Лекция 3

Повторные независимые испытания. Упрощения формулы Бернулли

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий

- Если вероятность наступления события *A* в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются ***независимыми*** *относительно события A*.
- Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события *A* в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название **схемы Бернулли**.

- ***Априорная вероятность*** – это вероятность, присвоенная событию при отсутствии знания, поддерживающего его наступление.
- ***Апостериорная вероятность*** – это условная вероятность события при некотором условии, рассматриваемая в противоположность его априорной вероятности.

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

- ***Теорема.*** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие А наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

Формула Бернулли

$$\boxed{P_{m,n} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}} \qquad (3.1)$$

где $q = 1 - p$.

Доказательство. Пусть A_i и $\bar{A}_i$ - соответственно появление и непоявление события A в i-м испытании ($i = 1, 2, ..., n$), а B_m - событие, состоящее в том, что в n независимых испытаниях событие A появилось m раз.
Представим событие B_m через элементарные события A_i.

Например, при $n = 3$, $m = 2$ событие $B_2 = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3$, т.е. событие А произойдет два раза в трех испытаниях, если оно произойдет в 1-м и 2-м испытаниях (и не произойдет в 3-м); в 1-м и 3-м (и не произойдет во 2-м), или произойдет во 2-м и в 3-м (и не произойдет в 1-м).

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

В общем виде

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_{m+1} \dots \bar{A}_n + A_1 \bar{A}_2 A_3 \dots \bar{A}_{n-1} A_n + \cdots \\ + + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-m} A_{n-m+1} \dots A_n, \tag{3.2}$$

т.е. каждый вариант появления события *Bm* состоит из *m* появлений события А и *n* – *m* непоявлений, т.е. из *m* событий А и из *n* – *m* событий Ā с различными индексами.

Число всех комбинаций (слагаемых суммы (3.2)) равно числу способов выбора из *n* испытаний *m*, в которых событие А произошло, т.е. числу сочетаний C_n^m.

- Вероятность каждой такой комбинации (каждого варианта появления события *Bm*) по теореме умножения для независимых событий равна $p^m q^{n-m}$, так как

$$p(A_i) = p, \;\; p(\bar{A}_i) = q, \;\; i = 1, 2, \dots, n.$$

В связи с тем, что комбинации между собой несовместны, по теореме сложения вероятностей получим

$$P_{m,n} = P(B_m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

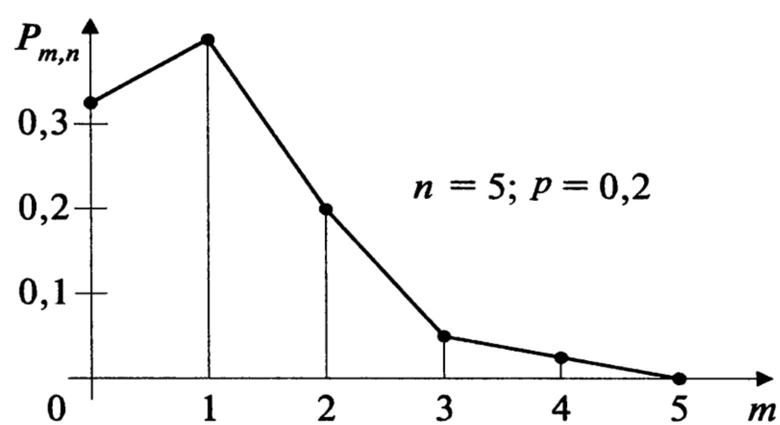
1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали $p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Искомые вероятности находим по формуле Бернулли (3.1):

$$P_{0,5} = C_5^0 0{,}2^0 0{,}8^5 = 0{,}32768;\ P_{1,5} = C_5^1 0{,}2^1 0{,}8^4 = 0{,}4096;$$
$$P_{2,5} = C_5^2 0{,}2^2 0{,}8^3 = 0{,}2048;\ P_{3,5} = C_5^3 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$
$$P_{4,5} = C_5^4 0{,}2^4 0{,}8^1 = 0{,}0064;\ P_{5,5} = C_5^5 0{,}2^5 0{,}8^0 = 0{,}00032.$$

