Элементы теории графов

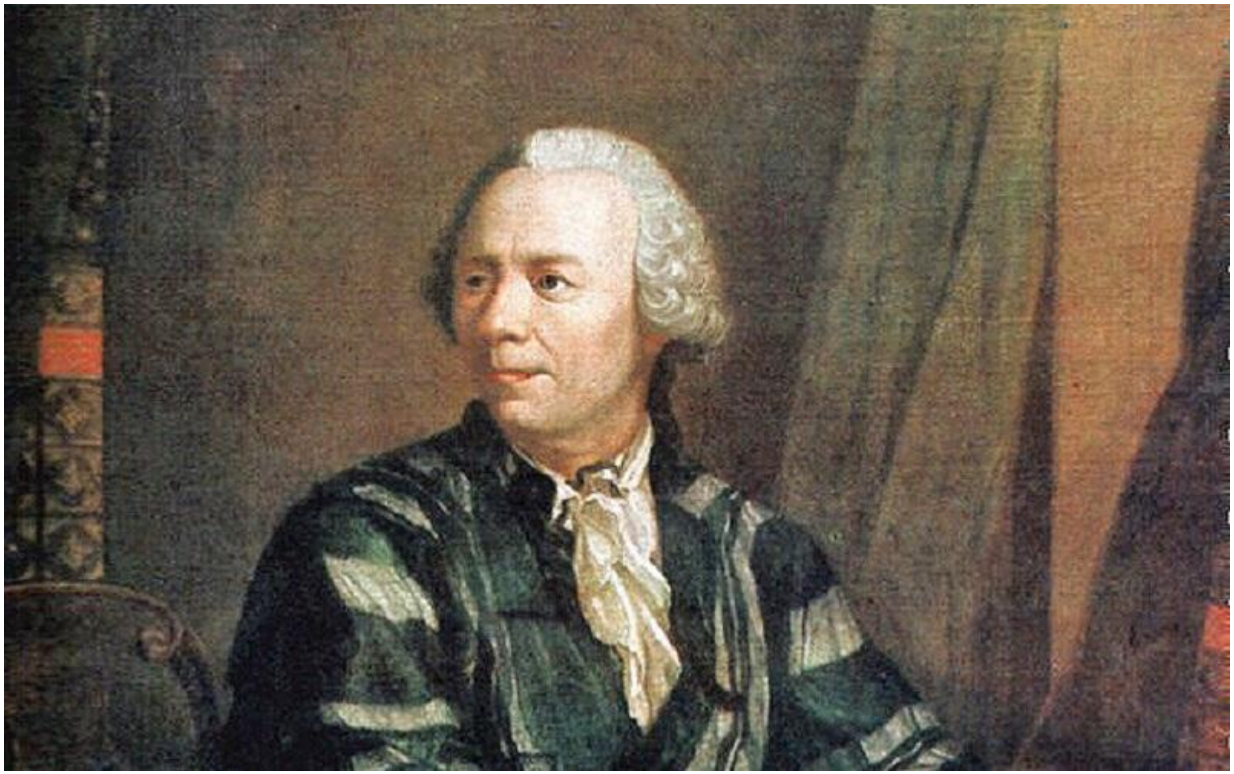
Краткая историческая справка

- Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. Леонард Эйлер, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической. Бывший Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.

Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам (через реку Прегель), не проходя ни по одному из них дважды. Многие кёнигсбергцы пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Впрочем, доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто не мог.

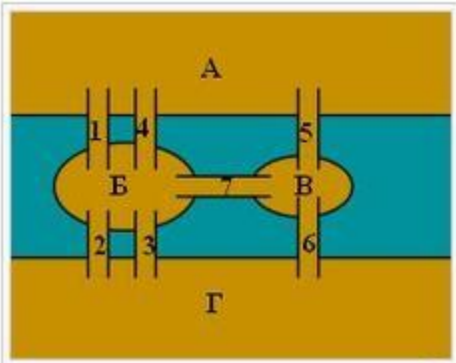
В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, о чём он написал в письме итальянскому математику и инженеру Мариони от 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер пишет о том, что он смог найти правило, пользуясь которым, легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них. Ответ был «нельзя».

