ТЕОРЕМА КОШИ

Определение 1. Область $G \subset \mathbb{C}$ называется односвязной, если внутренняя область любой замкнутой непрерывной линии, проведённой в G, также принадлежит G. Области, не обладающие таким свойством, называются многосвязными.

Примеры.

1.) $\{z : |z-a| < r\}$ - односвязная область.

2.) $\{z : |z-a| \geq r\}$, $\{z : r < |z-a| < R\}$ - многосвязные области.

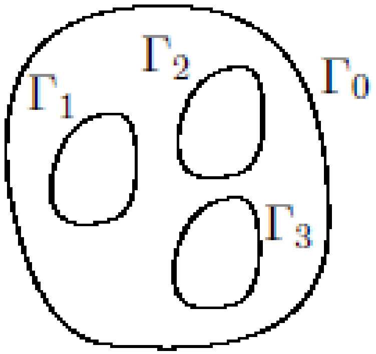


Рис.

Пусть $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ замкнутые непрерывные линии такие, что каждая из линий $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ лежит вне остальных и все они расположены внутри Γ_0 (см. Рис.).

Определение 2. Область, состоящая из точек плоскости, лежащих внутри Γ_0 и вне $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, называется (n+1)-связной областью.

Замечание. На рисунке изображена 4-связная область.

ТЕОРЕМА.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру Γ, лежащему в этой области D, равен нулю, т. е.

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0\,.$$

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда интеграл от функции $f(z)$, взятый вдоль границы ∂D этой области, равен нулю:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Сформулируем теперь теорему Коши для многосвязной области (см. рис. на 1-ом слайде).

Пусть на комплексной плоскости задано n замкнутых кусочно-гладких контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$, таких, что каждый из контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ лежит во внешности остальных и все они располагаются во внутренности контура Γ_0. Полная граница Γ области D представляет собой контур, который состоит из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$.

Положительным направлением обхода границы многосвязной области будем считать такое направление движения, при котором область D остается слева. Внешний контур Γ_0 обходится против часовой стрелки, а $\Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ — по часовой стрелке.

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

где Γ — полная граница области D, состоящая из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ и проходящая в положительном направлении.

Заметим, что данное равенство можно переписать следующим образом

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma_{n-1}} f(z)dz$$

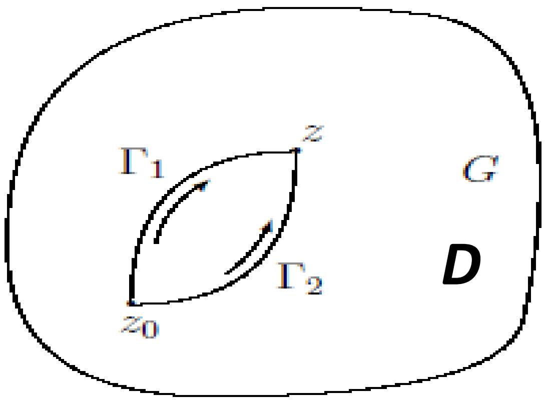
Следствие. Из теоремы Коши следует, что если $f(z)$ аналитическая в области D, и при этом точки z и z_0 расположены в данной области, то

интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$

где Γ – линия, лежащая в области D и соединяющая точки z и z_0

не зависит от формы линии Γ, а только от точек точки z и z_0

<u>Доказательство.</u> Из теоремы Коши следует $\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2^-} f(z)dz = 0$, т.е.



$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)dz = 0. \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Определение. Неопределенным интегралом от $f(z)$, определенной в области D, называется любая функция $F(z)$, удовлетворяющая в данной области условию

$$F'(z) = f(z)$$

Рассмотрим

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

где путь интегрирования Г – линия, лежащая в области D и соединяющая точки z и z_0, также лежащие в этой области. Согласно следствию из теоремы Коши, этот интеграл не зависит от пути интегрирования и следовательно $F(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D

Теорема . Пусть $f(z)$ - аналитична в односвязной области $\boldsymbol{D}$. Тогда любой неопределенный интеграл от $f(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z) = F(z) + C, \text{ где } F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \ C \text{ - const}, \ z_0, z \in \boldsymbol{D}.$$

Тогда при данных условиях, для аналитической функции $f(z)$, определенной в области D, будет иметь место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

Заметим также, что аналитических функций$f(z)$ и $g(z)$, определенных в области D, будет также справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz$$

Замечание. Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю действительного переменного.

Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур Γ_1 в w-плоскости на контур Γ в z-плоскости. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(\varphi(z))\varphi'(z)dz.$$

Таблица 1.3 – Первообразные аналитических функций

Функция $f(z)$ и её первообразная $F(z)$		Функция $f(z)$ и её первообразная $F(z)$	
$f(z)$	$F(z)$	$f(z)$	$F(z)$
$z^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{z}$	$\ln(z)$
e^{z}	e^{z}	a^{z}	$a^{z} \cdot \ln a$
$\sin(z)$	$\cos(z)$	$\cos(z)$	$-\sin(z)$
$\mathrm{sh}(z)$	$\mathrm{ch}(z)$	$\mathrm{ch}(z)$	$\mathrm{sh}(z)$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz.$

