ЛЕКЦИЯ 6.
ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ) С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА.

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f(x) \qquad (1)$$

Если $f(x)$ имеет специальный вид:

1) $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$

$P_n(x)$ многочлен степени n

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

Тогда $y^* = x^r Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$

Где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + p\cdot k + q = 0$, т.е. r число , показывающее сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + p\cdot k + q = 0$.

а $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ – многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i

а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + p\cdot k + q = 0$.

$\alpha \neq k_{1,2} \;\Rightarrow\; r = 0$

$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$

$(y^*)' = Q_n'(x)e^{\alpha x} + Q_n(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x}$

$(y^*)'' = Q_n''(x)e^{\alpha x} + Q_n'(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x} + Q_n'(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x} + Q_n(x)\cdot\alpha^2\cdot e^{\alpha x}$

$$Q_n''(x)e^{\alpha x} + 2Q_n'(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x} + Q_n(x)\cdot\alpha^2\cdot e^{\alpha x} + pQ_n'(x)e^{\alpha x} + pQ_n(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x} + qQ_n(x)e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$Q_n''(x) + 2Q_n'(x)\cdot\alpha + Q_n(x)\cdot\alpha^2 + pQ_n'(x) + pQ_n(x)\cdot\alpha + qQ_n(x) = P_n(x)$$

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + Q_n(x)\cdot(\alpha^2 + p\cdot\alpha + q) = P_n(x)$$

Слева многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа– многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях х, получим систему (n+1) алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_i

б) Пусть α является корнем характеристического уравнения $k^2 + p\cdot k + q = 0$.

$\alpha = k_1 \;\Rightarrow\; r = 1$

$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

в) $\alpha = k_{1,2} \;\Rightarrow\; r = 2$

$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$

Пример 1

$$y'' - 3y' + 2y = f(x)$$
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$k^2 - 3k + 2 = 0$$
$$k_1 = 1 \quad k_2 = 2$$
$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

1) $f(x) = 10e^{-x}$ $\qquad y^* = Ae^{-x}$

2) $f(x) = x^3 - 3$ $\qquad y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

3) $f(x) = (x+1)e^{3x}$ $\qquad y^* = e^{3x}(Ax + B)$

4) $f(x) = (x+1)e^{2x}$ $\qquad y^* = xe^{2x}(Ax + B)$

5) $f(x) = e^x x^2$ $\qquad y^* = xe^x(Ax^2 + Bx + C)$

Пример 2

$$y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$$
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$k^2 - 3k + 2 = 0$$
$$k_1 = 1 \quad k_2 = 2$$
$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$
$$y^* = xe^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(Ax^2 + Bx)$$
$$(y^*)' = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B) = e^{2x}(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)$$
$$(y^*)'' = 2e^{2x}(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B) + e^{2x}(4Ax + 2B + 2A) =$$
$$= e^{2x}(4Ax^2 + 4Bx + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 2A) =$$
$$= e^{2x}(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)$$

$$e^{2x}(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A) - 3e^{2x}(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B) + 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) = (x+1)e^{2x}$$
$$4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A - 6Ax^2 - 6Bx - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx = x + 1$$

$$2Ax + B + 2A = x + 1$$
$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B + 2A = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = 0$$
$$y^* = xe^{2x}(Ax + B) = \frac{1}{2}e^{2x}x^2$$
$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}x^2$$

Пример 3

$y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}$

$y'' - 6y' + 9y = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0$

$k_1 = 3 \quad k_2 = 3$

$y = \bar{y} + y^*$

$\bar{y} = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}$

$y^* = x^2 A e^{3x}$

${y^*}' = 2xAe^{3x} + 3x^2 Ae^{3x}$

${y^*}'' = 2Ae^{3x} + 3 \cdot 2xAe^{3x} + 6xAe^{3x} + 9x^2 Ae^{3x}$

$2Ae^{3x} + 3 \cdot 2xAe^{3x} + 6xAe^{3x} + 9x^2 Ae^{3x} - 6(2xAe^{3x} + 3x^2 Ae^{3x}) + 9x^2 Ae^{3x} = 10e^{3x}$

