Лекция 17

Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Пусть требуется найти частное решение ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$.

Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть $y(t) \to Y(p)$, $f(t) \to F(p)$.

По теореме о дифференцировании оригинала:

$$y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - c_0$$

$$y''(t) \to p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - pc_0 - c_1.$$

Перейдем к операторному уравнению:

$$p^2 Y(p) - pc_0 - c_1 + a_1 pY(p) - a_1 c_0 + a_2 Y(p) = F(p).$$

Выразим $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) + pc_0 + a_1 c_0 + c_1}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Получили **операторное решение** уравнения.

Частное решение дифференциального уравнения $y(t)$ (решение задачи Коши) получаем, находя оригинал $y(t)$, соответствующий изображению $Y(p)$. Если изображение $Y(p)$ - правильная рациональная дробь, то оригинал $y(t)$ можно найти, если представить эту дробь в виде суммы простейших рациональных дробей и, используя свойство линейности и таблицу оригиналов и изображений, найти оригинал (этот способ рассмотрен выше). Другой способ нахождения оригинала – с помощью теоремы разложения.

Теорема разложения

Если изображение $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ - дробно-рациональная функция от p; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - простые или кратные полюсы функции $F(p)$, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, находится по формуле:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \to \sum_{k=1}^{n} Res\left(F(p_k) \cdot e^{p_k t}\right) = f(t).$$

Сумма вычетов берется по всем полюсам функции.

Пример

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y'' - 4y' + 4y = 2sh\,t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

От оригиналов переходим к изображениям с учетом начальных условий:

$$y(t)\to Y(p),$$
$$y'(t)\to pY(p)-y(0)=pY(p),$$
$$y''(t)\to p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p),$$
$$sh\,t\to \frac{1}{p^2-1}.$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^2Y(p)-4pY(p)+4Y(p)=\frac{2}{p^2-1}.$$

Выразим $Y(p)$: $\quad Y(p)\left(p^2-4p+4\right)=\frac{2}{p^2-1}$,

$$Y(p)=\frac{2}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}.$$

Рассмотрим два способа нахождения оригинала.

I. Изображение $Y(p)$ - правильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{2}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{(p-2)^2}.$$

Найдем значения коэффициентов:

$A=1, B=-\frac{1}{9}, C=-\frac{8}{9}, D=\frac{2}{3}$. Тогда:

$$\frac{2}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{9}\frac{1}{p+1}-\frac{8}{9}\frac{1}{p-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Находим оригинал:

$$\frac{1}{p-1}-\frac{1}{9}\frac{1}{p+1}-\frac{8}{9}\frac{1}{p-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(p-2)^2}\to e^t-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{8}{9}e^{2t}+\frac{2}{3}te^{2t}.$$

Ответ: $y(t)=e^t-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{8}{9}e^{2t}+\frac{2}{3}te^{2t}$.

II. Воспользуемся теоремой разложения для нахождения оригинала. Для функции $Y(p)$ точки: $p_1=-1, p_2=1$ - простые полюсы, $p_3=2$ - полюс второго порядка. Вычислим вычеты функции $Y(p)e^{pt}$ в полюсах:

$$\underset{p=-1}{res}\,Y(p)e^{pt}=\lim_{p\to-1}\left[\frac{2e^{pt}}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}(p+1)\right]=-\frac{1}{9}e^{-t};$$

$$\underset{p=1}{res}\,Y(p)e^{pt}=\lim_{p\to1}\left[\frac{2e^{pt}}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}(p-1)\right]=e^{t};$$

$$\underset{p=2}{res}\,Y(p)e^{pt}=\lim_{p\to2}\left[\frac{2e^{pt}}{(p-1)(p+1)(p-2)^2}(p-2)^2\right]'=\lim_{p\to2}\left(\frac{2e^{pt}}{p^2-1}\right)'=$$

$$=2\lim_{p\to 2}\frac{te^{pt}\left(p^2-1\right)-e^{pt}2p}{\left(p^2-1\right)^2}=\frac{2}{3}te^{2t}-\frac{8}{9}e^{2t}.$$

Ответ: $y(t)=-\frac{1}{9}e^{-t}+e^{t}+\frac{2}{3}te^{2t}-\frac{8}{9}e^{2t}$.

Решение задачи Коши для системы линейных уравнений

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами проводится по той же схеме, что и решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=5x-y, & x(0)=0 \\ y'=6x+y. & y(0)=1 \end{cases}$$

$x(t)\to X(p),\qquad x'(t)\to pX(p)-x(0)=pX(p);$

$y(t)\to Y(p),\qquad y(t)\to pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} pX(p)=5X(p)-Y(p), \\ pY(p)-1=6X(p)+Y(p). \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)(p-5)+Y(p)=0, \\ -6X(p)+Y(p)(p-1)=1. \end{cases}$$

Эта система линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными $X(p), Y(p)$. Решим систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-5 & 1 \\ -6 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-6p+11;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p-5 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}=p-5.$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{p^2-6p+11}=\frac{-1}{(p^2-6p+9)+2}=$$

$$=\frac{-1}{(p-3)^2+2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+2};$$

$$x(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3t}\sin\sqrt{2}t.$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p-5}{p^2-6p+11}=\frac{p-5}{(p^2-6p+9)+2}=$$

$$=\frac{(p-3)-2}{(p-3)^2+2}=\frac{p-3}{(p-3)^2+2}-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+2};$$

$$y(t)=e^{3t}\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}e^{3t}\sin\sqrt{2}t.$$

Ответ:

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{3t} \sin\sqrt{2}t; \; y(t) = e^{3t} \cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}e^{3t} \sin\sqrt{2}t.$$