Лекция 3. Обратная матрица

Пусть A- квадратная матрица n-го порядка.

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной,* если $\Delta A \neq 0$. В противном случае матрица называется вырожденной.

Определение. Матрицей, *союзной* к матрице A, называется матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} \; A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$,

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} данной матрицы A.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Матрицы A^{-1}, E того же порядка, что и A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство

Проведем доказательство на примере матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Составим союзную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

Найдем произведение $A \cdot A^*$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} & a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} \\ a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} & a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{pmatrix} =$$

$$= \Delta A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta A \cdot E$$

$$A \cdot A^* = \Delta A \cdot E \qquad (1)$$

Аналогично можно показать, что

$$A^* \cdot A = \Delta A \cdot E \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{\Delta A} = E \qquad и \qquad \frac{A^*}{\Delta A} \cdot A = E$$

По определению обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Формула (3) для матрицы A третьего порядка имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы.

1) $\Delta A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Например.

Пример 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

найти обратную матрицу.

Решение. Для нахождения обратной матрицы необходимо найти определитель матрицы A . Находим по правилу треугольников:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 60 = -50.$$

Следовательно, матрица A – неособенная (невырожденная) и для неё существует обратная.

Найдём матрицу, союзную с данной матрицей A.

Вычисляем элементы союзной матрицы как алгебраические дополнения матрицы, транспонированной относительно матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. Составляем сдвоенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и будем её преобразовывать, так чтобы в левой части получилась единичная матрица. Начинаем преобразования.

Умножим первую строку левой и правой матрицы на (-3) и сложим её со второй строкой, а затем умножим первую строку на (-4) и сложим её с третьей строкой, тогда получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Чтобы по возможности не было дробных чисел при последующих преобразованиях, создадим предварительно единицу во второй строке в левой части сдвоенной матрицы. Для этого умножим вторую строку на 2 и вычтем из неё третью строку, тогда получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Сложим первую строку со второй, а затем умножим вторую строку на (-9) и сложим её с третьей строкой. Тогда получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 14 & -18 & 10 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 8, тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на 2 и сложим её со второй строкой. Получается:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right).$$

Переставим местами вторую и третью строку, тогда окончательно получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Видим, что в левой части получилась единичная матрица, следовательно, в правой части получилась обратная матрица A^{-1}. Таким образом:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Матричный метод решения систем уравнений

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Где $a_{11},\ a_{12},\ldots, a_{nn}$ - коэффициенты при неизвестных

$x_1,\ x_2,\ldots, x_n$ - неизвестные величины

$b_1, b_2,\ldots, b_n$ - свободные члены

Введем для системы следующие обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрица А- матрица коэффициентов системы называется основной матрицей

X- матрица столбец неизвестных
B- матрица столбец свободных членов

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения

$A\cdot X=B \;\Big|\cdot A^{-1}$ $\qquad$ $XA=B \;\Big|\cdot A^{-1}$

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ $\qquad$ $XAA^{-1}=BA^{-1}$

$X=A^{-1}\cdot B$ $\qquad$ $X=BA^{-1}$

Пример

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$A\cdot X\cdot B=C$ $\qquad$ $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$$X=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{150}\begin{pmatrix}24 & 45\\ -4 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{150}\begin{pmatrix}93 & 39\\ -9 & 1\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

Определение. Минором к-го порядка произвольной матрицы А называется определитель. составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо к строк и к столбцов.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,0\\ 0\,1\,1\,1\\ 1\,3\,4\,1\end{pmatrix}\quad M_1=1\quad M_2=\begin{vmatrix}1 2\\ 0\,1\end{vmatrix}\quad M_2=\begin{vmatrix}2\,3\\ 1\,1\end{vmatrix}\quad M_3=\begin{vmatrix}1\,2\,3\\ 0\,1\,1\\ 1\,3\,4\end{vmatrix}$$

Определение. Рангом матрицы А называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю

$$A=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\ 0\,0\,0\end{pmatrix}\quad M_1=3\neq 0\quad M_2=\begin{vmatrix}2\,3\\ 0\,0\end{vmatrix}=0$$

$rangA=1$ $\qquad$ $r(A)$

Определение. Любой минор порядка к, отличный от нуля называется базисным.

Из определения ранга матрицы следует:

1) ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A)\leq\min(m,n)$

2) $r(A)=0$ т.и т.т.к. (тогда и только тогда когда) все элементы матрицы равны нулю, т.е. А=0

3) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ т. и т.т.к. матрица А невырожденная $\Delta A\neq 0$

Метод окамляющих миноров

Нахождения ранга матрицы А состоит в следующем:
1) При наличии хотя бы одного элемента, отличного от нуля, ранг матрицы как минимум равен единице (*т.к. есть минор 1-го порядка, который не равен нулю*).
2) Вычислить миноры второго порядка , содержащие (окамляющие) до тех пор, пока не найдется минор, отличный от нуля. Иначе r(A)=1 и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,3\,4\,1 \end{pmatrix} \quad M_1 = 1 \quad M_2 = \begin{vmatrix} 12 \\ 0\,1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1\,2\,3 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,3\,4 \end{vmatrix} = 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1\,2\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,3\,1 \end{vmatrix} = 0$$

$$r(A) = 2$$

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для обеспечения этой задачи используют элементарные преобразования.

Теорема. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Определение. Матрица А называется ступенчатой, если она имеет вид

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} ... a_{1r} ... a_{1n} \\ 0 \quad a_{22} ... a_{2r} ... a_{2n} \\ ....\,........ \\ 0 \quad\; 0... \;\; a_{rr} ... a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ранг ступенчатой матрицы равен r , т.к. имеется минор r-го порядка, не равный нулю.
Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Пример 1
Вычислить ранг матрицы А, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

От 1-ой строки отнимем 2-ую умноженную на 2, от 4-той отнимем 2-ую умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поменяем местами строки

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

полученная матрица есть является ступенчатой, значит r(A) = 3.

Ответ: r(A) = 3.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Подвергнем эту матрицу следующим преобразованиям. Ко второй строке прибавим третью, умноженную на - 2, а затем к третьей строке прибавим первую, умноженную на 2, и, наконец, из четвёртой вычтем первую. После этих трёх последовательно выполненных преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из четвёртой строки третью, а затем переставив местами вторую и третью строки, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили трапециевидную матрицу. Ранг полученной матрицы равен трём (r=3), так как после вычёркивания последней строки, полностью состоящей из нулей, в ней останется три строки.