Преобразование Фурье

Преобразование Фурье (Fourier Transform) является инструментом спектрального анализа *непериодических* сигналов [1, стр. 39]. Формулы преобразования Фурье можно получить из формул для ряда Фурье, устремив период повторения сигнала к бесконечности $T \to \infty$.

Если аналоговый сигнал представлен непрерывной функцией времени вида $s(t)$, то его спектральная функция задается формулой прямого преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{1.3}$$

где ω – текущая круговая частота.

Формула обратного преобразования Фурье позволяет получить сигнал по его спектральной функции:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1.4}$$

Таким образом, сигнал $s(t)$ и его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ взаимно-однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Модуль спектральной функции $\left|\dot{S}(\omega)\right|$ называют амплитудным спектром, а ее аргумент

$$\varphi_s = \arg\left(\dot{S}(\omega)\right) -$$

фазовым спектром.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ является «сопряженно-симметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу:

$$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega). \tag{1.5}$$

Если $s(t)$ – четная функция, то спектр будет чисто *вещественным* (и, следовательно, будет являться *четной* функцией). Если, напротив, $s(t)$ – функция нечетная, то спектральная функция будет чисто *мнимой* (и *нечетной*).

Для вещественного сигнала $s(t)$ амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$\left|\dot{S}(-\omega)\right| = \left|\dot{S}(\omega)\right|, \tag{1.6}$$

$$\varphi_s(-\omega) = -\varphi_s(\omega). \tag{1.7}$$

<u>Пример. Прямоугольный импульс.</u>

В качестве примера расчета преобразования Фурье рассмотрим прямоугольный импульс (рис. 1.1), центрированный относительно начала отсчета времени и имеющий длительность τ

$$s(\mathrm{t}) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases},$$

где A – амплитуда сигнала.

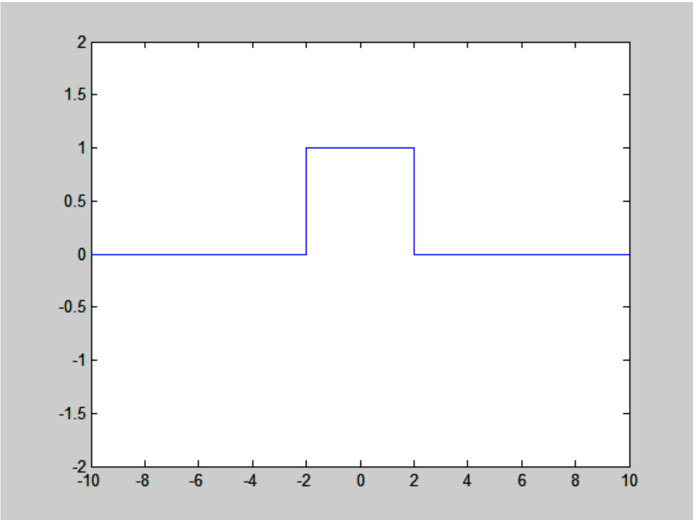


Рисунок 1.1 – *Прямоугольный импульс*

Вычисляем спектр сигнала $\dot{S}(\omega)$ с помощью формулы прямого преобразования Фурье (1.3):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\ .$$

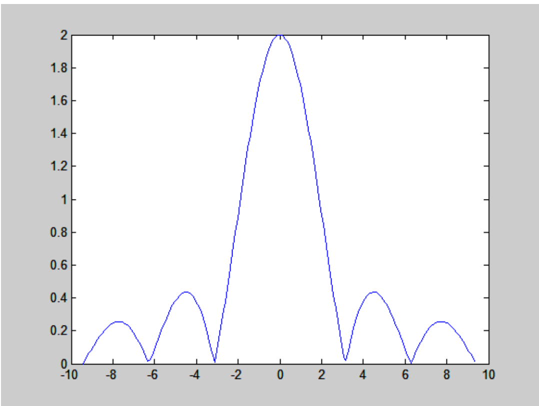
Примечание: при вычислении интеграла воспользовались следующими формулами:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\,sin(x) \text{ (формула Эйлера);}$$

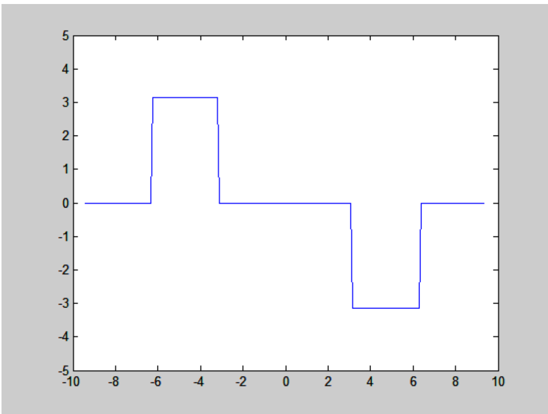
$$\int cos\,(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C;$$

$$\int sin\,(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C.$$

При нахождении амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса вспомним, что рассматриваемый импульс является четной функцией, поэтому спектральная функция сигнала $\dot{S}(\omega)$ также будет четной. Амплитудный спектр – четная функция, а фазовый спектр - нечетная функция (рис. 1.2).



а)



б)

Рисунок 1.2 – *Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры прямоугольного импульса*

Амплитудный спектр данного сигнала простирается до бесконечности, постепенно затухая. Поэтому вводят понятие эффективной ширины спектра, которое определяется как ширина главного лепестка. Для прямоугольного импульса эффективная ширина спектра равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}. \qquad (1.8)$$

Длительность прямоугольного импульса равна τ. Произведение эффективной ширины спектра сигнала на длительность сигнала называется базой сигнала:

$$B = \Delta\omega\tau. \qquad (1.9)$$

Для каждого сигнала база – это свое число. В случае прямоугольного импульса $B = 2\pi$.

Из этих соотношений видно, что чем короче сигнал, тем шире его спектр и наоборот. Это положение называют соотношением неопределенности. Существует утверждение, что для любого сигнала база сигнала не может быть меньше единицы.

Спектр дискретного сигнала

Пусть аналоговый сигнал задан функцией времени $s(t)$, а его спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ определяется по формуле прямого преобразования Фурье (1.3).

Дискретизируем сигнал $s(t)$, взяв отсчеты сигнала с частотой дискретизации $f_д$. Частота дискретизации задается формулами

$$f_д = \frac{1}{T}; \qquad \omega_д = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.10}$$

Спектр $\dot{S}_д(\omega)$ дискретизованного сигнала [1, стр. 157] представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного непрерывного ла $s(t)$ и определяется формулой:

$$\dot{S}_д(\omega) = f_д \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - 2\pi f_д n\right) \tag{1.11}$$

где ω – текущая круговая частота; $f_д$ – частота дискретизации;

$\dot{S}(\omega)$ – спектральная функция исходного аналогового сигнала.

Расстояние между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации сигнала (рис. 1.3).

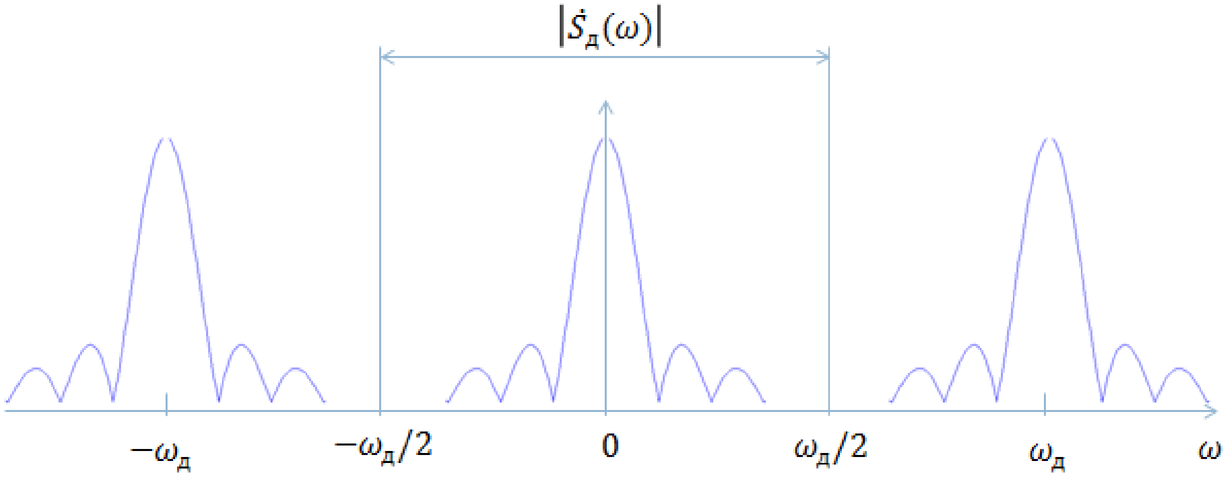


Рисунок 1.3 – *Спектр дискретизованного сигнала*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет значений сигнала и построение его графика.

Запишите в конспекте номер своего варианта, формулу для сигнала $s(t)$ и значения параметров A и a (варианты заданий приведены в конце задания).

Запустите MATLAB. В меню File выберите пункт «NewFile->Script», и создайте новый М-файл.

Напишите программу для расчета значений сигнала $s(t)$ и построения его графика. Для этого используйте следующие MATLAB-функции:

- `plot` – рисование графика в виде непрерывной кривой;
- `grid` – рисование линий сетки на графике;
- `legend` – рисование легенды (пояснительной надписи);
- `xlabel`, `ylabel` – рисование заголовков осей X и Y;
- `xlim`, `ylim` – задание диапазона отображаемых значений по осям X и Y.

Для просмотра документации по конкретной функции MATLAB введите в окне “Command Window” команду `doc` (полная документация) или `help` (краткая справка). Например, следующая команда откроет окно с полной документацией по функции `plot`:

```
>> doc plot
```

Пример программы MATLAB для задания значений сигнала и построения графика сигнала:

```
% Рассчитываем значения сигнала

A = <<ваш параметр>>; % амплитуда импульса
a = <<ваш параметр>>; % скорость убывания импульса
t = [-10:0.1:10]; % вектор отсчетов времени
s = <<ваша формула для расчета сигнала>>; % значения сигнала

% рисуем график сигнала

plot(t, s); % график сигнала
grid on;     % включаем линии сетки
legend('<<ваша легенда>>'); % легенда
xlabel('t');     % заголовок оси X
ylabel('s(t)'); % заголовок оси Y
xlim([-2 2]);    % диапазон отображаемых значений по оси X
ylim([0 1.5]); % диапазон отображаемых значений по оси Y
```

Запустите полученную MATLAB программу (нажатием клавиши *F5*) и проанализируйте результаты ее работы (должно появиться окно с графиком).

