# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МНОГОМЕРНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

**1. Цель работы:** исследовать применение аппарата теории многомерной полезности при принятии решений по выбору эффективных альтернатив.

## 2. Теоретическое введение

При реализации принятия решений в случае многих критериев (свойств, характеристик) используется многомерная функция полезности, т.е. функция полезности, учитывающая для каждого решения его полезности по каждому критерию. Подход, определяющий использование многомерной полезности, рассмотрим на примере двух критериев (свойств, характеристик решений). Обозначим через $K_1$ и $K_2$ множества возможных значений каждого из критериев, $k_1^i, k_2^i$ - соответственно значения каждого из критериев для некоторого решения $x_i$ (т.е. $k_1^i \in K_1; k_2^i \in K_2, i = \overline{1,n}$). Понятно, что множества значений $K_1$ и $K_2$ соответствующих критериев являются счетными и конечными. Если через $x_i$ обозначено некоторое $i$-е решение $(x_i \in X)$, тогда это решение характеризуется парой значений $(k_1^i, k_2^i)$. В соответствии с постановкой задачи необходимо определить то решение $x_i^*$, которое будет являться эффективным с точки зрения его общей полезности.

Основное понятие многокритериальной теории полезности (теории многомерной полезности) – это понятие замещения по полезности или просто замещения. Понятие замещения по полезности (в дальнейшем замещения) связано с предположением о том, что приращение по одному критерию $(\Delta k_2)$ может быть скомпенсировано путем уступки по другому критерию $(\Delta k_1)$. Для увеличения оценки полезности по второму критерию на $\Delta k_2$ требуется выполнить уступку по первому критерию - $\Delta k_1$ (т.е. для первого критерия найдется такая уступка - $\Delta k_1$, которая обеспечит увеличение второго критерия на $\Delta k_2$). Если $x_i$ и $x_j$ - некоторые решения, тогда ($k_1^i, k_2^i$) – значения критериев, соответствующие решению $x_i$, а ($k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2$) (или же ($k_1^j, k_2^j$)) – значения критериев, соответствующие решению $x_j$.

Если существует возможность уступки по первому критерию (уступки $-\Delta k_1$) для решения $x_i$ с целью получения нового решения $x_j$ с увеличением для него на $\Delta k_2$ значения критерия $K_2$, тогда решение $x_i$ эквивалентно решению $x_j$ с точки зрения общей полезности (полезность решения $x_i$ равна полезности решения $x_j$, решение $x_i$ эквивалентно решению $x_j$, $x_i \sim x_j$). Данный факт может быть обозначен следующим образом: $(k_1^i, k_i^2) \sim (k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2)$, либо если $k_1^j = k_1^i - \Delta k_1, k_2^j = k_2^i + \Delta k_2$, то $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Аналогичным образом может быть выполнен переход из точки $x_j$ с координатами $(k_1^j, k_2^j)$ в точку $x_l$ с координатами $(k_1^l = k_1^j - \Delta k_1^{'}, k_1^l = k_2^j + \Delta k_2^{'})$, где $\Delta k_1^{'}$ и $\Delta k_2^{'}$ - уступки и приращение, соответствующие переходу отрешения $x_j$ к решению $x_l$. При этом $x_j \sim x_l$ и $(k_1^j, k_2^j) \sim (k_1^l, k_2^l)$. Тогда могут быть сформированы все возможные замещения для каждого решения $x_i$ (полученные точки $x_j$, $x_l$ и т.д.) т.е. получено множество точек критериального пространства $K_1 \times K_2$, которые эквивалентны решению $x_i$ с точки зрения общей полезности (полезности по двум критериям). Точки такого (одного) множества образуют одну кривую, называемую кривой безразличия. Точки, лежащие на разных кривых безразличия, имею разную полезность (обладают разной полезностью).

Понятия замещения для решений $x_i$ и $x_j$, а также кривых безразличия прокомментированы на Рис.1.

