ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение. *Дифференциальные* уравнения выше первого порядка, называются ДУ высшего порядка.

Общий вид ДУ второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

или если это возможно в виде разрешенном относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

Определение. *Решением ДУ* (1) называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Определение. *Общим решением ДУ* (1) называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, где c_1 и c_2 - не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

1) $\varphi(x, c_1, c_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2

2) каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0\ , \quad y'(x_0) = y_0' \qquad (2)$$

существуют единственные значения постоянных $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$ такие , что функция $y = \varphi(x, c_1{}^0, c_2{}^0)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Определение. Всякое решение $y = \varphi(x, c_1{}^0, c_2{}^0)$ уравнения (1), получающееся из общего решения $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$, называется *частным решением.*

Решения ДУ (1), записанные в виде $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ и $\Phi(x, y, c_1{}^0, c_2{}^0) = 0$ называют общим и частным интегралом соответственно.

Определение. График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой . Общее решение ДУ (1)представляет собой *множество интегральных кривых.*

Частное решение– одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y_0'$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Если в уравнении (1) функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные f_y' и f_y'' непрерывны в некоторой области Д изменения переменных x, y, y', то для всякой точки $(x_0, y_0, y_0') \in Д$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (2).

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1) $$y'' = f(x) \qquad (1)$$

$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x) \Rightarrow$

$p' = f(x)$– уравнение 1-го порядка.

Решив его, т.е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$

На практике порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Т.к. $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$

$$dy' = f(x)dx, \quad y' = \int (x)dx = \varphi_1(x) + c_1, \;\; y = \int (\varphi_1(x) + c_1)dx + c_2$$

Например.

$$y'' = \sin kx \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$y' = -\frac{1}{k}\cos kx + c_1$$

$$1 = -\frac{1}{k} + c_1, \quad c_1 = 1 + \frac{1}{k} = \frac{1+k}{k}$$

$$y = -\frac{1}{k^2}\sin kx + \frac{1+k}{k}x + c_2$$

$$0 = c_2 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{k^2}\sin kx + \frac{1+k}{k}x$$

2) $\boxed{y'' = f(x, y')}$ (2)

Уравнение, не содержащее явно искомую функцию y.

$$\boxed{y' = p \qquad y'' = p' = f(x, p) \quad p' = \frac{dp}{dx}}$$

Где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция

$$dp = f(x, p)dx$$

$$p = p(x, c_1) \quad p = \frac{dy}{dx} \quad \int dy = \int p dx + c_1 x + c_2$$

Пример

$$x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$$

$$y' = p \quad y'' = p'$$

$$x^3 p' + x^2 p - 1 = 0$$

$$p' + \frac{1}{x}p = \frac{1}{x^3}$$

$$p = UV \quad p' = U'V + UV'$$

$$U'V + UV' + \frac{1}{x}UV = \frac{1}{x^3}$$

$$U'V + U(V' + \frac{1}{x}V) = \frac{1}{x^3} \qquad V' + \frac{1}{x}V = 0 \qquad \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x} \quad LnV = -Lnx = Ln\frac{1}{x}$$

$$V = \frac{1}{x} \qquad U'\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3} \quad U' = \frac{1}{x^2} \quad U = -\frac{1}{x} + c$$

$$y' = p = \frac{1}{x}(c - \frac{1}{x}) = \frac{c}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad y = cLnx + \frac{1}{x} + c_1$$

3) $\boxed{y'' = f(y, y')}$ (3)

Уравнение, не содержащее явно независимую переменную x.

$$\boxed{y' = p \qquad p = p(y(x))) \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p}$$

Пусть $p=\varphi(y,c_1)$ общее решение ДУ.

$y'=\varphi(y,c_1)$ – ДУ с разделяющимися переменными

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,c_1)}x+c_2$$

Пример.

$$y^2+(y')^2-2yy''=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=1$$

Решение.

