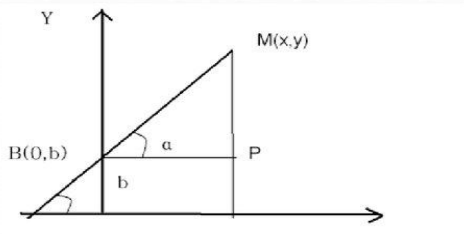
Лекция 8

Прямая на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$$\frac{y-b}{x} = tg(\alpha) = k,$$

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом

2. Общее уравнение прямой

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \qquad (4.3)$$

A, B, C – произвольные числа такие, что A и B не равны нулю одновременно, x, y – текущие координаты.

Расположение прямой на плоскости в случае равенства нулю некоторых из коэффициентов A, B, C:

Значения коэффициентов	Уравнение прямой	Расположение прямой на плоскости
$C=0,\ B=0,\ A\neq 0$	$Ax=0$, то есть $x=0$	ось Oy
$C=0,\ A=0,\ B\neq 0$	$By=0$, то есть $y=0$	ось Ox
A – любое, $C=0,\ B\neq 0$	$y=-\frac{A}{B}x$	проходит через начало координат
C – любое, $A=0,\ B\neq 0$	$y=-\frac{C}{B}$	прямая $\parallel Ox\ (\perp Oy)$
C – любое, $B=0,\ A\neq 0$	$x=-\frac{C}{A}$	прямая $\parallel Oy\ (\perp Ox)$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_1;y_1)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k.

Уравнение этой прямой: $y = kx + b$, где b – пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_1;y_1)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_1 = kx_1 + b$. Отсюда $b = y_1 - kx_1$. Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_1 - kx_1$, то есть

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1),} \qquad (4.6)$$

называемое **уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.**

Данное уравнение с различными значениями k называют также **уравнением пучка прямых** с центром в точке $M(x_1;y_1)$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

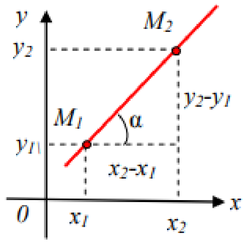


Рис. 4.4

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Ее угловой коэффициент (рис. 4.4)

