Лабораторная работа 1

Цель: 1) Получить практические навыки решения ЗЛП графическим методом;
2) Проиллюстрировать приложения основных теорем ЛП к решению ЗЛП;
3) Изучить теоретические положения, лежащие в основании метода;

Задача: Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях для заданного варианта (В-9);

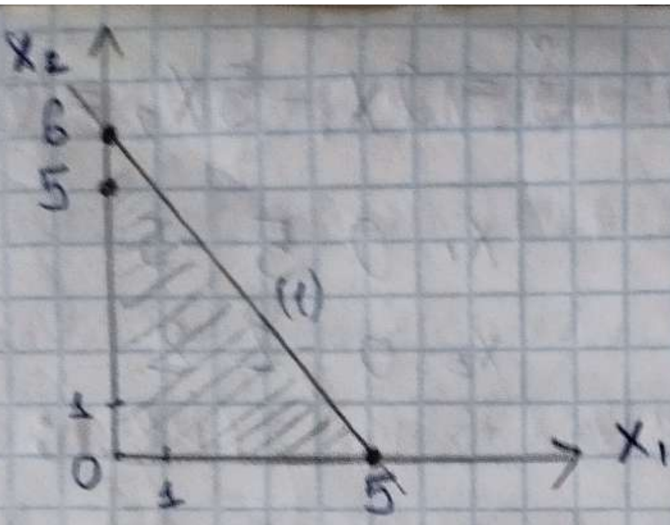
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to opt$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ход решения:

Для указанных ограничений была построена область допустимых стратегий. Для этого были построены граничные линии.

30/11 2023 зачт

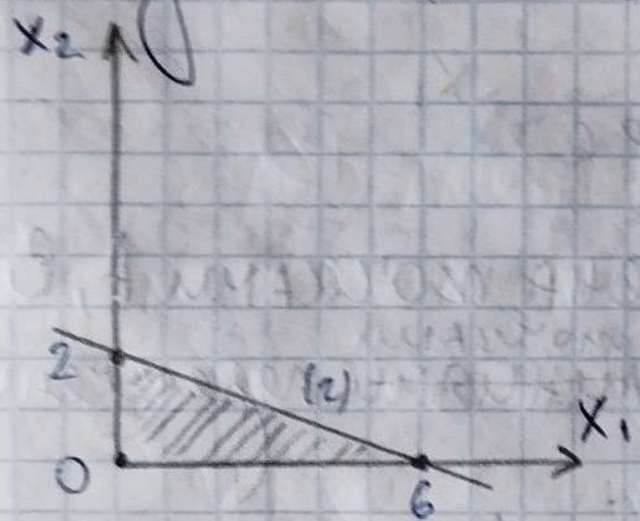


– ограничение 1

$6x_1 + 5x_2 = 30$

x_1	0	5	-5
x_2	6	0	12

$6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 30$ (удовл.)

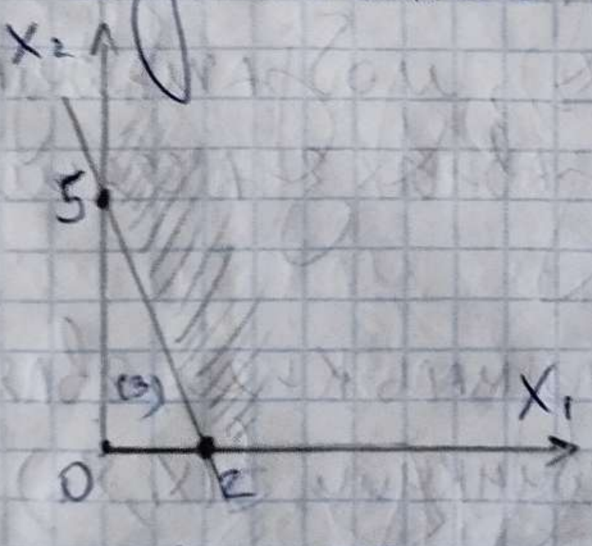


– ограничение 2

$2x_1 + 6x_2 = 12$

x_1	0	6	-6
x_2	2	0	4

$2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \leq 12$ (удовл.)



