МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Севастопольский государственный университет»

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы по дисциплинам
«Высшая математика», «Математика» студентов
технических и экономических специальностей

Севастополь
СевГУ
2015

УДК 514.1 (076)
ББК 22.151
Б77

Плоскость и прямая в пространстве. Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы по дисциплинам «Высшая математика», «Математика» студентов технических и экономических специальностей / Сост.: Е.Г. Бойко, Е.Н. Ларионова, С.Ф. Ледяев – Севастополь: СевГУ, 2015- 20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам технических специальностей в выполнении самостоятельной работы по разделу «Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве».

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля. Каждое практическое задание содержит 30 вариантов. В большинстве практических задач указаны ответы. Приведен пример выполнения задач с достаточно полными пояснениями.

Методические указания рассмотрены и утверждены к переизданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 3 от 25.05.2015 г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: ст. преподаватель кафедры «Высшая математика» Деркач Н.А.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Задания по теме «Плоскость и прямая в пространстве»

Задание №1.

1.1. Записать общее уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy и содержащей точку $A(1;2;-4)$.

1.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-1)$ и образующую на осях Ox и Oz отрезки, равные соответственно 2 и 1.

1.3. Найти уравнение плоскости, зная, что точки $A(4;0;-3)$ и $B(1;-5;2)$ симметричны относительно этой плоскости.

1.4. Подвижная точка, имеющая начальное положение $A_0(5;-1;2)$, перемещается параллельно оси ординат. Найти координаты точки её встречи с плоскостью $x-2y-3z+7=0$.

1.5. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $3x-5y-6z+4=0$.

1.6. Дана точка $A(-3;4;8)$. Построить плоскость, проходящую через эту точку параллельно плоскости $2x-3y+z=0$.

1.7. Доказать, что три плоскости $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-8y+2z-9=0$ имеют единственную общую точку.

1.8. Найти уравнения линий пересечения плоскости $3x+2y-4z+2=0$ с координатными плоскостями.

1.9. Дана точка $A_0(3;2;6)$. Найти точку её встречи с плоскостью $3x+y-5z+21=0$ при движении по прямой, параллельно оси абсцисс.

1.10. Найти уравнение плоскости, зная, что точки $A(2;3;-5)$ и $B(3;4;1)$ симметричны относительно этой плоскости.

1.11. Найти уравнения линий пересечения плоскости $5x+2y-3z-10=0$ с координатными плоскостями.

1.12. Подвижная точка, имеющая начальное положение $A_0(2;1;3)$, перемещается параллельно оси аппликат. Найти координаты точки её встречи с плоскостью $2x-3y+z-2=0$.

1.13. Доказать, что три плоскости $5x+3y+10z+30=0$, $4x-5y+10z+20=0$, $6x+11y+30z=0$ имеют единственную общую точку.

1.14. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $A_0(2;3;1)$ и отсекают на координатных осях отрезки одинаковой длины.

1.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

1.16. Найти уравнения линий пересечения плоскости $5x-6y+3z-1=0$ с координатными плоскостями.

1.17. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось аппликат и через точку $A_0(-3;2;2)$.

1.18. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях аппликат и абсцисс отрезки, равные соответственно 3 и 2, если точка $C(1;2;-0{,}6)$ принадлежит плоскости.

1.19. Плоскость проходит через точку $C(2;-2;\ 2)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок -2, на оси аппликат отрезок 2. Составить уравнение плоскости.

1.20. Найти уравнение плоскости, зная, что точки $A(1;0;3)$ и $B(2;1;-4)$ симметричны относительно этой плоскости.

1.21. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось абсцисс и через точку $A_0(2;1;-3)$.

1.22. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $M_0(2;-3;3)$ параллельно координатным плоскостям.

1.23. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого плоскостью $2x-3y+5z-30=0$ от координатного угла xOy.

1.24. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y-3z+6=0$. Построить пирамиду.

1.25. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $A_0(4;3;2)$ и отсекают на координатных осях отрезки одинаковой длины.

1.26. Плоскость проходит через точку $M(6;-10;1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок -3, на оси аппликат отрезок 2. Составить уравнение плоскости «в отрезках».

1.27. Плоскость проходит через точки $A(1;2;-1)$ и $B(-3;2;1)$ и отсекает на оси ординат отрезок, равный трём единицам длины. Найти уравнение плоскости.

