

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

**1. Цель работы:** исследовать применение аппарата метода анализа иерархий при принятии решений по выбору альтернатив

## 2. Теоретическое введение

### 2.1. Общие понятия метода анализа иерархий

При принятии решений в сложной системе, состоящей из взаимосвязанных компонент различного вида (ресурсы, желаемые исходы либо цели и т.д.), процесс функционирования которой необходимо проанализировать, может быть применен метод анализа иерархий (МАИ). Метод анализа иерархий сводит принятие решений в сложной системе к последовательности попарных сравнений ее отдельных компонент.

Метод может быть применен для принятия решений при покупке оборудования, планировании распределения энергии, вложениях в условиях неопределенности и т.д.

Для принятия решений в соответствии с МАИ выполняется декомпозиция сложной системы (задачи) на отдельные её компоненты (составляющие) и определяются отношения между составляющими. В результате формируется модель системы (задачи), имеющая вид иерархии. Вид иерархии предполагает наличие следующих уровней:

- 1) первый (верхний) уровень – одна глобальная (общая) цель принятия решений;
- 2) второй уровень – локальные подцели, полученные в результате декомпозиции глобальной (общей) цели;
- 3) третий уровень – воздействия (управления), реализация которых в системе позволяет достичь сформированных подцелей (решения, стратегии, приводящие к достижению подцелей);
- 4) четвертый (нижний) уровень – исходы, представляющие собой результаты реализации решений в системе (стратегий).

После формирования иерархии «цель – подцели – решения - результаты» реализуется сравнение отдельных компонент уровней иерархии между собой. В результате сравнения отдельных компонент системы между собой определяется относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии.

Упорядоченным множеством называется множество  $X$  с отношением порядка  $\succeq$  (не хуже), если отношение  $\succeq$  удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Если решения  $x_1$  и  $x_2$  связаны отношением  $\succeq$  (т.е.  $x_1 \succeq x_2$ ), то  $x_1$  не хуже  $x_2$  (т.е.  $x_1$  лучше, чем  $x_2$ , либо  $x_1$  и  $x_2$  эквивалентны). Тогда  $x_1$  предшествует  $x_2$  (если  $x_1 \succeq x_2$ ) в цепочке решений. Свойства отношения  $\succeq$  (не хуже):

- а) рефлексивность: для всех  $x_i$ ,  $x_i \succeq x_i$  (т.е.  $x_i$  не может быть хуже самого себя);
- б) антисимметричность: если  $x_1 \succeq x_2$  и  $x_2 \succeq x_1$ , то  $x_2 = x_1$ ;
- в) транзитивность: если  $x_1 \succeq x_2$  и  $x_2 \succeq x_3$ , то  $x_1 \succeq x_3$ .

Отношение  $\succ$  - отношение «лучше».

Тогда, если  $x_1 \succ x_2$ , то  $x_1$  лучше  $x_2$ . Решение  $x_1$  доминирует решение  $x_2$ , если  $x_1 \succ x_2$ ,  $x_1 \succ x_i \succ x_2$  невозможно ни для какого  $x_i$ .

Подмножество  $X'$  упорядоченного множества  $X$  называется ограниченным сверху, если существует элемент  $x_i \in X$  такой, что  $x_i \succeq x_j$  для любого  $x_j \in X'$ . Элемент  $x_i$  - верхняя граница множества (подмножества)  $X'$ .

**Способ задания иерархии.** Обозначения:  $X^- = \{x_j / x_i \text{ покрывает } x_j\}$ , т.е.  $X^-$  – те решения  $x_j$ , которые покрываются рассматриваемым решением  $x_i$ ;  $X^+ = \{x_j / x_j \text{ покрывает}$

$x_i$  }, таким образом,  $X^+$  - множество тех элементов  $x_j$ , которые покрывают элемент  $x_i$  (рассматриваемый элемент  $x_i$ ). При этом  $x_i \in X$  и  $x_j \in X$ , где  $X$  - упорядоченное множество.