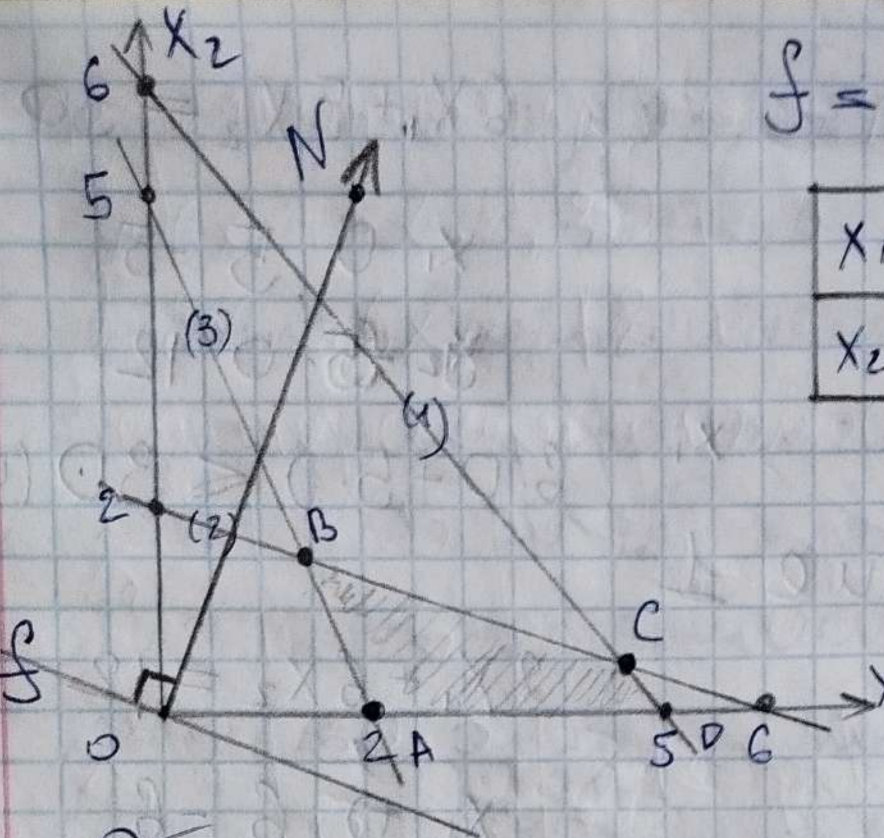
– ограничение 3

$5x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	0	2	4
x_2	5	0	-5

$5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 10$ (не удовл.)

При пересечении полуплоскостей была получена область допустимых решений.



$$f = 2x_1 + 5x_2 = 0$$

x_1	0	5	-5
x_2	0	-2	2

Область ограничена точками A, B, C, D, являющихся ~~линиями~~ точками пересечения граничных линий.

Была построена нулевая линия уровня для функции $f(x_1, x_2)$, изображающая местоположение равных значений функции.

Была построена нормаль к ней, являющаяся градиентом функции $f(x_1, x_2)$

$f'_{x_1} = 2$ $\Rightarrow$ точка конца нормали:

$f'_{x_2} = 5$ $\quad N(2; 5)$

Вектор нормали указывает направление возрастания $f(x_1;x_2)$, а обратный ему вектор антинормали – направление убывания.

1) Поиск минимума:

Перемещаем перпендикуляр (линия уровня) в направлении антинормали. Крайняя точка – A, пересечение граничной линии (3) с осью OX. Уточним коор-ты:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

~~$(2x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 5$~~

$5x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 2$

Крайняя точка имеет координаты A(2; 0). Минимум равен:

$$f(2;0) = 2\cdot 2 + 5\cdot 0 = 4$$

2) Поиск максимума:

Перемещаем перпендикуляр в направлении нормали. Крайняя точка – C, пересечение граничных линий (1) и (2).