Краткая историческая справка

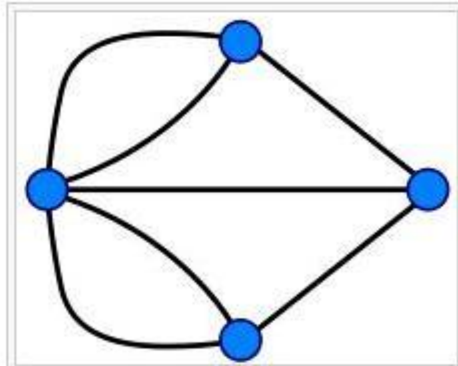


Леонард Эйлер, 1707-1783

Краткая историческая справка



Упрощённая схема мостов Кёнигсберга. Значение букв и цифр — см. комментарий к старинной карте Кёнигсберга



Граф кёнигсбергских мостов

Прикладные аспекты теории графов

Задачи управления проектами, сетевого планирования и управления. Ориентированный граф является мощным средством для описания и анализа взаимодействия элементов сложных агрегатов, объединенных в единую систему; системных комплексов; проектов, требующих выполнения большого числа взаимосвязанных *операций (работ)*. Термин «*работа*» может иметь следующие значения:

а) действительная работа в прямом смысле слова, т.е. трудовой процесс, требующий затрат времени и ресурсов;

б) ожидание, не требующее затрат труда, но занимающее некоторое время;

в) «фиктивная работа», т.е. логическая связь между двумя или несколькими операциями, не требующая ни затрат времени, ни ресурсов, но указывающая, что возможность начала одной работы непосредственно зависит от результатов другой.

Например, это процесс разработки, сооружения, монтажа и наладки оборудования крупного энергетического объекта, включая этапы выбора и подготовки места строительства; выполнение комплексной научно-исследовательской темы с участием ряда организаций и т.п.

Заметим, что кроме длительности выполнения проекта можно рассматривать и другие количественные характеристики: затраты людских или денежных средств (ресурсов, материалов, механизмов), очередность строительства или ввода связанных объектов и т.п., которые могут оказаться взаимозависимыми. Учет их позволяет сократить длительность той или иной операции с помощью дополнительных ресурсных вложений. Решение подобных задач осуществляется с использованием современных компьютерных технологий и программных продуктов.

Прикладные аспекты теории графов

Задача нахождения максимального потока в сети при ограниченных пропускных способностях отдельных участков. Если каждой дуге графа приписать поток некоторого вещества, соответствующий пропускной способности линий электропередачи, трубопроводов различного назначения, граф становится удобной моделью при исследовании целого ряда проблем, возникающих на транспорте, в системах электроэнергетики, связи, связанных с действительным или воображаемым движением товаров, информации, ресурсов…

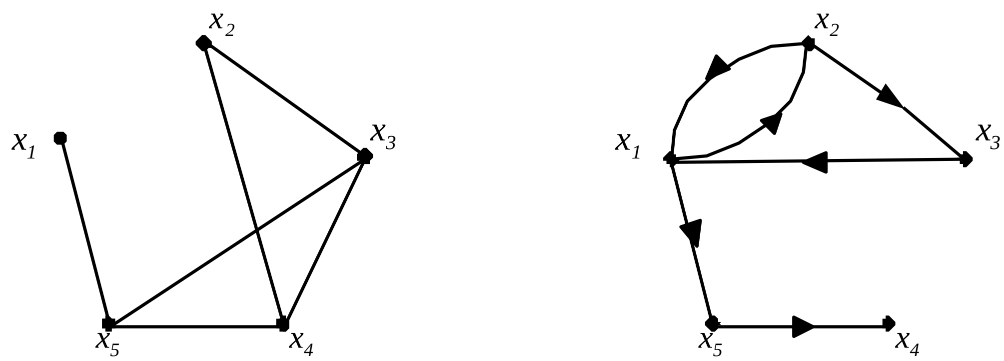
Применение понятия дерева для конструирования кратчайшей сети. Предположим, что имеется несколько электроприемников (распределительных пунктов, подстанций, узлов нагрузки или электростанций), которые нужно объединить в единую сеть, создать систему. Когда число узловых точек мало, ее можно решить методом последовательного перебора, однако при увеличении количества вершин графа задача резко усложняется. Поскольку требованием является только наличие связи между вершинами, задача сводится к поиску соединения, имеющего минимальную длину (стоимость).