$2Ae^{3x} + 12xAe^{3x} + 9x^2 Ae^{3x} - 12xAe^{3x} - 18x^2 Ae^{3x} + 9x^2 Ae^{3x} = 10e^{3x}$

$2Ae^{3x} = 10e^{3x} \quad A = 5$

$y^* = 5x^2 e^{3x}$

$y = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x} + 5x^2 e^{3x}$

2) Правая часть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены степени n и m соответственно, α и b – действительные числа
Следовательно $y^* = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos bx + N_l(x)\sin bx)$ (2)
Где r – число равное кратности $\alpha \pm bi$ как корня характеристического уравнения $k^2 + p \cdot k + q = 0$
$M_l(x)$ и $N_l(x)$ – многочлены степени $l = \max(m, n)$
Замечания:
1) После подстановки y^* в уравнение (1) приравнивают многочлены, стоящие перед одинаковыми тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.
2) Форма (2) сохраняется и в тех случаях, когда $P_n(x) = 0$ или $Q_m(x) = 0$.
3) Если правая часть уравнения (1) есть сумма функций вида первого и второго, то для нахождения y^* следует использовать теорему о наложении решений.

Пример.

$$5y'' - 6y' + 5y = f(x)$$
$$5y'' - 6y' + 5y = 0$$
$$5k^2 - 6k + 5 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = e^{\frac{3}{5}x}(c_1 \cos\frac{4}{5}x + c_2 \sin\frac{4}{5}x)$$
$$f(x) = 5e^{\frac{3}{5}x} \qquad y^* = Ae^{\frac{3}{5}x}$$
$$f(x) = \sin\frac{4}{5}x \qquad y^* = A\sin\frac{4}{5}x + B\cos\frac{4}{5}x$$
$$f(x) = e^{\frac{3}{5}x}\cos x \qquad y^* = e^{\frac{3}{5}x}(A\cos x + B\sin x) \qquad \frac{3}{5} \pm i$$
$$f(x) = e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x \qquad y^* = e^{\frac{3}{5}x}(A\sin\frac{4}{5}x + B\cos\frac{4}{5}x)x$$

$$y'' + y = \cos 2x + (x+1);$$

$$y'' + y = 0$$
$$k^2 + 1 = 0$$
$$k_1 = i \quad k_2 = -i$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D$$
$$y^{*\prime} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + C$$
$$y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$
$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D = \cos 2x + x + 1$$
$$\begin{cases} -4A + A = 1 \quad A = -\frac{1}{3} \\ -4B + B = 0 \quad B = 0 \\ C = 1 \\ D = 1 \end{cases}$$
$$y^* = -\frac{1}{3}\cos 2x + x + D$$
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x + x + D$$

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x$$
$$y'' - 7y' + 6y = 0$$
$$k^2 - 7k + 6 = 0$$
$$k_1 = 1 \quad k_2 = 6$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{6x} \qquad y^* = A\sin x + B\cos x$$
$$A = \frac{5}{74} \quad B = \frac{7}{74}$$

$$y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$$
$$y'' - 4y = 0$$
$$k^2 - 4 = 0$$
$$k_1 = 2 \quad k_2 = -2$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \qquad y^* = e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$$
$$A = -\frac{1}{20} \quad B = -\frac{1}{10}$$

$$y'' + 25y = \cos 5x$$
$$y'' + 25y = 0$$
$$k^2 + 25 = 0$$
$$k_1 = 5i \quad k_2 = -5i$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x \qquad y^* = x(A\sin 5x + B\cos 5x)$$
$$A = \frac{1}{10} \quad B = 0$$

$$y'' - 2y' + 5y = e^x\sin 2x + x^3$$
$$y'' - 2y' + 5y = 0$$
$$k^2 - 2k + 5 = 0$$
$$k_{1,2} = 1 \pm 2i$$
$$y = \bar{y} + y^*$$
$$\bar{y} = e^x(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) \qquad y^* = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)x + Cx^3 + Lx^2 + Dx + E$$
$$A = -\frac{1}{4} \quad B = 0 \quad C = \frac{1}{5} \quad L = \frac{6}{25} \quad D = \frac{54}{125} \quad E = \frac{48}{625}$$