Севастопольский государственный университет
Институт информационных технологий

Методы и системы искусственного интеллекта

Бондарев Владимир Николаевич

Лекция

Временные вероятностные модели
(Марковские модели, Скрытые Марковские Модели)

Рассуждения во времени и пространстве

- Часто, необходимо строить заключения на основе последовательности наблюдений :
  - Распознавание речи;
  - Позиционирование робота;
  - Оценка внимания пользователя при просмотре веб-страниц;
  - Мониторинг здоровья.

- Такие задачи требуют введения в модель BN времени (или пространства)

Марковские модели

Рассмотрим пример моделирования погодных условий с помощью Марковской модели. Определим X_i как случайную переменную, представляющую состояние погоды в i-ый день.

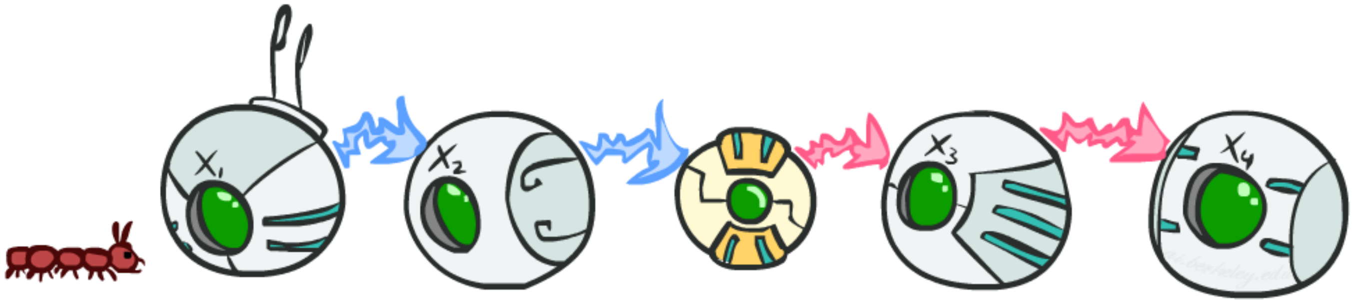
$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \dashrightarrow$$

$P(X_0)$ $\quad$ $P(X_{i+1} \mid X_i)$

Начальное состояние в примере Марковской модели задано таблицей вероятностей $P(X_0)$.

Модель перехода из состояния X_i в X_{i+1} задается условным распределением $P(X_{i+1}|X_i)$, т.е. погода в момент времени $t = i + 1$ удовлетворяет Марковскому свойству (модель без памяти) и не зависит от погоды во все другие моменты времени, кроме $t = i$.

Марковские допущения: условная независимость



- Каждое состояние зависит только от предыдущего состояния;
- В общем случае на каждом временном шаге в Марковских моделях делают следующее **предположение независимости**

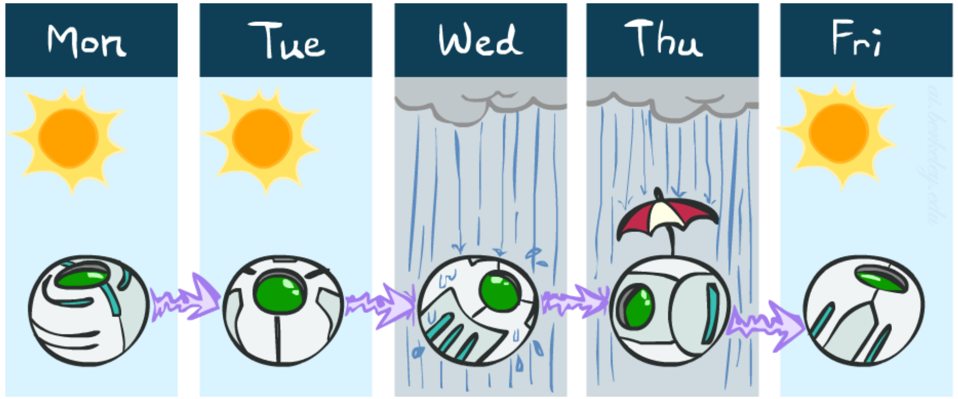
$$X_{i+1} \perp\!\!\!\perp \{X_0, \ldots, X_{i-1}\} \mid X_i.$$

- Это позволяет восстановить совместное распределение для первых $n + 1$ переменных с помощью цепочного правила следующим образом:

$$P(X_0, X_1, \ldots, X_n) = P(X_0)\, P(X_1 \mid X_0)\, P(X_2 \mid X_1) \ldots P(X_n \mid X_{n-1}).$$

Пример Марковской цепи: погода

- Состояния: X = {rain, sun}

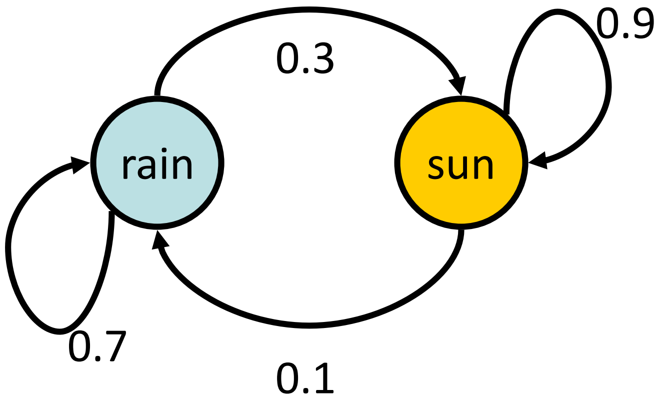


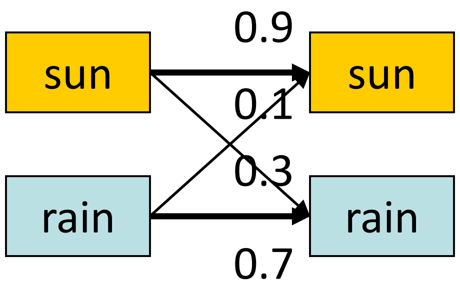
- Начальное состояние: 1.0 sun

- CPT $P(X_t \mid X_{t-1})$:

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

Два новых способа представления CPT: конечный автомат и решетка состояний.

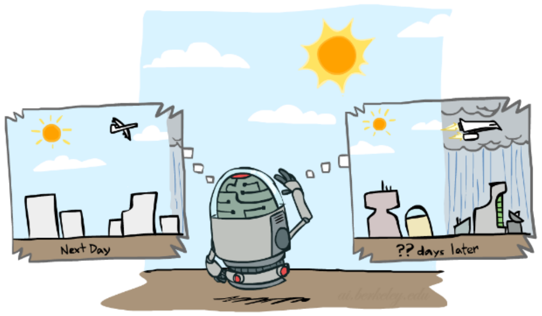




Mini-Forward алгоритм

- Вопрос: Каким будет $P(X)$ в любой момент времени t?