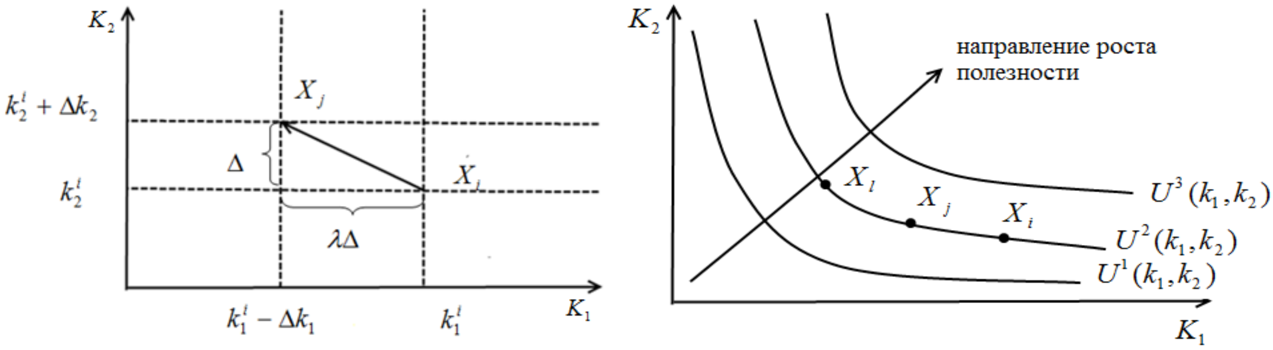



Рисунок 1 – Замещение по полезности и кривые безразличия для двух критериев
а) замещение по полезности; б) кривые безразличия для двух критериев

Обозначив $U(k_1,k_2)$ общую полезность решений $(x_i,x_j,x_{l,...})$ (многомерную функцию полезности) имеем, что $U^1(k_1,k_2)=const$, $U^2(k_1,k_2)=const$, $U^3(k_1,k_2)=const$, т.е. полезность решений при переходе по кривой безразличия $U^h(k_1,k_2)=const$ $(h=\overline{1,3})$ не изменяется. Решения $x_i,x_j,x_l$, которым соответствуют $(k_1^i,k_2^i)$, $(k_1^j,k_2^j)$, $(k_1^l,k_2^l)$ являющиеся эквивалентными, лежат на одной кривой безразличия.

Кривые безразличия – это линии одинаковых значений двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, согласованных с предпочтениями ЛПР (с предпочтениями ЛПР согласуются значения двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$). Под согласованностью следует понимать выполнение следующих условий, связанных с кривыми безразличия:

$$(x_i \succeq x_j) <=> (k_1^i,k_2^i) \succeq (k_1^j,k_2^j) <=> U(k_1^i,k_2^i) \geq U(k_1^j,k_2^j),$$

где $U(k_1^i,k_2^i)$ и $U(k_1^j,k_2^j)$ - разные кривые безразличия, соответствующие решениям $x_i$ и $x_j$, лежащим на них.

Т.к. понятие замещения связано с приращением одного критерия за счет уступок по другому критерию, то в рассмотрение должен быть введен коэффициент замещения, обозначенный через $\lambda$. Если в точке $(k_1^i,k_2^i)$ за $\Delta$ единиц критерия $K_2$ можно уступить $\lambda\,\Delta$ единиц критерия $K_1$, тогда предельный коэффициент замещения в точке $(k_1^i,k_2^i)$ равен $\lambda$ (Рис. 1а)). Тогда при наличии кривых безразличия могут быть вычислены локальные коэффициенты замещения $\lambda$ в каждой точке. Понятно, что коэффициент $\lambda$ в общем виде не является постоянным, а зависит от вида кривой безразличия и выбора точки $(k_1^i,k_2^i)$ на этой кривой. Т.е. при использовании даже одной кривой безразличия и разных точек на ней могут быть получены разные коэффициенты $\lambda$.

Для формирования вида многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1,k_2)$ необходимо выполнить априорное задание свойств предпочтений (условий, которым должны удовлетворять предпочтения), которые приводят к удобным видам функции полезности. Таким образом, должно быть определено условие, обеспечивающее существование простых (в частном случае, аддитивных) функций полезности $U(x)$, т.е.

предпочтения по каждому из критериев (предпочтения по группе критериев) должны быть такими, чтобы обеспечивать существование аддитивной функции полезности. В общем виде аддитивная функция полезности имеет форму:

$$U(k_1, k_2, \ldots, k_h) = \sum_{j=1}^{n} U_j(k_j),$$

где $U_j$ – $j$-я функция полезности для $j$-го критерия. В частном случае двух критериев $K_1$ и $K_2$ аддитивная функция полезности имеет вид: $U(k_1, k_2) = U_1(k_1) + U_2(k_2)$.

Условием, определяющим существование аддитивной (в частном случае, двумерной) функции полезности является условие соответственных замещений. Условие соответственных замещений может быть прокомментировано следующим образом на основе Рис. 2. Для формулировки условия рассматриваются четыре точки (решения): $x_1$ с координатами $(k_1^1, k_2^1)$, $x_2$ с координатами $(k_1^1, k_2^2)$, $x_3$ с координатами $(k_1^2, k_2^1)$ и $x_4$ с координатами $(k_1^2, k_2^2)$. В точке $x_1$ $(k_1^1, k_2^1)$ за увеличение $K_2$ на $b$ единиц необходимо заплатить (уступка) $a$ единиц, в точке $x_2$ $(k_1^1, k_2^2)$ за увеличение $K_2$ на $c$ единиц необходимо заплатить $a$ единиц, в точке $x_3$ $(k_1^2, k_2^1)$ за увеличение $K_2$ на $b$ единиц необходимо заплатить $d$ единиц. Сколько необходимо заплатить в точке $x_4$ $(k_1^2, k_2^2)$, чтобы получить увеличение $K_2$ на $c$ единиц.

