Лекция 4

Раздел 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема: Понятие случайной величины. Числовые характеристики случайных величин

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- Под ***случайной величиной*** понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно – заранее не известно).

Примеры случайных величин:

1) число родившихся детей в течение суток в г. Севастополе;
2) количество бракованных изделий в данной партии;
3) число произведенных выстрелов до первого попадания;
4) дальность полета артиллерийского снаряда;
5) расход электроэнергии на предприятии за месяц.

1) – 3) - ДСВ

4) – 5) - НСВ

Случайная величина называется ***дискретной***, если множество ее значений конечное, или бесконечное, но счетное.

Под ***непрерывной*** случайной величиной будем понимать величину, бесконечное несчетное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- ***Определение.*** Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е.

$$X = f(\omega),$$

где ω – элементарный исход (или элементарное событие, принадлежащее пространству Ω, т.е. $\omega \in \Omega$).

Определение. *Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Про случайную величину говорят, что она «*распределена*» *по данному закону распределения* или «подчинена» этому закону распределения.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) и графически.

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является *таблица* (матрица), в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности, т.е.

X:

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

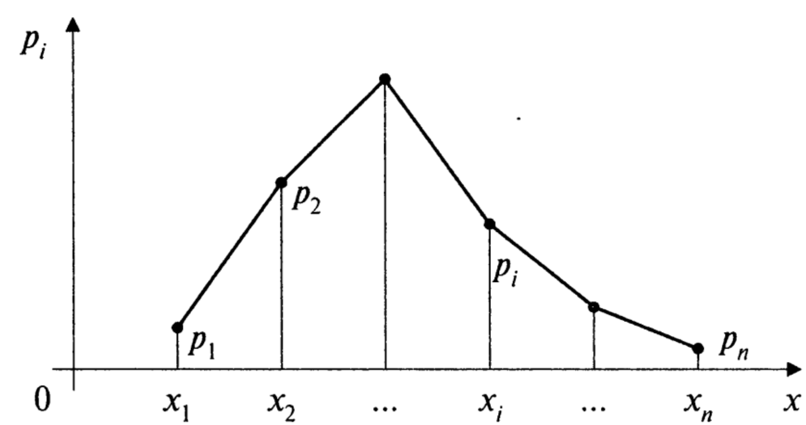
или

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots p_n \end{pmatrix}$$

Такая таблица называется ***рядом распределения дискретной*** случайной величины.

Для любой дискретной случайной величины $$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (4.13)$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат - соответствующие их вероятности.
Соединение полученных точек образует ломаную, называемую ***многоугольником или полигоном распределения вероятностей***



1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- ***Пример.*** В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение. Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет – равны 0 – 7 = – 7 ден. ед. (если билет не выиграл), 200 - 7 = 193, 250 - 7 = 243, 5000 - 7 = 4993 ден. ед.
Учтём, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1.

Используя классическое определение вероятности, получим:
$P(X=-7)$=990/1000=0,990; $P(X=193)$=5/1000=0,005;
$P(X=243)$=4/1000=0,004; $P(X=4993)$=1/1000=0,001,
т.е. ряд распределения

X:

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

2. Математические операции над случайными величинами

- Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

- Так, если дискретная случайная величина X может принимать значения x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), а случайная величина Y - значения y_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), то независимость дискретных случайных величин X и Y означает независимость событий $X = x_i$; и $Y = y_j$ при любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$.

- В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

2. Математические операции над случайными величинами

1. Пусть даны две случайные величины:

X:					
	x_i	x_1	x_2	...	x_n
	p_i	p_1	p_2	...	p_n

,

Y:					
	y_j	y_1	y_2	...	y_m
	p_j	p_1	p_2	...	p_m

- *Произведением* kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i ($i = 1, 2, ..., n$).

- m-й степенью случайной величины X, т.е. X^m , называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i ($i = 1, 2, ..., n$).

2. Математические операции над случайными величинами

Пример. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) Y = 3X; б) Z= X^2.

Решение. а) Значения случайной величины Y будут,: 3(- 2) = - 6; 3·1 = 3; 3·2 = 6 с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

Y:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значения случайной величины Z будут: (- 2)^ 2 =4, 1^2 = 1, 2^2 = 4 с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2.

