ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

1. Цель работы: исследовать способы формирования множества Парето-оптимальных решений и определения эффективных решений в этом множестве

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия о формировании множества Парето-оптимальных решений

Для формализации задачи формирования множества Парето-оптимальных решений в множестве допустимых решений в рассмотрение введены следующие обозначения:

1) X - множество допустимых решений многокритериальной задачи определения эффективных решений;

2) $f_i\ (i=\overline{1,m})$ – локальные частные критерии, соответствующие целям функционирования системы, тогда $f=(f_1, f_2,.., f_m)$ - векторный критерий принятия решений; для определения значений векторных оценок $f=(f_1, f_2,.., f_m)$ в рассмотрение введено обозначений $y=(f_1, f_2,.., f_m)$, тогда Y^m- критериальное пространство значений векторного критерия f, используемого при выборе решений;

Таким образом рассматривается задача принятия решений при многих критериях, при этом скалярные критерии $f_i\ (i=\overline{1,m})$ образуют векторный критерий f.

Способ определения наилучших вариантов (решений) при многих критериях предполагает определение множества Парето в пространстве допустимых решений *X*.

Для идентификации (определения) множества эффективных решений в рассмотрение введено отношение предпочтения вида: $x_i \succ x_j$, которое предполагает, что решение x_i является более предпочтительным, чем решение x_j в множестве X. По аналогии для значений y оценок векторного критерия $f(x)$ введено отношение $\geq$, т.е. $y_1 \geq y_2$ либо $f(x_1) \geq f(x_2)$, где y_1 и y_2–соответствующие значения оценок векторного критерия f для решения x_1 и x_2.

В общем виде (для m критериев) отношение $\geq$ для значений y_1 и y_2 (где y_1 и y_2 соответствующие значения векторных оценок), либо для значений векторов $f(x_1)$ и $f(x_2)$ выполняется в том случае, если $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$ и хотя бы для одного из критериев $f_j(x_1) \neq f_j(x_2)$. Таким образом, для случая $m=2$ имеем: $f(x_1) \geq f(x_2)$, если $f_1(x_1) \geq f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, то $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$ (соответственно, $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, либо $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, а также $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$ либо $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) = f_2(x_2)$).

Так как связь между решениями x_i и значениями y_i векторного критерия $f(x_i)$ является однозначной, тогда при реализации $f(x_i) \geq f(x_j)$ выполняется отношение предпочтения в виде $x_i \succ x_j$. Тогда решение x_i доминирует решение x_j, если по всем критериям решение x_i не хуже решения x_j (отношение "не хуже" имеет вид $\succeq$), а по одному критерию x_i строго лучше x_j. Данное заключение в формализованной форме имеет следующий вид: $f_1(x_i) \geq f_1(x_j)$, $f_2(x_1) \geq f_2(x_2),.., f_i(x_1) > f_i(x_2),.., f_m(x_1) \geq f_m(x_2)$. В рассматриваемом случае доминирование решения x_j решением x_i является однозначным. В основу приведенных рассуждений положена аксиома Парето о предпочтениях ЛПР: «Лицо, принимающее решения, стремится получить большие значения всех компонент векторного критерия».

В соответствии с введёнными отношениями предпочтения и доминирования может быть определено условие формирования множества недоминируемых решений:

– если $\nexists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, то x_i является недоминируемым решением.

Понятно, что в соответствии с этим условием можно сформировать множество недоминируемых решений. Однако, в силу того, что выполняется решение многокритериальной задачи оптимизации, не все решения могут быть связаны отношением предпочтения (доминирования), т.е. не к каждой паре решений x_1 и x_2 ($x_1, x_2 \in X$) может быть применено отношение предпочтения. В общем виде (для m критериев) данные утверждения могут быть прокомментированы следующим образом.

Решение x_i не доминирует решение x_j, а x_j не доминирует решение x_i, если:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \geq f_2(x_2),.., f_i(x_1) < f_i(x_2),.., f_m(x_1) \geq f_m(x_2);$$

(1)

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \leq f_2(x_2),.., f_i(x_1) > f_i(x_2),.., f_m(x_1) \leq f_m(x_2).$$

(2)

В этом случае решения x_i и x_j являются несравнимыми с использованием отношения предпочтения. Таким образом, могут быть выделены решения, которые являются недоминируемыми какими-либо решениями множества *X*, т.к. решения x_i и x_j несравнимы, поэтому недоминируемы.

