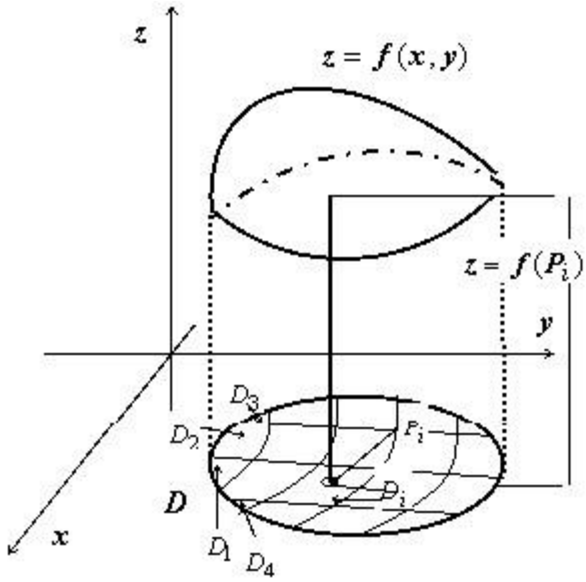
Лекция 1. Кратные интегралы.

1. Двойной интеграл.
1.1.Основные понятия.

Пусть в замкнутой области Д плоскости оху задана непрерывная функция z=f(x,y). Разобьем область Д на n „элементарных областей” D_i $(i=\overline{1,n})$, площади которых обозначим через Δs_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) через d_i. В каждой области D_i выберем произвольную точку $P_i(x_i,y_i)$, умножим значение функции $f(x_i,y_i)$ в этой точке на Δs_i и составим сумму всех таких произведений.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta s_i \qquad (1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции f(x,y) в области D. Каждое слагаемое в сумм (1) вычисляет оббьем прямого цилиндра с основанием D_i и высотой $f(x_i,y_i)$.



Предел интегральной суммы (1) при $\max d_i \to 0\ (n\to\infty)$ называется **двойным интегралом от функции f(x,y) по область D** если он не зависит ни от способа разбиения области Dна части, ни от выбора точек в них

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta s_i \qquad (2)$$

где D- область интегрирования
x и y - переменные интегрирования
dx, dy (или ds)- элемент площади
Геометрический смысл двойного интеграла. Формула (2) вычисляет объем цилиндрического тела от неотрицательной функции f(x,y).

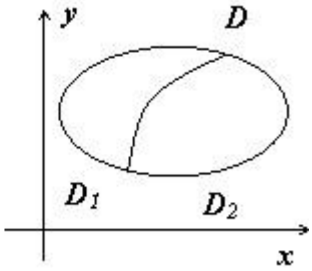
$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

1.2.Основные свойства двойного интеграла

1) $\iint\limits_D c\cdot f(x,y)dxdy = c\cdot\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad c=const$

2) $\iint\limits_D f_1(x,y)\pm f_2(x,y)dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$

3) Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1\bigcup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии их разделяющей, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$



4) Если в области D имеет место неравенство $f(x,y)\geq 0$, то и $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$

Если в области D функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют неравенству $f(x,y)\geq g(x,y)$, то и $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

5)Если $f(x,y)=1$, то $\iint\limits_D ds = s$ т.к. $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i = s$ где площадь области интегрирования D

6) Ели функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то $ms \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq Ms$, где m и M- соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.

7) Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D , площадь которой S, то в этой области существует такая точка (x_0,y_0), что $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot s$

Величину $f(x_0,y_0) = \frac{1}{s}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ называют средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

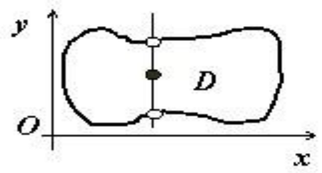
1.3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Область D

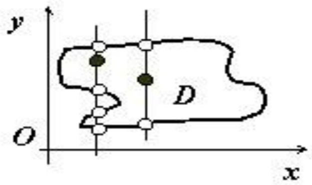
На плоскости Oxy будем называть **простой** { **правильной** } **в направлении оси** Oy простой { правильной } в направлении оси Oy, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D и параллельная оси Oy, пересекает границу D в двух точках.

