Исчисление предикатов

3.15. Исчисление предикатов. Основные понятия

Решение многих задач обработки информации требует ее логического анализа. Для автоматизации логического рассуждения необходим некоторый формальный язык, на котором можно формулировать посылки и делать логические выводы. Такой язык имеется. Он носит название языка логики предикатов.

В математике, информатике, кибернетике и других науках наряду с высказываниями встречаются выражения, грамматически имеющие форму высказываний, но содержащие *предметные переменные* некоторых множеств, а не конкретные объекты этих множеств. Здесь под предметными переменными понимаются произвольные, неконкретизированные объекты указанных множеств. Такие выражения можно получить из любых высказываний, заменив в них обозначения предметов предметными переменными множеств, к которым принадлежат эти предметы. Если в последних выражениях все предметные переменные снова заменить какими-либо элементами данных множеств (не обязательно исходными), то опять получим высказывания.

Например, предложение "2 - простое число" есть истинное высказывание. Заменим в нем конкретное число "2" предметной переменной n множества натуральных чисел. Получим выражение "n - простое число". Грамматически оно имеет ту же форму, что и исходное высказывание, но не является таковым. При замене предметной переменной n любым натуральным числом 1, 2, 3, 4, ... построенное выражение будет снова обращаться в высказывание, либо истинное, либо ложное. Все подобные выражения называются *предикатами* или *функциями-высказываниями*. Применяя к ним понятия исчисления высказываний, можно выразить довольно сложные конкретные факты.

Исчисление предикатов - это такая логическая система, с помощью которой можно выразить большую часть знаний, относящихся к математике, математической лингвистике, естественным разговорным языком. Эта система содержит правила логического вывода, позволяющие делать верные логические построения новых утверждений, исходя из некоторого заданного множества утверждений. Благодаря своей общности исчисление предикатов может претендовать на использование для компьютерного построения умозаключений. Восходит исчисление предикатов к Аристотелю.

Введем точное определение предиката. Для этого примем некоторые обозначения. Рассмотрим n множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. Предметные переменные множества M_1 обычно обозначают как x_1, x_1', x_1'', ... При этом элементы (конкретные значения) предметной переменной x_1 записывают как $x_{01}, x_{11}, x_{21}, \dots$, элементы предметной переменной x_1' - как $x_{01}', x_{11}', x_{21}'$, ... и т.д. Аналогично, предметные переменные множества M_2 обозначают x_2 (с элементами $x_{02}, x_{12}, x_{22}, \dots$), x_2' (с элементами $x_{02}', x_{12}', x_{22}', \dots$) и т.д.

n - местным *предикатом*, определенным на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется выражение, содержащее предметные переменные данного множества и обращающееся в высказывание при замене последних любыми элементами множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно. Множества $M_1, M_2, ..., M_n$ называются *базисными множествами* предиката, а их элементы - *аргументами* предиката: 1-м, 2-м, ..., и т.д. n - местный предикат ($n \geq 2$), все базисные множества которого совпадают, называется *однородным*. В нем $M_1 = M_2 = \dots = M$.

Будем обозначать n - местные предикаты, определенные на *одномерных* множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, содержащих предметные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, через

$$A(x_1, x_2, ..., x_n),\ B(x_1, x_2, ..., x_n),\ C(x_1, x_2, ..., x_n), ...$$

Высказывание, в которое обращается предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ при замене предметных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументами $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ соответственно, обозначается $A(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$.

Пример 3.19. Пусть x - переменная, принимающая какое-либо значение на множестве действительных чисел **R**. Тогда выражение "x больше двух" есть одноместный (унарный) предикат, определенный на множестве действительных чисел. Заменив x числом 3, получим истинное высказывание: $3 > 2$, а заменив x числом 1, получим ложное высказывание $1 > 2$. Применение этого предиката в алгоритме решения задачи на ЭВМ изображено на рис.3.21. ◆

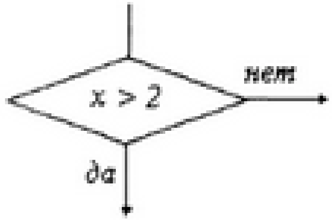


Рис.3.21. Одноместный предикат $x > 2$

Рассмотрим n - местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на одномерных множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, где $B(y_1, y_2, ..., y_m)$- некоторые элементы множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. *Значением* предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ для аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ называется логическое значение высказывания $A(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, в которое обращается данный предикат при замене предметных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно аргументами $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$.