Для случая двух критериев f_1 и f_2 условие (1) может быть представлено в следующем виде:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) < f_2(x_j), \tag{4}$$

Либо

$$f_1(x_i) > f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \leq f_2(x_j). \tag{5}$$

По аналогии условие (2) для двух критериев примет следующий вид:

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) > f_2(x_j), \tag{6}$$

либо

$$f_1(x_i) < f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \geq f_2(x_j). \tag{7}$$

Те решения x_i и x_j, для которых выполняются либо условия (4), (5) либо условия (6), (7) не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$.

Таким образом, если условия $x_i \succ x_j$ либо $x_j \succ x_i$ не выполняются, то решения x_i и x_j входят в так называемую границу Парето допустимого множества решений. Границе Парето поставлено в соответствие множество решений $x_i \in X$, которые не могут быть сравнимы между собой с помощью отношения предпочтения $\succ$ и, как следствие, являются недоминируемыми. Элементы $x_i \in X$, которые являются недоминируемыми и не сравнимыми с другими решениями с использованием отношения $\succ$, образуют множество Парето. Парето - границу множества X допустимых решений обозначим как $P(X)$. Способ формирования Парето- границы определяет аксиома о доминируемости (Парето – доминируемости) решений.

Аксиома Парето о доминируемости решений.

Если $x_i \succ x_j$, то $x_j \notin P(X)$, где x_j – решение, доминируемое решением x_i.

Тогда решение x_j не может входить в Парето-множество (лежать на Парето-границе). И, соответственно, если $\exists x_j$ такой, что $x_j \succ x_i$, то $x_i \notin P(X)$. Тогда Парето-множество содержит так называемые Парето - оптимальные решения.

Т.к. сформулировано условие формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X, тогда принцип Эджворта – Парето [8,9] определяет способ идентификации множества эффективных решений: выбираемые эффективные решения будут Парето-оптимальными. Т.е. эффективные решения в множестве X нужно выбирать только среди Парето-оптимальных решений. В результате эффективное решение (множество эффективных решений) будет выбираться (определяться) в множестве Парето-оптимальных решений (эффективное решение будет выбираться на Парето- границе).

Таким образом, если решение $x_i \in P(X)$ является недоминируемым ни одним из решений $x_j \in X$ (т.е. условие $x_j \succ x_i$ не выполняется ни для одного $x_j \in X$) и не может быть сравнимо с другими решениями, принадлежащими этой границе, с использованием отношения предпочтения $\succ$, тогда решение добавляется в Парето – границу (в Парето – множество). При этом оно недоминируется другими решениями, уже находящимися на границе.

Решение добавляется в Парето-границу, если нет решений, которые бы его доминировали, и, соответственно, удаляется из границы, если оно доминируется рассматриваемыми на данном шаге алгоритма решениями. Данная формулировка целиком согласуется с формулировкой аксиомы о доминировании (о Парето – границе), приведённой в [9]: если для какой-либо пары решений x_i и x_j выполняется $f(x_i) \geq f(x_j)$ (соответственно $x_i \succ x_j$), то $x_j \notin P(x)$.

Тогда доминируемое решением x_i решение x_j не может быть включено в Парето-границу, а для решения x_i выполняется условие: $\nexists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, $x_i, x_j \in X$

В связи с тем, что в реализацию метода многокритериальной оптимизации положен принцип Эджворта – Парето (выбор эффективных решений на Парето-границе (в множестве Парето)), то возникает вопрос по поводу существования этого множества (т.к. требуется, чтобы $P(X) \neq \varnothing$).

В соответствии с заключениями, приведёнными в [9], при условии, что множество X является конечным, множество $P(X)$ является непустым. Допустим, что решаемая задача является задачей с конечным и счетным множеством возможных решений X, то $P(X) \neq \varnothing$.

Таким образом, выполнение поиска эффективных решений многокритериальной задачи осуществляется путём реализации двух этапов:

1) формирование множества Парето-оптимальных решений (Парето-границы $P(X)$) множества допустимых решений X;

2) определение на Парето-границе тех эффективных решений, которые позволят максимизировать (в наибольшой степени) все критерии в многокритериальной задаче (в соответствии с аксиомой о предпочтениях ЛПР).

Так как рассматриваемая задача предполагает наличие конечного множества допустимых решений, при поиске эффективных альтернатив реализуется переход от одного решения к другому, тогда должны быть определены особенности формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X.