Аналогично определяется область, **простая** { **правильная** } **в направлении оси** Ox простая { правильная } в направлении оси Ox: любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D и параллельная оси Ox, пересекает границу D в двух точках.

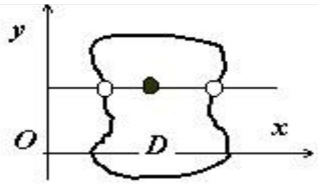
Область, правильную { простую } в направлении обеих осей, будем называть **правильной**.



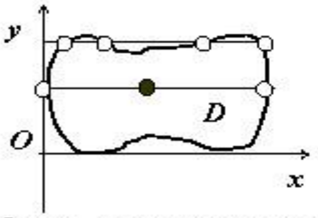
Область, простая в направлении оси ***Oy***.



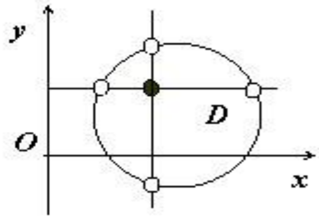
Область, не являющаяся простой в направлении оси ***Oy***.



Область, простая в направлении оси ***Ox***.



Область, не являющаяся простой в направлении оси ***Ox***.

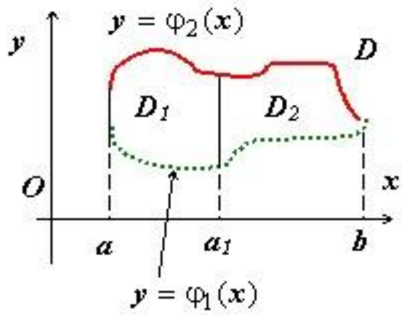


Простая область (в направлении обеих осей).

Если область D правильная относительно оy, двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$

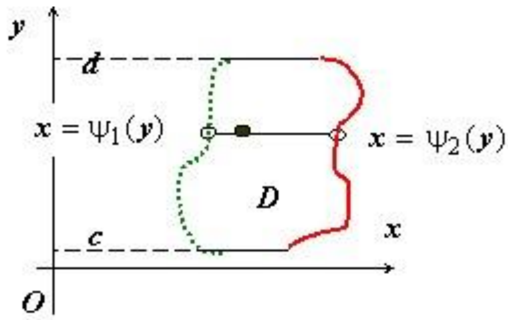
Правая часть формулы (3) **повторный двукратный интеграл** .



Вычисление начинают с внутреннего интеграла $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, считая x постоянным, затем берется внешний интеграл, т.е. результат первого интегрирования интегрируют по x в пределах от a до b.

Если область D является правильной относительно оси ox, то двойной интеграл вычисляется по формуле

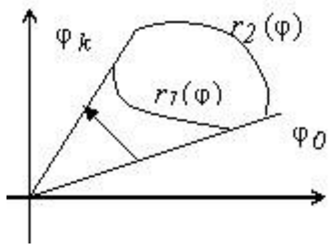
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \qquad (4)$$



1) Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (3), так и по формуле (4)
2) Если область D не является правильной ни по OX ни по OY, то для сведения двойного интеграла к повторному ее следует разбить на части, правильные в направлении оси OX или оси OY
3) Внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние как правило переменные.

   Переход от одной формулы к другой называют **изменением порядка интегрирования.**

1.4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах



$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi \qquad dxdy = rd\varphi dr$

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$, область D есть круг. кольцо или часть.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$$

Если область D содержит начало координат, то

$$\iint\limits_D r \cdot f(r,\varphi)drd\varphi = \iint\limits_D r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} r \cdot f(r,\varphi)dr$$

1.5. Приложения двойного интеграла

1) Объем тела $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$z = f(x,y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху

2) Площадь плоской фигуры $S = \iint\limits_D dxdy$

Если $f(x,y) = 1$. то высота H=1 . Объем такого цилиндра численно равен площади S основания D.

В полярных координатах $S = \iint\limits_D rdrd\varphi$

3) Масса плоской фигуры $m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy$

$\gamma(x,y)$ -переменная плотность плоской пластинки

4) Статистические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры
Статистическим моментом системы материальных точек относительно оси OX называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т.е. на расстояния этих точек от оси OX)

Статистические моменты фигуры D относительно осей OX и OУ

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x,y)dxdy$$

$$S_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x,y)dxdy$$

Центром тяжести плоской фигуры называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: Если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статистический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статистическому моменту всей фигуры относительно той же оси.

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{S_y}{m} \qquad y_c = \frac{S_x}{m}$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^2}\,dx\,dy,$$

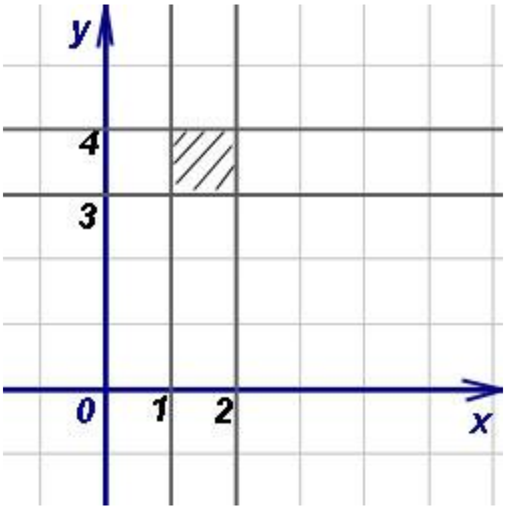
где

$$D=\{(x;\ y)\,|\,1\le x\le 2;\ 3\le y\le 4\}.$$

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_1^2 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x-y)^2}.$$

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

$$\int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2}=\int_3^4 (x-y)^{-2}\,dy=\left.\frac{1}{x-1}\right|_4^4=$$

$$=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}.$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x-4} - \int_1^2 \frac{dx}{x-3} =$$
$$= \left[\ln(x-4) - \ln(x-3) \right] \Big|_1^2 =$$
$$= \left[\ln(2-4) - \ln(2-3) \right] -$$
$$- \left[\ln(1-4) - \ln(1-3) \right] =$$
$$= \left[\ln(-2) - \ln(-1) \right] - \left[\ln(-3) - \ln(-2) \right] =$$
$$= \ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2} \right) = \ln\left(\frac{2}{1} : \frac{3}{2} \right) =$$
$$= \ln\left(\frac{4}{3} \right).$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \left(x^2 + xy + 2y^2 \right) dx\, dy,$$

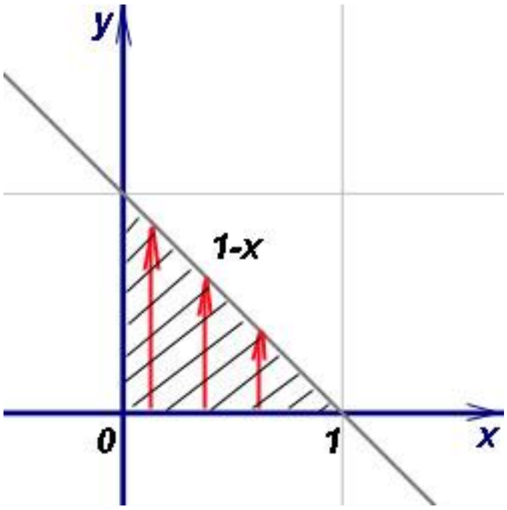
где

$$D = \left\{ (x;\ y) \mid 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x-1 \right\}.$$

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2 + xy + 2y^2 \right) dy.$$

На чертеже строим область интегрирования и видим, что она треугольная:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

$$\int_0^{1-x}\left(x^2+xy+2y^2\right)dy=$$

$$=x^2(1-x)+\frac{1}{2}x(1-x)^2+\frac{2}{3}(1-x)^3.$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого). Сначала представляем этот интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int_0^1 x^2(1-x)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^3dx.$$

Вычисляем первое слагаемое:

$$\int_0^1 x^2(1-x)dx=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Вычисляем второе слагаемое:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\int_2^1\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{8}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Вычисляем третье слагаемое:

$$\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=\int_0^1\left(\frac{2}{3}-2x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{6}x^4\Big|_0^1-x^2\Big|_0^1+\frac{2}{3}x\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Получаем сумму, которая и будет решением данного двойного интеграла:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D dx\,dy,$$

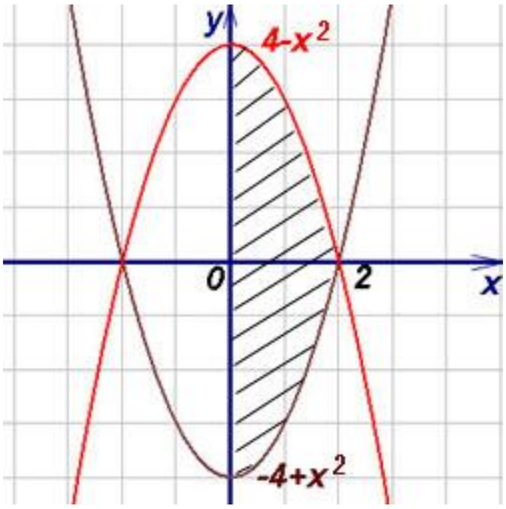
где

$$D=\left\{(x;\ y)\,|\,0\le x\le 2;\ -4+x^2\le y\le 4-x^2\right\}.$$

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_0^2 dx \int_{-4+x^2}^{4-x^2} dy$$.

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

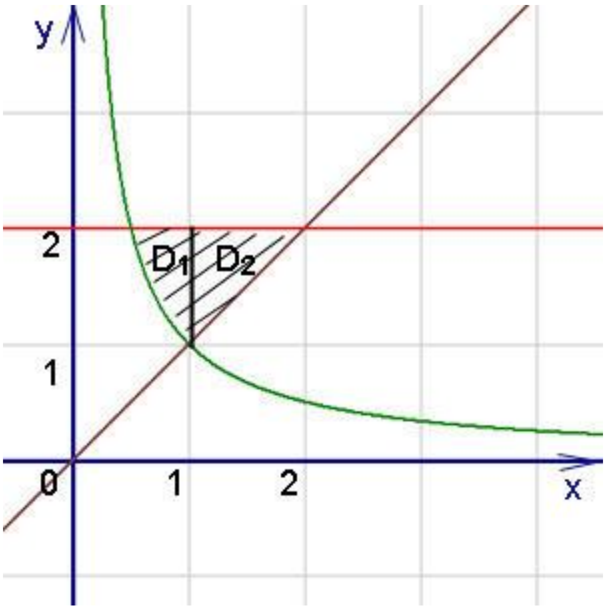
$$\int_{-4+x^2}^{4-x^2} dy = 4 - x^2 - \left(-4 + x^2\right) = 8 - 2x^2$$.

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\int_0^2 \left(8 - 2x^2\right) dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Пример 7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\, dxdy$, область интегрирования которого ограничена линиями $y = x$, $xy = 1$, $y = 2$.



Решение. Область интегрирования является *y*-неправильной, так как её нижнюю границу нельзя задать одной линией $y = y(x)$. Как видно на рисунке выше, нижняя граница складывается из $y = x$ (тёмно-бордовая) и $xy = 1$ (зелёная). Поэтому прямой $x = 1$ (чёрная) можем разбить область интегрирования на две части - D_1 и D_2.

Вычисляется этот двойной интеграл так:

$$\iint_D xy\ dxdy = \iint_{D_1} xy\ dxdy + \iint_{D_2} xy\ dxdy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{2} xydx + \int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2} xydx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{2} dx + \int_{1}^{2} x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x}^{2} +$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x-\frac{1}{2x}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(2x-\frac{x^3}{2}\right)dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(x^2-\frac{1}{8}x^4\right)\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+4-2+\frac{1}{8}=$$

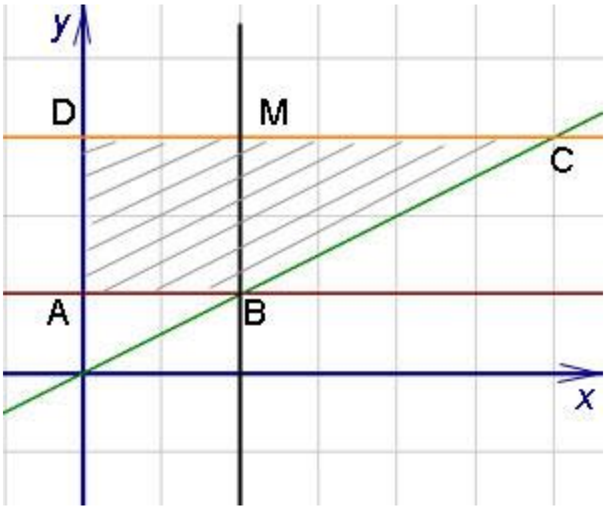
$$=\frac{15}{8}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 9. Сменить порядок интегрирования для повторного интеграла

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx.$$

Решение. Итак, область интегрирования данного повторного интеграла ограничена прямыми $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$, $x = 2y$.

При интегрировании в другом порядке нижняя граница области состоит из двух прямых: AB и BC, которые заданы уравнениями $y = 1$ и $y = x/2$, что видно на рисунке ниже.



Выход из такой неопределённости состоит в разбиении области интегрирования на две части. Делить область интегрирования будет прямая BM. Новые пределы интегрирования вычисляем, находя обратную функцию. Соответственно этому решению повторный интеграл после смены порядка интегрирования будет равным сумме двух интегралов:

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)\,dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y)\,dy.$$

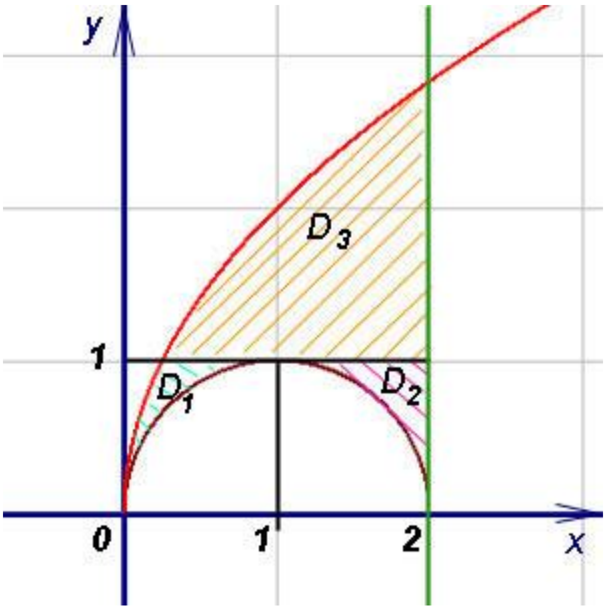
Естественно, таким же будет решение двойного интеграла, который сводится к повторному интегралу, данному в условии этого примера.

Пример 10. Сменить порядок интегрирования для повторного интеграла

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Итак, область интегрирования повторного интеграла ограничена прямыми $x = 0$, $x = 2$ и кривыми $y = \sqrt{2x - x^2}$ и $y = 2\sqrt{x}$.

Как видно на рисунке ниже, прямая, параллельная оси $0x$, будет пересекать нижнюю границу области интегрирования более чем в двух точках.



Поэтому разобьём область интегрирования на три части прямыми, которые на рисунке начерчены чёрным. Новые пределы интегрирования вычисляем, находя обратную функцию. Пределы для трёх новых областей интегрирования будут следующими.

Для D_1:

$$0 \le y \le 1$$

$$\frac{y^2}{4} \le x \le 1 - \sqrt{1 - y^2}$$

Для D_2:

$$0 \le y \le 1$$

$$1 + \sqrt{1 - y^2} \le x \le 2$$

Для D_3:

$$1 \le y \le 2\sqrt{2}$$

$$\frac{y^2}{4} \le x \le 2$$

Соответственно этому решению повторный интеграл после смены порядка интегрирования будет равным сумме трёх интегралов:

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2} f(x,y)\,dx.$$