Если значение предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ для аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ есть истина, то говорят, что аргументы $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ *удовлетворяют* данному предикату; в противном случае говорят, что аргументы $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ этому предикату не удовлетворяют.

Пример 3.20. Относительно предиката "$x > 2$", рассмотренного в примере 3.19, можно сказать, что его значение для чисел 3 и 1 есть соответственно " истина" и "ложь", а следовательно, число 3 удовлетворяет, а число 1 не удовлетворяет этому предикату. ◆

Два n - местных предиката, определенных на одних и тех же множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называются *равносильными*, если их значения совпадают, т.е., иначе говоря, если они удовлетворяются одними и теми же аргументами.

Пример 3.21. Пусть x -переменная, принимающая какое-либо значение на множестве действительных чисел. Тогда одноместные предикаты "$x > 3$" и "$x - 3 > 0$" равносильны. ◆

Пусть $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ - два n - местных предиката, определенных на одних и тех же множествах $M_1, M_2, ..., M_n$. Тогда предикат $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *следствием* предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяется любыми аргументами, удовлетворяющими $A(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 3.22. Одноместный предикат "число n делится на число пять", определенный на множестве целых чисел, есть следствие одноместного предиката "число n делится на число пятнадцать", определенного на том же множестве. ◆

n - местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется:

тождественно истинным, если его значение для любых аргументов есть истина;

тождественно ложным, если его значение для любых аргументов есть ложь;

выполнимым, если существует по крайней мере одна n - система его аргументов, для которой значение предиката есть истина.

Пример 3.23. Пусть x и y - переменные, принимающие какие-либо значения на множестве действительных чисел **R**. Тогда однородный двуместный предикат $x + y = y + x$ будет тождественно истинным; одноместный предикат $x + 1 = x + 2$ будет тождественно ложным; однородный двуместный предикат $x^2 + y^2 = 4$ будет выполнимым, но не тождественно истинным. ◆

Множеством истинности n - местного предиката, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется совокупность всех n - система его аргументов, для которых значение предиката есть истина.

Пример 3.24. Для рассмотренного ранее одноместного предиката "$x > 2$", определенного на множестве действительных чисел, множество истинности есть бесконечный интервал $(2, \infty)$. ◆

Из только что приведенного определения видно, что множество истинности любого одноместного предиката, определенного на множестве M, есть подмножество множества M.

Функция, принимающая значения в множестве, состоящем из двух элементов: "истина" и "ложь", - называется *пропозициональной функцией*. Пропозициональные функции часто определяются с помощью предикатов. Пусть дан n - местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$. Пропозициональной функцией, соответствующей предикату $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, называется функция, определенная на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, значение которой для аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ есть значение данного предиката для этих же аргументов. Подчеркнем, что предикат - это выражение, а не функция.

Пример 3.5. Для одноместного предиката "$x > 2$", определенного на множестве действительных чисел, соответствующей пропозициональной функцией будет функция, определенная на множестве действительных чисел, значение которой для действительного числа x_0 есть логическое значение высказывания $x_0 > 2$. Так, для числа 1 ее значение есть "ложь", а для числа 3 - "истина". ◆

Одноместные предикаты выражают *свойства.* Их иногда называют предикатами-свойствами. Например, предикат $P(x)$ может означать "x - четное число". При подстановке конкретных целых чисел он обращается в истинное или ложное высказывание в зависимости от того, обладает ли x указанным в $P(x)$ свойством или нет.

