Классификация особых точек. Вычеты

Рассмотрим функцию $f(z)$ комплексного переменного z. Напомним, что такие точки z, в которых функция $f(z)$ не является аналитической называются **особыми точками**. Те точки области определения $f(z)$, в кторых функция аналитична, называются **правильнымиточками**.

Определение. Особаяточка z_0 назвается изолированной особой точкой, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Пусть z_0- изолированная особая точка, тогда найдется такое $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Будем говорить, что особая точка z_0 является **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

Очевидно, что в разложении Лорана функции в окрестности устранимой особой точки должны отсутствовать члены с отрицательными степенями, то есть главная часть ряда Лорана. Тогда, очевидно $A = c_0$.

Особая точка z_0 называется **полюсом**, если предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит в главной части конечное (положительное) число отличных от нуля членов:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Наибольший из показателей степеней у разностей $z - z_0$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

Если z_0 — полюс m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 — нуль m-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $m = 1$ полюс называют ***простым***.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Изолированная особая точка z_0 называется ***существенно особой точкой***, если функция $f(z)$ в точке z_0 не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит бесконечное множество слагаемых

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Решение. Особая точка $z_0 = 0$. Так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

то $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ содержит только правильную часть:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \cdots - 1\right) = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots.$$

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}.$$

Решение. Особая точка $z_0=0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos z}{z^7}=\infty,$$

то $z_0=0$ является полюсом.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ будет иметь вид

$$\frac{1-\cos z}{z^7}=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10}-\cdots$$

Главная часть лорановского разложения содержит конечное число членов — три. Так как наибольший из показателей степени у z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен пяти, то точка $z_0=0$ будет полюсом пятого порядка.

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z)=e^{1/z^2}.$$

Решение. Особая точка $z_0=0$. На действительной оси $z=x$ при $x\to\infty$ $f(x)=e^{1/x^2}\to\infty$. На мнимой оси $z=iy$ при $y\to\infty$ $f(x)=e^{-1/y^2}\to 0$. Следовательно, предел данной функции в точке $z_0=0$ не существует ни конечный, ни бесконечный, поэтому $z_0=0$ является существенно особой точкой.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ будет иметь вид

$$e^{1/z^2}=1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\cdots,\ |z|>0.$$

Главная часть лорановского разложения содержит бесконечно много членов.

Определение. Вычетом функциифункции $f(z)$ в изолированнойособой точке z_0называется число, обозначаемое символом

$$\operatorname{Res} f(z_0) \text{ или } res f(z_0)$$

И определяемое равенством

$$res\ f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz$$

где γ — окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса, такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек функции $f(z)$.

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$res f(z_0) = c_{-1}.$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Если точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$, то

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Если точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$, то

$$res\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[f(z) \cdot (z - z_0) \right].$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0$, то есть z_0 является простым полюсом функции $f(z)$, то

$$res f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для нахождения $resf(z_0)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Это и будет вычет.

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}.$$

Решение. Особые точки: $z=0,\ z=\frac{\pi}{4}$.

Найдем вычет в точке $z=0$. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $z=0$ является устранимой особой точкой и

$$resf(0)=0.$$

Найдем вычет в точке $z = \frac{\pi}{4}$. Вычислим предел:

$$\lim_{z \to \pi/4} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} = \infty .$$

Следовательно, $z = \frac{\pi}{4}$ является полюсом (полюс первого порядка) и

$$res f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \to \pi/4} f(z)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \to \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \lim_{z \to \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16} .$$

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} .$$

Решение. Особые точки: $z = \pm i$. Это полюсы второго порядка.
Найдем вычет в точке $z = i$:

$$res\, f(i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^3} =$$

$$= -\lim_{z\to i}\frac{2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Найдем вычет в точке $z=-i$:

$$res\, f(-i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-i)^3} =$$

$$= -\lim_{z\to -i}\frac{2}{(z-i)^3} = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{i}{4}.$$