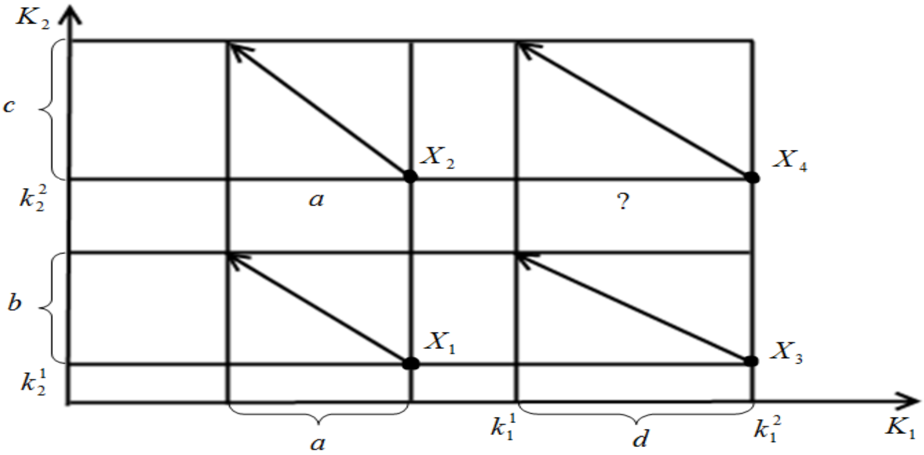



Рисунок 2 – Изменение значений критериев для условия соответственных замещений

Условие соответственных замещений предполагает, что если при заданных условиях для точек $x_1, x_2, x_3$, значениях $a, b, c, d$ получим, что для приращения в точке $x_4$ дополнительно по критерию $K_2$ $c$ единиц необходимо заплатить (уступка) $d$ единиц по критерию $K_1$, то условие замещения выполняется. Таким образом, условие соответственных замещений выполняются, если для точки (решения) $x_4$ при увеличении $K_2$ на $c$ единиц необходимо заплатить (уступка) $d$ единиц по $K_1$. Выполнение условия соответственных замещений гарантирует аддитивный вид функции полезности: $U(k_1, k_2) = U_1(k_1) + U_2(k_2)$. Существование аддитивной функции полезности $U(k_1, k_2)$ обосновывается в соответствующей теореме Льюиса-Тьюки (формулируемой ниже), в доказательстве которой сформулирован способ (алгоритм) построения изолиний функции полезности (линий одинаковых значений функции полезности), определения на их основе вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При этом данный алгоритм обеспечивает выполнение условия соответственных замещений для формируемых изолиний аддитивной функции полезности $U(k_1, k_2)$ и вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. Т.е. реализация алгоритма обеспечивает определение $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, изолиний $U(k_1,k_2)$ при выполнении условия соответственных замещений.

**Теорема о существовании аддитивной функции полезности** (Льюиса-Тьюки). Структура предпочтений аддитивна, т.е. аддитивная функция полезности $U(k_1,k_2)=U_1(k_1)+U_2(k_2)$ существует тогда, когда выполняется условие соответственных замещений.

**Доказательство. Доказательство необходимости** выполним на основе Рис.2. Т.к. точки $(k_1^1,k_2^1)$ и $(k_1^1-a,k_2^1+b)$ лежит на одной кривой безразличия (изолинии функции полезности), то для них выполняется условие (с учетом предположения об аддитивности $U(k_1,k_2)$):

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Аналогичные условия выполняются для точек $x_2(k_1^1,k_2^2)$ и $x_3(k_1^2,k_2^1)$:

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^2+b);$$

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^2-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Складывая второе и третье равенства и вычитая из полученной суммы первое, получим, что для точки $x_4(k_1^2,k_2^2)$ выполняются:

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^2-d)+U_2(k_2^2+c)$$

т.е. условие соответственных замещений выполняется.

**Доказательство достаточности** выполним с точки зрения обоснования способа определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ в предположении, что условие соответственных замещений выполняется. Т.е. при обосновании процедуры, которая носит название процедуры совместного шкалирования (процедуры определения $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$), проконтролируем выполнение условия соответственных замещений. Доказательство достаточности и обоснование процедуры определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ выполним с использованием Рис. 3.

