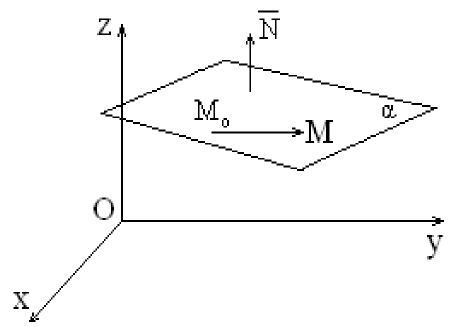
Лекция 10

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Уравнение плоскости в пространстве

1.1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору



Пусть в пространстве oxyz задана плоскость P. Она проходи через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(A, B, C)$

Вектор $\bar{n}(A, B, C)$ называется нормалью к плоскости P.

A, B, C– проекции вектора на оси координат.

Пусть т. $M(x, y, z) \in P$ Тогда

$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overline{M_0M} \perp \bar{n} \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

1.2 Общее уравнение плоскости

Преобразуем уравнение (1)

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Уравнение (2) – общее уравнение плоскости

Частные случаи:

1) $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$– плоскость проходит через начало координат

$C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0 \Rightarrow \bar{n}(A, B, C) \perp oz \Rightarrow P // oz$

2) $B = 0 \quad P // oy$

$A = 0 \quad P // ox$

3) $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$

Плоскость проходит через начало координат параллельно оси oz, т.е. проходит через ось oz

$B = D = 0 \;\Rightarrow\; Ax + Cz = 0$ *через ось оу*

$A = D = 0 \;\Rightarrow\; By + Cz = 0$ *через ось ох*

$$A = B = 0 \quad Cz + D = 0 \quad z = -\frac{D}{C} \quad P//oxy$$

4) $A = C = 0 \quad By + D = 0 \quad y = -\dfrac{D}{B} \quad P//oxz$

$$C = B = 0 \quad Ax + D = 0 \quad x = -\frac{D}{A} \quad P//oyz$$

$$A = B = D = 0 \quad Cz = 0 \quad z = 0 \qquad oxy$$

5) $A = C = D = 0 \quad By = 0 \quad y = 0 \qquad oxz$

$$C = B = D = 0 \quad Ax = 0 \quad x = 0 \qquad oyz$$

1.3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z) \in P$ и составим векторы

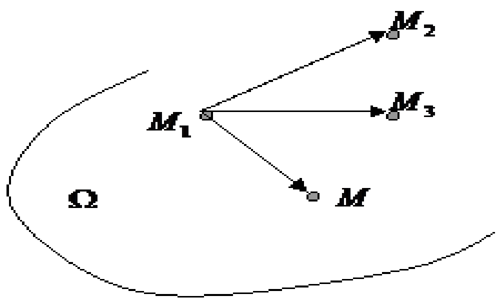
$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \qquad \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Эти векторы лежат на плоскости. Следовательно, они компланарны.

$\overline{M_1M}\,\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$



1.4. Уравнение плоскости в отрезках

$$Ax + By + Cz + D = 0 \;\Big|\div(-D)$$

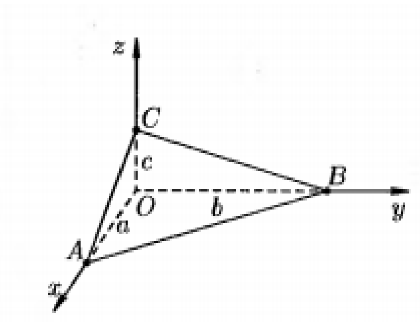
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 \qquad a = -\frac{D}{A} \qquad b = -\frac{D}{B} \qquad c = -\frac{D}{C}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (4)$$

a, b, c–отрезки, отсекаемые плоскостью от осей координат

Еще один вывод формулы, с помощью формулы (3) уравнения плоскости, проходящей через три точки

$A(a,0,0) \quad B(0,b,0) \quad C(0,0,c)$



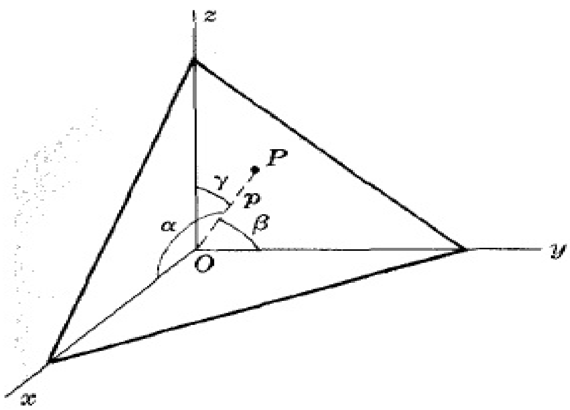
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$bcx - abc + abz + ayc = 0 \;\Big|\div abc$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

1.5 Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости P можно задать n–единичным вектором нормали, опущенного на плоскость из начала координат и длиной p перпендикуляра из (0,0,0) на плоскость.



