Севастопольский государственный университет
Институт информационных технологий и управления
в технических системах
Кафедра информационных систем

Методические указания к проведению лабораторных работ по дисциплине «Технологии обработки информации»
для студентов направления подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии

Севастополь

2021

Оглавление

Лабораторная работа №1. Спектральный анализ сигналов.

Цель работы. Получить навыки использования преобразования Фурье. Научиться находить амплитудный и фазовый спектры сигнала и проводить анализ свойств этих характеристик. Получить представление о спектре дискретного сигнала. Получить навыки использования функций среды MATLAB.

Теоретические сведения.

Спектральный анализ - это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. К задачам спектрального анализа относятся:

1. Спектральное разложение сигнала - представление сигнала в виде суммы гармонических сигналов с различными частотами;
2. Анализ спектральных компонент сигнала с целью изучения свойств сигнала;
3. Обратное преобразование – получение сигнала по известному спектральному разложению.

<u>Ряд Фурье</u>

Ряд Фурье [1, стр. 30] является инструментом спектрального анализа *периодических* сигналов. Наиболее употребимой формой записи ряда Фурье является комплексная форма, задаваемая формулой

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \, e^{jk\omega_1 t}, \tag{1.1}$$

где $s(t)$ – аналоговый сигнал (непрерывная функция времени);

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота, соответствующая периоду T повторения сигнала;

$\omega_k = k\omega_1$ - гармоника сигнала с номером k;

$\dot{C}_k$ – коэффициент ряда с номером k, вычисляемый по формуле:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \tag{1.2}$$

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье (Fourier Transform) является инструментом спектрального анализа *непериодических* сигналов [1, стр. 39]. Формулы преобразования Фурье можно получить из формул для ряда Фурье, устремив период повторения сигнала к бесконечности $T \to \infty$.

Если аналоговый сигнал представлен непрерывной функцией времени вида $s(t)$, то его спектральная функция задается формулой прямого преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{1.3}$$

где ω – текущая круговая частота.

Формула обратного преобразования Фурье позволяет получить сигнал по его спектральной функции:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1.4}$$

Таким образом, сигнал $s(t)$ и его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ взаимно-однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Модуль спектральной функции $\left|\dot{S}(\omega)\right|$ называют амплитудным спектром, а ее аргумент

$$\varphi_s = \arg\left(\dot{S}(\omega)\right) -$$

фазовым спектром.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ является «сопряженно-симметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу:

$$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega). \tag{1.5}$$

Если $s(t)$ – четная функция, то спектр будет чисто *вещественным* (и, следовательно, будет являться *четной* функцией). Если, напротив, $s(t)$ – функция нечетная, то спектральная функция будет чисто *мнимой* (и *нечетной*).

Для вещественного сигнала $s(t)$ амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$\left|\dot{S}(-\omega)\right| = \left|\dot{S}(\omega)\right|, \tag{1.6}$$

$$\varphi_s(-\omega) = -\varphi_s(\omega). \tag{1.7}$$

<u>Пример. Прямоугольный импульс.</u>

В качестве примера расчета преобразования Фурье рассмотрим прямоугольный импульс (рис. 1.1), центрированный относительно начала отсчета времени и имеющий длительность τ

$$s(\mathrm{t}) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases},$$

где A – амплитуда сигнала.

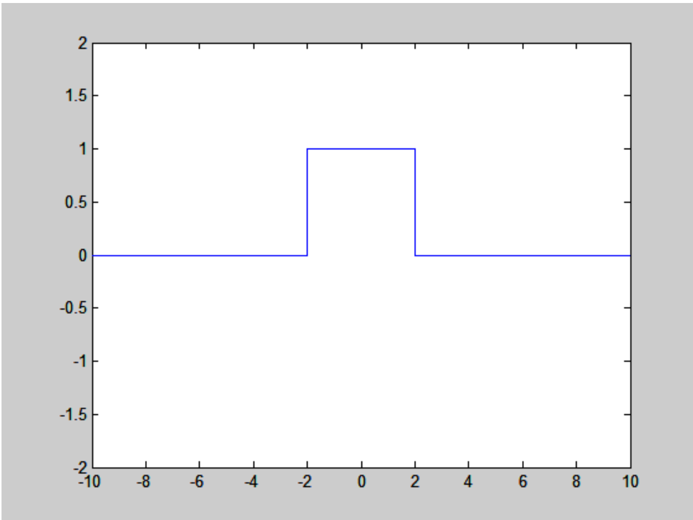


Рисунок 1.1 – *Прямоугольный импульс*

Вычисляем спектр сигнала $\dot{S}(\omega)$ с помощью формулы прямого преобразования Фурье (1.3):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} .$$

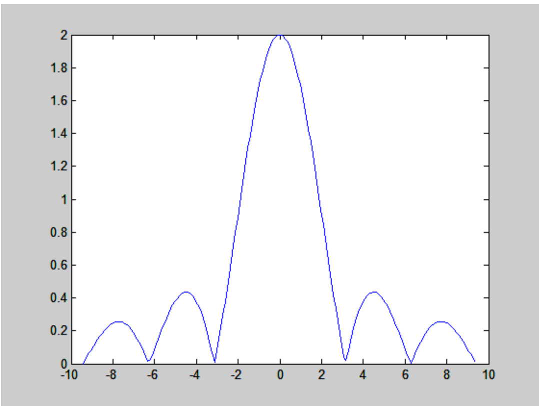
Примечание: при вычислении интеграла воспользовались следующими формулами:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\,sin(x) \text{ (формула Эйлера);}$$

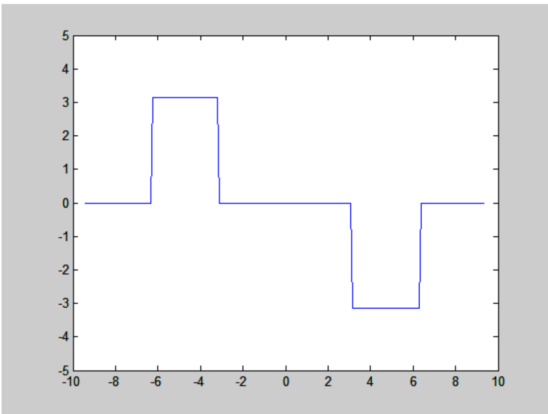
$$\int cos\,(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C;$$

$$\int sin\,(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C.$$

При нахождении амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса вспомним, что рассматриваемый импульс является четной функцией, поэтому спектральная функция сигнала $\dot{S}(\omega)$ также будет четной. Амплитудный спектр – четная функция, а фазовый спектр - нечетная функция (рис. 1.2).



а)



б)

Рисунок 1.2 – *Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры прямоугольного импульса*

Амплитудный спектр данного сигнала простирается до бесконечности, постепенно затухая. Поэтому вводят понятие эффективной ширины спектра, которое определяется как ширина главного лепестка. Для прямоугольного импульса эффективная ширина спектра равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{1.8}$$

Длительность прямоугольного импульса равна τ. Произведение эффективной ширины спектра сигнала на длительность сигнала называется базой сигнала:

$$B = \Delta\omega\tau. \tag{1.9}$$

Для каждого сигнала база – это свое число. В случае прямоугольного импульса $B = 2\pi$.

Из этих соотношений видно, что чем короче сигнал, тем шире его спектр и наоборот. Это положение называют соотношением неопределенности. Существует утверждение, что для любого сигнала база сигнала не может быть меньше единицы.

<u>Спектр дискретного сигнала</u>

Пусть аналоговый сигнал задан функцией времени $s(t)$, а его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ определяется по формуле прямого преобразования Фурье (1.3).

Дискретизируем сигнал $s(t)$, взяв отсчеты сигнала с частотой дискретизации $f_д$. Частота дискретизации задается формулами

$$f_д = \frac{1}{T}; \qquad \omega_д = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.10}$$

Спектр $\dot{S}_д(\omega)$ дискретизованного сигнала [1, стр. 157] представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного непрерывного ла $s(t)$ и определяется формулой:

$$\dot{S}_д(\omega) = f_д \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - 2\pi f_д n\right) \tag{1.11}$$

где ω – текущая круговая частота; $f_д$ – частота дискретизации;

$\dot{S}(\omega)$ – спектральная функция исходного аналогового сигнала.

Расстояние между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации сигнала (рис. 1.3).

