Лекция 8
Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Многие процессы, происходящие в природе, технике, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называются периодическими.

Простейший периодический процесс– гармоническое колебание– описывается периодическими функциями $\sin\omega x, \cos\omega x$. Более сложные периодические процессы описываются функциями, составленными из конечного либо бесконечного числа слагаемых вида $\sin\omega x, \cos\omega x$

Определение. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

называется ***тригонометрическим рядом.***

Свойства тригонометрических рядов

1) Если ряд (1) сходится, то его сумма периодическая функция f(x) с периодом 2π, т.к. $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π. $f(x)=f(x+2\pi)$

2) Интеграл по отрезку $[-\pi;\pi]$ от произведения любых 2-х различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по $[-\pi;\pi]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+n)x+\cos(k-n)x dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-n)x-\cos(k+n)x dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx=\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx=\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos kx dx=0$$

Теорема. Если функция $f(x)$ определенная и непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad , \quad (1)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственное.

Проинтегрируем (1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx) = \frac{a_0}{2}(\pi + \pi) = a_0\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (2)$$

Для нахождения коэффициента a_k при $\cos kx$ умножим равенство (1) на $\cos kx$ и проинтегрируем по х на интервале $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nxdx) =$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = a_k\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \qquad (3)$$

Аналогично, умножая равенство (1) на $\sin kx$ и интегрируя его, получим

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \qquad (4)$$

Т.е. коэффициенты a_0, a_k, b_k определяются единственным образом

Определение. Пусть функция $f(x)$, определенная и интегрируемая на отрезке$[-\pi;\pi]$. Тогда числа a_0, a_n, b_n, найденные по формулам (2), (3), (4) называются коэффициентами Фурье, а ряд (1) с этими коэффициентами называется ***рядом Фурье***.

Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле

Если периодическая с периодом $T = 2\pi$ функция $f(x)$ на замкнутом интервале $[-\pi;\pi]$ кусочно -монотонна (имеет конечное число точек экстремума) и кусочно-непрерывна (имеет конечное число точек разрыва первого рода), то ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится при всех значениях x. Сумма ряда равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности, в точке x_0 разрыва первого рода сумма ряда равна среднему арифметическому левого и правого пределов ($S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$). На концах отрезка $[-\pi;\pi]$ $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов $f(x)$ при стремлении x к концам интервала изнутри интервала ($S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$).

Замечание. Если функция $f(x)$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то для нее имеет место разложение (1), где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx$$

Ряд Фурье для функций с периодом $2l$

В ряд Фурье можно разлагать функции, период которых отличен от 2π. Пусть функция $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$ и на отрезке $(-l;l)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Разложим ее в ряд Фурье.

$$f(x)=f(x+2l)$$

$$\text{Пусть } x=\frac{lt}{\pi}$$

$$\text{Рассмотрим функцию } \varphi(t)=f(\frac{lt}{\pi})=f(x)-\text{периодическая с периодом } 2\pi,$$

$$\text{определенная на отрезке } [-\pi;\pi]$$

$$-l<x<l \text{ при } t=\frac{x\pi}{l}$$

$$-\pi<t<\pi$$

$$\varphi(t+2\pi)=f(\frac{l}{\pi}(t+2\pi))=f(\frac{lt}{\pi}+2l)=f(\frac{lt}{\pi})=\varphi(t)$$

$$\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)=f(x)$$

Разложим функцию $\varphi(t)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt$$

Т.к. $x=\frac{lt}{\pi} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\pi x}{l} \quad dt=\frac{\pi}{l}dx$

Получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}).$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Учтем, что $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$, если $f(x)$ – четная и $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$, если $f(x)$ – нечетная функция.

1. Пусть $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x)=f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\quad b_n=0;$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

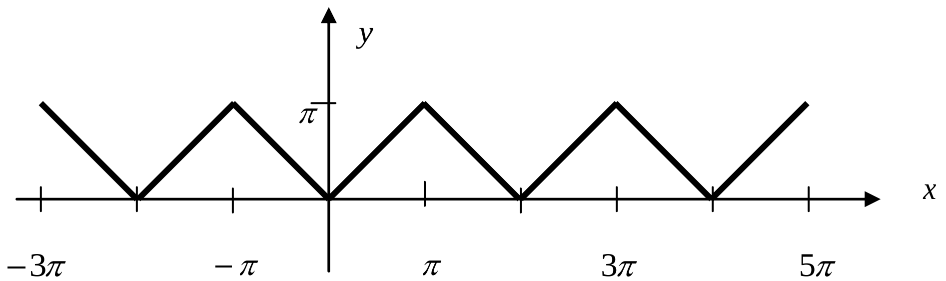
2. Пусть $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$.

$$a_0=a_n=0;\quad b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на $[-\pi;\pi]$, $f(x\pm 2\pi)=f(x)$.

