ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Определение. *Дифференциальным* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные.

Общий вид дифференциального уравнения (ДУ)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Определение. Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком этого уравнения*.

Определение. *Решением ДУ* называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка

ДУ первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение можно разрешить относительно y, то его записывают

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Определение. *Общим решением ДУ* первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, содержащая одну произвольную постоянную.

$$y' = 2x \qquad y = x^2 + c$$

Определение. *Частным решением ДУ* первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_0)$. полученная из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Определение. Условие, что $x = x_0$ при функция y должна быть равна заданному числу y_0 , т.е. называется *начальным условием.*

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{или} \qquad y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (3)$$

Определение. Задача отыскания решения ДУ первого порядка, удовлетворяющего начальному условию, называется *задачей Коши.*

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Если в уравнении (1) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области Д, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (3).

1 УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Если в уравнении $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ или $y' = f(x,y)$ каждую из функций $f(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ можно представить в виде произведения 2-х функций, каждая из которых зависит только от одной переменной x или y, то такие уравнения могут быть записаны в формах

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{dy}{dx}$$

$$f_1(x)dx = \frac{dy}{f_2(y)}$$

$$\int f_1(x)dx = \int \frac{dy}{f_2(y)}$$

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0 \,\Big|\div Q_1(y) \cdot P_2(x)$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}dy = 0$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}dy = c \qquad \textit{общий интеграл}$$

Пример 1)

$$(y + yx)dx + (x - xy)dy = 0$$

$$y(1+x)dx = -x(1-y)dy$$

$$\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy$$

$$\int \frac{1+x}{x}dx = \int \frac{y-1}{y}dy$$

$$\int (\frac{1}{x} + 1)dx = \int (1 - \frac{1}{y})dy$$

$$Ln|x| + x = y - Ln|y| + c$$

Пример 2)

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad y(4) == 1$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$-Ln|x| + Lnc = Ln|y|$$

$$Ln\frac{c}{x} = Lny \qquad y = \frac{c}{x} \qquad 1 = \frac{c}{4} \qquad c = 4$$

$$y = \frac{4}{x}$$

2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n-го порядка*, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т.е. $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Например. $f(x, y) = x^2 - 2xy$ Однородная функция второго порядка

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 2\lambda x \lambda y = \lambda^2 (x^2 - 2xy) = \lambda^2 f(x, y)$$

Определение. ДУ $y' = f(x, y)$ называется *однородным,* если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

А) Однородное ДУ можно записать в виде

$$y' = \varphi(\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

Доказательство.

Если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка, то по определению

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Пусть $\lambda = \frac{y}{x}$, $\quad f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$

Однородное уравнение (4) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\frac{y}{x}=t, \quad y=tx, \quad y'=t+xt'$$

$$y'=\varphi(\frac{y}{x}), \quad t+xt'=\varphi(t)$$

$$x\frac{dt}{dx}=\varphi(t)-t$$

$$\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\frac{dx}{x}$$

Найдя его общее решение, следует заменить в нем t на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение исходного уравнения.

Б) ДУ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (2) будет однородным, если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y'=\varphi(\frac{y}{x})$

Пример.

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0 \quad \Big| \div x^2$$

$$(1-\frac{y^2}{x^2})dx=-2\frac{y}{x}dy$$

$$(1-\frac{y^2}{x^2})=-2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}=t, \quad y=tx, \quad \frac{dy}{dx}=y'=t+xt'$$

$$1-t^2=-2t(t+xt')$$

$$t+xt'=-\frac{1-t^2}{2t}$$

$$xt'=\frac{t^2-1}{2t}-t=\frac{t^2-1-2t^2}{2t}=\frac{-t^2-1}{2t}$$

$$x\frac{dt}{dx}=-\frac{t^2+1}{2t}- \qquad \frac{2t}{t^2+1}dt=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2t}{1+t^2}dt=-\int\frac{dx}{x}$$

$$Ln(1+t^2)=-Lnx+Lnc$$

$$Ln(1+t^2)=Ln\frac{c}{x}$$

$$1+t^2=\frac{c}{x} \qquad 1+(\frac{y}{x})^2=\frac{c}{x}$$

Замечание. Уравнение вида $y'=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$, где a,b,c,a_1,b_1,c_1 – числа, приводится к однородному или с разделяющимися переменными. Для этого вводят новые переменные u и v, положив $x=u+a,\ \ y=v+b$ где a и b – числа. Их подбирают так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример.

$$(x+2y+1)dx-(2x+y-1)dy=0$$

$$(x+2y+1)dx=(2x+y-1)dy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x+y-1}$$

$$x=u+a \qquad y=v+b \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+a+2v+2b+1}{2u+2a+v+b-1}$$

$$\begin{cases}a+2b+1=0\\2a+b-1=0\end{cases}\to\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\to\begin{cases}x=u+1\\y=v-1\end{cases}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+2v}{2u+v}$$

Разделим числитель и знаменатель правой дроби на u.

$$\frac{dv}{du}=\frac{1+2\frac{v}{u}}{2+\frac{v}{u}}$$

$$\frac{v}{u}=t, \quad v=ut, \quad v'=\frac{dv}{du}=t+ut'$$

$$t+ut'=\frac{1+2t}{2+t}$$

$$ut'=\frac{1+2t}{2+t}-t=\frac{1+2t-2t-t^2}{2+t}=\frac{1-t^2}{t+2}$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{1-t^2}{t+2}, \qquad -\frac{t+2}{t^2-1}dt=\frac{du}{u}$$

$$\int -\frac{t+2}{t^2-1}dt=\int\frac{du}{u}$$

$$Lnu+Lnc=-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2-1}dt-2\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$Lnuc=-\frac{1}{2}Ln\left|t^2-1\right|-2\cdot\frac{1}{2}Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$Lncu=Ln\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}-Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=Ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}(t-1)}$$

$$cu=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}(t-1)}$$

$$cu\sqrt{(\frac{v}{u})^2-1}(\frac{v}{u}-1)=\frac{v}{u}+1$$

$$c(x-1)\sqrt{(\frac{y+1}{x-1})^2-1}(\frac{y+1}{x-1}-1)=\frac{y+1}{x-1}+1$$

$$(y+x)c^2=(y+2-x)^3$$