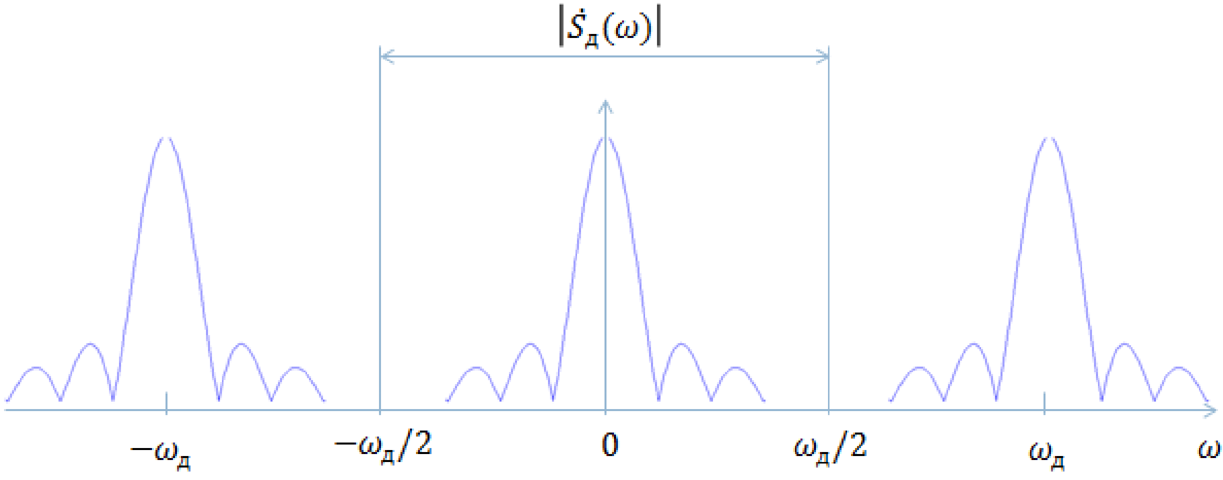


Рисунок 1.3 – *Спектр дискретизованного сигнала*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет значений сигнала и построение его графика.

Запишите в конспекте номер своего варианта, формулу для сигнала $s(t)$ и значения параметров A и a (варианты заданий приведены в конце задания).

Запустите MATLAB. В меню File выберите пункт «NewFile->Script», и создайте новый М-файл.

Напишите программу для расчета значений сигнала $s(t)$ и построения его графика. Для этого используйте следующие MATLAB-функции:

- `plot` – рисование графика в виде непрерывной кривой;
- `grid` – рисование линий сетки на графике;
- `legend` – рисование легенды (пояснительной надписи);
- `xlabel`, `ylabel` – рисование заголовков осей X и Y;
- `xlim`, `ylim` – задание диапазона отображаемых значений по осям X и Y.

Для просмотра документации по конкретной функции MATLAB введите в окне “Command Window” команду `doc` (полная документация) или `help` (краткая справка). Например, следующая команда откроет окно с полной документацией по функции `plot`:

```
>> doc plot
```

Пример программы MATLAB для задания значений сигнала и построения графика сигнала:

```
% Рассчитываем значения сигнала

A = <<ваш параметр>>; % амплитуда импульса
a = <<ваш параметр>>; % скорость убывания импульса
t = [-10:0.1:10]; % вектор отсчетов времени
s = <<ваша формула для расчета сигнала>>; % значения сигнала

% рисуем график сигнала

plot(t, s); % график сигнала
grid on;     % включаем линии сетки
legend('<<ваша легенда>>'); % легенда
xlabel('t');     % заголовок оси X
ylabel('s(t)'); % заголовок оси Y
xlim([-2 2]);    % диапазон отображаемых значений по оси X
ylim([0 1.5]); % диапазон отображаемых значений по оси Y
```

Запустите полученную MATLAB программу (нажатием клавиши *F5*) и проанализируйте результаты ее работы (должно появиться окно с графиком).

Примечание: После каждого запуска программы полезно убедиться в отсутствии в ней ошибок. Если в программе есть ошибки, то MATLAB выведет сообщения об ошибках в окно команд (Command Window) с указанием названия функции и строки кода, в которой произошла ошибка.

Зарисуйте график сигнала в своем конспекте. Покажите результат преподавателю.

2. Расчет преобразования Фурье.

По виду сигнала $s(t)$ сделайте предположения о виде спектральной функции, амплитудного и фазового спектров сигнала (четность/нечетность).

Рассчитайте преобразование Фурье по формуле (1.3) для сигнала $s(t)$ для своего варианта (письменно выведите формулу в общем виде, не подставляя конкретных параметров *A* и *a*).

Подсказка: При выводе спектральной функции можете воспользоваться следующими формулами:

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C\,;$$

$$e^{-\infty} = 0; e^{0} = 1;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$j^2 = -1.$$

Покажите результат преподавателю.

В уже имеющемся М-файле допишите код для вычисления значений преобразования Фурье сигнала $s(t)$ и построения графиков амплитудного $|\dot{S}(\omega)|$ и фазового $\varphi_s(\omega)$ спектров сигнала. Используйте следующие MATLAB-функции:

- `abs` – вычисление модуля комплексного числа;
- `angle` – вычисление аргумента комплексного числа;
- `figure` – создание нового графического окна;
- `subplot` – рисование группы графиков.

Пример MATLAB кода:

```
% вычисляем преобразование Фурье сигнала

omega = [-20:0.1:20]; % вектор частот
% спектральная функция
S = <<ваша формула спектральной функции>>;
% амплитудный спектр
Samp = abs(S);
% фазовый спектр
Sphase = angle(S);

% рисуем графики амплитудного и фазового спектра

figure % новое графическое окно
subplot(1, 2, 1);
plot(omega, Samp);
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
grid on
subplot(1, 2, 2);
plot(omega, Sphase);
xlabel('\omega');
ylabel('\phi_s(\omega)');
grid on
```

Запустите полученную программу. Занесите графики амплитудного и фазового спектров в конспект. Покажите результат преподавателю.

3. Расчет эффективной ширины спектра и базы сигнала.

Рассчитайте значения эффективной ширины $\Delta\omega$ спектра и базы B сигнала (пример расчета приведен в теоретической части).

Занесите полученные значения в конспект и отметьте эффективную ширину спектра на графике.

Убедитесь, что для вашего сигнала соблюдается условие, что база сигнала не может быть меньше единицы.

Покажите результат преподавателю.

Подсказка. Эффективную ширину спектра определять по уровню 0.1 от максимального значения амплитудного спектра (максимальное значение достигается при $\omega = 0$). Для нахождения эффективной ширины спектра определите такую частоту ω, на которой спектральная функция равна 0.1 от своего максимального значения.

При расчете базы сигнала учитывайте тот факт, что для экспоненциальных сигналов в качестве длительности сигнала обычно берется время, при котором амплитуда сигнала убывает $e = 2.7 \ldots$ раз. Поэтому длительность экспоненциального сигнала равна $1/a$ (в случае одностороннего импульса) и $2/a$ в случае двустороннего импульса.

4. Расчет спектра дискретизованного сигнала.

Запишите в общем виде выражение для спектра дискретизованного сигнала, полученного из вашего аналогового сигнала при его дискретизации с некоторой частотой $f_д$. Используйте формулу (1.11).

В уже имеющемся М-файле допишите код для расчета значений спектра дискретизованного сигнала при частоте дискретизации $f_д = 10$ и построения графика амплитудного спектра дискретизованного сигнала.

Пример кода:

```
% рассчитываем спектр дискретизованного сигнала

Fs = 10; % частота дискретизации
omega = [-100:0.1:100]; % диапазон частот
n = [-10:9]; % учитываем 20 копий спектра
% сдвигаем частоты
omega2 = repmat(omega, length(n), 1);
shift = -2*pi*Fs.*n;
shift = repmat(shift', 1, length(omega2));
omega2 = omega2+shift;
Ss = <<ваша формула спектральной функции S(omega2)>>;
Ss = sum(Ss, 1);
Ss = Ss * Fs; % умножаем на Fs
```

```
% рисуем график амплитудного спектра дискретизованного сигнала

figure
plot(omega, abs(Ss));
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
```

Запустите программу и сделайте вывод о виде спектра дискретного сигнала. Занесите полученный график в конспект. По оси частот отложите точки, кратные частоте дискретизации.

Измените частоту дискретизации, сделав ее равной $f_д = 2$. Запустите программу. Что произошло со спектром дискретного сигнала?

