Лабораторная работа №2. Расчет характеристик аналоговых систем.

Цель работы. Получить навыки расчета характеристик линейных систем: импульсной характеристики, комплексного коэффициента передачи и его годографа, АЧХ и ФЧХ системы. Ознакомиться с функциями среды MATLAB для преобразования форм представления линейных цепей, расчета и построения графиков временных и частотных характеристик.

Теоретические сведения.

Понятие аналоговой системы и классификация систем.

Система, используемая для обработки, преобразования или передачи аналоговых сигналов - это физическое устройство или математическая модель, содержащая множество элементов, осуществляющих преобразование сигналов, и находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство. В составе системы всегда можно выделить *вход*, предназначенный для подачи исходных сигналов, и *выход*, откуда преобразованные сигналы поступают для дальнейшего использования. Обычно это иллюстрируется структурной схемой типа черного ящика (рис. 2.1).

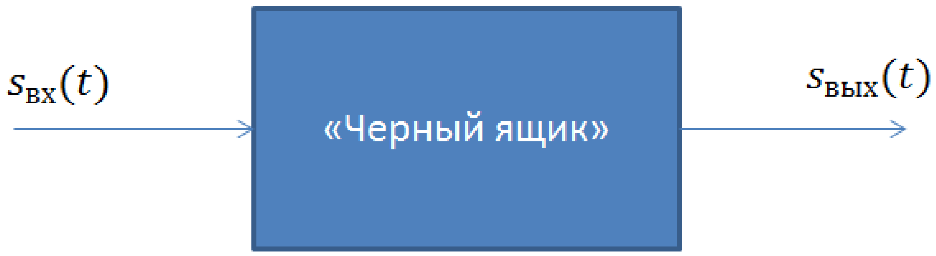


Рисунок 2.1 – *Структурная схема системы в виде «черного ящика»*

Линейными называются системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности [1, стр. 102]. Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются *нелинейными*.

Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, система называется *стационарной*, или системой с *постоянными параметрами*. В противном случае система называется *нестационарной*, *параметрической* или системой *с переменными параметрами*.

В данной работе мы будем рассматривать линейные стационарные системы.

Импульсная и переходная характеристики системы.

Линейность и стационарность позволяют легко найти реакцию системы на любой входной сигнал, зная всего одну функцию – реакцию системы на поданную на вход дельта-функцию [1, стр. 103]. Эта реакция, определяемая при нулевых начальных условиях, называется *импульсной характеристикой системы* и обозначается $h(t)$.

Выходной сигнал линейной системы с постоянными параметрами равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t')h(t-t')dt'. \tag{2.1}$$

Переходной характеристикой системы называют реакцию системы на поданную на вход функцию единичного скачка (функцию Хевисайда). Обозначается переходная характеристика как g(t). Так же как и импульсная характеристика, переходная характеристика определяется при нулевых начальных условиях.

Поскольку дельта-функция – это производная от единичного скачка, импульсная и переходная характеристики связаны друг с другом операциями дифференцирования и интегрирования:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad ; \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')dt'. \tag{2.2}$$

Любая физически реализуемая система обладает свойством *причинности* – выходной сигнал не может возникнуть раньше входного сигнала. Отсюда следует, что для физически реализуемой системы импульсная и переходная характеристики должны быть равны нулю при $t < 0$.

Системы, имеющие вещественную импульсную характеристику, называются *вещественными системами.*

Комплексный коэффициент передачи системы, АЧХ и ФЧХ системы.

Выходной сигнал линейной системы, как было показано ранее, представляет собой свертку (2.1) входного сигнала и импульсной характеристики. Преобразование Фурье [1, стр. 39] от свертки дает произведение спектров сворачиваемых сигналов, так что в частотной области прохождение сигнала через линейную систему описывается очень просто:

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega)\dot{K}(\omega). \qquad (2.3)$$

Здесь $\dot{K}(\omega)$ – преобразование Фурье импульсной характеристики системы $h(t)$. Функция $\dot{K}(\omega)$ называется *комплексным коэффициентом передачи системы* [1, стр. 105], а ее модуль $\left|\dot{K}(\omega)\right|$ и фаза $\arg\left(\dot{K}(\omega)\right)$ – соответственно *амплитудно-частотной* (АЧХ) и *фазочастотной* (ФЧХ) характеристиками системы.