1.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(3;-1;2)$ параллельно плоскости $2x-y+3z-1=0$.

1.29. Точка $A_0(2;-1;2)$ - основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Записать уравнение плоскости.

1.30. Даны две точки $A(1;3;-2)$ и $B(7;-4;4)$. Через точку B проходит плоскость, перпендикулярно отрезку AB. Записать уравнение плоскости.

Задание №2.

2.1 – 2.10. Вычислить косинус угла между плоскостями.

2.1. $2x-y+2z+15=0$, $6x+2y-3z-1=0$.

2.2. $6x+2y-4z+5=0$, $9x+3y-6z-2=0$.

2.3. $x+2y-z=0$, $2x+y+4z+3=0$.

2.4. $x+y-1=0$, $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$.

2.5. $5x-3y+4z-4=0$, $3x-4y-2z+5=0$.

2.6. $5x-3y+5z+5=0$, $x-2y+3z-5=0$.

2.7. $x-y+\sqrt{2}z-5=0$, xOz.

2.8. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$.

2.9. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.

2.10. $6x+2y-4z+17=0$, $9x-3y-6z-4=0$.

2.11 – 2.20. Определить, при каких значениях p, m следующие уравнения будут определять параллельные плоскости.

2.11. $2x + py + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$.

2.12. $3x - y + pz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$.

2.13. $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - pz - 1 = 0$.

2.14. $mx - y + 2z + 5 = 0$, $x + py - 6z - 1 = 0$.

2.15. $x + py + z - 1 = 0$, $mx - 5y - z + 3 = 0$.

2.16. $16x + 12y + pz - 1 = 0$, $3x + my - 6z + 5 = 0$.

2.17. $8x + py + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 9z + 2 = 0$.

2.18. $x - y + pz - 9 = 0$, $2x + my + 5z - 3 = 0$.

2.19. $x + my - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - pz - 1 = 0$.

2.20. $3x - y + mz + 5 = 0$, $x + py - 6z - 1 = 0$.

2.21 – 2.30. Определить, при каком значении m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости.

2.21. $3x - 5y + mz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

2.22 $6x + 2y - 4z + 5 = 0$, $mx + 3y - 6z - 2 = 0$.

2.23. $x + 2y - mz = 0$, $2x + y + 4z + 3 = 0$.

2.24. $x + y - 1 = 0$, $2x - y + mz + 1 = 0$.

2.25. $mx - 3y + 4z - 4 = 0$, $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

2.26. $5x - 3y + 5z + 5 = 0$, $x + my + 3z - 5 = 0$.

2.27. $x - y + z - 5 = 0$, $mx - 6y - 9z + 2 = 0$

2.28. $4x - my + 3z - 1 = 0$, $x - 4y - z + 9 = 0$.

2.29. $3x - y + 2z + 15 = 0$, $5x + my - 3z - 1 = 0$.

2.30 $3x - y + mz + 5 = 0$, $6x + 2y - 4z + 5 = 0$.

Задание №3. Даны координаты точек N, M, P, F. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки N, M, P. Определить расстояние от точки F до плоскости NMP. Записать уравнение плоскости «в отрезках» и построить плоскость в системе координат.

