Севастопольский государственный университет
Институт информационных технологий

Методы и системы искусственного интеллекта

Бондарев Владимир Николаевич

Байесовские сети: независимость и D-разделенность

Вероятность: напоминание

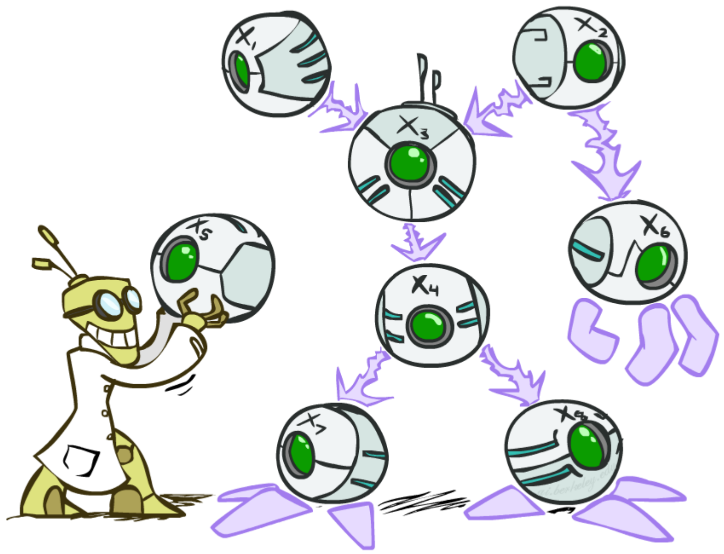
- Условная вероятность $$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$
- Правило произведения $$P(x,y) = P(x|y)P(y)$$
- Цепочное правило $$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \ldots X_n) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1,X_2)\ldots \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}) \end{aligned}$$
- X, Y независимы, е. и т. е.: $\forall x, y : P(x,y) = P(x)P(y)$
- X и Y условно независимы при заданном Z, е. и т. е.:

$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \qquad X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

Семантика сетей Байеса

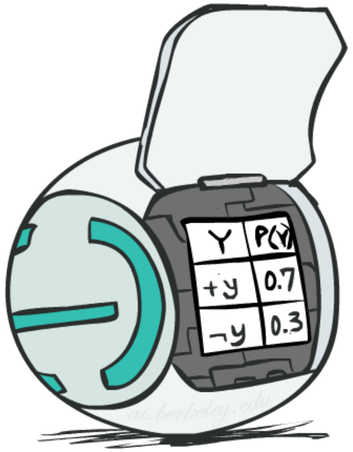
- Направленный ациклический граф, каждая вершина которого соответствует случайной переменной
- Таблица условных вероятностей (CPT) для каждой вершины:
  - коллекция распределений X для каждой комбинации значений родительских вершин

$$P(X|a_1 \ldots a_n)$$



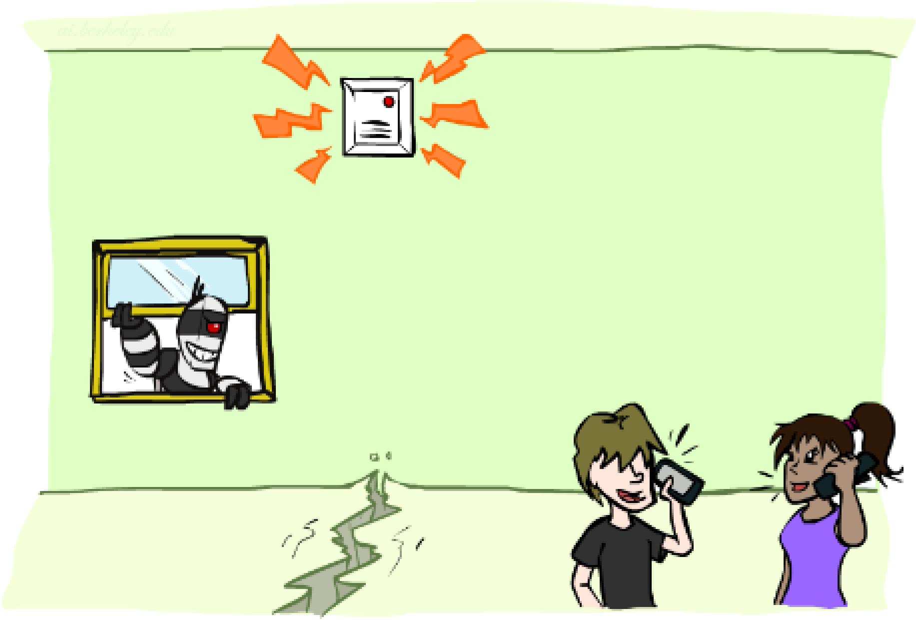
- Сеть Байеса неявно кодирует совместное распределение:
  - как произведение локальных условных распределений;
  - **чтобы узнать, какая вероятность соответствует полному присваиванию в BN, перемножьте все соответствующие условные вероятности** :

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$



Пример: Сеть тревоги

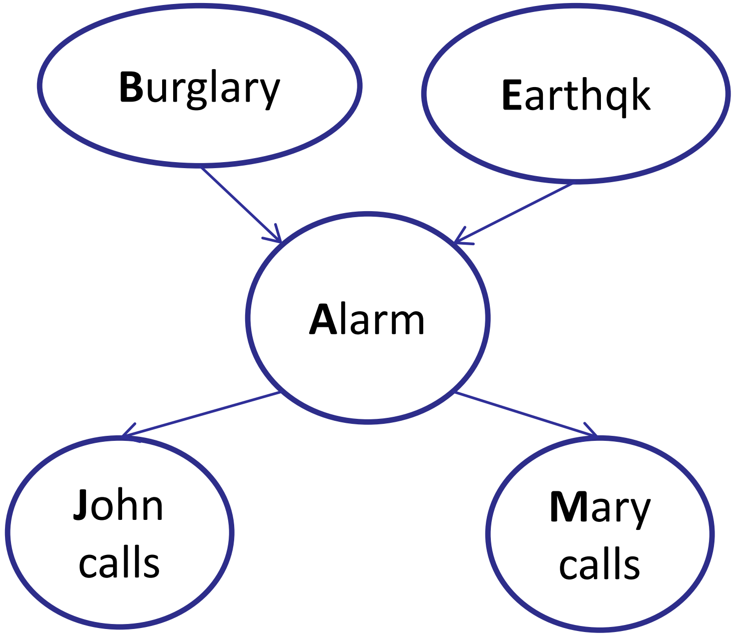
Житель пригорода установил систему тревожной сигнализации для обнаружения взлома. Она иногда также реагирует на небольшие землетрясения. Его соседи, Джон и Мэри, обещали звонить ему на работу, услышав тревожный сигнал. Джон иногда путает тревожный сигнал с телефонным звонком в доме соседа и в этих случаях также звонит. Мэри любит слушать музыку и поэтому иногда вообще пропускает тревожный сигнал. Получив факты о том, кто из соседей звонил или не звонил, необходимо оценить вероятность взлома.