Примечание. Значение $\dot{K}(\omega)$ показывает, как изменяется при прохождении через систему комплексная амплитуда $\dot{U} = Ae^{j\varphi}$ синусоиды $s(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ с известной частотой ω:

$$\dot{U}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{U}_{\text{вх}} \qquad (2.4)$$

АЧХ показывает, во сколько раз изменяется амплитуда синусоиды, а ФЧХ – каков будет полученный ею фазовый сдвиг.

Годограф.

Годограф – это траектория (рис. 2.2), которую описывает на комплексной плоскости коэффициент передачи системы при изменении частоты.

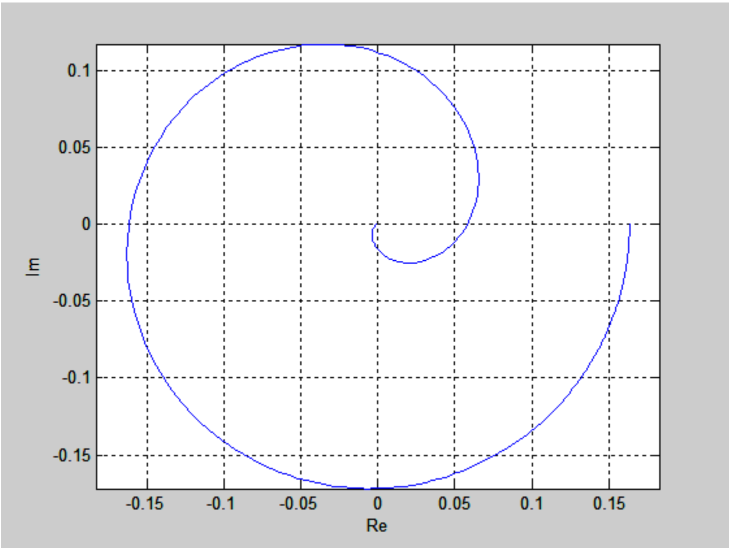


Рисунок 2.2 – *Годограф комплексного коэффициента передачи системы*

Годограф даёт наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу.

<u>Способы описания линейных систем.</u>

Линейные системы могут описываться несколькими эквивалентными формами, среди которых можно назвать:

- дифференциальное уравнение (ДУ);
- функция передачи в виде полиномов числителя и знаменателя (transfer function);
- функция передачи в виде множителей в числителе и знаменателе (zeros & poles);
- функция передачи в виде простых дробей (полюсы и вычеты);
- пространство состояний (state space).

<u>Описание системы в виде ДУ.</u>

При способе описания системы с помощью ДУ связь между входным и выходным сигналами линейной цепи может быть выражена в виде дифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, a_i и b_i – постоянные коэффициенты. Должно выполняться неравенство $m \le n$, то есть максимальный порядок производной входного сигнала не может превышать максимального порядка производной выходного сигнала. Значение n называется *порядком* цепи.

<u>Описание системы в виде полиномиальной функции передачи.</u>

Если применить к обеим частям (2.5) преобразование Лапласа [1, стр. 109], получится выражение для функции передачи цепи (transfer function) в виде полиномов в числителе и знаменателе:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \qquad (2.6)$$

Здесь a_i и b_i – те же постоянные коэффициенты, что и в приведенном ранее ДУ. Таким образом, цепь описывается наборами коэффициентов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega)$ получается из функции передачи (2.6) путем подстановки комплексной частоты $s = j\omega$:

$$\dot{K}(s) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0}. \qquad (2.7)$$