### Определение иерархии:

- 1)  $H$  - упорядоченное множество (частично упорядоченное множество) с наибольшим элементом  $b$  (т.е. упорядоченное множество  $H$  ограничено сверху элементом  $b$ );
- 2) выполнено разбиение множества элементов  $H$  на подмножества элементов  $L_k$ ,  $k=1,2,\dots,h$ , при этом  $L_1=\{b\}$ , таким образом,  $L_k$  - подмножество элементов, соответствующих  $k$ -му уровню иерархии, первый уровень состоит из одного элемента  $b$  ( $L_1=\{b\}$ );
- 3) если  $x_i \in L_k$ , то  $X^- \subset L_{k+1}$ , где  $X^-$  - это элементы  $(k+1)$ -го уровня (множества  $L_{k+1}$ ), покрываемые элементом  $x_i$ ;
- 4) если  $x_i \in L_k$ , то  $X^+ \subset L_{k-1}$ , где  $X^+$  - это элементы  $(k-1)$ -го уровня (множества  $L_{k-1}$ ), которые покрывают элемент  $x_i$ .

**Функция приоритета.** Если  $X^- = \{x_j / x_i \text{ покрывает } x_j\}$ , то может быть определена функция  $w_x(x_j)$ , такая, что  $w_x : X^- \rightarrow [0,1]$ , т.е. отображающая элементы  $x_j$  множества  $X^-$  на интервал  $[0,1]$ . Таким образом, каждому элементу  $x_j \in X^-$  ставится в соответствие весовая функция  $w_x(x_j) \rightarrow [0,1]$ , при этом выполняется условие:  $\sum_{x_j \in X^-} w_x(x_j) = 1$ . Т.е.  $w_x(x_j)$  - вес, который ставится в соответствие элементу  $x_j \in X^-$ .

**Пример** построения иерархии элементов в задаче выбора сетевого оборудования. Элементами множества  $H$  являются: 1) цель (выбор оборудования); 2) факторы, влияющие на цель (наименование характеристик моделей сетевого оборудования, на основе анализа значений которых выполняется выбор); 3) модели сетевого оборудования, среди которых будет выполняться выбор эффективного.

Тогда  $H = \{\text{оборудование, производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтпригодность, модель 1, модель 2, модель 3}\}$ .

**Формирование иерархии элементов множества  $H$ .** Реализуется разбиение множества  $H$  на подмножества  $L_1, L_2, L_3$  (т.е.  $k=3$ ); где  $L_1 = \{\text{оборудование}\}$ ,  $L_2 = \{\text{производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтпригодность}\}$ ,  $L_3 = \{\text{модель 1, модель 2, модель 3}\}$ . Вид иерархии цели, характеристик, решений представлен на Рис.1.

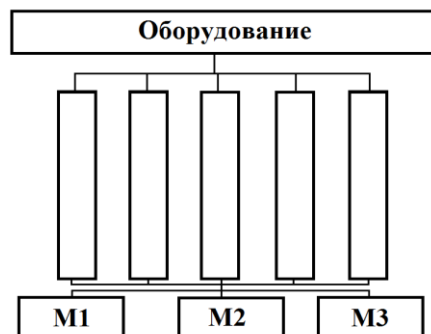


Рисунок 1.– Вид иерархии уровней для задачи выбора оборудования

Если  $x_1 = \text{оборудование}$  и при этом  $x_1 \in L_1$ , то  $X^- = L_2$ .

Если  $x_i = \text{Модель 1}$ , а при этом  $x_i \in L_3$ , то  $X^+ = L_2$ .

Определение весовой функции  $w_x$  для элемента  $x_i$  = оборудование. Эта функция ставит в соответствие характеристикам оборудования (элементам  $L_2$ ) значения из отрезка  $[0,1]$  и определяет приоритет характеристик относительно цели – «выбора оборудования».

Пример определения значений  $w_x(x_j)$  следующий (где  $x_j \in X^-$ )

$W_{\text{оборудование}}(\text{производительность процессора}) = 0,3;$

$W_{\text{оборудование}}(\text{объем ОЗУ}) = 0,2;$

$W_{\text{оборудование}}(\text{производительность сети}) = 0,2;$

$W_{\text{оборудование}}(\text{цена}) = 0,2;$

$W_{\text{оборудование}}(\text{релоктопригодность}) = 0,1;$

При этом  $\sum_{x_j \in X^-} W_{\text{оборудование}}(x_j) = 1;$

Т.е. характеристика «Производительность процессора» имеет 30%-ое значение при выборе оборудования, характеристика «объем ОЗУ» имеет 20%-ое значение при выборе оборудования и т.д.

