

**Севастопольский государственный университет
Институт информационных технологий**

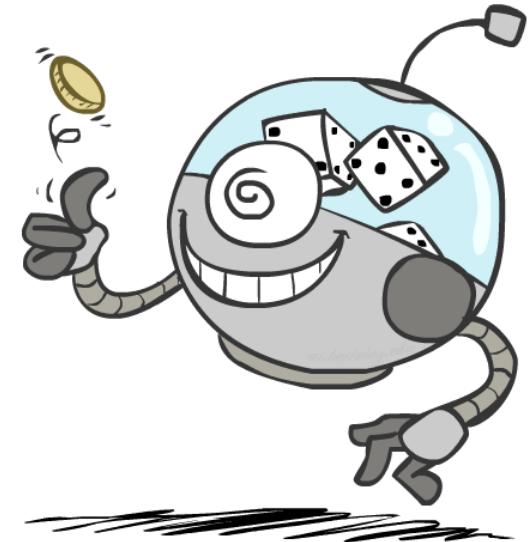
Методы и системы искусственного интеллекта

Бондарев Владимир Николаевич

**Вероятностные модели.
Правило Байеса. Вероятностный вывод.**

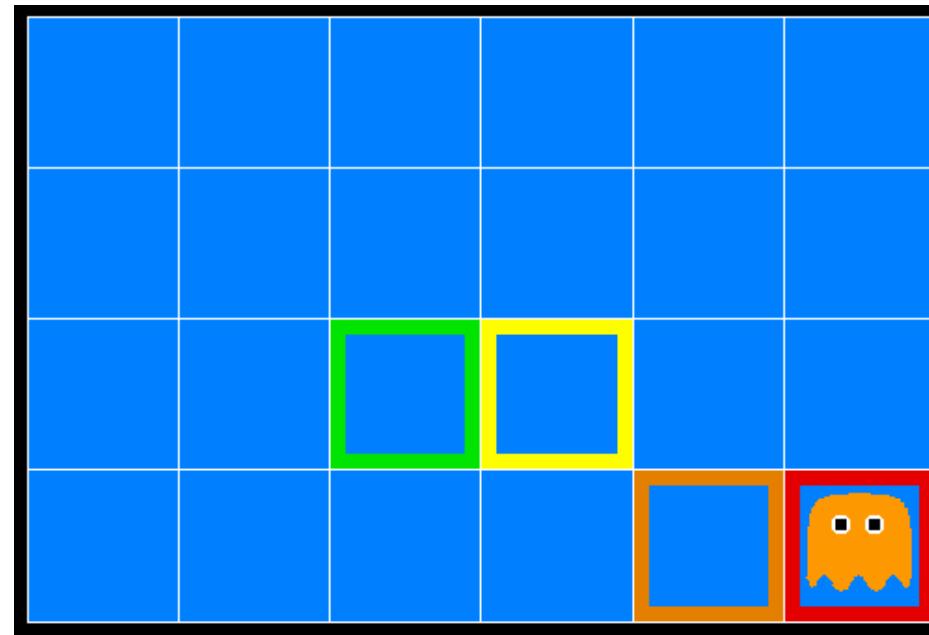
План лекции

- Основные понятия вероятностных выводов:
 - Случайные переменные;
 - Совместные и Маргинальные распределения;
 - Условные распределения;
 - Правило произведений, цепочное правило, правило Байеса;
 - Вероятностный вывод;
 - Независимость.