Предикаты с двумя или более местами выражают *отношения.* Их иногда называют предикатами-отношениями. Например, $A(x, y)$ может обозначать "x меньше y", а $B(x, y, z)$ - "x находится между y и z". Для того, чтобы получить из этих предикатов высказывания, надо конкретизировать в первом случае аргументы x_0 и y_0, а во втором - аргументы x_0, y_0 и z_0.

Пример 3.28. Записать на языке логических формул предикат "точка $M(x, y)$ находится либо внутри левой половины единичного круга с центром в начале координат, либо на биссектрисе первого координационного угла".

Решение. Этот предикат можно представить как дизъюнкцию двух более простых предикатов: "точка $M(x, y)$ находится внутри левой половины единичного круга с центром в начале координат" $\vee$ "точка $M(x, y)$ находится на биссектрисе первого координатного угла". Первый из используемых здесь предикатов можно представить как конъюнкцию предикатов: "точка находится внутри единичного круга с центром в начале координат" $\wedge$ "точка находится в левой координатной полуплоскости", а второй - как конъюнкцию предикатов: "точка находится на прямой $y = x$" $\wedge$ "точка находится в верхней координатной полуплоскости". Таким образом, нужный нам предикат на языке логических формул можно записать в виде:

$$(x^2 + y^2 < 1) \wedge (x < 0) \vee (y = x) \wedge (y \geq 0). \ \blacklozenge$$

Пример 3.29. Записать на языке логических формул предикат " точка $M(x, y)$ находится внутри затемненной области рис. 3.22".

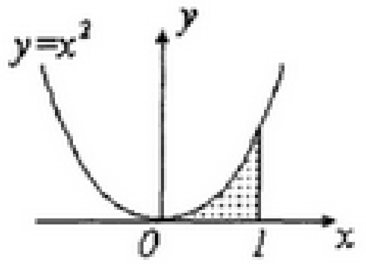


Рис.3.22. Множество истинности предиката примера 3.22

Ответ. $(x\leq 1) \wedge (x \geq 0) \wedge (y > 0) \wedge (y \leq x^2)$. $\blacklozenge$

Импликацией n - местного предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m - местного предиката $B(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n + m)$ - местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n, N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $A(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow B(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается: "если $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, то $B(y_1, y_2, ..., y_m)$"). Он имеет значение "ложь" для тех и только тех его аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m}$, для которых значение предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ для $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ есть "истина", а значение предиката $B(y_1, y_2, ..., y_m)$ для $y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m}$ есть "ложь".

Эквивалентностью n - местного предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m - местного предиката $B(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n + m)$ - местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n, N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $A(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow B(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается: " $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ тогда и только тогда, когда $B(y_1, y_2, ..., y_m)$"). Он имеет значение "истина" для тех и только тех его аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m}$, для которых значения предикатов $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $B(y_1, y_2, ..., y_m)$ для аргументов $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$ и $y_{01}, y_{02}, ..., y_{0m}$ соответственно совпадают.

Операции импликации и эквивалентности можно применять и к предикатам, у которых имеются общие переменные. Правило определения числа и вида переменных результирующих предикатов здесь то же, что и для конъюнкции и дизъюнкции.

Пример 3.30. Даны предикаты $A(x, y) = (x^2 + y^2 \le 4)$ и $B(x) = (x > 1)$, где $x, y \in \mathbf{R}$. Найти их множества истинности, а также множества истинности предикатов $C(x, y) = A(x, y) \to B(x)$ и $D(x, y) = A(x, y) \leftrightarrow B(x)$.

Решение. Множества истинности предикатов $A(x, y)$ и $B(x)$обозначены штриховкой соответственно на фигурах а) и б) рис.3.23. Границу, входящую в множество истинности, обозначаем сплошной линией, не входящую в него - пунктиром. Составим таблицу истинности для искомых предикатов:

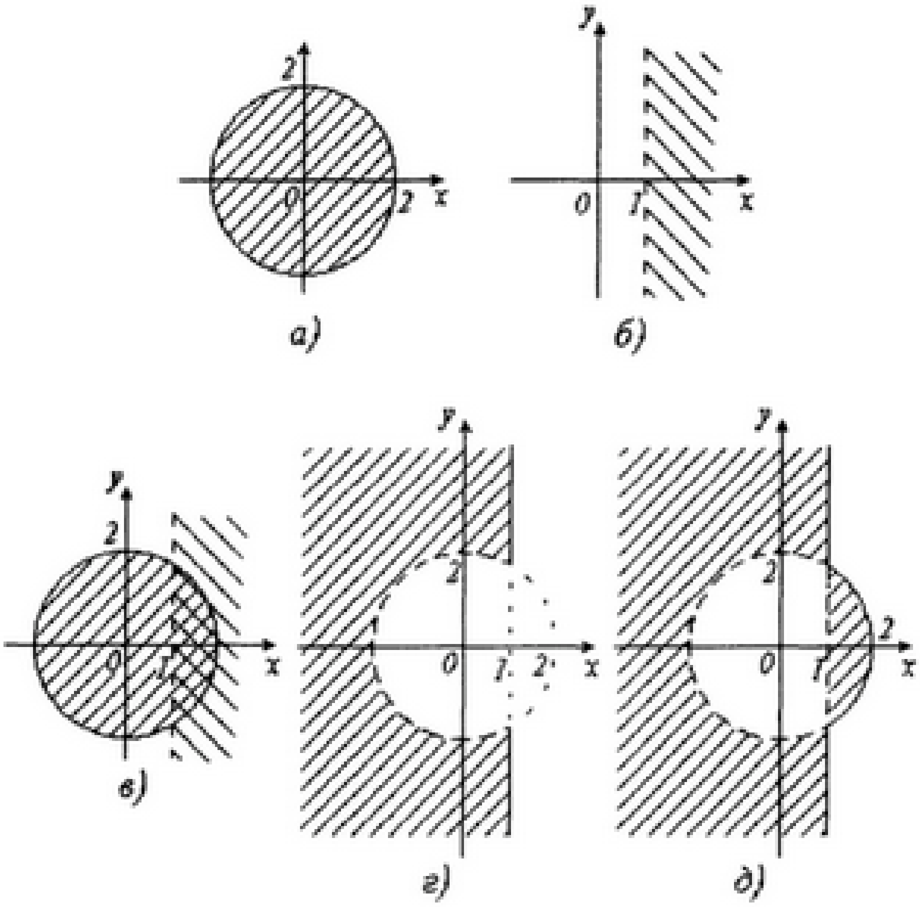


Рис.3.23. Нахождение множеств истинности предикатов

A	B	C	D
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Совместим рисунки а) и б) на одном (рис.3.23в). Незаштрихованная часть полученного рисунка соответствует тому множеству точек плоскости, на котором ложны оба предиката A и B, заштрихованная в обе стороны - множеству точек, на котором они оба истинны, и т.д. Учитывая это и представленную таблицу истинности, найдем множества истинности предиката C (рис.3.23г) и предиката D (рис.3.23д). ◆

3.17. Кванторы и исчисление предикатов

Исчисление предикатов кроме алгебры предикатов содержит новые, дополнительные логические операции *квантификации*, которые делают его значительно богаче по содержанию. При этом, как и в случае простейших операций, предикаты рассматриваются только с точки зрения их значений, т.е. равносильные предикаты не различаются. Основными операциями квантификации являются применение квантора общности и квантора существования. Определим эти понятия.

Пусть $A(x)$ есть одноместный предикат, определенный на множестве M. Запись $A(x)$ означает: "верно, что x удовлетворяет предикату $A(x)$". *Универсальным* высказыванием, соответствующим предикату $A(x)$, называется высказывание "*каждый* элемент множества M удовлетворяет предикату $A(x)$". Это высказывание обозначается символом $(\forall x)A(x)$ или $\forall xA(x)$ и считается истинным, если данный предикат *тождественно истинный*, и ложным в противном случае. ($\forall$ - перевернутая первая буква английского слова All - "все"). Знак общности $\forall$ заменяет в словесных формулировках слова: "все", "всякий", "каждый", "любой".