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \dashrightarrow$$



В соответствии со свойством маргинализации

$$P(X_{i+1}) = \sum_{xi} P(x_i\,, X_{i+1}).$$

Применив цепочное правило, получим выражение, определяющее **алгоритм прямого распространения** (**mini-forward алгоритм**):

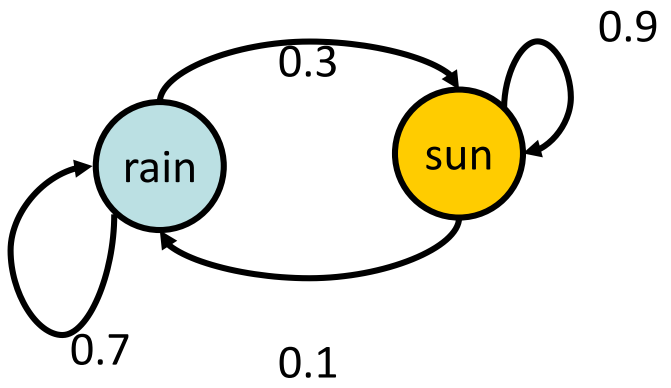
$$P(X_{i+1}) = \sum_{xi}\ P(X_{i+1}|x_i)P(x_i).$$

Алгоритм позволяет итеративно вычислять распределение $P(X_{i+1})$ для произвольно заданного момента времени, начиная с априорного распределения $P(X_0)$.

После большого числа шагов мы приходим к **стационарному распределению**, которое слабо зависит от начального распределения. При большом числе шагов на результат оказывает доминирующее влияние переходное распределение.

Пример Марковской цепи: погода

- Начальное состояние: 1.0 sun



- Каким будет распределение после одного шага?

$$P(X_2 = sun) = \sum_{x_1} P(x_1, X_2 = sun) = \sum_{x_1} P(X_2 = sun|x_1)P(x_1)$$

$$P(X_2 = \text{sun}) = \quad P(X_2 = \text{sun}|X_1 = \text{sun})P(X_1 = \text{sun}) + P(X_2 = \text{sun}|X_1 = \text{rain})P(X_1 = \text{rain})$$

$$0.9 \cdot 1.0 + 0.3 \cdot 0.0 = 0.9$$

Пример выполнения Mini-Forward алгоритма

- Из начального наблюдения sun

$$\left\langle \begin{matrix} 1.0 \\ 0.0 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.9 \\ 0.1 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.84 \\ 0.16 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.804 \\ 0.196 \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \quad \mathrm{P}(X_2) \quad \mathrm{P}(X_3) \quad \mathrm{P}(X_4) \quad \mathrm{P}(X_\infty)$$

- Из начального наблюдения rain

$$\left\langle \begin{matrix} 0.0 \\ 1.0 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.3 \\ 0.7 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.48 \\ 0.52 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.588 \\ 0.412 \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \quad \mathrm{P}(X_2) \quad \mathrm{P}(X_3) \quad \mathrm{P}(X_4) \quad \mathrm{P}(X_\infty)$$

- Из любого другого начального распределения $\mathrm{P}(X_1)$:

$$\left\langle \begin{matrix} p \\ 1-p \end{matrix} \right\rangle \quad \cdots \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \qquad \mathrm{P}(X_\infty)$$

Стационарные распределения

- Для Марковских цепей:
  - Влияние начального распределения со временем становится все меньше и меньше;
  - Распределение, на поздних шагах, не зависит от начального распределения.

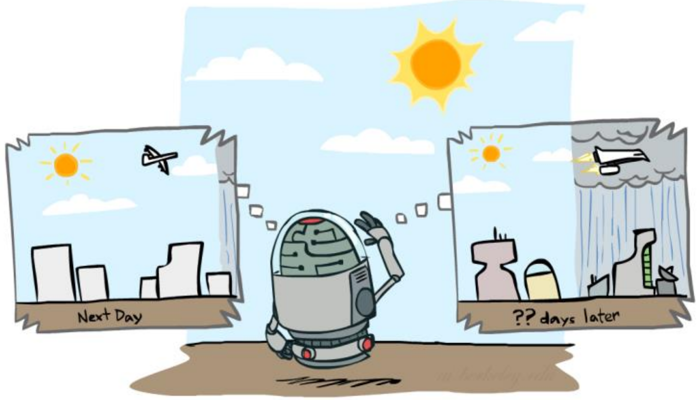
- Стационарное распределение:
  - Распределение P_∞ называется стационарным распределением ;
  - Оно удовлетворяет свойству:

$$P_\infty(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_x P(X|x)P_\infty(x)$$

Пример:Стационарные распределения

- Вопрос: Как найти $P_t(X)$ при бесконечном t ?

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \dashrightarrow$$



$$P_\infty(sun) = P(sun|sun)P_\infty(sun) + P(sun|rain)P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = P(rain|sun)P_\infty(sun) + P(rain|rain)P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(sun) = 0.9P_\infty(sun) + 0.3P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = 0.1P_\infty(sun) + 0.7P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(sun) = 3P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = 1/3P_\infty(sun)$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t\|X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

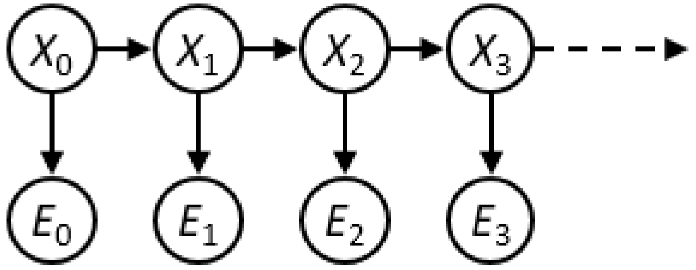
Также: $P_\infty(sun) + P_\infty(rain) = 1$ $\Rightarrow$

$$P_\infty(sun) = 3/4$$
$$P_\infty(rain) = 1/4$$

Скрытые Марковские модели (СММ)
(Hidden Markov Models - HMM)

Скрытые Марковские модели

- СММ описывается с помощью двух процессов: скрытого процесса смены состояний цепи Маркова и наблюдаемых значений свидетельств, формируемых при смене состояний. *При этом состояние описывается с помощью дискретной случайной переменной.*
- СММ содержит два типа узлов: скрытые узлы X_i , которые являются **переменными состояния** и наблюдаемые узлы E_i , которые **называются свидетельствами (наблюдениями).** X_i - дискретная переменная, свидетельства E_i могут представляться одной или несколькими непрерывными переменными.



- Одна из задач, решаемая с помощью модели СММ, называемая **фильтрацией или мониторингом**, заключается в вычислении апостериорных распределений переменных состояний в текущий момент времени по значениям всех полученных к этому моменту свидетельств.

СММ как вероятностная модель

СММ подразумевает такие же **условные отношения независимости**, как и для стандартной Марковской модели, с дополнительным набором отношений для переменных свидетельств:

$$E_1 \perp\!\!\!\perp X_0 \mid X_1 ,$$
$$\text{для } i = 2,\ldots,n \quad X_i \perp\!\!\!\perp \{ X_0, \ldots, X_{i-2}; E_1, \ldots, E_{i-1}\} \mid X_{i-1},$$
$$\text{для } i = 2,\ldots,n \quad E_i \perp\!\!\!\perp \{ X_0, \ldots, X_{i-1}; E_1, \ldots, E_{i-1} \} \mid X_i.$$

Также предполагается, что переходная модель $P(X_{i+1} \mid X_i)$ является стационарной.

СММ делают дополнительное упрощающее предположение, что **модель восприятия (модель наблюдения, сенсорная модель)** $P(E_i \mid X_i)$ также является стационарной.

Следовательно, любая СММ может быть компактно представлена с помощью всего лишь трех таблиц вероятностей: начального распределения, модели перехода и модели наблюдения.