Вероятностные выводы в задаче охоты за призраками

- Призрак находится в одной из ячеек;
- Вероятностный цветовой сенсор сообщает расстояние до ячейки с призраком:
 - для клетки с призраком: red
 - 1 или 2 клетки: orange
 - 3 или 4 клетки: yellow
 - 5+ клеток: green

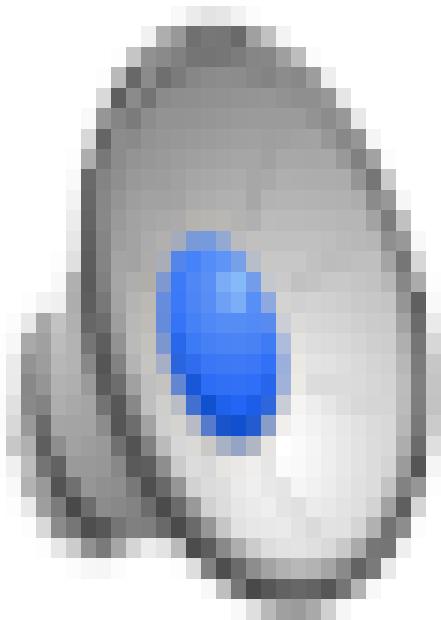


Сообщения сенсора зашумлены, т.е. *сообщение от сенсора имеет вероятностный характер*. Они представляются распределением цветов $P(\text{Color} | \text{Distance})$

| $P(\text{red} 3)$ | $P(\text{orange} 3)$ | $P(\text{yellow} 3)$ | $P(\text{green} 3)$ |
|---------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| 0.05 | 0.15 | 0.5 | 0.3 |

$P(\text{red} | 3)$ – вероятность того, что при получении сообщения «красный» призрак находится на расстоянии 3 клетки.

Демо – Охота за призраками



Неопределенность

Общие понятия при решении интеллектуальных задач с неопределенностью:

- **Наблюдаемые переменные (свидетельства-evidence):** Агенту известны определенные сведения о состоянии его мира (например, восприятия сенсоров или симптомы);
- **Ненаблюдаемые переменные:** Агенту требуется делать выводы (заключения) о некоторых свойствах мира, которые скрыты (например, где находится объект или какая болезнь имеет место)
- **Вероятностная модель (или вероятностное пространство)** – это выборочное пространство X , в котором каждому значению x из X приписывается вероятность $P(x)$, т.е. числовая мера, которая характеризует возможность такого значения
- Вероятностные выводы предоставляют инструмент для манипулирования степенью доверия (убежденности) и знаниями.

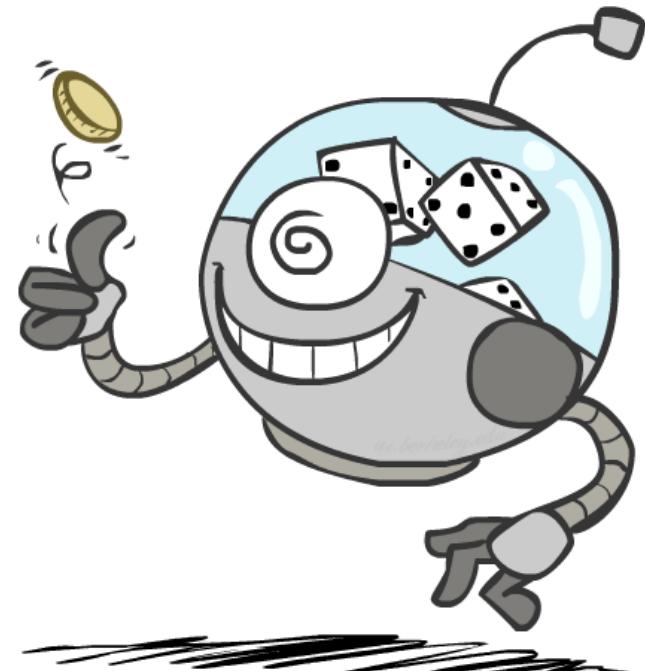
| | | |
|------|------|------|
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |

| | | |
|-------|------|------|
| 0.17 | 0.10 | 0.10 |
| 0.09 | 0.17 | 0.10 |
| <0.01 | 0.09 | 0.17 |

| | | |
|-------|-------|------|
| <0.01 | <0.01 | 0.03 |
| <0.01 | 0.05 | 0.05 |
| <0.01 | 0.05 | 0.81 |