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m,\ P_{m,n})$. Соединяя эти точки, получим многоугольник, или полигон, распределения вероятностей



1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

- Число m_0 наступления события А в n независимых испытаниях называется ***наивероятнейшим***, если вероятность осуществления этого события $P_{m0,n}$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_{m,n}$ при любом m.
- Для нахождения m_0 запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} P_{m_0,n} \geq P_{m_0+1,n}, \\ P_{m_0,n} \geq P_{m_0-1,n}. \end{cases} \qquad (3.3)$$

- Решим первое неравенство системы (3.3).
- Используя формулы Бернулли и числа сочетаний, запишем

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!}p^{m_0}q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!}p^{m_0+1}q^{n-m_0-1}.$$

- Так как $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)! = (n-m_0-1)!(n-m_0)$, то получим после упрощений неравенство

$\frac{1}{n-m_0}q \geq \frac{1}{m_0+1}p$, откуда $(m_0+1)\,q \geq (n-m_0)\,p.$

Теперь $m_0\,(p+q) \geq np - q$ или $m_0 \geq np - q$

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

Решая второе неравенство системы (3.3), получим аналогично: $m_0 \le np + p.$

Объединяя полученные решения двух неравенств, придем к двойному неравенству:

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (3.4)$$

Так как $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число m_0, удовлетворяющее неравенству (3.4).

При этом, если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два:

$$m_0 = np + p \quad \text{и} \quad m_0' = np - q.$$

- ***Пример.*** Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

Решение. В данном случае p = 1/6. Согласно неравенству (3.4) $n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 10 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$n - 5 \le 60 \le n + 1$ => $59 \le n \le 65$, т.е. необходимо подбросить кость от 59 до 65 раз (включительно).

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Алгоритм решения задач

1. Проверить, выполняются ли условия схемы повторных независимых испытаний.
2. Если опыт, описываемый в задаче, приводит к схеме повторных независимых испытаний, то из условий определить: $P(A)= p$ - вероятность успеха, и $P(\bar{A})= 1 – p = q$

- вероятность неудачи в каждом опыте.

3. При заданных числе опытов, количестве успехов (и (или) неудач) воспользоваться формулами (3.1)-(3.4)

Часто применяемые формулы в схеме Бернулли

Вероятность наступления события *A:*

а) менее k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$

б) более k раз: $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$

в) не менее k раз: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$

г) не более k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$

д) хотя бы один раз: $1-P_n(0)$

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Алгоритм решения задач

- ***Пример.*** В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.

Решение. 1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, p =1 – 0,2=0,8.

По формуле Бернулли $P_{5,9} = C_9^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}066.$

2.а) По условию p = 0,2.

$$P_9(m < 2) = P_{0,9} + P_{1,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}436.$$

2.б) $P_9(m \le 2) = P_{0,9} + P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 +$

$+ C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}738.$

2.в) $P_9(m \ge 2) = P_{2,9} + P_{3,9} + \ldots + P_{9,9}.$

2.в) Проще, если перейти к противоположному событию, т.е.

$P_9(m \ge 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - (P_{0,9} + P_{1,9}) = 1 - 0{,}436 = 0{,}564$

Пример. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.

- 2.г) Наивероятнейшее число проданных акций по первоначально заявленной цене определится из условия (4.4), т.е.

$$9 \cdot 0{,}2 \ - \ 0{,}8 \le m_0 \le 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \quad \text{или} \quad 1 \le m_0 \le 2,$$

т.е. наивероятнейших чисел два: m_0=1 и m'_0 = 2.
Поэтому вероятность

$$P_{\text{наивер}} = P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 + C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}604.$$

1. Переменные условия опыта. Производящая функция

- Пусть производится n независимых испытаний, причём в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, …, в n-м испытании – p_n; вероятности непоявления события A соответственно равны $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $P_n(k)$ – вероятность появления события А в n испытаниях ровно k раз.
- *Производящей функцией* вероятностей $P_n(k)$ называют функцию, определяемую равенством

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)\ldots(p_n z + q_n).$$

- Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в первом из которых вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, …, в n-м испытании – p_n; $P_n(k)$ – вероятность появления события A в n испытаниях ровно k раз, равна коэффициенту z^k в разложении производящей функции по степеням z.