СММ как вероятностная модель

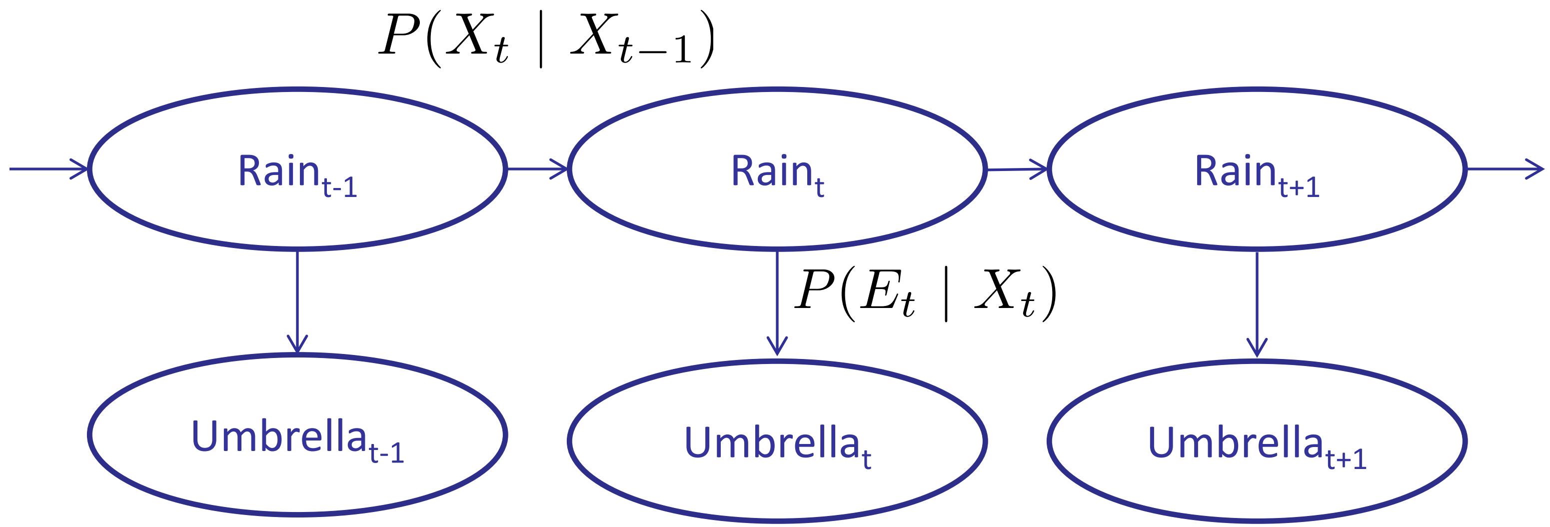
Совместное распределение для Марковской модели:

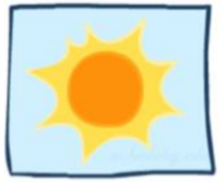
$$P(X_0, \ldots, X_t) = P(X_0) \prod_{t=1:T} P(X_t \mid X_{t-1})$$

Совместное распределение для СММ:

$$P(X_0, \ldots, X_t, E_T) = P(X_0) \prod_{t=1:T} P(X_t \mid X_{t-1})\, P(E_t \mid X_t)$$

Пример: СММ (модель для предсказания погоды)





Здесь мы пытаемся предсказать погоду, наблюдая за соседом, который взял или не взял зонтик.

- СММ:
  - Начальное распределение: $P(X_1)$
  - Модель перехода: $P(X_t \mid X_{t-1})$
  - Модель восприятия: $P(E_t \mid X_t)$

R_{t-1}	R_t	$P(R_t \mid R_{t-1})$
+r	+r	0.7
+r	-r	0.3
-r	+r	0.3
-r	-r	0.7

R_t	U_t	$P(U_t \mid R_t)$
+r	+u	0.9
+r	-u	0.1
-r	+u	0.2
-r	-u	0.8

Задачи, решаемые с использованием СММ

Фильтрация, или мониторинг (текущий контроль): вычисление распределения апостериорных вероятностей переменных состояний в текущий момент времени при наличии всех полученных к данному моменту свидетельств, $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$;

Предсказание: вычисление распределения апостериорных вероятностей будущих значений состояний, если даны все свидетельства, полученные к данному моменту, $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} | \mathbf{e}_{1:t})$

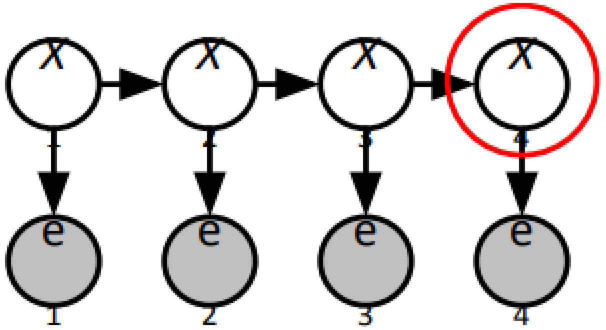
Сглаживание, или ретроспективный анализ: вычисление распределения апостериорных вероятностей состояний, относящихся к прошлому, если даны все свидетельства вплоть до нынешнего состояния, $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k | \mathbf{e}_{1:t})$, где $0<k<t$;

Наиболее правдоподобное объяснение. Если дан ряд результатов наблюдений, то может потребоваться найти последовательность состояний, которые с наибольшей вероятностью стали причиной получения результатов наблюдений, $\mathrm{argmax}_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} | \mathbf{e}_{1:t})$.

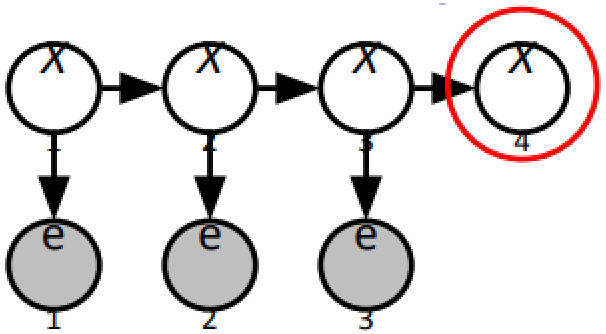
Например, если сосед брал зонтик в каждый из первых трех дней, а на четвертый зонтик не взял, то наиболее вероятным объяснением становится наличие дождя в первые три дня и отсутствие в четвертый. Алгоритмы решения такой задачи являются полезными во многих приложениях, включая распознавание речи (целью которого является поиск наиболее вероятной последовательности слов, если дан ряд звуков).

Задачи, решаемые с использованием СММ

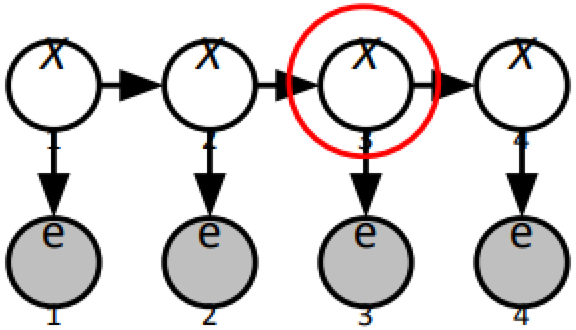
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$



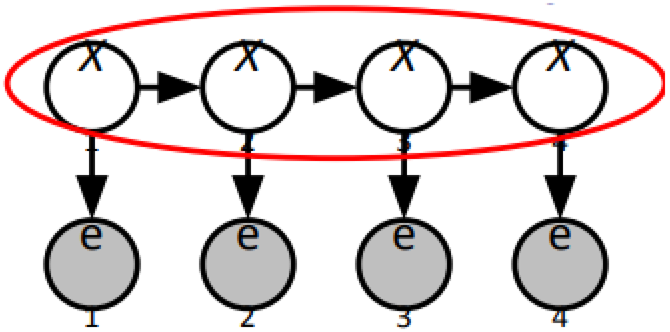
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$



$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$, $0<k<t$



$\mathrm{argmax}_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$



Фильтрация / Мониторинг

Покажем, что задачу фильтрации $f_{1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$ можно решить простым рекуррентным способом: если есть результаты фильтрации вплоть до момента t-1, можно легко вычислить результат для t на основе нового свидетельства e_t .