Случайные переменные

- Случайные переменные принимают значения, которые характеризуется некоторой степенью неопределенности:
 - R = Идет ли дождь?
 - T = Холодно или жарко?
 - L = Где находится призрак?
- Будем обозначать случайные переменные заглавными буквами;
- Подобно переменным CSP-задач, случайные переменные принимают значения из области определения (домен):
 - R in {true, false} (часто записывают как {+r, -r})
 - T in {hot, cold}
 - D in [0, ∞) (D принадлежит интервалу)
 - L in {Локации}, возможное представление {(0,0), (0,1), ...}

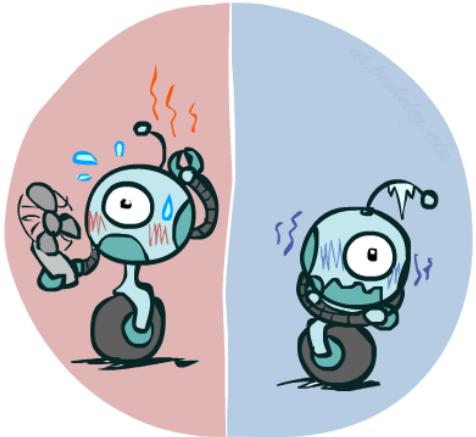


Распределение вероятностей

- Распределение ставит в соответствие каждому значению случайной переменной вероятность

- Температура:

$P(T)$



| T | P |
|------|-----|
| hot | 0.5 |
| cold | 0.5 |

- Погода:

$P(W)$



| W | P |
|--------|-----|
| sun | 0.6 |
| rain | 0.1 |
| fog | 0.3 |
| meteor | 0.0 |

Распределение вероятностей

- Случайные переменные описываются распределением вероятностей:

| $P(T)$ | |
|--------|-----|
| T | P |
| hot | 0.5 |
| cold | 0.5 |

| $P(W)$ | |
|--------|-----|
| W | P |
| sun | 0.6 |
| rain | 0.1 |
| fog | 0.3 |
| meteor | 0.0 |

- Вероятность конкретного значения случайной переменной (обозначается строчным символом) представляется действительным числом:

$$P(W = rain) = 0.1$$

- Свойства: $\forall x \ P(X = x) \geq 0$ и $\sum_x P(X = x) = 1$

Упрощенные обозначения:

$$\begin{aligned}P(hot) &= P(T = hot), \\P(cold) &= P(T = cold), \\P(rain) &= P(W = rain),\end{aligned}$$

Обозначение допустимо, если все домены являются уникальными

Совместные распределения

- Совместное распределение множества случайных переменных X_1, X_2, \dots, X_n определяет вероятность каждого возможного полного присваивания (или исхода):

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

- Свойство:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

- Какой размер распределения для n переменных с доменом d ?

- Для всех распределений, кроме небольших, запись в такой форме требует много памяти!

Вероятностные модели

- Вероятностная модель представляется совместным распределением множества случайных переменных.
- Характеристики вероятностной модели:
 - случайные переменные принадлежат домену;
 - присваивания называются *исходами*;
 - совместные распределения определяют, является ли присваивание (исход) возможным;
 - *нормализация*: сумма вероятностей = 1.0;
 - хорошо, когда взаимодействуют непосредственно только некоторые переменные.
- Аналогия с моделью в виде CSP-задачи:
 - переменные принадлежат домену;
 - ограничения определяют является ли присваивание допустимым;
 - хорошо, если только определенные переменные взаимодействуют непосредственно.

Распределение по Т и W

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

Ограничения на T,W (CSP)

| T | W | P |
|------|------|---|
| hot | sun | T |
| hot | rain | F |
| cold | sun | F |
| cold | rain | T |

События

- Событие – это подмножество E некоторых возможных исходов. Вероятность события E равна:

$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(x_1 \dots x_n)$$

$$P(T, W)$$

- Вероятность любого события можно вычислить с помощью совместного распределения:
 - Вероятность того, что «жарко И солнечно»?
 - Вероятность того, что «жарко»?
 - Вероятность того, что «жарко ИЛИ солнечно»?
- Представляйте вероятностное высказывание как событие, для которого это высказывание верно.