**Понятие полной иерархии** предполагает, что иерархия называется полной, если для всех  $x \in L_k$  множество  $X^+ = L_{k-1}$  ( $k = 2, \dots, h$ ). В рассматриваемом случае иерархия является полной.

**Свойства элементов уровней иерархии.** Упрощенный вид иерархии уровней для принятия решений следующий: цели (общая цель функционирования системы, общая цель принятия решения); критерии, раскрывающие цели (характеристики цели); виды деятельности (решения), обеспечивающие достижение целей; характеристики видов деятельности.

С точки зрения анализа общей цели выполняется выбор видов деятельности, обеспечивающих достижение цели с точки зрения различных критериев. Т.е. критерии – это свойства (характеристики) цели, реализация которых (реализация свойств цели) обеспечивается тем или иным видом деятельности.

Возможен также расширенный подход к построению иерархии уровней, предусматривающий определение: 1) цели системы; 2) подцелей системы; 3) критериев, раскрывающих цель и подцели (свойств, характеристик цели либо подцелей); 4) Компонент системы, обеспечивающих достижение цели; 5) локальные цели компонент вышестоящего (4-го) уровня; 6) виды деятельности (сценарии, решения), обеспечивающие достижение локальных целей компонент системы, деятельность которых приводит к достижению общей цели.

**Стандартный подход предполагает задание трех уровней иерархии:**

- 1) нижний уровень – виды деятельности (т.е. альтернативы, решения);
- 2) второй уровень – характеристики видов деятельности (видов действий);
- 3) верхний уровень – общая цель функционирования системы.

**Пример.** Нижний уровень – различные маршруты движения транспорта между двумя пунктами (виды деятельности), второй уровень – характеристики видов деятельности (время следования, сужения, выбоины, безопасность и т.д.), верхний уровень – общая цель – выбор эффективного маршрута.

Таким образом, формируемая иерархия является моделью системы, в которой реализуется принятие решений.

В общем виде задача принятия решений – это определение видов деятельности. В общем виде действия по определению видов деятельности, наиболее эффективных с точки зрения реализации общей цели, следующие:

- 1) задание важности характеристик видов деятельности относительно общей цели (важность критериев, используемых для оценки решений с точки зрения достижения общей цели);
- 2) для каждой характеристики деятельности определяется степень влияния соответствующего вида деятельности на эту характеристику, т.е. степень соответствия вида деятельности определенной на втором уровне ее характеристике (т.е. в какой степени данный вид деятельности предполагает реализацию данной характеристики).

В результате определяется степень обеспечения видом деятельности рассматриваемой общей цели.

Степень влияния элементов одного уровня на один элемент другого (вышестоящего уровня) представляет собой важность каждого элемента нижнего уровня для одного рассматриваемого элемента верхнего уровня (т.е. **приоритет элемента нижнего уровня для соответствующего элемента верхнего уровня**). Для определения приоритетов влияния  $j$ -ых элементов  $(k+1)$ -го уровня на  $i$ -ый элемент  $k$ -го уровня реализуются следующие действия:

1) выполняется сравнение (парное) элементов  $(k+1)$ -го уровня ( $j = \overline{1, n_{k+1}}$ ) по степени их влияния на  $i$ -ый элемент  $k$ -го уровня; в результате будет сформирована **матрица суждений о степенях влияния**;

2) определяется **собственный вектор** и **собственное значение** сформированной матрицы **парных сравнений**; собственный вектор обеспечивает упорядочивание приоритетов, собственное значение является мерой согласованности суждений.

