ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

2.1 Цель работы

Освоить программное моделирования случайных событий, реализуемых комбинационными схемами; выполнить теоретический расчет вероятностей срабатывания комбинационных схем и найти оценки этих вероятностей экспериментальным путем; сравнить теоретические и экспериментальные результаты; оценить применимость теорем сложения и умножения вероятностей и формулы полной вероятности для вычисления вероятностей сложных событий на примере работы комбинационных схем.

2.2. Теоретический раздел

Элементарные (не разложимые на более простые части) случайные события, реализуемые в некотором эксперименте, называются *исходами* этого эксперимента. Полная совокупность исходов $z_1, z_2,..., z_m$ (*пространство исходов*) обозначается как

$$Z = \{z_1, z_2,..., z_m\} . \tag{2.1}$$

При осуществлении каждого эксперимента обязательно имеет место некоторый из исходов $z_i \in Z$ и не может быть такого эксперимента, результатом которого могли бы быть два или более исходов. Иными словами, исходы представляют собой *полную группу несовместных событий*.

На практике обычно наибольший интерес представляют не сами исходы, а некоторые их совокупности (комбинации), которые являются подмножествами множества *Z*. Любое подмножество *A* множества *Z* называется *событием A*:

$$A \subseteq Z \quad . \tag{2.2}$$

Когда говорят, что *происходит* или *осуществляется* событие *A*, то подразумевается, что в *A* содержится некоторая совокупность элементарных событий (т.е. исходов) z_i .

Для любых событий *A* и *B*, принадлежащих пространству исходов эксперимента *Z*, имеют место **следующие определения.**

1. *Объединением (суммой)* $A \cup B$ событий *A* и *B* называется событие, состоящее в осуществлении *хотя бы одного* из событий *A* и *B*.

2. *Совмещением (произведением)* $A \cap B$ событий *A* и *B* называется событие, состоящее в осуществлении *как A, так и B*. События *A* и *B* называются *несовместными*, если осуществление одного из них исключает возможность осуществления другого, т.е. если $A \cap B = \varnothing$.

3. *Дополнением* $\overline{A}$ события *A* называется событие, состоящее в *неосуществлении* события *A*. Событие $\overline{A}$ называется также *противоположным* событию *A*.Осуществление *хотя бы одного* из событий пространства *Z* является *достоверным* событием. Поэтому здесь множество *Z* играет роль универсального множества.

Поскольку не произойти хотя бы одно какое-либо событие из пространства *Z* не может, то *неосуществление* хотя бы одного события является *невозможным* событием, т.е. это событие представляет собой пустое множество ∅.

Под *вероятностью* $P(z_i)$ исхода z_i понимают численную меру, которая характеризует объективную возможность данного исхода эксперимента. Если некоторый исход $z_н$ *невозможен* (т.е. является невозможным событием), то ему приписывается вероятность $P(z_н) = 0$. Если же некоторому исходу $z_д \in Z$ приписан вес $P(z_д) = 1$, то данный исход представляет собой *достоверное* событие. Все остальные исходы имеют вероятности $P(z_i)$, значения которых лежат между этими предельными:

$$0 = P(z_н) \le P(z_i) \le P(z_д) = 1. \qquad (2.3)$$

Если $\overline{A}$ – событие, противоположное событию *A*, то $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Для вычисления вероятностей различных событий используется ряд теорем. Наиболее часто **применяемые теоремы**.

1. Если события *A* и *B* *несовместны*, т.е. $A \cap B = 0$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (2.4)$$

2. Для *произвольных* (а не только несовместных) случайных имеет место соотношение событий *A* и *B*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \qquad (2.5)$$

которое носит название *теоремы сложения вероятностей*. Формула (2.4) – ее частный случай для несовместных событий.

3. Для произвольных случайных событий *A* и *B* имеет место *теорема умножения вероятностей:*

$$P(A \cap B) = P(A) P(B / A), \qquad (2.6)$$

где $P(A)$ – *безусловная вероятность* события *A*;

$P(B / A)$ – *условная вероятность* события *B*, вычисленная при условии, что событие *A* имело место.

Если события *A* и *B* *независимы*, то

$$P(B / A) = P(B), \qquad (2.7)$$

и формула (2.6) принимает вид:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \qquad (2.8)$$

4. Пусть $A \subseteq Z$ – случайное событие в пространстве *Z*, а система множеств $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ – некоторое *разбиение* этого пространства. Как известно, разбиение удовлетворяет условиям:

$$Z = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n, S_i \cap S_k \ne \varnothing \text{ при } i \ne k \qquad (2.9)$$

Входящие в него события S_i называются *гипотезами*.