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

Задачи: вероятности событий

- $P(+x, +y) ?$

0.2

- $P(+x) ?$

$0.2+0.3=0.5$

- $P(-y \text{ OR } +x) ?$

$0.1+0.3+0.2=0.6$

$P(X, Y)$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

Маргинальные распределения

- **Маргинальные распределения** соответствуют суб-распределениям, которые получают из совместного распределения путем исключения переменных в ходе суммирования;
- **Маргинализация** – «*схлопывание*» строк путем суммирования

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |



$$P(t) = \sum_w P(t, w)$$



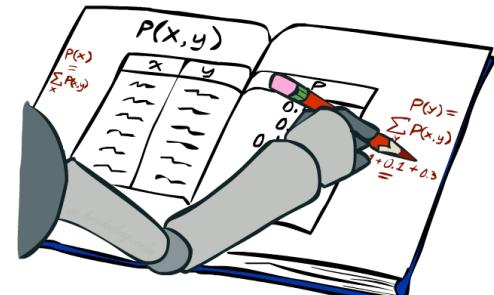
$$P(w) = \sum_t P(t, w)$$

$P(T)$

| T | P |
|------|-----|
| hot | 0.5 |
| cold | 0.5 |

$P(W)$

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.6 |
| rain | 0.4 |



Маргинальные
распределения

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Задача: маргинальные распределения