Вариант	Координаты точек			
	N	***M***	***P***	***F***
3.1	(1; 3; 6)	(2; 2; 1)	(-1; 0; 1)	(-4; 6; -3)
3.2	(1; 3; -7)	(2; -3; 5)	(3; -1; 6)	(4; -1; -3)
3.3	(7; 2; 4)	(7; -1; -2)	(3; 3 ; 1)	(-4; 2; 1)
3.4	(2; 1; 4)	(-1; 5; -2)	(-7; -3; 2)	(-6; -3; 6)
3.5	(-1; -5; 2)	(-6; 0; -3)	(3; 6; -3)	(-10; 6; 7)
3.6	(0; -1; -1)	(-2; 3; 5)	(1; -5; -9)	(-1; -6; 3)
3.7	(5; 2; 0)	(2; 5; 0)	(1; 2; 4)	(-1; 1; 1)
3.8	(2; -1; -2)	(1; 2; 1)	(5; 0; -6)	(-10; 9; -7)
3.9	(-2; 0; -4)	(-1; 7; 1)	(4; -8; -4)	(1; -4; 6)
3.10	(3; 4; -5)	(0; 7; 9)	(-1; 2; -3)	(7; -2; 0)
3.11	(1; 2; 0)	(3; 0; -3)	(5; 2; 6)	(8; 4; -9)
3.12	(2; -1; 2)	(1; 2; -1)	(3; 2; 1)	(-4; 2; 5)
3.13	(1; 1; 2)	(-1; 1; 3)	(2; -2; 4)	(-1; 0; -2)
3.14	(2; 3; 1)	(4; 1; -2)	(6; 3; 7)	(7; 5; -3)
3.15	(1; 1; -1)	(2; 3; 1)	(3; 2; 1)	(5; 9; -8)
3.16	(1; 5; -7)	(-3; 6; 3)	(-2; 7; 3)	(-4; 8; -12)
3.17	(-3; 4; -7)	(1; 5; -4)	(-5; -2; 0)	(2; 5; 4)
3.18	(-1; 2; -3)	(4; -1; 0)	(2; 1; -2)	(3; 4; 5)
3.19	(4; -1; 3)	(-2; 1; 0)	(0; -5; 1)	(3; 2; -6)
3.20	(1; -1; 1)	(-2; 0; 3)	(2; 1; -1)	(2; -2; -4)
3.21	(1; 2; 0)	(1; -1; 2)	(0; 1; -1)	(-3; 0; 1)
3.22	(1; 0; 2)	(1; 2; -1)	(2; -2; 1)	(2; 1; 0)
3.23	(1; 2; -3)	(1; 0; 1)	(-2; -1; 6)	(0; -5; -4)
3.24	(3; 10; -1)	(-2; 3; -5)	(-6; 0; -3)	(1; -1; 2)
3.25	(-1; 2; 4)	(-1; -2; -4)	(3; 0; -1)	(7; -3; 1)
3.26	(0; -3; 1)	(-4; 1; 2)	(2; -1; 5)	(3; 1; -4)
3.27	(1; 3; 0)	(4; -1; 2)	(3; 0; 1)	(-4; 3; 5)
3.28	(1; 4; -7)	(4; 1; 8)	(2; 3; -4)	(0; 1; 3)
3.29	(1; 2; 5)	(-1; 4; 3)	(-3; 0; 2)	(6; 5; 4)
3.30	(2; 1; -3)	(3; 5; -1)	(4; -7; 5)	(1; -1; 2)

Ответы (расстояние): 3.1) 7,483. 3.2) 3,097. 3.3) 4,196. 3.4) 2,132. 3.5) 12,329. 3.6) 5,516. 3.7) 3,464. 3.8) 14,967. 3.9) 7,071. 3.10) 8,338. 3.11) 7,286. 3.12) 7,036. 3.13) 4,183. 3.14) 5. 3.15) 10,914. 3.16) 7. 3.17) 3,173. 3.18) 7,071. 3.19) 7,603. 3.20) 3,284. 3.21) 3,082. 3.22) 0,798. 3.23) 6,532. 3.24) 7. 3.25) 4. 3.26) 6,964. 3.27) 6,124. 3.28) 2,828. 3.29) 3,556. 3.30) 2,364.

Задание №4. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки *N*, *M*. Определить синус угла между прямой *NM* и заданной плоскостью.

Вари ант	***N***	***M***	Плоскость
1	2	3	4
4.1	(-4; 6; -3)	(0; 6; 10)	$x+3y+2z+5=0$
4.2	(4; -1; -3)	(4; 10; 5)	$6x+2y-4z+5=0$
4.3	(-4; 2; 1)	(-4; 10; 1)	$2x+y+4z+3=0$
4.4	(-6; -3; 6)	(1; 0; 5)	$3x-4y-2z+5=0$
4.5	(-10; 6; 7)	(-10; 3; 1)	$x-3y+5z+5=0$
4.6	(-1; -6; 3)	(1; 6; 3)	$x-y+z-5=0$
4.7	(-1; 1; 1)	(2; -7; 0)	$x-4y-z+9=0$
4.8	(-10; 9; -7)	(-10; 10; 0)	$3x-y+2z+15=0$
4.9	(1; -4; 6)	(2; -7; 5)	$6x+2y-4z+5=0$
4.10	(7; -2; 0)	(10; 1; 2)	$6x+2y-4z+17=0$
4.11	(8; 4; -9)	(8; -4; -10)	$9x-3y-6z-4=0$
4.12	(-4; 2; 5)	(4; 2; 20)	$3x-y+2z+15=0$
4.13	(-1; 0; -2)	(3; 5; 0)	$5x+9y-3z-1=0$
4.14	(7; 5; -3)	(0; 10; -7)	$4x-5y+3z-1=0$
4.15	(5; 9; -8)	(1; 9; 0)	$x-4y-z+9=0$
4.16	(-4; 8; -12)	(1; 0; -12)	$5x-3y+5z+5=0$
4.17	(2; 5; 4)	(3; 5; -1)	$x-2y+3z-5=0$
4.18	(3; 4; 5)	(0; -1; 10)	$5x-3y+4z-4=0$
4.19	(3; 2; -6)	(0; 10; 15)	$3x-4y-2z+5=0$
4.20	(2; -2; -4)	(4; 3; -1)	$x+y-1=0$
4.21	(-3; 0; 1)	(3; 5; 1)	$x+2y-z=0$
4.22	(2; 1; 0)	(10; 1; -5)	$2x+y+4z+3=0$

1	2	3	4
4.23	(0; -5; -4)	(2; -1; 4)	$6x+2y-4z+5=0$
4.24	(1; -1; 2)	(2; -1; 10)	$9x+3y-6z-2=0$
4.25	(7; -3; 1)	(7; 0; 10)	$6x+2y-3z-1=0$
4.26	(3; 1; -4)	(1; 9; 4)	$x-3y+2z+15=0$
4.27	(-4; 3; 5)	(4; 0; -5)	$x-2y-4z+5=0$
4.28	(0; 1; 3)	(5; 4; 3)	$x-2y-4z+17=0$
4.29	(6; 5; 4)	(12; 0; 4)	$2x-3y-5z-4=0$
4.30	(1; -1; 2)	(10; 10; 11)	$5x-2y+z+15=0$

Ответы (синус угла): 4.1) 0,589. 4.2) 0,098. 4.3) 0,218. 4.4) 0,266. 4.5) 0,529. 4.6) 0,475. 4.7) 0,986. 4.8) 0,491. 4.9) 0,161. 4.10) 0,456. 4.11) 0,331. 4.12) 0,849. 4.13) 0,820. 4.14) 0,969. 4.15) 0,316. 4.16) 0,676. 4.17) 0,734. 4.18) 0,368. 4.19) 0,680. 4.20) 0,375. 4.21) 0,836. 4.22) 0,093. 4.23) 0,175. 4.24) 0,431. 4.25) 0,316. 4.26) 0,233. 4.27) 0,896. 4.28) 0,037. 4.29) 0,561. 4.30) 0,347.

Задание №5

Прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей. Написать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Определить косинусы углов прямой с координатными осями.

5.1 $2x+3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$.

5.2 $x-2y+z-4=0$, $2x+2y-z-8=0$.

5.3 $x+5y+2z-4=0$, $-2x+2y+2z+3=0$.

5.4 $x-3y+2z+2=0$, $x+3y+z+14=0$.

5.5 $2x-y+2z-7=0$, $x-2y+3z+4=0$.

5.6 $3x-y+2z-4=0$, $2x+2y-z-4=0$.

5.7 $6x-7y+z+4=0$, $2x+3y-z-8=0$.

5.8 $2x-2y+z-3=0$, $x+3y+z-5=0$.

5.9 $x+y+z-2=0$, $x-y-2z+2=0$.

5.10 $3x+y-z-6=0$, $3x-y+2z=0$.

5.11 $x-y-z-2=0$, $x-2y+z+4=0$.

5.12 $3x+3y-2z-1=0$, $2x-3y+z+6=0$.

5.13 $4x-y+5z-6=0$, $6x+y-z+7=0$.

5.14 $5x-4y+6z-1=0$, $2x-y-z+2=0$.

5.15 $2x+y-3z-2=0$, $2x-y+z+6=0$.

5.16 $3x-y-3z-1=0$, $-x+y+z+10=0$.

5.17 $4x+y+z+2=0$, $2x-y-3z-8=0$.

5.18 $3x-y-z+3=0$, $2x+y-3z-4=0$.

5.19 $2x-3y-3z-9=0$, $x-2y+z+3=0$.

5.20 $x+2y+z-1=0$, $x-2y+z+1=0$.

5.21 $x-y-z-1=0$, $x-y+2z+1=0$.