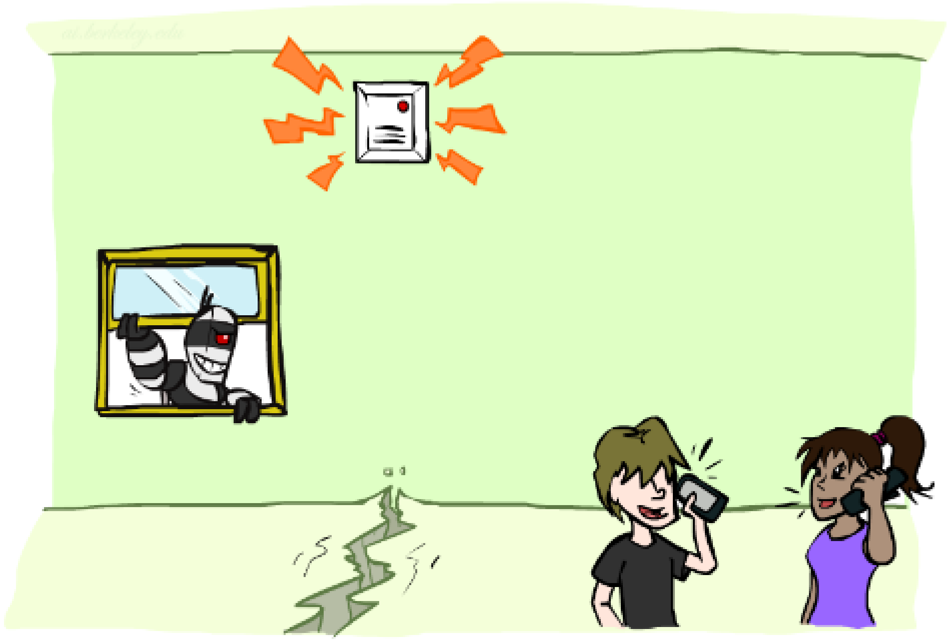


- Переменные
  - B: Ограбление
  - A: Тревога
  - M: Звонок Мэри
  - J: Звонок Джона
  - E: Землетрясение

Пример: Сеть тревоги

- Переменные
  - B: Ограбление
  - A: Тревога
  - M: Звонок Мэри
  - J: Звонок Джона
  - E: Землетрясение!

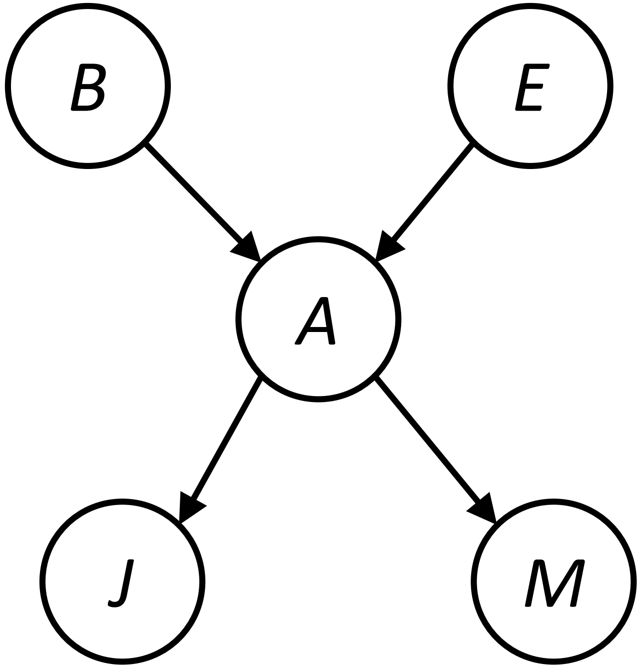




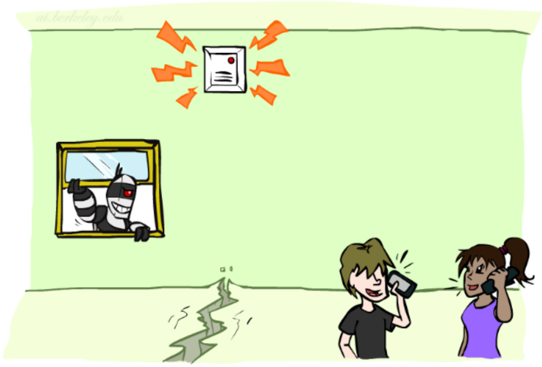
Топология сети показывает, что взлом и землетрясения непосредственно влияют на вероятность появления тревожного сигнала, а звонки Джона и Мэри зависят только от тревожного сигнала. Поэтому сеть подтверждает предположения, что соседи самостоятельно не обнаруживают какие-либо попытки взлома, не замечают незначительных землетрясений и не совещаются друг с другом перед звонками.

Пример: Сеть Тревоги

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

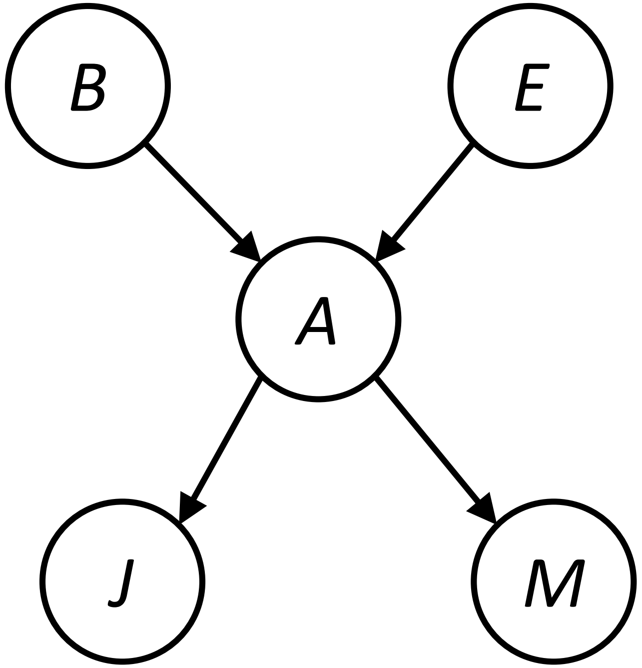
A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

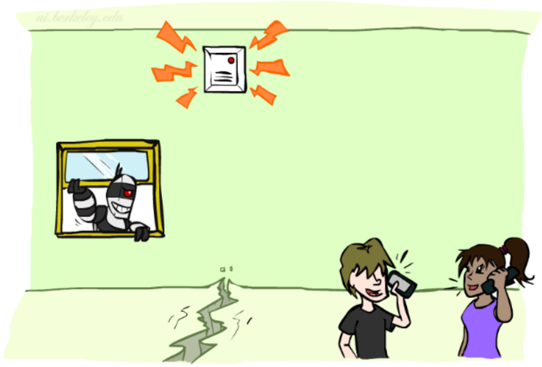
$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

Пример: Сеть Тревоги

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

$$P(+b)P(-e)P(+a| + b, -e)P(-j| + a)P(+m| + a) =$$

$$0.001 \times 0.998 \times 0.94 \times 0.1 \times 0.7$$

Размер сети Байеса

- Насколько велико совместное распределение N логических переменных?

  2^N

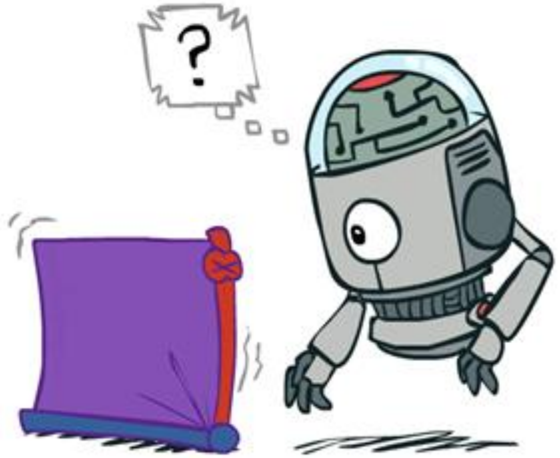
- Сложность сети Байеса из N узлов, если узел имеет k родителей?