<u>Решение.</u> Функция $f(z)=3z^2+2z$ аналитична всюду на $\mathbb{C}$, поэтому по формуле Ньютона - Лейбница найдем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz=(z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i}=(2+i)^3+(2+i)^2-(1-i)^3-(1-i)^2=8+19i.$$

Пример2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i z\cos z dz.$

<u>Решение.</u> Функции $f(z) = z$, $g(z) = \cos z$ аналитичны всюду на $\mathbb{C}$, поэтому мы можем применить формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^i z\cos z dz = \int\limits_0^i z(\sin z)' dz = z\sin z\Big|_0^i - \int\limits_0^i \sin z dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= i\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} + \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} - 1 = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}.$$

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области D и на ее границе L, тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

которая называется **интегральной формулой Коши**. Обход контура L совершается в положительном направлении, т.е. область D всегда остается слева (против часовой стрелки).

Следствие 1.

Если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}dz.$$

Решение. Точка $z_0 = -1$, в которой $z^2+4z+3=0$, находится внутри окружности $|z| = 2$. Для применения формулы Коши необходимо выделить функцию $f(z)$. Для этого перепишем интеграл следующим образом

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}}{z-(-1)}dz.$$

Таким образом, $z_0 = -1$, $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$. Функция $f(z)$ будет аналитической в круге $|z| \leq 2$. Применяя формулу Коши, получим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i\frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1.$$

Пример 2. Используя формулу Коши, вычислить

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz, \text{ если}$$

1.) $\Gamma : |z-2| = 1$; 2.) $\Gamma : |z-2| = 3$; 3.) $\Gamma : |z-2| = 5$.

Решение. 1.) Подынтегральная функция $\dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ является аналитической в замкнутом круге $|z-2| = 1$. Следовательно, по теореме Коши:

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 0.$$

2.) $z^2 - 6z = z(z-6) = 0$ при $z = 0$ и $z = 6$. Точка $z = 0$ находится внутри окружности $|z-2| = 3$, а функция $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в круге $|z-2| \leq 3$. Применяя формулу Коши, получим

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

3.) Оба нуля $z = 0$ и $z = 6$ функции $z^2 - 6z$ находятся внутри окружности $|z-3| = 5$. Поэтому непосредственное применение формулы Коши невозможно. Опишем два способа вычисления интеграла.

Способ I. Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на простейшие

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

После чего запишем

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6}dz - \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{6} 2\pi i e^{z^2}\Big|_{z=6} - \frac{1}{6} 2\pi i e^{z^2}\Big|_{z=0} = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

<u>Способ II.</u> Около точек $z = 0$ и $z = 6$ опишем окружности γ_1 и γ_2, целиком лежащие в круге $|z-2| \le 5$ (см. Рис). В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2| = 5$, γ_1 и γ_2, подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязных областей

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz.$$

К каждому интегралу в правой части данного равенства можно применить интегральную формулу Коши. В результате получим

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0} +$$

$$+ 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

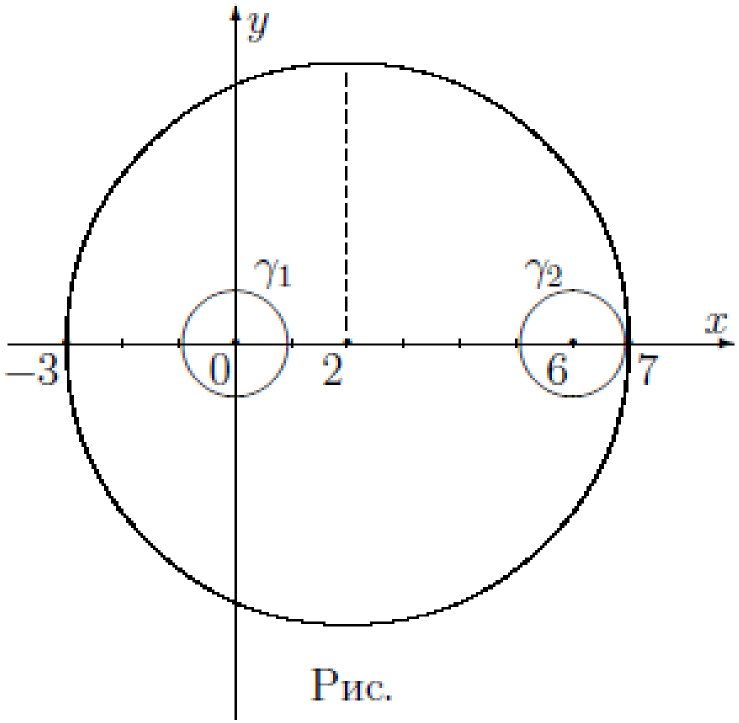


Рис.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

Решение. Функция $\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в круге $|z-1| \leq 1$, кроме точки $z_0 = 1$. Запишем

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Очевидно, функция $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ является аналитической в круге $|z-1| \leq 1$. Поэтому мы можем применить формулу для $f^{(n)}(z)$ при $n = 1$. В результате получим

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

$$f'(z) = \left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)' = \frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1) - 2\sin\pi z}{(z+1)^3}. \Rightarrow f'(1) = \frac{2\pi\cos\pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i.$$