$P(X, Y)$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

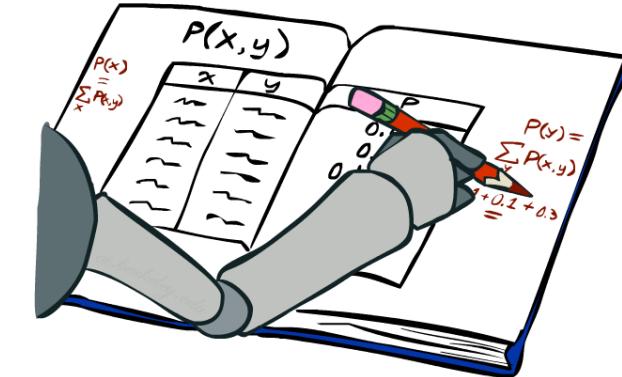
$$P(y) = \sum_x P(x, y)$$

$P(X)$

| X | P |
|----|---|
| +x | |
| -x | |

$P(Y)$

| Y | P |
|----|---|
| +y | |
| -y | |



Задача: маргинальные распределения

$P(X, Y)$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

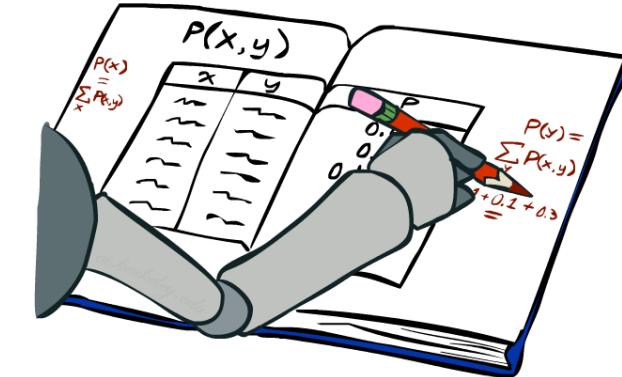
$$P(y) = \sum_x P(x, y)$$

$P(X)$

| X | P |
|----|-----|
| +x | 0.5 |
| -x | 0.5 |

$P(Y)$

| Y | P |
|----|-----|
| +y | 0.6 |
| -y | 0.4 |



Условные вероятности

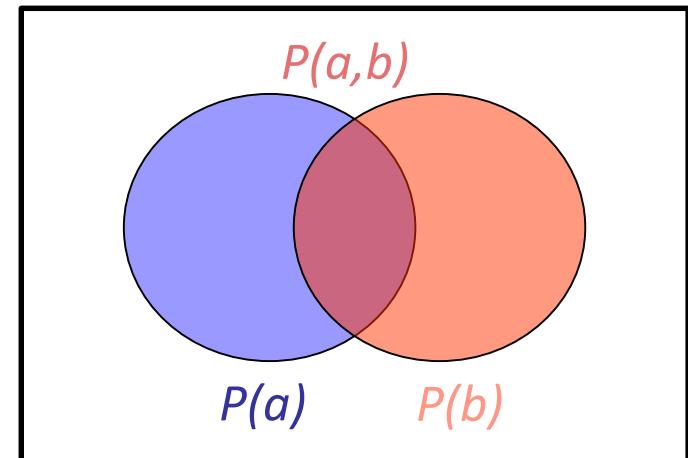
- Предположим, что нам известно, что произошло событие b . Каким образом знание того, что произошло b , повлияет на вероятность a ?

Вероятность события a при условии, что произошло событие b , называют **условной вероятностью**

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$

$P(T, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |



$$P(W = s | T = c) = \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$\begin{aligned} &= P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

Задачи: Условные вероятности

- $P(+x \mid +y) ?$

$P(X, Y)$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

- $P(-x \mid +y) ?$

- $P(-y \mid +x) ?$

Задачи: Условные вероятности

- $P(+x \mid +y) ?$

$P(X, Y)$

$$0.2/0.6=1/3$$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

- $P(-x \mid +y) ?$

$$0.4/0.6=2/3$$

- $P(-y \mid +x) ?$

$$0.3/0.5=.6$$

Условные распределения

- Условные распределения – это распределение вероятностей по некоторым переменным при заданных значениях других переменных

Условные распределения

$$P(W|T)$$

| $P(W T = hot)$ | |
|-----------------|-----|
| W | P |
| sun | 0.8 |
| rain | 0.2 |
| $P(W T = cold)$ | |
| W | P |
| sun | 0.4 |
| rain | 0.6 |

Совместное распределение

$P(T, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

Нормализация

$P(T, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

$$\begin{aligned} P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4 \end{aligned}$$



$P(W|T = c)$

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.4 |
| rain | 0.6 |

$$\begin{aligned} P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6 \end{aligned}$$

Нормализация

$$\begin{aligned} P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4 \end{aligned}$$

$P(T, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

ВЫБРАТЬ
совместные
вероятности,
соответствующие
свидетельствам

| T | W | P |
|------|------|-----|
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

НОРМАЛИЗОВАТЬ
выбор
(делает сумму = 1)

$P(W|T = c)$

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.4 |
| rain | 0.6 |

$$\begin{aligned} P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6 \end{aligned}$$

Нормализация

$P(T, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

ВЫБРАТЬ
совместные
вероятности,
соответствующие
свидетельствам



$P(c, W)$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

НОРМАЛИЗОВАТЬ
выбор
(делает сумму P = 1)



$P(W|T = c)$

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.4 |
| rain | 0.6 |

- Сумма выбранных вероятностей свидетельств соответствует $P(\text{свидетельства})!$ (здесь $P(T=c)$)

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_2)} = \frac{P(x_1, x_2)}{\sum_{x_1} P(x_1, x_2)}$$

Задача: нормализация

- $P(X | Y=-y) ?$

$P(X, Y)$

| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | +y | 0.2 |
| +x | -y | 0.3 |
| -x | +y | 0.4 |
| -x | -y | 0.1 |

ВЫБРАТЬ
совместные
вероятности,
соответствующие
свидетельствам



| X | Y | P |
|----|----|-----|
| +x | -y | 0.3 |
| -x | -y | 0.1 |

НОРМАЛИЗОВАТЬ
выбор
(делает сумму по P = 1)



| X | P |
|----|------|
| +x | 0.75 |
| -x | 0.25 |

К вопросу о нормализации

- Необходима для приведения или восстановления **нормальных** условий

нормальных

Сумма всех вероятностей должна быть 1

- Алгоритм:
- Шаг 1: Вычислить Z = сумма по всем входам таблицы;
- Шаг 2: Поделить каждую составляющую на Z .
- Пример 1