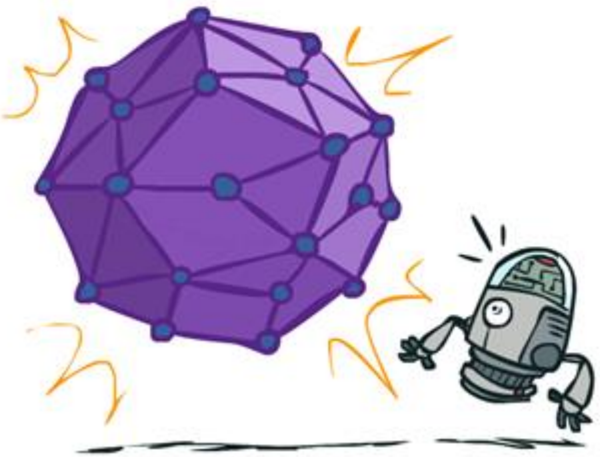
  $O(N * 2^{k+1})$

- Оба подхода дают возможность рассчитывать

$$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

- BN: Экономит огромное пространство!
- Также легче сформировать локальные CPT
- Также быстрее даёт ответы на запросы





Сети Байеса

- ✓ Представление
- ✓ Условная независимость
- Вероятностный вывод
- Формирование выборок
- Обучение сетей Байеса на данных

Условная независимость

- X и Y независимы, если

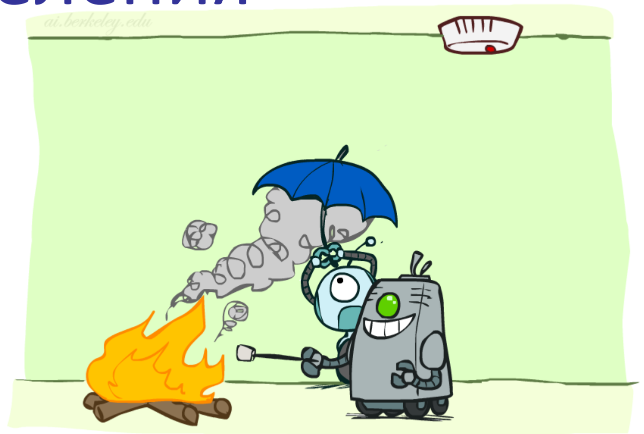
$$\forall x, y \; P(x, y) = P(x)P(y) \dashrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

- X и Y условно независимы при заданном Z

$$\forall x, y, z \; P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \dashrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y|Z$$

- Условная независимость – свойство распределения

- Пример: $Alarm \perp\!\!\!\perp Fire|Smoke$

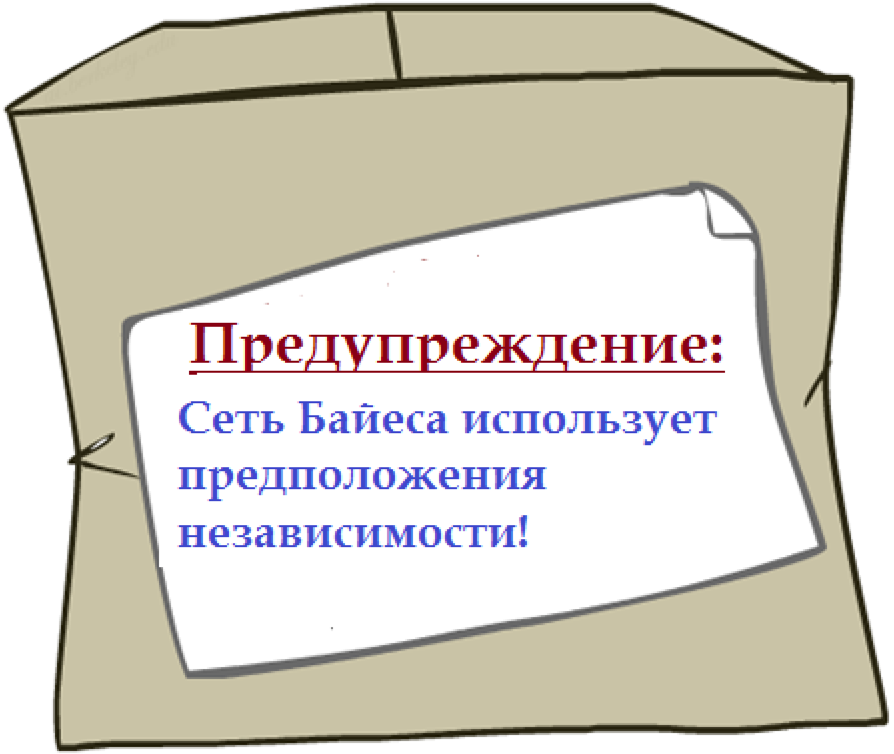


Сети Байеса: допущения

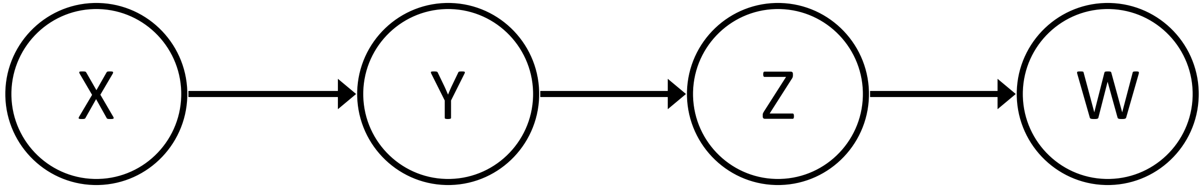
- Предположения, которые мы делаем, чтобы определить сеть Байеса, когда задан граф :

$$P(x_i|x_1 \cdots x_{i-1}) = P(x_i|parents(X_i))$$

- Помимо вышеуказанного предположения «цепочное правило -> байесовская сеть» используются и другие предположения условной независимости:
  - дополнительные условные независимости;
  - их можно определить непосредственно по графу сети.
- Важно для моделирования: понимать, какие допущения были сделаны при построении графа сети Байеса.



Пример



- **Упростим цепочное выражение, применив предположения условной независимости**:

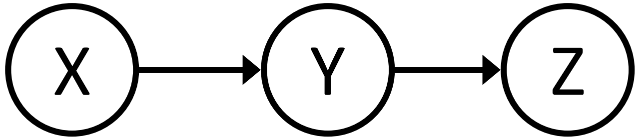
$$P(x,y,z,w) = P(x)P(y|x)P(z|x,y)P(w|x,y,z)$$
$$P(x,y,z,w) = P(x)P(y|x)P(z|y)P(w|z)$$

- **Дополнительные предположения условной независимости,** которые были сделаны:

$$X \perp\!\!\!\perp Z|Y \qquad W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\}|Z \qquad W \perp\!\!\!\perp X|Y$$

