

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

**для студентов всех специальностей очной формы
обучения**

Севастополь
2010

УДК

Определенный интеграл. Методические указания и контрольные задания/ Сост. И.В. Ольшанская.– Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения всех специальностей, изучающих курс „ Математический анализ”. Пособие содержит 30 вариантов индивидуальных заданий по теме определенный интеграл. В методических указаниях приведен пример решения нулевого варианта.

Задания могут быть использованы для практических занятий.
Приводится список рекомендуемой литературы.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 2010 г., протокол № .

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Ст. преп. Агаханянц Р.Е. кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретический материал.....	4
Образец выполнения нулевого варианта.....	
Варианты контрольного задания.....	
Библиографический список.....	

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Определенный интеграл как предел интегральных сумм,

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки x_0, x_1, \dots, x_n , так что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ - выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i , $i = \overline{1, n}$.

Сумма вида $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Свойства определенного интеграла

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt;$$

$$4) \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx;$$

$$5) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$6) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \quad 7) \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

$$8) \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ где } c \in [a; b] \text{ (теорема о среднем);}$$

$$9) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ на отрезке } [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

$$10) \text{ Если } M - \text{наибольшее, } m - \text{наименьшее значения } f(x) \text{ на отрезке } [a; b], \text{ то } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

Формула Ньютона Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$.

Интегрирование четных и нечетных функций

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция;} \\ 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция.} \end{cases} \quad (3)$$

Интегрирование по частям

Если функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b U(x) dV(x) = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) dU(x) \quad (4)$$

Интегрирование подстановкой

Пусть $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (5)$$

Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами (1 рода)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx. \quad (6)$$

Несобственные интегралы 1 рода называются сходящимися, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (6).

Интегралы от неограниченных функций (2 рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a; b]$ и имеет разрыв 2 рода при $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (7)$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad (8)$$

Если предел, стоящий в правой части равенств (7) или (8) существует, то несобственный интеграл 2 рода называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Если функция $y = f(x)$ терпит разрыв 2 рода во внутренней точке $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

В этом случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры (геометрический смысл определенного интеграла)

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу - отрезком $[a; b]$ оси ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (9)$$

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a; b]$ то $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (10)$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = g(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c; d]$ оси oy , то

площадь этой трапеции вычисляется по формуле $S = \int_c^d g(y)dy$.

Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} y(t) \geq 0, t \in [t_1; t_2]$, , прямыми $x = a$ и $x = b$, и отрезком $[a; b]$ оси ox , то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \quad (11)$$

где t_1 , t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi, \quad (12)$$

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки $A(a; c)$, $B(b; d)$. Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (13)$$

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2} dy \quad (14)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1; t_2], \text{ то длина дуги вычисляется по формуле:}$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (15)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (16)$$

Объем тела вращения

Объем тела вращения, образованного вращением во-
круг оси ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой

$y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (17)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$), и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объем тела вращения равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (18)$$

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+3x^3} dx$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+3x^3} dx = [\sqrt{1+3x^3} = t, 1+3x^3 = t^2, 9x^2 dx = 2tdt,$$

$$x^2 dx = \frac{2}{9} t dt, x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=2] = \frac{2}{9} \int_1^2 t \cdot t dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{27} (8-1) = \frac{14}{27}$$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 (x^2 - 3x) \cos 4x dx$$

Применим формулу интегрирования по частям (4).

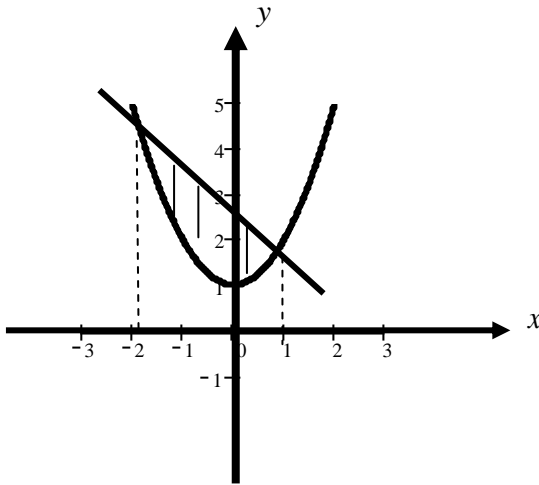
$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - 3x) \cos 4x dx &= \left[\begin{array}{l} U = x^2 - 3x; \quad dU = (2x - 3)dx \\ V = \cos 4x dx; \quad V = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 3x) \sin 4x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 (2x - 3) \sin 4x dx = -\frac{1}{2} \sin 4 - \\ &- \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} U = 2x - 3; \quad dU = 2dx \\ dV = \sin 4x dx; \quad V = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \sin 4 + \\ &+ \frac{1}{16} (2x - 3) \cos 4x \Big|_0^1 - \frac{2}{16} \int_0^1 \cos 4x dx = -\frac{1}{2} \sin 4 - \frac{1}{16} \cos 4 + \frac{3}{16} - \\ &- \frac{1}{32} \sin 4x \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \sin 4 - \frac{1}{16} \cos 4 + \frac{3}{16} - \frac{1}{32} \sin 4 = \\ &= -\frac{17}{32} \sin 4 - \frac{1}{16} \cos 4 + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Задача 3. а) Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y + x = 3$. Выполнить чертеж.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1; \\ y + x = 3. \end{cases}$ Решая систему, получим