Так как значение Z= 4 может быть получено возведением в квадрат значений (- 2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сложения P(Z = 4) = 0,5 + 0,2 = 0,7. Итак, закон распределения случайной величины

Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

2. Математические операции над случайными величинами

2. *Суммой* (*разностью* или *произведением*) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j (x_i - y_j или $x_i \cdot y_j$), где i =1,2,...,n; j =1,2,...,m, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i , а Y – значение y_j:

$$p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)].$$

- Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $X=x_i$ $Y=y_j$ то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j. \qquad (4.14)$$

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием*, или средним значением, *M(X)* дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i. \qquad (4.15)$$

- Если дискретная случайная величина *X* принимает бесконечное, но счетное множество значений $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$ ***математическим ожиданием, или средним значением,*** такой дискретной случайной величины называется сумма ряда (если он абсолютно сходится):

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i. \qquad (4.16)$$

Так как ряд (4.16) может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания.

X:

x_i	2	2^2	2^3	...	2^i	...
p_i	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^i$	...

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C$ (4.17)

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M(kX) = kM(X). \qquad (4.18)$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \qquad (4.19)$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожидании

$$M(XY) = M(X)M(Y) \qquad (4.20)$$

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C. \qquad (4.21)$$

6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

$$M[X - M(X)] = 0. \qquad (4.22)$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$.

Решение. Используя свойства 1, 2, 3 математического ожидания, найдем $M(Z) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 7 = 21$.

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Определение. *Дисперсией D(X)* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \qquad (4.23)$$

или $D(X) = M(X - a)^2$, где $a = M(X)$.

Дисперсия ДСВ X- это мера рассеивания возможных значений X относительно центра распределения, и она равняется математическому ожиданию квадрата отклонения ДСВ X от её математического ожидания. Обозначают дисперсию $D(X)$ или Dx.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от постоянной величины C минимально именно тогда, когда эта постоянная C равна математическому ожиданию $M(X) = a$, т.е.

$$\min_C M(X - C)^2 = M(X - a)^2 = D(X).$$

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Если случайная величина X – дискретная с конечным числом значений, то

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 p_i. \qquad (4.24)$$

Если случайная величина X — дискретная с бесконечным, но счетным множеством значений, то

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-a)^2 p_i. \qquad (4.25)$$

(если ряд в правой части сходится).

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния используют также величину $\sqrt{D(X)}$.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* (стандартным отклонением или стандартом) от случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}. \qquad (4.26)$$

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Основные свойства D(X):

1. $D(X) \geq 0$, для любой ДСВ X.
2. $D(C)=0$, где C = const.
3. $D(CX) = C^2 D(X)$, C=const.
4. $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (\sum_{л=1}^{m} x_л p_k)^2$$

5. $D(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

- *Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и другие числа*, призванные в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения, называются ***числовыми характеристиками случайной величины***.

- Сама величина X – ***случайная***, а ее числовые характеристики являются величинами ***неслучайными***, постоянными.

Задача. Известны законы распределения случайных величин X и Y – числа очков, выбиваемых 1-ми 2-м стрелками. Необходимо выяснить, какой из двух стрелков стреляет лучше. Найти числовые характеристики ДСВ.