Примечание: После каждого запуска программы полезно убедиться в отсутствии в ней ошибок. Если в программе есть ошибки, то MATLAB выведет сообщения об ошибках в окно команд (Command Window) с указанием названия функции и строки кода, в которой произошла ошибка.

Зарисуйте график сигнала в своем конспекте. Покажите результат преподавателю.

2. Расчет преобразования Фурье.

По виду сигнала $s(t)$ сделайте предположения о виде спектральной функции, амплитудного и фазового спектров сигнала (четность/нечетность).

Рассчитайте преобразование Фурье по формуле (1.3) для сигнала $s(t)$ для своего варианта (письменно выведите формулу в общем виде, не подставляя конкретных параметров *A* и *a*).

Подсказка: При выводе спектральной функции можете воспользоваться следующими формулами:

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C\,;$$

$$e^{-\infty} = 0; e^{0} = 1;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$j^2 = -1.$$

Покажите результат преподавателю.

В уже имеющемся M-файле допишите код для вычисления значений преобразования Фурье сигнала $s(t)$ и построения графиков амплитудного $|\dot{S}(\omega)|$ и фазового $\varphi_s(\omega)$ спектров сигнала. Используйте следующие MATLAB-функции:

- `abs` – вычисление модуля комплексного числа;
- `angle` – вычисление аргумента комплексного числа;
- `figure` – создание нового графического окна;
- `subplot` – рисование группы графиков.

Пример MATLAB кода:

```
% вычисляем преобразование Фурье сигнала

omega = [-20:0.1:20]; % вектор частот
% спектральная функция
S = <<ваша формула спектральной функции>>;
% амплитудный спектр
Samp = abs(S);
% фазовый спектр
Sphase = angle(S);

% рисуем графики амплитудного и фазового спектра

figure % новое графическое окно
subplot(1, 2, 1);
plot(omega, Samp);
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
grid on
subplot(1, 2, 2);
plot(omega, Sphase);
xlabel('\omega');
ylabel('\phi_s(\omega)');
grid on
```

Запустите полученную программу. Занесите графики амплитудного и фазового спектров в конспект. Покажите результат преподавателю.

<u>3. Расчет эффективной ширины спектра и базы сигнала.</u>

Рассчитайте значения эффективной ширины $\Delta\omega$ спектра и базы B сигнала (пример расчета приведен в теоретической части).

Занесите полученные значения в конспект и отметьте эффективную ширину спектра на графике.

Убедитесь, что для вашего сигнала соблюдается условие, что база сигнала не может быть меньше единицы.

Покажите результат преподавателю.

Подсказка. Эффективную ширину спектра определять по уровню 0.1 от максимального значения амплитудного спектра (максимальное значение достигается при $\omega = 0$). Для нахождения эффективной ширины спектра определите такую частоту ω, на которой спектральная функция равна 0.1 от своего максимального значения.

При расчете базы сигнала учитывайте тот факт, что для экспоненциальных сигналов в качестве длительности сигнала обычно берется время, при котором амплитуда сигнала убывает $e = 2.7 \dots$ раз. Поэтому длительность экспоненциального сигнала равна $1/a$ (в случае одностороннего импульса) и $2/a$ в случае двустороннего импульса.

4. Расчет спектра дискретизованного сигнала.

Запишите в общем виде выражение для спектра дискретизованного сигнала, полученного из вашего аналогового сигнала при его дискретизации с некоторой частотой $f_д$. Используйте формулу (1.11).

В уже имеющемся М-файле допишите код для расчета значений спектра дискретизованного сигнала при частоте дискретизации $f_д = 10$ и построения графика амплитудного спектра дискретизованного сигнала.

Пример кода:

```
% рассчитываем спектр дискретизованного сигнала

Fs = 10; % частота дискретизации
omega = [-100:0.1:100]; % диапазон частот
n = [-10:9]; % учитываем 20 копий спектра
% сдвигаем частоты
omega2 = repmat(omega, length(n), 1);
shift = -2*pi*Fs.*n;
shift = repmat(shift', 1, length(omega2));
omega2 = omega2+shift;
Ss = <<ваша формула спектральной функции S(omega2)>>;
Ss = sum(Ss, 1);
Ss = Ss * Fs; % умножаем на Fs
```

```
% рисуем график амплитудного спектра дискретизованного сигнала

figure
plot(omega, abs(Ss));
xlabel('\omega');
ylabel('| S(\omega) |');
```

Запустите программу и сделайте вывод о виде спектра дискретного сигнала. Занесите полученный график в конспект. По оси частот отложите точки, кратные частоте дискретизации.

Измените частоту дискретизации, сделав ее равной $f_д = 2$. Запустите программу. Что произошло со спектром дискретного сигнала?

