Первообразная

Определение 1. Функцию $F(x)$, определенную на интервале (a, b), называют ***первообразной*** функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b), если для каждого $x \in (a, b)$ выполнено равенство

$$F'(x) = f(x) .$$

Например, из справедливости равенства

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$$

вытекает, что функция $F(x) = \sin 2x$ является первообразной функции $f(x) = 2 \cos 2x$.

Замечание. Функция $F(x) = \sin 2x$ **не является единственной первообразной** функции $f(x) = 2 \cos 2x$, поскольку функция $F(x) = \sin 2x + 10$, или функция $F(x) = \sin 2x - 3$, или функции вида $F(x) = \sin 2x + c$, где c – любое число, также являются первообразными функции $f(x) = 2 \cos 2x$.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки школьного курса математики.

Теорема 1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b), то любая другая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид

$$F(x) + c ,$$

где c – некоторое число.

Неопределенный интеграл

Определение 2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначают

$$\int f(x)\,dx$$

Обозначение (1) читается так: «Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ по dx» .

Если $F(x)$ является первообразной $f(x)$, то в силу теоремы 1 смысл формулы (1) заключается в следующем:

$$\int f(x)\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{множество всех функций вида}\\ F(x)+c\text{, где } c \text{ – любое число}\end{array}}$$

Однако для упрощения формулу (2) принято записывать в виде

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

подразумевая, но не указывая специально, что c – любое число.

В формуле (3) функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией,*** выражение $f(x)\,dx$ нызывают ***подынтегральным выражением,*** а число c называют ***постоянной интегрирования.***

Операцию вычисления (взятия) интеграла по известной подынтегральной функции называют ***интегрированием функции.***

Правила интегрирования. Замена переменной в неопределенном интеграле

Вычисление интегралов (интегрирование) основано на применении следующих правил, которые непосредственно вытекают из правил вычисления производных.

Правило 1 (интеграл от произведения числа на функцию). Справедливо равенство

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx,$$

где k – любое число.

Другими словами, **интеграл от произведения числа на функцию** равен **произведению** этого **числа на интеграл от функции**.

Правило 2 (интеграл от суммы функций). Интеграл от суммы функций вычисляется по формуле

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

то есть **интеграл от суммы функций** равен **сумме интегралов** от этих функций.

Правило 3 (интеграл от разности функций). Интеграл от разности функций вычисляется по формуле

$$\int \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

то есть **интеграл от разности функций** равен **разности интегралов** от этих функций.

Правило 4 (интегрирование при помощи замены переменной). Из справедливости формулы

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

вытекает, что

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c$$

если все входящие в формулу (4) функции $f(\varphi(x))$, $\varphi'(x)$, $F(\varphi(x))$ определены.

Доказательство правила 4. Воспользовавшись формулой для производной сложной функции, вычислим производную от правой части формулы (4):

$$\left[F(\varphi(x)) + c \right]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Мы получили подынтегральную функцию из левой части формулы (4), что и требовалось.

Замечание. Рассмотрим частный случай формулы (4), когда функция $\varphi(x)$ является линейной функцией, то есть

$$\varphi(x) = kx + b,$$

что k и b – произвольные числа, $k \neq 0$.

В этом случае

$$\varphi'(x) = k,$$

и формула (4) принимает вид

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+c$$

Формула (5) часто используется при решении задач.

Таблица интегралов

Следующая **таблица** **неопределенных интегралов** составлена на основе таблицы производных часто встречающихся функций, а также на основе таблицы производных сложных функций

Основная формула	**Обобщения**
$\int dx = x+c$	$\int k\,dx = kx+c$, где k – любое число
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ где n – любое число, не равное -1	$\int (kx+b)^n dx = \frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)}+c$, где n, k, b – любые числа, $k \neq 0$, $n \neq -1$
	$\int (\varphi(x))^n \cdot \varphi'(x)\,dx = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1}+c$, где n – любое число, $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$, $x > 0$	$\int \frac{1}{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}\ln(kx+b)+c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$, $kx+b>0$
	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln(\varphi(x))+c$, где $\varphi(x) > 0$

$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$
	$\int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = e^{\varphi(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ где a – любое положительное число, не равное 1	$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + c$, где a – любое положительное число, не равное 1, k, b – любые числа, $k \neq 0$
	$\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c$, где a – любое положительное число, не равное 1
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \sin(kx+b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx+b) + c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$
	$\int \sin(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = -\cos(\varphi(x)) + c$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int \cos(kx+b) dx = \frac{1}{k} \sin(kx+b) + c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$
	$\int \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \sin(\varphi(x)) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(kx+b)} dx = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(kx+b) + c$,

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	где k, b – любые числа, $k \neq 0$, $kx + b \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2(\varphi(x))} dx = \mathrm{tg}(\varphi(x)) + c$, $\varphi(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + c$ $x \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$\int \frac{1}{\sin^2(kx+b)} dx = -\frac{1}{k} \mathrm{ctg}(kx+b) + c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$, $kx + b \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2(\varphi(x))} dx = -\mathrm{ctg}(\varphi(x)) + c$, $\varphi(x) \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, $\lvert x \rvert < 1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(kx+b)^2}} = \frac{1}{k} \arcsin(kx+b) + c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$, $\lvert kx + b \rvert < 1$
	$\int \frac{\varphi'(x)\, dx}{\sqrt{1-(\varphi(x))^2}} = \arcsin(\varphi(x)) + c$, $\lvert \varphi(x) \rvert < 1$

	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right)+c,$ где a, b – любые числа, $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad \left\lvert \frac{bx}{a} \right\rvert < 1$
	$\int \frac{dx}{1+(kx+b)^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}(kx+b)+c$, где k, b – любые числа, $k \neq 0$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+(\varphi(x))^2} = \operatorname{arctg}(\varphi(x))+c$
	$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right)+c$ где a, b – любые числа, $a \neq 0, \quad b \neq 0$

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\left(7x^6+8\sqrt{x}-\frac{2}{x}-2\sqrt[3]{x^5}+\frac{4}{x^7}\right)dx$$

Решение. Воспользовавшись свойствами степеней, а затем правилами интегрирования и формулами из таблицы неопределенных интегралов, получаем

$$\int\left(7x^6+8\sqrt{x}-\frac{2}{x}-2\sqrt[3]{x^5}+\frac{4}{x^7}\right)dx=$$

$$=7\int x^6\,dx+8\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-2\int\frac{dx}{x}-2\int x^{\frac{5}{3}}\,dx+4\int x^{-7}\,dx=$$

$$=7\cdot\frac{x^7}{7}+8\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\ln x-2\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+4\frac{x^{-6}}{(-6)}+c=$$

$$=x^7+\frac{16}{3}\sqrt{x^3}-2\ln x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8}-\frac{2}{3x^6}+c$$

Ответ.

$$x^7+\frac{16}{3}\sqrt{x^3}-2\ln x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8}-\frac{2}{3x^6}+c$$

Пример 2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -4\sin x$ в точке $x = 0$ равно 9. Найти $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Поскольку

$$\int(-4\sin x)\,dx=4\cos x+c,$$

то

$$F(x) = 4\cos x + c,$$

Подставляя в формулу (6) значение $x = 0$, находим значение постоянной интегрирования c:

$$F(0) = 4\cos 0 + c = 9,$$

$$4 + c = 9, \quad c = 5.$$

Следовательно,

$$F(x) = 4\cos x + 5$$

Поэтому

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{3}+5=4\cdot\frac{1}{2}+5=7$$

Ответ. 7

Пример 3. Найти первообразную $F(x)$ функции

$$f(x)=e^{\cos x}\cdot\sin x$$

если $F(2\pi) = 2e + 3$.

Решение. Воспользовавшись формулой из таблицы неопределенных интегралов

$$\int e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,dx=e^{\varphi(x)}+c$$

для функции $\varphi(x) = \cos x$, получаем

$$\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx=-e^{\cos x}+c$$

Следовательно,

$$F(x)=-e^{\cos x}+c$$

Подставляя в формулу (7) значение $x = 2\pi$, находим значение постоянной интегрирования c:

$$F(2\pi)=-e^{\cos 2\pi}+c=-e+c=2e+3$$

Итак,

$$c = 3e + 3 .$$

Ответ. $F(x)=-e^{\cos x}+3e+3$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}$$

Решение. Воспользовавшись формулой из таблицы неопределенных интегралов

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+(\varphi(x))^2} = \operatorname{arctg}(\varphi(x)) + c$$

для функции $\varphi(x) = e^x$, получаем

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{(e^x)'\,dx}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Ответ. $\operatorname{arctg}(e^x) + c$