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.2 |
| rain | 0.3 |

Нормализация  $Z = 0.5$

| W | P |
|------|-----|
| sun | 0.4 |
| rain | 0.6 |

- Пример 2

| T | W | P |
|------|------|----|
| hot | sun | 20 |
| hot | rain | 5 |
| cold | sun | 10 |
| cold | rain | 15 |

Нормализация  $Z = 50$

| T | W | P |
|------|------|-----|
| hot | sun | 0.4 |
| hot | rain | 0.1 |
| cold | sun | 0.2 |
| cold | rain | 0.3 |

Вероятностный вывод

- Вероятностный вывод: вычисляет требуемые вероятности через другие известные вероятности (например, условные через совместные)
- Обычно мы вычисляем условные вероятности:
 - $P(\text{вовремя} \mid \text{нет д.т.п.}) = 0.90$;
 - Они представляют степень уверенности агента в событии при данном свидетельстве (подтверждении).
- Вероятности изменяются при появлении новых свидетельств:
 - $P(\text{вовремя} \mid \text{нет д.т.п., 5 утра}) = 0.95$;
 - $P(\text{вовремя} \mid \text{нет д.т.п., 5 утра, дождь}) = 0.80$;
 - Наблюдение новых свидетельств приводит к обновлению значений уверенностей (beliefs).



Вывод путем перебора (enumeration) значений

- $P(W)?$

Вероятностный вывод возможен путем перебора всех элементов в таблице полного совместного распределения

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

- Получим распределение $P(W)$?

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

- $P(W)?$

$$P(\text{sun})=0.3+0.1+0.1+0.15=0.65$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

- $P(W)?$

$$P(\text{sun})=0.3+0.1+0.1+0.15=0.65$$

$$P(\text{rain})=1-0.65=0.35$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter, hot})?$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter, hot})?$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter, hot})?$

$$P(\text{sun}|\text{winter, hot}) \sim 0.1$$
$$P(\text{rain}|\text{winter, hot}) \sim 0.05$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter, hot})?$

$$P(\text{sun}|\text{winter, hot}) \sim 0.1$$

$$P(\text{rain}|\text{winter, hot}) \sim 0.05$$

$$P(\text{sun}|\text{winter, hot}) = 2/3 \text{ (нормализация } 0.1/0.15)$$

$$P(\text{rain}|\text{winter, hot}) = 1/3 \text{ (нормализация } 0.05/0.15)$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter})?$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter})?$

$$P(\text{sun}|\text{winter}) \sim 0.1 + 0.15 = 0.25$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter})?$

$$P(\text{rain}|\text{winter}) \sim 0.05 + 0.2 = 0.25$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

Изменение распределения вероятностей при получении свидетельств

- $P(W | \text{winter})?$

$$P(\text{sun}|\text{winter}) \sim 0.25$$

$$P(\text{rain}|\text{winter}) \sim 0.25$$

$$P(\text{sun}|\text{winter}) = 0.5 \text{ (после нормализации)}$$

$$P(\text{rain}|\text{winter}) = 0.5 \text{ (после нормализации)}$$

| S | T | W | P |
|--------|------|------|------|
| summer | hot | sun | 0.30 |
| summer | hot | rain | 0.05 |
| summer | cold | sun | 0.10 |
| summer | cold | rain | 0.05 |
| winter | hot | sun | 0.10 |
| winter | hot | rain | 0.05 |
| winter | cold | sun | 0.15 |
| winter | cold | rain | 0.20 |

Вывод путем перебора (enumeration) значений

- Дано:

- Свидетельства: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
- Переменная запроса*: Q
- Скрытые переменные: $H_1 \dots H_r$