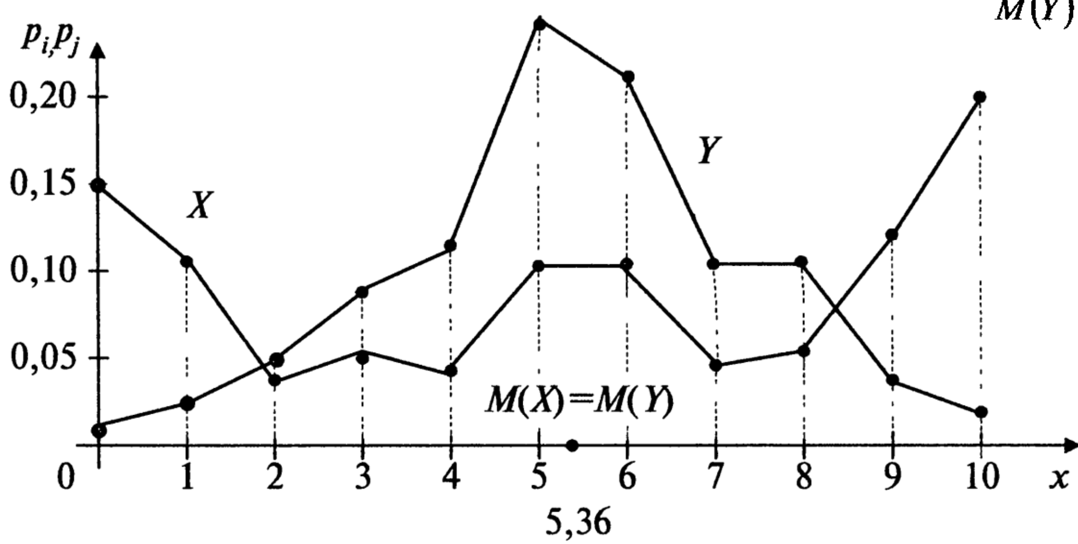
X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y:

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.



Расчет числовых характеристик ДСВ:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}10 + 2\cdot 0{,}04 + \ldots + 9\cdot 0{,}12 + 10\cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$M(Y) = 0\cdot 0{,}01 + 1\cdot 0{,}03 + 2\cdot 0{,}05 + \ldots + 9\cdot 0{,}04 + 10\cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}11 + \ldots +$$
$$+ (10 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}20 = 13{,}61,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}03 + \ldots +$$
$$+ (10 - 5{,}36)^2\cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

5. Функция распределения случайной величины

- Описание случайной величины X с помощью закона распределения <u>не является единственным и не универсально</u>.
- Оно неприменимо для ***непрерывной*** случайной величины:

1) нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество ее значений;

2) вероятности каждого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равны нулю.

5. Функция распределения случайной величины

- Для описания закона распределения случайной величины X возможен другой подход:

рассматривать не вероятности событий $X=x$ для разных x (как это имеет место в ряде распределения), а вероятности события $X<x$, где x – текущая переменная.

Вероятность $P(X<x)$, очевидно, зависит от x, т.е. является некоторой функцией от x.

5. Функция распределения случайной величины

- ***Определение.*** *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

- Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения.***

- **Геометрически** функция распределения интерпретируется как *вероятность того, что случайная точка* X *попадет левее заданной точки* x

5. Функция распределения случайной величины

Общие свойства функции распределения

- **1.** Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1$$

- **2.** Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

- **3.** На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице, т.е.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

- 4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ (включая x_1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Пример. Дан ряд распределения случайной величины

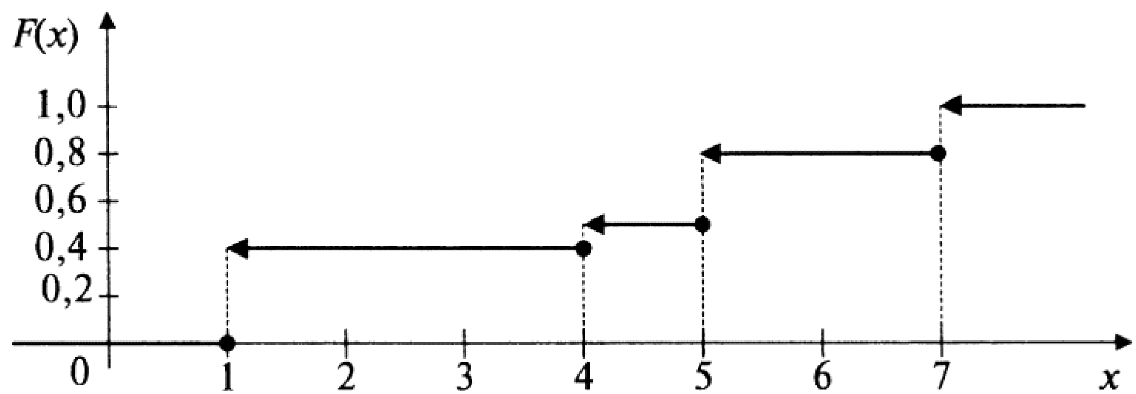
X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графически её функцию распределения.

Решение. Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 5 < x \le 7, \\ 1{,}0 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.