α, β, γ – углы наклона вектора $\bar{n}$ к осям координат $\bar{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$p = OM_0 \quad Пусть\ M(x, y, z) \in P$

$\overline{OM} = \bar{r} = (x, y, z)$

$Пр_{\bar{n}} r = p \ \ для\ \ всех\ \ точек\ плоскости$

$\bar{r} \cdot \bar{n} = Пр_{\bar{n}} \bar{r} \cdot |\bar{n}| = \left[|\bar{n} = 1| \right] = Пр_{\bar{n}} \bar{r} = p$

$\Rightarrow \ \bar{r} \cdot \bar{n} = p$

$$\bar{r} \cdot \bar{n} - p = 0 \qquad (5)$$

(5)– нормальное уравнение плоскости

В координатной форме $\quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

Если плоскость проходит через начало координат, то

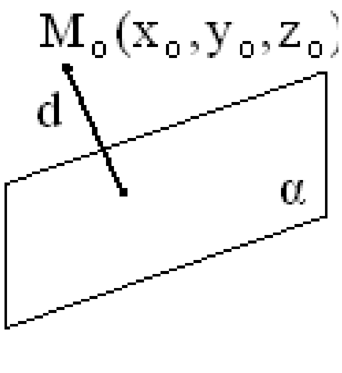
$\bar{r} \cdot \bar{n} = 0 \qquad\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$

Нормирующий множитель $\lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

1.6. Расстояние от точки до плоскости

$P: \quad Ax + By + Cz + D = 0$



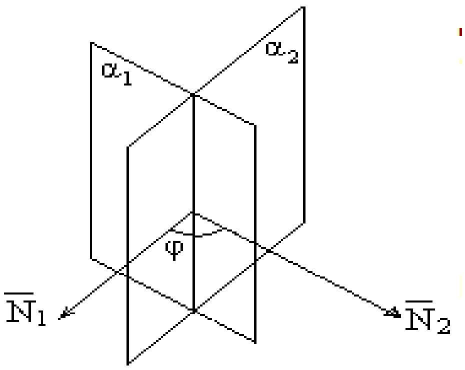
$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

1.7 Угол между двумя плоскостями

$P_1 \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$

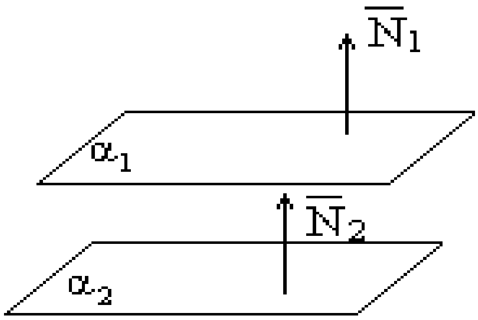
$P_2 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$

Угол между плоскостями равен углу между их векторами нормали



$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

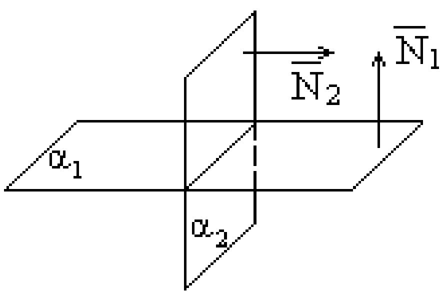
Условие параллельности плоскостей



$P_1 // P_2 \qquad \Rightarrow \overline{n_1} // \overline{n_2} \qquad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Условие перпендикулярности плоскостей

$P_1 \perp P_2 \qquad \Rightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \qquad \Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$



2. Уравнение прямой в пространстве

2.1 Векторное уравнение прямой

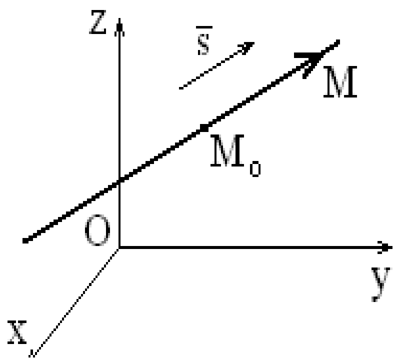
Прямую в пространстве задают с помощью т. M_0 на прямой и вектора $\bar{s}$ параллельного этой прямой .