Если характеристика  $x_j$   $(k+1)$ -го уровня важнее характеристики  $x_i$  того же уровня, то степень важности определяется по таблице (матрице) парных уравнений. Т.е., если альтернатива  $x_j$   $(k+1)$ -го уровня реализует некоторое свойство (критерий) с предшествующего уровня в большей степени, чем альтернатива  $x_i$ , то вес  $w_j$  альтернативы  $x_j$  имеет большее значение, чем вес  $w_i$  альтернативы  $x_i$ . А **значения  $w_i$  и  $w_j$  соответствующих альтернатив  $x_i$  и  $x_j$  определяются на основе матрицы  $A$  парных сравнений альтернатив** (задаются в матрице парных сравнений альтернатив). Матрица парных сравнений  $A$  предполагает, что элемент  $a_{ij}$  равен степени превышения важности альтернативы  $x_i$  над альтернативой  $x_j$  для некоторого рассматриваемого свойства. При формировании матрицы парных сравнений должно быть выполнено условие ее согласованности (условие согласованности оценок сравнений).

**Пример** матрицы парных сравнений для трех альтернатив. Альтернативы  $x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) представляют собой модели оборудования, матрица парных сравнений предполагает определение (задание) степени превосходства одной альтернативы  $x_i$  над альтернативой  $x_j$  с точки зрения реализации критерия (свойства) «производительность оборудования».

Если  $x_1 = 3x_2$ ,  $x_1 = 6x_3$ , тогда  $3x_2 = 6x_3$ ,  $x_2 = 2x_3$ ,  $x_3 = 1/2x_2$ .

Т.е. в альтернативе  $x_2$  (модель оборудования  $x_2$ ) рассматриваемое свойство (критерий) «производительность оборудования» в 2 раза превышает этот же критерий в альтернативе  $x_3$ . В итоге матрица парных сравнений реализации рассматриваемого свойства (критерия) в альтернативах  $x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{array} \right| \end{matrix}.$$

Если матрица  $A$  сформирована, то необходимо **выполнить проверку согласованности оценок парных сравнений** (проверить согласованность матрицы  $A$ ). Если условие согласованности выполняется, то сформированная матрица  $A$  может быть использована для расчета приоритетов (весов)  $w_i$  соответствующих альтернатив  $x_i$ . Если матрица  $A$  не согласована, то значения элементов  $a_{ij}$  этой матрицы должны быть изменены. Для проверки согласованности матрицы  $A$  на ее основе должен быть вычислен вектор приоритетов влияния  **$w_{ij}$  ( $j = \overline{1, 3}$ )  $j$ -ых компонент рассматриваемого уровня иерархии на  $i$ -ый компонент предшествующего уровня** (вычисляются веса  $w_{ij}$  текущих  $j$ -ых элементов). Таким образом,

должно быть определено значение  $w_{i_k j_{k+1}}$  приоритета влияния  $j$ -ой компоненты  $(k+1)$ -го уровня на  $i$ -ый элемент  $k$ -го уровня, в итоге определяется вектор собственных значений  $\bar{W}$  матрицы  $A$  - вектор приоритетов.

С математической точки зрения – это вычисление главного собственного вектора матрицы  $A$ , который после нормализации становится вектором приоритетов (собственный вектор матрицы  $A$  есть вектор приоритетов).

Методы получения собственного вектора матрицы  $A$  сформулированы в приложении А.

## 2.2. Метод получения грубой оценки согласованности

Имеем матрицу парных сравнений  $A$  в виде:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате реализации одного из методов получен вектор собственных значений  $w$  матрицы  $A$  в виде:

$$w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{vmatrix}.$$

На основе вектора  $w$  необходимо вычислить вектор  $w'$  следующим образом:  $w' = Aw$  (произведение матрицы  $A$  на вектор  $w$ ). Далее на основе вектора  $w'$  определяется вектор  $w''$  следующим образом:  $w''[i] = w'[i] / w[i]$ , где  $i = \overline{1, n}$ . Значение  $\lambda_{\max}$  (собственное значение матрицы  $A$ ) на основе вектора  $w''$  будет вычислено следующим образом:

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n w''[i] / n.$$

Если  $\lambda_{\max} \rightarrow n$ , то матрица парных сравнений значений характеристик альтернатив является хорошо согласованной. Если  $\Delta = n - \lambda_{\max}$  имеет большое значение, то степень согласования низкая и должна быть переопределена матрица парных сравнений  $A$ .

Степень согласованности может быть выражена величиной  $(\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$ , которая называется индексом согласованности (ИС). Если значение  $(\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$  приближается к 0, то согласованность достаточная.

