Ряды Тейлора и Лорана

Функциональный ряд комплексного переменного это

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z) + \ldots$$

где функции $f_k(z)$ определены на некотором множестве D в комплексной плоскости.

Очевидно, что данный ряд эквивалентен двум рядам действительного переменного

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) + i \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, y)$$

где $u_k(x, y) = \operatorname{Re} f_k(z),\ v_k(x, y) = \operatorname{Im} f_k(z)$

Данный ряд будет сходящимся в точке z, если сходятся ряды действительных и мнимых частей, или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n \geq N \Rightarrow |R_n(z)| < \varepsilon,\ R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$$

Функциональный ряд будет равномерно сходящимся, если

1) ряд сходится в каждой точке множества D;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от z и такой, что для всех $n \geq N$ и для всех z из D остатки этого ряда удовлетворяют неравенству

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Степенным рядом называют ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots c_n(z - z_0)^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \qquad (1)$$

где z — независимая комплексная переменная, коэффициенты c_n — заданные комплексные числа, z_0 — фиксировано.

Теорема Абеля. Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд:

1) абсолютно сходится в круге

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R;$$

2) равномерно сходится в круге

$$|z - z_0| \le r < R\,.$$

Свойства степенных рядов

1. Пусть степенной ря (1)) расходится точке z_1. Тогда данный ряд расходится в каждой точке, удовлетворяющей неравенству

$$|z-z_0|>|z_1-z_0|.$$

2. Для любого степенного ряд (1) найдется такое число R, что в круг $|z-z_0|<R$ ряд (1) будет сходиться, а вне этого круга при $|z-z_0|>R$ будет расходиться.

Если $R>0$, то наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z-z_0|<R$.

В точках границы $|z-z_0|=R$ ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. Область

$$|z-z_0|>R, \quad R>0,$$

называется ***кругом сходимости*** степенного ряда (1); число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (1).

Радиус сходимости можно вычислить как $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ или $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

Теорема. Всякая аналитическая в круге $|z-z_0|<R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ***ряд Тейлора***

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ \ (n=0,1,2,\ldots),$$

где l — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга.

Разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций совпадают с разложениями в ряд Тейлора для действительного переменного.

Например,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ (R=\infty)\,;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R=\infty)\,; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \ (R=\infty)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} z^n + \ldots \ (R=1)\,;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \ (R=1)\,;$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (R=1)\,;$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \ (R=1)\,;$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D.

Если $c_0 = f(z_0) = 0$, то точка z_0 $(z_0 \in D)$ называется ***нулем функции*** $f(z)$.

Если $c_0 = 0 = c_1 = c_2 = \ldots c_{m-1}$, а $c_m \neq 0$, то точка z_0 $(z_0 \in D)$ называется ***нулем кратности m*** (нулем m-го порядка).

Нуль m-го порядка характеризуется соотношениями

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

В окрестности нуля m-го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m q(z),\ q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n,$$

$q(z)$ — аналитична в окрестности точки z_0, $q(z_0) \neq 0$.

Пример. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z},\ (z \neq 0),\ f(0) = 0.$$

Решение. Используем разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$. Получим

$$f(z) = \frac{z^8}{\left(z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)\right)} = \frac{z^8}{\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)} = z^5 q(z),$$

где

$$q(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots\right)}.$$

Так как $q(0) = 6 \neq 0$, то точка $z_0 = 0$ является нулем пятого порядка.

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}=\uparrow+\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}=\sum U_n \qquad \sum V_n=\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\ рас-ся \qquad \lim\frac{U_n}{V_n}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}=\sum U_n \qquad \sum V_n=\sum\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\ сх-ся \qquad \lim\frac{U_n}{V_n}=1$$

Найти радиус степенного ряда

$$\sum e^{in}z^n \qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{in}}{e^{i(n+1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|e^{-i}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\cos 1-i\cdot\sin 1\right|=$$

$$=\sqrt{\cos^2 1+\sin^2 1}=1$$

Теорема. Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R < \infty)$ функция $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ***ряд Лорана***

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

Коэффициенты которого определяются формулой $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_l \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ где l- произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

Ряд Лорана для функции $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ состоит из двух частей

$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ Называется правильной частью ряда Лорана. Этот ряд сходится к аналитической функции $f_1(z)$ внутри кольца $|z - z_0| < R$

$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ Называется главной частью ряда Лорана. Этот ряд сходится к аналитической функции $f_2(z)$ вне круга $|z - z_0| > r$.

Внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

В частности, если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$, то ее разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора.

Разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right)$$

$$z_0 = 0 \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \quad \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \quad |z| < 1$$

$a)\ 0 \le |z| < 2$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \quad |z| < 2 \quad = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \ldots\right)$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right)$$

$b)\ \ 2 < |z| < 3$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} \qquad \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \qquad 2 < |z| \qquad \frac{1}{z}(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\ldots) = \frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\ldots$$

$$f(z) = \frac{1}{5}(-\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots)-(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}-\ldots)) =$$

$$-\frac{1}{5}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(-1)^{n+1}}{z^n})$$

Теорема. Разложение в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ является единственно возможным для данной функции в данном круговом кольце $r < |z-a| < R$.

Доказательство. Пусть для всех точек кольца $r < |z-a| < R$ имеют место два разложения

Мы знаем, что $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ по любому замкнутому контуру Γ, содержащему внутри себя точку a. Выберем в качестве Γ окружность с центром в точке a, лежащую внутри кольца $r < |z-a| < R$. Равенство (2) проинтегрируем почленно по контуру Γ. $\int\limits_{\Gamma} c_n(z-a)^{n-k-1}dz = c_n \int\limits_{\Gamma}(a-z)^{n-k-1}dz = 0$ при любом $k \neq n$, поэтому после интегрирования получим $2\pi i c_k = 2\pi i c'_k$, следовательно, $c_k = c'_k$ при любом $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Теорема доказана.