Лекция 6

Системы случайных величин.

Числовые характеристики распределения НСВ

- ***Математическое ожидание*** *НСВ X* определяется по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

- Если *НСВ X* определена на интервале *(a; b)*, то:

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx.$$

- ***Мода НСВ*** *X* будет определяться как максимум ее дифференциальной функции:

$$M_0(X) = \max_{(-\infty;+\infty)} f(x)$$

- ***Медиана*** определяется как значение случайной величины, которое делит площадь под дифференциальной функцией на две равные части

$$M_e(X):\ P(x < M_e(X)) = P(x > M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

- ***Дисперсия НСВ***:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(M(X)\right)^2$$

Все свойства дисперсии и математического ожидания, установленные для *ДСВ*, сохраняются для *НСВ*.

Числовые характеристики распределения НСВ

- ***Моменты случайных величин***.
- *Начальным моментом* порядка s называется математическое ожидание степени s *СВ X:*

$$\alpha_s = M(X^s) \qquad (1)$$

Для *ДСВ*: $\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i = x_1^s p_1 + x_2^s p_1 + \cdots + x_n^s p_n$.

Для *НСВ*: $\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx$.

При s=1: $\alpha_1 = M(X) = m_x$, то есть, первый начальный момент - это математическое ожидание *СВ*.

Числовые характеристики распределения НСВ

Отклонение *СВ* от ее математического ожидания называется *центрированной СВ* $\dot{X}$

$$\dot{X} = X - m_x$$

Центральным моментом порядка *s СВ X* называется математическое ожидание степени *s*, соответствующей центрированной *СВ:*

$$\mu_s = \mu\left(\dot{X}^s\right) = M\left((x - m_x)^s\right). \quad (2)$$

- Для *ДСВ:* $\mu_s = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s p_i = (x_1 - m_x)^s p_1 + \cdots + (x_n - m_x)^s p_n$

- Для *НСВ:* $\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^s f(x)\, dx.$

Числовые характеристики распределения НСВ

При вычислении центральных моментов пользуются *формулами связи* между центральными и начальными моментами:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2, \qquad (3)$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m_x^3,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4m_x\alpha_3 + 6m_x^2\alpha_2 + 3m_x^4.$$

Числовые характеристики распределения НСВ

Обычно рассматривают **первые четыре центральных момента**:

- 1) $\mu_1 = M(x - m_x) = 0$

– математическое ожидание центрированной СВ равно нулю;

- 2) $\mu_2 = M(x - m_x)^2 = D(x)$

второй центральный момент – это дисперсия;

- 3) $\mu_3 = M(x - m_x)^3$

– третий центральный момент может служить для характеристики ***асимметрии*** (***скошенности*** распределения), обычно рассматривают безразмерный коэффициент асимметрии:

$$A = Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Числовые характеристики распределения НСВ

- 4) $\mu_4 = M(x - m_x)^4$

– четвертый центральный момент может служить для характеристики «крутости» или *островершинности* распределения, описывающейся с помощью ***эксцесса***:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (4)$$

- *Основным моментом* порядка s называется нормированный центральный момент порядка S:

$$r_s = \frac{\mu_s}{\sigma^s}, \qquad (5)$$

то есть $Sk = r_3$, $Ex = r_4 - 3$

Числовые характеристики распределения НСВ

Заметим, что:

1) $Sk = 0$ - распределение симметрично $M_0(X)=M_e(X)=M(X)$,

- $Sk > 0$ - распределение имеет положительную асимметрию $M_0(X)<M(X)$,
- $Sk < 0$ - распределение имеет отрицательную асимметрию $M_0(X)>M(X)$.

2) Распределение имеет вершину:

- при $Ex = 0$ - типа $\varphi(x)$ (плотности распределения нормально распределенной СВ);
- при $Ex > 0$ - более заостренную, чем $\varphi(x)$;
- при $Ex < 0$ - более плоскую, чем $\varphi(x)$.

3) Фактически начальные и центральные моменты служат, для вычисления основных моментов, представляющих вполне определенные численные характеристики различных свойств случайных величин.

Система двух случайных величин

- В практических задачах приходится сталкиваться со случаями, когда результат описывается двумя и более случайными величинами, образующими систему случайных величин (случайный вектор,)

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Закон распределения *дискретной двумерной случайной* величины можно представить в виде таблицы, характеризующей собой совокупность всех значений случайных величин и соответствующих вероятностей:

	x_1	x_2	…	x_n	$\sum P(y_i)$
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	…	$P(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1 , y_2)$	$P(x_2, y_2)$	…	$P(x_n, y_2)$	$P(y_2)$
			…		
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	…	$P(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
$\sum P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$	1

Система двух случайных величин

- В общем случае двумерная случайная величина задается в виде интегральной функции: $F(x, y) = P(X<x, Y<y)$, которая означает вероятность попадания двумерной случайной величины в квадрант левее и ниже точки с координатами (x, y).