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = \overbrace{p_1 p_2}^{P_2(2)} z^2 + (\overbrace{p_1 q_2 + p_2 q_1}^{P_2(1)})z + \overbrace{q_1 q_2}^{P_2(0)}$$

1. Переменные условия опыта. Производящая функция

- ***Пример.*** *Устройство состоит из трех независимо работающих элементов (за время t) соответственно равны $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все элементы, б) два элемента, в) один элемент, д) ни один из элементов.*

Решение. Так как вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$., то вероятности того, что элементы откажут, равны $q_1=0,3$; $q_2=0,2$; $q_3=0,1$.

Составим производящую функцию

$$\varphi_3(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)=0,504\,z^3+0,398\,z^2+0,092\,z+0,006.$$

Вероятность того, что три элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^3
Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^2
Вероятность того, что один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^1
Вероятность того, что ни один элемент не будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^0

Контроль: 0,504+0,398+0,092+0,006=1.

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

- ***Задача***: вычислить вероятность $P_{m,n}$ появления события A при большом числе испытаний n, например, $P_{300,500}$.
- По формуле Бернулли $P_{300,500} = C_{500}^{300} p^{300} q^{200} = \frac{500!}{300!200!} p^{300} q^{200}$

Непосредственное вычисление технически сложно (p и q - числа дробные)!

- Существуют более простые приближенные формулы для вычисления $P_{m,n}$ при больших n – так называемые асимптотические формулы, – определяются *теоремой Пуассона*, *локальной* и *интегральной теоремами Муавра-Лапласа*.

Теорема Пуассона

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (3.5)$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

Теорема Пуассона

Доказательство: По формуле Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^n (1-p)^{-m}$$

или, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda$ (при достаточно больших n):

$$p \approx \frac{\lambda}{n} \text{ и } P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \dots = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

Замечание

- Строго говоря, условие теоремы Пуассона $p \to 0$ при $n \to \infty$, так что $np \to \lambda$, противоречит исходной предпосылке схемы испытаний Бернулли, согласно которой вероятность наступления события в каждом испытании $p = const$.
- Однако, если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n – велико и число $\lambda = np$ – незначительно (будем полагать, что $\lambda = np < 10$), то из предельного равенства (3.5) вытекает приближенная формула Пуассона:

$$\boxed{P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda)} \quad (3.6)$$

Формула Пуассона

Значения функции Пуассона $P_m(\lambda)$ табулированы.

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

- ***Пример 1.*** На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?
- *Решение*. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна p = 1/365. Так как p = 1/365 – мала, n = 1825 – велико и

$\lambda = np = 1825(1/365) = 5 < 10$, то применяем формулу Пуассона

$$P_{4,1825} = P_4(5) = 0{,}1755$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

- ***Теорема.*** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}} \quad (3.7)$$

локальная формула Муавра – Лапласа

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (3.8)

функция Гаусса

и $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ (3.9)

Приближенные значения вероятности $P_{m,n}$, даваемые локальной формулой *Муавра – Лапласа* на практике используются как точные при npq порядка двух и более десятков, т.е. при условии $npq > 20$.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы (3.7), составлена таблица значений функции $f(x)$)

2. Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Свойства функции Гаусса f(x) (3.8)

1. Функция *f(x)* является четной, т.е. *f(-x) = f(x)*.
2. Функция *f(x)* – монотонно убывающая при положительных значениях х, причем при $x \to \infty$ $f(x) \to 0$.

(Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $f(x) \approx 0$.)

