# ЛЕКЦИЯ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 3. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

ДУ первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$y' + p(x)\cdot y = g(x) \quad (1)$$

### Метод Бернулли

Решение ищется в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки $y = U\cdot V$, где $U = U(x)$ и $V = V(x)$ – неизвестные функции от x, причем одна из них произвольная, но не равная нулю:

$$y = \frac{y(x)}{V(x)}\cdot V(x) = U(x)\cdot V(x) \quad V(x)\neq 0$$

$$y' = U'\cdot V + U\cdot V' \qquad (2)$$

$$U'\cdot V + U\cdot V' + p(x)\cdot U\cdot V = g(x)$$

$$U'\cdot V + U\cdot (V' + p(x)\cdot V) = g(x) \quad (3)$$

Подберем функцию так, чтобы выражение в скобках было равно 0.

$$V' + p(x)\cdot V = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -p(x)\cdot V \qquad \frac{dV}{V} = -p(x)dx \qquad \int\frac{dV}{V} = \int -p(x)dx$$

$$LnV = \int -p(x)dx + c \qquad V = e^{\int -p(x)dx}$$

Ввиду свободы V, c=0. Подставив полученную функцию в уравнение(3)

$$U'\cdot e^{\int -p(x)dx} = g(x)$$

$$\frac{dU}{dx} = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$U = \int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx} + c_1$$

$$y = UV$$

Пример.

$$y' + 2xy = 2x$$

$$y = UV \quad y' = U'V + UV'$$

$$U'V + UV' + 2xUV = 2x$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = 2x$$

$$V' + 2xV = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -2xV \qquad \int\frac{dV}{V} = \int -2xdx \quad LnV = -x^2 \quad V = e^{-x^2}$$

$$U'\cdot e^{-x^2} = 2x \qquad \frac{dU}{dx} = 2x\cdot e^{x^2} \qquad \int dU = \int 2x\cdot e^{x^2}dx$$

$$U = \int e^{x^2}dx^2 = e^{x^2} + c$$

$$y = UV = (e^{x^2} + c)\cdot e^{-x^2} = 1 + c\cdot e^{-x^2}$$

## 4. Метод Лагранжа. (метод вариации произвольной постоянной)

$y' + p(x)\cdot y = g(x)$ (1)

Рассмотрим уравнение (1) без правой части, т.е. $y' + p(x)\cdot y = 0$

Оно называется линейным однородным ДУ первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} = -y\cdot p(x) \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \quad Ln|y| = -\int p(x)dx + Ln|c_1|$$

$$Ln\left|\frac{y}{c_1}\right| = -\int p(x)dx \qquad \left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)dx} \quad y = \pm\, c_1 e^{-\int p(x)dx}$$

$$y = c\cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad c = \pm c_1$$

Заменим постоянную с функцией c(x), т.е. c=c(x)

$$y = c\cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad y = c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))$$

Подставим значения $y$ и $y'$ в уравнение (1)

$$c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x)) + p(x)\cdot c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x)$$

$$dc(x) = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$c(x) = \int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c$$

$$y = (\int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

### Пример

$$y' + 2xy = 2x$$

$$y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \qquad \frac{dy}{y} = -2xdx \quad Ln|y| = -x^2 + Ln|c| \qquad Ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2 \quad \left|\frac{y}{c}\right| = e^{-x^2}$$

$$y = c(x)\cdot e^{-x^2} \qquad y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} + c(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} + c(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = 2x$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} = 2x\Big|\cdot e^{x^2} \qquad \frac{dc(x)}{dx} = 2x\cdot e^{x^2} \qquad \int dc(x) = \int 2xe^{x^2}dx$$

$$c(x) = e^{x^2} + c$$

$$y = (e^{x^2} + c)\cdot e^{-x^2}$$

Замечание. Уравнение вида $x' + p(y)\cdot x = g(y)$ линейное относительно x

$$x' = \frac{dx}{dy} \qquad x = U(y)\cdot V(y)$$

# 5. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n \quad n\in R \quad n\neq 0 \quad n\neq 1$ называется уравнением Бернулли

Если $n=0$, то ДУ - линейное

Если $n=1$, то ДУ с разделяющимися переменными

В общем случае, разделив уравнение на $y^n$

$$y^{-n}\cdot y' + p(x)\cdot y^{1-n} = g(x)$$

Обозначим $y^{1-n} = z \Rightarrow z' = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y' \Rightarrow y^{-n}\cdot y' = \dfrac{z'}{1-n}$

$\dfrac{z'}{1-n} + p(x)\cdot z = g(x)$ - линейное относительно $z$

На практике уравнение Бернулли решают методом Бернулли, без сведения к линейному.

Пример.

$$y' + 2xy = 2xy^3$$

$$y = UV \quad y' = U'\cdot V + U\cdot V'$$

$$U'\cdot V + U\cdot V' + 2xUV = 2xU^3V^3$$

$$U'\cdot V + U\cdot (V' + 2xV) = 2xU^3V^3$$

$$V' + 2xV = 0 \qquad \frac{dV}{dx} = -2xV \qquad \frac{dV}{V} = -2xdx \qquad \int\frac{dV}{V} = \int -2xdx$$

$$LnV = -x^2 \qquad V = e^{-x^2}$$

$$U'\cdot V = 2xU^3V^3 \qquad U' = 2xU^3V^2 \qquad U' = 2xU^3e^{-2x^2} \qquad \int\frac{dU}{U^3} = \int 2xe^{-2x^2}dx$$

$$-\frac{1}{2U^2} = -\frac{1}{2}e^{-2x^2} + c \qquad \frac{1}{2U^2} = \frac{1}{2e^{2x^2}} - c \qquad \frac{1}{2U^2} = \frac{1-c\cdot 2e^{2x^2}}{2e^{2x^2}}$$

$$U = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-c\cdot 2e^{2x^2}}} \qquad y = UV = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-c\cdot 2e^{2x^2}}}\cdot e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-c\cdot 2e^{2x^2}}}$$

## 6.Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (1) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$$

В этом случае $P(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ $\quad Q(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Дифференцируем функцию $P(x,y)$ по переменной y, $Q(x,y)$ функцию по переменой x.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

По теореме о равенстве частных смешанных производных $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, получим условие, выполнение которого указывает, что уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad (2)$$

Зафиксируем y и проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$ по x

$$\int dU=\int P(x,y)dx$$

$$U=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$$

Где $\varphi(y)=c$ зависит от y или является числом.

Продифференцируем теперь функцию U по y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=(\int P(x,y)dx)'_y+\varphi'(y)$$

$$\text{но} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q \Rightarrow \quad Q=(\int P(x,y)dx)'_y+\varphi'(y)$$

$$\varphi'(y)=Q-(\int P(x,y)dx)'_y$$

$$\varphi(y)=\int (Q-(\int P(x,y)dx)'_y)dy+c$$

Пример.

$$y'=\frac{5-2xy}{3y^2+x^2} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{5-2xy}{3y^2+x^2}$$

$$(5-2xy)dx-(3y^2+x^2)dy=0$$

$$P=5-2xy \qquad\qquad Q=-3y^2-x^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = 5 - 2xy \qquad U = \int (5 - 2xy)dx = 5x - x^2 y + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \qquad -x^2 + \varphi'(y) = -3y^2 - x^2$$

$$\varphi'(y) = -3y^2 \qquad \varphi(y) = -y^3 + c$$

$$U = 5x - x^2 y - y^3 + c$$