Основные определения

- **Граф** *G* задается множеством точек или **вершин** , , …, , которое может быть обозначено через *X,* и множеством линий или **ребер** , , …, , которое обозначается через *U,* соединяющих между собой все или часть этих точек. Граф *G* полностью задается (и обозначается) парой *(X, U)*.
- Если ребра из множества *U* ориентированы, что обозначается стрелкой, то они называются дугами, и граф будет **ориентированным**, иначе – **неориентированным**.
- Ориентированный граф можно также задать с помощью множества вершин *X* и отображения *Г*, которое показывает, как между собой связаны вершины.
- На рисунке 1.1 приведены примеры ориентированного и неориентированного графов.

Основные определения

На рисунке 1.1 приведены примеры ориентированного и неориентированного графов.



а) неориентированный граф, б) ориентированный граф

Рисунок 1.1 – Примеры графов

Основные определения

Путем или **ориентированным маршрутом** ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является вершиной следующей.

Так, на рисунке 1.2 последовательности дуг (u_6, u_5, u_9, u_8, u_4); (u_1, u_6, u_5, u_9) и (u_1, u_6, u_5, u_9, u_{10}, u_6, u_4) являются путями. Путь или маршрут можно изображать и последовательностью вершин.

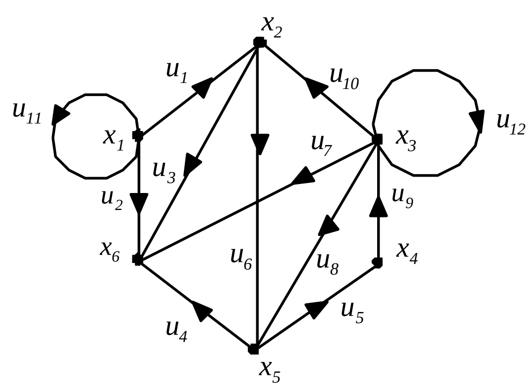


Рисунок 1.2 – Пример графа с петлями

Петлей называется дуга, начальная и конечная вершины который совпадают. Так, на рисунке 1.2 дуги u_{11} и u_{12} являются петлями.

Для алгебраического задания графов удобно использовать матрицы.

Основные определения

Матрица смежности графа G обозначается через $A = [a_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$, если в G существует дуга (x_i, x_j),

$a_{ij} = 0$, если в G нет дуги (x_i, x_j).

Матрица смежности полностью определяет структуру графа.

Матрица инциденций графа G с n вершинами и m дугами имеет размерность $m \times n$, обозначается как $B = [b_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если в G x_i является начальной вершиной дуги u_j,

$b_{ij} = -1$, если в G x_j является конечной вершиной дуги u_j,

$b_{ij} = 0$, если в G x_j не является конечной вершиной дуги u_j, или если u_j является петлей.

Так как каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один, равный –1, либо все элементы столбца равны 0.

Если граф G неориентирован, то его матрица инциденций определяется также, кроме того, что все элементы, равные –1, заменяются на 1.

Основные определения

Граф рисунка 2.1 описать с помощью множеств отображений вершин, матриц смежности и инцидентности.

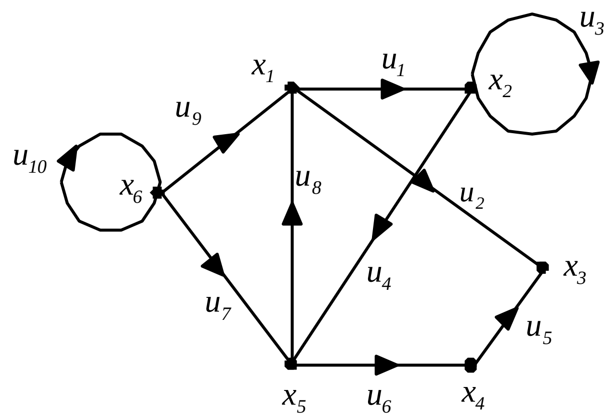


Рисунок 2.1 – Пример ориентированного графа

Множества отображений вершин:

Основные определения

Граф рисунка 2.1 описать с помощью множеств отображений вершин, матриц смежности и инцидентности.

