ЛЕКЦИЯ 4.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛОДУ 2 ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Частным случаем ЛОДУ являются ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (1)$$

Где p и q - постоянные.

Для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Пусть $y = e^{kx}$ (k некоторое число) решение уравнения (1). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения y'' и y', y в уравнение (1) получим:

$$y' = ke^{kx} \qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \qquad e^{kx} \neq 0$$

$$k^2 + p \cdot k + q = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* ДУ (1). Для его составления достаточно в уравнении (1) заменить y'' и y', y соответственно на k^2, k и 1.

При решении характеристического уравнения (2) возможны следующие случаи.

Случай 1. Корни k_1 **и** k_2 **действительные и различные** $k_1 \neq k_2 \qquad D = p^2 - 4q > 0$

В этом случае частными решениями уравнения (1) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно зависимы), т.к.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0$$

Следовательно общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Пример.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$

Решение

$k^2 - 5k + 6 = 0$

$D = p^2 - 4q = 25 - 24 = 1 > 0$

$k_1 \neq k_2 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 3$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$

Подставим начальные данные

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 3 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = 3 \ \ c_2 = -1$$

Ответ $y = 3e^{2x} - e^{3x}$

Случай 2. Корни k_1 **и** k_2 **действительные и равные** $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \qquad D = p^2 - 4q = 0$.

В этом случае имеется лишь одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$

Покажем, что наряду с $y_1 = e^{k_1 x}$ решением уравнения (1) будет и функция $y_2 = xe^{k_1 x}$

Подставим функцию в уравнение (1). Имеем

$y_2' = e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}$ $\quad y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x} = 2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}$

$$y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2 = 2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x} + p \cdot (e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}) + q \cdot x e^{k_1 x} =$$

$$= e^{k_1 x}(2k_1 + x k_1^2 + p + p x k_1 + q \cdot x) = e^{k_1 x}(x(k_1^2 + p k_1 + q) + p + 2k_1) =$$

$k_1^2 + p k_1 + q = 0$ *т.к.* k_1 *– корень характеристического уравнения*

$p + 2k_1 = 0$ *т.к. по условию* $k_1 = -\dfrac{p}{2}$

$\Rightarrow y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2 = 0,$ *т.е. функция* $y_2 = x e^{k_1 x}$ *– решение*(1)

Частные решения y_1 *и* y_2 образую фундаментальную систему решений.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = e^{2k_1 x} + x k_1 e^{2k_1 x} - x k_1 e^{2k_1 x} = e^{2k_1 x} \neq 0$$

Следовательно общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$$

$$y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$$

Пример.

$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$

Решение

$k^2 - 6k + 9 = 0$

$D = p^2 - 4q = 36 - 36 = 0$

$k_1 = k_2 = 3$

$y = c_1 e^{3x} + x c_1 e^{3x} \qquad y' = 3c_1 e^{2x} + c_1 e^{3x} + 3x c_1 e^{3x}$

Подставим начальные данные

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = 3c_1 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} \;\; c_2 = -\frac{1}{2}$$

Ответ $y = e^{3x} \dfrac{1}{2}(1 - x)$

Случай 3. Корни k_1 **и** k_2 **комплексные** $k_1 = \alpha + i\beta \;\; k_2 = \alpha - i\beta \quad D = p^2 - 4q < 0$

В этом случае $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \;\; y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$

По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Обозначим $U = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad V = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_1 = U + iV \qquad y_2 = U - iV$

Подставим y_1 в уравнение (1)

$$y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1 = (U + iV)'' + p(U + iV)' + q(U + iV) =$$

$$= U'' + iV'' + pU' + ipV' + qU + iqV =$$

$$= (U'' + pU' + qU) + i(V'' + pV' + qV) = 0$$

Функция слева равна нулю, если

$U'' + pU' + qU = 0$

$V'' + pV' + qV = 0$

$\Rightarrow \quad U \;\; и \; V$ Решения ЛОДУ (1)

Аналогично с y_2

Решения $U \;\; и \; V$ образуют фундаментальную систему решений

Следовательно общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

Пример 1.

$y'' + 9y = 0$

Решение

$k^2 + 9 = 0$

$k_{1,2} = \pm 3i$

$y = c_1 \cos 3x + c_1 \sin 3x$

Пример 2.

$y'' - y' + 6y = 0$

Решение

$k^2 - k + 6 = 0$

$D = 1 - 24 = -23$

$k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{23}i}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{2} i \qquad \alpha = \dfrac{1}{2} \qquad \beta = \dfrac{\sqrt{23}}{2}$

$y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos\dfrac{\sqrt{23}}{2} x + c_1 \sin\dfrac{\sqrt{23}}{2} x\;)$

	Корни характеристического уравнения	Общее решение
1	Корни k_1 и k_2 действительные и различные $k_1 \ne k_2 \qquad D = p^2 - 4q > 0$	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
2	Корни k_1 и k_2 действительные и равные $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} \qquad D = p^2 - 4q = 0$.	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$ $y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$
3	Корни k_1 и k_2 комплексные $k_1 = \alpha + i\beta \;\; k_2 = \alpha - i\beta \qquad D = p^2 - 4q < 0$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$
4	Корни k_1 и k_2 комплексные $k_1 = \pm i\beta$	$y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$