Группа экспертов формирует суждения об относительной важности объектов (действий), всего  $n$  объектов (действий). В итоге реализации метода необходимо количественно интерпретировать суждения по всем объектам (совместно количественно интерпретировать суждения по всем объектам). Таким образом, из количественных суждений, ассоциированных с каждой из пар объектов, реализуется формирование весов, ассоциированных с отдельными объектами (вес каждого объекта отражает количественные суждения всей группы экспертов). Обозначения:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – совокупность объектов (действий). Для пары  $(x_i, x_j)$  определяется элемент  $a_{ij}$  матрицы парных сравнений  $A$ , соответствующий степени важности элемента  $x_i$  относительно элемента  $x_j$ .

Элементы  $a_{ij}$  определяются следующим образом:

- 1) если  $a_{ij} = \alpha$ , то  $a_{ji} = 1/\alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ ;
- 2) если  $x_i$  и  $x_j$  имеют одинаковую важность, то  $a_{ij} = 1$  и  $a_{ji} = 1$ .

Тогда матрица суждений (парных сравнений)  $A$  примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе сформированной матрицы  $A$  необходимо определить числовые веса  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , которые соответствовали бы каждому действию (объекту). Т.е. реализовать способ получения весов  $w_i$  на основе суждений  $a_{ij}$ . Результатом является определение вектора приоритетов ( $w_1, w_2, \dots, w_n$ ). Определение вектора приоритетов действия (решений, альтернатив) реализуется путем нахождения собственных векторов матриц  $A$  парных сравнений для каждого уровня (данный подход введен в рассмотрение выше).

После того, как для каждого вида деятельности сформированы приоритеты с точки зрения удовлетворения характеристик (критериев), выполняется определение приоритетов характеристик (критериев) относительно общей цели (т.е. как рассматриваемые свойства будут обеспечивать общую цель).

Для получения общей характеристики вида деятельности (например,  $i$ -го вида деятельности) по каждому критерию необходимо:

- 1) умножить вес оценки  $i$ -го вида деятельности по некоторому  $j$ -ому критерию на вес этого критерия в общей цели принятия решения (таким образом,  $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$ , где  $w_{ij}^2$  – вес оценки  $i$ -го вида деятельности относительно  $j$ -ой характеристики второго уровня иерархии,  $w_j^1$  – вес  $j$ -ой характеристики относительно общей цели системы (первого уровня иерархии); всего должно быть получено  $m$  значений  $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$ , где  $m$  – количество критериев(характеристик) видов деятельности;
- 2) полученные значения  $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$  для каждого  $i$ -го вида деятельности сложить по всем  $j$ -ой критериям ( $j = \overline{1, m}$ ) (критериям, характеризующим общую цель принятия решений), тогда общая характеристика  $i$ -го вида деятельности  $D_i$  будет определена следующим образом:

$$D_i = \sum_{j=1}^m w_{ij}^2 \cdot w_j^1.$$

Понятно, что тот  $i$ -ый вид деятельности, который гарантирует максимальное значение оценки  $D_i$ , будет являться эффективным. Условие определения эффективного вида деятельности  $i'$  имеет следующий вид:

$$i' = \arg \max_{i=1, n} D_i = \arg \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^m w_{ij}^2 \cdot w_j^1.$$

**Пример применения метода анализа иерархий** для реализации принятия решения по выбору вида сетевого оборудования, приобретаемого компанией.



Т.к. общая цель реализации процедуры принятия решения состоит в выборе эффективного оборудования, то верхний уровень иерархии принятия решений содержит узел «эффективное оборудование» (это и будет общая цель в иерархии).

Второй уровень представляет собой критерии (характеристики), в соответствии с которыми выполняется определение эффективного решения по выбору оборудования (т.е. критерии, определяющие цель выбора оборудования). Множество характеристик (критериев) определено следующим образом: {производительность процессора, скорость передачи данных, объем памяти для хранения пакетов, цена оборудования, ремонтпригодность, срок гарантии}.

В сокращенном виде множество характеристик оборудования представлено в следующем виде: {производительность, скорость, объем памяти, цена, ремонтпригодность, гарантия}.

Выбор осуществляется среди трех единиц оборудования. Обозначим их как  $O_1, O_2, O_3$  соответственно. Тогда иерархия «цель – критерии – решения» представлена на Рис.2.

