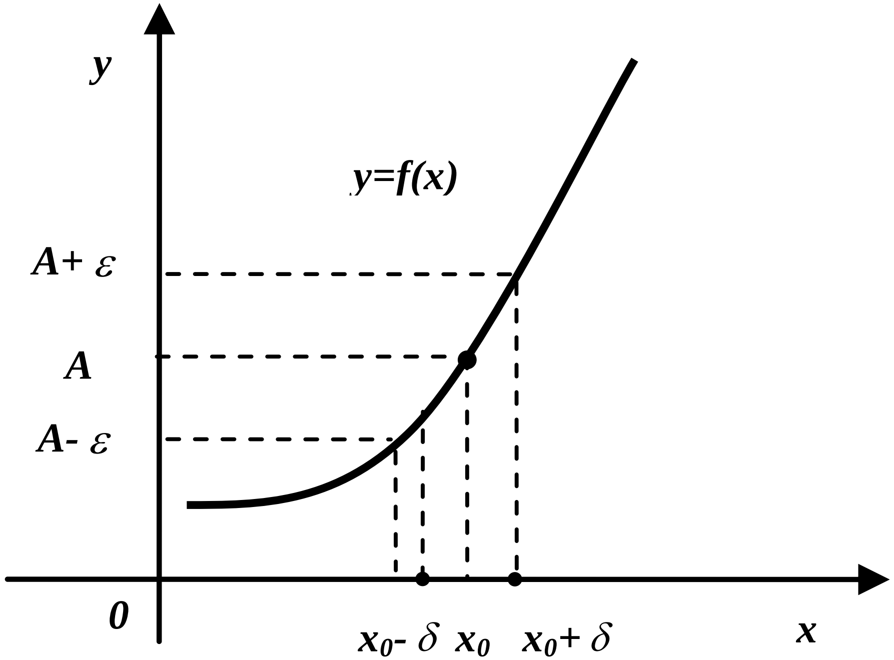
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение. Число *A*называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением, может быть точки x_0, и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех*x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

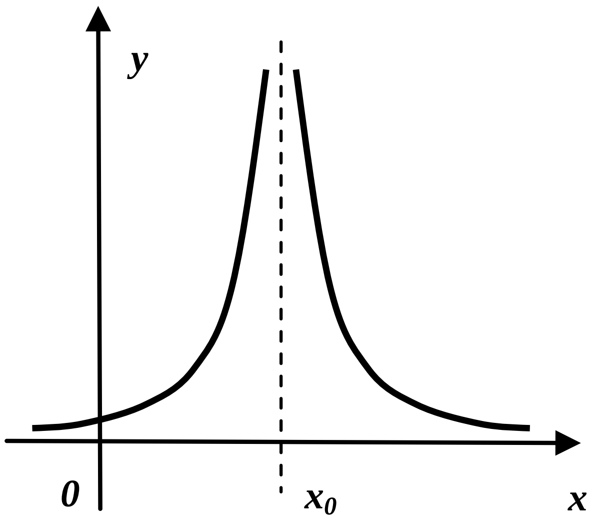


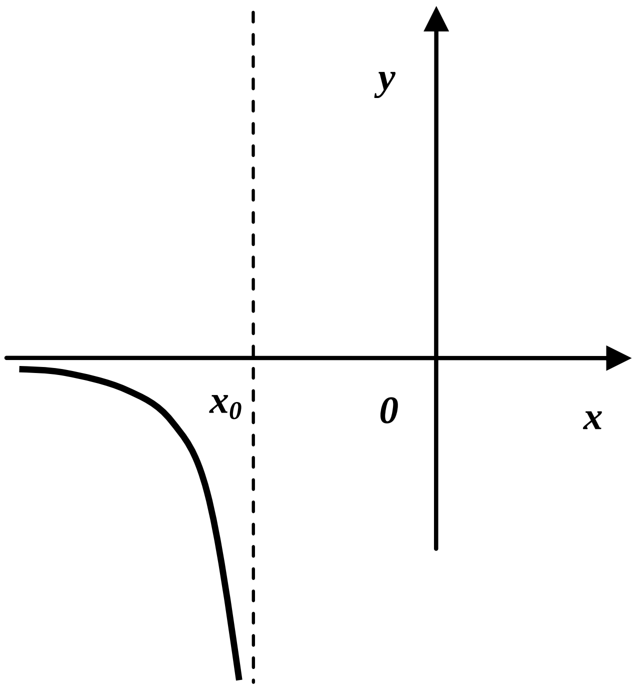
На рисунке график функции $f(x)$ дает геометрическую иллюстрацию равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Для $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ график размещается внутри полосы, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

Функцию $f(x)$ называют <u>бесконечно большой</u> при $x \to x_0$, если для произвольного сколь угодно большого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всехx, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.





Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ и при этом $f(x)$ принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то соответственно пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$ (см. рисунки).

Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Например, функции $y = (x-2)^2$ при $x \to 2$ и $y = \dfrac{5}{2x+1}$ при $x \to \infty$ суть бесконечно малые величины, ибо их пределы равны нулю: $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{2x+1} = 0$. Функция $y = 3^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$, а функция $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ — при $x \to +\infty$. Символически равенства $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 0$ будем записывать так: $[3^{-\infty}] = 0$ и $\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{+\infty}\right] = 0$.