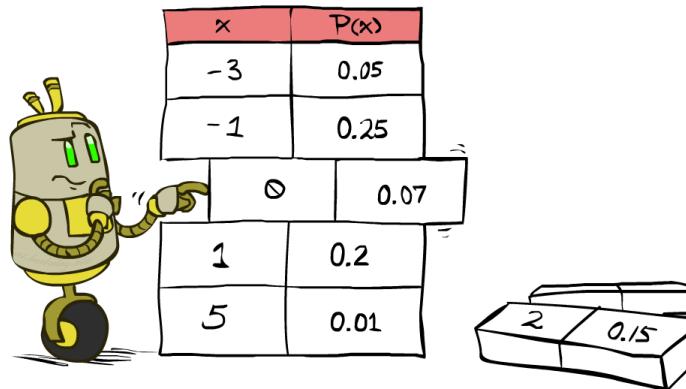
X_1, X_2, \dots, X_n
Все переменные

- Требуется:

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

* Также работает хорошо со множеством переменных запроса

- Шаг 1: Выбрать составляющие совместного распределения с учетом имеющихся свидетельств



- Шаг 2: Суммировать по H , чтобы получить совместную вероятность запроса и свидетельств

$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)$$

X_1, X_2, \dots, X_n

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \dots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \dots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \dots e_k)$$

- Шаг 3: Нормализация

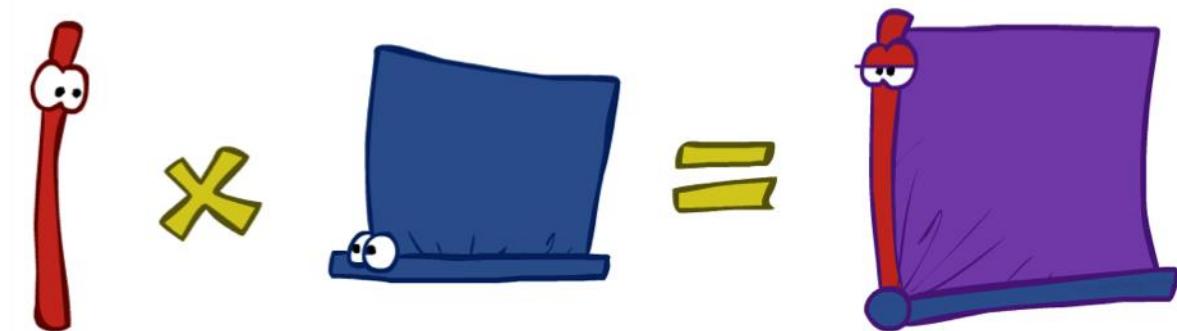
Вывод путем перебора (enumeration) значений

- Очевидные проблемы:
 - Максимальная времененная сложность $O(d^n)$;
 - Пространственная сложность $O(d^n)$ (для запоминания таблицы совместного распределения).

Правило произведения

- Иногда требуется по условному распределению определить совместное:

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$



Правило произведения

$$P(y)P(x|y) = P(x, y)$$

- Пример:

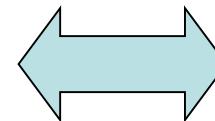
| R | P |
|------|-----|
| sun | 0.8 |
| rain | 0.2 |

$$P(D|W)$$

| D | W | P |
|-----|------|-----|
| wet | sun | 0.1 |
| dry | sun | 0.9 |
| wet | rain | 0.7 |
| dry | rain | 0.3 |

$$P(D, W)$$

| D | W | P |
|-----|------|---|
| wet | sun | |
| dry | sun | |
| wet | rain | |
| dry | rain | |



Цепочное правило

- В общем случае можно представить любое совместное распределение как последовательное произведение условных распределений

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$

Правило Байеса

- Два способа факторизации совместного распределения 2-х переменных:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

Томас Байес



- Выполнив деление, получим правило Байеса:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- Почему оно полезно?

- Позволяет получить условное распределение по его обратному условному распределению;
- Часто одно из распределений сложно найти, а второе - проще;
- Основа многих систем, которые рассматриваются далее (например, ASR, MT)
- Правило лежит в основе всех современных систем искусственного интеллекта, использующих вероятностный вывод!

