Приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры (геометрический смысл определенного интеграла)

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу - отрезком $[a;b]$ оси ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Если $f(x) \le 0$ при , $x \in [a;b]$то $S = -\int_a^b f(x)dx.$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (2)$$

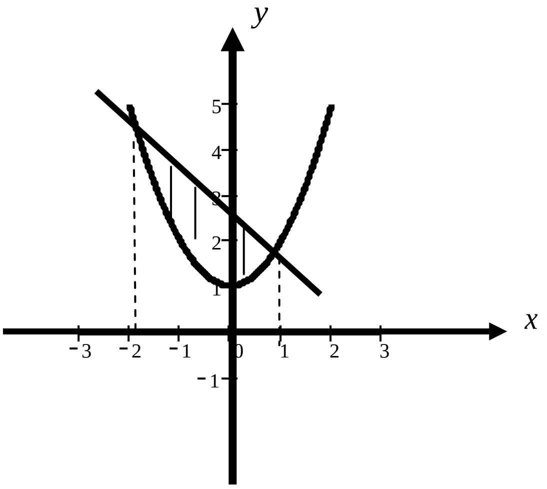
Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = g(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c;d]$оси оу, то площадь этой трапеции вычисляется по формуле $S = \int_c^d g(y)dy.$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y + x = 3$. Выполнить чертеж.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1; \\ y + x = 3. \end{cases}$ Решая систему, получим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Искомая площадь по формуле (1) равна:

$$S = \int_{-2}^{1} ((3 - x) - (x^2 + 1))dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - (\frac{8}{3} - 2 - 4) = 4{,}5.$$



Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной **параметрическими уравнениями** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} y(t) \geq 0,\ t \in [t_1; t_2],$, прямыми $x = a$ и $x = b,$ и отрезком $[a; b]$ оси ох, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt, \qquad (3)$$

где $t_1,\ t_2$ определяются из равенств $a = x(t_1),\ b = x(t_2).$

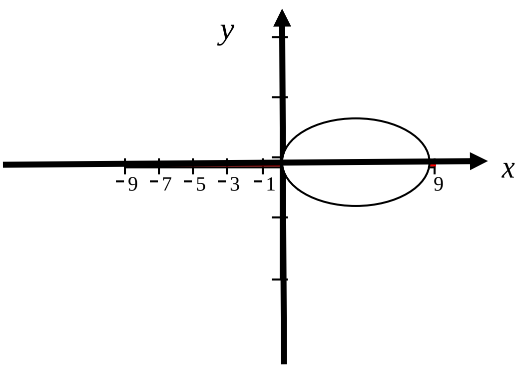
Пример.

Найти площадь петли $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$.

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями. Имеем: $x = 0$ при $t = 0;\ y = 0$ при $t = 0,\ t = \pm\sqrt{3}.$

При $0 \leq t \leq \sqrt{3},\ x \geq 0.$ Площадь фигуры находим по формуле (3).

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3) 6t dt = \int_0^{\sqrt{3}} (18t^2 - 6t^4) dt = (6t^3 - \frac{6t^5}{5})\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{5}.$$



Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в **полярных координатах** уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta\ \ (\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi, \qquad (4)$$

Пример.

Вычислить площадь, ограниченную линиями $r = 2\sin\phi$ и $r = 2\sqrt{3}\cos\phi$.

Для построения чертежа преобразуем уравнения кривых из полярных координат в декартовые.

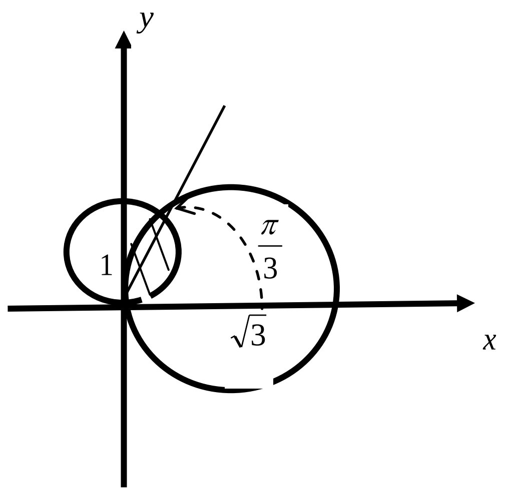
$$r = 2\sin\phi \qquad\qquad r = 2\sqrt{3}\cos\phi$$

$$r^2 = 2r\sin\varphi \qquad\qquad r^2 = 2\sqrt{3}r\cos\phi$$

$$x^2 + y^2 = 2y \qquad\qquad x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \qquad\qquad x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = 3$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad\qquad (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$$



Найдем точки пересечения окружностей.

$$\begin{cases} r = 2\sin\phi, \\ r = 2\sqrt{3}\cos\phi, \end{cases} \qquad 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}tg\varphi, \quad tg\varphi = \sqrt{3},\ \ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

По формуле (4) получим:

$$S=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\sin^2\phi d\phi+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}12\cos^2\phi d\phi\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sin^2\phi d\phi+3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\phi d\phi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\phi)d\phi+3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\phi)d\phi=(\phi-\frac{1}{2}\sin 2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+$$

$$+3(\phi+\frac{1}{2}\sin 2\phi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}-\pi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$$

2. Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$. На кривой выбраны точки A(a; c), B(b; d). Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad (5)$$

$$l=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}dy \qquad (6)$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y=Lnx$ на участке от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{24}$.

По формуле (5) получим:

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{24}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{1+x^2}=t, & dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}, \\ x=\sqrt{t^2-1}, & 2\le t\le 5\end{bmatrix}=$$

$$=\int_2^5\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^5\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int_2^5(1+\frac{1}{t^2-1})dt=t+\frac{1}{2}Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^5=$$

$$=5+\frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}-2-\frac{1}{2}Ln\frac{1}{3}=3+\frac{1}{2}Ln2$$

Если кривая задана **параметрическими уравнениями**

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1; t_2]$, то длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt \qquad (7)$$

Пример.

Найти длину кривой $\begin{cases} y = e^t \cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x = e^t \sin t. \end{cases}$

$$x' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$y' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\cos t + \sin t)$$

$$(x')^2 + (y')^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t) =$$

$$= e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t) = 2e^{2t}$$

$$l = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} dt = \sqrt{2}\, \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\pi} - 1)$$

Если кривая задана уравнением в **полярних координатах** $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \qquad (8)$$

Пример.

Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \sin\varphi)$.

Имеем: $r \ge 0$, $r' = a\cos\varphi$. По формуле (8)

$$L = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 + \sin\varphi)^2 + a^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\varphi+2\sin\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1+\sin\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{\phi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})d\varphi = 2\sqrt{2}a(2\sin\frac{\varphi}{2}-2\cos\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8\sqrt{2}a\sin\frac{\pi}{4} = 8a.$$

3. Объем тела вращения

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx \qquad (9)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$. и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d$, то объем тела вращения равен

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy \qquad (10)$$

Пример.

Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $yx = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси ox.

По формуле (9) : $V_x = \pi\int_1^4\frac{16}{x^2}dx = -16\pi\frac{1}{x}\Big|_1^4 = -16\pi(\frac{1}{4}-1) = 12\pi$