Лабораторная работа №1. Спектральный анализ сигналов.

Цель работы. Получить навыки использования преобразования Фурье. Научиться находить амплитудный и фазовый спектры сигнала и проводить анализ свойств этих характеристик. Получить представление о спектре дискретного сигнала. Получить навыки использования функций среды MATLAB.

Теоретические сведения.

Спектральный анализ - это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. К задачам спектрального анализа относятся:

1. Спектральное разложение сигнала - представление сигнала в виде суммы гармонических сигналов с различными частотами;
2. Анализ спектральных компонент сигнала с целью изучения свойств сигнала;
3. Обратное преобразование – получение сигнала по известному спектральному разложению.

<u>Ряд Фурье</u>

Ряд Фурье [1, стр. 30] является инструментом спектрального анализа *периодических* сигналов. Наиболее употребимой формой записи ряда Фурье является комплексная форма, задаваемая формулой

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \, e^{jk\omega_1 t}, \qquad (1.1)$$

где $s(t)$ – аналоговый сигнал (непрерывная функция времени);

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота, соответствующая периоду T повторения сигнала;

$\omega_k = k\omega_1$ - гармоника сигнала с номером k;

$\dot{C}_k$ – коэффициент ряда с номером k, вычисляемый по формуле:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \qquad (1.2)$$

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье (Fourier Transform) является инструментом спектрального анализа *непериодических* сигналов [1, стр. 39]. Формулы преобразования Фурье можно получить из формул для ряда Фурье, устремив период повторения сигнала к бесконечности $T \to \infty$.

Если аналоговый сигнал представлен непрерывной функцией времени вида $s(t)$, то его спектральная функция задается формулой прямого преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{1.3}$$

где ω – текущая круговая частота.

Формула обратного преобразования Фурье позволяет получить сигнал по его спектральной функции:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1.4}$$

Таким образом, сигнал $s(t)$ и его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Модуль спектральной функции $\left|\dot{S}(\omega)\right|$ называют амплитудным спектром, а ее аргумент

$$\varphi_s = \arg\left(\dot{S}(\omega)\right) -$$

фазовым спектром.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ является «сопряженно-симметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу:

$$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega). \tag{1.5}$$

Если $s(t)$ – четная функция, то спектр будет чисто *вещественным* (и, следовательно, будет являться *четной* функцией). Если, напротив, $s(t)$ – функция нечетная, то спектральная функция будет чисто *мнимой* (и *нечетной*).

Для вещественного сигнала $s(t)$ амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$\left|\dot{S}(-\omega)\right| = \left|\dot{S}(\omega)\right|, \tag{1.6}$$

$$\varphi_s(-\omega) = -\varphi_s(\omega). \tag{1.7}$$

Пример. Прямоугольный импульс.

В качестве примера расчета преобразования Фурье рассмотрим прямоугольный импульс (рис. 1.1), центрированный относительно начала отсчета времени и имеющий длительность τ

$$s(\mathrm{t}) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases},$$

где A – амплитуда сигнала.

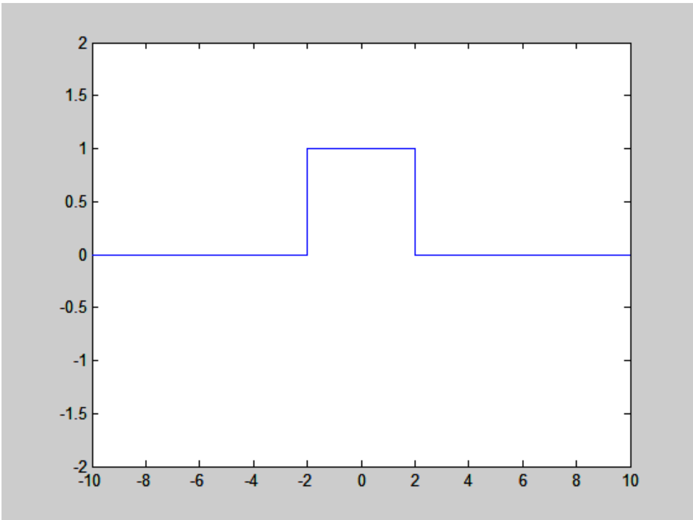


Рисунок 1.1 – *Прямоугольный импульс*

Вычисляем спектр сигнала $\dot{S}(\omega)$ с помощью формулы прямого преобразования Фурье (1.3):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\ .$$