Выяснение особенностей формирования Парето-границы (определения решений, входящих в Парето-границу) выполняется на основе Рис. 1 с использованием аксиом о предпочтениях ЛПР, о доминировании решений (понятий доминируемых и недоминируемых по Парето решений). Для Рис. 1 рассуждения, определяющие особенности формирования Парето-границы, строятся следующим образом:

1) при формировании решения x_2 решение x_1 исключается из рассмотрения, т.к. $x_2 \succ x_1$ (в результате x_1 не может входить в Парето-границу);

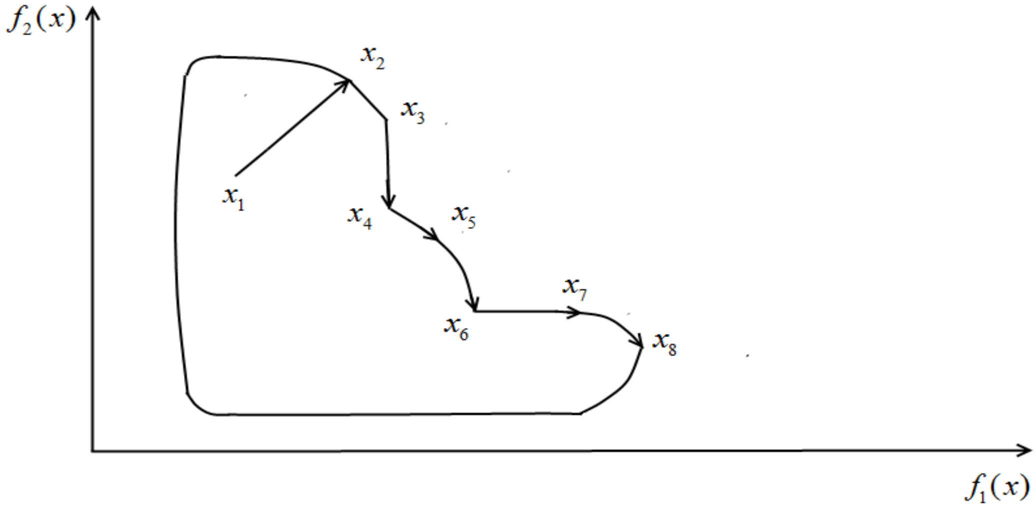

Рисунок 1 – Особенности определение решений, входящих в Парето-границу множества допустимых решений X

2) при переходе от решения x_2 к решению x_3 сравнение их с использованием отношения предпочтения $\succ$ невозможно, т.к. $f_1(x_2) < f_1(x_3)$ и $f_2(x_2) \geq f_2(x_3)$; в соответствии с этим решения x_2 и x_3 могут быть включены в границу Парето $(x_2 \in P(X), x_3 \in P(X))$;

3) переход от решения x_3 к решению x_4 обуславливает эквивалентность решений по одному из критериев $(f_1(x_3) = f_1(x_4))$ и доминирование решением x_3 решения x_4 по другому критерию $(f_2(x_3) > f_2(x_4))$, в соответствии с этим $x_3 \succ x_4$ (по введённому выше понятию отношения предпочтения (доминирования) решений) и решение $x_4 \notin P(X)$ (в соответствии с аксиомой);

4) при переходе от решения x_4 к решению x_5 должна быть исследована возможность включения решения x_5 в Парето- границу (при условии, что решение x_4 исключено из неё); т.к. множество Парето $P(X)$ образуют только те решения, которые не сравнимы с использованием отношения $\succ$, а решение x_4 исключено из $P(X)$, тогда должно быть выполнено сравнение решения x_5 с решением x_3, входящим в $P(X)$, т.к. (в соответствии с Рис. 1) связывание решений x_3 и x_5 отношение $\succ$ невозможно, то $x_5 \in P(X)$, также как $x_3 \in P(X)$;

5) по аналогии решение x_6 не может быть связано с решением x_5 отношением предпочтения $\succ$, поэтому на данном этапе рассуждений x_6 должно быть включено в $P(X)$ $(x_6 \in P(x))$;

6) переход от решения x_6 к решению x_7 обуславливает эквивалентность решений по критерию f_2 $(f_2(x_6) = f_2(x_7))$ и доминирование решением x_7 решения x_6 по критерию f_1 $(f_1(x_7) > f_1(x_6))$, тогда выполняется $x_7 \succ x_6$ и в соответствии с аксиомой о Парето- границе x_6 должно быть исключено из множества $P(X)$; аналогичные рассуждения, касающиеся решения x_8, которое не может быть связано с решением x_7 отношением $\succ$, позволяют сделать вывод о том, что $x_8 \in P(X)$.