5.22 $x+2y+z-1=0$, $3x-y+4z-10=0$.

5.23 $4x+y-6z-2=0$, $x+y-3z+2=0$.

5.24 $2x-y+z-4=0$, $x+3y-4z+4=0$.

5.25 $2x+3y-4z+5=0$, $x-y+z=0$.

5.26 $x-2y-z-1=0$, $3x-y+z-2=0$.

5.27 $2x+3y+2z+8=0$, $x-y-z-9=0$.

5.28 $x-2y+3z-4=0$, $2x+3y-4z+6=0$.

5.29 $x-2y+3z+1=0$, $2x+y-4z-8=0$.

5.30 $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0$.

Ответы ($\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma$): 5.1) (0,28; 0,466; 0,839). 5.2) (0; 0,447; 0,894). 5.3) (0,408; 0,408; 0,816). 5.4) (0,829; 0,092; 0,552). 5.5) (0,196; 0,784; 0,588). 5.6) (0,272; 0,634; 0,724). 5.7) (0,12; 0,241; 0,963). 5.8) (0,527; 0,105; 0,843). 5.9) (0,267; 0,802; 0,535). 5.10) (0,092; 0,829; 0,552). 5.11) (0,802; 0,535; 0,267). 5.12) (0,178; 0,416; 0,892). 5.13) (0,112; 0,953; 0,28). 5.14) (0,501; 0,852; 0,15). 5.15) (0,218; 0,873; 0,436). 5.16) (0,707; 0; 0,707). 5.17) (0,13; 0,911; 0,391). 5.18) (0,422; 0,738; 0,527). 5.19) (0,87; 0,483; 0,097). 5.20) (0,707; 0; 0,707). 5.21) (0,707; 0,707; 0). 5.22) (0,786; 0,087; 0,612). 5.23) (0,408; 0,816; 0,408). 5.24) (0,087; 0,786; 0,612). 5.25) (0,127; 0,762; 0,635). 5.26) (0,424; 0,566; 0,707). 5.27) (0,154; 0,617; 0,772). 5.28) (0,082; 0,816; 0,572). 5.29) (0,408; 0,816; 0,408). 5.30) (0,298; 0,596; 0,745).

Задание №6. Задано общее уравнение плоскости и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости. Найти координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Вариант	Плоскость	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	2	3
6.1	$5x - 2y + z + 15 = 0$	(10; 10; 9)
6.2	$2x - 3y - 5z - 4 = 0$	(12; 5; 4)
6.3	$x - 2y - 4z + 17 = 0$	(5; 4; 3)
6.4	$x - 2y - 4z + 5 = 0$	(4; 0; -5)
6.5	$x - 3y + 2z + 15 = 0$	(1; 9; 4)
6.6	$6x + 2y - 3z - 1 = 0$	(7; 0; 10)
6.7	$9x + 3y - 6z - 2 = 0$	(2; -1; 10)
6.8	$6x + 2y - 4z + 5 = 0$	(2; -1; 4)
6.9	$2x + y + 4z + 3 = 0$	(10; 1; -5)
6.10	$x + 3y - z = 0$	(3; 5; 1)
6.11	$x + y - 1 = 0$	(9; 3; -1)
6.12	$3x - 4y - 2z + 5 = 0$	(0; 10; 15)
6.13	$5x - 3y + 4z - 4 = 0$	(0; -1; 10)
6.14	$x - 2y + 3z - 5 = 0$	(3; 5; -1)
6.15	$5x - 3y + 5z + 5 = 0$	(2; 4; -12)
6.16	$x - 4y - z + 9 = 0$	(5; 9; 1)
6.17	$4x - 5y - 3z - 1 = 0$	(0; 10; -7)
6.18	$5x + 9y - 3z - 1 = 0$	(3; 5; 0)
6.19	$3x - y + 2z + 15 = 0$	(4; 2; 20)
6.20	$9x - 3y - 6z - 4 = 0$	(8; -4; -10)
6.21	$6x + 2y - 4z + 17 = 0$	(10; 1; 2)
6.22	$6x + 2y - 4z + 5 = 0$	(2; -7; 5)
6.23	$3x - y + 2z + 15 = 0$	(-10; 10; 0)