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

Решение. Особая точка: $z=0$. Разложим функцию в ряд Лорана:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n, \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n},$$

$$z^2 e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{z^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \dots$$

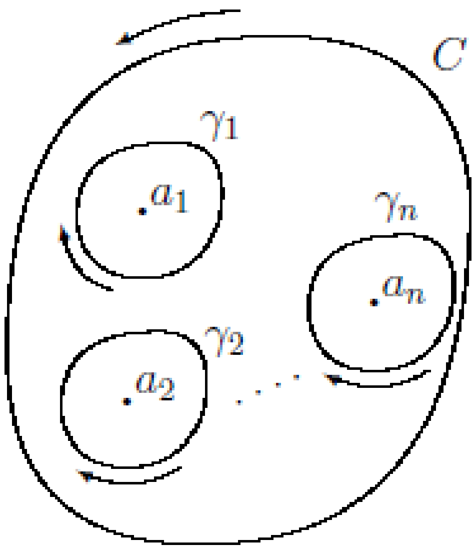
Вычет будет равен коэффициенту c_{-1}:

$$res\, f(0) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Теорема (основная теорема о вычетах). Пусть $f(z)$ аналитична в любой точке области G, кроме конечного числа особых точек $a_1, \dots, a_n \in G$. Пусть C - произвольная замкнутая кусочно-гладкая линия, лежащая в области G и содержащая внутри себя точки $a_1, \dots, a_n$. Тогда, если C обходится в положительном направлении, то

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k).$$

Доказательство. Вокруг каждой точки a_k опишем окружность так,



что $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$ если $i \neq j$. $f(z)$ аналитична на C, на γ_k, внутри C и вне γ_k. Пусть $\Gamma = C + \gamma_1^- + \dots + \gamma_n^-$. По теореме Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} resf(a_k).$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|<5} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz\,.$$

Решение. Подынтегральная функция аналитична в области $|z|<5$ за исключением точек $z=0$, $z=-1$. Найдем вычеты в данных точках.

Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2+z}=1\,.$$

Вычет в точке $z=0$ равен 0: $res f(0)=0$.

Точка $z=-1$ является полюсом первого порядка. Вычет в данной точке будет равен

$$res f(-1)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z-1}{z(z+1)}(z+1)\right)=1-e^{-1}\,.$$

По теореме Коши о вычетах получим

$$\int\limits_{|z|<5} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz=2\pi i(res f(0)+res f(-1))=2\pi i(1-e^{-1})\,.$$

Функция $f(z)$ является ***аналитической в бесконечно удаленной точке*** $z=\infty$, если функция $\varphi(c)=f\left(\frac{1}{c}\right)$ аналитична в точке $c=0$.

Например, функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ является аналитической в точке $z=\infty$, так как функция $\varphi(c)=f\left(\frac{1}{c}\right)=\sin c$ аналитична в точке $c=0$.

Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ имеет в бесконечности неизолированную особенность: полюсы $z_k=k\pi$ этой функции накапливаются в бесконечности, если $k\to\infty$.

Точка $z=\infty$ является ***устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой*** функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Вычетом функциифункции $f(z)$на бесконечности

$res f(\infty)$ называется

$$res\ f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz$$

где γ^- — достаточно большая окружность $|z| = r$, проходимая по часовой стрелке (так, что окрестность точки $z = \infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = z_0$).

Из данного определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$res\, f(\infty) = -c_{-1}.$$

1) если $z=\infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z;

2) если $z=\infty$ — полюс, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки содержит конечное число положительных степеней z;

3) если $z=\infty$ — существенно особая точка, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки содержит бесконечное число положительных степеней z.

Лорановское разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называется разложением $f(z)$ в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z=0$ (кроме, быть может, самой точки $z=\infty$).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z=\infty$ (кроме, быть может, самой точки).

Теорема. Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

То есть если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечные особые точки функции $f(z)$, то

$$res\, f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k) = 0$$