Пусть $A(x)$ - одноместный предикат, определенный на множестве M. *Экзистенциональным* высказыванием, соответствующим предикату $A(x)$, называется высказывание "*существует* элемент множества M, удовлетворяющий предикату $A(x)$", которое обозначается символом $(\exists x)A(x)$ или $\exists xA(x)$ и считается истинным, если предикат $A(x)$ *выполнимый*, и ложным в противном случае. ($\exists$ - перевернутая первая буква английского слова Exists - "существует"). Знак существования $\exists$ употребляется вместо слов "хотя бы один", "найдется", "существует".

Заметим, что выражения $\forall xA(x)$ и $\exists xA(x)$ суть *высказывания*, а не предикаты, хотя в них присутствует предметная переменная x множества M. Присутствие x здесь связано с принятым способом обозначений. Переменная x, входящая в выражения $\forall xA(x)$ и $\exists xA(x)$, является *связанной*, тогда как переменная x, входящая в предикат $A(x)$, является *свободной*.

Указанные знаки $\forall$ и $\exists$ в математике носят название *кванторов*: $\forall$ - квантор *общности* (или всеобщности), $\exists$ - квантор *существования*.

Теперь можно расширить понятие предикатной формулы. Будем считать, что предикатные формулы строятся из элементарных формул с помощью логических связок и кванторов общности и существования.

Приписывание спереди к предикатной формуле какого-либо квантора называется операцией *навешивания* квантора (или *связывания* квантором).

Введенные кванторы не являются независимыми друг от друга. Имеют место соотношения:

$$\rceil(\forall x)A(x) = (\exists x)\rceil A(x),$$
$$\rceil(\exists x)A(x) = (\forall x)\rceil A(x).$$

Первая формула утверждает: $A(x)$ истинно не для всех x тогда и только тогда, когда существует x, для которого $A(x)$ ложно.

Вторая формула утверждает: не существует x, для которого $A(x)$ истинно, тогда и только тогда, когда $A(x)$ ложно для всех x.

Иногда указанные формулы записывают как

$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)},$$

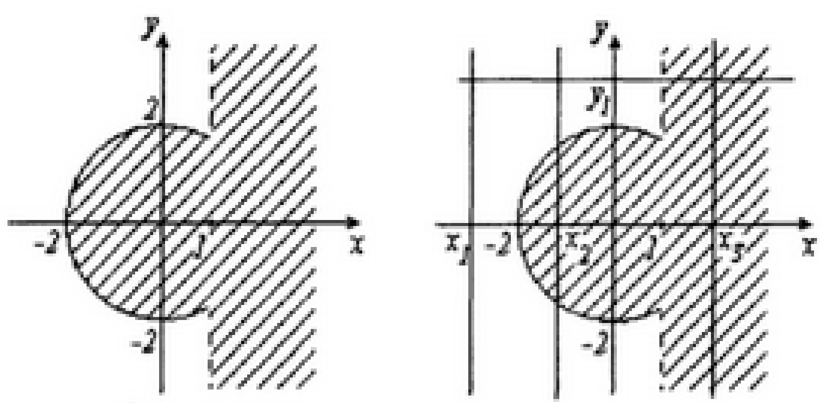
$$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}.$$

В силу указанных соотношений кванторы $\forall$ и $\exists$ называют *двойственными* друг другу.

Перейдем к многоместным предикатам.

Пусть $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть n - местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$ ($n \geq 2$). Предикатом, полученным из $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ применением квантора общности (или существования) по переменной x_1, называется $(n - 1)$ - местный предикат, определенный на множествах $M_2, ..., M_n$ значением универсального (экзистенционального) высказывания, соответствующего одноместному предикату $A(x_1, x_{02}, ..., x_{0n})$, который получается из данного n - местного предиката заменой переменных $x_2, ..., x_n$ соответствующими им аргументами $x_{02}, ..., x_{0n}$. Такой предикат обозначается $\forall x_1 A(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $\exists x_1 A(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответственно. К этим $(n - 1)$ -местным предикатам снова можно применить один из кванторов по любой свободной переменной, получая $(n - 2)$ - местные предикаты, и т.д. После n - кратного применения кванторов к n-местному предикату все его свободные переменные будут связаны и получится высказывание.