Варианты заданий

1-й вариант

Односторонний экспоненциальный импульс (рис. 1.4):

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

где A – амплитуда сигнала, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a = 2.$

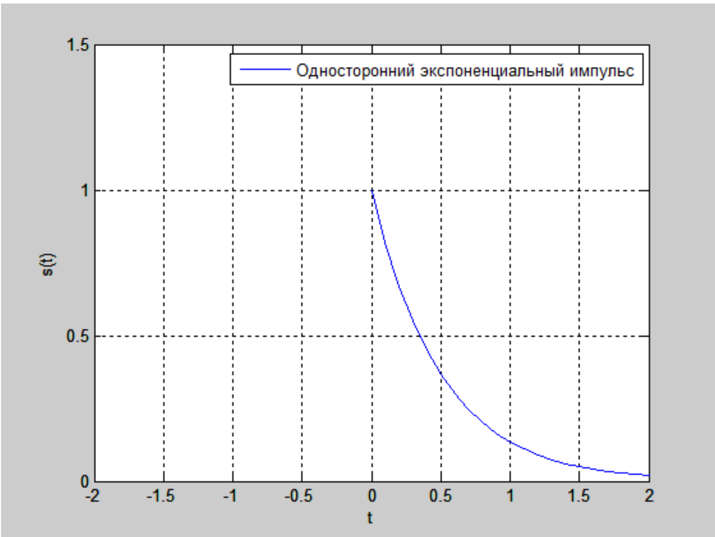


Рисунок 1.4 – *Односторонний экспоненциальный импульс*

2-й вариант

Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс (рис. 1.5):

$$s(t) = Ae^{-a|t|},$$

где A – амплитуда импульса, a – множитель в показателе экспоненты определяет скорость убывания импульса.

$A = 1;\ a = 0.5.$

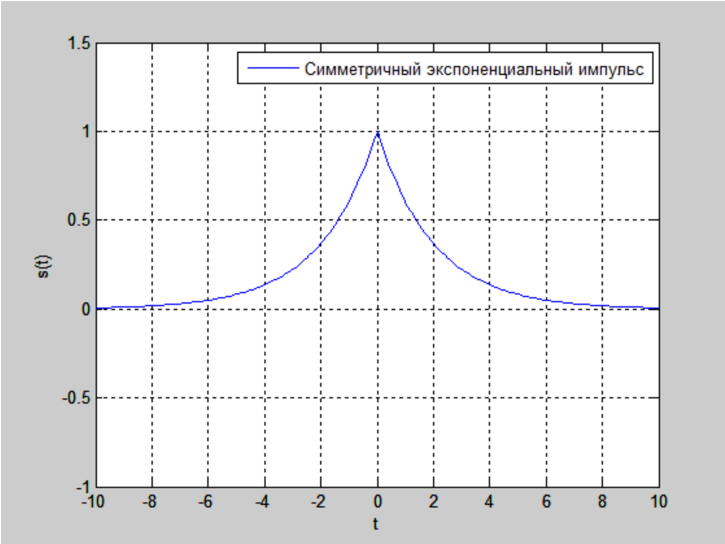


Рисунок 1.5 – *Двусторонний (симметричный) экспоненциальный импульс*

Контрольные вопросы

1. Назовите предмет и задачи спектрального анализа сигналов.
2. Запишите формулы расчета комплексного ряда Фурье.
3. Запишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье.
4. Что такое амплитудный и фазовый спектры сигнала?
5. Понятие эффективной ширины спектра и базы сигнала.
6. Понятие спектра дискретного сигнала.

Лабораторная работа №2. Расчет характеристик аналоговых систем.

Цель работы. Получить навыки расчета характеристик линейных систем: импульсной характеристики, комплексного коэффициента передачи и его годографа, АЧХ и ФЧХ системы. Ознакомиться с функциями среды MATLAB для преобразования форм представления линейных цепей, расчета и построения графиков временных и частотных характеристик.

Теоретические сведения.

Понятие аналоговой системы и классификация систем.

Система, используемая для обработки, преобразования или передачи аналоговых сигналов - это физическое устройство или математическая модель, содержащая множество элементов, осуществляющих преобразование сигналов, и находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство. В составе системы всегда можно выделить *вход*, предназначенный для подачи исходных сигналов, и *выход*, откуда преобразованные сигналы поступают для дальнейшего использования. Обычно это иллюстрируется структурной схемой типа черного ящика (рис. 2.1).

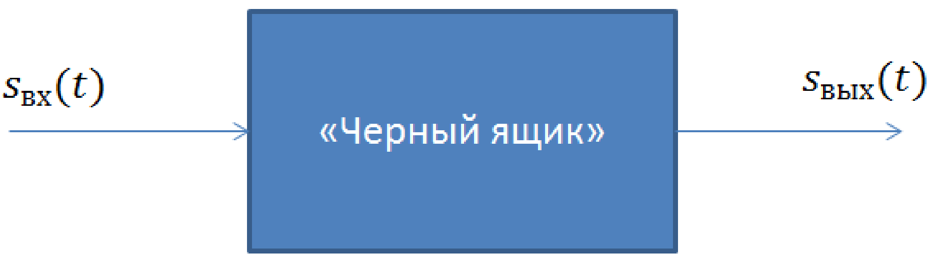


Рисунок 2.1 – *Структурная схема системы в виде «черного ящика»*

Линейными называются системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности [1, стр. 102]. Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются *нелинейными*.

Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, система называется *стационарной*, или системой с *постоянными параметрами*. В противном случае система называется *нестационарной*, *параметрической* или системой *с переменными параметрами*.

В данной работе мы будем рассматривать линейные стационарные системы.

Импульсная и переходная характеристики системы.

Линейность и стационарность позволяют легко найти реакцию системы на любой входной сигнал, зная всего одну функцию – реакцию системы на поданную на вход дельта-функцию [1, стр. 103]. Эта реакция, определяемая при нулевых начальных условиях, называется *импульсной характеристикой системы* и обозначается $h(t)$.

Выходной сигнал линейной системы с постоянными параметрами равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t')h(t-t')dt'. \tag{2.1}$$

Переходной характеристикой системы называют реакцию системы на поданную на вход функцию единичного скачка (функцию Хевисайда). Обозначается переходная характеристика как g(t). Так же как и импульсная характеристика, переходная характеристика определяется при нулевых начальных условиях.

Поскольку дельта-функция – это производная от единичного скачка, импульсная и переходная характеристики связаны друг с другом операциями дифференцирования и интегрирования:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad ; \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')dt'. \tag{2.2}$$

Любая физически реализуемая система обладает свойством *причинности* – выходной сигнал не может возникнуть раньше входного сигнала. Отсюда следует, что для физически реализуемой системы импульсная и переходная характеристики должны быть равны нулю при $t < 0$.

Системы, имеющие вещественную импульсную характеристику, называются *вещественными системами.*

Комплексный коэффициент передачи системы, АЧХ и ФЧХ системы.

Выходной сигнал линейной системы, как было показано ранее, представляет собой свертку (2.1) входного сигнала и импульсной характеристики. Преобразование Фурье [1, стр. 39] от свертки дает произведение спектров сворачиваемых сигналов, так что в частотной области прохождение сигнала через линейную систему описывается очень просто:

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega)\dot{K}(\omega). \tag{2.3}$$

Здесь $\dot{K}(\omega)$ – преобразование Фурье импульсной характеристики системы $h(t)$. Функция $\dot{K}(\omega)$ называется *комплексным коэффициентом передачи системы* [1, стр. 105], а ее модуль $\left|\dot{K}(\omega)\right|$ и фаза $\arg\left(\dot{K}(\omega)\right)$ – соответственно *амплитудно-частотной* (АЧХ) и *фазочастотной* (ФЧХ) характеристиками системы.

Примечание. Значение $\dot{K}(\omega)$ показывает, как изменяется при прохождении через систему комплексная амплитуда $\dot{U} = Ae^{j\varphi}$ синусоиды $s(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ с известной частотой ω:

$$\dot{U}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{U}_{\text{вх}} \tag{2.4}$$

АЧХ показывает, во сколько раз изменяется амплитуда синусоиды, а ФЧХ – каков будет полученный ею фазовый сдвиг.

Годограф.

Годограф – это траектория (рис. 2.2), которую описывает на комплексной плоскости коэффициент передачи системы при изменении частоты.

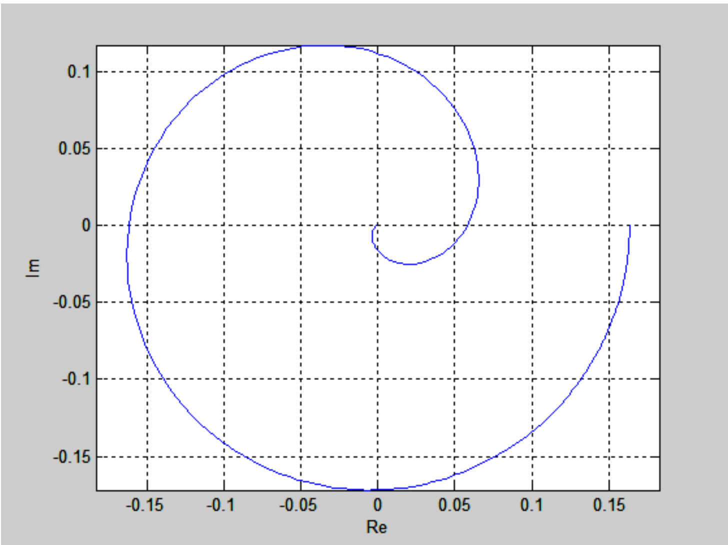


Рисунок 2.2 – *Годограф комплексного коэффициента передачи системы*

Годограф даёт наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу.

Способы описания линейных систем.

Линейные системы могут описываться несколькими эквивалентными формами, среди которых можно назвать:

- дифференциальное уравнение (ДУ);
- функция передачи в виде полиномов числителя и знаменателя (transfer function);
- функция передачи в виде множителей в числителе и знаменателе (zeros & poles);
- функция передачи в виде простых дробей (полюсы и вычеты);
- пространство состояний (state space).

Описание системы в виде ДУ.

При способе описания системы с помощью ДУ связь между входным и выходным сигналами линейной цепи может быть выражена в виде дифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, a_i и b_i – постоянные коэффициенты. Должно выполняться неравенство $m \leq n$, то есть максимальный порядок производной входного сигнала не может превышать максимального порядка производной выходного сигнала. Значение n называется *порядком* цепи.

Описание системы в виде полиномиальной функции передачи.

