

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

1. Цель работы: исследовать способы определения эффективных решений при групповом выборе.

2. Теоретическое введение

Имеется n различных бинарных отношений R_1, R_2, \dots, R_N на множестве X . Отношение R_i называется **индивидуальным**. Оно задает **предпочтение i -го субъекта** (ЛПР, эксперта). Требуется сформировать отношение $R \subseteq X \times X$, согласованное с отношениями R_1, R_2, \dots, R_N . Отношение R называется **групповым отношением**.

Правило (система правил), описывающее способ построения группового отношения R , исходя из системы индивидуальных отношений R_1, R_2, \dots, R_N , называется **принципом согласования отношений**.

Обозначив через F способ (правило) отображения группы отношений R_1, R_2, \dots, R_N в групповое отношение R , имеем: $F: (R_1, R_2, \dots, R_N) \rightarrow R$. Отображение F – принцип согласования. Разные отображения F могут быть использованы для определения отношения R .

Пример 1. Множество X имеет вид: $X = \{a, b, c\}$. Предпочтения трёх экспертов заданы следующими ранжированиями $R_1 = (a, b, c)$ (т.е. элементы x_i в R упорядочены в соответствии с рангами r_i^1 , при этом $a \succ b, a \succ c, b \succ c$), $R_2 = (a \sim b, c)$ (т.е. $a \succ c, b \succ c, a \sim b$), $R_3 = (b, c \sim a)$ (т.е. $b \succ c, b \succ a, c \sim a$). Определен принцип отображения F , предполагающий, что $R = R_1$.

Правила согласования группы отношений R_1, R_2, \dots, R_N с отношением R могут быть сформулированы довольно сложно.

Например: $(a, b) \in R$, если $(b, c) \in R_1$ и $(a, c) \notin R_2$.

Правило большинства.

Правило большинства – наиболее распространённый принцип согласования. Пусть R_1, R_2, \dots, R_N – индивидуальные отношения на $X \times X$. Обозначим через $n(a, b)$ количество индексов i (i – индекс отношения), для которых $(a, b) \in R_i$ ($i = \overline{1, N}$). Тогда могут быть сформированы два способа построения (определения) множества R :

$$1) (a, b) \in R \Leftrightarrow n(a, b) \geq \frac{n}{2}$$

2) $(a, b) \in R^+ \Leftrightarrow n(a, b) \geq n(b, a)$, где R и R^+ соответствующие обобщающие отношения.

Отношения R и R^+ называются **мажоритарными отношениями**.

Пример 2 определения обобщающего отношения R .

$X = \{a, b, c\}$, отношения R_1, R_2, R_3 задаются ранжированием в следующем виде:

$$R_1 = (a, b, c), R_2 = (c, b, a), R_3 = (b, a, c).$$

$$n(a, b) = 1, n(b, c) = 2, n(b, a) = 2, n(a, c) = 2, n(c, a) = 1$$

Так как $n(b, c) = n(b, a) = n(a, c) = 2$, то $(b, c) \in R$, $(b, a) \in R$ и $(a, c) \in R$, то вид отношения R : $R = R_3 = (b, a, c)$. По аналогии рассуждения формируются для R^+ . В результате имеем $R = R^+ = R_3$.

Пример 3.

$$X = \{a, b, c\},$$

$$R_1 = (a, b, c), R_2 = (b, c, a), R_3 = (c, a, b).$$

$n(a, b) = 2, n(b, c) = 2, n(a, c) = 1, n(b, a) = 1, n(c, a) = 2, \Rightarrow aRb, bRc, cRa$ (но не aRc как следовало бы из рассуждений о транзитивности).

Таким образом, групповое отношение R не является транзитивным, что не приемлемо, если для задания формы отношений R_i использованы ранговые шкалы. Так как групповое отношение R выражает некоторый согласованный признак, то оно должно индуцировать отношение квазипорядка (некоторого порядка).