Такой процесс часто называют **рекурсивной оценкой** и реализуют с помощью **алгоритма прямого распространения**, состоящего из двух этапов:

1. Распределение вероятностей текущего состояния проецируется вперед от t-1 к t;

2. Выполняется обновление доверия состояния в момент t с использованием нового свидетельства e_t.

Фильтрация / Мониторинг

Покажем, что задачу фильтрации $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$ можно решить простым рекурсивным способом: если есть результаты фильтрации вплоть до момента t-1, можно легко вычислить результат для t , располагая новым свидетельством e_t .

Рассмотрим **алгоритм фильтрации для СММ**.

Определим ***распределение степеней уверенности*** (belief distribution) относительно возможных значений состояния X_i при наличии свидетельств $e_1, \ldots, e_i$, поступивших к моменту времени i , как:

$$B(X_i) = P(X_i | e_1, \ldots, e_i).$$

Определим через $B'(X_i)$ ***оценку (прогноз) распределения степеней уверенности (убеждений)*** в момент времени i по наблюдениям $e_1, \ldots, e_{i-1}$, которые поступили в предыдущие моменты времени $i-1$, т.е. оценку $B'(X_i)$ можно рассматривать как ***прогноз на один шаг вперед:***

$$B'(X_i) = P(X_i | e_1, \ldots, e_{i-1})$$

Алгоритм фильтрации

Найдем соотношение между $B(X_i)$ и $B'(X_{i+1})$. Начнем с определения $B'(X_{i+1})$:

$$B'(X_{i+1}) = P(X_{i+1} | e_1, \dots, e_i) = \sum_{xi} P(X_{i+1}, x_i | e_1, \dots, e_i).$$

Перепишем соотношение с использованием цепочного правила :

$$B'(X_{i+1}) = P(X_{i+1} | e_1, \dots, e_i) = \sum_{xi} P(X_{i+1}, | x_i , e_1, \dots, e_i) \, P(x_i | e_1, \dots, e_i).$$

Так как $P(x_i|e_1, \dots, e_i) = B(x_i)$ и $X_{i+1} \perp\!\!\!\perp \{e_1, \dots., e_i\} | X_i$, то из последнего выражения следует **правило обновления во времени** (Time Elapse Update**),** которое распространяет $B(X_i)$ с помощью модели перехода $P\,(X_{i+1},|x_i)$ на один шаг вперед во времени и позволяет определить $B'(X_{i+1})$

Правило обновления во времени →

$$\boxed{B'(X_{i+1}) = \sum_{xi} P(X_{i+1} | x_i) \, B(x_i).}$$

Алгоритм фильтрации

Найдем связь между $B'(X_{i+1})$ и $B(X_{i+1})$. Из правила Байеса следует:

$$B(X_{i+1}) = P(X_{i+1} | e_1, \ldots, e_{i+1}) = \frac{P(X_{i+1}, e_{i+1}, | e_1, \ldots, e_i)}{P(e_{i+1}, | e_1, \ldots, e_i)}$$

Опуская операцию деления на знаменатель (операция нормализации), перепишем выражение с использованием цепочного правила:

$$B(X_{i+1}) \sim P(X_{i+1}, e_{i+1} | e_1, \ldots, e_i) = P(e_{i+1} | X_{i+1}, e_1, \ldots, e_i) P(X_{i+1} | e_1, \ldots, e_i)$$

В соответствии с предположениями условной независимости для СММ и определением $B'(X_{i+1})$, получим **правило обновления** $B(X_{i+1})$ **на основе наблюдения** (Observation Update) $P(e_{i+1} | X_{i+1})$:

Правило обновления на основе наблюдения →

$$\boxed{B(X_{i+1}) \sim P(e_{i+1} | X_{i+1}) \, B'(X_{i+1})}$$

Алгоритм прямого распространения

Объединение полученных правил дает итерационный алгоритм, известный как **алгоритм прямого распространения доверий для СММ** (аналог mini-forward алгоритма для обычной Марковской модели):

$$\boldsymbol{B(X_{i+1}) \sim P(\, e_{i+1} \,|X_{i+1}) \sum_{xi} P(X_{i+1},|x_i)\, B(x_i).}$$

Алгоритм включает два отдельных шага:

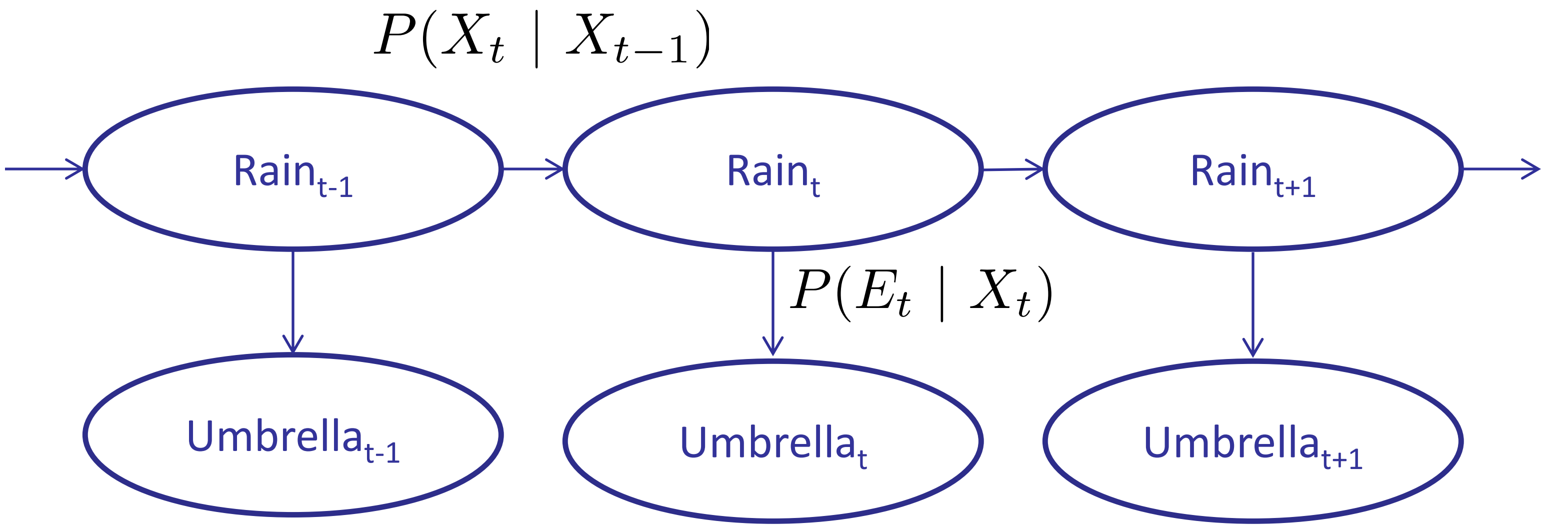
1. Обновление прогноза $B'(X_{i+1})=P(X_{i+1}|\, e_1, \ldots, e_i)$ по $B(X_i)= P(X_i|\, e_1, \ldots, e_i)$ на одном шаге во времени;
2. Обновление $B(X_{i+1})$ на основе наблюдения, т.е. определение $B(X_{i+1})$ по $B'(X_{i+1})$ и модели наблюдения $P(\, e_{i+1} \,|X_{i+1})$. Нормализацию можно выполнить один раз в конце вычислений.