Решение. Построим график функции $f(x)=|x|$:



На отрезке $[-\pi;\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. $f(x)$ – четная функция.

Вычислим $a_0=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} xdx=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi;$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nxdx=\left\{\begin{matrix} u=x \\ dv=\cos nxdx\end{matrix}\left|\begin{matrix} du=dx \\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1),\qquad n=1,2,3,\ldots;\quad b_n=0$$

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx.$$

Распишем этот ряд подробно:

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{1^2}\cos x-\frac{2}{3^2}\cos 3x-\frac{2}{5^2}\cos 5x-\ldots\right)=$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^3}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Полезно заметить, что полученное разложение (как и вообще другие разложения в ряд Фурье) служит источником формул сумм некоторых числовых рядов. Подставим в полученное разложение значение $x=0$. Получим

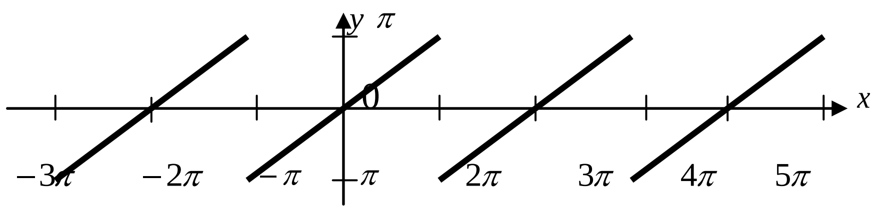
$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots) .$$

Отсюда $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$, т.е. получили сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Отметим, что графики функций $f(x)$ и $S(x)$ в данном случае совпадают.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на $[-\pi;\pi]$, $f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

Решение

Построим график функции $f(x) = x$:



На отрезке $[-\pi;\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. $f(x)$ – нечетная функция. Поэтому $a_0 = a_n = 0$, вычислим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = \sin nx dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right. \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx) = \frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{4}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}) =$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

Графики функций $y = f(x)$ и $y = S(x)$ для данной функции отличаются друг от друга.

Вычислим $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$

Заметим, что ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы, а нечетной – только синусы.

РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ПОЛОВИНЕ ПЕРИОДА

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$. Дополняя определение этой функции на отрезок $[-l;0]$ произвольным образом (сохраняя кусочно монотонность), мы можем разложить эту функцию в ряд Фурье.

В частности, мы можем дополнить определение этой функции на $[-l;0]$ следующими способами:

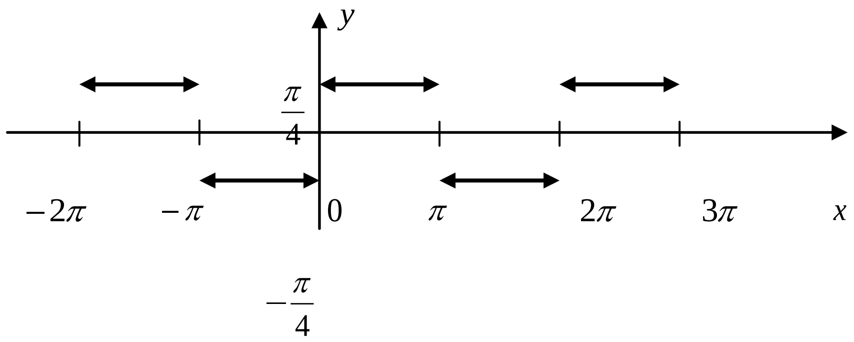
1. Принять, чтобы $f(-x)=f(x)$, тогда говорят, что функция продолжена четным образом. Её ряд Фурье будет содержать только косинусы. Таким образом, заданную на $[0;l]$ функцию $f(x)$ мы разложим по косинусам.

2. Принять, чтобы $f(-x)=-f(x)$, тогда говорят, что функция продолжена нечетным образом. Её ряд Фурье будет содержать только синусы. Таким образом, заданную на $[0;l]$ функцию $f(x)$ мы разложим по синусам.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\frac{\pi}{4}$ в интервале $(0;\pi)$.

Решение

Построим график функции $f(x)=\frac{\pi}{4}$ в интервале $(0;\pi)$, а затем продолжим её в интервале $(-\pi;0)$ нечетным образом.



На интервале $(-\pi;\pi)$ функция удовлетворяет условиям Дирихле. $a_0 = a_n = 0$, вычислим $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx dx =$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2n}((-1)^n - 1) = \frac{1}{2n}(1-(-1)^n).$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}(1-(-1)^n)\sin nx = \frac{1}{2}(\frac{2\sin x}{1} + \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{2\sin 5x}{5} + ...) =$$
$$= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ получим $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + ...$ (вычислили сумму знакочередующегося ряда).