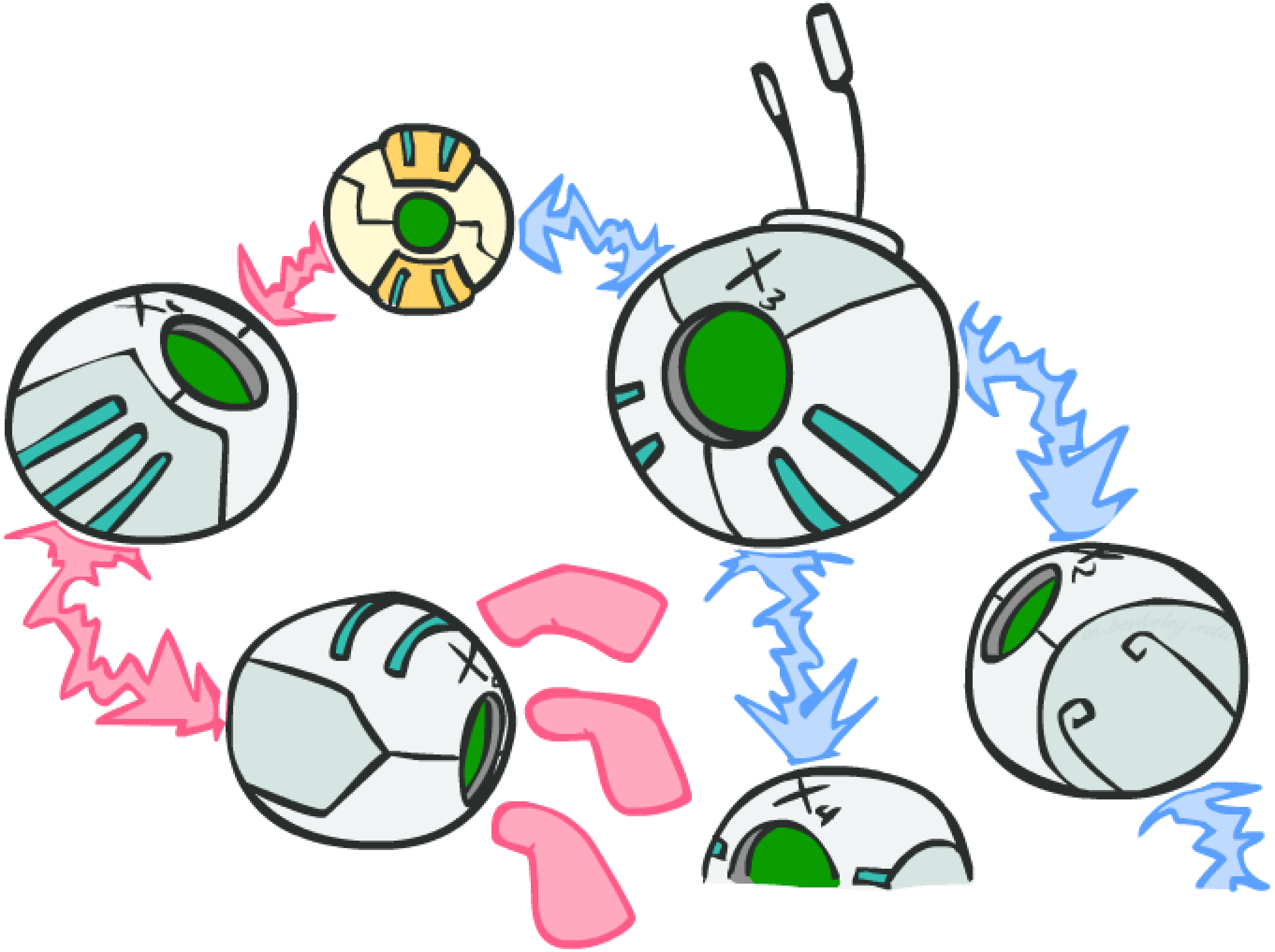
Независимость в BN

- Важный вопрос в отношении BN:
  - Независимы ли два узла при наличии определенных свидетельств?
  - Если да, то это можно доказать с помощью алгебры;
  - Если нет, то можно доказать контрпримером.
  - Пример:



  - Вопрос: X и Z обязательно независимы ?
    - Ответ: Нет. Пример: низкое давление вызывает дождь, что приводит к пробкам ;
    - X может влиять на Z, Z может влиять на X (через Y)
    - Могут ли они быть независимыми, когда?

D-разделенность



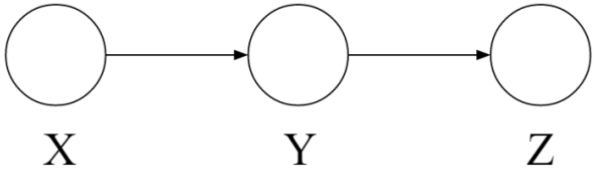
D-разделенность

- Утверждения условной независимости можно проверить (верифицировать) непосредственно по структуре BN, используя критерий, называемый **D-разделенностью (D-separation)**
- При определении D-разделенности рассматриваются три простые структуры BN в виде триплетов:
  - последовательная структура: X -> Y -> Z (причинная цепь);
  - расходящаяся структура: X <- Y -> Z (цепь с общей причиной);
  - сходящаяся структура: X-> Y <- Z (цепь с общим следствием);
- D-разделенность - критерий / алгоритм для ответов на запросы о независимости

Причинная цепь

- Причинная цепь в отсутствие наблюдений (свидетельств)

X:Низкое давление Y: Дождь Z: Пробка

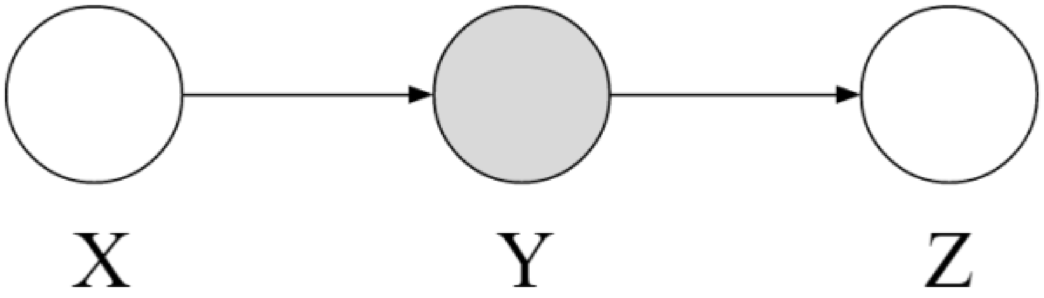


$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

- Гарантируется ли независимость X и Z ?
- *Нет!*
  - Одного контрпримера набора CPT, для которого X и Z не являются независимыми, достаточно, чтобы показать, что эта независимость не гарантируется.
  - Пример:
    - Низкое давление вызывает дождь, который вызывает пробки; высокое давление не вызывает дождя, что приводит к отсутствию пробок ;
    - при x=y: P(+y | +x) = 1, P(-y | -x) = 1, и при y=z : P(+z | +y) = 1, P(-z | -y) = 1, т.е. **P(z|x)=1 , если x=z, иначе 0. Т.о., X и Z не являются независимыми**.

Причинная цепь

- Причинная цепь при наличии свидетельства Y



X:Низкое давление   Y: Дождь   Z: Пробка

- Гарантируется ли независимость X и Z при заданном Y ?

$$P(z|x,y) = \frac{P(x,y,z)}{P(x,y)}$$

$$= \frac{P(x)P(y|x)P(z|y)}{P(x)P(y|x)}$$

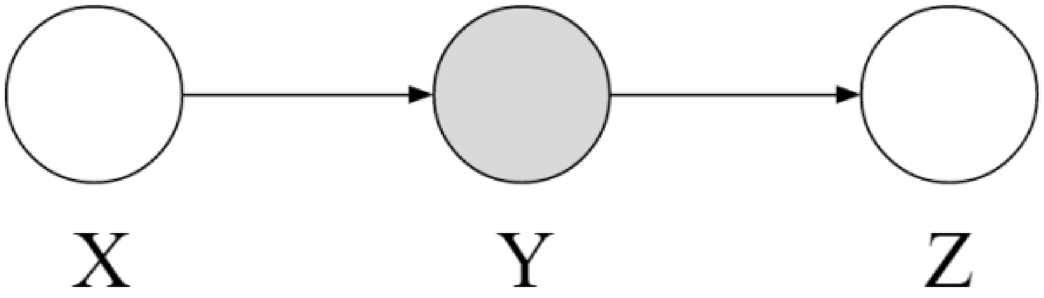
$$= P(z|y)$$

Да!