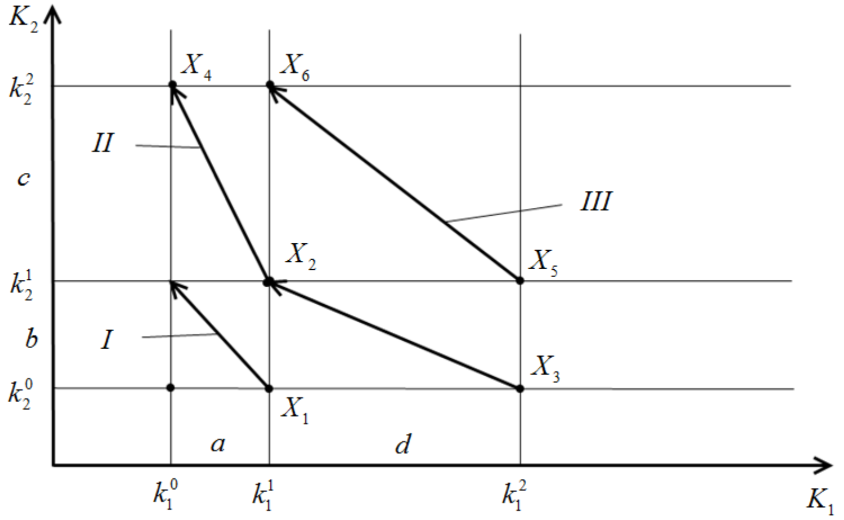



Рисунок 3 – Реализация совместного шкалирования при аддитивной структуре предпочтений.

I– первая кривая безразличия;
II– вторая кривая безразличия;
III– третья кривая безразличия.

Алгоритм формирования значений $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ имеет следующие шаги:

1) пусть $k_1^0$ и $k_2^0$ - наименьшие значения оценок соответствующих критериев $K_1$ и $K_2$; для координат $k_1^0$, $k_2^0$ (решения с координатами $(k_1^0, k_2^0)$) предполагается, что $U(k_1^0, k_2^0) = U_1(k_1^0) = U_2(k_2^0) = 0$;

2) для значения $k_1^1$ параметра $k_1\,(k_1^1 > k_1^0)$ задается, что $U(k_1^1) = 1$; это будет первая кривая безразличия, которая характеризуется значением $U(k_1, k_2) = 1$; при этом $k_2 = 0$; т.е. $U(k_1^1, k_2^0) = 1$ (при $k_2^0 = 0$)

3) определим такое значение второго критерия $K_2$, что $(k_1^1, k_2^0) \sim (k_1^0, k_2^1)$ (т.е. решение с координатами $(k_1^0, k_2^1)$ лежит на одной кривой безразличия с решением $(k_1^1, k_2^0)$), тогда $U_2(k_2^1) = 1$; т.к. коэффициенты $k_1^1, k_2^1$ известны, то они соответствуют решению $x_2$, которое не находится (не лежит) на кривой безразличия *с* $U(k_1, k_2) = 1$ (т.е. $x_2(k_1^1, k_2^1)$ не принадлежит кривой безразличия *с* $U_2(k_1^1) = 1$ и $U_2(k_2^1) = 1$);

4) т.к. решение $x_2(k_1^1, k_2^1)$ является известным, тогда определяются решения $x_3(k_1^2, k_2^0)$ и $x_4(k_1^0, k_2^2)$, которые лежат на одной кривой безразличия с $x_2$; таким образом для решений $x_2, x_3, x_4$ выполняется условие $x_2 \sim x_3 \sim x_4$ (или $(k_1^1, k_2^1) \sim (k_1^2, k_2^0) \sim (k_1^0, k_2^2)$); при этом значение $U(k_1, k_2)$ и $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ задается следующим образом: $U(k_1^1, k_2^1) = U(k_1^2, k_2^0) = U(k_1^0, k_2^2) = 2$;

$U_1(k_1^2) = 2; U_2(k_2^2) = 2$;

5) реализация предшествующих шагов процедуры позволяет определить, что в соответствии с условием соответственных замещений $k_2^1 - k_1^1 = d$, тогда решения $x_5$ и $x_6$ являются одинаковыми (эквивалентными) по предпочтительности (т.е. $x_5 \sim x_6$) и принадлежит одной кривой безразличия;

