ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Самому умному философу трудно отвечать на глупые вопросы

Хилон

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Освоить алгоритм решения задачи квадратичного программирования.
2. Приобрести навыки преобразования исходной задачи в эквивалентную ей задачу линейного программирования.
3. Закрепить навыки решения ЗЛП методом искусственного базиса

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

К области квадратичного программирования следует относить модели математического программирования, у которых система ограничений образована линейными неравенствами, а функция цели – второго порядка, вогнутая [2, 7, 9]. Обычно постановка задачи имеет вид модели

$$\begin{aligned} &f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T CX \to \max, \\ &AX \le A_0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где C — симметричная отрицательно определённая матрица $[n \times n]$, b^T- вектор-строка $[1 \times n]$, A — матрица системы ограничений $[m \times n]$, A_0 — вектор свободных членов системы ограничений $[m \times 1]$, n — число переменных.

Путем применения теоремы Куна-Таккера, получают условие существования оптимального решения вида [7]:

$$\begin{aligned} & b + C \cdot X - A^T \Lambda + V = 0, && a) \\ & A_0 - AX - W = 0, && б) \\ & \left.\begin{aligned} V^T X = 0 \\ W^T \Lambda = 0 \end{aligned}\right\}, && в) \end{aligned} \tag{7.2}$$

где *Λ* и *W* — *m*-мерные векторы, *V* — *n*-мерный вектор. Компоненты всех векторов *Λ*, *W* и *V* — неотрицательны.

Условие (7.2, а) и (7.2, б) образуют систему из $n + m$ уравнений для $2 \times (n + m)$ неизвестных компонентов X, Λ, V и W. Условие (7.2, в) есть условие дополняющей нежёсткости.

По условиям (7.2, а) и (7.2, б), которые представляют в форме

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V = b, \\ \quad AX + W = A_0, \end{cases} \tag{7.3}$$

путём добавления искусственных переменных $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ осуществляют построение эквивалентной ЗЛП с псевдоцелевой функцией вида:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu \cdot y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu \cdot z_j \to \min$$

и системой ограничений

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V + Z = b, \\ \quad AX + W + Y = A_0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Если в ходе решения ЗЛП методом искусственного базиса, векторы *Y* и *Z* будут выведены (достигнут оптимум), а полученные значения *X*, *Λ*, *V* и W удовлетворяют (7.2, в), то компоненты вектора *X* представляют собой оптимальное решение задачи квадратичного программирования.

Подробно ход решения представлен в [5, с. 24 – 33]

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя компоненты целевой функции: вектор *b* и матрицу *C*. В качестве системы ограничений использовать систему неравенств из вариантов к лабораторным работам №№ 1 — 5.

2. Согласно варианту задания, построить форму (7.3). Указание: в ходе построения обеспечить положительность столбца свободных членов системы (7.3) путём умножения на множитель “–1” там, где это необходимо.

3. Построить эквивалентную задачу линейного программирования (7.4) и решить её методом искусственного базиса.

4. Выполнить проверку полученного решения на соответствии условиям дополняющей нежёсткости (7.2, в) и, в случае их удовлетворения, рассчитать максимальное значение целевой функции при полученном векторе оптимальных параметров X. Для удобства ручного выполнения расчётов, целевую функцию можно представить в виде

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \ .$$

5. Выполнить чертёж, на котором отобразить область ограничений с указанием точки, в которой достигается оптимальное решение НП-задачи, и привести значение функции цели в этой точке.