- Свидетельство внутри причинной цепи блокирует влияние

Причинная цепь

- Причинная цепь при наличии свидетельства Y



X:Низкое давление Y: Дождь Z: Пробка

Здесь также справедливо утверждение:

$$P(X|Z,Y) = P(X|Y)$$

- Доказательство

$$P(X|Z,y) = \frac{P(X,Z,y)}{P(Z,y)}$$

$$= \frac{P(Z|y)P(y|X)P(X)}{\sum_x P(X,y,Z)} = \frac{P(Z|y)P(y|X)P(X)}{P(Z|y)\sum_x P(y|x)P(x)}$$

$$= \frac{P(y|X)P(X)}{\sum_x P(y|x)P(x)} = \frac{P(y|X)P(X)}{P(y)} = P(X|y)$$

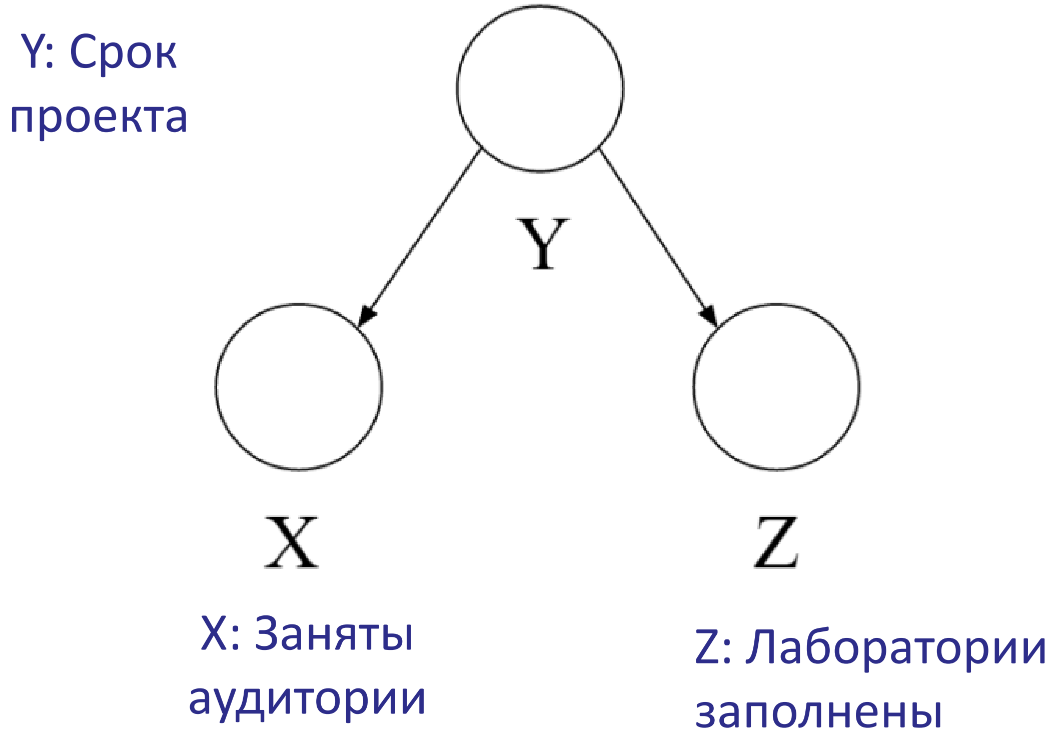
Таким образом, для причинной цепи:

$$X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$$

Свидетельство внутри цепи блокирует взаимное влияние!

Цепь с общей причиной

- Цепь с общей причиной без свидетельств



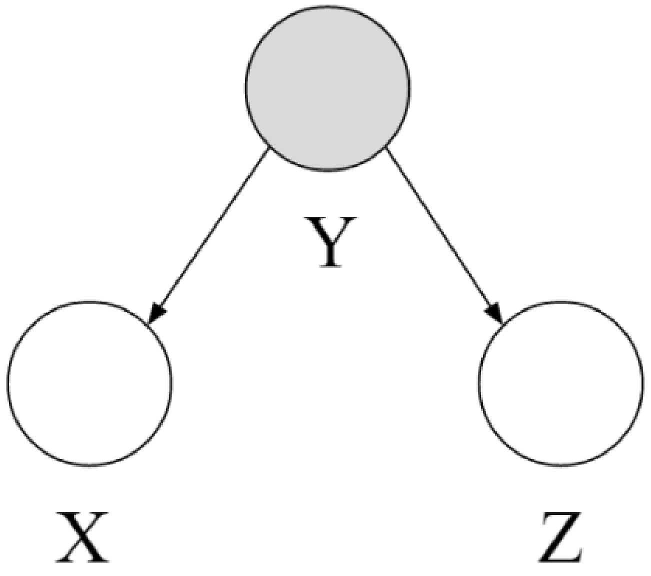
$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

- Гарантируется ли независимость X и Z ?
- *Нет!*
  - Одного примера набора CPT, для которого X и Z не являются независимыми, достаточно, чтобы показать, что эта независимость не гарантируется.
  - Пример:
    - Срок проекта приводит к занятости аудиторий и наполненности лабораторий
    - при x=y: P(+x | +y) = 1, P(-x | -y) = 1,
      и при z=y : P(+z | +y) = 1, P(-z | -y) = 1, т.е. **P(z|x)=1 , если x=z, иначе 0. Т.о., X и Z не являются независимыми**.

Цепь с общей причиной

- Цепь с общей причиной при наличии свидетельства Y

Y: Срок проекта



X: Заняты аудитории

Z: Лаборатории заполнены

$$P(x,y,z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

- Гарантируется ли независимость X и Z при заданном Y?

$$P(z|x,y) = \frac{P(x,y,z)}{P(x,y)}$$

$$= \frac{P(y)P(x|y)P(z|y)}{P(y)P(x|y)}$$

$$= P(z|y)$$

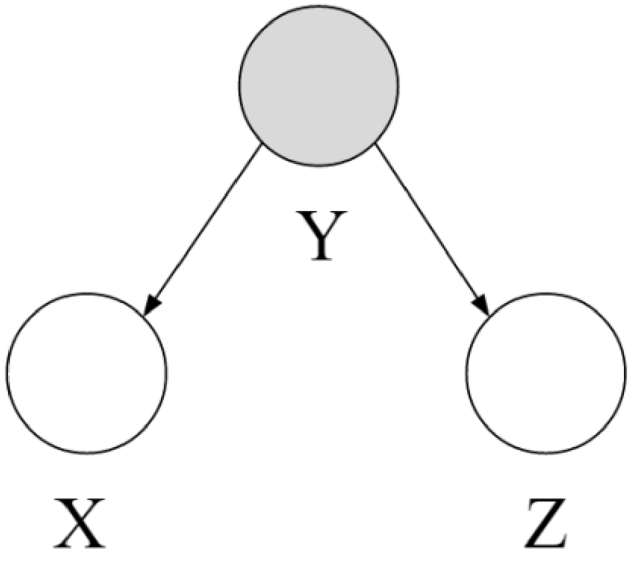
Да!

Наблюдаемая общая причина блокирует влияние между следствиями.

Цепь с общей причиной

- Цепь с общей причиной при наличии свидетельства Y

Y: Срок проекта



X: Заняты аудитории

Z: Лаборатории заполнены

Здесь также справедливо:

$$P(X|Z,y) = P(X|y)$$

- Доказательство?

$$P(X|Z,y) = \frac{P(X,Z,y)}{P(Z,y)} =$$

$$= \frac{P(X|y)P(Z|y)P(y)}{P(Z|y)P(y)} = P(X|y)$$

Таким образом, для цепи с общей причиной:

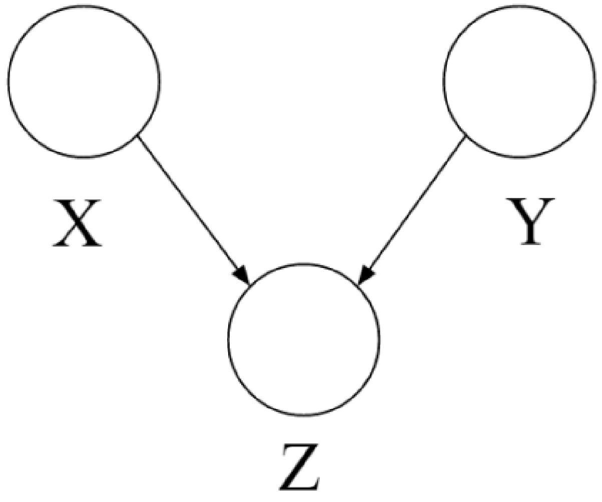
$$X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$$

Наблюдаемая общая причина блокирует влияние между следствиями.