6) т.к. значения критериев $K_1$ и $K_2$ для решений $x_5$ и $x_6$ определены, должны быть идентифицировать значения $k_1^3$ и $k_2^3$ такие, что для них выполняется условие:

$$(k_1^3, k_2^0) \sim (k_1^2, k_2^1) \sim (k_1^1, k_2^2) \sim (k_1^0, k_2^3),$$

т.е. выбираются такие значения $k_1^3, k_2^3$, для которых и формулируется приведенное условие; для решений с координатами $(k_1^3, k_2^0)$, $(k_1^2, k_2^1)$, $(k_1^1, k_2^2)$, $(k_1^0, k_2^3)$ задается значение функции полезности $U(k_1, k_2) = 3$; откуда значения одномерных функций полезности определяются следующим образом $U_1(k_1^3) = 3; U_2(k_2^3) = 3$; итоги реализации данного шага является определение координат $(k_1^1, k_2^3)$, $(k_1^2, k_2^2)$, $(k_1^3, k_2^1)$ тех решений, которые лежат на следующей кривой безразличия *с* $U(k_1, k_2) = 4$; при этом для решений с рассматриваемыми значениями критериев $K_1$ и $K_2$ выполняется условиие эквивалентности (вытекающее из условия соответственных замещений) $(k_1^1, k_2^3) \sim (k_1^2, k_2^2)$ $\sim (k_1^3, k_2^1)$;

7) продолжая действия подобным образом, должны быть получены значения $k_1^j$ и $k_2^j$ $(j = \overline{4, n})$, которые входят в пары $(k_1^j, k_2^0)$, $(k_1^0, k_2^j)$; эти значения (при условии присвоения соответствующих решениям значений $U(k_1, k_2)$) используются при определении значений одномерных функций полезности $U_1(k_1^j)$, $U_2(k_2^j)$ $(j = \overline{4, n})$.

Итогом рассмотренной процедуры являются дискретные значения одномерных дискретных функций полезности решений по каждому критерию $U_1(k_1^h)$, $U_2(k_2^h)$ где $h=\overline{1,n}$.

После формирования вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ с использованием введенного в рассмотрение метода необходимого выполнить агрегирование этих функций для получения многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1,k_2)$. Агрегирование функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ (получение обобщенной многомерной функции полезности $U(k_1,k_2)$) используется выражение $U(k_1,k_2)=jU_1(k_1)+(1-j)U_2(k_2)$, где $j$ - коэффициент шкалирования. Для определения шкалирующего коэффициента необходимо:

1) на основе заключений ЛПР определить два эквивалентных решения $x_i$ и $x_j$ (т.е. $(k_1^i,k_2^i)\sim(k_1^j,k_2^j)$), лежащие на одной кривой безразличия;

2) вычислить значение $j$ путем решения уравнения вида $jU_1(k_1^i)+(1-j)U_2(k_2^i)=jU_1(k_1^j)+(1-j)U_2(k_2^j)$.

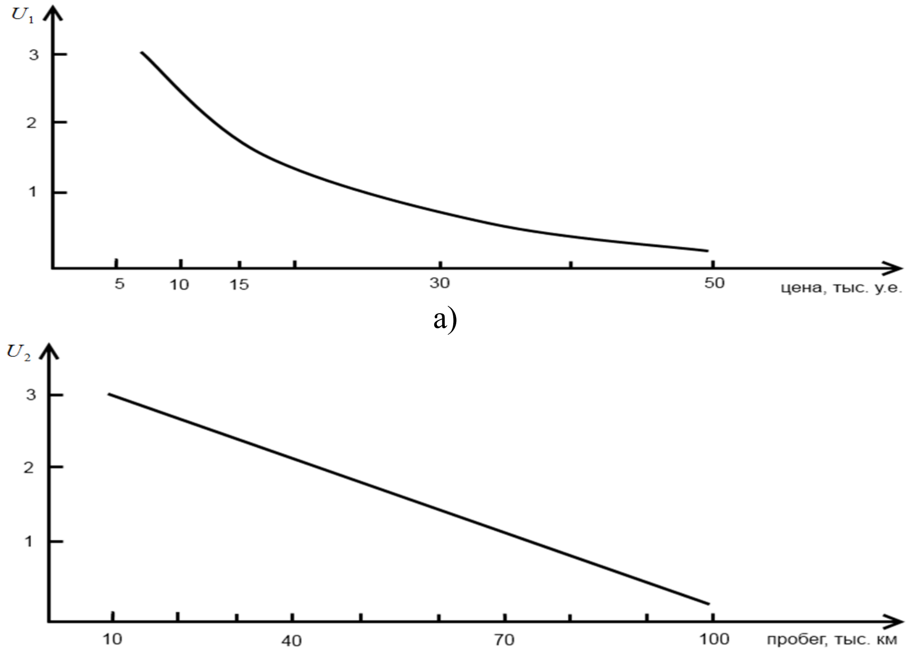
**Пример** реализации принятия решения на основе аппарата теории многомерной полезности.