$x_1 = 1, x_2 = -2$. Искомая площадь по формуле (10) равна:

$$S = \int_{-2}^1 ((3-x) - (x^2 + 1)) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = 4,5.$$



б) Вычислить площадь, ограниченную линиями $r = 2\sin\phi$ и $r = 2\sqrt{3}\cos\phi$.

Для построения чертежа преобразуем уравнения кривых из полярных координат в декартовые.

$$r = 2\sin\phi$$

$$r^2 = 2r\sin\phi$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

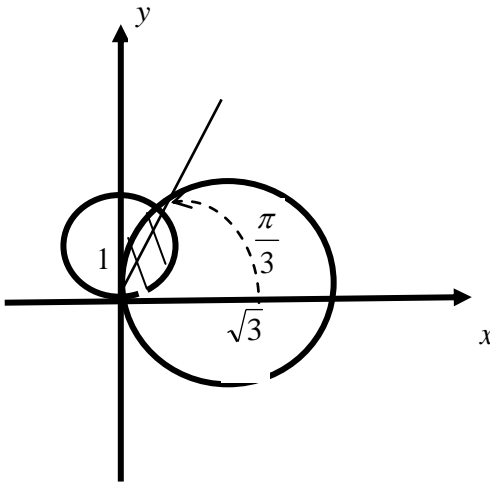
$$r = 2\sqrt{3}\cos\phi$$

$$r^2 = 2\sqrt{3}r\cos\phi$$

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = 3$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 3$$



Найдем точки пересечения окружностей.

$$\begin{cases} r = 2 \sin \phi, \\ r = 2\sqrt{3} \cos \phi, \end{cases} \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

По формуле (12) получим:

$$S = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^2 \phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 12 \cos^2 \phi d\phi \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin^2 \phi d\phi + 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \phi d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\phi) d\phi + 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\phi) d\phi = \left(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \\
&+ 3 \left(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

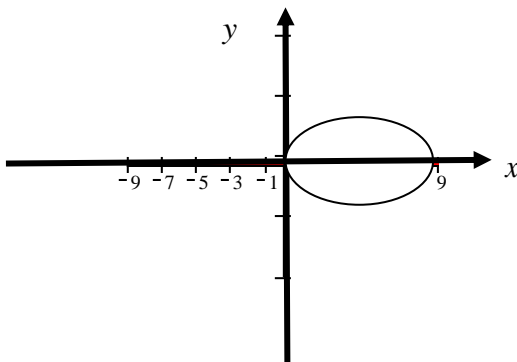
в) Найти площадь петли $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$.

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями.

Имеем: $x = 0$ при $t = 0$; $y = 0$ при $t = 0, t = \pm\sqrt{3}$.

При $0 \leq t \leq \sqrt{3}$, $x \geq 0$. Площадь фигуры находим по формуле (11).

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3) 6t dt = \int_0^{\sqrt{3}} (18t^2 - 6t^4) dt = \left(6t^3 - \frac{6t^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{5}.$$



Задача 4.

а) Вычислить длину дуги кривой $y = Lnx$ на участке от

$$x = \sqrt{3} \text{ до } x = \sqrt{24}.$$

По формуле (13) получим:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t, \quad dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}, \\ x = \sqrt{t^2-1}, \quad 2 \leq t \leq 5 \end{array} \right] = \\ &= \int_2^5 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^5 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = \int_2^5 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = t + \frac{1}{2} Ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^5 = \\ &= 5 + \frac{1}{2} Ln \frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{2} Ln \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{2} Ln 2 \end{aligned}$$

б) Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \sin \varphi)$.

Имеем: $r \geq 0$, $r' = a \cos \varphi$. По формуле (16)

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 + \sin \varphi)^2 + a^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= 2\sqrt{2}a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2\sqrt{2}a \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

$$= 8\sqrt{2}a \sin \frac{\pi}{4} = 8a.$$

Найти площадь одного лепестка „розы”
 $r = a \cos 2\varphi$, $a > 0$.

$$r \geq 0, \quad a \cos 2\varphi \geq 0, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

Задача 5. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $yx = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси ox .

По формуле (17): $V_x = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = -16\pi \frac{1}{x} \bigg|_1^4 = -16\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 12\pi$

Задача 6. Следующие несобственные интегралы исследовать на сходимость и в случае сходимости указать значения интегралов

а) $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 36}$

По определению несобственного интеграла первого рода (6) имеем:

$$\begin{aligned}\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 36} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_7^b \frac{dx}{x^2 - 36} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-6}{x+6} \right| \Big|_7^b = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \frac{b-6}{b+6} \right| - \ln \frac{1}{13} \right) = \frac{1}{12} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{13} \right) = \frac{1}{12} \ln 13,\end{aligned}$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{1}{12} \ln 13$.

$$\text{б) } \int_0^{10} \frac{dx}{x-10}$$

Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=10$, т.

к. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{x-10} = \infty$. Согласно формуле (7) имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{10} \frac{dx}{x-10} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{10-\varepsilon} \frac{dx}{x-10} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |x-10| \Big|_0^{10-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln |10-\varepsilon-10| - \ln 10) = -\infty\end{aligned}$$

Интеграл расходится.

3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Задача 1 Вычислить определенный интеграл

$$1.1 \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$$

$$1.16 \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$1.2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+3\sin x} dx$$

$$1.17 \int_0^1 \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$1.3 \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{3x} dx$$

$$1.4 \int_0^1 \frac{2 \arctg x - x}{1+x^2} dx$$

$$1.5 \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

$$1.6 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{6-5 \cos x} dx$$

$$1.18 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$$

$$1.19 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$$

$$1.20 \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx$$

$$1.21 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1+x^2} dx$$

$$1.7 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$1.8 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$$1.9 \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$1.10 \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$$

$$1.11 \int_1^3 \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$$1.22 \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$$

$$1.23 \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$1.24 \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$$

$$1.25 \int_0^1 \frac{\arctg x + x}{1+x^2} dx$$

$$1.26 \int_0^2 \frac{3x}{1+x^4} dx$$

$$1.12 \int_0^1 \frac{x^3}{3+2x^8} dx$$

$$1.13 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$$

$$1.14 \int_1^e \frac{\sin Lnx}{x} dx$$

$$1.15 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos x}{6-5\sin x} dx$$

$$1.27 \int_1^e \frac{(Lnx)^2}{6x} dx$$

$$1.28 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$$

$$1.29 \int_1^e \frac{1+Lnx}{x} dx$$

$$1.30 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Задача 2 Вычислить определенный интеграл

$$2.1 \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$$

$$2.16 \int_0^{\pi/2} (x^2 + 3) \sin 2x dx$$

$$2.2 \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \sin 4x dx$$

$$2.17 \int_{-1}^0 (x^2 - 2x - 3) \cos 3x dx$$

$$2.3 \int_0^{\pi} (2 - 3x^2) \cos 4x dx$$

$$2.18 \int_{-3}^0 (x^3 + 4x + 3) \sin x dx$$

$$2.4 \int_0^{\pi} (-4x^2 + 6) \cos 5x dx$$

$$2.19 \int_{-1}^0 (5 - 3x^2) \sin 5x dx$$

$$2.5 \int_{-2}^1 (x^2 + 4x + 4) \cos x dx$$

$$2.6 \int_1^2 x \ln x dx$$

$$2.7 \int_0^1 (x+1) \ln(x+1) dx$$

$$2.8 \int_0^2 (x+1)^2 \ln(x+1) dx$$

$$2.9 \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$$

$$2.10 \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

$$2.11 \int_{-2}^0 (x^2 + 2x) e^{3x} dx$$

$$2.12 \int_1^2 (-2x^2 - 5x) e^{-2x} dx$$

$$2.13 \int_0^e (3x^2 - 2x) e^{4x} dx$$

$$2.14 \int_{-1}^0 (x^2 + 2) e^{-3x} dx$$

$$2.20 \int_{-1}^2 (6x - x^2) \sin 6x dx$$

$$2.21 \int_0^1 \arccos x dx$$

$$2.22 \int_0^1 \arcsin x dx$$

$$2.23 \int_0^3 \arctg \sqrt{x} dx$$

$$2.24 \int_0^1 x \arctg x dx$$

$$2.25 \int_0^1 \arccos x dx$$

$$2.26 \int_{-1}^4 (2 - 3x^2) \cos 3x dx$$

$$2.27 \int_0^1 (x^2 + 6) \sin 2x dx$$

$$2.28 \int_1^3 (2 - x^2) e^{4x} dx$$

$$2.29 \int_4^5 (x-3) \ln(x-3) dx$$

$$2.15 \int_{-2}^{-1} (2-3x^2)e^{3x} dx$$

$$2.30 \int_0^1 x \arcsin 2x dx$$

Задача 3 Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями. Выполнить чертеж.

$$3.1 \text{ а) } y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2, x = 3; \quad 3.16 \text{ а) } y = 4 - x^2, y = 0;$$

$$\text{б) } r = 2 \cos \phi, r = \cos \phi;$$

$$\text{б) } r = \cos \phi, r = 4 \cos \phi;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$3.2 \quad \text{а) } y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x;$$

$$3.17 \quad \text{а) }$$

$$x = (y - 2)^2, y = 4x - 8;$$

$$\text{б) } r = \sin 3\phi;$$

$$\text{б) } r = 2 \sin \phi, r = 4 \sin \phi;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t. \end{cases}$$

$$3.3 \text{ а) } xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0; \quad 3.18 \text{ а) } x = 4 - y^2, x = 0;$$

$$\text{б) } r = \sin \phi, r = 2 \sin \phi;$$

$$\text{б) } r = 3 \cos \phi, r = 2 \cos \phi;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, x = 1, x \geq 1, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$3.4 \text{ а) } y = x^2, y = 2 - x^2;$$

$$3.19 \text{ а) }$$

$$x = (y - 2)^2, y = 4x - 8;$$

$$\text{б) } r = 2 \cos \phi, r = 3 \cos \phi;$$

$$\text{б) } r = 2 \cos \phi, r = 2;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = t - \sin t, 0 < x < 2\pi \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$3.5a) y = \operatorname{Ln} x, x = e, y = 0; \quad 3.20 a) y = \frac{2}{x}, y = x, y = \frac{x}{2};$$

$$\text{б)} r = \sin \phi, r = \cos \phi;$$

$$\text{б)} r = 1, r = 1 - \sin \phi;$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = t^2 + 1, \text{ нетля,} \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

$$3.6a) y = x^2 + 4x, y = x + 4; \quad 3.21 a) y^2 = 2x + 1, y = x - 1;$$

$$\text{б)} r = \cos 2\phi;$$

$$\text{б)} r = 3(1 + \sin \phi), -\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq 0;$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, x = 1, x \geq 1 \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$3.7a) y = 6x - x^2, y = 0; \quad 3.22 a) y = -x^3, y = -9x;$$

$$\text{б)} r = 5 \cos \phi;$$

$$\text{б)} r = 3 \sin \phi, r = \sqrt{3} \cos \phi;$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = t^2 - 1, \text{ нетля,} \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$3.8a) y = 4x + x^2 + 5, x = 0 \quad 3.23 a) y = \sin x, y = 2 \sin x,$$

$$y = 0, y = 1;$$

$$x = 0, x = \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{б)} r = \sqrt{3} \sin \phi;$$

$$\text{б)} r = 6(1 - \sin \phi);$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, x = 1, x \geq 1 \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t. \end{cases}$$

$$3.9a) y = 4x - 8, y = (x - 2)^3; \quad 3.24 a) y = \sin x, y = 2 \sin x,$$

$$\text{б)} r = \cos 2\phi;$$

$$\text{б)} r = 3(1 + \sin \phi);$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t. \end{cases}$$

$$3.10a) y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x; \quad 3.25 a) y^2 = 2x + 1, y = x - 1;$$

$$б) r = 2(1 - \cos \phi);$$

$$б) r = 3 \sin 3\phi;$$

$$в) \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, x = 1, x \geq 1 \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = 3t^2, \text{ петля,} \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$3.11a) y = 6x - x^2, y = 0; \quad 3.26 a) y = -x^3, y = -9x,;$$

$$б) r = 4(1 + \cos \phi);$$

$$б) r = 4(1 - \sin \phi);$$

$$в) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), y = 2, y \geq 2. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 6 \sin t. \end{cases}$$

$$3.12a) y = 6x - x^2 - 8, y = 0 \quad 3.27 a) y = 8x + x^2 - 12, x = 0$$

$$б) r = \cos 3\phi;$$

$$б) r = 1 - \sin \phi, r = 1;$$

$$в) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, y = 4, y \geq 4. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = t^2, \text{ петля,} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

$$3.13a) y = (x - 2)^2,$$

$$x = 4y - 8,$$

$$б) r = 2(1 - \cos \phi), r = 2;$$

$$3.28 a) y = \cos x, y = 0,$$

$$y = 0, y = -3$$

$$б) r = 2 \cos \phi, r = \sin \phi;$$

$$в) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, y = 3, y \geq 3. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = t^2 + 1, \text{ петля,} \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$$

$$3.14a) y = x^2 + 4x, y = x + 4; \quad 3.29 a) y^2 = 2x + 1, y = x - 1;$$

$$б) r = \cos 2\phi;$$

$$б) r = 1, r = 1 - \sin \phi;$$

$$в) \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, x = 1, x \geq 1 \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$3.15a) xy = 8, y = 8x^3, y = 27; \quad 3.30 a) y = x^3, y = x^2, \\ x = -2, x = 1,$$

$$\text{б)} \quad r = 2 \cos \phi, \quad r = 4;$$

$$\text{б)} \quad r = 2(1 - \cos \phi), \quad r = 2;$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

Задача 4. Вычислить длины дуг кривых

$$4.1 \quad y = 1 - \ln \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \quad 4.16 \quad y = \ln(x^2 - 1), \quad x \in [2, 3]$$

$$4.2 \quad r = 2(1 - \cos \phi); \quad 4.17 \quad y = \ln \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$4.3 \quad y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad 4.18 \quad \begin{cases} y = e^t \cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$4.4 \quad y = 2x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 11, \quad 4.19 \quad y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$4.5 \quad y = \arcsin e^x, \quad 4.20 \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3,$$

$$x \in [-\ln 7, -\ln 2]$$

$$4.6 \quad y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, \quad 0 \leq x \leq 9, \quad 4.21 \quad y = 4 - \frac{x^2}{2}, \quad y \geq 0,$$

$$4.7 \quad y^2 = 9 - x, \quad y = -3, \quad y = 0, \quad 4.22 \quad y = \sqrt{x-1}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

$$4.8 \quad y = \ln(1 - x^2), \quad x \in [0, \frac{3}{4}] \quad 4.23 \quad y = 5e^{\frac{5}{12}\phi}, \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$4.9 \quad y = \ln \frac{e}{\cos x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$4.24 \quad y = \ln 7 - \ln x, \\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$$

$$4.10 \quad y = 1 - \operatorname{Ln} \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$4.25 \quad y = \operatorname{Ln} \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$4.11 \quad y = 2x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 11,$$

$$4.26 \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{\operatorname{Ln} x}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3,$$

$$4.12 \quad \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, t \in [0, \pi] \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$4.27 \quad \begin{cases} x = t - \sin t, t \in [0, 2\pi] \\ y = 1 - \cos t, y = 0. \end{cases}$$

$$4.13 \quad y = \operatorname{Ln} \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

4.28

$$y^2 = 9 - x, \quad y = -3, \quad y = 0,$$

$$4.14 \quad y = \operatorname{Ln}(1 - x^2), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$4.29 \quad y = 4 - \frac{x^2}{2}, \quad y \geq 0,$$

$$4.15 \quad y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$4.30 \quad y = \sqrt{x-1}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

Задача 5. Найти объем тела, полученного вращением указанных линий. Выполнить чертеж.

$$5.1 \quad xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0 \quad (ox);$$

$$5.2 \quad (y-3)^2 + 3x = 0, \quad x = -3 \quad (ox);$$

$$5.3 \quad y^2 = 16 - x, \quad x = 0 \quad (oy);$$

$$5.4 \quad y = x^3, \quad x = 0 \quad y = 8, \quad (oy);$$

$$5.5 \quad y^2 = 4 - x, \quad x = 0 \quad (oy);$$

$$5.6 \quad y = x^2, \quad y = 4 \quad (oy);$$

$$5.7 \quad y = x^3, \quad y = x^2 \quad (oy);$$

$$5.8 \quad y = 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (ox);$$

$$5.9 \quad y^2 = 6x, \quad x = 3, \quad x = 5 \quad (ox);$$

$$5.10 \quad 3x - 4y = 0, \quad 3x - y = 0, \quad y = 3 \quad (ox);$$

$$5.11 \ 2y = 16 - x^2, \ y - 4 = 0, \ y = 0 \ (oy)$$

$$5.12 \ y = 4x + x^2 + 4, \ y = 2 \ (oy)$$

$$5.13 \ y = 2x - x^2, \ y = 0 \ (oy)$$

$$5.14 \ 2y = x^2, \ 2y + 2x - 3 = 0 \ (ox)$$

$$5.15 \ xy = 8, \ x = 2, \ x = 4, \ y = 0 \ (ox);$$

$$5.16 \ y = x^2 - 2x + 1, \ y = 0, \ x - 2 = 0 \ (oy)$$

$$5.17 \ y = x^2 + 1, \ y = x, \ x = 0, \ x = 1 \ (oy)$$

$$5.18 \ y = -x^2 + 5x - 6, \ y = 0 \ (ox)$$

$$5.19 \ y = x(4 - x), \ y = 0 \ (oy)$$

$$5.20 \ y^2 = 4 - x, \ x = 0 \ (oy);$$

$$5.21 \ 2y = x^2, \ y + 2x - 3 = 0 \ (ox)$$

$$5.22 \ y = x^2, \ y = 2x^2, \ x = 1 \ (ox)$$

$$5.23 \ y = x, \ y = 2x, \ x = 2 \ (ox)$$

$$5.24 \ xy = 5, \ x = 1, \ x = 2, \ y = 0 \ (ox);$$

$$5.25 \ y = 2x - x^2, \ y = -x + 2, \ x = 0 \ (ox)$$

$$5.26 \ 3y = 6x + x^2 + 9, \ y = 3 \ (oy)$$

$$5.27 \ y = x^3, \ y = x^2 \ (ox)$$

$$5.28 \ y = x^2 + 1, \ y = 2x, \ x = 0 \ (oy)$$

$$5.29 \ 2y = 4x + x^2 + 3, \ y = 0 \ (oy)$$

$$5.30 \ xy = 5, \ x = 1, \ x = 5, \ y = 0 \ (ox);$$

Задача 6. Следующие несобственные интегралы исследовать на сходимость и в случае сходимости указать значения интегралов.

$$\begin{aligned}
& 6.1a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; 6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}; 6.16 a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2}; 6) \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}; \\
& 6.2 a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}; 6) \int_{-5}^3 \frac{dx}{x + 5}; \quad 6.17 a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}; 6) \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}; \\
& 6.3a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}; 6) \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 16}; \quad 6.18a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; 6) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}; \\
& 6.4a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}; 6) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}; 6.19a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}; 6) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}; \\
& 6.5a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 16}; 6) \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{36 - x^2}}; 6.20 a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}; 6) \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}; \\
& 6.6a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}; 6) \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 16}; \quad 6.21a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 6}; 6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}; \\
& 6.7a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}; 6) \int_0^4 \frac{dx}{x - 4}; \quad 6.22a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6}; 6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \\
& 6.8a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}; 6) \int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}; \quad 6.23a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}; 6) \int_0^9 \frac{dx}{x - 9}; \\
& 6.9a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6}; 6) \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 25}; \quad 6.24a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; 6) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}; \\
& 6.10a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 5}; 6) \int_0^3 \frac{dx}{x - 3}; \quad 6.25a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{16 + x^2}}; 6) \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1};
\end{aligned}$$

$$6.11a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \text{ б) } \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 16}; \quad 6.26a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 7}; \text{ б) } \int_0^5 \frac{dx}{5 - x};$$

$$6.12a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x - 2}; \text{ б) } \int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}; \quad 6.27a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 7}; \text{ б) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}};$$

$$6.13a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 5}; \text{ б) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}; \quad 6.28a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \text{ б) } \int_0^7 \frac{dx}{x - 7};$$

$$6.14a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{16 + x^2}}; \text{ б) } \int_0^9 \frac{dx}{x - 9}; \quad 6.29a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2}; \text{ б) } \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1};$$

$$6.15a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}; \text{ б) } \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4}; \quad 6.30a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \text{ б) } \int_0^4 \frac{dx}{4 - x};$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1: Учеб. Пособие для втузов./Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- 2-е изд.-М.: Наука, 1986г.-464с.
2. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике.- М.: Рольф, 2001.-576с., с илл.