. Как определяется функция распределения случайной величины?
7. Какой ряд называется дискретным?
8. Что такое ряд распределения и многоугольник распределения?
9. По каким формулам определяется математическое ожидание дискретной случайной величины?
10. По каким формулам определяется дисперсия дискретной случайной величины?
11. Когда распределение случайной величины называется непрерывным?
12. Каковы основные свойства плотности распределения случайной величины?
13. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины?
14. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины?
15. Что такое среднее квадратическое отклонение случайной величины?
16. Каковы основные свойства математического ожидания?
17. Каковы основные свойства дисперсии?
18. Как найти вероятность попадания случайной величины на конкретный линейный участок через функцию распределения и через плотность распределения?
19. Дайте определение термину «нормальное распределение»?
20. Каковы основные свойства плотности нормального распределения?
21. Каков вероятностный смысл параметров нормального распределения?
22. Что такое функция Лапласа и каковы ее свойства?
23. В чем состоит правило трех сигм?

ЗАДАЧА №4.
ГИСТОГРАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.
ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Выборочная проверка дневной выручки оптовой базы от реализации товаров по 100 рабочим дням дала следующие результаты:

Таблица 4.3

Исходные данные к варианту №10

i	1	2	3	4	5	6	7	8
J_i	0...5	5...10	10...15	15 ...20	20 ...25	25...30	30 ...35	35...40
n_i	2	7	14	19	25	20	10	3

Здесь:

i - номер интервала наблюдаемых значений дневной выручки, $i = 1 \dots 8$;

J_i - границы i -го интервала (в условных денежных единицах;

n_i - число рабочих дней когда дневная выручка оказывалась в пределах i -того

интервала: при этом очевидно, что $\sum_{i=1}^8 n_i = n = 100$.

Требуется:

- 1) построить гистограмму частот;
- 2) найти несмещенные оценки m_x^* и D_x^* для математического ожидания и дисперсии случайной величины X - дневной выручки оптовой базы – соответственно;
- 3) определить приближенно вероятность того, что в наудачу выбранный рабочий день дневная выручка составит не менее 15 условных денежных единиц.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАДАЧЕ №4

1. Каким требованиям должна отвечать выборка из генеральной совокупности?
2. В чем заключается разница между повторными и бесповторными выборками?
3. Что понимается под эмпирической функцией распределения. Как она строится?
4. Что такое гистограмма частот, в чем состоит ее полезность?
5. Каков смысл несмещенности, эффективности и состоятельности оценок?
6. Какие методы используются для получения точечных оценок?
7. По каким формулам вычисляются выборочная средняя и выборочная дисперсия?
8. Что такое исправленная дисперсия, каковы условия ее применения?

ЗАДАЧА №5.
КУМУЛЯТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.

При выборочном опросе 100 жителей поселка о количестве поездок по железной дороге, совершаемых в течение месяца, получены следующие данные:

Таблица 5.1

Общие данные к задаче №5

Число поездок	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30	Итого
Число жителей	6	9	15	19	20	14	9	5	2	1	100

Требуется:

- 1) построить эмпирическую функцию распределения случайной величины X - количества поездок в месяц для наугад взятого жителя поселка;
- 2) найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,98 среднего значения случайной величины X .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАДАЧЕ № 5

1. В чем состоит суть интервального оценивания параметров распределения?
2. Что такое доверительная вероятность и доверительный интервал и как они взаимосвязаны?
3. Какие теоретические распределения используются при интервальном оценивании и при каких условиях?
4. Как находится интервальная оценка математического ожидания нормального распределения при известном и при неизвестном среднееквadraticком отклонении этого распределения?
5. Как учитывается объем выборки при интервальном оценивании?
6. Какова общая схема статистической проверки гипотез?
7. Что такое уровень значимости?
8. Что такое критическая область?
9. Что понимается под мощностью критерия при проверке гипотез?
10. Как взаимосвязаны уровень значимости и мощность критерия?
11. Как проводится проверка гипотез о равенстве средних?
12. Как проводится проверка гипотез о равенстве дисперсий?
13. Как проверяется гипотеза о виде закона распределения?
14. Что понимается под критерием согласия?