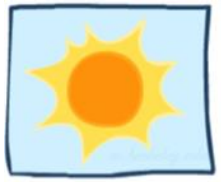
Алгоритм можно представить рекурсивной функцией от $f_{1:t} = B(X_t) = P(X_t|\, e_{1:t})$:

$\boldsymbol{f_{1:t+1} = \mathrm{Forward}(f_{1:t}\,, e_{1:t+1})}$, $\boldsymbol{f_0}$ – обычно **uniform**

Временная и пространственная сложности на шаге: $O(|X|^2)$, где X – число состояний. Не вычислимо для моделей с большим числом состояний. Позже рассмотрим эффективный алгоритм аппроксимации.

Пример: СММ (модель для предсказания погоды)





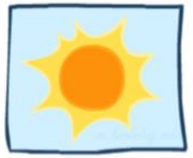

Здесь мы пытаемся предсказать погоду, наблюдая за соседом, который взял или не взял зонтик.

- СММ:
  - Начальное распределение: $P(X_1)$
  - Модель перехода: $P(X_t \mid X_{t-1})$
  - Модель восприятия: $P(E_t \mid X_t)$

R_{t-1}	R_t	$P(R_t \mid R_{t-1})$
+r	+r	0.7
+r	-r	0.3
-r	+r	0.3
-r	-r	0.7

R_t	U_t	$P(U_t \mid R_t)$
+r	+u	0.9
+r	-u	0.1
-r	+u	0.2
-r	-u	0.8

Пример: СММ предсказания погоды



$$\mathbf{P}(R_1) = \sum_{r_0} \mathbf{P}(R_1 | r_0) P(r_0) =$$

$= <0.7, 0.3> * 0.5 + <0.3, 0.7> * 0.5 = <0.5, 0.5>$

$$\mathbf{P}(R_1 | u_1) = \alpha\, \mathbf{P}(u_1 | R_1) \mathbf{P}(R_1) =$$

$= \alpha <0.9, 0.2> * <0.5, 0.5> = \alpha <0.45/0.1> = <0.818, 0.182>$

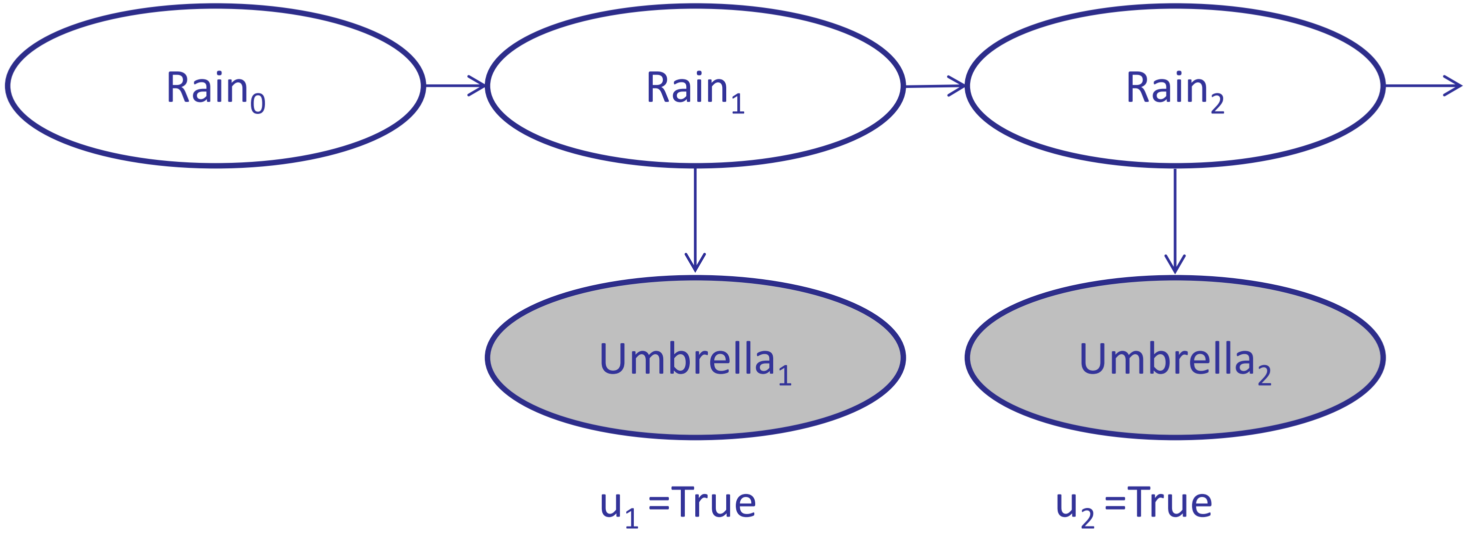
B(+r) = 0.5
B(-r) = 0.5

B'(+r) = 0.5
B'(-r) = 0.5

B(+r) = 0.818
B(-r) = 0.182

B'(+r) = 0.627
B'(-r) = 0.373

B(+r) = 0.883
B(-r) = 0.117



R_t	R_{t+1}	$P(R_{t+1} \mid R_t)$
+r	+r	0.7
+r	-r	0.3
-r	+r	0.3
-r	-r	0.7

R_t	U_t	$P(U_t \mid R_t)$
+r	+u	0.9
+r	-u	0.1
-r	+u	0.2
-r	-u	0.8

Forward алгоритм в матричном виде

- Введем матрицу переходов **T= P(**$X_t \mid X_{t-1}$**)** и матрицу наблюдений $\mathbf{O}_t$:
  - матрица наблюдений содержит на диагонали вероятности P($e_t \mid X_t$)

  например, при e_1=U_1=true,

$$\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

T= P($X_t \mid X_{t-1}$**)**

X_{t-1}	$P(X_t \mid X_{t-1})$	
	-r	+r
-r	0.7	0,3
+r	0.3	0.7

- **Алгоритм фильтрации**:

$\boldsymbol{f}_{1:t+1} = \alpha\, \mathbf{O}_{t+1} \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{1:t}$, $\boldsymbol{f}_0$ – обычно **uniform**

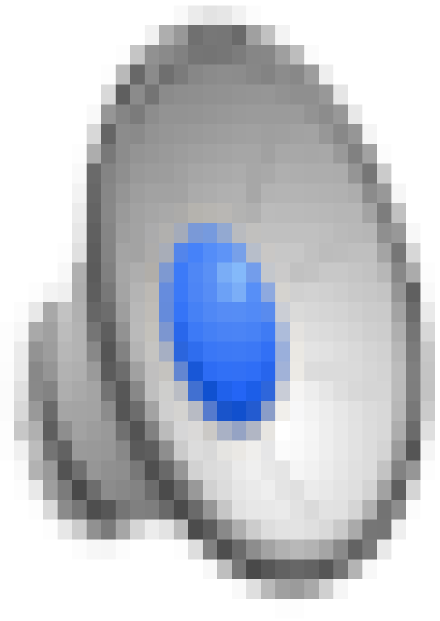
$$\boldsymbol{f}_{1:1} = \alpha \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right\} = \alpha \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.818 \\ 0.182 \end{bmatrix}$$