Рассматривается задача покупки автомобиля. Параметрами, характеризующими решение (модель автомобиля), являются цены и пробег. Т.к. известно, что по мере роста цены на некоторый предмет (объект, приобретение и т.д.) полезность этого предмета (и в конечном итоге решения) стремится к 0. Т.е. при достаточно большой цене предмет (решение) становятся бесполезным. Наоборот, при небольшой цене полезность предмета (решения) является более значительной. Поэтому с точки зрения параметра «цена» полезность решения будет минимальный при большом значении этого параметра и максимальный при малом значении параметра. Поэтому в качестве критерия $K_1$ (свойства, характеристики решения) следует рассматривать критерий вида $K_1=1/цена$. Аналогичные рассмотрения могут быть выполнены с точки зрения параметра «пробег». Если пробег минимальный, то полезность решения будет являться значительной, если пробег значительный, то полезность решения наоборот будет являться минимальной. Поэтому в качестве второго критерия $K_2$ следует рассматривать критерий вида $K_2=1/пробег$.

Диапазон значений для первого параметра решения (цена), на основании которого определяется критерий $K_1$, заданы равным $[\,5\text{ тыс};50\text{тыс}\,]$ или в единицах тысяч - $[\,5;50\,]$. Для определения многомерной функции полезности $U(k_1,k_2)$ и одномерных функций $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ на интервале $[\,5;50\,]$ определим следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 5, 10, 20, 50. Соответственно при переходе к критерию $(K_1=1/цена)$ его значения будут определены на интервале $[\,0.02;0.2\,]$, а значения $K_1$, которые будут рассматриваться следующие: 0.02; 0.05; 0.1; 0.2.

Аналогичным образом строятся рассуждения относительно критерия $K_2$. Диапазон значений параметра «пробег», на основании которых определяются значения критерия $K_2$, задан в виде $[\,10;100\,]$ (измеряется в тысячах километров). Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2)$, $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ заданы следующими: 10,40,70,100. Тогда при переходе к критерию $K_2=1/пробег$ диапазон значений получен в виде $[\,0.01;0.1\,]$, а дискретные значения критерия следующие: 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1.

В результате для диапазонов $[0.02;0.2]$, $[0.01;0.1]$ (значений 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 и 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1) сформирована двумерная функция полезности (в соответствии с приведенным алгоритмом) $U(k_1, k_2)$ и одномерные функции полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При переходе от значений критериев $K_1 = 1/\textit{цена}$ и $K_2 = 1/\textit{пробег}$ к указанным выше значениям параметров «цена» и «пробег» одномерные функции полезности каждого из параметров получены в виде, представленном на Рис.4.




б)

Рисунок 4 – Виды сформированных функций полезности $U_1$ и $U_2$
а) функция полезности для параметра «цена»;
б) функция полезности для параметра «пробег»;

Так как дискретные значения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, тогда должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Т.к. в большинстве случаев функции являются нелинейными, то для них может быть задана следующая аналитическая форма: $U_1 = a_1 k_1 + b_1 (k_1)^2; U_2 = a_2 k_2 + b_2 (k_2)^2$. Для определения коэффициентов $a_i, b_i (i = \overline{1,2})$ в приведенных аналитических функциях $U_1, U_2$ применимы методы аппроксимации (данный этап в рамках лабораторной работы необходимо выполнить самостоятельно).

Т.к. вид двумерной функции полезности $U(k_1, k_2) = jU_1(k_1) + (1-j)U_2(k_2)$, тогда должен быть определен коэффициент масштабирования $j$. Для этого должны быть определены два решения, являющиеся эквивалентными (лежащими на одной кривой безразличия), т.е. $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Допустим, что равноценными являются решения с $k_1^i = 10$, $k_2^i = 90$ и $k_1^j = 40$, $k_2^j = 10$ (пробег – 90 тыс. км, цена – 10 тыс. у.е.; пробег – 10 тыс. км, цена – 40 тыс. у.е.). Тогда получим $jU_1(10) + (1-j)U_2(90) = jU_1(40) + (1-j)U_2(10)$. В итоге значение $j = 0.59$.

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, значение $j$ вычислено, тогда могут быть определены значения $U(k_1, k_2)$ при любых значениях входных параметров $k_1$ и $k_2$. Результаты сравнения четырех вариантов решений сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Двумерная функция полезности в задаче выбора решения.

| Вариант | Цена | Пробег | $U_1(k_1)$ | $U_2(k_2)$ | $U(k_1, k_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 10 | 0,5 | 3 | 1,525 |
| 2 | 10 | 80 | 2 | 0,8 | 1,508 |
| 3 | 18 | 40 | 1,5 | 2 | ***1,708*** |
| 4 | 25 | 60 | 1,3 | 1,3 | 1,3 |

В результате эффективным решением является третье, у которого обобщенная функция полезности $U$ имеет максимальное значение.