6. Оформить отчет, сделать содержательные выводы и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
2. Сформулируйте теорему квадратичного программирования.
3. Как по «внешнему» виду математической модели определить: относится ли она к задачам квадратичного программирования?
4. Как следует понимать термины «выпуклая» и «вогнутая» функции применительно к задачам нелинейного программирования?
5. Что означает термин “симметричная” матрица?
6. Что означают термины “отрицательно” и “положительно” определённые матрицы?
7. В чём заключается условие дополняющей нежёсткости? Запишите его формулировку.
8. Когда задача квадратичного программирования неразрешима?
9. Можно ли решить задачу квадратичного программирования для случая с функцией цели вида $f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \to \max$, когда C — симметричная, положительно определённая матрица, и, если Вы полагаете, что можно, поясните, каким образом?
10. Какие шаги предпринять, чтобы пользуясь изложенным выше методом решить задачу вида (7.1) на минимум целевой функции?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Деордица Ю. Ф. Исследование операций в планировании управления / Ю. Ф. Деордица, Ю. М., Нефедов. – Киев : Вища школа, 1991. – 196 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций : учебное пособие / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа, 1979. – 392 с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: сборник задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Киев : Вища школа, 1990. – 239 с.
4. Карлусов В. Ю. Исследование операций и методы оптимизации : учебное пособие / В. Ю. Карлусов ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2018. – 315 с.
5. Методическое пособие к решению задач линейного программирования по дисциплине «Методы исследования операций» для студентов направлений подготовки 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 – «Прикладная информатика» всех форм обучения / Севастопольский государственный университет ; сост.: В. Ю. Карлусов, Е. Н. Заикина. – Севастополь : СевГУ, 2021. – 59 с.
6. Методическое пособие к выполнению лабораторно - вычислительного практикума по дисциплине «Методы исследования операций». Часть 3: «Параметрическое программирование», «Квадратичное программирование», «Линейное целочисленное программирование» для студентов профилей 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 – «Прикладная информатика» всех форм обучения / Севастопольский государственный университет ; сост.: Е. Н. Заикина, В. Ю. Карлусов – Севастополь : СевГУ, 2016. – 46 с.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИЗДАНИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПО ПОДПИСКЕ СЕВГУ

7. Горлач, Б. А. Исследование операций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б. А. Горлач. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4865. — Загл. с экрана.
8. Ржевский, С. В. Исследование операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/32821. — Загл. с экрана.
9. Есипов, Б. А. Методы исследования операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. А. Есипов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 304 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/68467. — Загл. с экрана.
10. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Л. Акулич. —

Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 352 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2027. — Загл. с экрана.

11. Балдин К. В. Математическое программирование / Балдин К. В., Брызгалов Н. А., Рукосуев А. В., — 2-е изд. — М.:Дашков и К, 2018. — 218 с. — Режим доступа : http://znanium.com/catalog/product/415097. — ISBN 978-5-394-01457-4

ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

№	Функция цели	№	Функция цели
0.	$b^T = \begin{vmatrix} -0{,}1 & -0{,}2 \end{vmatrix}$	5.	$b^T = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 2{,}0 \end{vmatrix}$
	$C = \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0.{=},1 \end{vmatrix}$		$C = \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -0{,}2 \end{vmatrix}$
1.	$b^T = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix}$	6.	$b^T = \begin{vmatrix} 1{,}0 & 2{,}5 \end{vmatrix}$
	$C = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{vmatrix}$		$C = \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}1 \end{vmatrix}$
2.	$b^T = \begin{vmatrix} 1{,}0 & 2{,}5 \end{vmatrix}$	7.	$\begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \end{vmatrix}$
	$C = \begin{vmatrix} -1{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -1{,}0 \end{vmatrix}$		$C = \begin{vmatrix} -0{,}8 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & -0{,}8 \end{vmatrix}$
3.	$b^T = \begin{vmatrix} -1{,}5 & -0{,}5 \end{vmatrix}$	8.	$b^T = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix}$
	$C = \begin{vmatrix} -1{,}25 & 1{,}75 \\ 1{,}75 & -1{,}25 \end{vmatrix}$		$C = \begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}2 \end{vmatrix}$
4.	$b^T = \begin{vmatrix} -2{,}25 & 2{,}5 \end{vmatrix}$	9.	$b^T = \begin{vmatrix} -1{,}0 & 0{,}5 \end{vmatrix}$
	$C = \begin{vmatrix} -0{,}75 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}75 \end{vmatrix}$		$C = \begin{vmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & -0{,}25 \end{vmatrix}$