P($E_t \mid X_t$**)**

X_t	$P(U_t \mid X_t)$	
	true	false
-r	0.2	0,8
+r	0.9	0.1

Пакман – Сонар

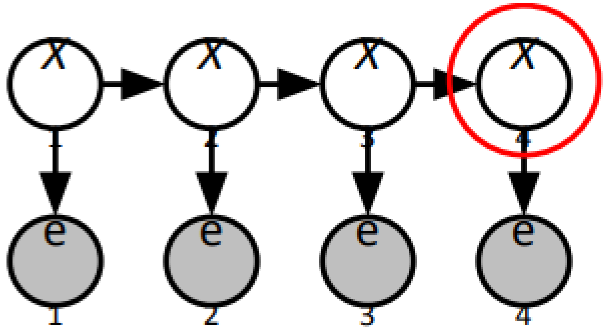
Демо: Пакман – Сонар (с довериями)



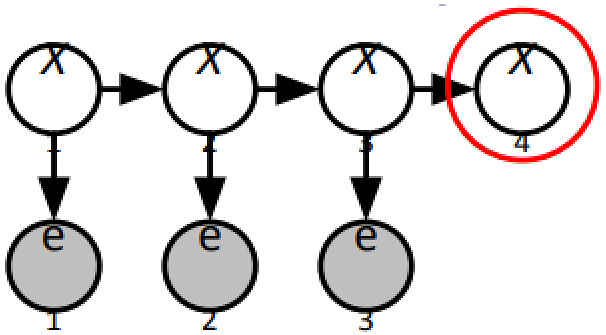
Наиболее правдоподобное объяснение
Most Likely Explanation (MLE)

Задачи, решаемые с использованием СММ

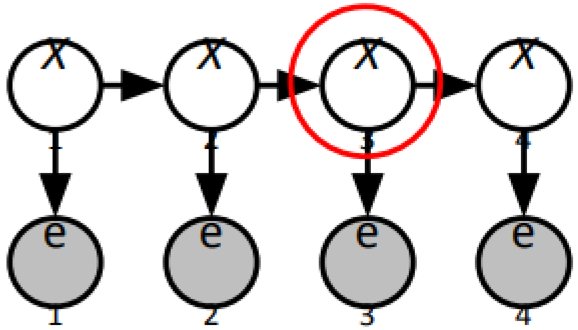
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$



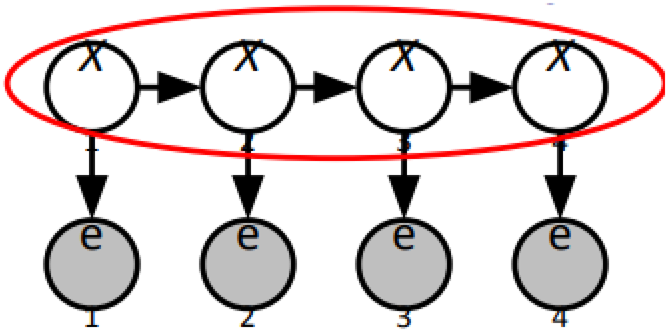
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$



$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$, $0<k<t$

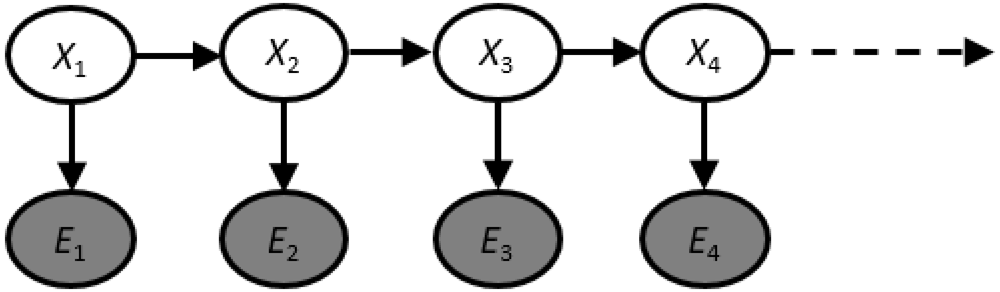


$\mathrm{argmax}_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$



СММ: MLE запросы

- СММ определяются:
  - Состояниями X;
  - Наблюдениями E;
  - Начальным распределением $P(X_1)$;
  - Переходными вероятностями: $P(X|X_{-1})$;
  - Свидетельствами: $P(E|X)$.



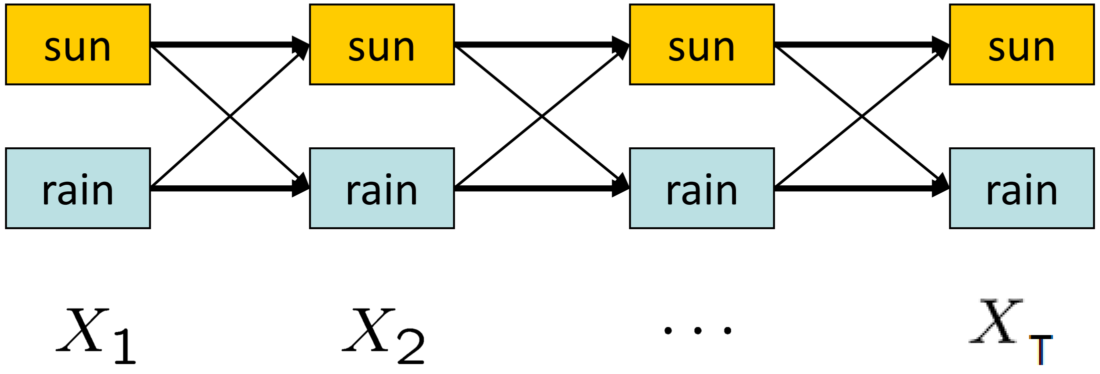
-
- MLE запрос: $\arg\max_{x_{1:t}} P(x_{1:t}|e_{1:t})$

Найти последовательность состояний, которые с наибольшей вероятностью стали причиной появления наблюдений

- Эта траектория смены состояний может быть найдена методом динамического программирования с помощью **алгоритма Витерби**.

Решетка состояний

- Решетка состояний: граф состояний и переходы во времени

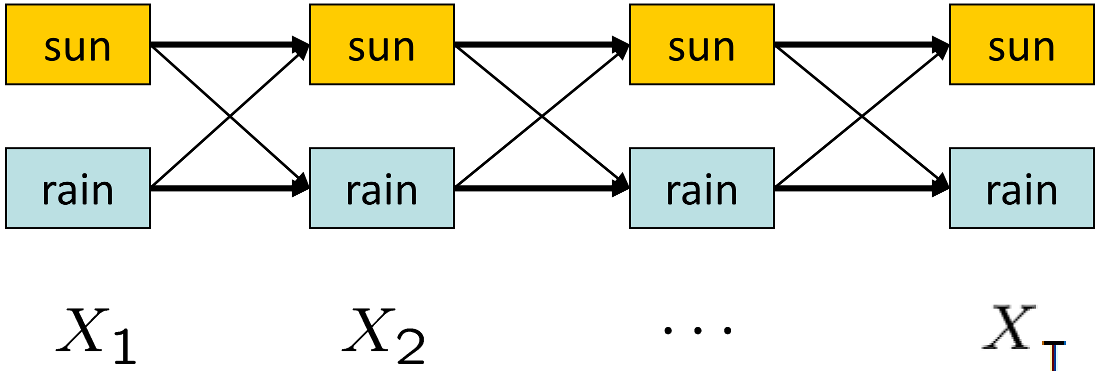


В этой HMM с двумя возможными скрытыми состояниями (солнечно или дождь), мы хотели бы вычислить путь с наибольшей вероятностью из X1 в Xt.

- Каждая дуга соответствует переходу $x_{t-1} \rightarrow x_t$
- Каждая дуга имеет вес $P(x_t|x_{t-1})P(e_t|x_t)$
- Каждый путь это последовательность состояний
- Произведение весов вдоль пути – пропорционально вероятности соответствующей последовательности состояний с учетом свидетельств

Решетка состояний

- Решетка состояний: граф состояний и переходы во времени

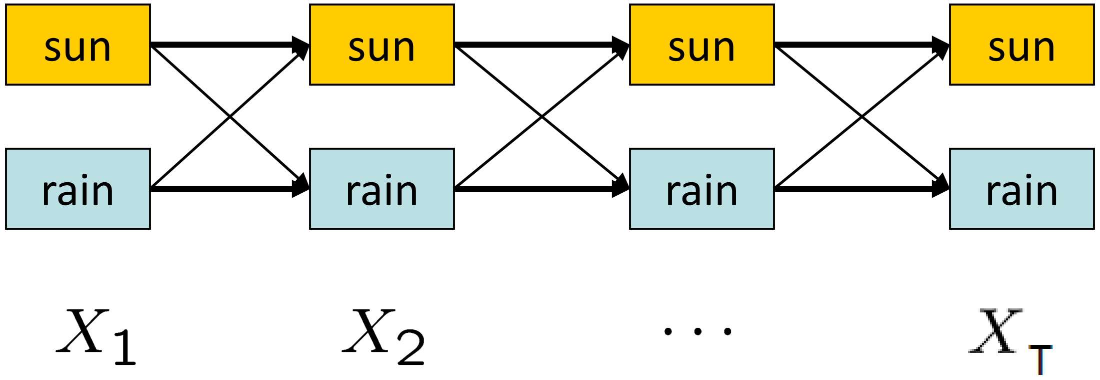


В этой HMM с двумя возможными скрытыми состояниями (солнечно или дождь), мы хотели бы вычислить путь с наибольшей вероятностью из X1 в Xt.

- Каждая дуга соответствует переходу $x_{t-1} \to x_t$
- Каждая дуга имеет вес $P(x_t|x_{t-1})P(e_t|x_t)$
- Каждый путь это последовательность состояний
- Произведение весов вдоль пути – пропорционально вероятности соответствующей последовательности состояний с учетом свидетельств
- Напомним, что $P(X_{1:N}, e_{1:N}) = P(X_1)P(e_1|X_1)\prod_{t=2}^{N} P(X_t|X_{t-1})P(e_t|X_t)$

Решетка состояний

- Решетка состоянии: граф состояний и переходы во времени



- Прямой алгоритм фильтрации вычисляет сумму:

$$P(X_N, e_{1:N}) = \sum_{x_1,\ldots,x_{N-1}} P(X_N, x_{1:N-1}, e_{1:N})$$

Алгоритм Витерби находит наилучший путь:

$$\arg\max_{x_1,\ldots,x_N} P(x_{1:N}, e_{1:N})$$

Вывод: алгоритм Витерби

Наиболее вероятная последовательность ≠ последовательность наиболее вероятных состояний!!!!

Наиболее вероятный путь к каждому x_t
= наиболее вероятный путь к некоторому x_{t-1} плюс один дополнительный шаг

Тогда определим вероятность наиболее правдоподобного в состояние x_t, как :

$$m_t[x_t] = \max_{x_{1:t-1}} P(x_{1:t}, e_{1:t}) = \max_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{t-1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$$

Вывод: алгоритм Витерби

Преобразуем в рекурсивную форму

$$\begin{aligned} m_t[x_t] &= \max_{x_{1:t-1}} P(e_t|x_t)P(x_t|x_{t-1})P(x_{1:t-1}, e_{1:t-1}) && (1) \\ &= P(e_t|x_t) \max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1}) \max_{x_{1:t-2}} P(x_{1:t-1}, e_{1:t-1}) && (2) \\ &= P(e_t|x_t) \max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1}) m_{t-1}[x_{t-1}]. && (3) \end{aligned}$$

Также определим массив

$$a_t[x_t] = P(e_t|x_t)\arg\max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})m_{t-1}[x_{t-1}] = \arg\max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})m_{t-1}[x_{t-1}]$$

чтобы выделить последний переход вдоль лучшего пути к x_t . Теперь мы можем определить алгоритм Витерби.

Алгоритм Витерби

Поиск наиболее вероятной последовательности скрытых состояний $x^*_{1:N}$

/* Прямой путь */

for $t = 1$ *to* N **do**
  for $x_t \in \mathscr{X}$ **do**
    if $t = 1$ **then**
      $m_t[x_t] = P(x_t)P(e_0|x_t)$
    else
      $a_t[x_t] = \arg\max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})m_{t-1}[x_{t-1}];$
      $m_t[x_t] = P(e_t|x_t)P(x_t|a_t[x_t])m_{t-1}[a_t[x_t]];$
    end
  end
end

/* Поиск наиболее вероятной конечной точки пути */

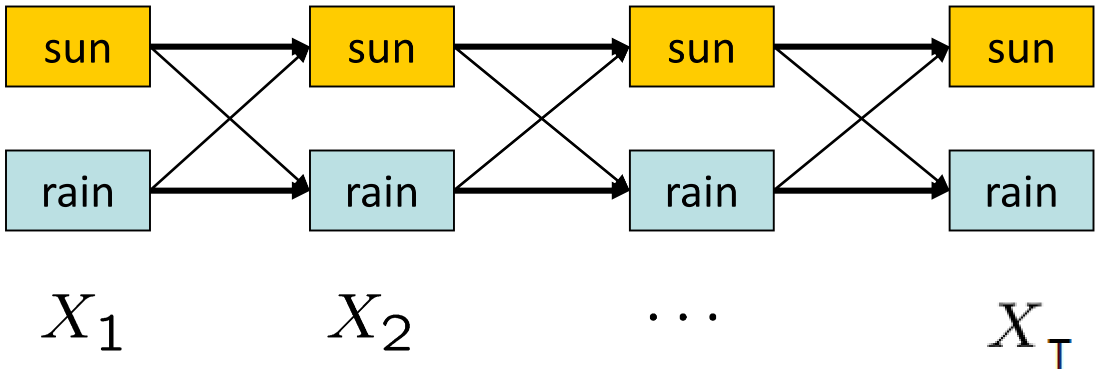
$x^*_N = \arg\max_{x_N} m_N[x_N];$

/* Обратный проход по наиболее вероятному пути и поиск скрытых состояний */

for $t = N$ *to* 2 **do**
  $x^*_{t-1} = a_t[x^*_t];$
end

Обратите внимание, что массив ***a*** определяют набор из *N* последовательностей, каждая из которых является наиболее вероятной последовательностью для определенного конечного состояния x_N. Как только мы закончим прямое прохождение, мы смотрим на вероятности N последовательностей, выбираем лучшую и восстанавливаем ее при обратном проходе. Таким образом, мы вычисляем наиболее вероятное объяснение наших данных в полиномиальном пространстве и времени.

Прямой алгоритм и Витерби алгоритм



Прямой Алгоритм (Сумма)

$$f_t[x_t] = P(x_t, e_{1:t})$$

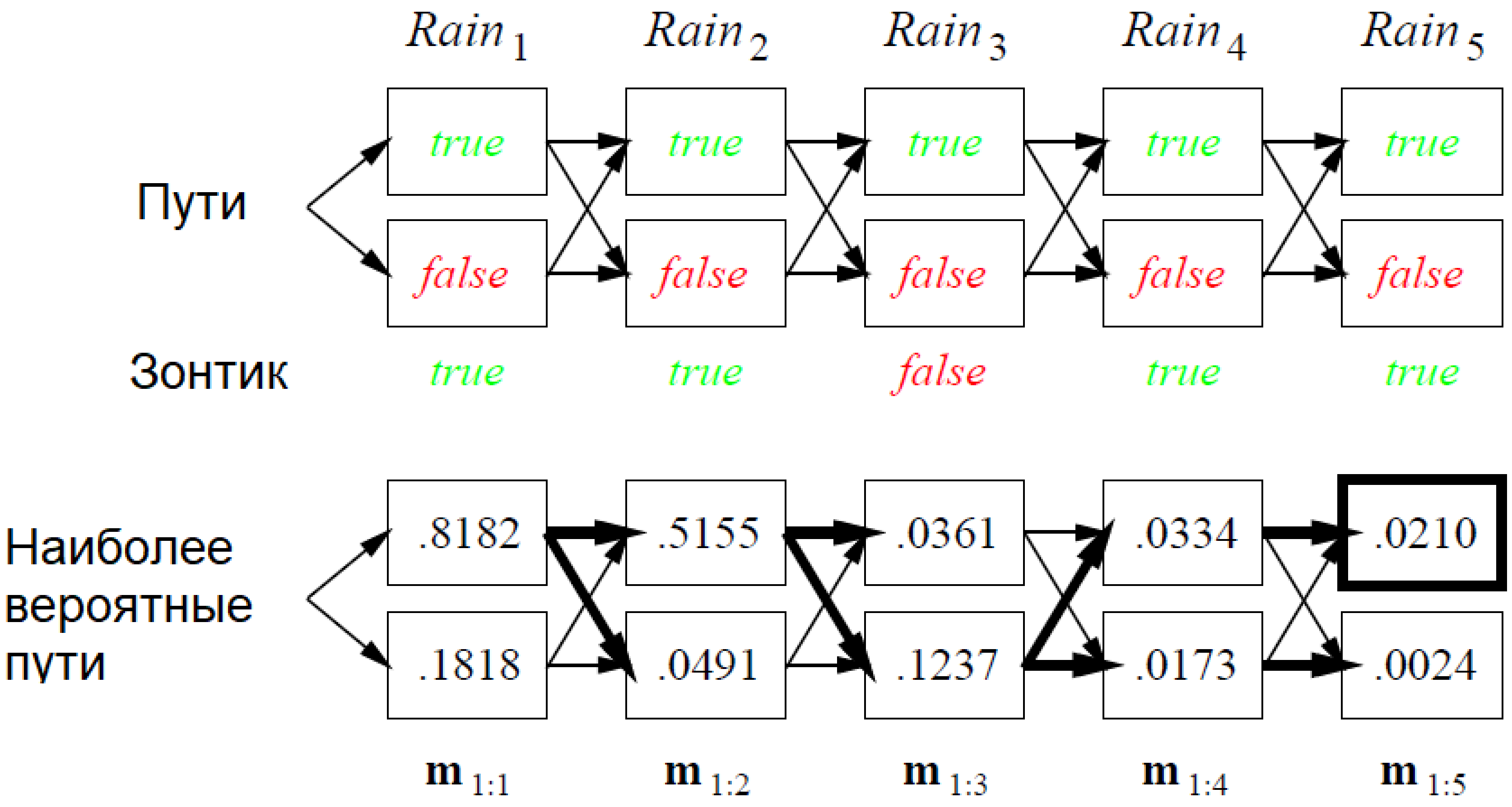
$$= P(e_t|x_t) \sum_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1}) f_{t-1}[x_{t-1}]$$

Витерби алгоритм (Max)

$$m_t[x_t] = \max_{x_{1:t-1}} P(x_{1:t-1}, x_t, e_{1:t})$$

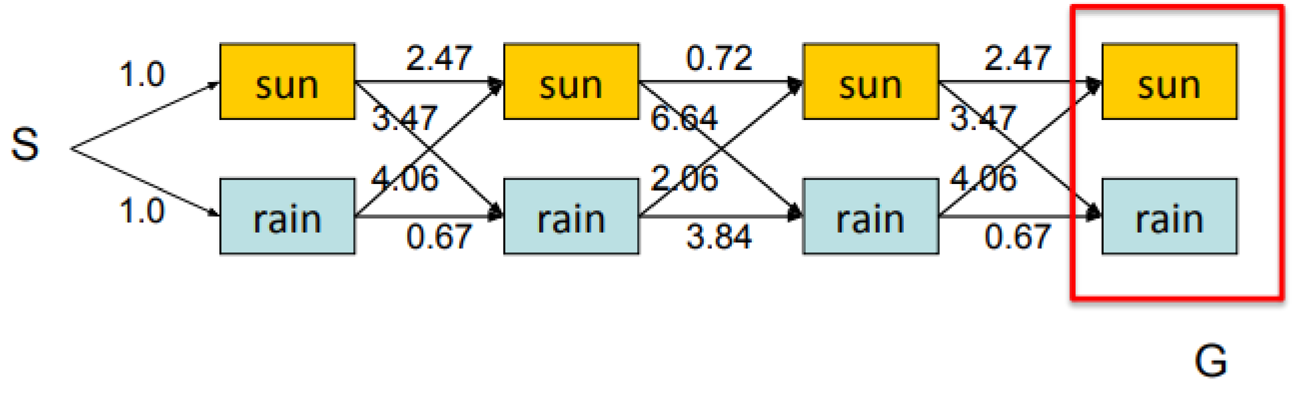
$$= P(e_t|x_t) \max_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1}) m_{t-1}[x_{t-1}]$$

Пример: алгоритм Витерби



Временная сложность : **O(|*X*|^{2}T)** ; Пространственная сложность **: O(|*X*| T)** ;
Число путей : **O(|*X*|^T)** ;

Алгоритм Витерби в пространстве -log



X_{t-1}	$P(X_t \| X_{t-1})$	
	sun	rain
sun	0.9	0,1
rain	0.3	0.7

X_t	$P(U_t \| X_t)$	
	true	false
sun	**0.2**	**0.8**
rain	**0.9**	**0.1**

argmax произведения вероятностей =
argmin суммы отрицательных логарифмов вероятностей =
= поиск пути минимальной стоимости

Алгоритм Витерби, по существу, является алгоритмом поиска в ширину.
Что можно сказать о A*?