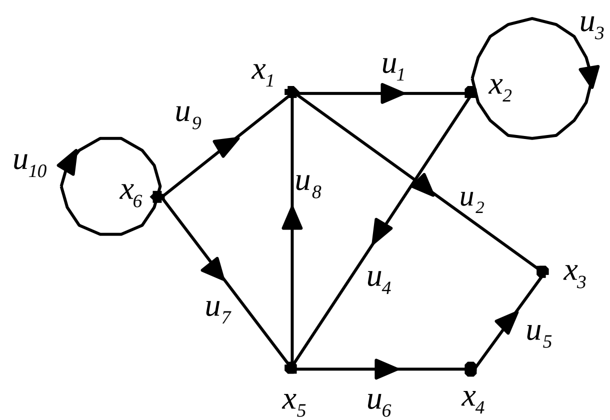


Рисунок 2.1 – Пример ориентированного графа

Множества отображений вершин:

$\Gamma(x_1)=\{x_2,x_3\}$, $\Gamma(x_2)=\{x_2,x_5\}$, $\Gamma(x_3)=\varnothing$, $\Gamma(x_4)=\{x_3\}$, $\Gamma(x_5)=\{x_1,x_4\}$, $\Gamma(x_6)=\{x_1,x_5,x_6\}$.

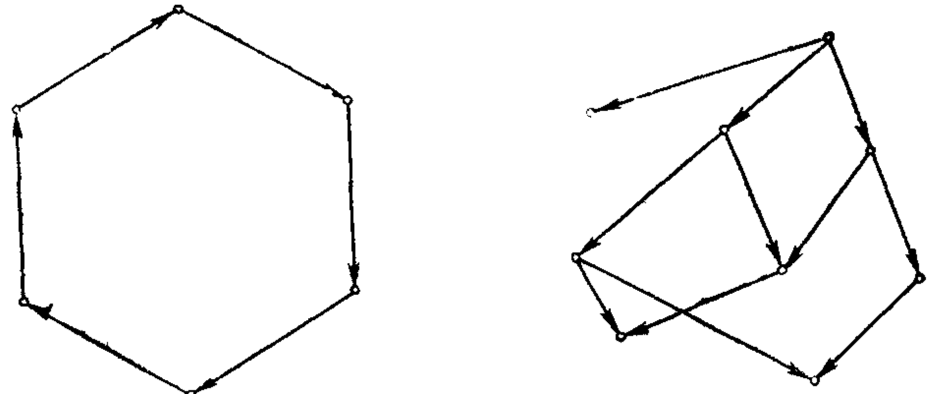
Матрица смежности

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица инцидентности

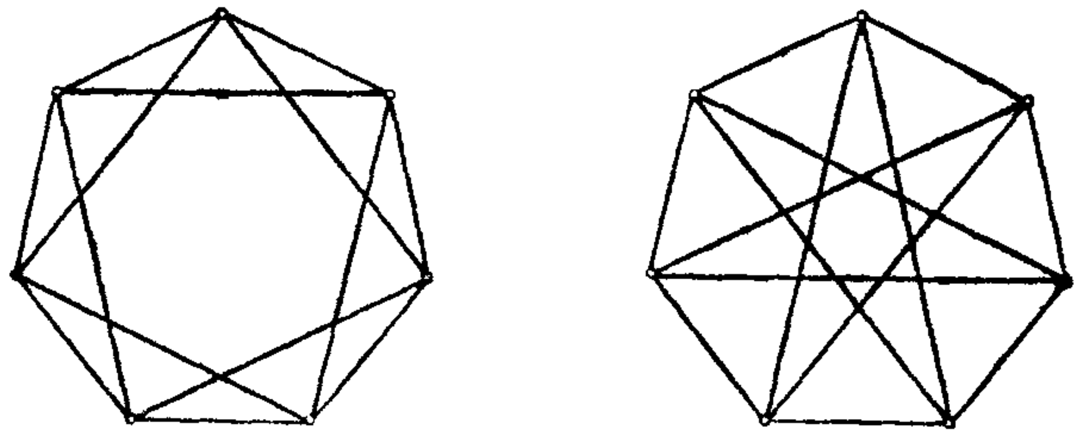
$$B = \begin{array}{c|cccccccccc|} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ x_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Мы уже отмечали, что при фактическом изображении графа имеется большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их дуг. Поэтому