Свойства бесконечно малых величин:

1. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

2. *Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную или на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.*

3. *Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.*

Укажем основные свойства пределов функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$, тогда имеют место соотношения.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c,\ (c = const)$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $c = const$.

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n,\quad n \in N$.

6) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Заметим, что данные свойства справедливы и в тех случаях, когда x_0 является ∞ $(+\infty, -\infty)$.

Данные свойства позволяют сформулировать правило нахождения предела функции при $x \to x_0$.

В выражение, стоящее под знаком предела, вместо аргумента x следует подставить предельное значение x_0. Если в результате вычислений получается конечное число (или ∞), то это число (или ∞) и является искомым пределом. Если в результате подстановки получаем выражения вида: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$, то для раскрытия этих неопределенностей применяют специальные приемы.

Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей на **примерах**:

1)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

2)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5-x-4)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(2-x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{1}{2}.$$

3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7}{3x^2-10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{7}{x^2}}{3-\dfrac{10}{x^2}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

Предел функции $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$ при $x\to\infty$ (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$) в общем случае

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}0, & \textit{если} \quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \textit{если} \quad n=m\\ \infty, & \textit{если} \quad n>m.\end{cases}$$

Первый замечательный предел

Рассмотрим предел функции

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Данный предел содержит неопределенность, которую невозможно раскрыть при помощи описанных выше элементарных приемов. Для вычисления данного предела используем следующую **теорему:**

Если $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$ а в окрестности точки a выполняется

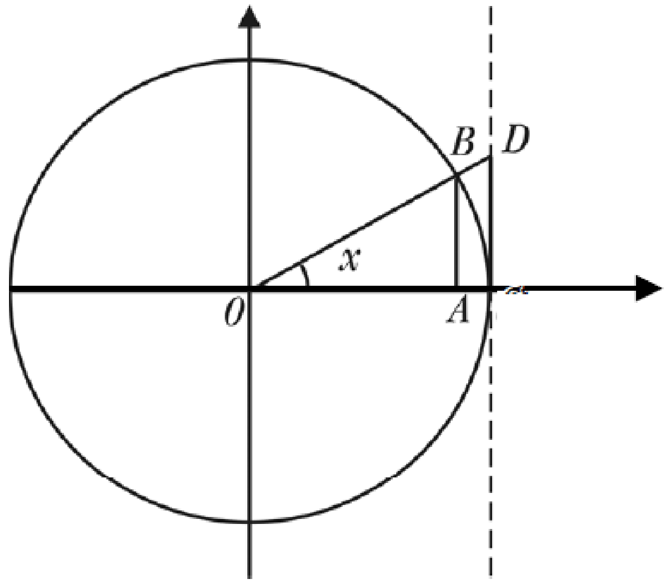
$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x),$$

тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Это теорема о «зажатой» функции. Эту теорему еще называют «теорема о двух милиционерах».

Итак, рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Функция определена, всюду, кроме 0. Для того, чтобы вычислить предел, рассмотрим рис., где x – дуга BC (или угол BOC). Обозначим S_c – площадь сектора OBC.Тогда



$$S_{OAB} < S_c < S_{ODC} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x .$$

Умножая это неравенство на $\dfrac{2}{\sin x}$ $(\sin x > 0)$ имеем $\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

Заметим, что такое же двойное неравенство получается при отрицательных x, точнее, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, что легко проверить. Так как $\cos x \to 1$, $\dfrac{1}{\cos x} \to 1$, то в силу приведенной теоремы также получаем

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Это утверждение называют часто ***первым замечательным пределом*** из-за его важных применений, с которыми мы еще познакомимся.

Примеры:

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}\arcsin x=t & x=\sin t\\ \sin(\arcsin x)=\sin t & x\to 0, t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

5)

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}=[0\cdot\infty]=\begin{bmatrix}x-2=t, \ x=t+2,\\ x\to 2, \ t\to 0.\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}t\,\mathrm{ctg}\frac{\pi t}{4}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{4}}\cdot\cos\frac{\pi t}{4}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi t}{4}}{t}}\cdot 1=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

Второй замечательный предел

Теорема. *Предел функции* $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ *при* $x\to\infty$ *существует и равен числу* e*, т.е.*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Число e является иррациональным, его приближенное значение:

$$e\approx 2{,}718281.$$

Показательная функция с основанием e, т.е. $y=e^{x}$ играет исключительно важную роль в математике. Часто ее называют ***экспонентой***. Также широко используются логарифмы по основанию e, называемые ***натуральными***. Обозначаются натуральные логарифмы символом $\ln$: $\log_e x=\ln x$.

Чтобы получить еще одну запись числа e в формуле сделаем замену $x=\frac{1}{y}$ и учтем, что $y\to 0$, если $x\to\infty$. В результате получим

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Примеры:

1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{7}=e^{7}$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l} y=e^{x}-1,\ x=\ln(1+y) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=1$$

4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x+1}-1\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+1}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right]^{\frac{-12x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x}{2x+1}}=e^{-6}$$