6. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Пусть $z = f(x, y)$ функция 2-х переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t $x = x(t)$ $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t), y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y– промежуточные переменные.

Теорема. Если $z = f(x, y)$ – дифференцируемая в точке M(x,y) области определения функция и $x = x(t)$ $y = y(t)$ дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z = f(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Обратить внимание. Прямая буква d ставится , когда функция в итоге зависит от одной переменной. Круглая буква ∂ , когда функция нескольких переменных.

Пример. $z = e^{x^2+y^2}$ $\quad x = a\cos t \quad y = a\sin t \quad \frac{dz}{dt} = ?$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot (-a\sin t) + 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot a\cos t$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем t=x, т.е. $z = f(x, y(x))$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

Пример. $z = e^{\frac{x+y}{y}}$ $\quad y = \cos^4 x \quad \dfrac{dz}{dx} = ?$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x+y}{y}\right)'_x \cdot e^{\frac{x+y}{y}} = \left(\frac{x}{y}+1\right)'_x \cdot e^{\frac{x+y}{y}} = \frac{1}{y} \cdot e^{\frac{x+y}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x+y}{y}\right)'_y \cdot e^{\frac{x+y}{y}} = \left(\frac{x}{y}+1\right)'_y \cdot e^{\frac{x+y}{y}} = -\frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x+y}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot e^{\frac{x+y}{y}} - \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x+y}{y}} \cdot 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Если аргументы x и y функции $z = f(x,y)$ являются функциями 2-х переменных $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$, то $z = f(x(u,v), y(u,v))$ также является функцией 2-х переменных u и v.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (3)$$

Пример. $z = Ln(x^2 + y^2) \quad x = u \cdot v \quad y = \dfrac{u}{v} \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot v+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot u+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-\frac{u}{v^2})$$

Обратить внимание. В итоговом ответе x и y так и оставляем. К u и v не переходим.

Дифференциал сложной функции $z=f(x,y)$ где $x=x(u,v)$ $y=y(u,v)$ можно получить, если в формуле дифференциала $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ заменить

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv \qquad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $z=f(x,y)$ называется неявной, если она задается уравнением $F(x,y,z)=0$, неразрешенным относительно z.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z. Для этого подставив в уравнение вместо z функцию f(x, y), получим тождество $F(x,y,f(x,y))=0$

Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad y=const$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad x=const$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

Неявная функция одной переменной задается уравнением $F(x,y)=0$

Тогда $y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$

Пример.

$$e^z + z - x^2 y + 1 = 0$$

$$F(x,y,z) = e^z + z - x^2 y + 1 = 0$$

$$F'_x = -2xy \quad (y = const \quad z = const)$$

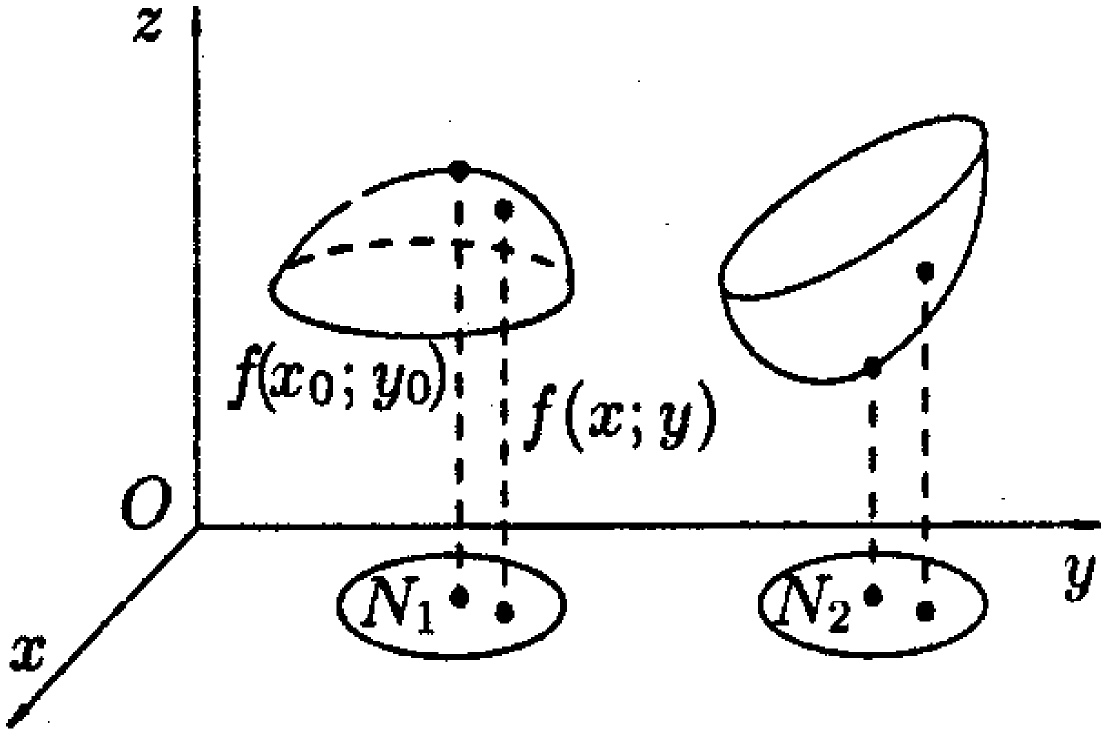
$$F'_y = -x^2 \quad (x = const \quad z = const)$$

