Лекция 16

Нахождение изображений.

Восстановление оригинала по известному изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ используются несколько приемов.

1. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то его следует умножить и одновременно поделить на этот множитель, затем воспользоваться свойством линейности и найти оригинал по таблице оригиналов и изображений.

Примеры

Найти оригиналы для данных изображений.

1. $\dfrac{4}{p^5}=\dfrac{4}{4!}\dfrac{4!}{p^5}=\dfrac{1}{6}\dfrac{4!}{p^5}$; $\quad \dfrac{1}{6}\dfrac{4!}{p^5}\to\dfrac{1}{6}t^4$.

2. $\dfrac{8p}{p^2+7}=\dfrac{8p}{p^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}$; $\quad \dfrac{8p}{p^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\to 8\cos\sqrt{7}t$.

3. $\dfrac{2}{p^2-9}=\dfrac{2}{p^2-3^2}=\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{p^2-3^2}$; $\quad \dfrac{2}{3}\dfrac{3}{p^2-3^2}\to\dfrac{2}{3}sh3t$.

2. Если переменная p смещена на несколько единиц, то необходимо применить теорему смещения.

Если изображение имеет множитель e^{-ap}**,** то необходимо применить теорему запаздывания.

Примеры

Найти оригиналы для данных изображений.

1. $\dfrac{3p+2}{(p-1)^6}=\dfrac{3(p-1+1)+2}{(p-1)^6}=\dfrac{3}{(p-1)^5}+\dfrac{5}{(p-1)^6}=$

$$=\frac{3}{4!}\frac{4!}{(p-1)^5}+\frac{5}{5!}\frac{5!}{(p-1)^6}=\frac{1}{8}\frac{4!}{(p-1)^5}+\frac{1}{24}\frac{5!}{(p-1)^6}.$$

По теореме смещения:

$$\frac{1}{8}\frac{4!}{(p-1)^5}+\frac{1}{24}\frac{5!}{(p-1)^6}\to\frac{1}{8}e^t t^4+\frac{1}{24}e^t t^5.$$

2. $\dfrac{15e^{-5p}}{p^4}$.

Изображение $\dfrac{15}{p^4}$ умножено на e^{-5p}. Следовательно, надо использовать теорему запаздывания.

$\dfrac{15}{p^4}=\dfrac{15}{3!}\dfrac{3!}{p^4}$. Тогда $\dfrac{15}{3!}\dfrac{3!}{p^4}\to\dfrac{5}{2}t^3$.

Теперь применяем теорему запаздывания оригинала:

$$\frac{15}{3!}\cdot e^{-5p}\cdot\frac{3!}{p^4}\to\frac{5}{2}(t-5)^3\chi(t-5).$$

Итак, $\dfrac{15e^{-5p}}{p^4}\to\dfrac{5}{2}(t-5)^3\chi(t-5).$

3. $\dfrac{6e^{-7p}}{(p+3)^2-12}.$

Здесь надо использовать и теорему смещения, и теорему запаздывания. По таблице оригиналов и изображений находим сначала оригинал для функции $\dfrac{6}{(p+3)^2-12}$, используя теорему смещения.

$$\frac{6}{(p+3)^2-12}=\frac{6}{(p+3)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2}=\frac{6}{2\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}}{(p+3)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}.$$

$$\frac{6}{2\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}}{(p+3)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}\to\frac{6}{2\sqrt{3}}e^{-3t}sh2\sqrt{3}t.$$

Теперь применяем теорему запаздывания оригинала:

$$\frac{6e^{-7p}}{(p+3)^2-12}\to\frac{6}{2\sqrt{3}}e^{-3(t-7)}sh2\sqrt{3}(t-7)\chi(t-7).$$

3. Если знаменатель дроби содержит квадратный трехчлен, то для использования теоремы смещения в нем выделяется полный квадрат.

Примеры

Найти оригиналы для данных изображений.

1. $\dfrac{3}{p^2-6p+11};$

$$\frac{3}{p^2-6p+11}=\frac{3}{p^2-2\cdot 3p+9-9+11}=\frac{3}{(p-3)^2+2}=$$

$$=\frac{3}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}.$$

Используем теорему смещения:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\to\frac{3}{\sqrt{2}}e^{3t}\sin\sqrt{2}t.$$

Итак, $\dfrac{3}{p^2-6p+11}\to\dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{3t}\sin\sqrt{2}t.$

2. $\dfrac{4p-1}{p^2+5p+4};$

$$\frac{4p-1}{p^2+5p+4}=\frac{4p-1}{p^2+2\cdot\frac{5}{2}p+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+4}==\frac{4p-1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{4p-1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Для того чтобы можно было использовать теорему смещения, надо в числителе получить выражение $\left(p+\frac{5}{2}\right)$.

$$\frac{4p-1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4\left(p+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)-1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4\left(p+\frac{5}{2}\right)-11}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$4\cdot\frac{p+\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{11}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2};$$

$$4\cdot\frac{p+\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{22}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\to$$

$$\to 4e^{-\frac{5}{2}t}ch\frac{3t}{2}-\frac{22}{3}e^{-\frac{5}{2}t}sh\frac{3t}{2}.$$

Итак, $\dfrac{4p-1}{p^2+5p+4}\to 4e^{-\frac{5}{2}t}ch\dfrac{3t}{2}-\dfrac{22}{3}e^{-\frac{5}{2}t}sh\dfrac{3t}{2}.$

4. Если оригинал – правильная рациональная дробь, то следует разложить ее на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал.