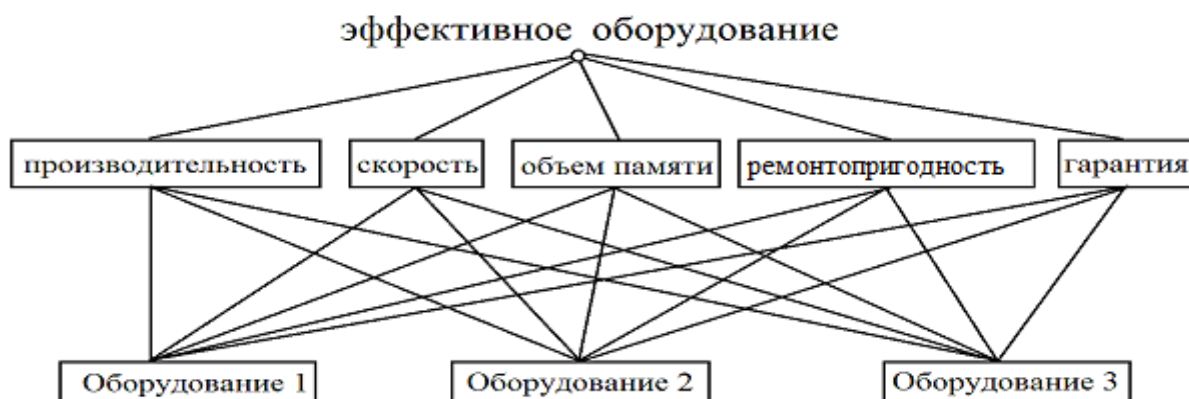


Рисунок 2 – Вид иерархии при принятии решений о выборе оборудования.

Для характеристик, определяющих (соответствующих) эффективному оборудованию сформирована матрица парных сравнений  $A_1$ . Элементы этой матрицы соответствуют степени важности какой-либо из характеристик оборудования по сравнению с другими характеристиками с точки зрения общей цели принятия решений.

Вид матрицы парных сравнений  $A_1$  (важность характеристики относительно цели) следующий:

	производительность	скорость	объем памяти	цена	ремонт пригодность	гарантия
$A_1 =$ производительность	1	4	3	1	3	4
скорость	1/4	1	7	3	1/5	1
объем памяти	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
цена	1	1/3	5	1	1	1/3
ремонтпригодность	1/3	5	5	1	1	3
гарантия	1/4	1	6	3	1/3	1

С использованием одного из приведенных в Приложении А методов определения собственного вектора матрицы  $A$  (использован первый метод) получены следующие значения  $w_j^I$  элементов вектора приоритетов  $W^I (j = \overline{1, m})$ :  $W^I = (0.32; 0.14; 0.03; 0.13; 0.24; 0.14)$ .

В этом случае вес  $w_1^1 = 0.32$  соответствует производительности процессора в общей цели выбора оборудования, вес  $w_2^1 = 0.14$  – скорости передачи данных в общей цели, вес  $w_3^1 = 0.03$  – объему памяти в общей цели и т.д.

Тогда собственное значение  $\lambda_{max}^l$  матрицы  $A_l$ , определяющее согласованность сформированных суждений определено равным 7.49 ( $\lambda_{max}^l = 7.49$ ), а индекс согласованности суждений определен равным 0.3 ( $ИС^l = 0.3$ ).

Для уровня иерархии видов оборудования сформированы матрицы парных сравнений по каждой из характеристик  $A_j^2 (j = \overline{1, m})$ . Значения  $a_{il}$  элементов этих матриц определяют степень эффективности какого-либо  $i$ -го типа оборудования по сравнению с другими ( $l$ -ми) типами для соответствующей  $j$ -ой характеристики (критерия).