$$F'_z = e^z + 1 \quad (x = const \quad y = const)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2xy}{e^z + 1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-x^2}{e^z + 1}$$

8. Экстремум функции 2-х переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой области Д, точка $(x_0, y_0) \in Д$



Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x,y)$, если существует такая $\delta -$ окрестность точки (x_0, y_0), что для каждой точки (x,y), отличной от (x_0, y_0) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0, y_0)$

$(f(x,y) > f(x_0, y_0))$

Определение. Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции.

Максимум и минимум функции называют ее экстремумами.

В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции. Максимум и минимум имеют локальный (местный) характер . Значение функции в точке (x_0, y_0) сравнивается с ее значениями в точках , достаточно близких к (x_0, y_0) . В области Д функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Теорема. (Необходимое условие экстремума) Если в точке (x_0, y_0) дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$. (1)

Геометрически равенства (1) означают, что в точке экстремума функции $z = f(x, y)$, касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $z = f(x, y)$, параллельна плоскости ОХУ.

Замечание. Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Например . Функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке (0, 0), но не имеет в этой точке частных производных.

Определение. Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, т.е. $f'_x = 0 \quad f'_y = 0$, называется стационарной точкой.

Определение. Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками.

Теорема. (Достаточное условие экстремума) Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0, y_0) значения

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0) .$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда

1) Если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: max если $A < 0$, и min если $A > 0$
2) Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.
3) Если $\Delta = 0$, то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример.

$$z = 3x^2y - x^3 - y^4$$

1) $z'_x = 6xy - 3x^2 \qquad z'_y = 3x^2 - 4y^3$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x(2y - x) = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} M(0,0) \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3 \cdot 4y^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases} N(6,3)$$

2) $z''_{xx} = 6y - 6x$

$z''_{xy} = 6x$

$z''_{yy} = -12y^2$

3) $N(6,3)$

$$A = z''_{xx} \Big|_{\substack{x=6 \\ y=3}} = 6y - 6x = 18 - 36 = -18$$

$$B = z''_{xy} \Big|_{\substack{x=6 \\ y=3}} = 6x = 36$$

$$C = z''_{yy} \Big|_{\substack{x=6 \\ y=3}} = -12y^2 = -108$$

$$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 > 0$$

$$т.к. A < 0 \ то \ N(6,3) - \max$$

4) $M(0,0)$

$$A = 0 \ \ B = 0 \ \ C = 0 \ \ \to \Delta = 0$$

Если $x = 0 \ z = -y^4 < 0.$

Если $y = 0 \quad z = -x^3 < 0$ *если* $x > 0,$ *или* $z > 0$ *если* $x < 0$

Т.е. в окрестности т.(0,0) функция z принимает как отрицательные так и положительные значения, то в точке M(0,0) функция экстремума не имеет.