СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые величины при $x \to x_0$, для того, чтобы их сравнить, найдем предел их отношения.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка, обозначение

$$\alpha(x) = 0\big(\beta(x)\big).$$

Пример. $\alpha(x) = \sqrt{9+x} - 3$, $\beta(x) = x, \quad x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{9+x}-3\right)\left(\sqrt{9+x}+3\right)}{x\left(\sqrt{9+x}+3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{9+x-9}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{6}.$$

Значит, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, обозначаем

$$\alpha(x) = 0\big(\beta(x)\big).$$

Пример. $\alpha(x) = \mathrm{tg}x^3$, $\beta(x) = x, \quad x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x^3}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x^3}{x^3}\cdot x^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x^3}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}x^2 = 1\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\alpha(x) = \mathrm{tg}x^3$ является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с $\beta(x) = x$.

$$\mathrm{tg}x^3 = 0(x).$$

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$, т.е.

$$\beta(x) = 0\big(\alpha(x)\big).$$

Пример. $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x^2, \quad x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = 1\cdot\infty = \infty.$$

Значит, $\alpha(x) = \sin x$ есть бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с $\beta(x) = x^2$.

$$x^2 = 0(\sin x).$$

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, обозначение $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Пример. $\alpha(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$, $\beta(x)=x$, $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-1+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\sim x.$$

Используя уже рассмотренные раннее пределы, можно записать при $x\to 0$

$$\sin x\sim x;\qquad tgx\sim x;\qquad \arcsin x\sim x;$$

$$arctgx\sim x;\qquad \ln(1+x)\sim x;\qquad e^x-1\sim x.$$

Отсюда вытекают более общие соотношения:

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ имеет место

Таблица эквивалентности бесконечно малых

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x); \quad tg\alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x); \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).$$

Эквивалентность бесконечно малых используется для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

При решении примеров полезно использовать утверждение:

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций эквивалентна слагаемому самого низкого порядка малости.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin x-2\sin^5 x+\arcsin^6 x}{\mathrm{tg}x+3\sin^2 x+5x^4}$.

В числителе и в знаменателе бесконечно малые разных порядков, поэтому

$$7\sin x-2\sin^5 x+\arcsin^6 x \sim 7\sin x \sim 7x;$$

$$\mathrm{tg}x+3\sin^2 x+5x^4 \sim \mathrm{tg}x \sim x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\sin x-2\sin^5 x+\arcsin^6 x}{\mathrm{tg}x+3\sin^2 x+5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin x}{\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7.$$

<u>Односторонние пределы</u>

Если $f(x)$ стремится к пределу A_1 при $x\to x_0$ так, что x принимает только значения, меньше x_0, то пишут

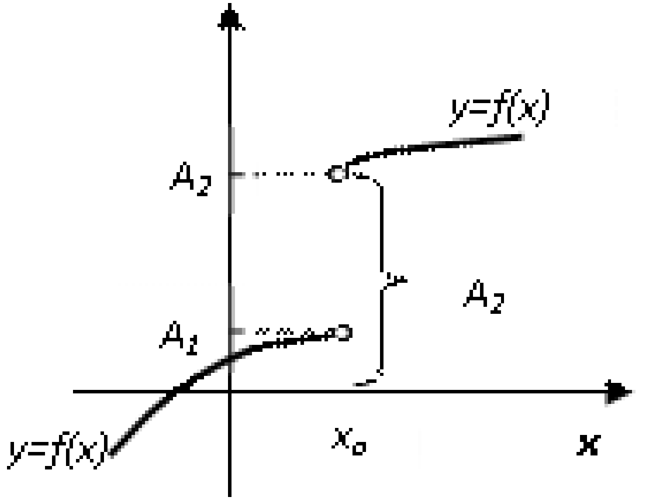
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=A_1,$$

и называют A_1 пределом функции $f(x)$ в точке x_0 <u>слева</u>.

Если $f(x)$ стремится к пределу A_2 при $x\to x_0$ так, что x принимает только значения, меньше x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=A_2,$$

и называют A_2 пределом функции $f(x)$ в точке x_0 <u>справа</u>.



Если $x_0 = 0$, то пишут просто $x \to +0$ или $x \to -0$ (соответственно $f(+0)$ и $f(-0)$).

Пример. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \le -1 \\ 3x + 5, & x > -1 \end{cases} \text{ при } x \to -1.$$

Решение:

Если $x \le -1$, то $f(x) = 2 - x$. Следовательно, $f(-1-0) = \lim\limits_{x \to -1-0} (2 - x) = 3$, это предел слева при $x \to -1$.

Если $x > -1$, то $f(x) = 3x + 5$, тогда $f(-1+0) = \lim\limits_{x \to -1+0} (3x + 5) = 2$, это предел справапри $x \to -1$.

Пример. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ при $x\to 1$.

Решение: Найдем предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2}{x-1}=-\infty$.