До сих пор предикаты противопоставлялись высказываниям: предикаты - это выражения, содержащие предметные переменные некоторых множеств, а высказывания - предложения, не содержащие никаких переменных. Однако, в силу изложенного, любое высказывание можно рассматривать как предикат особого вида, с числом переменных, равным нулю, а его значение считать совпадающим с логическим значением данного высказывания.



а) б)

Рис 3.24. Геометрическая интерпретация квантификации предикатов

Рассмотрим

Пример 3.31. Пусть $A(x, y)$ и $B(x)$ - предикаты примера 3.30. Множество истинности дизъюнкции этих предикатов $F(x, y) = A(x, y) \vee B(x)$ изображено защтрихованной фигурой рис.3.24 а. Найдем предикаты, которые получаются из $F(x, y)$ навешивании на него различных кванторов по различным переменным.

Решение. Вначале найдем множество истинности предиката $F_1(x) = \exists y F(x, y)$. Так как здесь переменная y связана, то предикат $F_1(x)$ зависит только от x. Выясним, каково его значение при различных x.

Пусть $x = x_1 < -2$. Проведем на рис.3.24б прямую $x = x_1$. Она проходит через точку $x = x_1$ параллельно оси ординат. Выражение $F_1(x)$ согласно приведенной формуле читается "при $x = x_1$ *существует хотя бы одно значение* y, при котором $F(x_1, y)$ истинно". Но прямая $x = x_1$ нигде не пересекает заштрихованное множество истинности предиката $F(x, y)$. Следовательно, это высказывание ложно. Возьмем теперь на рис. 3.24б прямую $x = x_2$. Очевидно, что, проходя внутри окружности, эта прямая пересекает заштрихованную область (т.е. область истинности предиката $F(x, y)$), и здесь высказывание $F_1(x_2) = \exists y F(x_2, y)$ истинно. Самая левая точка, где оно истинно, есть $x = -2$, а правая $x = \infty$. Поэтому предикат $F_1(x) = (-2 \le x < \infty)$ или $F_1(x) = ((-2 < x) \vee (x = -2)) \wedge$ $\wedge (x < \infty)$.

Для точки x_1 выражение $F_2(x_1) = \forall y F(x_1, y)$ читается "при $x = x_1$ для *всех значений* y высказывание $F(x_1, y)$ истинно". Но из рис.3.24б следует, что это не так ни для точки x_1, ни для точки x_2, но справедливо для точки x_3. Поэтому здесь $F_2(x) =$
$(1<x<\infty)=$
$= (1<x) \wedge (x<\infty)$.

Аналогично, выбирая прямые $y = y_1$ и т.д., можно получить $F_3(y) = \exists x F(x, y) = 1$, $F_4(y) = \forall x F(x, y) = 0$, т.е. $F_3(y)$ есть тождественно истинный предикат (истинное высказывание), а $F_4(y)$ - тождественно ложный предикат (ложное высказывание). ◆

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. - М.: Мир, 1976. - 400 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - Лейпциг: Тойбнер, М.: Наука, 1981. - 718 с.
3. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. - М.: ФМ, 1962. - 476 с.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М.: Высшая школа,1986. - 311 с.
5. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики. - К.: Радяньска школа, 1987.- 128 с.
6. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. - М.: Изд. иностр. лит-ры, 1963 .- 486 с.
7. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. - М.: Энергия, 1972. - 376 с.
8. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера .- М.: Энергоатомиздат, 1988. - 480 с.
9. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990. - 384 с.
10. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. - К., Вища школа, - 1971. - 418 с.
11. Мельников В.Н. Логические задачи. - Киев-Одесса: Выща школа, 1989. - 343 с.
12. Миловзоров В.П. Элементы информационных систем. - М.: Высш. Школа, 1989.- 440 с.
13. Ренин С.В. Математическая логика. - Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1982. -29 с.
14. Ренин С.В. Основы дискретной математики. - Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1981. - 43 с.