ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $P_m(x)$ – степени *m* и $Q_n(x)$ – степени *n*,

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ и

$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$.

1. Рациональная дробь называется правильной, если $n > m$.

2. Если $m \geq n$, то дробь неправильная и применяют метод деления углом для исключения целой части.

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{P_{m-1}(x)}{Q_n(x)}$$

Простейшими элементарными дробями называются дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, $m>1$, целое;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\dfrac{p^2}{u} - q < 0$, т. е. квадратный трехчлен не имеет действительных корней;

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где $\dfrac{p^2}{u} - q < 0$, т. е. квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

1. **Простейшая дробь 1-го типа** имеет вид $\dfrac{A}{x-a}$, где A — коэффициент, a — действительный корень знаменателя. Интеграл от дроби 1-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

2. **Простейшая дробь 2-го типа** имеет вид $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где A — коэффициент, a — действительный корень знаменателя кратности k. Интеграл от дроби 2-го типа приводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C.$$

3. **Простейшая дробь 3-го типа** имеет вид $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где A, B — коэффициенты, знаменатель дроби не имеет действительных корней, его дискриминант $D<0$.

При интегрировании дроби вначале в числителе нужно выделить дифференциал знаменателя (если $A \neq 0$).

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} +$$

$$+(B-\tfrac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+(B-\tfrac{Ap}{2})\cdot I_1$$

Интеграл $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ превращается в табличный, если в знаменателе выделить полный квадрат суммы или разности и применить подстановку $x+\frac{p}{2}=U$.

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+\tfrac{p^2}{4}-\tfrac{p^2}{4}+q = (x+\tfrac{p}{2})^2+(q-\tfrac{p^2}{4}) = U^2+R^2.$$

Так как дискриминант знаменателя $D=p^2-4q<0$,

то $R^2=(q-\frac{p^2}{4})>0$.

Таким образом,

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dU}{U^2 + R^2} = \frac{1}{R}\operatorname{arctg}\frac{U}{R} + C =$$

$$= \frac{1}{R}\operatorname{arctg}\frac{x + p/2}{R} + C\,.$$

Пример 1.

Найти $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 12}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 12} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4) - 4 - 12} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 16}$$

$$= \left| \begin{matrix} x + 2 = t \\ d(x+2) = dt \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 16} = -\int \frac{dt}{4^2 - t^2} = -\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+t}{4-t}\right| + C = -\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+6}{2-x}\right| + C.$$

Пример 2.

Найти $\int \frac{2x-1}{x^2 - 5x - 8}dx$

Решение:

$$\int \frac{2x-1}{x^2 - 5x - 8}dx = \int \frac{(2x-1)dx}{\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x - \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 8} = \int \frac{2x-1}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x - \frac{5}{2} = t \Rightarrow x = t + \frac{5}{2} \\ d\left(x - \frac{5}{2}\right) = dt \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2\left(t + \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{7}{4}}dt = \int \frac{2t + 4}{t^2 + \frac{7}{4}}dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{7}{4}} + 4\int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + t^2} = \ln\left|t^2 + \frac{7}{4}\right| + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arc\operatorname{tg}\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C =$$

$$= \ln|x^2 - 5x + 8| + \frac{2}{\sqrt{7}}arc\operatorname{tg}\frac{2(x - \frac{5}{2})}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \ln|x^2 - 5x + 8| + \frac{2}{\sqrt{7}}arc\operatorname{tg}\frac{2x - 5}{\sqrt{7}} + C.$$

3. **Метод неопределенных коэффициентов при разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.**

Любую правильную рациональную дробь $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $m < n$, можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{C}{x - x_2} + \frac{D}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{Ex + F}{x^2 + px + q} +$$

$$+ \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots,$$

где*A, B, C, D, E, F, M, N,…* – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения неопределенных коэффициентов надо правую часть привести к общему знаменателю. Так как знаменатель $Q_n(x)$ совпадает со знаменателем дроби правой части, то их можно отбросить и прировнять числители. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях, получим систему линейных уравнений с *n*– неизвестными. Решив эту систему, найдем искомые коэффициенты *A, B, C, D* и так далее. А, следовательно, разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби.

Рассмотрим на примерах возможные варианты:

1. Если множители знаменателя линейны и различны:

$$\frac{P_n(x)}{x(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+5}$$

2. Если среди множителей знаменателя есть краткие множители:

$$\frac{P_n(x)}{(x-2)(x+3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3}$$

3. Если среди множителей знаменателя есть квадратный трехчлен, неразложимый на множители:

$$a)\ \frac{P_n(x)}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+2x+2}$$

$$b)\ \frac{P_n(x)}{(x-1)(x^2+x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+3} + \frac{Dx + E}{(x^2+x+3)^2}$$

Вывод:

Определение интеграла от рациональной дроби производят в следующей последовательности.

1. Выясняют, правильная дробь, или неправильная. Если дробь правильная, переходят к пункту 2. Если дробь неправильная, то выделяют целую часть и правильную рациональную дробь.
2. Знаменатель правильной рациональной дроби разлагают на простейшие множители.
3. Правильную рациональную дробь представляют суммой простейших дробей 1-4 типов и определяют неизвестные коэффициенты.
4. Интеграл от исходной дроби равен сумме интегралов от целой части и простейших дробей.

Примеры: Разложить на сумму простейших рациональную дробь. Проинтегрировать.

Пример1.

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}=\frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)}=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax-3A+Bx^2+3Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A}{x(x-1)(x+3)}$$

Так как знаменатели дробей равны, то должны быть равны и числители, т. е.

$$(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A=2x+3$$

Далее сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях xв левой и правой частях. Получаем систему:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A+3B-C=2 \\ -3A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\dfrac{5}{4} \\ C=-\dfrac{1}{4} \end{cases},$$

значит

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}=-\frac{1}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+3},$$

поэтому

$$\int\frac{2x+3}{x^3+2x^2-3x}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+3}\right)dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$= -\ln|x| + \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C.$$

Пример 2.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{3x^2+2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

Отсюда

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A = 3x^2+2x+1$$

Значит

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B+C=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-3 \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2},$$

тогда

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \ln|x| + 2\ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = \ln|x| + 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C =$$

$$= \ln|x| + 2\ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + C.$$

Пример 3.

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C}{x^3+8}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{1}{12} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Значит

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4},$$

тогда

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}+-\frac{1}{12}\int\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{12}\ln\sqrt{x^2-2x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}dx$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{12}\ln\sqrt{x^2-2x+4}+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arc\,\mathrm{tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{12}\ln\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2-2x+4}}+\frac{\sqrt{3}}{12}arc\,\mathrm{tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$\int\frac{5x^2-2x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}dx=$$