Лекция 3

Криволинейный интеграл 2 рода

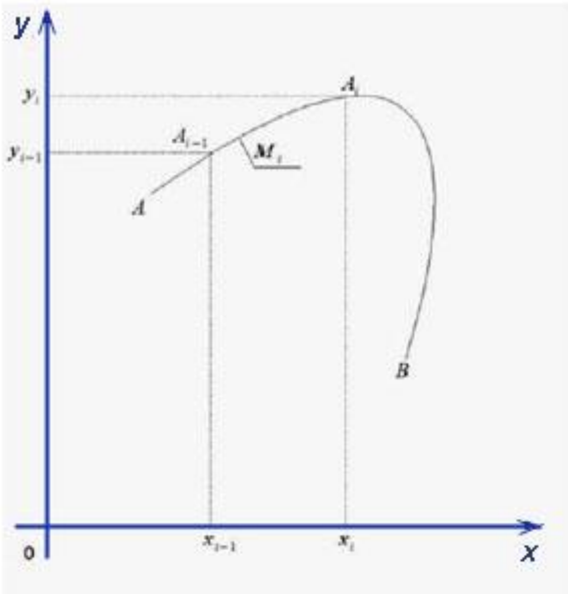
Основные понятия

Пусть на декартовой плоскости оху задана некоторая непрерывная кривая АВ (L) и функция P(x,y), определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую АВ точками A_i в направлении от точки А к точке В на n дуг $A_{i-1}\widehat{A_i}$ с длинами Δl_i. На каждой элементарной дуге $A_{i-1}\widehat{A_i}$ возьмем точку $(\breve{x}_i, \breve{y}_i)$ и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\breve{x}_i, \breve{y}_i)\Delta x_i , \qquad (1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – проекция дуги $A_{i-1}\widehat{A_i}$ на ось ох.

Сумма (1) называется интегральной суммой для функции P(x,y) по переменной x. Если при $\max \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой АВ ни от выбора точек $(\breve{x}_i, \breve{y}_i)$, то его называют криволинейным интегралом 2 рода по координате x от функции P(x,y) по кривой АВ и обозначают $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ или $\int\limits_{L} P(x,y)dx$.



$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\breve{x}_i, \breve{y}_i)\Delta x_i$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции Q(x,y) по координате y.

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\breve{x}_i, \breve{y}_i)\Delta y_i$$

Где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ – проекция дуги $A_{i-1}\overset{\frown}{A_i}$ на ось оу.

Криволинейный интеграл 2 рода общего вида определяется равенством

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy \qquad (2)$$

Теорема (о существовании) Если кривая АВ гладкая, а функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывные на кривой АВ, то криволинейный интеграл 2 рода существует.

Свойства криволинейного интеграла 2 рода

1) При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2 рода изменяет свой знак на противоположный, т.е. $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$

Проекции дуги $A_{i-1}\overset{\frown}{A_i}$ на оси ох и оу меняют знаки с изменением направления

2) Если кривая АВ лежит в плоскости, перпендикулярной оси ох, то

$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0 \quad все \;\; \Delta x_i = 0$

Аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси оу

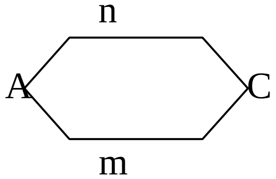
$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = 0 \quad все \;\; \Delta y_i = 0$

3) Если кривая АВ точкой С разбита на две части АС и СВ. то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е. $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$

4) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой $\oint$ не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой)

Доказательство: $\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{CnA}$ С другой стороны $\oint\limits_{CmAnC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC}$

$\Rightarrow \oint\limits_{AmCnA} = \oint\limits_{CnAmC}$



Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

1) Явное представление кривой интегрирования

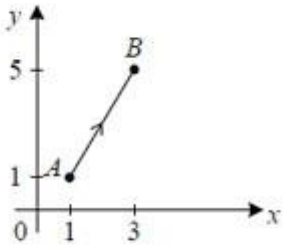
Если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x)$ $x\in[a,b]$. Где функция $\varphi(x)$ и ее производная непрерывны на $[a,b]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b [P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)]dx$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L ydx+xdy,$$

где L - отрезок прямой от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(3;\ 5)$.



Решение. Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{5-1}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}.$$

Из полученного уравнения прямой выразим "игрек":

$$4x-4=2y-2,$$
$$2y=4x-2,$$
$$y=2x-1.$$

Поэтому $dy=2dx$ и теперь можем вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_L ydx+xdy=\int_1^3\left(\left(2x-1\right)dx+x\bullet 2dx\right)=$$
$$=\int_1^3\left(4x-1\right)dx=\left(2x^2-x\right)\Big|_1^3=$$
$$=18-3-\left(2-1\right)=14.$$

Замечание. Криволинейные интегралы 1 и 2 рода связаны соотношением

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$$

где $\alpha, \beta -$ углы между касательно к кривой AB в т. M(x,y) с осями координат ох и оу соответственно.

2) Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть в пространстве дана кривая

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \text{ где } t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Тогда

$$dx = x'_t\,dt,\ dy = y'_t\,dt,\ dz = z'_t\,dt,$$

а в подынтегральные функции подставим

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) -$$

выражения этих функций через параметр t. Получаем формулу для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) \bullet x'_t +$$

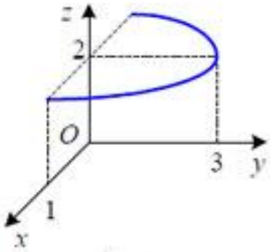
$$+ Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) \bullet y'_t +$$

$$+ R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \bullet z'_t \Big) dt.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L ydx + xzdy + \left(x^3 - 3y\right)dz$$, если L - часть эллипса

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 2 \end{cases}$$ отвечающая условию $y \ge 0$.



Решение. Данная кривая - часть эллипса, находящаяся в плоскости $z = 2$. Она соответствует значению параметра $0 \le t \le \pi$.

Так как

$$dx = -\sin t dt,\ dy = 3\cos t dt,\ dz = 0$$,

можем представить криволинейный интеграл в виде определённого интеграла и вычислить его:

$$\int_L y dx + xz dy + \left(x^3 - 3y\right) dz =$$

$$= \int_0^\pi \left(3\sin t \bullet (-\sin t) + \right.$$

$$+ \cos t \bullet 2 \bullet 3\cos t +$$

$$\left. + \left(\cos^3 t - 3 \bullet 3\sin t\right) \bullet 0\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-3\sin^2 t + 6\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-3 \bullet \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) + 6 \bullet \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right) dt =$$

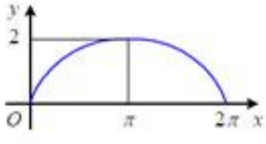
$$= \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos 2t\right) dt = \left(\frac{3}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (2 - y) dx + 3dy$$,

где L - первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$



Решение. Из уравнений кривой следует

$$dx = (1-\cos t)dt, \quad dy = \sin t dt.$$

Так как циклоида образует первую арку при изменении параметра t от 0 до 2π, то получаем соответствующие пределы интегрирования. Решаем данный криволинейный интеграл:

$$\int_L (2-y)dx + 3dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((2-(1-\cos t)) \bullet (1-\cos t)dt + 3\sin t dt \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1+\cos t)(1-\cos t)\,dt + 3\int_0^{2\pi} \sin t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 t\right)dt - 3\cos t \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)dt - 3(1-1) =$$

$$= t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi - \pi = \pi.$$

Формула Остроградского- Грина

Область, ограниченную контуром *L* обозначим *D*. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $P'_y(x,y)$ и $Q'_x(x,y)$ - функции, непрерывные в области *D*, то для вычисления криволинейного интеграла можно воспользоваться формулой Грина:

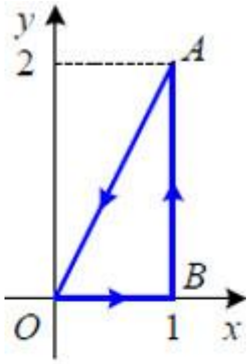
$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру сводится к вычислению двойного интеграла по области *D*.

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L (x+2y)dx + (3x-y)dy,$$

если L - контур треугольника OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2)$ и $B(1;\ 0)$. Направление обхода контура - против часовой стрелки. Задачу решить двумя способами: а) вычислить криволинейные интегралы по каждой стороне треугольника и сложить результаты; б) по формуле Грина.



Решение.

а) Вычислим криволинейные интегралы по каждой стороне треугольника.
Сторона OB находится на оси Ox, поэтому её уравнением будет $y = 0$. Поэтому $dy = 0$ и можем вычислить криволинейный интеграл по стороне OB:

$$\int\limits_{OB} (x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(x + 2\bullet 0 + (3x-0)\bullet 0\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Уравнением стороны BA будет $x = 1$. Поэтому $dx = 0$. Вычисляем криволинейный интеграл по стороне BA:

$$\int\limits_{BA} (x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy =$$
$$= \int\limits_0^2 \left((1+2y)\bullet 0 + 3 - y\right) dy =$$
$$= \int\limits_0^2 (3-y)\,dy = \left.\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2 = 6 - 2 = 4.$$

Уравнение стороны AO составим, пользуясь формулой уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow y = 2x.$$

Таким образом, $dy = 2dx$. Вычисляем криволинейный интеграл по стороне AO:

$$\int_{AO}(x+2y)\,dx+(3x-y)\,dy=$$

$$=\int_1^0\left(x+2\bullet 2x+(3x-2x)\bullet 2\right)dx=$$

$$=\int_1^0 7x\,dx=\left.\frac{7x^2}{2}\right|_1^0=-\frac{7}{2}.$$

Данный криволинейный интеграл будет равен сумме интегралов по краям треугольника:

$$\oint_L(x+2y)\,dx+(3x-y)\,dy=\frac{1}{2}+4-\frac{7}{2}=1.$$

б) Применим формулу Грина. Так как $\frac{\partial Q}{\partial x}=(3x-y)'_x=3$, $\frac{\partial P}{\partial y}=(x+2y)'_y=2$, то $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-2=1$.

У нас есть всё для того, чтобы вычислить данный интеграл по замкнутому контуру по формуле Грина:

$$\oint_L(x+2y)\,dx+(3x-y)\,dy=$$

$$=\iint_{\Delta OAB}dxdy=\frac{1\bullet 2}{2}=1.$$

Условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования

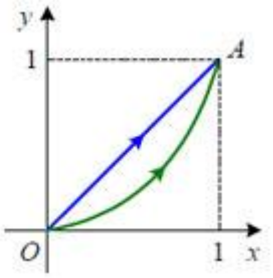
Для того что бы криволинейный интеграл $\int_{AB}Pdx+Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции P(x,y), Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L\left(6x^2+y\right)dx+(x-2y)\,dy$, если

а) L - отрезок прямой OA, где $O(0;\,0)$, $A(1;\,-1)$;

б) L - дуга параболы $y=x^2$ от $O(0;\,0)$ до $A(1;\,-1)$.



Решение.

а) Вычислим криволинейный интеграл по отрезку прямой (на рисунке - синяя). Напишем уравнение прямой и выразим "игрек" через "икс":

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{1-0}\Rightarrow y=x$$
.

Получаем $dy = dx$. Решаем данный криволинейный интеграл:

$$\int_L \left(6x^2+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy=$$
$$=\int_0^1 \left(6x^2+x+x-2x\right)dx=6\int_0^1 x^2dx=$$
$$=6\bullet\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=2.$$

б) если L - дуга параболы $y = x^2$, получим $dy = 2xdx$. Вычисляем интеграл:

$$\int_L \left(6x^2+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy=$$
$$=\int_0^1 \left(6x^2+x^2+\left(x-2x^2\right)\bullet 2x\right)dx=$$
$$=\int_0^1 \left(9x^2-4x^3\right)dx=\left(9\bullet\frac{x^3}{3}-4\bullet\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=$$
$$=3-1=2.$$

Следствие. Если подынтегральное выражение $Pdx+Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования замкнутый контур, то $\oint\limits_L Pdx+Qdy=0$