Варианты заданий

<u>1-й вариант</u>

Односторонний экспоненциальный импульс (рис. 1.4):

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0' \end{cases}$$

где А – амплитуда сигнала, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a\ = 2.$

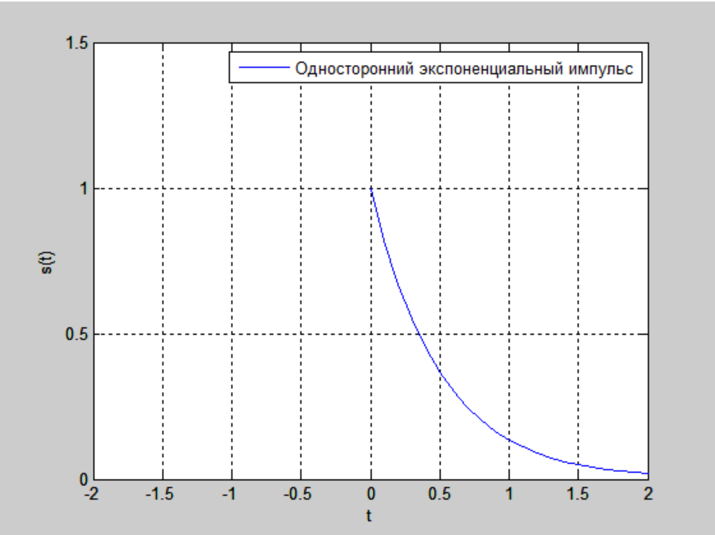


Рисунок 1.4 – *Односторонний экспоненциальный импульс*

<u>2-й вариант</u>

Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс (рис. 1.5):

$$s(t) = Ae^{-a|t|},$$

где A – амплитуда импульса, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a\ = 0.5.$

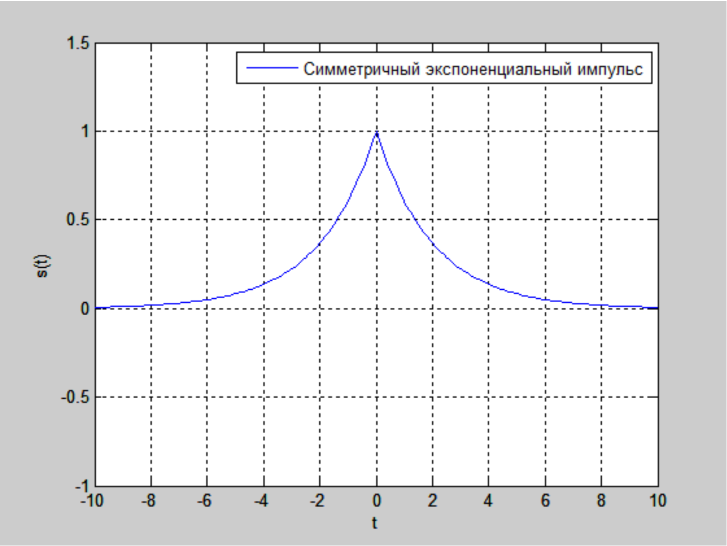


Рисунок 1.5 – *Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс*

Контрольные вопросы

1. Назовите предмет и задачи спектрального анализа сигналов.
2. Запишите формулы расчета комплексного ряда Фурье.
3. Запишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье.
4. Что такое амплитудный и фазовый спектры сигнала?
5. Понятие эффективной ширины спектра и базы сигнала.
6. Понятие спектра дискретного сигнала.

Лабораторная работа №2. Расчет характеристик аналоговых систем.

Цель работы. Получить навыки расчета характеристик линейных систем: импульсной характеристики, комплексного коэффициента передачи и его годографа, АЧХ и ФЧХ системы. Ознакомиться с функциями среды MATLAB для преобразования форм представления линейных цепей, расчета и построения графиков временных и частотных характеристик.

Теоретические сведения.

Понятие аналоговой системы и классификация систем.

Система, используемая для обработки, преобразования или передачи аналоговых сигналов - это физическое устройство или математическая модель, содержащая множество элементов, осуществляющих преобразование сигналов, и находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство. В составе системы всегда можно выделить *вход*, предназначенный для подачи исходных сигналов, и *выход*, откуда преобразованные сигналы поступают для дальнейшего использования. Обычно это иллюстрируется структурной схемой типа черного ящика (рис. 2.1).

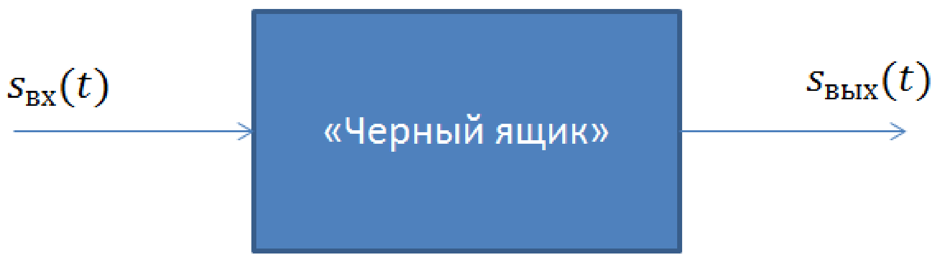


Рисунок 2.1 – *Структурная схема системы в виде «черного ящика»*

Линейными называются системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности [1, стр. 102]. Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются *нелинейными*.

Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, система называется *стационарной*, или системой с *постоянными параметрами*. В противном случае система называется *нестационарной*, *параметрической* или системой *с переменными параметрами*.

В данной работе мы будем рассматривать линейные стационарные системы.

Импульсная и переходная характеристики системы.

Линейность и стационарность позволяют легко найти реакцию системы на любой входной сигнал, зная всего одну функцию – реакцию системы на поданную на вход дельта-функцию [1, стр. 103]. Эта реакция, определяемая при нулевых начальных условиях, называется *импульсной характеристикой системы* и обозначается $h(t)$.

Выходной сигнал линейной системы с постоянными параметрами равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t')h(t-t')dt'. \tag{2.1}$$

Переходной характеристикой системы называют реакцию системы на поданную на вход функцию единичного скачка (функцию Хевисайда). Обозначается переходная характеристика как g(t). Так же как и импульсная характеристика, переходная характеристика определяется при нулевых начальных условиях.

Поскольку дельта-функция – это производная от единичного скачка, импульсная и переходная характеристики связаны друг с другом операциями дифференцирования и интегрирования:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad ; \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')dt'. \tag{2.2}$$

Любая физически реализуемая система обладает свойством *причинности* – выходной сигнал не может возникнуть раньше входного сигнала. Отсюда следует, что для физически реализуемой системы импульсная и переходная характеристики должны быть равны нулю при $t < 0$.

Системы, имеющие вещественную импульсную характеристику, называются *вещественными системами.*

Комплексный коэффициент передачи системы, АЧХ и ФЧХ системы.

Выходной сигнал линейной системы, как было показано ранее, представляет собой свертку (2.1) входного сигнала и импульсной характеристики. Преобразование Фурье [1, стр. 39] от свертки дает произведение спектров сворачиваемых сигналов, так что в частотной области прохождение сигнала через линейную систему описывается очень просто:

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega)\dot{K}(\omega). \qquad (2.3)$$

Здесь $\dot{K}(\omega)$ – преобразование Фурье импульсной характеристики системы $h(t)$. Функция $\dot{K}(\omega)$ называется *комплексным коэффициентом передачи системы* [1, стр. 105], а ее модуль $\left|\dot{K}(\omega)\right|$ и фаза $\arg\left(\dot{K}(\omega)\right)$ – соответственно *амплитудно-частотной* (АЧХ) и *фазочастотной* (ФЧХ) характеристиками системы.

Примечание. Значение $\dot{K}(\omega)$ показывает, как изменяется при прохождении через систему комплексная амплитуда $\dot{U} = Ae^{j\varphi}$ синусоиды $s(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ с известной частотой ω:

$$\dot{U}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{U}_{\text{вх}} \qquad (2.4)$$

АЧХ показывает, во сколько раз изменяется амплитуда синусоиды, а ФЧХ – каков будет полученный ею фазовый сдвиг.

Годограф.

Годограф – это траектория (рис. 2.2), которую описывает на комплексной плоскости коэффициент передачи системы при изменении частоты.