Свойства интегральной функции:

1. F не убывает и непрерывна слева по каждому аргументу;

2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty.) = 0$;

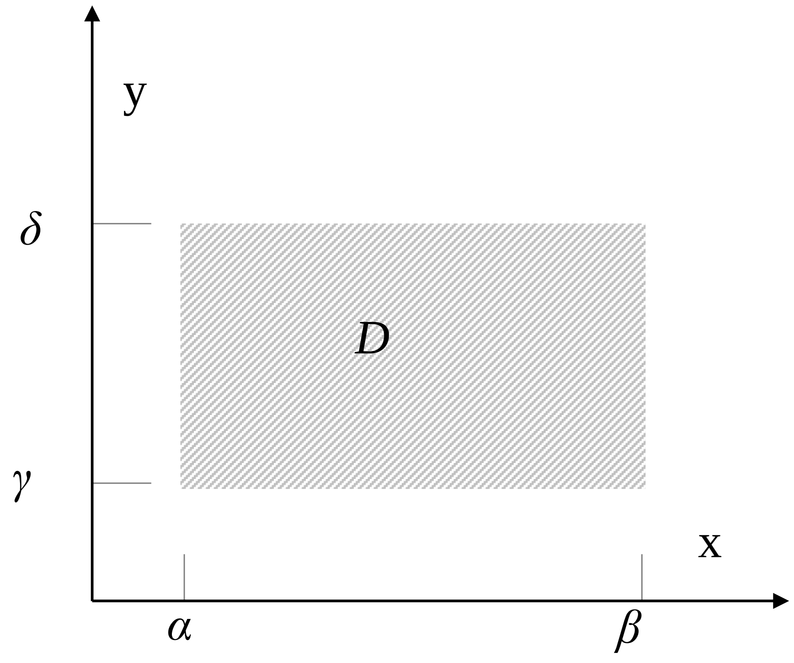
3. $F(+\infty, y) = F_2(y)$ - функция распределения случайной величины *Y*;

$F(x, +\infty) = F_1(x)$ - функция распределения случайной величины *X*;

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Система двух случайных величин

Вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольник определяется, исходя из определения интегральной функции двумерной случайной величины:



$$P((x, y) \in D) = F(\beta, \delta) - F(a, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(a, \gamma). \quad (6)$$

Система двух случайных величин

- Случайные величины X, Y *независимы,* если $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Дифференциальная функция системы двух непрерывных случайных величин определяется как вторая смешанная производная функции распределения:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y). \quad (7)$$

Свойства дифференциальной функции:

- 1) f(x,y)>0;
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1;$
- 3) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$

Геометрически свойство 2 означает, что объем тела, ограниченного поверхностью *f(x,y)* и плоскостью *XOY*, равен 1.

Если случайные величины x и y независимы, то

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y), (8)$$

где $f_1(x)= F_1'(x)$, $f_2(y)= F_2'(y)$ - безусловные законы распределения.

Система двух случайных величин

- В противном случае:

$$f(x,\ y) = f_1(x)\ f(y/x),\quad \text{или}\quad f(x,y) = f_2(y) f(x/y),$$

(9) (10)

где $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_{1(x)}}$ – условная дифференциальная функция *СВ У* при заданном значении *X=x,*

$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_{2(x)}}$ – условная дифференциальная функция *СВ X* при заданном значении *Y=y;*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{и} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

– дифференциальные функции отдельных величин *X* и У, входящих в систему.

Числовые характеристики системы двух случайных величин

- *Начальным моментом порядка* s, h системы двух случайных величин *X*, *Y* называется математическое ожидание произведения степени *s* случайной величины *X* и степени *h* случайной величины *Y*:

$$a_{s,h} = M(X^s Y^h) \qquad (11)$$

- *Центральным моментом порядка* s, h системы *СВ (X, Y)* называется математическое ожидание произведения степеней *s, h* соответствующих центрированных случайных величин:

$$\mu_{s,h} = M\left(\dot{X}^s \dot{Y}^h\right), \qquad (12.)$$

где $\dot{X}$ = *X-M(X),* $\dot{Y}$ = *Y- M(Y)* - центрированные случайные величины *X* и *Y*.

- *Основным моментом* порядка s, h системы *СВ (X, Y)* называется нормированный центральный момент порядкам *s, h*:

$$r_{s,h} = \frac{\mu_{s,h}}{\sigma_x^s \sigma_y^h} \qquad (13)$$

Числовые характеристики системы двух случайных величин

- Начальные моменты $a_{1.0}$, $a_{0.1}$:

$a_{1.0} = M(X^1\ Y^0)= M(X)$; $a_{0.1} = M(X^0 Y^1) = M(Y)$.

- Вторые центральные моменты:

$$\mu_{2.0}= M(\dot{X}^2\dot{Y}^0) = M(x\text{-}M\ (X))^2=D(X),$$

- характеризует рассеяние случайных величин в направлении оси OX.

$$\mu_{0.2}= M(\dot{X}^0\dot{Y}^2) = M(y\text{-}M\ (Y)\ )^2 = D(Y),$$

-   характеризует рассеяние случайных величин в направлении оси OY.