1	2	3
6.24	$x-4y-z+9=0$	(2; -7; 0)
6.25	$x-y+z-5=0$	(1; 6; 3)
6.26	$x-3y+5z+5=0$	(-10; 3; 1)
6.27	$3x-4y-2z+5=0$	(1; 0; 5)
6.28	$2x+y+4z+3=0$	(-4; 10; 1)
6.29	$6x+2y-4z+5=0$	(4; 10; 5)
6.30	$x+3y+2z+5=0$	(0; 6; 10)

Ответы (координаты точки пересечения): 6.1) (1,0; 13,6; 7,2). 6.2) (12,789; 3,816; 2,026). 6.3) (4,905; 4,19; 3,381). 6.4) (2,619; 2,762; 0,524). 6.5) (1,214; 8,357; 4,429). 6.6) (5,653; -0,449; 10,673). 6.7) (5,357; 0,119; 7,762). 6.8) (2,107; -,0964; 3,929). 6.9) (9,619; 0,81; -5,762). 6.10) (1,455; 0,364; 2,545). 6.11) (3,5; -2,5; -1). 6.12) (6,724; 1,034; 10,517). 6.13) (-3,9; 1,344; 6,88). 6.14) (4,071; 2,857; 2,214). 6.15) (6,831; 1,102; -7,169). 6.16) (6,278; 3,889; -0,278). 6.17) (2,4; 7,0; 8,8). 6.18) (0,435; 0,383; 1,539). 6.19) (-9,929; 6,643; 10,714). 6.20) (-2,0; -0,667; -3,333). 6.21) (2,393; -1,536; 7,071). 6.22) (3,821; -6,393; 3,786). 6.23) (-4,643; 8,214; 3,571). 6.24) (-0,167; 1,667; 2,167). 6.25) (3,333; 3,667; 5,333). 6.26) (-9,743; 2,229; 2,286). 6.27) (1,207; -0,276; 4,862). 6.28) (-4,857; 9,571; -0,714). 6.29) (0,893; 8,964; 7,071). 6.30) (-3,071; -3,214; 3,857).

Уравнения плоскости в пространстве

В пространстве с заданной декартовой системой координат однозначное расположение плоскости можно задать различными способами, существуют различные уравнения плоскости в пространстве.

Пусть точки $N(x_1, y_1, z_1)$, $M(x_2, y_2, z_2)$, $P(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой. Тогда через них можно провести плоскость, причем только одну. Пусть в этой же плоскости лежит точка $G(x, y, z)$ с текущими координатами. Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Если в уравнении (2) раскрыть скобки и обозначить свободный член через D, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3}$$

Примечание. Если в общем уравнении (3) один из коэффициентов *A, B, C* равен нулю, то плоскость проходит параллельно соответствующей оси. Если два коэффициента из *A, B, C* равны нулю, плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. Например, плоскость $4x - 5z - 1 = 0$ проходит параллельно оси Oy, плоскость $y + 3 = 0$ проходит параллельно координатной плоскости xOz через точку $y = -3$ на оси Оу. Коэффициенты *A, B, C* в общем уравнении являются одновременно координатами вектора $\vec{N}(A, B, C)$, перпендикулярного плоскости.

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4}$$

Здесь a, b, c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Нормальное уравнение плоскости

Пусть задан радиус-вектор единичной длины $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ - углы между вектором $\vec{n}$ и положительными полуосями координат. Задано также расстояние $OD = p$ от начала координат до плоскости.

В произвольную точку плоскости $M(x, y, z)$ проведем радиус-вектор, координаты которого совпадают с координатами точки M.

Векторное уравнение плоскости:

$$\vec{OM} \cdot \vec{n} - p = 0. \tag{5}$$

Координатная форма уравнения (5) называется нормальным уравнением плоскости:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \tag{6}$$

Формула нормирующего множителя для перехода от общего уравнения к нормальному:

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn}(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (7)$$

Формула для определения расстояния ρ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (3):

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (8)$$

Две плоскости перпендикулярны (параллельны) друг другу, если перпендикулярны (параллельны) их векторы нормали. Поэтому, если даны две плоскости

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

то условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0, \qquad (9)$$

условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (10)$$

Угол между плоскостями можно определить по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (11)$$

Уравнения прямой линии в пространстве

Уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{S}(n, m, p)$, где $M(x, y, z)$ - принадлежащая прямой линии точка с переменными координатами, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (12)$$

Уравнения (12) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (13)$$

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in (-\infty;\infty). \qquad (14)$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых

Две прямые линии в пространстве, заданные каноническими уравнениями

$\frac{x-x_1}{n_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{n_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ будут параллельны, если соответствующие направляющие векторы коллинеарны: $\frac{n_1}{n_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Две прямые перпендикулярны, если перпендикулярны направляющие векторы: $n_1n_2 + m_1m_2 + p_1p_2 = 0$.

Условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть задана плоскость (р) $Ax + By + Cz + D = 0$, нормальный вектор которой $\vec{N}(A,B,C)$, и прямая L в пространстве $\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$, направляющий вектор которой $\vec{S}(n,m,p)$ (см. рисунок 1).

Обозначим $\angle\alpha$ - угол между прямой и вектором $\vec{N}$, $\angle\beta$ - угол между прямой и плоскостью.

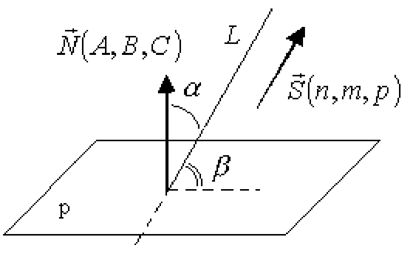

Рисунок 1 – Прямая и плоскость

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ коллинеарны:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{S}$ перпендикулярны между собой:

$$A \cdot n + B \cdot m + C \cdot p = 0 .$$

Угол β между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}} . \qquad (16)$$

Указания к выполнению заданий и примеры решения

Задание №1. При выполнении вариантов задания следует использовать уравнения плоскости (2) – (4) и примечания к уравнению (3). Если три плоскости имеют единственную общую точку, это означает, что система линейных алгебраических уравнений, составленная из уравнений плоскостей, имеет единственное решение (нужно применить правило Крамера).

Задание №2.

В вариантах 2.1 – 2.10. вычислить косинус угла между заданными плоскостями поможет формула (11).

В вариантах 2.11 – 2.20. определить, при каких значениях p, m заданные уравнения будут определять параллельные плоскости, помогут условия параллельности плоскостей (10).

В вариантах 2.21 – 2.30. определить, при каком значении m заданные пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости, помогут условия перпендикулярности плоскостей (9).

Задание №3. Даны координаты точек N, M, P, F. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки N, M, P. Определить расстояние от точки F до плоскости NMP. Записать уравнение плоскости «в отрезках» и построить плоскость в системе координат.

Дано: $N(-2;1;5)$, $M(3;6;-2)$, $P(5;-8;3)$, $F(10;-4;6)$

Решение. Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки (1):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Считая точки N, M, P первой, второй и третьей точкой, подставим их координаты в уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-5 \\ 3+2 & 6-1 & -2-5 \\ 5+2 & -8-1 & 3-5 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-5 \\ 5 & 5 & -7 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix}=0;$$ раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости:

$$-73x-39y-80z+293=0.$$

Расстояние от точки F до плоскости определяем по формуле (8):

$\rho=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где (x_0, y_0, z_0) - координаты точки F.

$$\rho=\frac{|-73\cdot 10-39\cdot(-4)-80\cdot 6+293|}{\sqrt{(-73)^2+(-39)^2+80^2}}=6{,}611.$$

Запишем уравнение плоскости $-73x-39y-80z+293=0$ «в отрезках».

$-73x-39y-80z=-293$, разделим на -293. Запишем в виде:

$$\frac{x}{293/73}+\frac{y}{293/39}+\frac{z}{293/80}=1 \text{ или } \frac{x}{4{,}0143}+\frac{y}{7{,}513}+\frac{z}{3{,}663}=1.$$

Рисуем декартову систему координат в пространстве, на оси Ox ставим точку 4,0143, на оси Oy ставим точку 7,513, на оси Oz ставим точку 3,663. Каждая пара точек определяет линию пересечения заданной плоскости и координатной плоскости. Соединяем точки отрезками прямых. Полученный треугольник принадлежит плоскости (см. рисунок 2).

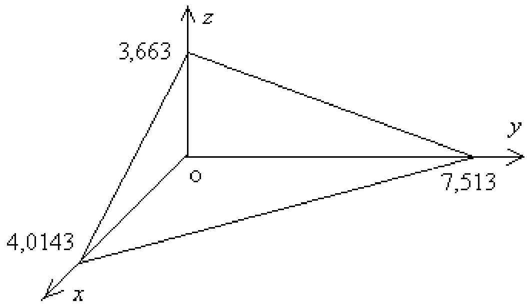

Рисунок 2 – плоскость в задании №3

Задание №4. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки *N*, *M*. Определить синус угла между прямой *NM* и заданной плоскостью.