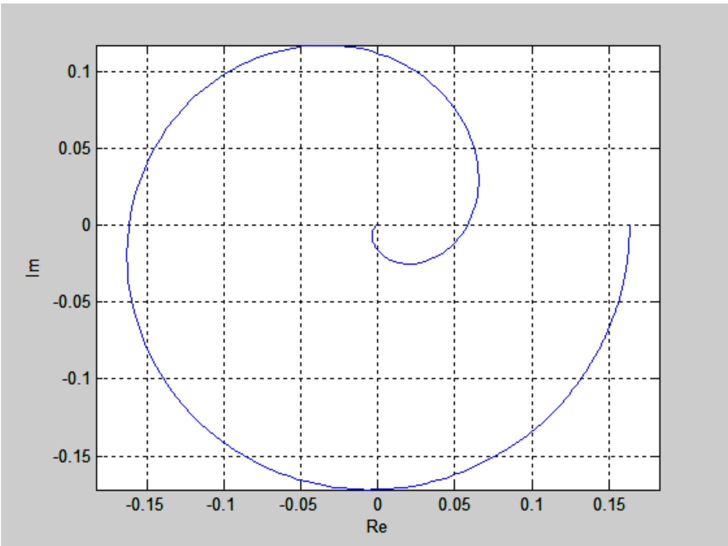


Рисунок 2.2 – *Годограф комплексного коэффициента передачи системы*

Годограф даёт наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу.

Способы описания линейных систем.

Линейные системы могут описываться несколькими эквивалентными формами, среди которых можно назвать:

- дифференциальное уравнение (ДУ);
- функция передачи в виде полиномов числителя и знаменателя (transfer function);
- функция передачи в виде множителей в числителе и знаменателе (zeros & poles);
- функция передачи в виде простых дробей (полюсы и вычеты);
- пространство состояний (state space).

Описание системы в виде ДУ.

При способе описания системы с помощью ДУ связь между входным и выходным сигналами линейной цепи может быть выражена в виде дифференциального уравнения вида

$$
\begin{aligned}
a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\
= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, a_i и b_i – постоянные коэффициенты. Должно выполняться неравенство $m \le n$, то есть максимальный порядок производной входного сигнала не может превышать максимального порядка производной выходного сигнала. Значение n называется *порядком* цепи.

Описание системы в виде полиномиальной функции передачи.

Если применить к обеим частям (2.5) преобразование Лапласа [1, стр. 109], получится выражение для функции передачи цепи (transfer function) в виде полиномов в числителе и знаменателе:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \qquad (2.6)$$

Здесь a_i и b_i – те же постоянные коэффициенты, что и в приведенном ранее ДУ. Таким образом, цепь описывается наборами коэффициентов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega)$ получается из функции передачи (2.6) путем подстановки комплексной частоты $s = j\omega$:

$$\dot{K}(s) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \qquad (2.7)$$

<u>Описание системы с помощью нулей и полюсов.</u>

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (2.6) на множители, мы получаем функцию передачи в следующем виде

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)}. \qquad (2.8)$$

Здесь k - *коэффициент усиления* (gain), z_i – *нули* функции передачи (zero), p_i – полюсы функции передачи (pole). В точках нулей функция передачи равна нулю $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов функция передачи стремится к бесконечности $H(p_i) \to \infty$. В данном случае цепь описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Для вещественных систем (у которых импульсная характеристика принимает вещественные значения) нули функции передачи являются вещественными либо составляют комплексно-сопряженные пары. То же относится и к полюсам. Коэффициент усиления таких систем всегда вещественный.

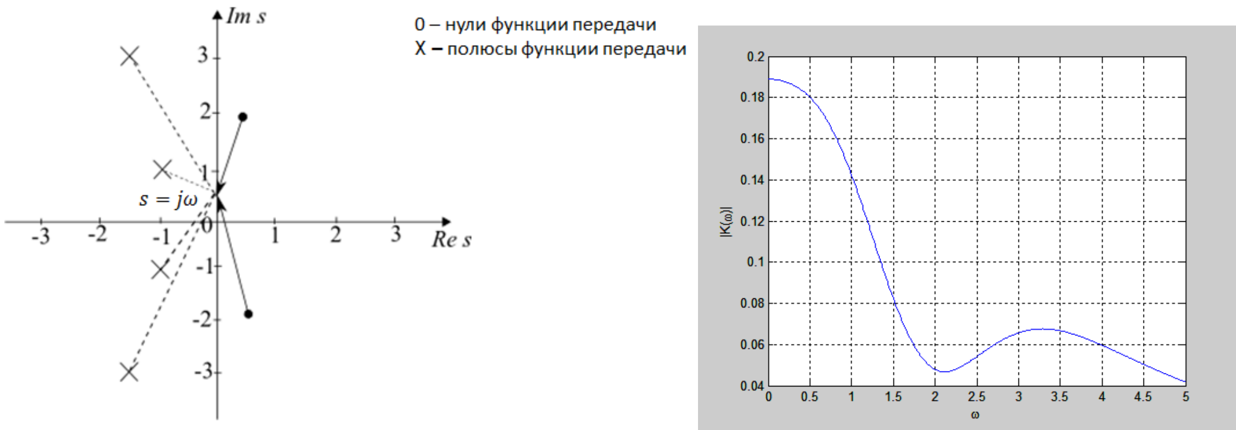
Формула (2.8) дает возможность наглядно показать, как влияет расположение нулей и полюсов на АЧХ цепи. Разности вида $(s - z_i)$, произведение которых дает числитель формулы, можно представить на комплексной плоскости в виде векторов, соединяющих точки z_i и точку $s = j\omega$, расположенную на мнимой оси (рис. 2.3, а). Аналогичным образом можно показать на комплексной плоскости и разности $(s - p_i)$, произведение которых дает знаменатель формулы.

При изменении частоты ω соответствующая точка $s = j\omega$ будет перемещаться вдоль мнимой оси, поэтому о поведении АЧХ системы можно сказать следующее (рис. 2.3, б):

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи от одного из нулей функции передачи z_i, соответствующая разность $(s - z_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *провал*. Если нуль лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет иметь нулевое значение.

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи одного из полюсов функции передачи p_i, соответствующая разность $(s - p_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *подъем*. Если полюс лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет стремиться к бесконечности.

- Чем ближе к мнимой оси расположен нуль (полюс), тем более выраженным будет соответствующий провал (подъем) АЧХ.



а) б)

Рисунок 2.3 – *Влияние нулей и полюсов на характер АЧХ системы. а) Графическое представление нулей и полюсов. б) График АЧХ системы.*

<u>Описание системы в виде полюсов и вычетов.</u>

Еще одним способом преобразования дробно-рациональной функции передачи является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных корней у знаменателя такое представление имеет следующий вид:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \cdots + \frac{r_1}{s - p_1} + C_0. \qquad (2.9)$$

Здесь p_i – полюсы функции передачи, а числа r_i называются *вычетами*. C_0 – целая часть функции передачи, отличная от нуля только в случае равенства степеней полиномов числителя и знаменателя.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{r_i\}$, $\{p_i\}$, C_0.

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет вычислить импульсную характеристику системы, поскольку каждое слагаемое функции передачи вида $\frac{r_i}{(s-p_i)}$ соответствует слагаемому импульсной характеристики вида

$$r_i e^{p_i t}, t \geq 0. \tag{2.10}$$

Понятие устойчивости системы.

Система называется *устойчивой*, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях

$$\lim_{t\to\infty} s_{\text{вых}}(t) = 0 \text{ при } s_{\text{вх}}(t) = 0. \tag{2.11}$$

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0. \tag{2.12}$$

Ранее показано, что импульсная характеристика системы в общем случае содержит слагаемые вида (2.10). Такие слагаемые при $t \to \infty$ затухают, если вещественная часть полюса p_i является отрицательной. Следовательно, линейная система является устойчивой тогда и только тогда, когда полюсы ее функции передачи лежат в левой комплексной полуплоскости

$$Re(p_i) < 0. \tag{2.13}$$

Описание системы с помощью пространства состояний.

Еще одним способом описания линейной цепи является ее представление в пространстве состояний (state space). При этом состояние цепи описывается *вектором состояния* $\boldsymbol{s}(t)$, а собственные колебания цепи и ее реакция на входной сигнал $x(t)$ характеризуются следующим образом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}'(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{B}x(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t) + Dx(t); \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица $N \times N$; $\boldsymbol{B}$ – столбец $N \times 1$; $\boldsymbol{C}$ – строка $1 \times N$; D – скаляр.

Фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ), режекторные (РФ).