<u>Описание системы с помощью нулей и полюсов.</u>

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (2.6) на множители, мы получаем функцию передачи в следующем виде

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)}. \qquad (2.8)$$

Здесь k - *коэффициент усиления* (gain), z_i – *нули* функции передачи (zero), p_i – полюсы функции передачи (pole). В точках нулей функция передачи равна нулю $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов функция передачи стремится к бесконечности $H(p_i) \to \infty$. В данном случае цепь описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Для вещественных систем (у которых импульсная характеристика принимает вещественные значения) нули функции передачи являются вещественными либо составляют комплексно-сопряженные пары. То же относится и к полюсам. Коэффициент усиления таких систем всегда вещественный.

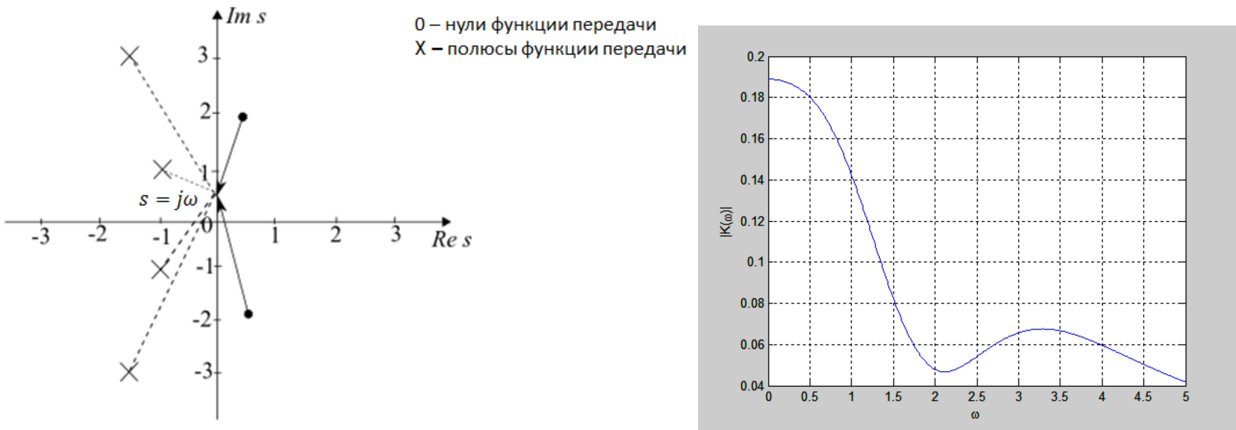
Формула (2.8) дает возможность наглядно показать, как влияет расположение нулей и полюсов на АЧХ цепи. Разности вида $(s - z_i)$, произведение которых дает числитель формулы, можно представить на комплексной плоскости в виде векторов, соединяющих точки z_i и точку $s = j\omega$, расположенную на мнимой оси (рис. 2.3, а). Аналогичным образом можно показать на комплексной плоскости и разности $(s - p_i)$, произведение которых дает знаменатель формулы.

При изменении частоты ω соответствующая точка $s = j\omega$ будет перемещаться вдоль мнимой оси, поэтому о поведении АЧХ системы можно сказать следующее (рис. 2.3, б):

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи от одного из нулей функции передачи z_i, соответствующая разность $(s - z_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *провал*. Если нуль лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет иметь нулевое значение.

- Когда точка $s = j\omega$ находится вблизи одного из полюсов функции передачи p_i, соответствующая разность $(s - p_i)$ окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *подъем*. Если полюс лежит на мнимой оси, АЧХ на соответствующей частоте будет стремиться к бесконечности.

- Чем ближе к мнимой оси расположен нуль (полюс), тем более выраженным будет соответствующий провал (подъем) АЧХ.



а) б)

Рисунок 2.3 – *Влияние нулей и полюсов на характер АЧХ системы. а) Графическое представление нулей и полюсов. б) График АЧХ системы.*

Описание системы в виде полюсов и вычетов.