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2=30 \\ 2x_1+6x_2=12 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36-10=26$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 180-60=120$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 30 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 72-60=12$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{120}{26}^{\frac{60}{13}} \approx 4,615$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{26}^{\frac{6}{13}} \approx 0,461$$

Примерные координаты крайней точки равны $C(4.615, 0.461)$.

$$f(4.615, 0.461) \approx 11,538$$

Решение было проверено с помощью специального программного комплекса на ЭВМ. В результате проведи решение на ЭВМ совпало с решением, представленным в работе с погрешностью 0,0001.

<u>Вывод</u>: в ходе работы был изучен графический метод решения ЗЛП. Полученные знания были применены при решении конкретной задачи. Алгоритм решения был разделен на следующие шаги:

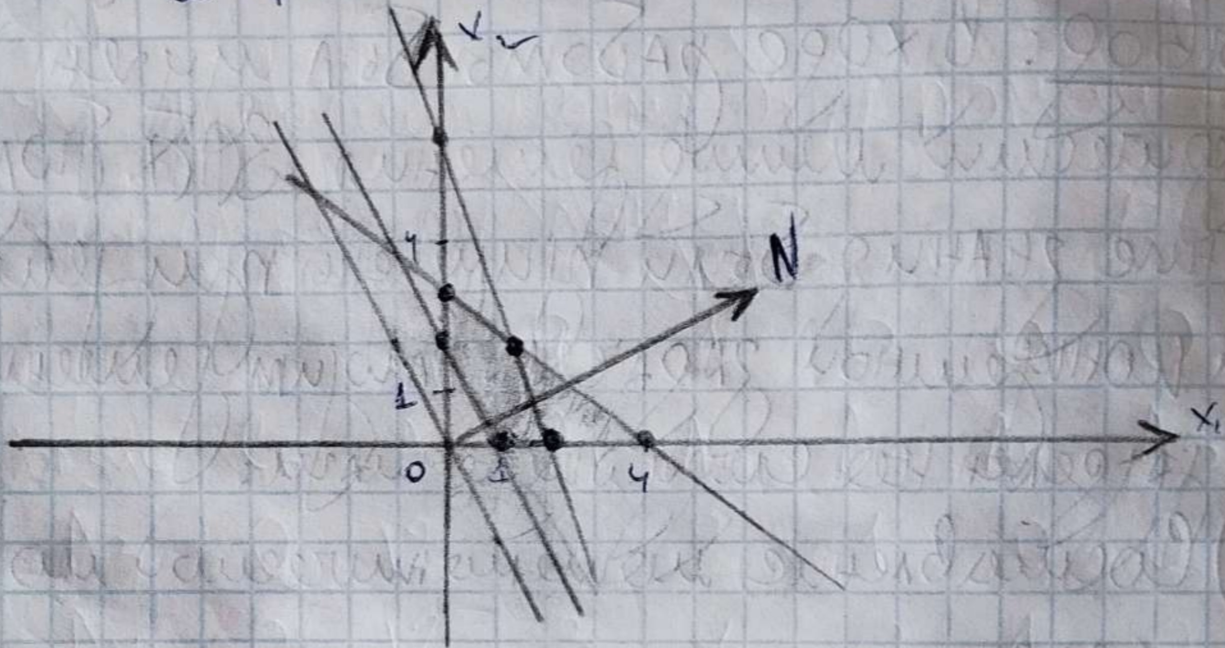
1) Составление математической модели задачи;

2) Построение области допустимых стратегий на координатной плоскости.

3) Проведение линии уровня целевой функции и определение оптимальных решений через нормаль (градиент);

Полученный результат позволяет определить координаты точек оптимального решения для целевых линейных функций от 2-х переменных.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to opt \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \end{cases}$$



min: $2x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \in [0; 1]$, $x_2 \in [0; 2]$

MAX: $x_1 \approx 1{,}33$; $x_2 = 2$

$f_{min}(1; 0) = 2$

$f_{max}(1{,}33; 2) \approx 4{,}66$

Вариант - 31