Одной из часто возникающих на практике задач является создание систем, пропускающих сигналы в определенной полосе частот и задерживающих остальные частоты. Такие системы называются *фильтрами*. При этом различают фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и режекторные фильтры (РФ).

- Фильтры нижних частот (ФНЧ) – пропускают частоты меньше некоторой частоты среза ω_0;
- Фильтры верхних частот (ФВЧ) – пропускают частоты больше некоторой частоты среза ω_0;
- Полосовые фильтры (ПФ) - пропускают частоты в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$;
- Режекторные фильтры – пропускают все частоты, кроме частот в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Идеальная форма АЧХ фильтров этих четырех типов показана на рис. 2.4. Однако такая идеальная (прямоугольная) форма АЧХ не может быть физически реализована, практически реализуемые фильтры в той или иной мере аппроксимируют идеальные АЧХ.

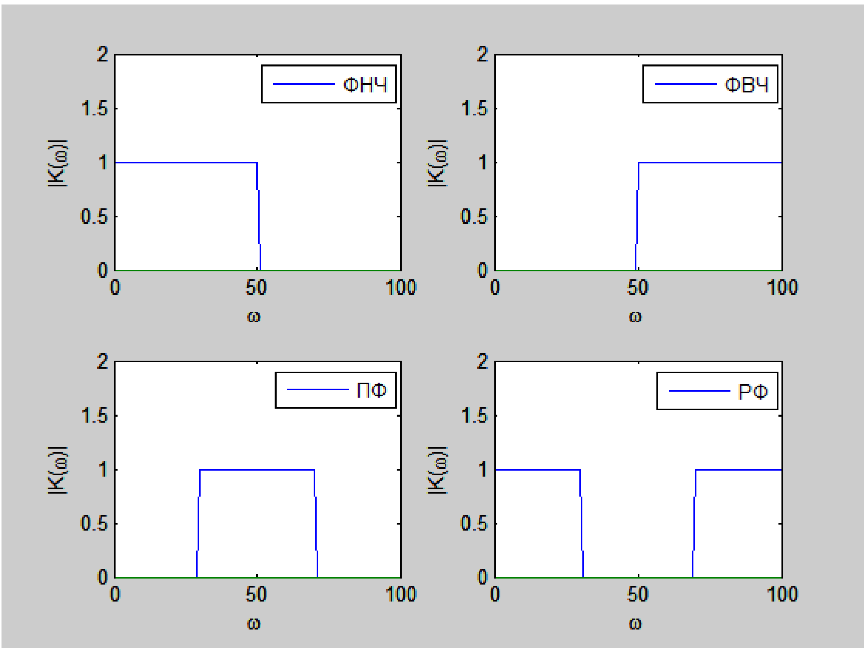


Рисунок 2.4 – *Идеальная форма АЧХ фильтров четырех типов*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет импульсной характеристики системы.

Запишите в конспекте номер своего варианта (варианты заданий приведены в конце данного задания) и форму представления линейной системы.

Запустите MATLAB и создайте новый M-файл (New File->Script). Занесите в M-файл параметры системы согласно вашему варианту задания.

Напишите код преобразования исходной формы представления системы в функцию передачи с полиномами в числителе и знаменателе (transfer function). В зависимости от варианта, используйте одну из следующих MATLAB-функций:

- `[b, a] = zp2tf(z, p, k)`
- `[b, a] = ss2tf(A, B, C, D)`

Выведите полученные коэффициенты в окно команд «Command Window» (функции MATLAB осуществляют вывод результатов в окно команд, если после вызова функции не ставить точку с запятой).

Используя формулу (2.6), запишите функцию передачи $H(s)$ с полученными коэффициентами в конспект. Сделайте вывод о степенях m и n полиномов соответственно числителя и знаменателя функции передачи (соблюдается ли условие $m \leq n$).

Получите функцию передачи в виде полюсов и вычетов. Для этого используйте следующую MATLAB-функцию:

- `[r, p, C0] = residue(b, a)`

Используя формулу (2.10), запишите в конспект выражение для импульсной характеристики системы $h(t)$.

В MATLAB допишите код для расчета значений импульсной характеристики.

Пример кода:

```
% Расчет значений импульсной характеристики системы
t = [0:0.01:10];  % вектор отсчетов времени
h = zeros(1, length(t)); % значения импульсной характеристики
for n=[1:length(r)]
    h = h + r(n).*exp(p(n).*t); % n-е слагаемое
end
```

Допишите код для построения графика импульсной характеристики системы. В случае если импульсная характеристика принимает комплексные значения, отобразите вещественную и мнимую части импульсной характеристики в отдельных координатных осях с помощью функции `subplot`. Для выделения действительной и мнимой частей комплексного числа используйте функции `real` и `imag`, соответственно.

Пример кода:

```
% Рисуем график импульсной характеристики
subplot(2, 1, 1);
plot(t, real(h));
grid on;
title('Вещественная часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Re(h(t))');
subplot(2, 1, 2);
plot(t, imag(h));
grid on;
title('Мнимая часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Im(h(t))');
```

Используя выражение (2.12) и полученные графики, сделайте вывод об устойчивости системы по характеру затухания ее импульсной характеристики.

Занесите полученный график действительной части импульсной характеристики в конспект. Покажите результат преподавателю.

<u>2. Нули и полюсы системы.</u>

Допишите код для построения графика нулей и полюсов системы. Для расчета нулей и полюсов системы при необходимости (в зависимости от варианта) используйте функцию `ss2zp`. Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба графика по осям X и Y.

Пример кода:

```
% рисуем нули и полюсы системы
figure
[z, p, k] = <<при необходимости рассчитайте нули и полюсы>>
plot(p, 'x')            % График расположения полюсов
hold on;
plot(z, 'o');           % График расположения нулей
hold off;
axis equal;             % Равный масштаб по осям
grid on;
axis([-5 5 -5 5]); % Область охвата графика
```

Занесите полученный график в конспект.

По расположению нулей и полюсов сделайте предположения о виде АЧХ (в каких областях частот будут наблюдаться подъемы, провалы, разрывы и т.д.). Для этого используйте сведения из теоретической части и рис. 2.3.

По расположению полюсов на комплексной плоскости сделайте вывод об устойчивости системы.

Покажите результат преподавателю.

3. Расчет комплексного коэффициента передачи.

Допишите код для расчета комплексного коэффициента передачи системы. Используйте MATLAB-функцию `freqs`. Диапазон частот для анализа задайте самостоятельно (включите в него нулевую частоту, бесконечность и 500 логарифмически равномерно распределенных частот в диапазоне $[10^{-2};\ 10^{2}]$).

Пример кода:

```
% расчет комплексного коэффициента передачи
w = [0 logspace(-2, 2, 500) inf]; % вектор частот для анализа
K = freqs(b, a, w); % комплексный коэффициент передачи
```

Постройте годограф (график кривой, описываемой комплексным коэффициентом передачи на комплексной плоскости при изменении частоты). Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба по осям X и Y.

Пример кода:

```
% построение годографа
figure;
plot(K)
% выравнивание масштаба осей
axis equal
grid on
xlabel('Re');
ylabel('Im');
```

Занесите полученный график в конспект. Покажите результат преподавателю.

4. Расчет АЧХ и ФЧХ системы.

Допишите код для расчета АЧХ и ФЧХ системы, используя сведения из теоретической части. Для выделения модуля и аргумента комплексного числа используйте соответственно функции `abs` и `angle`.

Пример кода.

```
% расчет АЧХ и ФЧХ системы
K_amp = abs(K);      % АЧХ
K_phase = angle(K); % ФЧХ
```

Постройте графики АЧХ и ФЧХ.

Пример кода:

```
% рисуем графики АЧХ и ФЧХ
figure
subplot(2, 1, 1);
plot(w, K_amp);
title('Амплитудно-частотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('|K(\omega)|');
subplot(2, 1, 2);
plot(w, K_phase);
title('Фазочастотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('arg(K(\omega))');
```

Сделайте вывод, совпадает ли форма АЧХ на графике с теми предположениями, которые вы сделали на этапе 2?

Устраните скачки ФЧХ с помощью функции `unwrap`. Чем обусловлены эти скачки?

Пример кода:

```
K_phase = unwrap(K_phase); % устранение скачков в ФЧХ
```

Снова запустите программу и сделайте вывод о том, что произошло с графиком ФЧХ.

По виду графика АЧХ сделайте вывод о том, какому типу фильтров можно отнести вашу систему (ФНЧ, ФВЧ, РФ или ПФ).

Занесите полученные графики АЧХ и ФЧХ в конспект. Покажите результат преподавателю.

Варианты заданий.

1-й вариант

Система задана формой представления «нули и полюсы»:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 + 0.5j \\ 2 - 0.5j \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -3 + 2j \\ -3 - 2j \\ -1 + 1j \\ -1 - 1j \end{bmatrix}$$

$$k \ = 1$$

2-й вариант

Система задана формой представления «пространство состояний»:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -20 & -14.1421 & 0 & 0 \\ 14.1421 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -13.2229 & -12 & -20.8806 \\ 0 & 0 & 20.8806 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0479 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Контрольные вопросы.

1. Понятие и классификация аналоговых систем.
2. Импульсная и переходная характеристики системы.
3. Комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ. Годограф.
4. Способы описания линейных систем.
5. Понятие устойчивости линейной системы.
6. Понятие ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ.

Лабораторная работа №3. Дискретные фильтры.

Цель работы. Получить практические навыки расчета и анализа временных (импульсной и переходной) характеристик и частотных (АЧХ, ФЧХ, фазовой и групповой задержки) характеристик дискретных фильтров. Познакомиться с функциями среды MATLAB для дискретной фильтрации, преобразования форм представления дискретных фильтров, расчета и построения графиков временных и частотных характеристик дискретных систем.

Теоретические сведения.

Понятие дискретного фильтра.

Дискретный фильтр [1, стр. 218] – это произвольная система (рис. 3.1) обработки дискретного сигнала, обладающая свойствами линейности и стационарности:

- *Линейность*: выходная реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы;
- *Стационарность*: задержка входного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы.

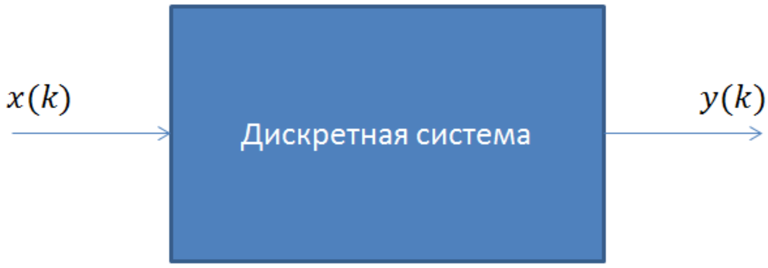


Рисунок 3.1 – *Дискретный фильтр*

В общем случае дискретный фильтр суммирует (с весовыми коэффициентами) некоторое количество входных отсчетов $x(k-i)$ и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов $y(k-j)$. Данная формула называется *алгоритмом дискретной фильтрации*:

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \cdots + b_mx(k-m) - a_1y(k-1) - \cdots - a_ny(k-n), \quad (1)$$

где a_j, b_i - вещественные коэффициенты.

Предыдущие выходные отсчеты могут и не использоваться при расчетах, тогда все $a_i = 0$ и фильтр называется *нерекурсивным*. Если предыдущие выходные отсчеты используются, фильтр называется *рекурсивным*.

Максимальное из чисел m и n называется *порядком фильтра*.

Если по-иному сгруппировать слагаемые в формуле (3.1), чтобы с одной стороны от знака равенства были только входные отсчеты, а с другой – только выходные, получим формулу, называемую *разностным уравнением*:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m). \tag{3.2}$$

Способы описания дискретных систем.

Для дискретных систем имеются следующие формы представления:

- Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи системы (transfer function);
- Нули, полюсы и коэффициент усиления системы (разложение функции передачи на множители, zeros & poles);
- Полюсы и вычеты (представление функции передачи системы в виде суммы простых дробей);
- Параметры пространства состояний (state space);
- Представление в виде набора последовательно (каскадно) включенных секций второго порядка (second order sections).

Описание системы с помощью функции передачи.

Применив z-преобразование [1, стр. 173] к обеим частям разностного уравнения (3.2), можно получить выражение для функции передачи системы $H(z)$:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}. \tag{3.3}$$

Таким образом, функция передачи [1, стр. 224] *физически реализуемой* дискретной системы может быть представлена в виде отношения полиномов по отрицательным степеням переменной z.

В данном случае система описывается набором параметров $\{b_i\}$, $\{a_i\}$.

Временные характеристики системы.

К временным характеристикам дискретной системы относятся импульсная и переходная характеристики системы.

Выходная реакция системы на единичный импульс $x_0(k) = \begin{cases} 1, \ k = 0 \\ 0, \ k \neq 0 \end{cases}$, определяемая при нулевых начальных условиях, называется импульсной характеристикой дискретной системы [1, стр. 222] и обозначается $h(k)$. Для *физически реализуемой* системы $h(k) = 0$ при $k < 0$.

Знание импульсной характеристики позволяет проанализировать прохождение через дискретную систему любого сигнала. Выходной сигнал, исходя из линейности и стационарности системы, должен представлять собой дискретную линейную свертку входного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{k} x(m)h(k-m). \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) называется *уравнением дискретной фильтрации*.

Реакция системы на поданный на вход единичный скачок $x(k) = \begin{cases} 0, \ k < 0 \\ 1, \ k \geq 0 \end{cases}$ называется *переходной характеристикой* системы.

Импульсная характеристика нерекурсивных и рекурсивных фильтров.

Для нерекурсивного фильтра импульсная характеристика определяется очень просто [1, стр. 245]:

$$h(k) = b_k, \tag{3.5}$$

где b_k – коэффициенты числителя функции передачи.

Очевидно, что функция передачи содержит конечное число коэффициентов, поэтому импульсная характеристика нерекурсивного фильтра также является конечной по длительности. Поэтому нерекурсивные фильтры еще называют фильтрами с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ-фильтрами) или FIR-фильтрами (Finite Impulse Response, FIR).

Импульсная характеристика рекурсивного фильтра [1, стр. 248] рассчитывается значительно сложнее, чем для нерекурсивного, что обусловлено наличием обратных связей (использованием в расчетах предыдущих выходных отсчетов сигнала).

Наличие в схеме обратных связей позволяет получить бесконечную импульсную характеристику, поэтому рекурсивные фильтры называют также фильтрами с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-фильтрами, Infinite Impulse Response, IIR).

Частотная характеристика системы.

Получить комплексный коэффициент передачи (частотную характеристику) дискретной системы, можно, применив к формуле (3.3) соотношение [1, стр. 175], связывающее z-преобразование и преобразование Фурье. Тогда комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega)$ запишется в виде

$$\dot{K}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-j\omega kT}, \tag{3.6}$$

где T – шаг дискретизации.

Из формулы (3.6) видно, что частотная характеристика дискретной системы, так же как и спектр дискретизованного сигнала, является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_{д} = 2\pi/T$.

Модуль $\left|\dot{K}(\omega)\right|$ и фаза $\varphi_k(\omega) = \arg\left(\dot{K}(\omega)\right)$ комплексного коэффициента передачи называются соответственно *амплитудно-частотной* (АЧХ) и *фазочастотной* (ФЧХ) характеристиками системы.

Фазовая и групповая задержки системы.

При преобразовании сигнала линейной дискретной системой различают два вида задержки [1, стр. 105]. *Фазовая задержка* (phase delay) на частоте ω – это задержка гармонического колебания с частотой ω, проходящего через систему. Значение фазовой задержки равно фазовому сдвигу, вносимому системой, деленному на частоту гармонического колебания, с обратным знаком:

$$\tau_{\Phi}(\omega) = -\frac{\varphi_K(\omega)}{\omega}, \tag{3.7}$$

где $\varphi_K(\omega)$ – ФЧХ системы.

Групповая задержка (group delay) на частоте ω – это задержка огибающей узкополосного сигнала со средней частотой ω. Групповая задержка равна производной от ФЧХ системы с обратным знаком:

$$\tau_{\text{гр}} = -\frac{d\varphi_K(\omega)}{d\omega}. \qquad (3.8)$$

<u>Описание системы с помощью нулей и полюсов.</u>

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (3.3) на множители, мы получим функцию передачи в следующем виде [1, стр. 225]:

$$H(z) = k\frac{(1 - z_1z^{-1})(1 - z_2z^{-1})\dots(1 - z_mz^{-1})}{(1 - p_1z^{-1})(1 - p_2z^{-1})\dots(1 - p_nz^{-1})}, \qquad (3.9)$$

где $k = b_0$ - коэффициент усиления (gain); z_i - нули функции передачи; p_i - полюсы функции передачи.