Цепь с общим следствием

- Две причины – одно следствие (v-структура)

X: Дождь Y: Футбол



Z: Пробки

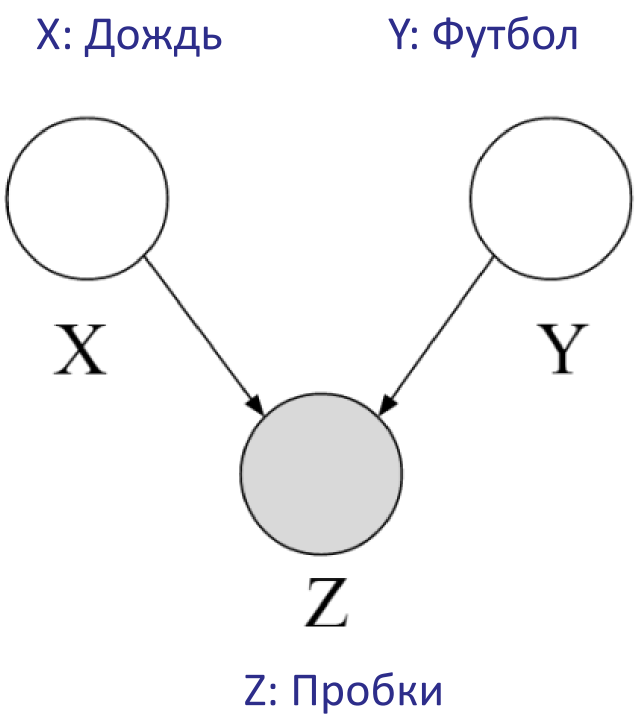
- Независимы ли X и Y ?
  - *Да*: футбол и дождь вызывают пробки, но они не коррелированы
- Доказательство:

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= \sum_z P(x, y, z) \\
&= \sum_z P(x)P(y)P(z|x, y) \\
&= P(x)P(y) \sum_z P(z|x, y) \\
&= P(x)P(y)
\end{aligned}
$$

- Таким образом: $X \perp\!\!\!\perp Y$

Цепь с общим следствием

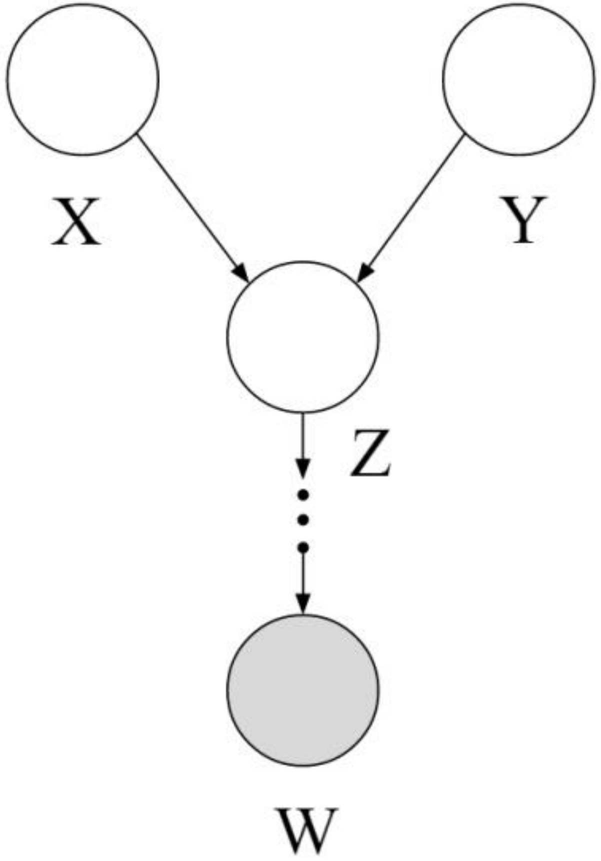
- Две причины – одно следствие при наличии свидетельства Z



- Независимы ли X и Y при заданном Z?
  - *Нет*: наличие свидетельства «пробки» предполагает в качестве причинных объяснений «дождь» и «футбол».
- Это обратно по сравнению с рассмотренными предыдущими цепями
  - Наблюдение следствия активирует взаимовлияние возможных причин.

Цепь с общим следствием

- Цепь с общим следствием при наличии свидетельств для дочерних вершин



- Та же самая логика применяется при наличии свидетельств для потомков Z в графе.

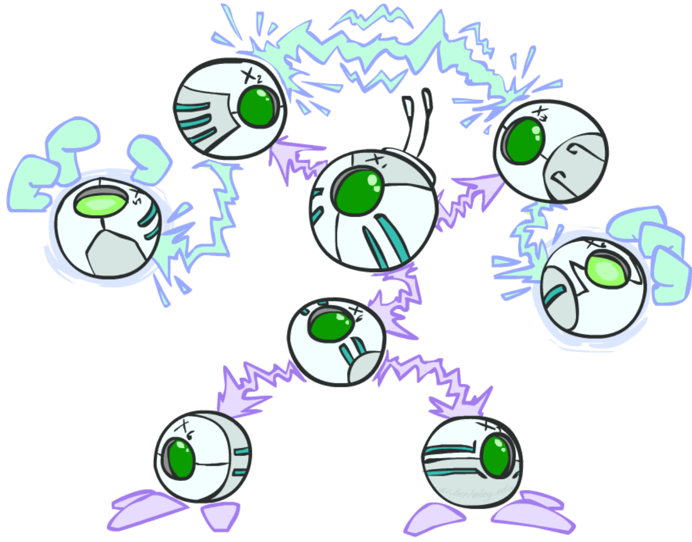
- Если один из дочерних узлов Z наблюдается, как показано на рисунке, то независимость X и Y не гарантируется.

Общий случай

- Общий вопрос: независимы ли две переменные в заданной BN при наличии свидетельств?

- Решение: анализ графа

- Любой сложный пример можно представить в виде в повторений из трех канонических случаев



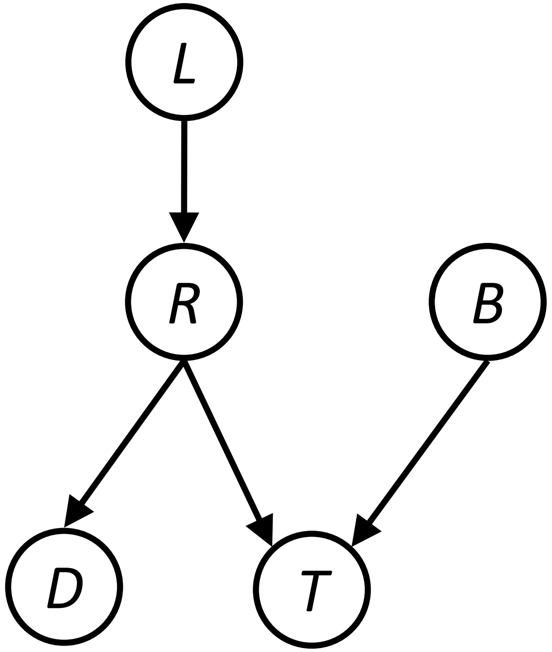
Достижимость

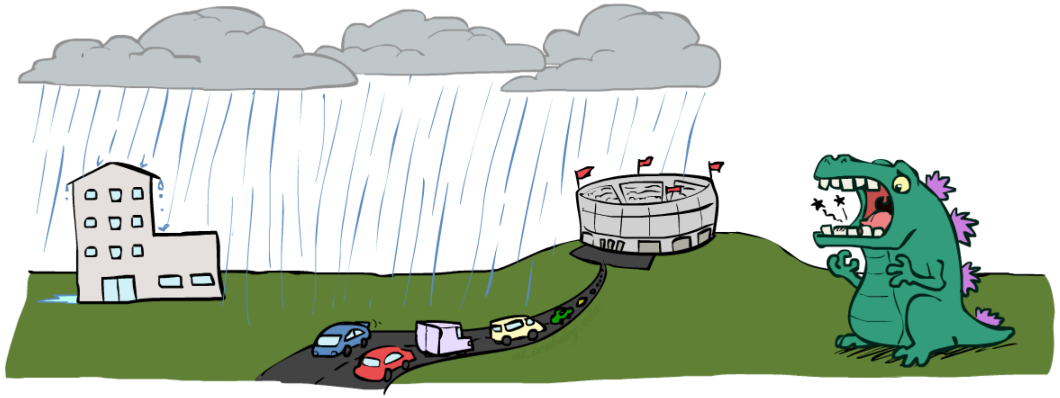
Мы начнем с алгоритма, который основан на понятии **достижимости** узла Y при старте из узла X:

- 1. Заштриховываем узлы свидетельств и ищем пути в получившемся графе

- 2. *В первом приближении:* Если два узла связаны путем, (ненаправленным) который проходит через заблокированный заштрихованный узел, то они условно независимы

- Почти работает, но не совсем
  - Где это нарушается?
  - Ответ: v-структура в точке T, если узел T заштрихован, то причины R и B зависимы





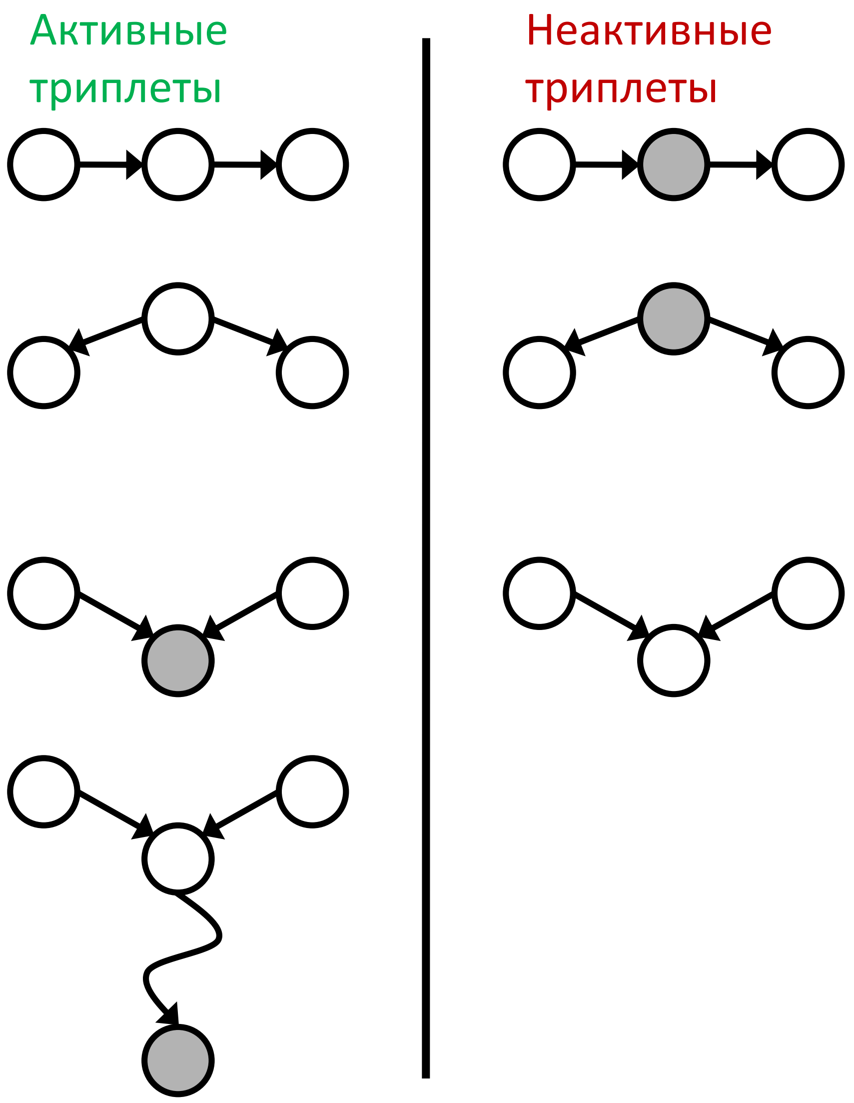
Активные / Неактивные Пути

- Вопрос: Являются ли X и Y условно независимыми с учетом переменных свидетельств {Z}?
  - Да, если X и Y “разделены” свидетельством Z;
  - Рассмотрите все (ненаправленные) пути между X и Y;
  - **Нет активных путей = независимы!**

- Путь активен, если любой триплет пути активен:
  - Причинная цепь A -> B -> C, где B не наблюдается (любое направление);
  - Цепь с общей причиной A <- B -> C, где B не наблюдается;
  - Цепь с общим следствием (v-структура)

    A -> B <- C, где наблюдается B *или один из её потомков*

- Чтобы путь был не активным нужен один неактивный сегмент вдоль пути.



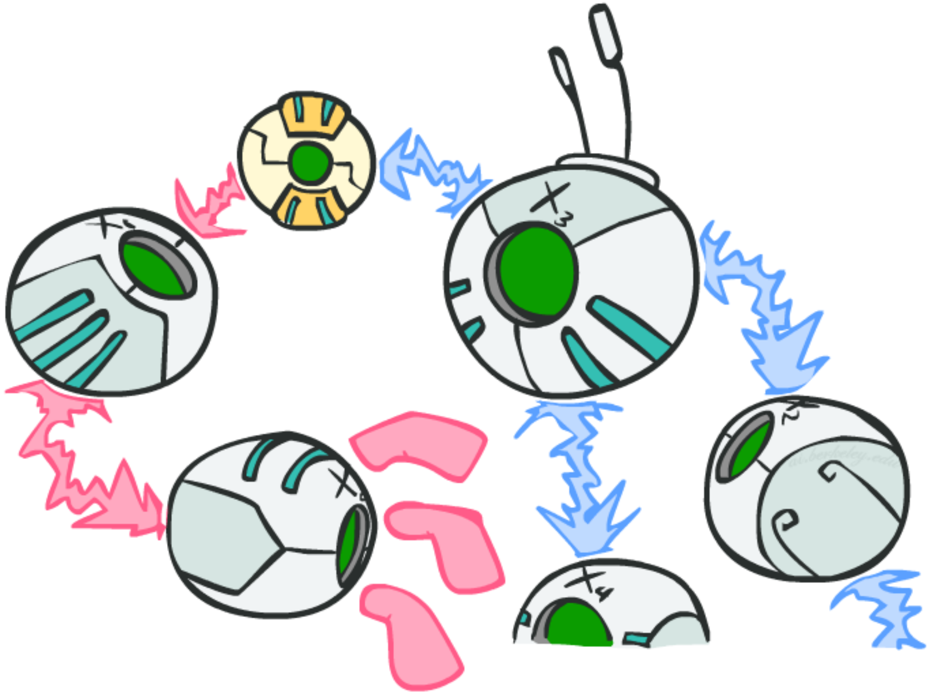
D-разделенность

- Запрос: $X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$?
- Проверить все (ненаправленные!) пути между X_i и X_j
  - Если **один или более путей активны**, то независимость не гарантируется

$$X_i \not\perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$$

  - Иначе (т.е., если **все пути не активны**), независимость гарантируется

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$$



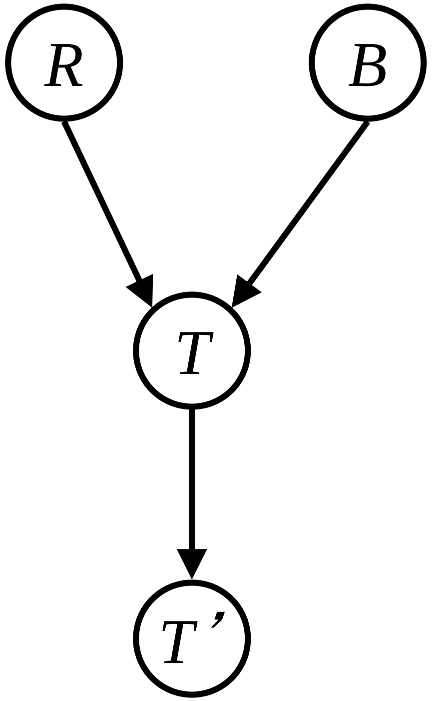
Пример

Являются ли переменные независимыми?