$$y'=p \qquad y''=\frac{dp}{dy}\cdot p \qquad y^2+p^2-2yp\frac{dp}{dy}=0\,|\div(-2yp)$$

$$\frac{dp}{dy}-\frac{p}{2y}-\frac{y}{2p}=0 \qquad \frac{p}{y}=t \quad p=ty \quad p'=t+yt'$$

$$t+yt'-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t}=0 \quad yt'=\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}=\frac{1-t^2}{2t}$$

$$\frac{ydt}{dy}=\frac{1-t^2}{2t} \qquad \int\frac{2tdt}{1-t^2}=\int\frac{dy}{y} \quad -Ln\left|t^2-1\right|=Lny-Lnc$$

$$Ln\frac{1}{\left|t^2-1\right|}=Ln\frac{y}{c} \quad (t^2-1)=\frac{c}{y} \quad t=\sqrt{1+\frac{c}{y}} \quad \frac{p}{y}=\sqrt{1+\frac{c}{y}} \quad \frac{y'}{y}=\sqrt{1+\frac{c}{y}}$$

$$y'=1 \quad y=1 \quad x=0$$

$$\frac{1}{1}=\sqrt{1+\frac{c}{1}} \quad c=0 \quad \Rightarrow\frac{y'}{y}=1 \quad y'=y \quad \frac{dy}{dx}=y \quad \int\frac{dy}{y}=\int dx \quad Lny=x+c$$

$$y=e^{x+c} \quad 1=e^{0+c}=e^c \quad c=0 \quad y=e^x$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_ny=g(x) \qquad (1)$$

$a_0(x)\neq 0, a_1(x),...,a_n, g(x)$ – заданные функции от x, называется линейным ДУ n-го порядка.

Функции $a_0(x),a_1(x),...,a_n$ называются коэффициентами уравнения, а функция $g(x)$ его свободным членом.

Если $g(x)=0$, то уравнение (1) называется линейным однородным уравнением.

Если $g(x)\neq 0$, то уравнение (1) называется линейным неоднородным уравнением.

Будем считать, что коэффициенты и свободный член непрерывные функции.

Линейные однородные ДУ 2-го порядка (ЛОДУ)

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (2)$$

Теорема 1. Если функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (2), то решением этого уравнения также является функция $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ где c_1 и c_2 – постоянные.

Доказательство.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \qquad y'' = c_1 y''_1 + c_2 y_2''$

Подставим в (2)

$(c_1 y''_1 + c_2 y_2'') + a_1(x)(c_1 y'_1 + c_2 y_2') + a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$

$c_1(y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

Выражения в скобках тождественно равны нулю, т.к. y_1 *и* y_2 – решения уравнения (2). Следовательно и функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ также является решением уравнения (2).

Следствие. Если y_1 *и* y_2 решения уравнения (2), то $y = y_1 + y_2$ и $y = c y_1$ также решения (2).

Определение. Функции $y_1 = y_1(x)$ *и* $y_2 = y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b), если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \qquad (3)$$

Где α_1 *и* $\alpha_2 \in R$, выполняется т.и т.т.к. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Определение. Если хотя бы одно из чисел α_1 *и* α_2 отлично от нуля и выполняется равенство (3), то функции y_1 *и* y_2 называются *линейно зависимыми* на (a,b) .

Очевидно, что функции y_1 *и* y_2 линейно зависимы т.и т.т.к. они пропорциональны, т.е. для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ или $y_1 = \lambda y_2, \ \lambda = const$

Например. $y_1 = 3e^x$ *и* $y_2 = e^x$ линейно зависимые ,т.к. $\frac{y_1}{y_2} = 3$

$y_1 = 3e^x$ *и* $y_2 = e^{2x}$ линейно независимые , т.к. $\frac{y_1}{y_2} = 3e^{-x} \neq const$

$y_1 = \sin x$ *и* $y_2 = \cos x$ линейно независимые , $\alpha_1 snx + \alpha_2 \cos x = 0$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Средством изучения линейной зависимости системы функций является определитель Вронского или вронскиан $\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.}$

Теорема 2.

Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ линейно зависимы на (a,b), то W на этом интервале тождественно равен нулю.

Доказательство

Т.к. $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ линейно зависимы, то $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 3.

Если функции $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ линейно независимые решения уравнения (2) на (a,b), то W на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Определение. Совокупность любых двух линейно независимых на интервале (a,b) частных решений $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет *фундаментальную систему решений* этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$

Например.

$y'' + y = 0$ $y_1 = \sin x$ $y_2 = \cos x$ $y_3 = 2\sin x$ образуют фундаментальную систему решений

$y_4 = \cos x$ $y_5 = 0$ Не образуют

Теорема 4. (Структура общего решения ЛОДУ второго порядка)

Если два частных решения $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ ЛОДУ (2) образуют на интервале (a, b) фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$. Где c_1 и c_2 произвольные постоянные.