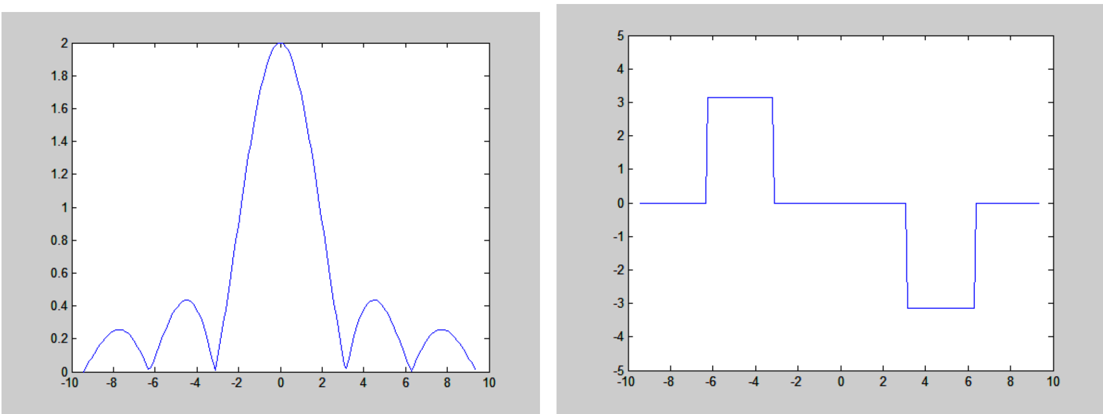
Примечание: при вычислении интеграла воспользовались следующими формулами:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\,sin(x) \text{ (формула Эйлера);}$$

$$\int cos\,(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C;$$

$$\int sin\,(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C.$$

При нахождении амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса вспомним, что рассматриваемый импульс является четной функцией, поэтому спектральная функция сигнала $\dot{S}(\omega)$ также будет четной. Амплитудный спектр – четная функция, а фазовый спектр - нечетная функция (рис. 1.2).



а) б)

Рисунок 1.2 – *Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры прямоугольного импульса*

Амплитудный спектр данного сигнала простирается до бесконечности, постепенно затухая. Поэтому вводят понятие эффективной ширины спектра, которое определяется как ширина главного лепестка. Для прямоугольного импульса эффективная ширина спектра равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{1.8}$$

Длительность прямоугольного импульса равна τ. Произведение эффективной ширины спектра сигнала на длительность сигнала называется базой сигнала:

$$B = \Delta\omega\tau. \tag{1.9}$$

Для каждого сигнала база – это свое число. В случае прямоугольного импульса $B = 2\pi$.

Из этих соотношений видно, что чем короче сигнал, тем шире его спектр и наоборот. Это положение называют соотношением неопределенности. Существует утверждение, что для любого сигнала база сигнала не может быть меньше единицы.

<u>Спектр дискретного сигнала</u>

Пусть аналоговый сигнал задан функцией времени $s(t)$, а его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ определяется по формуле прямого преобразования Фурье (1.3).

Дискретизируем сигнал $s(t)$, взяв отсчеты сигнала с частотой дискретизации $f_д$. Частота дискретизации задается формулами

$$f_д = \frac{1}{T}; \qquad \omega_д = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.10}$$

Спектр $\dot{S}_д(\omega)$ дискретизованного сигнала [1, стр. 157] представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного непрерывного ла $s(t)$ и определяется формулой:

$$\dot{S}_д(\omega) = f_д \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - 2\pi f_д n) \tag{1.11}$$

где ω – текущая круговая частота; $f_д$ – частота дискретизации;

$\dot{S}(\omega)$ – спектральная функция исходного аналогового сигнала.