### 3. Программа выполнения работы

Выполнение задания предусматривает реализацию следующего порядка действий по выполнению лабораторной работы:

1. Для введенных диапазонов изменения параметров решений (критериев решений) и соответствующих значений этих критериев реализовать процедуру построения двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, в которой выполнить определение дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ для соответствующих критериев (реализовать процедуру формирования значений $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$).
2. Выполнить построение линий безразличия для двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, которые в дальнейшем будут использоваться для определения эквивалентных решений, лежащих на одной из этих линий. Координаты этих решений будут использованы при вычислении коэффициента масштабирования *j*.
3. Реализовать процедуру аппроксимации полученных дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ с использованием полиномов второй степени $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, результатом реализации этой процедуры являются коэффициенты этих аналитических кривых $a_1, b_1, a_2, b_2$.
4. Выполнить формирование процедуры вычисления значения коэффициента масштабирования *j*, при реализации которой используются координаты $(k_1^i, k_2^i)$ и $(k_1^j, k_2^j)$ соответствующих эквивалентных решений $x_i$ и $x_j$, лежащих на одной кривой безразличия (т.е. в качестве исходных данных для этой процедуры использованы координаты $(k_1^i, k_2^i)$ и $(k_1^j, k_2^j)$ решений $x_i$ и $x_j$, выбранных на одной кривой безразличия, сформированной в пункте 2).
5. Для задаваемых в варианте характеристик решений с использованием определенных ранее (процедурой в пункте 3) аналитических функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$ реализовать процедуру вычисления значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$, а затем двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$ с учетом коэффициента масштабирования *j*. В разрабатываемой процедуре выполнить определение эффективного решения с максимальным значением двумерной функции полезности (передаваемыми в реализуемую процедуру наряду с исходными данными являются параметры $a_1, b_1, a_2, b_2$).

6. Выполнить вывод: а) линий безразличия, б) полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$, в) видов аппроксимирующих функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2$; $U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, г) значений одномерных и двумерной функций полезности для решений, указанных в варианте задания, д) эффективных решений $x_i^*$ с максимальным значением двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$.

## 4.Задание на работу

**Вариант 1.** Задача состоит в выборе одной из альтернатив, представляющих собой выставленные на продажу автомобили. Критериями (характеристиками) решений являются: $K_1 = 1/цена$ и $K_2 = 1/пробег$. Используя метод, реализующий построение и исследование двумерной функции полезности, для заданных диапазонов значений критериев и их (критериев) дискретных оценок выполнить: формирование линий безразличия $U(k_1,k_2)$, определение на их основе дискретных значений оценок одномерных функций полезности для каждого из критериев $k_1$ и $k_2$, аппроксимацию дискретных значений одномерных функций полезности с использованием полиномов второй степени, вычисление коэффициента масштабирования $j$ на основе выбираемых ЛПР по кривым безразличия решениям. С использованием сформированных промежуточных решений выполнить для задаваемых характеристик альтернатив вычисление значений одномерных функций полезности, двумерной функции полезности и реализовать выбор эффективного решения. Выполнить вывод исходных данных, всех промежуточных и конечных результатов. Исходными данными для решаемой задачи являются: параметр "цена" изменяется в диапазоне $[25,100]$, параметр "пробег" в диапазоне $[20,80]$. Шаг дискретизации первого параметра задан равным 25, шаг дискретизации второго параметра задан равным 20. Соответственно, для первого критерия диапазон изменения его значений задан в виде $[0,001;0,04]$, для второго критерия диапазон задан в виде $[0,0125;0,05]$. Выбор двух эквивалентных решений на одной из кривых безразличия, сформированных программно, выполнить самостоятельно. Данные, на основании которых выбирается эффективное решение, имеют следующие значения:

| Вариант | Цена | Пробег |
|---|---|---|
| 1 | 30 | 45 |
| 2 | 50 | 30 |
| 3 | 80 | 20 |
| 4 | 25 | 55 |

**Вариант 2.** Перед выпускником учебного заведения стоит проблема выбора оптимального места дальнейшей работы. Выбор определяется значениями критериев:

$K_1$ - величина зарплаты;

$K_2$ - процент творческой работы;

$K_3$ - время, за которое можно добраться до работы.