Если применить к обеим частям (2.5) преобразование Лапласа [1, стр. 109], получится выражение для функции передачи цепи (transfer function) в виде полиномов в числителе и знаменателе:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \qquad (2.6)$$

Здесь a_i и b_i – те же постоянные коэффициенты, что и в приведенном ранее ДУ. Таким образом, цепь описывается наборами коэффициентов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega)$ получается из функции передачи (2.6) путем подстановки комплексной частоты $s = j\omega$:

$$\dot{K}(s) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \qquad (2.7)$$

<u>Описание системы с помощью нулей и полюсов.</u>

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (2.6) на множители, мы получаем функцию передачи в следующем виде

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)}. \qquad (2.8)$$

Здесь k - *коэффициент усиления* (gain), z_i – *нули* функции передачи (zero), p_i – полюсы функции передачи (pole). В точках нулей функция передачи равна нулю $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов функция передачи стремится к бесконечности $H(p_i) \to \infty$. В данном случае цепь описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Для вещественных систем (у которых импульсная характеристика принимает вещественные значения) нули функции передачи являются вещественными либо составляют комплексно-сопряженные пары. То же относится и к полюсам. Коэффициент усиления таких систем всегда вещественный.

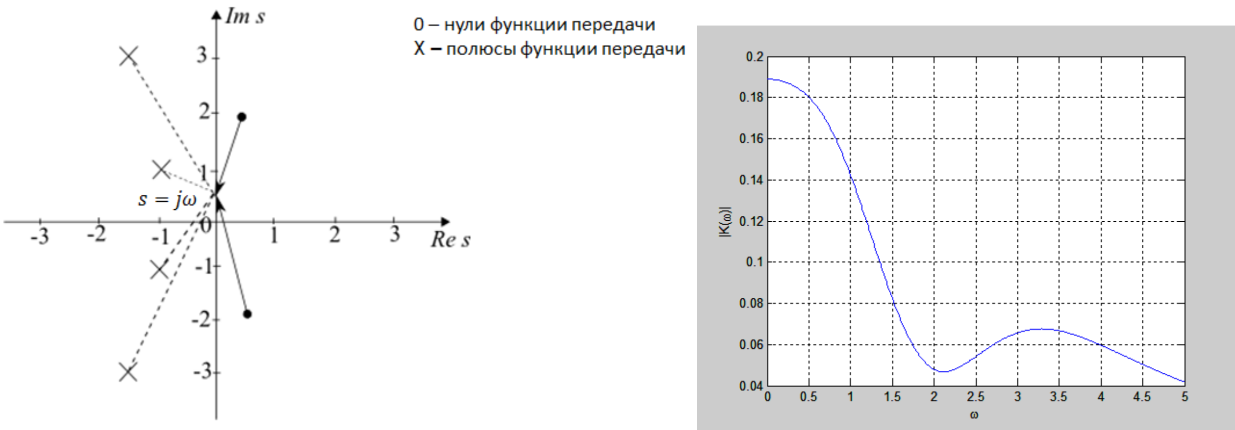
Формула (2.8) дает возможность наглядно показать, как влияет расположение нулей и полюсов на АЧХ цепи. Разности вида $(s - z_i)$, произведение которых дает числитель формулы, можно представить на комплексной плоскости в виде векторов, соединяющих точки z_i и точку $s = j\omega$, расположенную на мнимой оси (рис. 2.3, а). Аналогичным образом можно показать на комплексной плоскости и разности $(s - p_i)$, произведение которых дает знаменатель формулы.

При изменении частоты ω соответствующая точка $s = j\omega$ будет перемещаться вдоль мнимой оси, поэтому о поведении АЧХ системы можно сказать следующее (рис. 2.3, б):

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи от одного из нулей функции передачи z_i, соответствующая разность $(s - z_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *провал*. Если нуль лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет иметь нулевое значение.

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи одного из полюсов функции передачи p_i, соответствующая разность $(s - p_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *подъем*. Если полюс лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет стремиться к бесконечности.

- Чем ближе к мнимой оси расположен нуль (полюс), тем более выраженным будет соответствующий провал (подъем) АЧХ.



а) б)

Рисунок 2.3 – *Влияние нулей и полюсов на характер АЧХ системы. а) Графическое представление нулей и полюсов. б) График АЧХ системы.*

<u>Описание системы в виде полюсов и вычетов.</u>

Еще одним способом преобразования дробно-рациональной функции передачи является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных корней у знаменателя такое представление имеет следующий вид:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \cdots + \frac{r_1}{s - p_1} + C_0. \qquad (2.9)$$

Здесь p_i – полюсы функции передачи, а числа r_i называются *вычетами*. C_0 – целая часть функции передачи, отличная от нуля только в случае равенства степеней полиномов числителя и знаменателя.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{r_i\}$, $\{p_i\}$, C_0.

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет вычислить импульсную характеристику системы, поскольку каждое слагаемое функции передачи вида $\frac{r_i}{(s-p_i)}$ соответствует слагаемому импульсной характеристики вида

$$r_i e^{p_i t}, t \geq 0. \qquad (2.10)$$

Понятие устойчивости системы.