На основе анализа приведенных примеров видно, что правило большинства может приводить как к транзитивным, так и к не транзитивным отношениям R . Необходимо сформировать условия, при которых индивидуальные отношения R_i и мажоритарное отношение R являются линейными квазипорядками (т.е. обеспечивают упорядоченность решений).

Рассмотрим множество $X = \{a, b, c\}$. Существует 13 ранжирований (линейных квазипорядков) этого множества: $R_1 = (a, b, c), R_2 = (b, c, a), R_3 = (c, a, b), R_4 = (b, a, c), R_5 = (a, c, b), R_6 = (c, b, a), R_7 = (a \sim b, c), R_8 = (a \sim c, b), R_9 = (b \sim c, a), R_{10} = (c, a \sim b), R_{11} = (b, c \sim a), R_{12} = (a, b \sim c), R_{13} = (a \sim b \sim c)$. Здесь знак « \sim » обозначает неразличимость (эквивалентность) решений. Далее при рассмотрении нумерация ранжирований является фиксированной. Через n_i обозначим количество субъектов (ЛПР, экспертов), которые придерживаются отношения R_i (ранжирования R_i). При этом $\sum_{i=1}^{13} n_i = n$.

В рассмотрение вводится подмножество D таких элементов p_i , для которых $n_i \geq 0$. Подмножество $D \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$, при этом $R_i \in D$, если $n_i > 0$, и $R_i \notin D$, если $n_i = 0$. Тогда множество D называется совокупностью ранжирований.

Пусть имеется совокупность трех строгих ранжирований вида: $(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)$, полученных друг из друга циклической перестановкой объектов (решений). Эта совокупность ранжирований называется циклической. Каждое из упорядочений циклической совокупности порождает остальные упорядочивания перестановкой первого элемента на последнее место и перестановкой последнего элемента на первое место. Эти два элемента называются циклическими. Например, упорядочивание (a, b, c) порождает (b, c, a) с циклическим объектом (элементом) a и упорядочивание (c, a, b) с циклическим объектом c .

Рассмотрим ранжирование вида: $(a \sim b, c), (a \sim c, b), (c, a \sim b)$, каждое из которых представляет из себя линейный квазипорядок (частичный порядок). Каждое из этих ранжирований содержит в себе 2 класса объектов: эквивалентные и связанные с ними доминирующие или доминируемые элементы.

Тогда линейный квазипорядок называется дихотомическим, им соответствующее ранжирование состоит из 2-х классов (т.е., в частном случае, ранжирование состоит из 3-х элементов, один из классов обязательно содержит один элемент). Дихотомическое ранжирование называется однотипным, если их одноэлементные классы имеют один и тот же номер. Тогда ранжирование $(a \sim b, c)$ и $(a \sim c, b)$ являются однотипными, а $(a \sim b, c)$ и $(c, a \sim b)$ не являются однотипными.

То есть, необходимо охарактеризовать (определить условия) индивидуальные отношения (наборы индивидуальных отношений), для которых хотя бы одно (т.е. построенное с использованием одного из правил) мажоритарное отношение было транзитивно.

Для упрощения рассуждений может быть выполнен переход от множества X к любому его трехэлементному подмножеству (к трехэлементным подмножествам). Требуется сформировать критерий допустимости множества ранжирований D

Обобщенное понятие циклической совокупности строгих ранжирований формируется следующим образом. Множество трех линейных квазипорядков (ранжирований) вида $\{aRbRc, bRcRa, cRaRb\}$ называется циклическим, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- а) если в одном из отношений объекты (элементы, решения) являются неразрывными, тогда для циклических объектов остальных отношений имеет место строгое предпочтение;
- б) все три отношения не могут быть одностипно дихотомическими.

Пример ранжирований, соответствующих условию а).

$(x \sim y \sim z), (y \sim z, x), (z, x \sim y).$

Пример ранжирований, соответствующих условию б).