Если $x\to 1$, оставаясь меньше единицы, то разность $(x-1)$ будет бесконечно малой отрицательной величиной, обратная функция $\dfrac{2}{x-1}$ будет бесконечно большой.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2}{x-1}=+\infty.$$

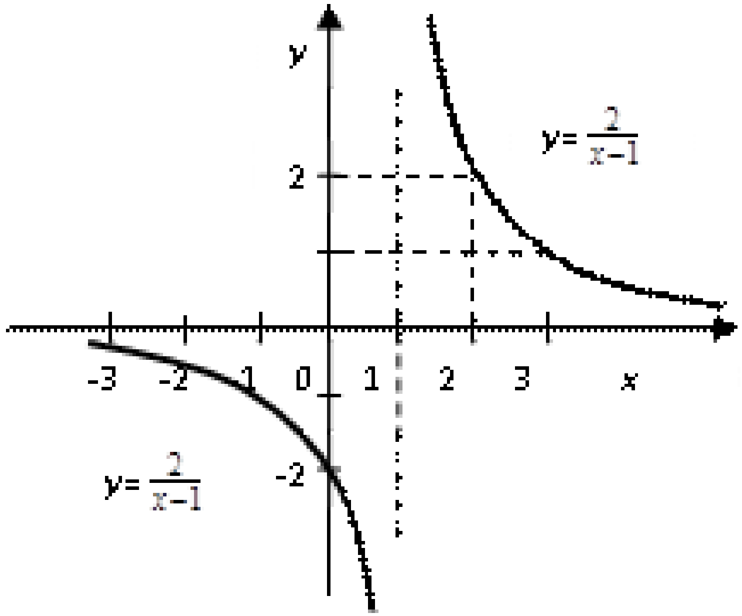


Рисунок 13

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы для нее в точке x_0 существовали пределы слева и справа, каждый из которых равен A.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

<u>Непрерывность функции</u>

ОпределениеПусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

1) существует $f(x_0)$;
2) существует конечный $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

существует конечный $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

3) $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий в точке x_0, то она называется <u>точкой разрыва функции</u> $y = f(x)$.

Точки разрыва функции и их классификация

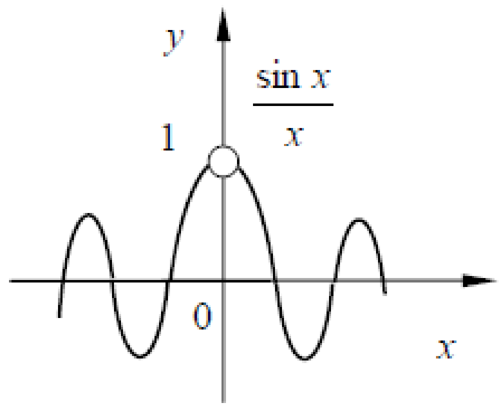
Точки, в которых функция не является непрерывной, называются ***точками разрыва функции.***

Точки разрыва классифицируются следующим образом.

1. *Точка a называется точкой* ***устранимого разрыва*** *функции $f(x)$, если в этой точке функция не определена, либо предел в этой точке не равен значению функции в этой точке.*

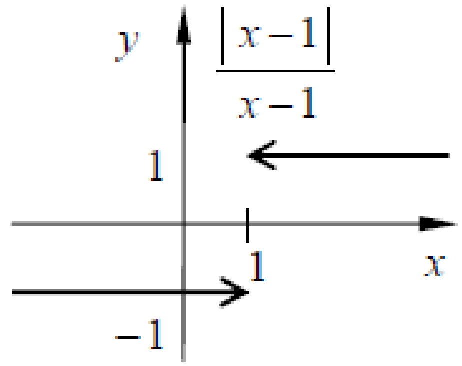
Например, функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, но имеет в этой точке предел, равный единице (первый замечательный предел)

Следовательно, точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва функции



2. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ конечны и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

то x_0-<u>точка разрыва I рода</u>.



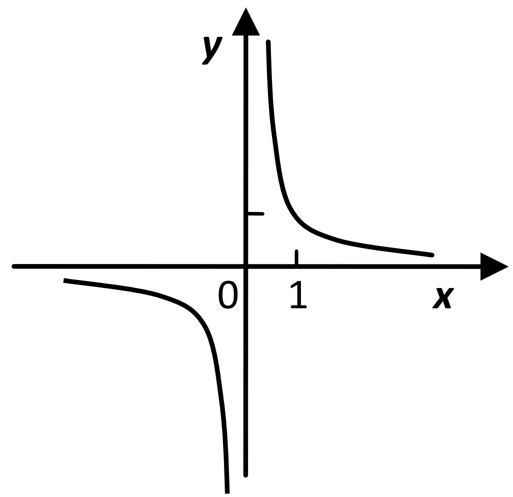
Например, функция $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ в точке $x=1$ имеет разрыв первого рода поскольку

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}=1 \text{ и } \lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}=-1.$$

Разность $\Delta f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ называют **<u>скачком функции</u>** $f(x)$ в точке x_0.

3. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равен ∞ или не существует, то x_0 называют **<u>точкой разрыва II рода</u>**.

Например, для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва 2-го рода, поскольку $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$



Некоторые свойства непрерывных функций

Теорема 1. Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Опираясь на свойства пределов можно доказать следующие свойства непрерывных функций:

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то:

1) $f_1(x) \pm f_2(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывна в точке x_0;

3) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ непрерывна в точке x_0 ($f(x_0) \neq 0$);

4) если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то $f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна в точке x_0.