Лекция 1.

1. МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1.1 Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольна таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы.*

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы А имеет два индекса: i - номер строки и j– номер столбца.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной.*

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют *матрицей* n*–го порядка.*

Элементы, стоящие по диагонали , идущей из верхнего левого угла, *образуют главную диагональ.*

Матрица (квадратная), у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называют *диагональной.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевой матрицей заданного размера, называется матрица, все элементы которой равны нулю. Обозначается O .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется *треугольной*. Если все элементы , расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{31}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица размера $1\times n$ называется *матрицей строкой* $A_{1\times n}=(a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n})$.

Матрица размера $m\times 1$, называется *матрицей столбцом* $A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Матрица размера, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. есть 2. $A=(2)=2$

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы А, а столбцы – строками матрицы А.
Например

$$A=\begin{pmatrix} 1\ 2\ 4\ 5 \\ 0\ 2\ 7\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 2\ 2 \\ 4\ 7 \\ 5\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1. Перестановка местами двух строк (2-х столбцов) матрицы
2. Отбрасывание нулевой строки (столбца)
3. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число , не равное нулю
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы

Две матрицы А и В называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. $A \sim B$

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической.

$$A=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ldots\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ldots 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим пример приведения матрицы к каноническому виду.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&-1&2\\2&-4&2&6&-2\\3&-6&5&7&1\\-4&8&-4&-11&1\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{меняем}\\\text{местами}\\\text{первую и}\\\text{вторую}\\\text{строки}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}2&-4&2&6&-2\\0&0&1&-1&2\\3&-6&5&7&1\\-4&8&-4&-11&1\end{pmatrix}\sim$$

Первый диагональный элемент отличен от нуля.

$$\sim\left\{\begin{matrix}\text{делим}\\\text{на два}\\\text{первую}\\\text{строку}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&3&-1\\0&0&1&-1&2\\3&-6&5&7&1\\-4&8&-4&-11&1\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{прибавляем к третьей строке}\\\text{первую, умноженную на ми-}\\\text{нус 3; прибавляем к четвёр-}\\\text{той строке первую, умножен-}\\\text{ную на 4}\end{matrix}\right\}\sim$$

Первый диагональный элемент стал равным единице

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&3&-1\\0&0&1&-1&2\\0&0&2&-2&4\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{меняем}\\\text{местами}\\\text{второй и}\\\text{третий}\\\text{столбцы}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&3&-1\\0&1&0&-1&2\\0&2&0&-2&4\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim$$

Второй диагональный элемент равен единице.

$$\sim\left\{\begin{matrix}\text{вычитаем из первой}\\\text{строки вторую;}\\\text{прибавляем к третьей}\\\text{строке вторую, умно -}\\\text{женную на минус 2}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&4&-3\\0&1&0&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{меняем}\\\text{местами}\\\text{третью и}\\\text{четвёртую}\\\text{строки}\end{matrix}\right\}\sim$$

Третий диагональный элемент равен нулю

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&4&-3\\0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{меняем}\\\text{местами}\\\text{третий и}\\\text{четвёртый}\\\text{столбцы}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1&0&4&-2&-3\\0&1&-1&0&2\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

Третий диагональный элемент равен единице

$$\sim \left\{\begin{matrix}\text{прибавляем к первой} \\ \text{строке третью, умно -} \\ \text{женную на минус 4;} \\ \text{прибавляем третью} \\ \text{строку ко второй}\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Четвёртый диагональный элемент равен нулю.

1.3. **Действия над матрицами**

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n} = A\cdot k$, такая что $b_{ij} = a_{ij}\cdot k,\quad i=\overline{1,m}\quad j=\overline{1,n}$

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется *противоположной* матрице A.

Произведение $A\cdot 0 = 0$ есть нулевая матрица

2. Сложение матриц.

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C_{m\times n} = A+B$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

3. Вычитание матриц

$$C = A - B = A + (-B) \qquad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Поясним правила сложения матриц и умножения матрицы на число примером.

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 9 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+2\cdot 3 & 6+2\cdot 1 & 9+2\cdot 0 \\ -8+2\cdot 4 & 7+2\cdot 1 & 2+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц

Операция умножения определяется не для всяких двух матриц. Две матрицы можно перемножить только в том случае, если **<u>число столбцов одной матрицы совпадает с числом строк другой.</u>**

В этом случае матрица A называется согласованной с матрицей B.

$$\underset{m\times n}{A} \times \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

Произведением матриц A *и* B называется такая матрица C, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i- ой строки матрицы A на соответствующие элементы j –го столбца матрицы B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

При умножении квадратных матриц одной размерности получается квадратная матрица той же размерности.

Приведём пример умножения матрицы размерности 4×3 на матрицу размерности 3×2, размерность произведения при этом будет 4×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1+0\cdot5 \\ 0\cdot3+3\cdot0+1\cdot2 & 0\cdot0+3\cdot1+1\cdot5 \\ 4\cdot3+1\cdot0+2\cdot2 & 4\cdot0+1\cdot1+2\cdot5 \\ 2\cdot3+1\cdot0+3\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot1+3\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \\ 16 & 11 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

В обратном порядке перемножить эти матрицы нельзя, так как умножение матрицы размерности 3×2 на матрицу размерности 4×3 не определено.

Покажем, что от перемены мест сомножителей, даже если умножение в обратном порядке возможно, результат может измениться.

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, то $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Но $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$.

Как видно, $AB \neq BA$, то есть умножение матриц не обладает свойством *коммутативности*.

Матрицы A *и* B называются *перестановочными или коммутативными*, если $AB = BA$

Свойства.

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A$
4) $A - A = 0$
5) $1 \cdot A = A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$
8) $\lambda(\beta A) = (\lambda\beta)A$
9) $A(BC) = (AB)C$
10) $A(B + C) = AB + AC$
11) $(A + B)^T = A^T + B^T$
12) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

5. Возведение в степень

Целой положительной степенью A^m $(m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц , равных A

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ раз}$$

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Свойства. $A^0 = E$ $\quad A^1 = A$ $\quad A^{m+n} = A^m \cdot A^n$ $\quad (A^m)^n = A^{mn}$

Из равенства $A^m = 0$ еще не следует, что матрица $A = 0$