$(x, y \sim z), (y \sim z, x), (z, x \sim y).$

Подмножество $\delta \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$ является допустимым, если при $n_i > 0$ для $R_i \in D$ и $n_i = 0$ для $R_i \notin D$ существует транзитивное мажоритарное отношение R . В том случае, если будет сформирована допустимая совокупность ранжирований $D = \{R_i | i = \overline{1, m}\}$, то существует транзитивное мажоритарное отношение R .

На основе рассмотренных свойств (признаков) циклических ранжирований может быть сформировано условие допустимости совокупности ранжирований D .

Теорема 1. Совокупность ранжирований D является допустимой, когда она не включает циклического множества (т.е. всякое циклическое множество недопустимо и не может содержаться в δ).

В качестве примера, комментирующего суть Теоремы 1, рассмотрим циклические ранжирования следующего вида: $\{(a \sim b \sim c), (c, aR_i b), (bR_i c, a)\}$. За каждое отношение отдано одинаковое число голосов. Тогда $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, но $(a, c) \notin R$, следовательно, R не является транзитивным.

Пусть циклическое множество состоит из дихотомических ранжирований и в соответствии с пунктом б) имеет следующий вид: $\{(a \sim b \sim c), (b \sim c, a), (c, a \sim b)\}$, тогда $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, но $(a, c) \notin R$, следовательно, отношение R нетранзитивно.

В итоге получим, что правило большинства позволяет сформировать транзитивное мажоритарное ранжирование R только в том случае, если множество D ранжирований R_i является допустимым, т.е. в него не могут входить циклические ранжирования. В итоге правило большинства может быть применено в частном случае. Для общего случая (когда отсутствуют ограничения на вид ранжирований) правило большинства не позволяет получить транзитивное мажоритарное ранжирование R .

Правило большинства может быть обобщено (т.е. применимо при построении ранжирования R в общем виде) в терминах расстояния между исходными отношениями (ранжированиями).

На основе ранжирования R_i может быть сформирована матрица парных сравнений

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & \dots & a_{1n}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^k & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}, \text{ где } a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i \succ x_j \\ 0 & \text{при } x_i \sim x_j \\ -1 & \text{при } x_j \succ x_i \end{cases},$$

k – индекс эксперта.

В том случае, если заданы два ранжирования R_n и R_l , тогда расстояние между этими двумя ранжированиями будет определено согласно отношению:

$$d(R_h, R_l) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}^h - a_{ij}^l|$$

Пусть дано множество ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$, тогда расстояние от некоторого ранжирования R до этого множества определяется следующим образом:

$$d(R, R_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}^k - a_{ij}|$$

где a_{ij} – элемент матрицы A соответствующий некоторому ранжированию R (произвольному ранжированию R_i из множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$).

В случае рассмотрения отдельного элемента $a_{ij} = 1$ (соответствующего ранжированию R) может быть определено для него расстояние между R и остальными ранжированиями $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^N d_{ij}(R, R_k) = \sum_{k=1}^N |a_{ij}^k - a_{ij}|$$

То есть p_{ij} определяется для тех элементов a_{ij} , соответствующих ранжированию R , которые равны 1. Элемент p_{ij} – коэффициент потерь (при этом $p_{ii} = 0$), а матрица P называется *матрицей потерь*.

Ранжирование R , такое, что $P = \arg \min d(R, R_k)$ называется *медианой* множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$. Т.е. это такое ранжирование, которое с точки зрения расстояния является «наиболее близким» ко всем ранжированиям $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Для определения мажоритарного транзитивного ранжирования применим *метод Кемени*, в котором при расчете элемента p_{ij} , матрицы потерь P используются отличия значений элементов a_{ij}^k матриц соответствующих ранжирований R_k

Алгоритм Кемени определения меридианы (ранжирования) R , которое будет являться транзитивным, предполагает выполнение следующих шагов.

1 шаг. Для расчета значения элемента p_{ij} матрицы потерь P выполняется идентификация такого ранжирования R^l , для которого выполняется условие:

$$a_{ij}^l = \max_{k=\overline{1, N}} (a_{ij}^k)$$

Тогда значение p_{ij} матрицы потерь определяется согласно отношению:

$$p_{ij} = d_{ij}(R_1, R_l) + d_{ij}(R_2, R_l) + \dots + d_{ij}(R_N, R_l)$$

В итоге формируется матрица P^N , соответствующая элементам $(x_i, x_j) \in X^2$.

После идентификации матрицы потерь требуется определить матрицу Q , на основе которой в дальнейшем идентифицируются альтернативы, соответствующие удаляемым из матрицы P (и, соответственно из матрицы $A_k (k = \overline{1, N})$).

2 шаг. Определение матрицы Q :

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n, \text{ где } E^n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

где E^n – матрица, все элементы (кроме диагональных) равны 1.

3 шаг. В полученной матрице Q^n реализуется **определение элемента** $q_{ij}^n = \min q_{ij}^n$. Альтернативы (решения), определяющие строку и столбец элемента q_{ij}^n обозначаются x_{i_n} и x_{i_l} соответственно (т.е. они размещаются в позиции n и l соответственно).

4 шаг. Полученные таким образом альтернативы x_i и x_j размещаются в n -ой и первой позициях формируемого ранжирования R . После этого реализуется удаление соответствующих i -ой строки и j -го столбца.

Пример определения медианы для множества ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Задано 4 эксперта и сформулированные ими ранжирования в следующем виде:

$$R_1 = (a_2, a_4, a_1, a_3), R_2 = (a_1, a_3 \sim a_4, a_2), R_3 = (a_2 \sim a_3, a_4, a_1), R_4 = (a_3, a_2, a_1 \sim a_4)$$

Ранжированием $R_k (k = \overline{1, N})$ соответствуют матрицы отношений следующего вида:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad R_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1 шаг. Определение матрицы потерь P^N .

Имеем:

$$r_{12}^2 = \max_{k=\overline{1, N}}(r_{12}^k) = 1 \Rightarrow p_{12}^N = d_{12}(R_1, R_2) + d_{12}(R_3, R_2) + d_{12}(R_4, R_2) = 6.$$

По аналогии:

$$r_{13}^2 = \max_{k=\overline{1, N}}(r_{13}^k) = 1 \Rightarrow p_{13}^N = d_{13}(R_1, R_2) + d_{13}(R_3, R_2) + d_{13}(R_4, R_2) = 4.$$

Выполняя расчеты подобным образом, получим матрицу потерь P в следующем виде:

$$P^N = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2 шаг. Определение матрицы потерь Q^N :

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n$$

Имеем матрицу Q^N в следующем виде:

$$Q^N = \begin{vmatrix} 24 & 24 & 23 & 28 \\ 32 & 24 & 30 & 31 \\ 33 & 26 & 24 & 31 \\ 28 & 25 & 25 & 24 \end{vmatrix}$$

3 шаг. Определение матрицы потерь $q_{ij}^N = \min_{i,j=1,n} (q_{ij}^N)$.

В данном случае – это $q_{13}^N = 23$. Тогда альтернативы в результирующем ранжировании разметим следующим образом: $R = \{x_3, \dots, x_1\}$.

Так как решения x_3 и x_1 , исключены из рассмотрения, тогда должны быть модифицированы матрицы R_k путём исключения из них 3-го столбца и 1-ой строки. В результате имеем:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad R_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & - & 0 \end{vmatrix} \quad R_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & - & 0 \end{vmatrix}$$

1 шаг. Определение матрицы потерь. Матрица $P^{(N-2)}$ имеет вид:

$$P^{(N-2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2 шаг. Определение матрицы потерь $Q^{(N-2)}$. На основе матрицы $P^{(N-2)}$ формируем матрицу $Q^{(N-2)}$ в следующем виде:

$$Q^{(N-2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 8 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Так как решения x_1 и x_3 уже добавлены в ранжирование R , то нас будет интересовать решения x_2 и x_4 . Соответственно рассматриваем элементы $q_{24}^{(N-2)} = 11$ и $q_{42}^{(N-2)} = 8$. Т.к. элемент $q_{42}^{(N-2)} < q_{24}^{(N-2)}$, тогда на основе элемента $q_{42}^{(N-2)}$ определяем позиции x_2 и x_4 в ранжировании. Получаем $x_2 = x_{i_2}$ (т.е. решение i во второй позиции в R) и $x_4 = x_{i_3}$ (т.е. решение i в третьей позиции в R). Тогда результирующее ранжирование имеет вид: $R = \{x_3, x_2, x_4, x_1\}$.