Система называется *устойчивой*, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях

$$\lim_{t\to\infty} s_{\text{вых}}(t) = 0 \text{ при } s_{\text{вх}}(t) = 0. \qquad (2.11)$$

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0. \qquad (2.12)$$

Ранее показано, что импульсная характеристика системы в общем случае содержит слагаемые вида (2.10). Такие слагаемые при $t \to \infty$ затухают, если вещественная часть полюса p_i является отрицательной. Следовательно, линейная система является устойчивой тогда и только тогда, когда полюсы ее функции передачи лежат в левой комплексной полуплоскости

$$Re(p_i) < 0. \qquad (2.13)$$

Описание системы с помощью пространства состояний.

Еще одним способом описания линейной цепи является ее представление в пространстве состояний (state space). При этом состояние цепи описывается *вектором состояния* $\boldsymbol{s}(t)$, а собственные колебания цепи и ее реакция на входной сигнал $x(t)$ характеризуются следующим образом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}'(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{B}x(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t) + Dx(t); \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица $N \times N$; $\boldsymbol{B}$ – столбец $N \times 1$; $\boldsymbol{C}$ – строка $1 \times N$; D – скаляр.

Фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ), режекторные (РФ).

Одной из часто возникающих на практике задач является создание систем, пропускающих сигналы в определенной полосе частот и задерживающих остальные частоты. Такие системы называются *фильтрами*. При этом различают фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и режекторные фильтры (РФ).

- Фильтры нижних частот (ФНЧ) – пропускают частоты меньше некоторой частоты среза ω_0;
- Фильтры верхних частот (ФВЧ) – пропускают частоты больше некоторой частоты среза ω_0;
- Полосовые фильтры (ПФ) - пропускают частоты в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$;
- Режекторные фильтры – пропускают все частоты, кроме частот в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Идеальная форма АЧХ фильтров этих четырех типов показана на рис. 2.4. Однако такая идеальная (прямоугольная) форма АЧХ не может быть физически реализована, практически реализуемые фильтры в той или иной мере аппроксимируют идеальные АЧХ.

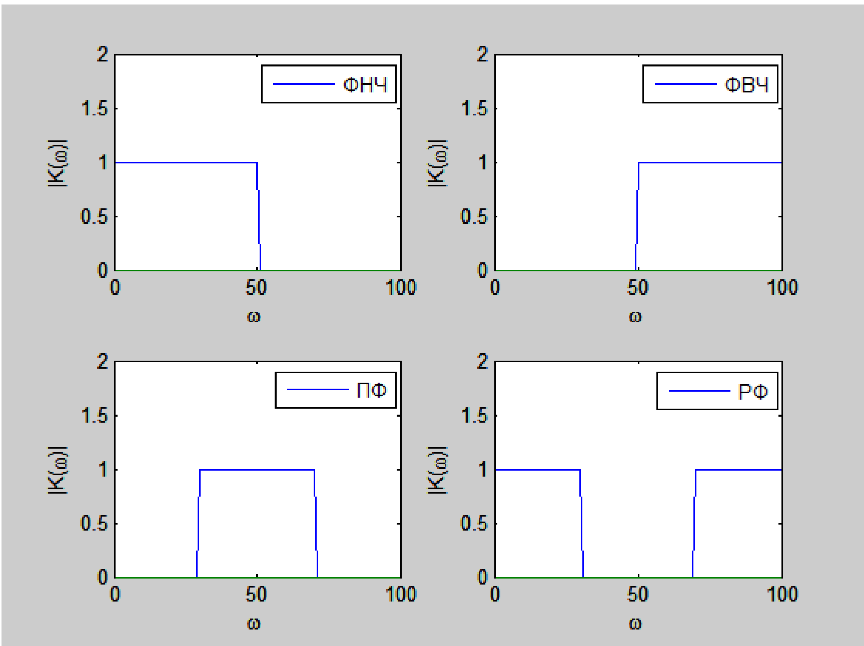


Рисунок 2.4 – *Идеальная форма АЧХ фильтров четырех типов*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет импульсной характеристики системы.

Запишите в конспекте номер своего варианта (варианты заданий приведены в конце данного задания) и форму представления линейной системы.

Запустите MATLAB и создайте новый М-файл (New File->Script). Занесите в М-файл параметры системы согласно вашему варианту задания.

Напишите код преобразования исходной формы представления системы в функцию передачи с полиномами в числителе и знаменателе (transfer function). В зависимости от варианта, используйте одну из следующих MATLAB-функций:

- `[b, a] = zp2tf(z, p, k)`
- `[b, a] = ss2tf(A, B, C, D)`

Выведите полученные коэффициенты в окно команд «Command Window» (функции MATLAB осуществляют вывод результатов в окно команд, если после вызова функции не ставить точку с запятой).

Используя формулу (2.6), запишите функцию передачи $H(s)$ с полученными коэффициентами в конспект. Сделайте вывод о степенях m и n полиномов соответственно числителя и знаменателя функции передачи (соблюдается ли условие $m \leq n$).

Получите функцию передачи в виде полюсов и вычетов. Для этого используйте следующую MATLAB-функцию:

- `[r, p, C0] = residue(b, a)`

Используя формулу (2.10), запишите в конспект выражение для импульсной характеристики системы $h(t)$.

В MATLAB допишите код для расчета значений импульсной характеристики.

Пример кода:

```
% Расчет значений импульсной характеристики системы
t = [0:0.01:10];  % вектор отсчетов времени
h = zeros(1, length(t)); % значения импульсной характеристики
for n=[1:length(r)]
    h = h + r(n).*exp(p(n).*t); % n-е слагаемое
end
```

Допишите код для построения графика импульсной характеристики системы. В случае если импульсная характеристика принимает комплексные значения, отобразите вещественную и мнимую части импульсной характеристики в отдельных координатных осях с помощью функции `subplot`. Для выделения действительной и мнимой частей комплексного числа используйте функции `real` и `imag`, соответственно.

Пример кода:

```
% Рисуем график импульсной характеристики
subplot(2, 1, 1);
plot(t, real(h));
grid on;
title('Вещественная часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Re(h(t))');
subplot(2, 1, 2);
plot(t, imag(h));
grid on;
title('Мнимая часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Im(h(t))');
```

Используя выражение (2.12) и полученные графики, сделайте вывод об устойчивости системы по характеру затухания ее импульсной характеристики.

Занесите полученный график действительной части импульсной характеристики в конспект. Покажите результат преподавателю.

2. Нули и полюсы системы.

Допишите код для построения графика нулей и полюсов системы. Для расчета нулей и полюсов системы при необходимости (в зависимости от варианта) используйте функцию `ss2zp`. Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба графика по осям X и Y.

Пример кода:

```
% рисуем нули и полюсы системы
figure
[z, p, k] = <<при необходимости рассчитайте нули и полюсы>>
plot(p, 'x')            % График расположения полюсов
hold on;
plot(z, 'o');           % График расположения нулей
hold off;
axis equal;             % Равный масштаб по осям
grid on;
axis([-5 5 -5 5]); % Область охвата графика
```

Занесите полученный график в конспект.

По расположению нулей и полюсов сделайте предположения о виде АЧХ (в каких областях частот будут наблюдаться подъемы, провалы, разрывы и т.д.). Для этого используйте сведения из теоретической части и рис. 2.3.

По расположению полюсов на комплексной плоскости сделайте вывод об устойчивости системы.

Покажите результат преподавателю.

3. Расчет комплексного коэффициента передачи.

Допишите код для расчета комплексного коэффициента передачи системы. Используйте MATLAB-функцию `freqs`. Диапазон частот для анализа задайте самостоятельно (включите в него нулевую частоту, бесконечность и 500 логарифмически равномерно распределенных частот в диапазоне $[10^{-2};\ 10^{2}]$).

Пример кода:

```
% расчет комплексного коэффициента передачи
w = [0 logspace(-2, 2, 500) inf]; % вектор частот для анализа
K = freqs(b, a, w); % комплексный коэффициент передачи
```

Постройте годограф (график кривой, описываемой комплексным коэффициентом передачи на комплексной плоскости при изменении частоты). Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба по осям X и Y.

Пример кода:

```
% построение годографа
figure;
plot(K)
% выравнивание масштаба осей
axis equal
grid on
xlabel('Re');
ylabel('Im');
```

Занесите полученный график в конспект. Покажите результат преподавателю.

4. Расчет АЧХ и ФЧХ системы.

Допишите код для расчета АЧХ и ФЧХ системы, используя сведения из теоретической части. Для выделения модуля и аргумента комплексного числа используйте соответственно функции `abs` и `angle`.

Пример кода.

```
% расчет АЧХ и ФЧХ системы
K_amp = abs(K);      % АЧХ
K_phase = angle(K); % ФЧХ
```

Постройте графики АЧХ и ФЧХ.

Пример кода:

```
% рисуем графики АЧХ и ФЧХ
figure
subplot(2, 1, 1);
plot(w, K_amp);
title('Амплитудно-частотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('|K(\omega)|');
subplot(2, 1, 2);
plot(w, K_phase);
title('Фазочастотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('arg(K(\omega))');
```

Сделайте вывод, совпадает ли форма АЧХ на графике с теми предположениями, которые вы сделали на этапе 2?

Устраните скачки ФЧХ с помощью функции `unwrap`. Чем обусловлены эти скачки?

Пример кода:

```
K_phase = unwrap(K_phase); % устранение скачков в ФЧХ
```

Снова запустите программу и сделайте вывод о том, что произошло с графиком ФЧХ.

По виду графика АЧХ сделайте вывод о том, какому типу фильтров можно отнести вашу систему (ФНЧ, ФВЧ, РФ или ПФ).

Занесите полученные графики АЧХ и ФЧХ в конспект. Покажите результат преподавателю.

Варианты заданий.

1-й вариант

Система задана формой представления «нули и полюсы»:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 + 0.5j \\ 2 - 0.5j \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -3 + 2j \\ -3 - 2j \\ -1 + 1j \\ -1 - 1j \end{bmatrix}$$

$$k = 1$$

2-й вариант

Система задана формой представления «пространство состояний»:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -20 & -14.1421 & 0 & 0 \\ 14.1421 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -13.2229 & -12 & -20.8806 \\ 0 & 0 & 20.8806 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0479 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Контрольные вопросы.

1. Понятие и классификация аналоговых систем.
2. Импульсная и переходная характеристики системы.
3. Комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ. Годограф.
4. Способы описания линейных систем.
5. Понятие устойчивости линейной системы.
6. Понятие ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ.