Лекция 6

Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть даны два вектора $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$

1) Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны т.и т.т.к. равны их соответствующие координаты, т.е. $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$

2) При сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b).$$

3) При умножении вектора $\vec{a}$ на число его координаты умножаются на это число $k \cdot \vec{a} = \vec{a}(kx_a; ky_a; kz_a)$.

4) Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если пропорциональны их соответствующие координаты $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$ или $\begin{cases} x_a = kx_b \\ y_a = ky_b \\ z_a = kz_b \end{cases}$.

5) Если вектор задается точками с соответствующими координатами:

A($x_A; y_A; z_A$) и B($x_B; y_B; z_B$), то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются как разность соответствующих координат конечной и начальной точек:

$\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Пример

Проверить коллинеарность векторов $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{d} = -\vec{a} - 2\vec{b}$, построенных по векторам $\vec{a}$ =(-1; 5; 2) и $\vec{b}$ =(3; 2; -2).

Решение.

$\vec{c}$ = (-2+12; 10+8; 4–8) = (10; 18; -4);

$\vec{d}$ = (1–6; -5–4; -2+4) = (-5; -9; 2);

$\frac{10}{-5} = \frac{18}{-9} = \frac{-4}{2}$ => $-2 = -2 = -2$ => векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Скалярное произведение

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Т.к. $\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$ есть проекция вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,Пр_{\bar{a}}\bar{b}$$

Свойства

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4) $\vec{a}^{\,2}=|\bar{a}|^2 \qquad (\bar{a}\cdot\bar{a})=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0=|\bar{a}|^2$

$\bar{i}^{\,2}=\bar{j}^{\,2}=\bar{k}^{\,2}=1$

5) $\bar{a}\perp\bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{a}\cdot\bar{b}=0$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 90^0=0$

Определение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, скалярное произведение которых равно нулю, называются ортогональными

$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть $\bar{a}=a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k} \qquad \bar{b}=b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x\cdot\bar{i}^{\,2}+a_x\cdot b_y\cdot\bar{i}\bar{j}+a_xb_z\bar{i}\cdot\bar{k}+$$
$$+a_yb_x\bar{j}\bar{i}+a_yb_y\bar{j}\bar{j}+a_yb_z\bar{j}\bar{k}+$$
$$+a_zb_x\bar{k}\bar{i}+a_zb_y\bar{k}\bar{j}+a_zb_z\bar{k}\bar{k}=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Пример. Даны точки A(2; -1; 5), B(5; 3; 10), C(6; 4; 2). Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, а также угол между ними. Вычислить $np_{\overline{AC}}\overrightarrow{AB}$.

Решение.

$\overrightarrow{AB}$=(5-2; 3-(-1); 10-5) = (3; 4; 5);

$\overrightarrow{AC}$=(6-2; 4-(-1); 2-5) = (4; 5; -3);

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12 + 20 - 15 = 17$;

$\cos\varphi = \dfrac{17}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50}$; $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}$.

$$np_{\overline{AC}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{17}{\sqrt{50}}.$$

Физическое приложение скалярного произведения.

Если материальная точка , на которую действует сила $\overline{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$ двигается по вектору $\overline{AB} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ от A к B, то работа A силы $\overline{F}$ по перемещению точки по направленному отрезку $\overline{AB}$ равна скалярному произведению. $A = \overline{F}\cdot\overline{AB} = a_xF_x + a_yF_y + a_zF_z$

Векторное произведение

Определение.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который строится по следующему правилу:

1) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приводятся к общему началу O и вектор $\bar{c}$ откладывается от точки O перпендикулярно плоскости, содержащей $\bar{a}$ и $\bar{b}$

2) Направление $\bar{c}$ такое, что наблюдателю, у которого $\bar{c}$ проходит от ног к голове, вращение от первого сомножителя $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$ происходит против часовой стрелки

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку

3) Длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$

Из определения следует, что если $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, то $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$

Т.е. $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то по определению $\bar{a} \times \bar{b} = 0$

Свойства векторного произведения

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

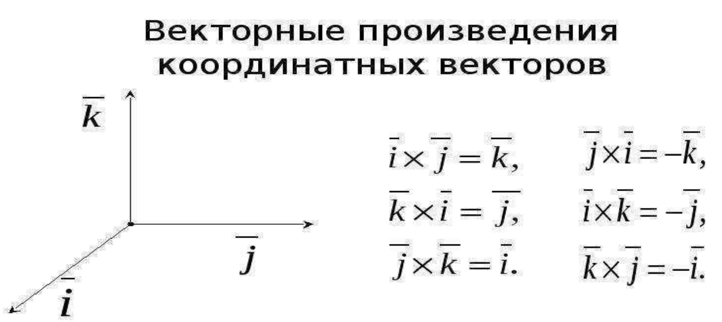
2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \bar{a} \times \lambda\bar{b}$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{j} \times \bar{j} = 0$

5) При умножении вектора $\bar{i}$ на $\bar{j}$ получится вектор $\bar{k}$, расположенный перпендикулярно плоскости xoy и направленный по направлению оси oz, модуль его будет равен единице., т.к. $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}||\bar{j}| \sin 90 = 1$



Векторное произведение в координатной форме

Пусть $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ $\qquad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = a_x \cdot b_x \cdot \bar{i} \times \bar{i} + a_x \cdot b_y \cdot \overline{\bar{i} \times j} + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} +$$
$$+ a_y b_x \overline{j \times \bar{i}} + a_y b_y \overline{j \times \bar{j}} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} +$$
$$+ a_z b_x \overline{k \times \bar{i}} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k} =$$
$$= a_x \cdot b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} =$$
$$= \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \bar{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \bar{k}(a_x \cdot b_y - a_y b_x) =$$
$$= \bar{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример 1.

Даны векторы $\vec{a}$ =(-1; 5; 2) и $\vec{b}$ =(3; 2; -2). Вычислить 1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$;

Решение.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i(-10-4) + j(6-2) + k(-2-15) = -14i + 4j - 17k;$ 2)

$(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2(-14i + 4j - 17k) = -28i + 8j - 34k;$

Пример 2. Площадь параллелограмма

Даны точки A(1; 0; 0), B(0; 5; -1), C(-2; 1; 2). Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение.

$\overrightarrow{AB}$ =(0-1; 5-0; -1-0) = (-1; 5; -1),

$\overrightarrow{AC}$ =(-2-1; 1-0; 2-0) = (-3; 1; 2),

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i(10+1) + j(3+2) + k(-1+15) = 11i + 5j + 14k;$$

S = $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{121 + 25 + 196} = \sqrt{342} = 3\sqrt{38}$ (кв.ед.).