Расстояние между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации сигнала (рис. 1.3).

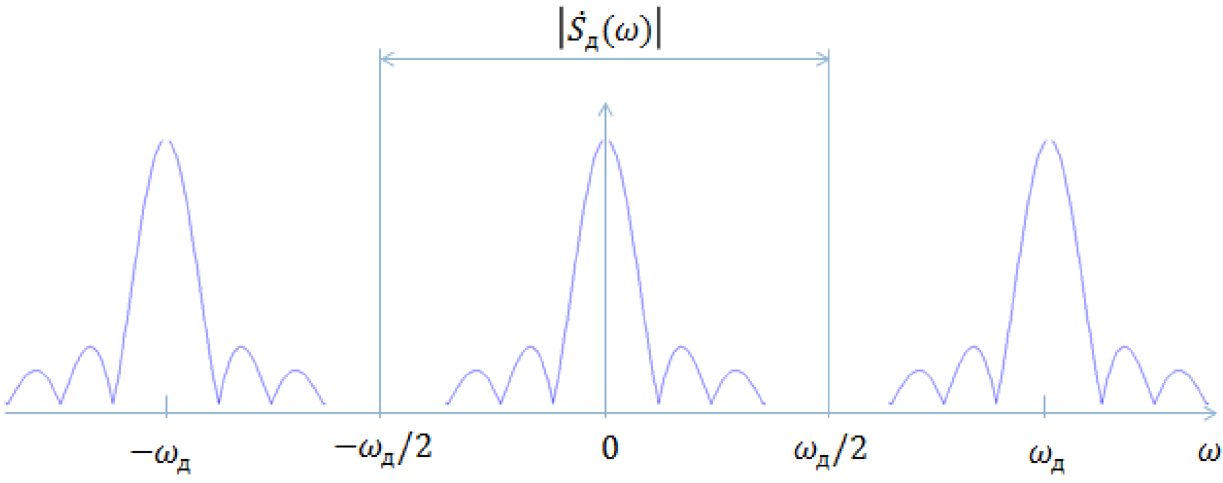


Рисунок 1.3 – *Спектр дискретизованного сигнала*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет значений сигнала и построение его графика.

Запишите в конспекте номер своего варианта, формулу для сигнала $s(t)$ и значения параметров *A* и *a* (варианты заданий приведены в конце задания).

Запустите MATLAB. В меню File выберите пункт «NewFile->Script», и создайте новый М-файл.

Напишите программу для расчета значений сигнала $s(t)$ и построения его графика. Для этого используйте следующие MATLAB-функции:

- `plot` – рисование графика в виде непрерывной кривой;
- `grid` – рисование линий сетки на графике;
- `legend` – рисование легенды (пояснительной надписи);
- `xlabel`, `ylabel` – рисование заголовков осей X и Y;
- `xlim`, `ylim` – задание диапазона отображаемых значений по осям X и Y.

Для просмотра документации по конкретной функции MATLAB введите в окне “Command Window” команду `doc` (полная документация) или `help` (краткая справка). Например, следующая команда откроет окно с полной документацией по функции `plot`:

```
>> doc plot
```

Пример программы MATLAB для задания значений сигнала и построения графика сигнала:

```
% Рассчитываем значения сигнала

A = <<ваш параметр>>; % амплитуда импульса
a = <<ваш параметр>>; % скорость убывания импульса
t = [-10:0.1:10]; % вектор отсчетов времени
s = <<ваша формула для расчета сигнала>>; % значения сигнала

% рисуем график сигнала

plot(t, s); % график сигнала
grid on;     % включаем линии сетки
legend('<<ваша легенда>>'); % легенда
xlabel('t');     % заголовок оси X
ylabel('s(t)'); % заголовок оси Y
xlim([-2 2]);    % диапазон отображаемых значений по оси X
ylim([0 1.5]); % диапазон отображаемых значений по оси Y
```

Запустите полученную MATLAB программу (нажатием клавиши *F5*) и проанализируйте результаты ее работы (должно появиться окно с графиком).