В точках нулей функция передачи равна нулю $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов стремится к бесконечности $H(p_i) \to \infty$.

В данном случае система описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

По расположению нулей и полюсов на комплексной плоскости мы можем предсказать приблизительную форму АЧХ системы. При расчете частотной характеристики точка, изображающая аргумент функции передачи на комплексной плоскости, движется по единичной окружности (рис. 3.2, а).

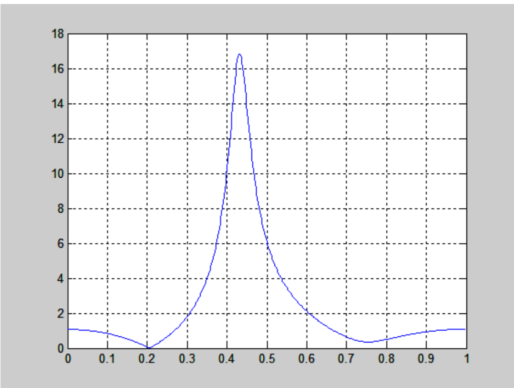


Рисунок 3.2 – *Связь нулей и полюсов функции передачи с формой АЧХ системы*

Следовательно (рис. 3.2, б):

- когда точка $z = \exp(j\omega T)$ находится вблизи одного из нулей функции передачи z_i, соответствующая разность $(z - z_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь провал. Если нуль лежит на единичной окружности, АЧХ на соответствующей частоте будет иметь нулевое значение.
- когда точка $z = \exp(j\omega T)$ находится вблизи от одного из полюсов фукнции передачи p_i, соответствующая разность $(z - p_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь подъем. Если полюс лежит на единичной окружности, АЧХ на соответствующей частоте будет стремиться к бесконечности.
- чем ближе к единичной окружности расположен нуль (полюс), тем более выраженным будет соответствующий провал (подъем) АЧХ.

<u>Описание системы с помощью полюсов и вычетов.</u>

Представим дробно-рациональную функцию передачи (3.3) в виде суммы простых дробей [1, стр. 230]:

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \cdots + \frac{r_n}{1 - p_n z^{-1}} + k_0 + k_1 z^{-1} + \cdots + k_{m-n} z^{-(m-n)}. \qquad (3.10)$$

Здесь p_i и r_i – *полюсы* функции передачи и соответствующие им *вычеты*. Поскольку на соотношение степеней *m* и *n* полиномов числителя и знаменателя в дискретном случае не накладывается никаких ограничений, целая часть функции передачи, представленная коэффициентами k_i, может содержать не только константу.

В данном случае система описывается набором параметров $\{r_i\}$, $\{p_i\}$, $\{k_i\}$.

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей (10) позволяет вычислить импульсную характеристику системы, поскольку каждое слагаемое функции передачи вида $\frac{r_i}{1-p_i z^{-1}}$ соответствует экспоненциальному слагаемому импульсной характеристики вида

$$r_i p_i^k,\ k \geq 0. \qquad (3.11)$$

<u>Устойчивость дискретной системы.</u>

При отсутствии входного сигнала в дискретной системе могут существовать *свободные колебания*. Их вид зависит от начальных условий, то есть значений, хранящихся в элементах памяти системы в момент отключения входного сигнала.

Система называется устойчивой [1, стр.231], если при любых начальных условиях свободные колебания являются затухающими, то есть выполняется выражение

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0 \text{ при } x(k) = 0. \tag{3.12}$$

Условие (3.12) эквивалентно условию затухания импульсной характеристики системы $h(k)$:

$$\lim_{k\to\infty} h(k) = 0. \tag{3.13}$$

Ранее было показано, что импульсная характеристика системы содержит слагаемые вида $r_i p_i^k$. Такие слагаемые при $k \to \infty$ затухают, если полюс p_i по модулю меньше единицы:

$$|p_i| < 1. \tag{3.14}$$

То есть, для устойчивой системы полюсы функции передачи должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.

Описание системы с помощью пространства состояний.

Сущность представления дискретной системы в пространстве состояний заключается в следующем. Имеется вектор параметров, описывающих внутреннее состояние системы, и две формулы, согласно которым производится изменение этого состояния и формирование выходного сигнала:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{s}(k+1) = \boldsymbol{As}(k) + \boldsymbol{B}x(k) \\ y(k) = \boldsymbol{Cs}(k) + Dx(k) \end{gathered} \tag{3.15}$$

где $\boldsymbol{s}(k)$ – вектор состояния; $x(k)$ и $y(k)$ – соответственно отсчеты входного и выходного сигналов; **A**, **B**, **C**, D – параметры, описывающие систему.

Описание системы с помощью секций второго порядка.

Разбиение структуры фильтра на последовательно (каскадно) включенные блоки [1, стр. 253] часто используется на практике. Для создания последовательной реализации системы достаточно рассчитать ее нули и полюсы, после чего представить систему в виде каскадно соединенных звеньев первого порядка.

Однако часть этих звеньев (или все) может оказаться с комплексными коэффициентами. По этой причине при каскадной реализации вещественных фильтров их делят на секции второго порядка (second order sections, SOS). При этом пары комплексно-сопряженных нулей и полюсов объединяются и образуют каскады второго порядка.

Преимуществом таких каскадов перед звеньями первого порядка с комплексными коэффициентами является меньшее количество операций, которые необходимо выполнить для расчета значений выходного сигнала.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть имеется функция передачи системы в виде полиномов числителя и знаменателя:

$$H(z) = \frac{0{,}0985 + 0{,}2956z^{-1} + 0{,}2956z^{-2} + 0{,}0985z^{-3}}{1 - 0{,}5772z^{-1} + 0{,}4218z^{-2} - 0{,}0563z^{-3}}.$$

Раскладывая ее на множители и преобразуя комплексно сопряженные пары во множители второго порядка, получаем каскадную форму представления системы в виде секций второго порядка:

$$H(z) = \frac{0{,}0985(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0{,}1584z^{-1})(1 - 0{,}4188z^{-1} + 0{,}3554z^{-2})}.$$

Порядок выполнения работы.

1. Вычисление дискретной свертки.

Запишите в конспекте номер своего варианта (варианты заданий приведены в конце данного задания) и форму представления дискретной системы.

Запустите MATLAB и создайте новый М-файл (New File->Script). Занесите в М-файл параметры системы согласно вашему варианту задания.

Преобразуйте исходное описание системы в функцию передачи (transfer function), заданную коэффициентами полиномов числителя и знаменателя `[b, a] = ss2tf(A, B, C, D)`. Если для вашего варианта система изначально задана в виде функции передачи, то делать это преобразование не нужно.

Запишите в конспект формулу для функции передачи вашей системы (используйте формулу (3.3)). Определите по виду функции передачи, является ли ваша система рекурсивным фильтром или нерекурсивным фильтром? Определите порядок фильтра.

Получите нерекурсивный фильтр, отбросив знаменатель функции передачи системы.

Воспользовавшись сведениями из раздела «Импульсная характеристика нерекурсивных и рекурсивных фильтров» теоретической части, запишите в конспект выражение для импульсной характеристики $h(t)$ полученного нерекурсивного фильтра.

Сделайте вывод о том, является ли полученная импульсная характеристика конечной или бесконечной?

Напишите код MATLAB для расчета выходных значений $y(t)$ сигнала при прохождении через полученный нерекурсивный дискретный фильтр входного сигнала, заданного вектором $x = [1\ 2\ 3\ 4\,]$. Используйте функцию дискретной линейной свертки `conv`.

Пример кода:

```
% Вычислим дискретную свертку входного сигнала и импульсной характеристики
% нерекурсивного фильтра
x = [1 2 3 4]; % Входной сигнал
h = <<выражение для h>>; % Импульсная характеристика
% Вычисляем отсчеты выходного сигнала
y = conv(x, h)             % Вычисляем дискретную свертку
```

Обратите внимание, что функция `conv` вернула на выходе больше отсчетов выходного сигнала, чем было подано на вход. Чем можно это объяснить?

Постройте график выходного сигнала, используя функцию `stem`.

Пример кода:

```
% Строим график выходного сигнала
stem(y);
title('Выходной сигнал нерекурсивного фильтра');
xlabel('k');
ylabel('y(k)');
```

Помимо функции `conv`, для вычисления дискретной свертки можно воспользоваться функцией `filter`, формат вызова которой следующий: `[y, s] = filter(b, a, x)`.