$R \perp\!\!\!\perp B$ Да

$R \perp\!\!\!\perp B | T$

$R \perp\!\!\!\perp B | T'$



Пример

Являются ли переменные независимыми?

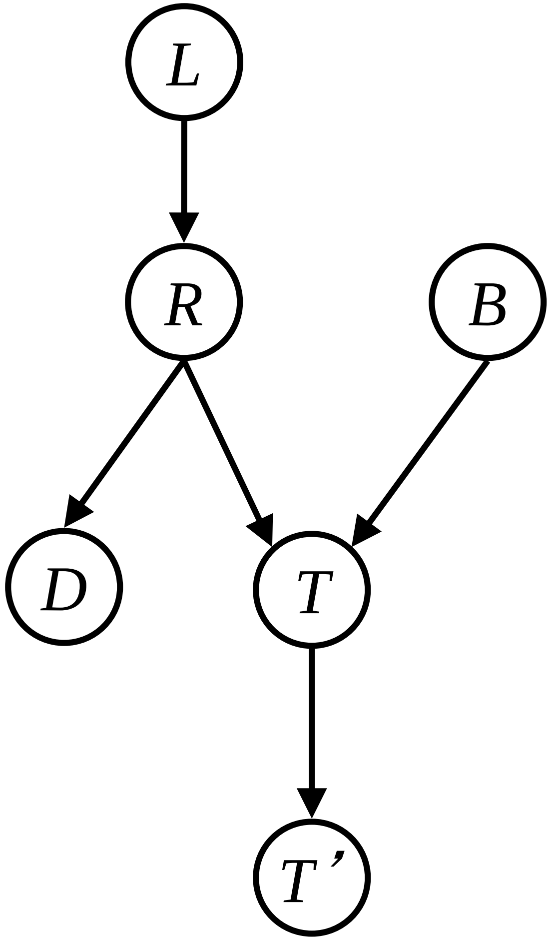
$L \perp\!\!\!\perp T' | T$ Да

$L \perp\!\!\!\perp B$ Да

$L \perp\!\!\!\perp B | T$

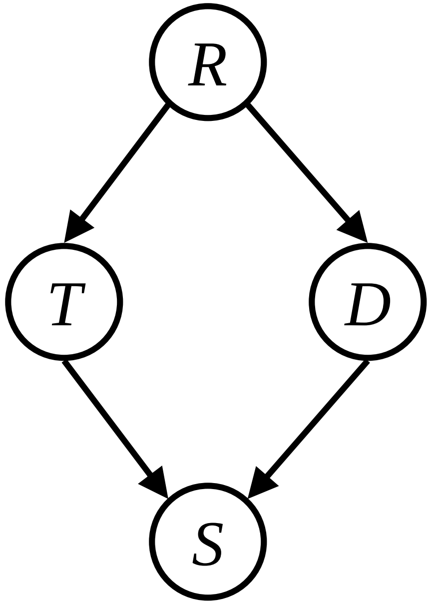
$L \perp\!\!\!\perp B | T'$

$L \perp\!\!\!\perp B | T, R$ Да



Пример

- Переменные:
  - R: Дождь
  - T: Пробки
  - D: Капли по крыше
  - S: Грустно
- Независимы ли?:



$$T \perp\!\!\!\perp D$$

$$T \perp\!\!\!\perp D | R$$ Да

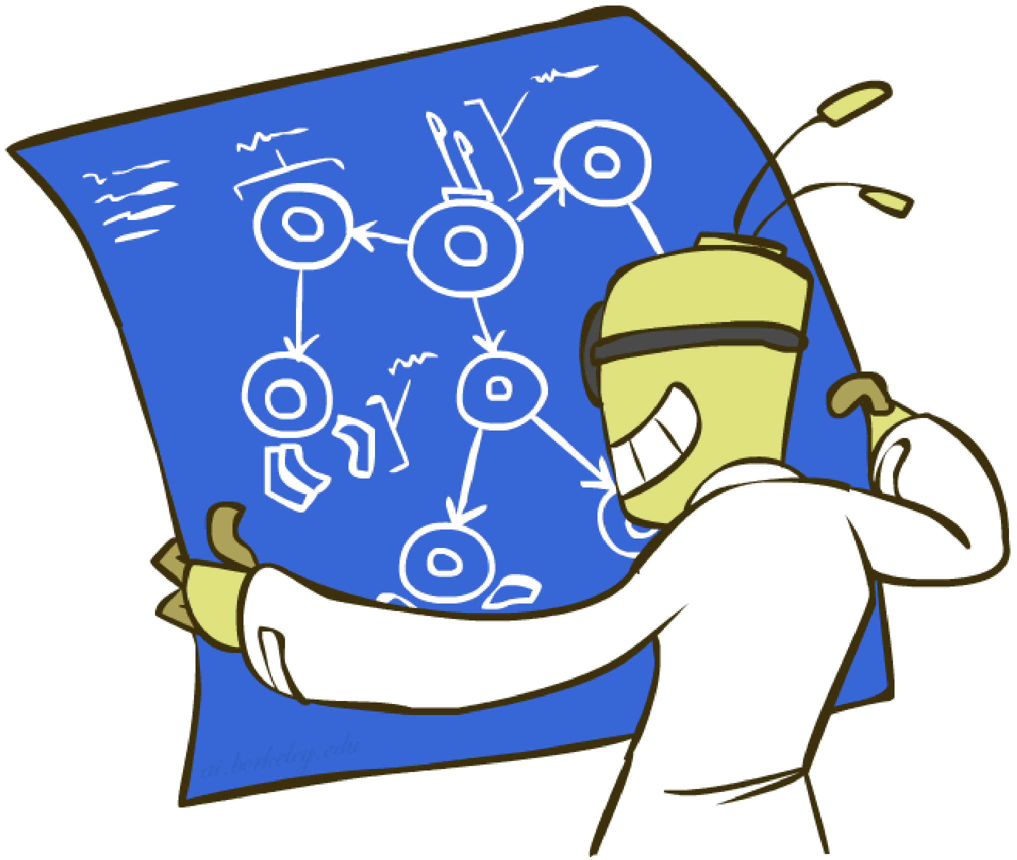
$$T \perp\!\!\!\perp D | R, S$$

Следствия структурного анализа

- Учитывая структуру байесовской сети, можно запустить алгоритм проверки d-разделенности, чтобы построить полный список условных независимостей, которые соблюдаются и имеют форму

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$$

- Этот список определяет набор распределений вероятностей, которые могут быть представлены сетью



Байесовские сети: выводы

- Байесовские сети компактно кодируют совместные распределения (используя условную независимость!)
- Гарантированная независимость распределений может быть выведена из структуры графа BN.
- D-разделенность дает гарантии точной условной независимости только на основе анализа графа
- Совместное распределение байесовской сети может иметь дополнительную (условную) независимость, которую невозможно обнаружить, пока вы не изучите это конкретное распределение.

Сети Байеса

- ✓ Представление
- ✓ Условные независимости
- Вероятностный вывод
  - Перебор (точный, экспоненциальная сложность)
  - Исключение переменных (точный, в наихудшем случае экспоненциально сложный)
  - Вероятностный вывод NP-полная задача
  - Выборочный метод (аппроксимация)
- Обучение BN на данных