Примечание: После каждого запуска программы полезно убедиться в отсутствии в ней ошибок. Если в программе есть ошибки, то MATLAB выведет сообщения об ошибках в окно команд (Command Window) с указанием названия функции и строки кода, в которой произошла ошибка.

Зарисуйте график сигнала в своем конспекте. Покажите результат преподавателю.

<u>2. Расчет преобразования Фурье.</u>

По виду сигнала $s(t)$ сделайте предположения о виде спектральной функции, амплитудного и фазового спектров сигнала (четность/нечетность).

Рассчитайте преобразование Фурье по формуле (1.3) для сигнала $s(t)$ для своего варианта (письменно выведите формулу в общем виде, не подставляя конкретных параметров *A* и *a*).

Подсказка: При выводе спектральной функции можете воспользоваться следующими формулами:

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C\,;$$

$$e^{-\infty} = 0; e^{0} = 1;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$j^2 = -1.$$

Покажите результат преподавателю.

В уже имеющемся М-файле допишите код для вычисления значений преобразования Фурье сигнала $s(t)$ и построения графиков амплитудного $|\dot{S}(\omega)|$ и фазового $\varphi_s(\omega)$ спектров сигнала. Используйте следующие MATLAB-функции:

- `abs` – вычисление модуля комплексного числа;
- `angle` – вычисление аргумента комплексного числа;
- `figure` – создание нового графического окна;
- `subplot` – рисование группы графиков.

Пример MATLAB кода:

```
% вычисляем преобразование Фурье сигнала

omega = [-20:0.1:20]; % вектор частот
% спектральная функция
S = <<ваша формула спектральной функции>>;
% амплитудный спектр
Samp = abs(S);
% фазовый спектр
Sphase = angle(S);

% рисуем графики амплитудного и фазового спектра

figure % новое графическое окно
subplot(1, 2, 1);
plot(omega, Samp);
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
grid on
subplot(1, 2, 2);
plot(omega, Sphase);
xlabel('\omega');
ylabel('\phi_s(\omega)');
grid on
```

Запустите полученную программу. Занесите графики амплитудного и фазового спектров в конспект. Покажите результат преподавателю.

<u>3. Расчет эффективной ширины спектра и базы сигнала.</u>

Рассчитайте значения эффективной ширины $\Delta\omega$ спектра и базы B сигнала (пример расчета приведен в теоретической части).

Занесите полученные значения в конспект и отметьте эффективную ширину спектра на графике.

Убедитесь, что для вашего сигнала соблюдается условие, что база сигнала не может быть меньше единицы.

Покажите результат преподавателю.

Подсказка. Эффективную ширину спектра определять по уровню 0.1 от максимального значения амплитудного спектра (максимальное значение достигается при $\omega = 0$). Для нахождения эффективной ширины спектра определите такую частоту ω, на которой спектральная функция равна 0.1 от своего максимального значения.

При расчете базы сигнала учитывайте тот факт, что для экспоненциальных сигналов в качестве длительности сигнала обычно берется время, при котором амплитуда сигнала убывает $e = 2.7 \ldots$ раз. Поэтому длительность экспоненциального сигнала равна $1/a$ (в случае одностороннего импульса) и $2/a$ в случае двустороннего импульса.

4. Расчет спектра дискретизованного сигнала.

Запишите в общем виде выражение для спектра дискретизованного сигнала, полученного из вашего аналогового сигнала при его дискретизации с некоторой частотой $f_д$. Используйте формулу (1.11).

В уже имеющемся M-файле допишите код для расчета значений спектра дискретизованного сигнала при частоте дискретизации $f_д = 10$ и построения графика амплитудного спектра дискретизованного сигнала.