Еще одним способом преобразования дробно-рациональной функции передачи является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных корней у знаменателя такое представление имеет следующий вид:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \cdots + \frac{r_1}{s - p_1} + C_0. \quad (2.9)$$

Здесь p_i – полюсы функции передачи, а числа r_i называются *вычетами*. C_0 – целая часть функции передачи, отличная от нуля только в случае равенства степеней полиномов числителя и знаменателя.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{r_i\}$, $\{p_i\}$, C_0.

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет вычислить импульсную характеристику системы, поскольку каждое слагаемое функции передачи вида $\frac{r_i}{(s-p_i)}$ соответствует слагаемому импульсной характеристики вида

$$r_i e^{p_i t}, t \geq 0. \tag{2.10}$$

Понятие устойчивости системы.

Система называется *устойчивой*, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях

$$\lim_{t\to\infty} s_{\text{вых}}(t) = 0 \text{ при } s_{\text{вх}}(t) = 0. \tag{2.11}$$

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0. \tag{2.12}$$

Ранее показано, что импульсная характеристика системы в общем случае содержит слагаемые вида (2.10). Такие слагаемые при $t \to \infty$ затухают, если вещественная часть полюса p_i является отрицательной. Следовательно, линейная система является устойчивой тогда и только тогда, когда полюсы ее функции передачи лежат в левой комплексной полуплоскости

$$Re(p_i) < 0. \tag{2.13}$$

Описание системы с помощью пространства состояний.

Еще одним способом описания линейной цепи является ее представление в пространстве состояний (state space). При этом состояние цепи описывается *вектором состояния* $\boldsymbol{s}(t)$, а собственные колебания цепи и ее реакция на входной сигнал $x(t)$ характеризуются следующим образом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}'(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{B}x(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t) + Dx(t); \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица $N \times N$; $\boldsymbol{B}$ – столбец $N \times 1$; $\boldsymbol{C}$ – строка $1 \times N$; D – скаляр.

Фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ), режекторные (РФ).

Одной из часто возникающих на практике задач является создание систем, пропускающих сигналы в определенной полосе частот и задерживающих остальные частоты. Такие системы называются *фильтрами*. При этом различают фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и режекторные фильтры (РФ).

- Фильтры нижних частот (ФНЧ) – пропускают частоты меньше некоторой частоты среза ω_0;
- Фильтры верхних частот (ФВЧ) – пропускают частоты больше некоторой частоты среза ω_0;
- Полосовые фильтры (ПФ) - пропускают частоты в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$;
- Режекторные фильтры – пропускают все частоты, кроме частот в некотором диапазоне $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Идеальная форма АЧХ фильтров этих четырех типов показана на рис. 2.4. Однако такая идеальная (прямоугольная) форма АЧХ не может быть физически реализована, практически реализуемые фильтры в той или иной мере аппроксимируют идеальные АЧХ.