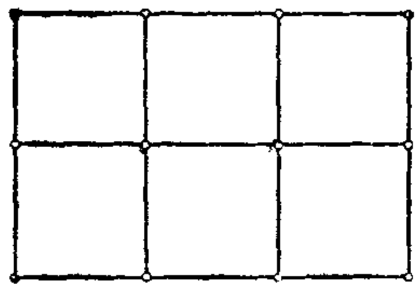


может оказаться, что один и тот же граф представляется совсем различными чертежами. Будем говорить, что два графа G и G' *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин V и V', что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу. Для нас в дальнейшем всюду будет несущественно, какое именно изображение графа используется, так как все изоморфные графы имеют одни и те же свойства. На рис. 1.2.1 приведены примеры изоморфных графов, образованных ребрами и вершинами правильных многогранников.

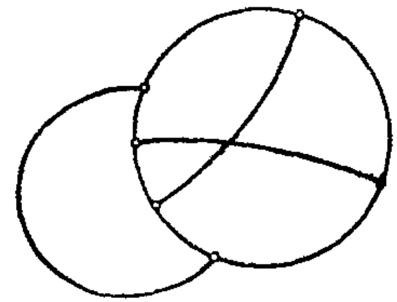
Изоморфные графы



Граф называется *плоским*, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются вершинами G. Граф на рис. 1.1.8, *а* плоский, а на рис. 1.1.8, *б* неплоский.



а)



б)

Рис. 1.1.8.

1.2. Локальные степени. Граф называется *конечным*, если число его ребер конечно, и *бесконечным* — в противном случае. При таком определении конечный граф может иметь бесконечное число вершин, но все они, кроме конечного числа, изолированные. Однако обычно в конечном графе число вершин также конечно.

Например, если граф интерпретирует систему связи, в которой приемо-передающие компоненты – его вершины, а каналы связи – дуги, возникает вопрос о том, можно ли передать осуществить обмен информацией между вершинами x_i и x_j, т.е. существует ли путь, соединяющий эти две вершины. Для решения этой задачи находят множества и матрицы достижимостей и контрадостижимостей графа.

Множество достижимостей некоторой вершины x_i можно записать в виде:

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^1(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup ... \cup \Gamma^n(x_i).$$

Здесь n меньше количества вершин графа. Множество достижимостей получается путем последовательного объединения до тех пор, пока текущее множество не перестанет увеличиваться при очередной операции объединения. $\Gamma^n(x_i)$ – множество вершин, достижимых из вершины x_i при помощи пути длины n.

Матрица достижимостей графа $R = \|r_{ij}\|$ определяется следующим образом:

$r_{ij} = 1$, если вершина x_i достижима из вершины x_j,

$r_{ij} = 0$, в противном случае,

или же $r_{ij} = 1$, если $x_j \in R(x_i)$, и $r_{ij} = 0$, в противном случае.

Множество контрадостижимостей некоторой вершины x_i есть множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достичь вершину x_i. Оно определяется как $Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{-n}(x_i)$. **Матрица контрадостижимостей** есть транспонированная матрица достижимостей.

Пересечение множеств достижимостей и контрадостижимостей некоторой вершины x_i $R(x_i) \cap Q(x_i)$ даст множество вершин, любая из которых принадлежит, по меньшей мере, одному пути от x_i к x_j. Вершины, входящие в такое множество, называются **существенными или неотъемлемыми относительно концевых вершин**.

С понятием достижимости соседствует понятие сильных (сильно связных) компонент графа. Практическое применение задача нахождения сильных компонент нашла при исследовании структуры организации. Так, члены каждой сильной компоненты графа G, представляющего структуру руководства или влияния некоторой организации, имеют равную власть или равное влияние друг на друга.