Формула полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A/S_i)P(S_i) \tag{2.10}$$

позволяет вычислить вероятность $P(A)$ события *A*, если известны безусловные вероятности $P(S_i)$ всех гипотез S_i и условные вероятности $P(A/S_i)$ осуществления события *A* при реализации каждой из этих гипотез.

В настоящей работе будет моделироваться работа комбинационных схем со случайным нажатием трех кнопок *A, B, C*. Комбинационные схемы имеют в своем составе кнопки (которые могут быть нажаты или не нажаты), контакты, связанные с кнопками (которые могут быть разомкнуты или замкнуты), источник питания, провода и лампочку (которая может гореть или не гореть). Такими схемами можно моделировать многие электрические и электронные цепи, сети передачи информации, вычислительные алгоритмы.

На рисунке 2.1 приведена модель комбинационной схемы, на которой блок *G* содержит различное число нормально разомкнутых и нормально замкнутых контактов, последовательно либо параллельно соединенных между собой проводами и переключаемых кнопками *A, B* и *C.*

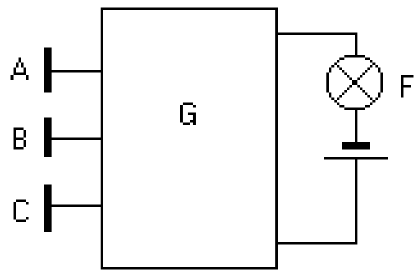

Рисунок 2.1 – Модель комбинационной схемы

Лампочка *F* горит в зависимости от того, какова схема блока *G* и в каком состоянии находятся кнопки *A, B, C*. Если эти кнопки нажимаются случайным образом, то случайным является и загорание лампочки *F*. Задача состоит в том, чтобы при заданной схеме блока *G* и заданных вероятностях $P(A)$, $P(B)$ и $P(C)$

нажатия кнопок *A*, *B* и *C* определить вероятность $P(F)$ горения лампочки *F*.

Решить эту задачу можно тремя способами:

– аналитически, используя теоремы сложения и умножения вероятностей;

– аналитически, используя формулу полной вероятности;

– программно, создав генератор элементарных случайных событий, «нажимающий» кнопки A, B и C с заданными вероятностями.

В соответствии со схемой блока G и алгеброй логики эти события должны быть преобразованы в сложное событие F. Иными словами, в каждом отдельном эксперименте кнопки A, B, C нажимаются случайным образом, и при этом необходимо определить состояние лампочки F. Проведя массовую серию таких испытаний, можно определить частоту события F. При большом числе испытаний она практически равна $P(F)$. События здесь носят бинарный характер: кнопки, контакты и лампочки имеют всего по два возможных состояния. Поэтому алгебра множеств здесь может быть заменена алгеброй логики. Иными словами, здесь в вышеуказанных формулах для получения составного события можно заменить операцию $\cup$ на $\vee$, операцию $\cap$ – на $\wedge$, операцию дополнения – на операцию отрицания.

Для программного создания случайных событий используется генератор случайных чисел с равномерным распределением вероятностей в диапазоне от 0 до 1 (рисунок 2.2). В системе MATLAB можно создать имеющую размер $m \times n$ матрицу L таких случайных чисел с помощью функции $rand(m,n)$.

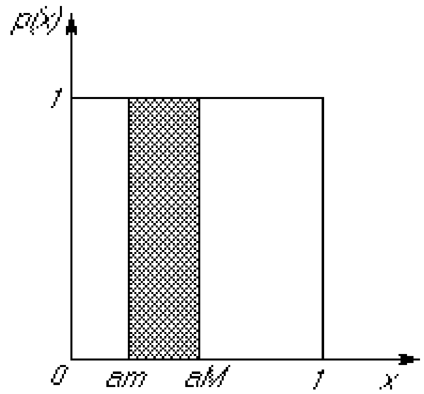

Рисунок 2.2 – Плотность вероятности равномерно распределённых случайных чисел

В рассматриваемой работе будем считать, что эта матрица имеет 4 строки и 1000 столбцов.

Первая строка матрицы *L* будет положена в основу организации случайных «нажатий» кнопки *A*. Она может быть получена из матрицы *L* путем применения оператора двоеточия: $A = L(1,:)$.