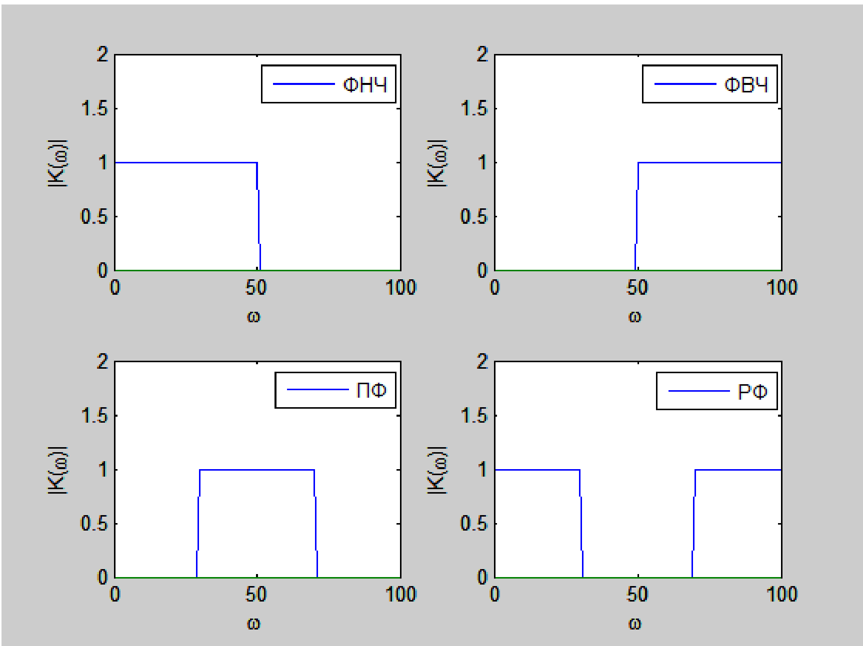


Рисунок 2.4 – *Идеальная форма АЧХ фильтров четырех типов*

Порядок выполнения работы.

1. Расчет импульсной характеристики системы.

Запишите в конспекте номер своего варианта (варианты заданий приведены в конце данного задания) и форму представления линейной системы.

Запустите MATLAB и создайте новый М-файл (New File->Script). Занесите в М-файл параметры системы согласно вашему варианту задания.

Напишите код преобразования исходной формы представления системы в функцию передачи с полиномами в числителе и знаменателе (transfer function). В зависимости от варианта, используйте одну из следующих MATLAB-функций:

- `[b, a] = zp2tf(z, p, k)`
- `[b, a] = ss2tf(A, B, C, D)`

Выведите полученные коэффициенты в окно команд «Command Window» (функции MATLAB осуществляют вывод результатов в окно команд, если после вызова функции не ставить точку с запятой).

Используя формулу (2.6), запишите функцию передачи $H(s)$ с полученными коэффициентами в конспект. Сделайте вывод о степенях m и n полиномов соответственно числителя и знаменателя функции передачи (соблюдается ли условие $m \leq n$).

Получите функцию передачи в виде полюсов и вычетов. Для этого используйте следующую MATLAB-функцию:

- `[r, p, C0] = residue(b, a)`

Используя формулу (2.10), запишите в конспект выражение для импульсной характеристики системы $h(t)$.

В MATLAB допишите код для расчета значений импульсной характеристики.

Пример кода:

```
% Расчет значений импульсной характеристики системы
t = [0:0.01:10];  % вектор отсчетов времени
h = zeros(1, length(t)); % значения импульсной характеристики
for n=[1:length(r)]
    h = h + r(n).*exp(p(n).*t); % n-е слагаемое
end
```

Допишите код для построения графика импульсной характеристики системы. В случае если импульсная характеристика принимает комплексные значения, отобразите вещественную и мнимую части импульсной характеристики в отдельных координатных осях с помощью функции `subplot`. Для выделения действительной и мнимой частей комплексного числа используйте функции `real` и `imag`, соответственно.

Пример кода:

```
% Рисуем график импульсной характеристики
subplot(2, 1, 1);
plot(t, real(h));
grid on;
title('Вещественная часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Re(h(t))');
subplot(2, 1, 2);
plot(t, imag(h));
grid on;
title('Мнимая часть импульсной характеристики системы');
xlabel('t');
ylabel('Im(h(t))');
```

Используя выражение (2.12) и полученные графики, сделайте вывод об устойчивости системы по характеру затухания ее импульсной характеристики.

Занесите полученный график действительной части импульсной характеристики в конспект. Покажите результат преподавателю.

2. Нули и полюсы системы.

Допишите код для построения графика нулей и полюсов системы. Для расчета нулей и полюсов системы при необходимости (в зависимости от варианта) используйте функцию `ss2zp`. Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба графика по осям X и Y.