Вид матриц  $A_j^2$  и вид собственных векторов  $w_j^2$  соответствующих матриц, коэффициенты согласованности имеют следующий вид:

• Производительность:

$$A_1^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_1^2 = (0.16; 0.59; 0.25),$$

$$\lambda_{max} = 3.05;$$

$$ИС = 0.025;$$

• Скорость передачи данных:

$$A_2^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_2^2 = (0.33; 0.33; 0.33),$$

$$\lambda_{max} = 3.0;$$

$$ИС = 0;$$

• Объем памяти:

$$A_3^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_3^2 = (0.45; 0.09; 0.46),$$

$$\lambda_{max} = 3.0;$$

$$ИС = 0;$$

• Цена оборудования:

$$A_4^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/7 & 5 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_4^2 = (0.77; 0.05; 0.17),$$

$$\lambda_{max} = 3.21;$$

$$ИС = 0.105;$$

• Ремонтопригодность:

$$A_5^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_5^2 = (0.25; 0.5; 0.25),$$

$$\lambda_{max} = 3.21;$$

$$ИС = 0;$$

• Срок гарантии

$$A_6^2 = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \begin{matrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1/6 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad w_6^2 = (0.69; 0.09; 0.22),$$

$$\lambda_{max} = 3.05;$$

$$ИС = 0.025.$$

В соответствии с полученными векторами  $w_j^2 (j = \overline{1, m})$  для каждого вида оборудования  $O_i (i = \overline{1, 3})$  формируется свой вектор значений всех характеристик следующим образом ( $j = \overline{1, m}$ ):

$$w_{O_1}^2 = (0.16; 0.33; 0.45; 0.77; 0.25; 0.69);$$

$$w_{O_2}^2 = (0.59; 0.33; 0.09; 0.05; 0.5; 0.09);$$



$$w_{o_3}^2 = (0.25; 0.33; 0.46; 0.17; 0.25; 0.22).$$

Так как вектора  $w^1$  и  $w_{o_i}^2$  ( $i = \overline{1,3}$ ) сформированы, то может быть получена оценка  $D_i$  каждого вида оборудования по формуле:

$$D_i = \sum_{j=1}^m w_{ij}^2 \cdot w_j^1.$$

Полученные значения  $D_i$  следующие:  $D_1 = 0.37$ ;  $D_2 = 0.38$ ;  $D_3 = 0.25$ . Отсюда следует, что второй вид оборудования наиболее предпочтителен.

### 3. Программа выполнения работы

3.1. Сформировать следующие матрицы:

а) парных сравнений влияния характеристик альтернатив (решений) на общую цель принятия решений (матрицу  $A_1$ );

б) парных сравнений наличия рассматриваемых свойств (характеристик) у предлагаемых к анализу решений  $x_j$  – матрицы  $A_j^2$  (где  $j = \overline{1, m}$ ,  $m$  – количество критериев (свойств, характеристик) рассматриваемых альтернатив);

3.2. Реализовать процедуру, которая используя заданный в варианте метод, определяет вектор собственных значений  $W$  каждой из матриц парных сравнений, вычисляет собственное значение матрицы  $\lambda_{max}$  и индекс согласованности (ИС) оценок в ней.

3.3. Проверить выполнение условия согласованности оценок в каждой из матриц парных сравнений на каждом уровне. В случае плохой согласованности повторить шаги 1 и 2.

3.4. Разработать процедуру, которая на основе векторов собственных значений  $w_j^2$  матриц  $A_j^2$  ( $j = \overline{1, m}$ , количество элементов в каждом из векторов равно количеству рассматриваемых решений (альтернатив), т.е.  $n$ ) для каждого из решений сформировать вектор  $W_i^2$  весовых коэффициентов  $w_i^2$ , каждый из которых соответствует наличию  $j$ -ой характеристики (свойства, критерия) у соответствующего  $i$ -го решения (количество элементов в каждом из этих векторов равно количеству свойств решений, влияющих на общую цель принятия решений, т.е.  $m$ );

3.5. Разработать процедуру, которая на основе векторов весовых коэффициентов на первом уровне –  $W_1$ , на втором уровне –  $W_j^2$  ( $j = \overline{1, m}$ ) выполняет расчет оценок  $D_i$  для каждого решения, эта же процедура реализует определение на основе значений  $D_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) эффективного решения  $x_i^*$ .