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

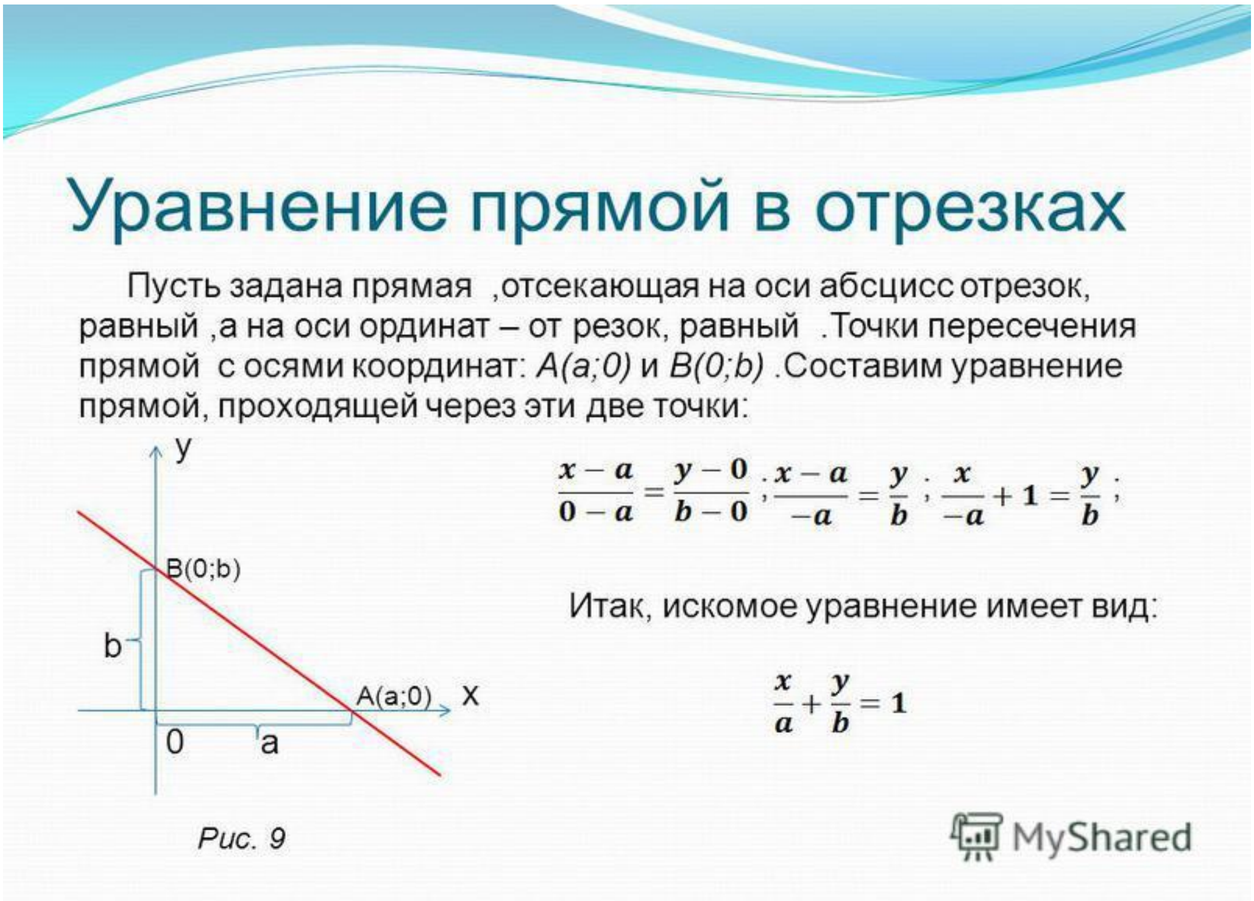
Подставив коэффициент и координаты точки $M_1(x_1;y_1)$ в уравнение (4.6), выведем уравнение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ или } \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \qquad (4.7)$$

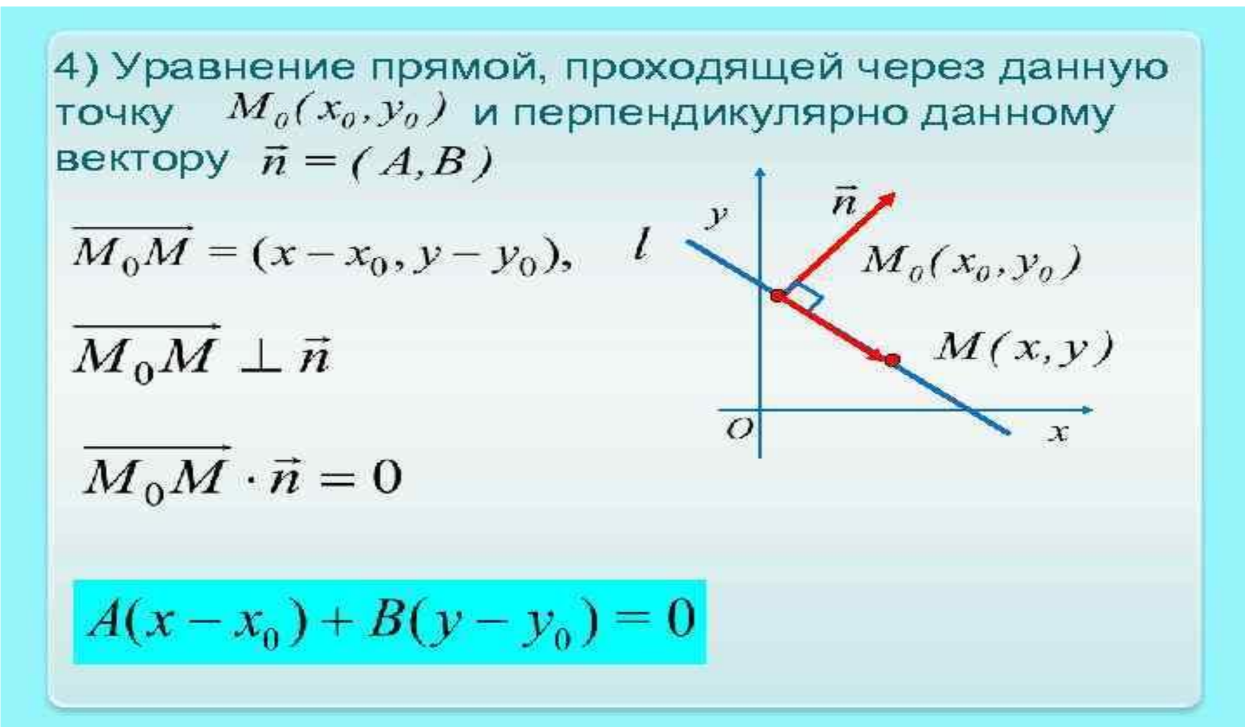
называемое **уравнением прямой, проходящей через две точки.**

Если $x_1 = x_2$, то есть точки M_1 и M_2 лежат на одной вертикальной линии, то уравнение (4.7) теряет смысл. В этом случае прямая задается уравнением $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая задается уравнением $y = y_1$.

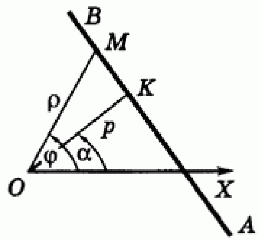
5. Уравнение прямой в отрезках



6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору



7. Полярное уравнение прямой



$M(\rho,\varphi) - \textit{произвольная точка прямой}$

$$Пр_{OK}\overline{OM} = p = \left|\overline{OM}\right|\cos(\varphi-\alpha) = \rho\cos(\varphi-\alpha)$$

$$\rho\cos(\varphi-\alpha) = p$$

8. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим полярное уравнение прямой

$$\rho\cos(\varphi-\alpha) = p$$

$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha - p = 0$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Полученное уравнение есть уравнение прямой в прямоугольной системе координат.

Пусть общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$

И уравнение той же прямой в нормальном виде $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

Т.е. $\begin{matrix} A\lambda x + B\lambda y + C\lambda = 0 \\ A\lambda = \cos\alpha \quad B\lambda = \sin\alpha \quad C\lambda = -p \end{matrix}$

Из первых двух равенств определим λ

$$\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ –нормирующий множитель. Умножается на общее уравнение для перехода к нормальному

λ и с должны иметь противоположные знаки т.к. р– это длина, положительное число, $C\lambda = -p \;\Rightarrow\; C\lambda < 0$

Если с=0, то выбор знака произволен

9. Угловые соотношения между прямыми

1. Если даны уравнения двух прямых l_1 и l_2 вида $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то о взаимном расположении этих прямых на плоскости можно судить по их угловым коэффициентам k_1 и k_2.

Найдем тангенс угла φ $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$, на который надо повернуть прямую l_1 до совпадения с прямой l_2 относительно точки их пересечения (рис. 4.5) по формуле $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

По формуле тангенса разности

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

Так как $tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$, то

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},} \qquad (4.8)$$

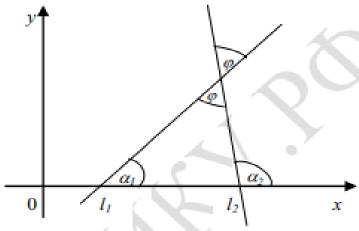


Рис. 4.5

является формулой угла между прямыми.

Выведем из (4.8) условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Если $l_1 \parallel l_2$, то $tg\varphi = 0$, следовательно, **условие параллельности прямых**:

$$\boxed{k_1 = k_2.} \qquad (4.9)$$

Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = 90^o$, то есть $tg\varphi -$ не существует (равен ∞). Следовательно, **условие перпендикулярности прямых:**

$$\boxed{k_1k_2 = -1} \text{ или } \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}.} \qquad (4.10)$$

10. Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$