Пример кода:

```
% рассчитываем спектр дискретизованного сигнала

Fs = 10; % частота дискретизации
omega = [-100:0.1:100]; % диапазон частот
n = [-10:9]; % учитываем 20 копий спектра
% сдвигаем частоты
omega2 = repmat(omega, length(n), 1);
shift = -2*pi*Fs.*n;
shift = repmat(shift', 1, length(omega2));
omega2 = omega2+shift;
Ss = <<ваша формула спектральной функции S(omega2)>>;
Ss = sum(Ss, 1);
Ss = Ss * Fs; % умножаем на Fs
```

```
% рисуем график амплитудного спектра дискретизованного сигнала

figure
plot(omega, abs(Ss));
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
```

Запустите программу и сделайте вывод о виде спектра дискретного сигнала. Занесите полученный график в конспект. По оси частот отложите точки, кратные частоте дискретизации.

Измените частоту дискретизации, сделав ее равной $f_д = 2$. Запустите программу. Что произошло со спектром дискретного сигнала?

Варианты заданий

1-й вариант

Односторонний экспоненциальный импульс (рис. 1.4):

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0' \end{cases}$$

где A – амплитуда сигнала, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a\ = 2.$

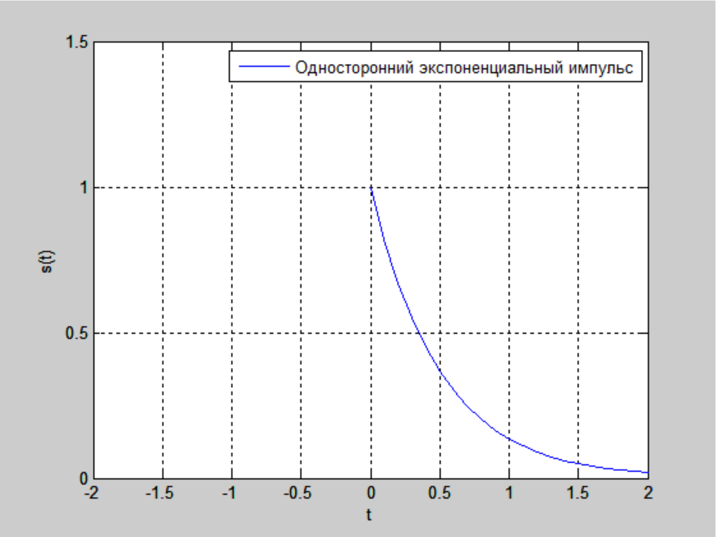


Рисунок 1.4 – *Односторонний экспоненциальный импульс*

2-й вариант

Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс (рис. 1.5):

$$s(t) = Ae^{-a|t|},$$

где A – амплитуда импульса, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a\ = 0.5.$

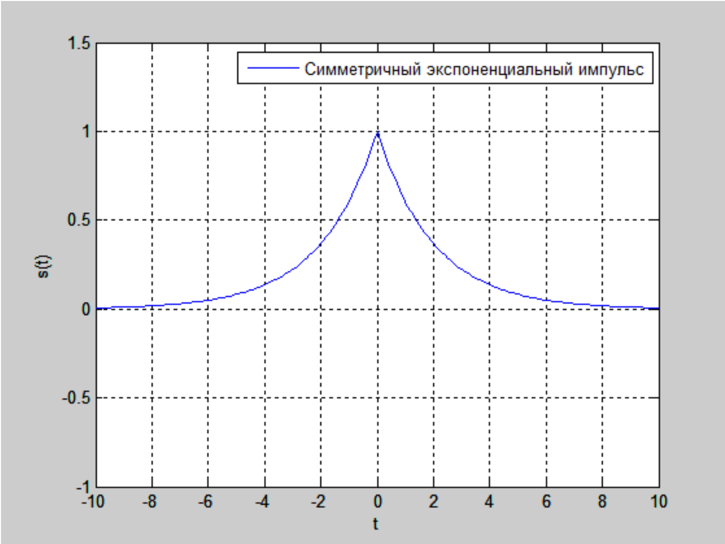


Рисунок 1.5 – *Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс*

Контрольные вопросы

1. Назовите предмет и задачи спектрального анализа сигналов.
2. Запишите формулы расчета комплексного ряда Фурье.
3. Запишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье.
4. Что такое амплитудный и фазовый спектры сигнала?
5. Понятие эффективной ширины спектра и базы сигнала.
6. Понятие спектра дискретного сигнала.