Лабораторная работа №4

Мельничук Владислав ИС-18-21-2

№ 1 Once матрица

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}, \; x\ldots X, \; y\ldots Y$$

Вычислить: $H(X), H(Y), H(X/Y),$
$H(Y/X), H(X,Y), H\{X=Y\}, H(X,Y)$

Решение:

По формуле полной вероятности:
$$P(x_1) = \sum_{j=1}^{3} p(x_1, y_j) = \frac{3}{9}, \; P(x_2) = \frac{1}{2}, \; P(x_3) = \frac{3}{9}$$
$$P(y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_1) = \frac{3}{9}, \; P(y_2) = \frac{2}{9}, \; P(y_3) = \frac{3}{9}$$

Следовательно
$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i) = 1,57$$
$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i) \log_2 p(y_i) = 1,57$$
$$P\{X=Y\} = \frac{p(x_i, y_i)}{p(y_i)}, \; P(x_1/y_1) = \frac{1}{3}, \; p(x_2/y_1) = \frac{1}{2}, \; p(x_3/y_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{1}{2}; \; p(x_2/y_2) = 0; \; p(x_3/y_3) = \frac{1}{3},$$
$$p(x_3/y_1) = \frac{1}{3}, \; p(x_3/y_2) = \frac{1}{2}, \; p(x_3/y_3) = \frac{1}{2},$$

Следовательно,
$$H(X/Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i/y_i)} = 1,43$$

Аналогично,
$$H(Y/X) = 1,43$$

Энтропия объединения:
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = 1,57 + 1,43 = 3$$
$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = 0,14$$

№2
$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,1 & 0,2 \\ 0,01 & 0,75 & 0,3 \\ 0,01 & 0,15 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Энтропия источника сообщений
$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p_i \log_2 p_i = -(0,7 \log_2 0,7 + 0,2 \log_2 0,2 +$$
$$+ 0,1 \log_2 0,1) = 1,16 \text{ бит}.$$

Общая условная энтропия
$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i) p(y_j/x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)}$$

$$H(Y/X) = -0,7(0,98 \log_2 0,98 +$$
$$+ 0,01 \log_2 0,01 + 0,01 \log_2 0,01) + 0,2(0,1 \log_2 0,1 +$$
$$+ 0,75 \log_2 0,75 + 0,15 \log_2 0,15) + 0,1(0,2 \log_2 0,2 +$$
$$+ 0,3 \log_2 0,3 + 0,5 \log_2 0,5)) = 0,473 \text{ бит}.$$

№3
$$H(X) = 3400 \text{ бит}; \; H(Y) = 6800 \text{ бит};$$
$$H(X/Y) = 700 \text{ бит}; \; H(Y/X) - ?$$
$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$$
$$I(X,Y) = H(X) - H(X-Y) = 3400 - 700 = 2700 \text{ бит}$$
$$H(Y/X) = H(Y) - I(X,Y) = 6800 - 2700 = 4100 \text{ бит}$$

№4
$$p(x_1, y_1) = 0,73; \; p(x_1, y_2) = 0,21;$$
$$p(x_2, y_1) = 0,02; \; p(x_2, y_2) = 0,04$$

Найти кол-во информации
Решение:
$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$
$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0,73 + 0,02 = 0,75$$
$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0,21 + 0,04 = 0,25$$
$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{m} p(y_i) \log_2 p(y_i) = -(0,75 \log_2 0,75 +$$
$$+ 0,25 \log_2 0,25) = 0,81 \text{ бит}.$$
$$p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) = 0,73 + 0,21 = 0,94$$
$$p(x_2) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) = 0,02 + 0,04 = 0,06$$
$$p\left(\frac{y_j}{x_i}\right) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$
$$p(y_1/x_1) = 0,78 \qquad p(y_2/x_1) = 0,22$$
$$p(y_1/x_2) = 0,33 \qquad p(y_2/x_2) = 0,67$$

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} =$$
$$= 0,73 \log_2 \frac{1}{0,78} + 0,21 \log_2 \frac{1}{0,22} +$$
$$+ 0,02 \log_2 \frac{1}{0,33} + 0,04 \log_2 \frac{1}{0,67} = 0,77 \text{ бит}$$
$$I(Y/X) = H(Y) - H(Y/X) = 0,81 - 0,77 = 0,04 \text{ бит}$$