Лекция 7.
Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $S(x)$ является суммой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на интервале сходимости $(-R;R)$. Тогда функция $S(x)$ может быть разложена в степенной ряд, причем это разложение единственное.

По условию ряд сходится и $S(x)$ его сумма. Его можно почленно дифференцировать любое число раз

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + \ldots + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)a_nx^{n-3} + \ldots$$

....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)a_{n+1}x + \ldots$$

Пусть $x = 0$

$$f(0) = a_0 \qquad f'(0) = a_1 \qquad f''(0) = 2!a_2 \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = n!a_n$$

Следовательно все коэффициенты ряда определяются единственным образом.

$$a_0 = f(0) \qquad a_1 = f'(0) \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0) \quad \ldots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Подставим в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (1)$$

Формула (1) – ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad\qquad f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$S_n(x)$ $n-$я частичная сумма ряда $\qquad$ $R_n(x)$ $n-$й остаток ряда

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора сходился к функции $f(x)$ Необходимо и Достаточно чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ для всех значений x из интервала сходимости ряда.

Замечание. Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (2)$$

$R_n(x)$ $n-$й остаточный член формулы Тейлора

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1) $y = e^x$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

Ряд сходится абсолютно на $(-\infty;\infty)$

2) $y = \sin x$

$$\begin{aligned} &f(x) = \cos x && f(0) = 1 \\ &f'(x) = -\sin x && f'(0) = 0 \\ &f''(x) = -\cos x && f''(0) = -1 \\ &f'''(x) = \sin x && f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

....

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 0,2,4,6,...... \\ 1 & n = 1,5,9,...... \\ -1 & n = 3,7,11,...... \end{cases}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n-1)!} + ...$$

Ряд сходится на $(-\infty;\infty)$

3) $y = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Ряд сходится на $(-\infty;\infty)$

4) $y = (1+x)^m$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...$$

Ряд сходится на $(-1;1)$

5) $y = Ln(1+x)$

Рассмотрим геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + (-1)^n x^n + ...$$

$q=-x \quad |q|=|-x|<1 \quad -1<x<1$

Ряд сходится на $(-1;1)$

Проинтегрируем его

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = Ln(1+x)\Big|_0^x = Ln(1+x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)dx =$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Пример 1. Задана функция а) $f(x)=\dfrac{11}{5-9x-2x^2}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4x+7}$, $x_0=2$.

Решение

а) Дискриминант знаменателя положительный. Найдем корни знаменателя, разложим его на множители. Затем рациональную дробь разложим на сумму простейших дробей.

$f(x)=\dfrac{11}{(1-2x)(x+5)}$, $f(x)=\dfrac{2}{1-2x}+\dfrac{1}{x+5}$. Определяем ряд для каждого слагаемого.

$\dfrac{2}{1-2x}=2+2(2x)^2+2(2x)^3+\ldots+2(2x)^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\cdot x^n$, если $|2x|<1$;

$\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1/5}{1-\left(-\frac{x}{5}\right)}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{x}{5^2}+\dfrac{x^2}{5^3}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{5^{n+1}}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{5^{n+1}}$,

если $\left|-\dfrac{x}{5}\right|<1$.

Сложим полученные ряды $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}+\dfrac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right)x^n$.

Интервал сходимости полученного ряда определяем решением неравенств: $\begin{cases}|2x|<1,\\ \left|-\frac{x}{5}\right|<1,\end{cases}$ $\begin{cases}|x|<\frac{1}{2},\\ |x|<5,\end{cases}$ откуда $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

$$\mathrm{sh}\, x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

$$\mathrm{ch}\, x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \quad -1<x\le 1.$$

$$\mathrm{arctg}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \quad -1\le x\le 1.$$

$$(1+x)^2=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots, -1<x<1.$$

Некоторые приложения степенных рядов

а) **Приближенное вычисление значений функций**

Для вычисления значения функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$ функцию $f(x)$ в интервале $(-R; R)$ раскладывают в ряд

Точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

А приближенное равно частичной сумме $S_n(x_1)$

$$f(x_1) \approx S_n(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + \ldots + a_n x_1^n$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т.е. $\left| f(x_1) - S_n(x_1) \right| = \left| r_n(x_1) \right|$

Пример

Пользуясь соответствующим разложением вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \ldots \quad .$$

Воспользуемся приближенным равенством

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4} \quad .$$

Мы взяли 5 слагаемых, так как знакопеременный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда. У нас первый из отброшенных членов ряда равен $\frac{1}{5!5^5} < 10^{-5}$.

Итак, $\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 0{,}81873.$

б) **Приближенное вычисление определенного интеграла**

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R; R)$ включит в себя отрезок $[a; b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Пример

Вычислить с точностью до $0{,}0001$ определенный интеграл $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

Решение. Заменим в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2}(1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...)dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-...\right)dx = \left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!3}+\frac{x^5}{6!5}-...\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2!2}-\frac{1}{4!3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!5\cdot 2^5}-...$$

Отсюда $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \approx 0{,}25-0{,}0017 = 0{,}2483.$

в) **Приближенное вычисление дифференциальных уравнений**

Найти разложение в степенной ряд до степени x^4 решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2, \quad y(0)=1.$

Решение. Из уравнения и начальных условий находим: $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$

Дифференцируя данное уравнение, находим последовательно:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy', \quad y^{\text{IY}} = 6y'y'' + 2yy'''.$$

Полагая $x = 0$ и используя значение $y(0)=1, \; y'(0)=1,$ находим последовательно:

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{\text{IY}}(0) = 28.$$

Искомое решение имеет вид:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + ... \quad .$$