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна $p = 80/100 = 0,8$. Так как $n = 100$ достаточно велико (условие $npq = 100 \cdot 0,8(1 \cdot 0,8)=64 \geq 20$ выполнено), то применяем локальную формулу Муавра – Лапласа.

Вначале определим по (3.9) $x = \frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}$=-2,50

Тогда по формуле (3.7) $P_{300,400} \approx \frac{f(-2,50)}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = \frac{f(-2,50)}{\sqrt{64}} = \frac{0,0175}{8} \approx 0,0022$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n приближенно равна

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \qquad (4.1)$$

где $$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \qquad (4.2)$$ - *функция (или интеграл вероятностей) Лапласа*;

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3)$$

Формула (4.1) называется ***интегральной формулой Муавра-Лапласа***

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Свойства функции Ф(x)

1. Функция *Ф(x)* нечетная, т.е. *Ф(-x)* = -*Ф(x)*.
2. Функция *Ф(x)* монотонно возрастающая, причем при $x \to \infty \to 1$ (практически можно считать, что уже при $x > 4$ $Ф(x) \approx 1$).

Следствие *интегральной теоремы Муавра-Лапласа*. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что:

а) число m наступлений события A отличается от произведения np не более, чем на величину $\varepsilon > 0$ (по абсолютной величине), т.е.

$$P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \qquad (4.4)$$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

***Следствие** интегральной теоремы Муавра-Лапласа*.

б) частость $\frac{m}{n}$ события A заключена в пределах от α до β (включительно), т.е.

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\right], \qquad (4.5)$$

где $z_1 = \dfrac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}}, \qquad z_2 = \dfrac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}}. \qquad (4.6)$

в) частость $\frac{m}{n}$ события A отличается от его вероятности p не более, чем на величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величине), т.е.

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \qquad (4.7)$$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Следствие *интегральной теоремы Муавра-Лапласа.*

Доказательство. а) Неравенство $|m - np| \le \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon$.

Поэтому по интегральной формуле (4.1)

$$P_n(|m-np| \le \varepsilon) = P_n(np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{p+\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np-\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

б) Неравенство $\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta$ равносильно неравенству $a \le m \le b$ при $a = n\alpha$ и $b=n\beta$.

Заменяя в формулах (4.1), (4.3) величины a и b полученными выражениями, получим доказываемые формулы (4.5) и (4.6).

в) Неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta$ равносильно неравенству $|m - np| \le \Delta n$.

Заменяя в формуле (4.4) $\varepsilon = \Delta n$, получим доказываемую формулу (4.7).

Пример. По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (частость) доживших до 50 лет будет: а) заключена в пределах от 0,9 до 0,95; б) будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение. а) Вероятность p того, что новорожденный доживет до 50 лет, равна 0,87.

Так как n = 1000 велико (условие npq = 1000 - 0,87 - 0,13 = 113,1 ≥ 20 выполнено), то используем следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Вначале определим по (4.6) $$z_1 = \frac{0{,}9 - 0{,}87}{\sqrt{0{,}87 \cdot 0{,}13/1000}} = 2{,}82, \quad z_2 = \frac{0{,}95 - 0{,}87}{\sqrt{0{,}87 \cdot 0{,}13/1000}} = 7{,}52.$$

Теперь по формуле (4.5) $$P_{1000}\left(0{,}9 \le \frac{m}{n} \le 0{,}95\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(7{,}52) - \Phi(2{,}82)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0{,}9952) = 0{,}0024.$$

б) По формуле (4.7) $$P_{1000}\left(\left| \frac{m}{n} - 0{,}87 \right| \le 0{,}04\right) \approx \Phi\left(\frac{0{,}04 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}87 \cdot 0{,}13}}\right) = \Phi(3{,}76) = 0{,}9998.$$

Так как неравенство $\left|\frac{m}{n} - 0{,}87\right| \le 0{,}04$ равносильно неравенству $0{,}83 \le \frac{m}{n} \le 0{,}91$, полученный результат означает, что практически достоверно, что от 0,83 до 0,91 числа новорожденных из 1000 доживут до 50 лет.