Лекция 16.

Дифференциал

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\alpha \to 0$. Умножим равенство на Δx: $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

В правой части последнего равенства слагаемое $y' \cdot \Delta x$ - бесконечно малая величина низшего порядка малости по сравнению со слагаемым $\alpha \cdot \Delta x$, оно является главной частью приращения функции Δy и называется *дифференциалом функции*, что обозначается так:

$$dy = y' \cdot dx. \qquad (1)$$

Свойства дифференциала

1. Дифференциал аргумента равен его приращению $dx = \Delta x$.
2. Дифференциал функции эквивалентен приращению функции при $\Delta x \to 0$, т.е. $\Delta y \sim dy$.
3. Свойство инвариантности формы дифференциала заключается в том, что дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной:

   если $y = f(z), \quad z = g(x),$ то $dy = f'(z)dz.$

Так как задача нахождения дифференциала равносильна нахождению производной, то правила дифференцирования функций сохраняют свою силу и для дифференциала, а именно:

а) $d(C) = 0;$ б) $d(U+V) = dU + dV;$

в) $d(U \cdot V) = dU \cdot V + U \cdot dV;$ г) $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}.$

С учетом формулы (1) производная функции может быть обозначена как отношение дифференциалов:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

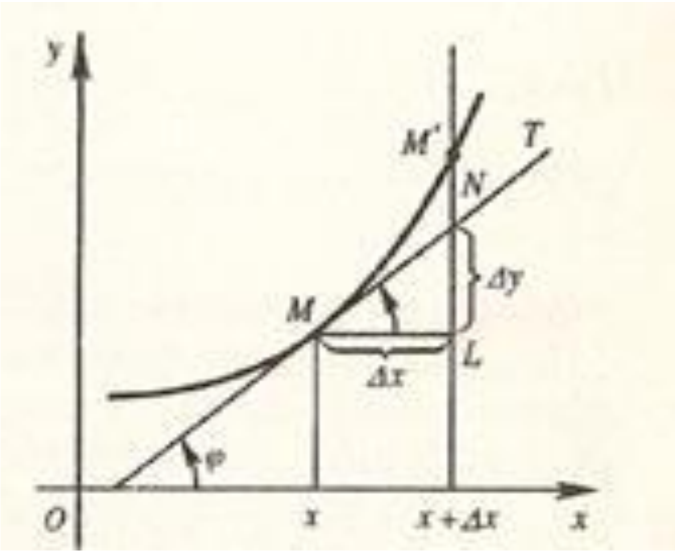
Пример . Найти дифференциал функции $y = x^3 \cdot \mathrm{sh}(x)$.

Решение: $y' = 3x^2\mathrm{sh}(x) + x^3\mathrm{ch}(x)$, $dy = (3x^2\mathrm{sh}(x) + x^3\mathrm{ch}(x))dx$.

Пример. $y = 2x^2 - 3x \quad \Delta y = ? \quad dy = ?$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - 2x^2 + 3x =$$
$$= \Delta x(4x + 2\Delta x - 3) = (4x-3)\Delta x + 2\Delta^2 x$$
$$dy = f'(x)\Delta x = (4x-3)\Delta x$$
$$x = 10 \quad \Delta x = 0{,}1 \quad \Delta y = 3{,}72 \quad dy = 3{,}7$$

Геометрический смысл дифференциала



Для выяснения геометрического смысла дифференциала к графику функции $y = f(x)$ в точке M(x,y) проведём касательную MT, обозначив через φ её угол наклона к положительному направлению оси OX.

Так как $tg\varphi = f'(x)$, то $dy = tg\varphi \cdot \Delta x$. Поэтому из треугольника MLN следует, что дифференциал dy есть **приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента** Δx **.**

Замечая, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т.е. что дифференциал независимой переменной равен её приращению, получаем $dy = y'dx$.

Таким образом, дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал (или приращение) независимой переменной. Т. о. $dy = \frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу аргумента.

Инвариантность формы дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причём $f(u)$ имеет производную по u, $\varphi(x)$ - по x. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{dy}{dx} = f_u(u)\varphi'(x)$. Следовательно, $dy = f_u(u)\varphi'(x)dx$. Но $\varphi'(x)dx = du$. Поэтому $dy = f_u(u)du$.

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент её был независимой переменной. Иначе говоря, форма записи дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала.*

Применение дифференциала для приближенных вычислений

Перепишем формулу $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$ в виде: $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$, где Δy - приращение функции, dy - дифференциал функции, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta y \approx dy$, т. е. приближенное значение приращения функции совпадает и её дифференциалом.

При достаточно малом $|\Delta x|$ приближённое равенство $\Delta y \approx dy$ обладает достаточно высокой степенью точности. Отсюда находим: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy$ или $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$. Перепишем последнее равенство, используя определение дифференциала:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Это соотношение часто используется в приближенных вычислениях.

Пример. Вычислить приближенно $y = x^{16}$ при $x = 0{,}99$.

Решение. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, где $f(x) = x^{16}$. Примем $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = 0{,}99 - 1 = -0{,}01$. Тогда $f(x_0) = 1^{16} = 1$, $df(x) = \left(x^{16}\right)'\Delta x = 16x^{15}\Delta x$, $df(x_0) = -16 \cdot 1^{15} \cdot 0{,}01 = -0{,}16$. $(1-0{,}01)^{16} \approx 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

$$\sqrt[4]{16{,}64}=?\quad x_0=16\quad \Delta x=0{,}64$$

$$f(x)=\sqrt[4]{x}\qquad f(x_0)=f(16)=\sqrt[4]{16}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\qquad f'(16)=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{4\cdot 8}=\frac{1}{32}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$\sqrt[4]{16{,}64}\approx 2+\frac{0{,}64}{32}=2{,}02$$

Производные высших порядков

Производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ есть также функция от x и называется производной первого порядка. Если функция $y'=f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается $y''=f''(x)$, то есть $y''=(y')'$.

Определение. Производная n – го порядка называется производная от производной $(n-1)$ - го порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$. Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y'''.

Примеры.

1. Найдем производную 3-го порядка от функции $y=x^3-5x^2+3x+12$.
$y'=3x^2-10x+3$, $y''=(y')'=6x-10$, $y'''=(y'')'=6$.
2. Получим общую формулу для производной n-го порядка функции $y=a^{bx}$.
$y'=a^{bx}\cdot \ln a\cdot b$, $y''=\ln a\cdot b(a^{bx})'=a^{bx}\cdot \ln^2 a\cdot b^2,\ldots,$ $y^{(n)}=a^{bx}\cdot \ln^n a\cdot b^n$.

Свойства производных высших порядков.

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$.
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$.
3. Для $y=x^m$ $y^{(n)}=n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{m-n}$. Если m – натуральное число, то при $n>m$ $y^{(n)}=0$.
4. Можно вывести **формулу Лейбница**, позволяющую найти производную n-го порядка от произведения функций $f(x)g(x)$:

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$(UV)'' = U''V + U'V' + U'V' + UV'' = U''V + 2U'V' + UV''$$

$$(UV)^{(n)} = U^{(n)}V + nU^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{2!}U^{(n-2)}V'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}U^{(n-k)}V^{(k)} + \ldots + UV^{(n)}$$

Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной.

Пример

$$y = \frac{x^2}{1+x} \qquad y^{(5)} = ?$$

$$y = x^2 \cdot (1+x)^{-1}$$

$$U = x^2 \quad U' = 2x \quad U'' = 2 \quad U''' = U^{(4)} = U^{(5)} = 0$$

$$V = (1+x)^{-1} \quad V' = -(1+x)^{-2} \quad V'' = 2\cdot(1+x)^{-3} \quad V''' = -6(1+x)^{-4} \quad V^{(4)} = 24(1+x)^{-5} \quad V^{(5)} = -120(1+x)^{-6}$$

$$y^{(5)} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!}U''V''' + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}U'V^{(4)} + UV^{(5)} = -10\cdot2\cdot6\cdot(1+x)^{-4} + 5\cdot2x\cdot24(1+x)^{-5} - x^2\cdot120(1+x)^{-6} =$$

$$= -\frac{120x^2}{(1+x)^6} + \frac{240x}{(1+x)^5} - \frac{120}{(1+x)^4}$$

Пример

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}) \qquad y'' = \sin'(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi)$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + \frac{4\pi}{2})$$

$$y^{(n)} = \begin{cases} \sin x & n = 4, 8, 12, \ldots \\ \cos x & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\sin x & n = 2, 6, 10, \ldots \\ -\cos x & n = 3, 7, \ldots. \end{cases} \qquad y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

Дифференциалы высших порядков.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции называется ее **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка**.

Обозначение: $d^2y=d(dy)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.

Итак, $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=(f'(x))'(dx)^2=f''(x)dx^2$.

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции:

$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)d^3x$ и дифференциалы более высоких порядков.

Определение. *Дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)d^{n-1}x)' = f^{(n)}(x)d^nx.$$

Свойства дифференциалов высших порядков.

1. Производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

2. Дифференциалы высших порядков **не обладают свойством инвариантности**.

Производная второго порядка для функции, заданной параметрически

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$