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

- Особую роль в качестве характеристики совместной вариации случайных величин X и $У$ играет второй смешанный центральный момент, который называется ***корреляционным моментом*** (***ковариацией***):

$$\mu_{1.1} = M(\dot{X}^1\dot{Y}^1) = K(X,Y) = cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y). \quad (13)$$

- Корреляционный момент является мерой связи случайных величин. Если случайные величины X и У независимы, то математическое ожидание равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y), \text{ отсюда } cov\ (X,\ Y)=0.$$

- Если ковариация случайных величин не равна нулю, то говорят, что случайные величины коррелированы. Ковариация может принимать значения на всей числовой оси, поэтому в качестве меры связи используют основной момент порядка $s=1,\ h=1$, который называют *коэффициентом корреляции:*

$$r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (14)$$

где $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Пример 1. Докажем, что если случайные величины X и У линейно зависимы, то коэффициент корреляции равен ±1.

Доказательство.

Пусть между случайными величинами X и $У$ имеет место зависимость

$$Y=AX+B, \text{ где } M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2.$$

Тогда имеем: $M(У) = M(AX+B) = AM(X) + B = Aa+B$,

$$D(Y) = D(AX+B) = D(AX) + D(B) = A^2 D(X) = A^2\sigma^2,$$

$$\text{следовательно, } \sigma(Y) = \sqrt{A^2\sigma^2} = |A|\sigma,$$

$$cov\ (X,У) = M\,((X - a)(Y - Aa - B)) = M\,((X - a)(AX+B - Aa - B)) =$$
$$= AM((X-a)^2) = A\,D(X) = A\sigma^2.$$

Отсюда, $r_{xy} = \dfrac{A\sigma^2}{\sigma(|A|\sigma)} = \dfrac{A}{|A|} = \pm 1$, что и требовалось доказать.

Если между случайными величинами X и У существует линейная связь, то коэффициент корреляции равен ±1. Коэффициент корреляции служит мерой *линейной зависимости* между случайными величинами.

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Свойства коэффициента корреляции:

- $-1 \le r_{xy} \le 1$.
- если $r_{xy} = \pm 1$, то случайные величины линейно зависимы;
- если $r_{xy} = 0$, то случайные величины не коррелированы, что не означает их независимости вообще.

Замечание. *Если случайные величины X и Y подчиняются нормальному закону распределения, то некоррелированность СВ X и Y означает их независимость.*

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Первые моменты:

а) для дискретных *СВ*:

$$\mathrm{M(X)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij},$$

$$\mathrm{M}(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij},$$

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_{ij},$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(y_i - M(Y)\big)^2 p_{ij},$$

$$K(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i - M(X)\big)\cdot\big(y_i - M(Y)\big)p_{ij}$$

б) для непрерывных *СВ*:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dx\,dy$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dx\,dy$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{x} - \mathrm{M(X)})^2\mathrm{f(x,y)\,dx\,dy},$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{y} - \mathrm{M(Y)})^2\mathrm{f(x,y)\,dx\,dy},$$

$$K(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x - M(X)\big)\cdot\big(y - M(Y)\big)f(x,y)\,dx\,dy$$

Функции случайных величин

Закон распределения функции случайных величин

- Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией плотности вероятности $f(x)$. Другая случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью: $Y=\varphi(X)$, Случайная точка (X, Y) может находиться только на кривой $y=\varphi(x)$.
- Дифференциальная функция случайной величины Y определяется при условии, что $\varphi(x)$ - монотонна на интервале (a, b), тогда для функции φ(x) существует обратная функция: $\varphi^{-1}=\psi$, $x = \psi(y)$.
- Обычно числовая прямая разбивается на n промежутков монотонности и обратная функция находится на каждом из них, поэтому:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\psi_i(y)\right) \cdot |\psi_i'(y)|, \quad (15)$$

$g(y)$ - дифференциальная функция *СВ Y.*

Функции случайных величин

Математическое ожидание и дисперсию *СВ Y* - функции случайной величины *X(Y=φ(X))*, имеющей дифференциальную функцию *f(x)*, можно определить по формулам:

- $M(Y) = M\big(\varphi(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx,$ (16)
- $D(Y) = D\big(\varphi(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - M^2(Y).$ (17)

Пример 2. Случайная величина *X* подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием *a* и дисперсией σ^2, то есть дифференциальная функция имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Найти дифференциальную функцию случайной величины $Y=X^2$.

Решение. На (0;∞), для $y=x^2$, обратная функция $x = \sqrt{y} = \psi_1$;

на (- ∞;0) - обратная функция $x = -\sqrt{y} = \psi_2$. По формуле (15):

$$g(y) = f\big(\psi_1(y)\big) \cdot |\psi_1'(y)| + f\big(\psi_2(y)\big) \cdot |\psi_2'(y)|$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

При a=0 и σ=1: $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{y}{2}}$.