Вектор $\bar{s}(m, n, p)$ называется направляющим вектором прямой

$\overline{OM_0} = \bar{r_0}(x_0, y_0, z_0)$ $\quad\quad$ $\overline{OM} = \bar{r}(x, y, z)$ $\quad\quad$ $\bar{r} = \bar{r_0} + \overline{M_0M}$

т.к. $\overline{M_0M} \,//\, \bar{s} \quad \Rightarrow \overline{M_0M} = \bar{s}t \quad t -$ *число, параметр*

$$\bar{r} = \bar{r_0} + t\bar{s} \qquad (1)$$



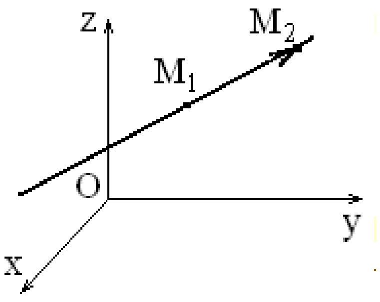
2.2. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \qquad t = \dfrac{x - x_0}{m} \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases} \qquad (2)$$

2.3 Каноническое уравнение прямой

$$\overline{M_0M} \,//\, \bar{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3)$$

2.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $M_1(x_1, y_1, z_1)$

$\overline{M_1M_2}$ *напрвляющий вектор*

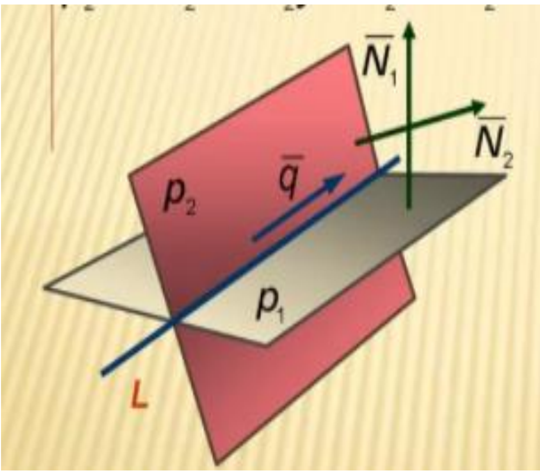
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4)$$

2.5. Задание прямой, как линии пересечения двух плоскостей

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух непараллельных плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, т. е. как множество точек, удовлетворяющих системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Уравнения системы называются также общими уравнениями прямой в пространстве.

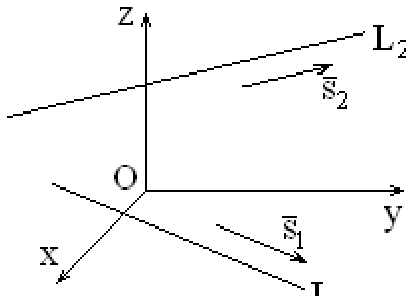


$$\overline{s}\perp\overline{n_1} \qquad \overline{s}\perp\overline{n_2} \qquad \Rightarrow \overline{s}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$$

$$\overline{s}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Координаты точки M_0 на прямой получают из системы придав одной из координат произвоьное значение

2.6 Угол между двумя прямыми



$$L_1 \qquad \frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \qquad \overline{s_1}\,(m_1, n_1, p_1)$$

$$L_2 \qquad \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2} \qquad \overline{s_2}\,(m_2, n_2, p_2)$$

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right|\cdot\left|\overline{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^{\,2}+n_1^{\,2}+p_1^{\,2}}\sqrt{m_2^{\,2}+n_2^{\,2}+p_2^{\,2}}}$$

$$L_1 // L_2 \qquad \Rightarrow \overline{s_1} // \overline{s_2} \qquad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

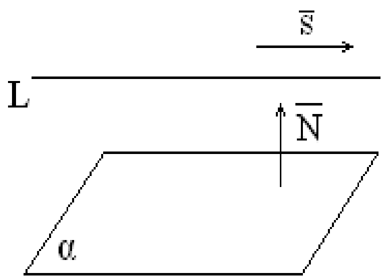
$$L_1 \perp L_2 \qquad \Rightarrow \overline{s_1} \perp \overline{s_2} \qquad \Rightarrow \overline{s_1}\cdot\overline{s_2}=0 \quad m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

3. Угловые соотношения между прямой и плоскостью

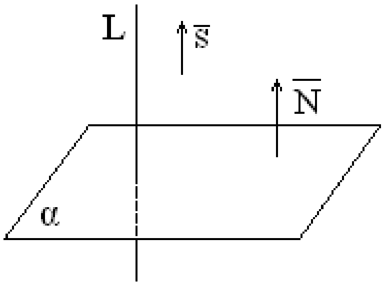
$$L \qquad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad \overline{s}\,(m, n, p)$$

$$P: \quad Ax+By+Cz+D=0 \qquad \overline{n}(A, B, C)$$

$$\sin\varphi=\frac{\overline{s}\cdot\overline{n}}{\left|\overline{s}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}=\frac{Am+Bn+cp}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$$L // P \qquad \Rightarrow \overline{s} \perp \overline{n} \qquad \overline{s}\cdot\overline{n}=0 \quad mA+nB+pC=0$$



$$L \perp P \qquad \Rightarrow \overline{s} \,//\, \overline{n} \qquad \Rightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$