Дано: $N(2;-3;4)$, $M(9;12;7)$, $3x-2y-2z+10=0$.

Решение. Используем уравнения прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Считая точку N первой, а точку M - второй, подставим их координаты в уравнения.

$\frac{x-2}{9-2}=\frac{y+3}{12+3}=\frac{z-4}{7-4}$, $\frac{x-2}{7}=\frac{y+3}{15}=\frac{z-4}{3}$. Последние уравнения – канонические. В знаменателях дробей расположены координаты направляющего вектора: $\vec{S}(7;15;3)$. Приравнивая каждую дробь параметру t и выражая переменные, получим параметрические уравнения прямой (14):

$$\begin{cases} x=2+7t, \\ y=-3+15t, \quad t\in(-\infty;\infty). \\ z=4+3t, \end{cases}$$

Синус угла между прямой *NM* и заданной плоскостью определяем по формуле (16). Здесь $A=3$, $B=-2$, $C=-2$ - коэффициенты при переменных в уравнении плоскости (координаты нормального вектора к плоскости), n,m,p - координаты направляющего вектора $\vec{S}(7;15;3)$.

$$\cos\alpha=\sin\beta=\frac{|3\cdot 7-2\cdot 15-2\cdot 3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{7^2+15^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{17}\sqrt{283}}=0,216\cdot$$

Задание №5. Прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей. Написать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Определить косинусы углов прямой с координатными осями.

Дано: $5x-3y+z+6=0$, $-x+3y-2z+3=0$.

Решение. Вначале определяем координаты одной из точек пересечения плоскостей. Для этого одну из координат точки задаем произвольно. Пусть $x_0=0$. Подставим эту координату в уравнения плоскостей. Полученные два уравнения составляют систему. Решаем систему: $\begin{cases}-3y_0+z_0=-6,\\ 3y_0-2z_0=-3,\end{cases}$ откуда $z_0=9$, $y_0=5$.

Нашли точку пересечения $M_0(0;9;5)$.

Направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальным векторам плоскостей, поэтому его определяем как векторное произведение $\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$.

$$\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -3 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5 & -3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=3\vec{i}+9\vec{j}+12\vec{k}.$$

Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-9}{9}=\dfrac{z-5}{12}$.

Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases}x=3t,\\ y=9+9t,\\ z=5+12t,\end{cases}$ $t\in(-\infty;\infty)$.

Обозначим углы между прямой и координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно α,β,γ. Косинусы углов между прямой и координатными осями определяем как модули косинусов углов между направляющим вектором $\vec{S}$ и ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\cos\alpha=\dfrac{|n|}{|\vec{S}|}$,

$$\cos\beta = \frac{|m|}{|\vec{S}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{|p|}{|\vec{S}|}. \quad \cos\alpha = \frac{|3|}{\sqrt{3^2+9^2+12^2}} = \frac{3}{\sqrt{234}} = 0{,}196,$$

$$\cos\beta = \frac{9}{\sqrt{234}} = 0{,}588, \quad \cos\gamma = \frac{12}{\sqrt{234}} = 0{,}784.$$

Задание №6. Задано общее уравнение плоскости и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости. Найти координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Дано: $M_0(3,-5,7)$, $7x-2y-4z+10=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $\vec{N}(7;-2;-4)$ является направляющим для искомой прямой. Запишем канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-7}{-4}; \quad \begin{cases} x = 3+7t, \\ y = -5-2t, \\ z = 7-4t. \end{cases}$$

В точке пересечения прямой и плоскости координаты совпадают, поэтому в уравнение плоскости подставим координаты точки прямой, выраженные через параметр.

$7(3+7t)-2(-5-2t)-4(7-4t)+10=0$, $\quad t=-\dfrac{13}{69}$. Вычисляем координаты точки пересечения: $x = 3-7\cdot\dfrac{13}{69} = 1{,}681$,

$$y = -5-2\left(-\frac{13}{69}\right) = -4{,}623, \quad z = 7-4\cdot\left(-\frac{13}{69}\right) = 7{,}754.$$

Ответ: (1,681; -4,623; 7,754).