### 4. Варианты заданий

**Вариант 1.** У студентов в процессе обучения возникает необходимость определения предмета, который они хотели бы изучать по выбору. Характеристиками (критериями), соответствующими свойствам предметов, на основе которых выполняется выбор (влияющих на выбор предмета) являются: фундаментальные знания, которые содержит преподаваемый предмет, соответствие современному уровню развития науки в данной области, возможность использования в профессиональной деятельности, симпатии к преподавателю. Для анализа и выбора могут быть предложены следующие предметы: теория принятия решений, теория алгоритмов, теория вероятностей и математическая статистика, теория информационных процессов, технологии обработки информации, технологии программирования. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов

собственных векторов матриц парных сравнений использовать первый из предложенных в Приложении А методов.

**Вариант 2.** В процессе реализации дипломного или курсового проектов возникает необходимость в выборе языка программирования. (цель принятия решений– выбор языка программирования для реализации проекта). Характеристики, соответствующие свойствам альтернатив (решений), влияющие на цель принятия решений: наличие базовых знаний синтаксиса языка, соответствие языка современному уровню развития технологий программирования, сложность синтаксиса, имеющееся время на реализацию проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать второй из предложенных в Приложении А методов.

**Вариант 3.** В процессе дипломного проектирования возникает необходимость выбора темы дипломного проекта. (дипломный руководитель предлагает несколько тем на выбор). Цель принятия решений состоит в выборе темы для дипломного проектирования из предлагаемого перечня. Характеристиками (критериями), соответствующими свойствам решений, являются: сложность материала, положенного в основу темы дипломного проекта; наличие знаний по материалу, на основе которого реализуется дипломный проект; возможность использования знаний, полученных при дипломном проектировании по выбранной теме, в дальнейшей деятельности; наличие свободного времени для реализации выбранной темы дипломного проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать третий из предложенных в Приложении А методов.

## 5. Контрольные вопросы

- 5.1. Какой вид с точки зрения иерархически упорядоченных уровней имеет модель системы в МАИ (какие уровни образуют иерархию с точки зрения модели системы в МАИ)?
5. 2. Какие виды отношений используются при определении иерархической модели системы в МАИ (какие понятия используются при определении иерархии уровней в модели системы в МАИ) ?
5. 3. Каким образом формализуется определение иерархии уровней в модели системы в МАИ?
5. 4. Что такое функция приоритета для элементов уровней и что она определяет (для элементов каждого уровня) ?
- 5.5. Для чего используются матрицы парных сравнений на каждом уровне иерархической модели системы в МАИ?
5. 6. В чем отличие в формировании матрицы парных сравнений  $A_1$ , формируемой на втором уровне иерархии в модели системы, от матриц парных сравнений  $A_j^2 (j = \overline{1, m})$ , формируемой на третьем уровне иерархии модели системы?
- 5.7. Каким образом выполняется вычисление вектора собственных значений матрицы парных сравнений?
5. 8. Каким образом выясняется согласованность оценок в матрицах парных сравнений
5. 9. Какие действия должны быть предприняты в случае плохой согласованности оценок в матрицах парных сравнений?
5. 10. Каким образом на основе матриц парных сравнений могут быть получены весовые коэффициенты для характеристик или решений соответственно на втором и третьем уровнях иерархии?
- 5.11. В чем состоит процедура вычисления значения оценки эффективности каждой альтернативы в МАИ?
- 5.12. В чем заключается обобщенный алгоритм принятия решений в МАИ?

## МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ $A$

### Метод 1

- 1) Выполнить суммирование элементов каждой строки
- 2) Нормализовать каждую из полученных сумм путем ее деления на сумму всех элементов
- 3) Полученные результаты в сумме должны давать единицу; первый элемент результирующего вектора является приоритетом (весом) первого объекта, второй – второго и т.д.

### Метод 2

- 1) Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (нормализовать элементы каждого столбца)
- 2) Полученные элементы сложить для каждой строки (выполнить построчное суммирование полученных нормализованных элементов)
- 3) Разделить каждую из полученных сумм на число элементов в строке (процесс усреднения по нормализованным столбцам)

### Метод 3

- 1) Выполнить суммирование элементов каждого столбца и определить величины, обратные каждой из полученных сумм (обратная величина для рассматриваемого значения – это результат деления единицы на само это значение)
- 2) Разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин (нормализация обратных величин с тем, чтобы их сумма была равна 1).