3. Порядок выполнения работы

1. Разработать процедуру, реализующую формирование для заданных ранжирований соответствующих им матриц отношений R_i .
2. Разработать процедуру формирования матрицы потерь Q^n на основе сформированных матриц отношений R_i .
3. Разработать процедуру определения решений, включаемых в итоговое ранжирование.
4. Разработать процедуру модификации матриц отношений R_i путем исключения решений, добавленных в формируемое итоговое ранжирование.
5. Разработать модуль, координирующий выполнение упомянутых выше процедур.

4. Варианты заданий.

Вариант 1. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$$R_1 = (x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_8, x_7, x_6);$$

$$R_2 = (x_1, x_5, x_4 \sim x_2, x_6, x_7 \sim x_8, x_6);$$

$$R_3 = (x_3, x_4, x_8 \sim x_7, x_6, x_5, x_2, x_1);$$

$$R_4 = (x_7, x_8, x_3 \sim x_4, x_6 \sim x_2, x_1, x_5);$$

$$R_5 = (x_4, x_8, x_3 \sim x_7, x_6 \sim x_1, x_2, x_5);$$

Вариант 2. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$$R_1 = (x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_6);$$

$$R_2 = (x_1, x_5, x_4 \sim x_2, x_6, x_3);$$

$$R_3 = (x_3, x_4 \sim x_6, x_5, x_2, x_1);$$

$$R_4 = (x_3 \sim x_4, x_6 \sim x_2, x_1, x_5);$$

$$R_4 = (x_3 \sim x_4, x_6 \sim x_2, x_1, x_5);$$

$$R_5 = (x_6 \sim x_4, x_1 \sim x_2, x_5, x_3);$$

$$R_6 = (x_3, x_4, x_6, x_2, x_1 \sim x_5);$$

$$R_7 = (x_3, x_4, x_1 \sim x_2, x_5, x_6);$$

$$R_8 = (x_3, x_4, x_6 \sim x_2, x_1 \sim x_5);$$

Вариант 3. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$$R_1 = (x_2, x_4, x_1, x_3, x_7, x_5, x_6);$$

$$R_2 = (x_1 \sim x_7, x_5, x_4 \sim x_2, x_6, x_3);$$

$$R_3 = (x_3, x_4 \sim x_6, x_5, x_2 \sim x_7, x_1);$$

$$R_4 = (x_3 \sim x_4, x_6 \sim x_2, x_1, x_7, x_5);$$

$$R_4 = (x_3 \sim x_4, x_6 \sim x_2, x_1, x_5 \sim x_7);$$

$$R_5 = (x_6 \sim x_4, x_1 \sim x_2, x_7, x_5, x_3);$$

$$R_6 = (x_7, x_3, x_4, x_6, x_2, x_1 \sim x_5);$$

$$R_7 = (x_7 \sim x_3, x_4, x_6, x_2, x_1 \sim x_5);$$

5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается постановка задачи группового выбора решений?
2. В каком виде представляются исходные отношения, формируемые группой экспертов?
3. В чем заключается правило большинства при построении мажоритарных отношений?
4. В чем состоит причина не выполнения свойства транзитивности для мажоритарного отношения R , обобщающие отношения экспертов?
5. Что из себя представляют дихотомические однотипные и разнотипные ранжирования?
6. Что представляет из себя медиана Кемени с точки зрения группового выбора?
7. Что такое матрица потерь и как она формируется?
8. Как формируются матрицы отношений на основе задаваемых ранжирований?
9. В чем состоит алгоритм формирования итогового ранжирования R ?