Диапазон значений для первого параметра решения (зарплата), на основании которого определяется критерий $K_1$, заданы равным [50 тыс; 200 тыс] или в единицах тысяч – [50,200]. Для определения многомерной функции полезности $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерной функции $U_1(k_1)$ на интервале [50,200] заданы следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200.

Диапазон значений параметра «процент творческой работы», на основании которых определяются значения критерия $K_2$, задан в виде [20;60]. Дискретные значения, для которых определяются значения функции $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_2(k_2)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60.

Диапазон значений параметра «время, за которое можно добраться до работы», на основании которых определяются значения критерия $K_3$, задан в виде [20;70]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_3(k_3)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60, 70.

Для сформированных диапазонов значений критериев необходимо определить дискретные значения одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$

На основании полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Для них должны быть заданы следующие аналитические формы: $U_1(k_1) = a_1k_1 + b_1(k_1)^2$, $U_2(k_2) = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, $U_3(k_3) = a_3k_3 + b_3(k_3)^2$. Для определения коэффициентов в приведенных аналитических функциях $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ необходимо применить метод наименьших квадратов

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, а многомерная полезность $U(k_1,k_2,k_3)$ является аддитивной функцией, тогда для заданных в таблице значений параметров определить эффективное решение.

| Предприятие | Критерии | | |
|---|---|---|---|
| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
| $x_1$ | 100 | 50 | 30 |
| $x_2$ | 140 | 30 | 50 |
| $x_3$ | 170 | 25 | 45 |
| $x_4$ | 130 | 15 | 10 |
| $x_5$ | 140 | 40 | 40 |

**Вариант 3.** Перед ЛПР стоит проблема выбора объекта недвижимости, в который он может вложить средства (покупка дачи). Выбор определяется значением критериев:

$K_1$ - качество дачи;

$K_2$ - расстояние до города;

$K_3$ - цена.

Диапазон значений для первого параметра решения (качество дачи), на основании которого определяется критерий $K_1$, заданы равным [20; 100] (измеряется в процентах). Для определения многомерной функции полезности $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция

$U_1(k_1)$ на интервале [20,100] заданы следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 20, 40, 60, 80, 100.

Диапазон значений параметра «расстояние до города», на основании которых определяются значения критерия $K_2$, задан в виде [20;120]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_2(k_2)$ заданы следующими: 20,40, 60, 80, 100, 120 (понятно, что чем расстояние до города ниже, тем полезность больше, поэтому требуется использовать величину, обратную критерию «расстояние до города»).

Диапазон значений параметра «цена», на основании которых определяются значения критерия $K_3$, задан в виде [20;70]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_3(k_3)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60, 70 (понятно, что чем цена ниже, тем полезность больше, поэтому требуется использовать величину, обратную критерию «цена»).

Для сформированных диапазонов значений критериев необходимо определить дискретные значения одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$

На основании полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Для них должны быть заданы следующие аналитические формы: $U_1(k_1) = a_1k_1 + b_1(k_1)^2$, $U_2(k_2) = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, $U_3(k_3) = a_3k_3 + b_3(k_3)^2$. Для определения коэффициентов в приведенных аналитических функциях $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ необходимо применить метод наименьших квадратов

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, а многомерная полезность $U(k_1,k_2,k_3)$ является аддитивной функцией, тогда для заданных в таблице значений параметров определить эффективное решение.

| Вариант решения | Критерии | | |
|---|---|---|---|
| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
| $x_1$ | 40 | 50 | 30 |
| $x_2$ | 80 | 30 | 50 |
| $x_3$ | 50 | 90 | 45 |
| $x_4$ | 75 | 40 | 60 |
| $x_5$ | 60 | 80 | 40 |

**5. Контрольные вопросы**

5.1. В чем состоит понятие замещения по полезности и его связь с уступкой и приращением?
5.2. Какие решения являются эквивалентными по полезности?
5.3. Что из себя представляют кривые безразличия?
5.4. Каким образом предпочтения ЛПР интерпретируются с точки зрения кривых безразличия?

5.5. Каким образом используется принцип замещения при построении функции полезности?
5.6. Что такое коэффициент замещения по полезности и в какой точке кривой безразличия он является максимальным?
5.7. Что такое аддитивная функция полезности и в чем заключаются условие ее существования?
5.8. В чем заключается условие соответственных замещений и что оно определяет?
5.8. В чем заключается алгоритм формирования кривых безразличия с учетом аддитивных свойств многомерной функции полезности?
5.10. Какие результаты построения кривых безразличия будут использоваться для дальнейшего принятия решений?
5.11. В чем заключается алгоритм процедуры определения эффективных решений с использованием многомерной функции полезности?