Пример кода:

```
% рисуем нули и полюсы системы
figure
[z, p, k] = <<при необходимости рассчитайте нули и полюсы>>
plot(p, 'x')            % График расположения полюсов
hold on;
plot(z, 'o');           % График расположения нулей
hold off;
axis equal;             % Равный масштаб по осям
grid on;
axis([-5 5 -5 5]); % Область охвата графика
```

Занесите полученный график в конспект.

По расположению нулей и полюсов сделайте предположения о виде АЧХ (в каких областях частот будут наблюдаться подъемы, провалы, разрывы и т.д.). Для этого используйте сведения из теоретической части и рис. 2.3.

По расположению полюсов на комплексной плоскости сделайте вывод об устойчивости системы.

Покажите результат преподавателю.

3. Расчет комплексного коэффициента передачи.

Допишите код для расчета комплексного коэффициента передачи системы. Используйте MATLAB-функцию `freqs`. Диапазон частот для анализа задайте самостоятельно (включите в него нулевую частоту, бесконечность и 500 логарифмически равномерно распределенных частот в диапазоне $[10^{-2};\ 10^{2}]$).

Пример кода:

```
% расчет комплексного коэффициента передачи
w = [0 logspace(-2, 2, 500) inf]; % вектор частот для анализа
K = freqs(b, a, w); % комплексный коэффициент передачи
```

Постройте годограф (график кривой, описываемой комплексным коэффициентом передачи на комплексной плоскости при изменении частоты). Используйте функцию `axis equal` для выравнивания масштаба по осям X и Y.

Пример кода:

```
% построение годографа
figure;
plot(K)
% выравнивание масштаба осей
axis equal
grid on
xlabel('Re');
ylabel('Im');
```

Занесите полученный график в конспект. Покажите результат преподавателю.

4. Расчет АЧХ и ФЧХ системы.

Допишите код для расчета АЧХ и ФЧХ системы, используя сведения из теоретической части. Для выделения модуля и аргумента комплексного числа используйте соответственно функции `abs` и `angle`.

Пример кода.

```
% расчет АЧХ и ФЧХ системы
K_amp = abs(K);      % АЧХ
K_phase = angle(K); % ФЧХ
```

Постройте графики АЧХ и ФЧХ.

Пример кода:

```
% рисуем графики АЧХ и ФЧХ
figure
subplot(2, 1, 1);
plot(w, K_amp);
title('Амплитудно-частотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('|K(\omega)|');
subplot(2, 1, 2);
plot(w, K_phase);
title('Фазочастотная характеристика системы');
xlabel('\omega');
ylabel('arg(K(\omega))');
```

Сделайте вывод, совпадает ли форма АЧХ на графике с теми предположениями, которые вы сделали на этапе 2?

Устраните скачки ФЧХ с помощью функции `unwrap`. Чем обусловлены эти скачки?

Пример кода:

```
K_phase = unwrap(K_phase); % устранение скачков в ФЧХ
```

Снова запустите программу и сделайте вывод о том, что произошло с графиком ФЧХ.

По виду графика АЧХ сделайте вывод о том, какому типу фильтров можно отнести вашу систему (ФНЧ, ФВЧ, РФ или ПФ).

Занесите полученные графики АЧХ и ФЧХ в конспект. Покажите результат преподавателю.

Варианты заданий.

1-й вариант

Система задана формой представления «нули и полюсы»:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 + 0.5j \\ 2 - 0.5j \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -3 + 2j \\ -3 - 2j \\ -1 + 1j \\ -1 - 1j \end{bmatrix}$$

$$k \ = 1$$

2-й вариант

Система задана формой представления «пространство состояний»:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -20 & -14.1421 & 0 & 0 \\ 14.1421 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -13.2229 & -12 & -20.8806 \\ 0 & 0 & 20.8806 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0479 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Контрольные вопросы.

1. Понятие и классификация аналоговых систем.
2. Импульсная и переходная характеристики системы.
3. Комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ. Годограф.
4. Способы описания линейных систем.
5. Понятие устойчивости линейной системы.
6. Понятие ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ.