ЛЕКЦИЯ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

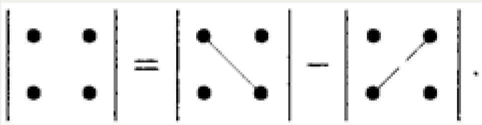
2.1. Основные понятия

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или определителем первого порядка называется элемент a_{11}

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}$$

Определителем матрицы 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или определителем 2-го порядка, называется число $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример . Найти определители матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Определителем матрицы 3-го порядка, или определителем 3-го порядка, называется число, вычисляемое по формуле

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Правило треугольников (Саррюса)

Определитель третьего порядка можно вычислить, если дописать к нему справа два его первых столбца, а затем перемножить элементы и сложить со знаками плюс или минус, как показано на схеме

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Допишем к определителю два первых столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{matrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-4) + 2\cdot(-2)\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 4 - 3\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot 0\cdot(-4) =$$

$$= 4 + 12 + 0 - 9 + 8 + 0 = 15.$$

Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-4) + 3\cdot 0\cdot 4 + (-3)\cdot 2\cdot(-2) - (3\cdot(-1)\cdot(-3) + 1\cdot 4\cdot(-2) + (-4)\cdot 2\cdot 0) =$$

$$= 4 + 0 + 12 - (9 - 8 - 0) = 16 - 1 = 15.$$

2.2 Свойства определителей

1. Если какая-либо строка (столбец)матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0$

2. Если имеется две одинаковые строки (столбца), определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = kab - kab = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 12 & 3 & 9 \\ 20 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на число , то определитель умножится на это число.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ ka & kb \end{vmatrix} = kcb - kad = k(cb - ad) = k\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 12 & 0 & 9 \\ 20 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

5. При перестановке 2-х строк (столбцов) определитель меняет знак.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Определитель не изменится, если:
а) параллельные строки (столбцы) поменять местами четное число раз.
б) строки сделать столбцами, а столбцы строками (транспонировать определитель)
в) к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
7) Определитель произведения 2-х квадратных матриц, равен произведению их определителей.
Пример Преобразовать определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & 9 \\ 20 & 3 & 12 \end{vmatrix} = (\textit{к элементам} 3-\textit{го столбца прибавим элементы второго столбца}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 11 \\ 20 & 3 & 15 \end{vmatrix} = (\textit{к первому столбцу прибавим второй, умноженный на} (-4)) =$$

$$= \begin{vmatrix} 4+1\cdot(-4) & 1 & -1 \\ 12+2\cdot(-4) & 2 & 9 \\ 20+2\cdot(-4) & 3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 11 \\ 12 & 3 & 15 \end{vmatrix} = (\textit{третья строка кратна } 3) = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (\textit{от второй строки отнимем третью}) = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (\textit{от второй строки отнимем первую}) =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3(0 + 24 + 0 - 0 - 0 - 0) = 72$$

2.3. Разложение определителя по элементам ряда.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n-1 порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Обозначается M_{ij}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{11} определителя называется его минор, взятый со знаком „+’’, если i+j- четное число, и со знаком „–’’, если i+j- нечетное число.

Обозначается A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Доказательство

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}) + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}) = \Delta$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (\textit{разложим определитель по } 3 - \textit{му столбцу}) =$$

$$= -2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ 6 & 4 & 6\end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 6 & 4\\ 4 & -2 & 0\\ 6 & 4 & 6\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 6 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 6\end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4 & 6 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

Замечание 1. Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд. где есть нулевые элементы, т.е соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Считать четыре определителя долго и неинтересно. Поэтому преобразуем наш определитель так, чтобы какой либо столбец (строка) содержал три нуля.

$$\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix} = (\textit{к первой строке прибавим вторую, умноженную на } (-4),$$

$$\textit{а к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на } (-6)) =$$

$$= \begin{vmatrix}0 & -2 & 10 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -8 & 22 & 0\end{vmatrix} = (\textit{разложим по } 4-\textit{му столбцу. Вычеркиваем } 2-\textit{ю строку и } 4-\textit{й столбец}) =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}0 & -2 & 10\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & -8 & 22\end{vmatrix} = (\textit{разложим по } 1-\textit{му столбцу. Вычеркиваем } 2-\textit{ю строку и } 1-\textit{й столбец}) =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 10\\ -8 & 22\end{vmatrix} = 4\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 10\\ 4 & 22\end{vmatrix} = -8\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 11\end{vmatrix} = -16\cdot(11-20) = 128$$

Замечание 2.
Сумма произведений элементов какой либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца), равна нулю.
Например $a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} + a_{13}\cdot A_{23} = 0$

Доказательство.

$$\Delta = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \quad A_{11} = a_{22} \quad A_{12} = -a_{21}$$

$$a_{21}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{12} = a_{21}\cdot a_{22} - a_{22}\cdot a_{21} = 0$$

Пример 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Вычтем из третьей строки элементы первой строки, а к элементам четвёртой строки прибавим элементы первой строки, тогда будем иметь

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

В первом столбце все элементы, кроме первого, - нули. То есть, определитель можно уже разложить по первому столбцу. Но нам очень не хочется вычислять определитель третьего порядка. Поэтому произведём ещё преобразования: к элементам третьей строки прибавим элементы второй строки, умноженные на 2, а из элементов четвёртой строки вычтем элементы второй строки. В результате определитель, являющийся алгебраическим дополнением, сам может быть разложен по первому столбцу и нам останется только вычислить определитель второго порядка и не запутаться в знаках:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \bullet \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \bullet \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 7 = 11.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ \dots \ 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \ \dots \ 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \ 0 \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

Решение. Разложим определитель A по первой строке:

$$A = a_{11} A_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \ \dots \ 0 \\ a_{32} & a_{33} \dots 0 \\ \text{-----} & \text{-----} \\ a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий справа, можно снова разложить по первой строке, тогда получим:

$$A = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \dots 0 \\ a_{43} & a_{44} \dots 0 \\ \text{-----------} \\ a_{n3} & a_{n4} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

И так далее. После n шагов придем к равенству A = a_{11} a_{22}.. a_{nn}.

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ -1 & 0 & 3 \dots n \\ -1 & -2 & 0 \dots n \\ \text{-----------} \\ -1 & -2 & -3 \dots 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, будут равны нулю. А именно, получим определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 0 & 2 & 6 \dots 2n \\ 0 & 0 & 3 \dots 2n \\ \text{-----------} \\ 0 & 0 & 0 \dots n \end{vmatrix}$, равный исходному.

Рассуждая, как в предыдущем примере найдем, что он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. n!. Способ, с помощью которого вычислен данный определитель, называется способом приведения к треугольному виду.

Правило Крамера

Правило Крамера позволяет решить систему n линейных уравнений с n неизвестных.

Тогда система (1) имеет единственное решение, если $\Delta A \neq 0$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Определитель Δ составляется из коэффициентов при неизвестных. Вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ получаются из определителя путем замены первого, второго , третьего и т.д. столбцов столбцом свободных членов.

Для системы 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + .a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Недостаток метода: большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей большого порядка.