Пример

Найти оригинал для данного изображения:

$$\frac{4p^2+p-1}{(p-1)\left(p^2-5p+4\right)}.$$

Данная дробь является правильной. Квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, имеет два действительных корня $p_1=1, p_2=4.$ Разложим квадратный трехчлен на множители и представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4p^2+p-1}{(p-1)^2(p-4)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p-4}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю и приравниваем числители дробей левой и правой частей.

$$4p^2+p-1=A(p-4)(p-1)+B(p-4)+C(p-1)^2;$$

$p=1\,|\quad 4=-3B$

$p=4\,|\quad 67=9C$

$p^2\,|\quad A+C=4.$

Получаем, $B=-\dfrac{4}{3}; C=\dfrac{67}{9}$. Тогда, $A=4-C;\ A=4-\dfrac{67}{9}=-\dfrac{31}{9}.$

Таким образом,

$$\frac{4p^2+p-1}{(p-1)(p^2-5p+4)}=-\frac{31}{9}\frac{1}{p-1}-\frac{4}{3}\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{67}{9}\frac{1}{p-4}.$$

$$-\frac{31}{9}\frac{1}{p-1}-\frac{4}{3}\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{67}{9}\frac{1}{p-4}\to-\frac{31}{9}e^t-\frac{4}{3}e^t\cdot t+\frac{67}{9}e^{4t}.$$

Итак, $\frac{4p^2+p-1}{(p-1)(p^2-5p+4)}\to-\frac{31}{9}e^t-\frac{4}{3}e^t\cdot t+\frac{67}{9}e^{4t}$.

Свертка функций. Умножение изображений.

Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется интеграл:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Теорема об умножении изображений (теорема о свертке).

Пусть $f(t)\to F(p), g(t)\to G(p)$.

Произведение изображений является изображением свертки их оригиналов:

$$f(t)*g(t)\to F(p)G(p)$$

Следствие. Формула Дюамеля

Если $f_1(t)*f_2(t)\to F_1(p)\cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\to\int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau+f_1(0)f_2(t)$$

Примеры

1. Найти свертку функций и соответствующее ей изображение:

$$f(t)=e^{4t}, g(t)=e^{-2t}.$$

Свертка функций: $e^{4t}*e^{-2t}$.

$$e^{4t}\to\frac{1}{p-4};\ e^{-2t}\to\frac{1}{p+2}.$$

Следовательно, изображение свертки: $e^{4t}*e^{-2t}\to\frac{1}{p-4}\frac{1}{p+2}$.

Свертку функций найдем по определению:

$$e^{4t}*e^{-2t}\to\int_0^t e^{4\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau=\int_0^t e^{4\tau}e^{-2t}e^{2\tau}d\tau=e^{-2t}\int_0^t e^{6\tau}d\tau==\frac{1}{6}e^{-2t}\left(e^{6\tau}\Big|_0^t\right)==$$

$$\frac{1}{6}e^{-2t}\left(e^{6t}-e^0\right)=\frac{1}{6}e^{4t}-\frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Итак, $e^{4t} * e^{-2t} = \frac{1}{6}e^{4t} - \frac{1}{6}e^{-2t}$.

Свертку можно найти другим способом. Мы нашли изображение свертки: $\frac{1}{p-4}\frac{1}{p+2}$. Оригинал этого изображения является искомой сверткой функций.

Представим изображение в виде суммы простейших дробей, определим неизвестные коэффициенты (способ определения коэффициентов рассмотрен выше).

$\frac{1}{p-4}\frac{1}{p+2} = \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p+2}$; $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$.

Таким образом, $\frac{1}{p-4}\frac{1}{p+2} = \frac{1}{6}\frac{1}{p-4} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2}$.

Находим оригинал для изображения свертки:

$\frac{1}{6}\frac{1}{p-4} - \frac{1}{6}\frac{1}{p+2} \to \frac{1}{6}e^{4t} - \frac{1}{6}e^{-2t}$.

Ответ: $e^{4t} * e^{-2t} \to \frac{1}{p-4}\frac{1}{p+2}$, $e^{4t} * e^{-2t} = \frac{1}{6}e^{4t} - \frac{1}{6}e^{-2t}$.

2. Пользуясь теоремой о свертке, найти оригинал изображения:

$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)}$.

$\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)} = \frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{p}{p^2+25}$; $\frac{p}{p^2+4} \to cos\,2t, \frac{p}{p^2+25} \to cos\,5t$. По теореме о свертке:

$$\frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{p}{p^2+25} \to cos\,2t * cos\,5t.$$

Найдем свертку $cos\,2t * cos\,5t$, используя определение:

$$cos\,2t * cos\,5t = \int_0^t cos\,2\tau\,cos5(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}sin(7\tau - 5t) - \frac{1}{3}sin(5t - 3\tau)\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}sin(7t-5t) - \frac{1}{3}sin(5t-3t) - \frac{1}{7}sin(-5t) + \frac{1}{3}sin\,5t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}sin\,2t - \frac{1}{3}sin\,2t + \frac{1}{7}sin\,5t + \frac{1}{3}sin\,5t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{21}sin\,2t + \frac{10}{21}sin\,5t\right) = \frac{5}{21}sin\,5t - \frac{2}{21}sin\,2t.$$

Итак, $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)} \to \frac{5}{21}sin\,5t - \frac{2}{21}sin\,2t$.