Функция `filter` предоставляет больше возможностей, в том числе позволяет производить блочную обработку сигнала (помимо выходного сигнала `y` она возвращает внутреннее состояние `s` фильтра, которое можно подать на вход при последующих вызовах функции `filter`). Также она не требует знания импульсной характеристики, так как принимает на вход коэффициенты `b` и `a` полиномов функции передачи.

Теперь вернемся к исходному рекурсивному фильтру и рассчитаем для него значения выходного сигнала, в два этапа, используя функцию `filter`. На первом этапе рассчитайте значения выходного сигнала, подав на вход вектор $x = [1\ 2\ 3\ 4\ ]$.

Пример кода:

```
% Расчет значений выходного сигнала для рекурсивного фильтра.
% Подаем на вход первую порцию значений сигнала, а на выходе получаем
% значения выходного сигнала и внутреннее состояние системы.
[y1, s] = filter(b, a, x);
```

Обратите внимание, что функция `filter` вернула вторым выходным параметром внутреннее состояние системы, и его можно применить для обработки последующих отсчетов сигнала. Подайте на вход фильтра вторую порцию отсчетов сигнала $x2 = [5\ 4\ 3\ 2]$ и внутреннее состояние системы `s`, а на выходе получите вторую порцию значений отсчетов выходного сигнала и постройте график всех отсчетов выходного сигнала.

Пример кода:

```
% Теперь подаем на вход вторую порцию входных значений сигнала и полученное
% ранее внутреннее состояние системы.
x2 = [5 4 3 2];
y2 = filter(b, a, x2, s);
y = [y1 y2]; % объединяем порции выходного сигнала
figure
stem(y); % рисуем график всех значений выходного сигнала
title('Выходной сигнал рекурсивного фильтра');
xlabel('k');
ylabel('y(k)');
```

Покажите результат преподавателю.

<u>2. Расчет временных характеристик системы.</u>

Рассчитайте импульсную характеристику рекурсивного фильтра, используя функцию `impz`. Нарисуйте график полученной импульсной характеристики с помощью функции `stem`.

Пример кода:

```
% Расчет импульсной характеристики рекурсивного фильтра
h = impz(b, a);
figure
stem(h);
title('Импульсная характеристика рекурсивного фильтра');
xlabel('k');
ylabel('h(k)');
```

Схематично занесите полученный график импульсной характеристики системы в конспект.

Получите переходную характеристику системы, подав на вход последовательность единичный отсчетов и рассчитав выходные значения сигнала с помощью функции `filter`. Для задания единичных отсчетов удобно воспользоваться функцией `ones`, которая заполняет матрицу единицами.

Пример кода:

```
% Расчет переходной характеристики фильтра
g = filter(b, a, ones(1,20))
```

В MATLAB для расчета переходной характеристики предусмотрена функция `stepz`, которая делает то же самое. Убедитесь в этом, рассчитав переходную характеристику с помощью функции `stepz` и сравнив результаты.

Пример кода:

```
g2 = stepz(b, a)
```

Постройте график переходной характеристики системы.

Пример кода:

```
figure
stem(g); % Рисуем график
title('Переходная характеристика рекурсивного фильтра');
xlabel('k');
ylabel('g(k)');
```

Схематично занесите график переходной характеристики системы в конспект. Покажите результат преподавателю.

3. Нули и полюсы фильтра.

Рассчитайте нули и полюсы рекурсивного фильтра с помощью функции `tf2zp`. Обратите внимание, что `tf2zp` требует, чтобы длины входных векторов `b` и `a` совпадали. Если в вашем случае длины не совпадают, для выравнивания длин воспользуйтесь функцией `eqtflength`.

Пример кода:

```
% Нули и полюсы фильтра
[b1, a1] = eqtflength(b, a); % Выравниваем длину числителя и знаменателя
[z, p, k] = tf2zp(b1, a1) % Расчет нулей и полюсов
```

Постройте график нулей и полюсов фильтра на комплексной z-плоскости, используя MATLAB функцию `zplane`.

Пример кода:

```
% Рисуем график нулей и полюсов
figure
zplane(z, p)
```

Занесите график нулей и полюсов в конспект.

Используя формулу (3.14), сделайте вывод о том, является ли система устойчивой.

По полученному графику нулей и полюсов зарисуйте в конспекте приблизительную форму АЧХ. Для этого воспользуйтесь сведениями из раздела «Нули и полюсы системы» теоретической части и рис. 3.2.

Покажите результат преподавателю.

4. Расчет частотных характеристик системы.

Используя MATLAB-функцию `freqz`, рассчитайте комплексный коэффициент передачи и АЧХ системы. При расчете функция `freqz` использует частоты, измеряемые в радианах на отсчет (при такой нормировке частота Найквиста равна π).

Для задания вектора частот для анализа используйте 512 точек, распределенных равномерно в интервале от 0 до частоты Найквиста. Для этого удобно воспользоваться функцией freqspace (функция freqspace возвращает нормированные частоты в интервале от нуля до единицы, поэтому их необходимо умножить на π перед подачей в функцию freqz).

Пример кода:

```
w = freqspace(2*512); % Формируем вектор частот
K = freqz(b, a, w*pi); % Комплексный коэффициент передачи
K_amp = abs(K); % Расчет АЧХ
```

Постройте график АЧХ фильтра в децибелах (такой график еще называют логарифмической АЧХ или ЛАЧХ). Для пересчета АЧХ в децибелы используйте формулу $\text{ЛАЧХ} = 20\lg(\text{АЧХ})$. По оси частот отложите нормализованные частоты в интервале от нуля до единицы.

Пример кода:

```
% Рисуем график АЧХ
K_amp = 20*log10(K_amp); % Преобразуем АЧХ в децибелы
figure
plot(w, K_amp); % рисуем график АЧХ
title('АЧХ фильтра');
xlabel('Нормализованная частота (x\pi рад/отсчет)');
ylabel('АЧХ фильтра (дБ)');
grid on
```

Рассчитайте ФЧХ системы с помощью функции phasez (функция phasez построит график автоматически, если не задавать для нее выходных параметров).

Пример кода:

```
% Расчет ФЧХ фильтра
figure
phasez(b, a)
```

Чем можно объяснить отсутствие скачков на графике ФЧХ?

Занесите полученные графики АЧХ и ФЧХ в конспект.

Рассчитайте фазовую и групповую задержки системы, используя соответственно функции phasedelay и grpdelay. Данные функции построят графики автоматически, если не указать их выходные параметры.

Пример кода:

```
% Расчет фазовой задержки фильтра
figure
phasedelay(b, a)

% Расчет групповой задержки фильтра
figure
grpdelay(b, a)
```

Схематично занесите полученные графики в конспект.

Используйте визуализатор фильтров (функция `fvtool`) для просмотра графиков временных и частотных характеристик фильтра: импульсной и переходной характеристик, АЧХ, ФЧХ, нулей и полюсов, фазовой и групповой задержек.

Пример кода:

```
% Визуализатор фильтров
fvtool(b, a)
```

Сравните полученные ранее графики с теми, которые отображает визуализатор фильтров (результаты должны совпадать).

Покажите результат преподавателю.

5. Представление системы в виде секций второго порядка.

Найдите представление системы в виде секций второго порядка (second order sections). Воспользуйтесь функцией `zp2sos`.

Пример кода:

```
% Преобразование фильтра в каскад секций второго порядка
sos = zp2sos(z, p)
```

Выведите полученную матрицу `sos` на экран. Матрица `sos` представляет собой набор 6-столбцовых строк, каждая строка соответствует одной секции и устроена следующим образом:

$$[b_0\ b_1\ b_2\ 1\ a_1\ a_2].$$

Такой строке соответствует функция передачи

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Используя сведения из теоретической части и полученную матрицу `sos`, запишите вид функции передачи для своей системы. Покажите результат преподавателю.

Варианты заданий.

<u>1-й вариант</u>

Система задана формой представления «пространство состояний»:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3.5 & 3 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$D = 1$$

<u>2-й вариант</u>

Система задана формой представления «функция передачи»:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы.

1. Понятие дискретного фильтра.
2. Рекурсивные и нерекурсивные дискретные фильтры.
3. Временные характеристики дискретных систем.
4. Частотные характеристики дискретных систем.
5. Способы описания дискретных систем.
6. Понятие устойчивости дискретной системы.

Литература.

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов : Учебник для ВУЗов. 2-е издание. – Спб.: Питер, 2006. – 751 с.: ил.