В задании на лабораторную работу указаны границы am и aM полуинтервала [am , aM). Если элемент матрицы *A* оказывается внутри этого полуинтервала, необходимо заменить его числом 1, если же вне – числом 0. *Таким образом, матрица-строка А преобразуется в матрицу-строку из случайно расположенных единиц и нулей*, причем вероятность появления единиц определяется полуинтервалом [am , aM). Будем считать, что единицы соответствуют «нажатию» кнопки *A*.

Аналогичным образом создаем матрицы $B = L(2,:)$ и $C = L(3,:)$, которые преобразуем в «1-0»-матрицы В и С в соответствии с полуинтервалами $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$. Они моделируют нажатия кнопок В и С.

По заданной карте Карно необходимо найти минимальную ДНФ соответствующей ей комбинационной схемы. По ней надо аналитически рассчитать и на основе разработанной программы путем численного эксперимента оценить вероятность $P(F)$ загорания лампочки F. Сравнить результаты.

В следующей части работы необходимо создать три «1-0»-матрицы-строки A1, B1 и C1, применяя указанную выше методику и те же полуинтервалы $[am, aM)$, $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$, однако, из единственной, четвертой строки матрицы L, и применить их к той же комбинационной схеме. Сравнить результаты первой и второй части работы. Объяснить эти результаты. Дать их аналитическое подтверждение.

Сопоставление практических и экспериментальных данных позволяет оценить степень применимости законов и тождеств алгебры множеств, алгебры логики и теории вероятностей для расчета работы комбинационных схем при случайных воздействиях.

2.3 Хода работы

2.3.1 Аналитическая часть

1. Получить у преподавателя вариант интервалов случайных величин (таблица 2.1) и вариант комбинационной схемы.

Таблица 2.1 – Варианты задания интервалов случайных чисел

№ вар.	*am*	*aM*	*bm*	*bM*	*cm*	*cM*
1.	0	0.3	0.1	0.5	0.2	0.7
2.	0.3	0.8	0.6	0.9	0.7	1.0
3.	0.4	0.9	0.2	0.6	0.5	0.8
4.	0.2	0.7	0	0.3	0.1	0.5
5.	0.6	0.9	0.7	1.0	0.3	0.8
6.	0.1	0.4	0.3	0.7	0.5	1.0
7.	0	0.3	0.2	0.7	0.1	0.5
8.	0.5	0.7	0.2	0.6	0.6	0.9
9.	0.7	1.0	0.3	0.8	0.5	0.9
10.	0.3	0.8	0.5	0.9	0.7	1.0
11.	0	0.2	0.1	0.8	0.4	1.0
12.	0.3	0.7	0.3	0.4	0.5	0.9
13.	0.4	1.0	0	0.2	0.1	0.8
14.	0.1	0.8	0.4	1.0	0	0.2
15.	0.5	0.9	0.3	0.7	0.3	0.4
16.	0.7	1.0	0.2	0.5	0.4	0.8
17.	0.7	1.0	0.4	0.8	0.3	0.5
18.	0.3	0.5	0.7	1.0	0.4	0.9
19.	0.4	0.8	0.3	0.5	0.7	1.0
20.	0.2	0.6	0.4	0.8	0.7	0.9

2. Согласно полученным вариантам вычислить теоретические значения вероятностей нажатия кнопок $P(A), P(B)$ и $P(C)$, $P(A1), P(B1)$ и $P(C1)$.

3. Вычислить следующие условные теоретические вероятности: $P(A/B), P(A/C), P(B/A), P(B/C), P(C/A), P(C/B)$,

$P(A1/B1), P(A1/C1), P(B1/A1), P(B1/C1), P(C1/A1), P(C1/B1)$.

4. В соответствии с заданным вариантом схемы найти минимальную ДНФ, связывающую горение лампочки с нажатием кнопок.

5. Аналитически определить вероятность горения лампочки для событий *A*, *B* и *C*:

а) применяя теоремы сложения и умножения вероятностей;

б) применяя формулу полной вероятности.

6. Выполнить пункт 5 для событий *A1, B1* и *C1*.

2.3.2 Практическая часть

17. Написать в системе Matlab функцию вычисления матрицы *L* из 4 строк и 1000 столбцов таким образом, чтобы она сохранилась в памяти компьютера, но не выводилась на печать.

2. Написать в системе Matlab m-функцию преобразования элементов матрицы *L* в «1-0» – матрицы-строки *A,B,C*, соответствующие заданным интервалам $[am, aM)$, $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$ таким образом, чтобы элементы матрицы *L*, лежащие внутри этих интервалов, преобразовывались в 1, а вне интервалов – в 0.

3. Аналогично требованиям пункта 2 написать m-функцию получения «1-0» – матриц-строк *A1, B1, C1*.

4. В соответствии с полученным вариантом комбинационной схемы написать в системе Matlab формулу преобразования элементарных событий *A, B* и *C* в составное событие *F*. Считать событие *A* совпадающим с высказыванием *x*, событие *B* – с высказыванием *y*, а событие *C* совпадающим с высказыванием *z*.

5. Написать в системе Matlab m -функцию для расчета частоты события *F*.

Предупреждение: выбирая название для М-функции, предварительно убедитесь, что оно отсутствует среди названий стандартных функций MATLAB, в противном случае при обращении MATLAB будет вызывать не вашу функцию, а стандартную.

6. Вызвать функцию вычисления матрицы *L* (см. п.1). Вычислить эту матрицу без вывода на печать. Для контроля правильности вычисления вывести на печать ее первые 10 столбцов.

7. Вызвать функцию получения «1-0» – матрицы-строки *A* и вычислить ее без вывода на печать. Для контроля вывести на печать ее первые 10 элементов.

8. Выполнить п.7 для строки *B*.

9. Выполнить п.7 для строки *C*.

10. Воспользовавшись функцией п.3, вычислить без вывода на печать «1-0»-матрицы – строки *A1, B1, C1* и проконтролировать их первые 10 элементов (A1, B1 и C1 получаются путем применения указанной выше методики и те же полуинтервалы, однако, из единственной, четвертой строки матрицы L), и применить их к той же комбинационной схеме.

11. Применяя формулу п. 4 и считая, что на вход системы поступают события *A, B* и *C*, рассчитать элементы «1-0»- матрицы-строки *F*, состоящей из единиц, соответствующих горению лампочки, и нулей, когда она не горит. Проверить первые 10 элементов этой матрицы.

12. Подсчитать частоту события *F*, применяя формулу, полученную в п.5.

13. Сравнить найденную экспериментально частоту с теоретическим результатом.

14. Выполнить п.11, считая, что на вход схемы поступают события *A1, B1* и *C1* и обозначая выходную «1-0»-матрицу-строку как *F1*.

15. Подсчитать частоту события *F1*, используя формулу п.5.

16. Сравнить найденную частоту с теоретическим результатом.

17. Сопоставить результаты п.13 и п.16. Дать развернутые выводы о возможности применения законов и тождеств теории множеств, алгебры логики и теории вероятностей для оценки работы комбинационных схем.

18. Оформить отчет.

2.4. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Подробный аналитический расчёт вероятности горения лампочки по формулам сложения-умножения, как для зависимых, так и для независимых событий.

3. Подробный аналитический расчёт вероятности горения лампочки по формуле полной вероятности, как для зависимых, так и для независимых событий.

4. Программа на языке Matlab для практического расчёта частоты загорания лампочки, как для зависимых, так и для независимых событий.

5. Выводы по работе в развёрнутом виде о возможности применения законов и тождеств теории множеств, алгебры логики и теории вероятностей для оценки работы комбинационных схем.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что такое случайный исход и случайное событие?

2. Что такое вероятность случайного события?

3. Свойства вероятности случайного события.

4. Основные теоремы о вероятностях случайных событий.

5. Что такое безусловная и условная вероятности?

6. Объяснить смысл формулы полной вероятности.

7.Что такое равномерный закон распределения случайной непрерывной величины?

8. Каким образом в системе MATLAB можно получить массив равномерно распределенных случайных чисел? Каковы параметры этого распределения?

9. В работе задано $P(A1) = P(A)$, $P(B1) = P(B)$, $P(C1) = P(C)$ для одной и той же комбинационной схемы. Чем объяснить, что вероятность $P(F1)$ равна (или не равна) вероятности $P(F)$? Какие свойства случайных событий играют здесь принципиальную роль?

Варианты заданий карт Карно:

1

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1

2

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

3

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

4

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

5

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0

6

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1

7

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

8

z \ xy	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

9

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

10

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	0	0

11

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

12

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

13

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

14

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	0

15

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

16

z \ xy	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

17

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

18

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

19

z \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

20

z \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

21

z \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1