1702 - 1761

Вывод на основе правила Байеса

- Пример: Вычисление вероятности причины (cause) по диагностическим признакам (effect – наличие некоторого наблюдения) :

$$P(\text{cause}|\text{effect}) = \frac{P(\text{effect}|\text{cause})P(\text{cause})}{P(\text{effect})}$$

- Пример:

- М: менингит, S: боль в шее

$$\left. \begin{array}{l} P(+m) = 0.0001 \\ P(+s|m) = 0.8 \\ P(+s|-m) = 0.01 \end{array} \right\} \text{Заданные значения}$$

$$P(+m|+s) = \frac{P(+s|m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{P(+s|m)P(+m)}{P(+s|m)P(+m) + P(+s|-m)P(-m)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.8 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.999}$$

- Замечание: апостериорная вероятность менингита очень мала (0.00794)

Это связано с тем, что априорная вероятность наличия симптома неподвижной шеи (знаменатель) намного выше по сравнению с вероятностью менингита.

Задача: правило Байеса

- Дано:

$$P(W)$$

| R | P |
|------|-----|
| sun | 0.8 |
| rain | 0.2 |

$$P(D|W)$$

| D | W | P |
|-----|------|-----|
| wet | sun | 0.1 |
| dry | sun | 0.9 |
| wet | rain | 0.7 |
| dry | rain | 0.3 |

- Найти $P(W | \text{dry})$?

Задача: правило Байеса

- Дано:

| $P(W)$ | |
|--------|-----|
| R | P |
| sun | 0.8 |
| rain | 0.2 |

| D | W | P |
|-----|------|-----|
| wet | sun | 0.1 |
| dry | sun | 0.9 |
| wet | rain | 0.7 |
| dry | rain | 0.3 |

- Найти $P(W | \text{dry})$?

$$P(\text{sun}|\text{dry}) \sim P(\text{dry}|\text{sun})P(\text{sun}) = 0.9 * 0.8 = 0.72$$

$$P(\text{rain}|\text{dry}) \sim P(\text{dry}|\text{rain})P(\text{rain}) = 0.3 * 0.2 = 0.06$$

$$P(\text{sun}|\text{dry}) = 12/13$$

$$P(\text{rain}|\text{dry}) = 1/13$$



$$P(s|d) = P(d|s) * P(s) / [P(d|s) * P(s) + P(d|r) * P(r)] =$$

$$0.72 / (0.72 + 0.3 * 0.2) = 0.72 / 0.78 =$$

$$0.12 * 6 / 0.13 * 6 = 12/13$$

Охота за призраками, ревизия

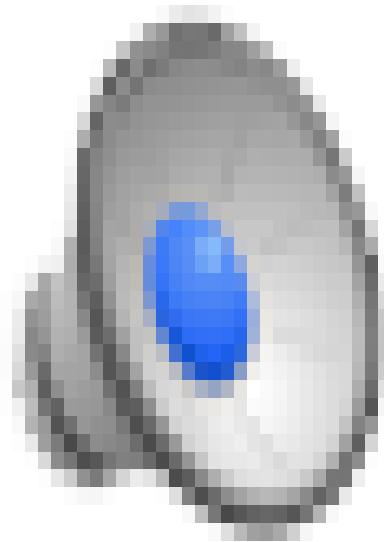
- Пусть имеются два распределения:
 - Априорное распределение локаций призраков: $P(G)$
 - Пусть оно будет равномерным;
 - Модель восприятия для сенсора: $P(R | G)$
 - R = восприятие цвета в клетке;
 - Например: $P(R = \text{желтый} | G=(1,1)) = 0.1$.
- Мы можем вычислить апостериорное распределение $P(G|r)$ локаций призрака на основе восприятий с помощью правила Байеса:

$$P(g|r) \propto P(r|g)P(g)$$

| | | |
|------|------|------|
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |
| 0.11 | 0.11 | 0.11 |

| | | |
|-------|------|------|
| 0.17 | 0.10 | 0.10 |
| 0.09 | 0.17 | 0.10 |
| <0.01 | 0.09 | 0.17 |

Демо - охота за призраками (вероятности)



Следующий раз: Сети Байеса