Выполненные рассуждения касаются доминирования и не доминирования решений x_i $(i = \overline{1,8})$, они позволили сформировать множество Парето в следующем виде:

$$P(X) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8\}.$$

В общем виде при переходе от решения x_i к решению x_{i+1} возможны следующие ситуации, определяющие реализацию отношения $\succ$ для них: 1) $x_i \succ x_{i+1}$; 2) $x_{i+1} \succ x_i$; 3) $x_i \bar{\succ} x_{i+1}$ и $x_{i+j} \bar{\succ} x_i$.

Понятно, что в первом случае $x_{i+1} \notin P(X)$, во втором – $x_i \notin P(X)$, в третьем – $x_i \in P(x)$ и $x_{i+1} \in P(X)$ на рассматриваемом текущем шаге формирования Парето-границы.

Таким образом, в основу формирования множества $P(X)$ положена аксиома «о предпочтениях ЛПР» и аксиома «о Парето- границе множества X ».

Следует отметить, что вид границы Парето (выпуклость либо вогнутость) не рассматривается, определяется принадлежность (возможность включения) следующего рассматриваемого решения Парето-границе и необходимость исключения предыдущего рассматриваемого решения из этой границы в случае его доминирования. При этом принадлежность решения Парето-границе определяется на основе рассматриваемых условий доминирования и недоминирования решений (условий для отношений предпочтения/ доминирования). Т.к. в соответствии с принципом Эджворта – Парето эффективные решения принадлежат Парето-границе, тогда должен быть сформирован способ определения наиболее эффективного решения (эффективных решений) среди тех, которые принадлежат $P(X)$. В литературе [7-9] изложены различные способы определения эффективных решений, выбор которых будет обеспечивать выполнение аксиомы «о предпочтениях ЛПР» (выбор решения, в наибольшей степени максимизирующего все используемые критерии) [9].

Наиболее развитыми методами определения эффективных решений на Парето-границе являются: метод идеальной точки (метод точки утопии), метод последовательных уступок. Рассмотрим аппарат этих методов с точки зрения решения задачи принятия решений при двух критериях.

В основу первого способа определения эффективного решения в множестве Парето (на Парето-границе) положено понятие идеальной точки (точки утопии) и метрики (расстояния) от текущего рассматриваемого решения до этой идеальной точки (Рис.2.).

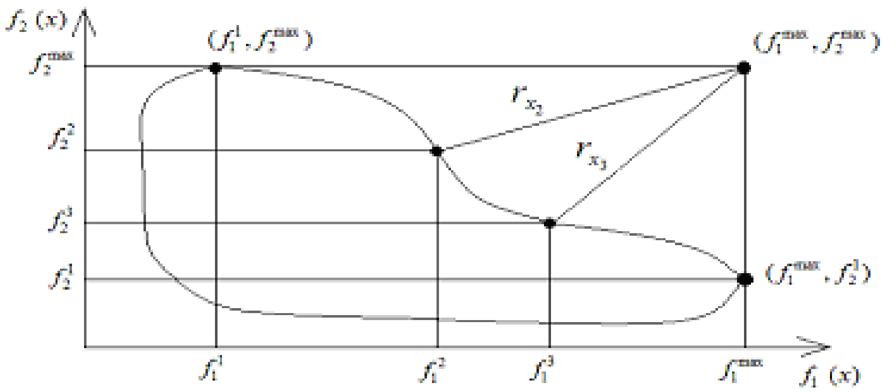

Рисунок 2 – Определение эффективных решений на Парето-границе с использованием метода идеальной точки

Точка утопии – это точка с координатами $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, где $f_i^{\max}$ $(i=\overline{1,2})$ - максимально возможные значения каждого из критериев. Значения $f_i^{\max}$ $(i=\overline{1,2})$ фиксируются как значения соответствующих решений с координатами (f_1^{max}, f_2^1) и (f_1^1, f_2^{max}), т.е. решений с максимальными значениями соответствующих критериев.

В качестве меры удалённости точки критериального пространства от точки утопии для текущего рассматриваемого решения x используется эвклидова метрика в виде:

$$r_x = \left[(f_1^{\max} - f_1)^2 + (f_2^{\max} - f_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что эффективным выбирается решение $x_i^* \in P(X)$, для которого выполняется условие: $x_i^* = arg \min_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$. Таким образом, для каждого решения $x_i \in X$ определяется принадлежность его к Парето-границе (множеству Парето $P(X)$), затем в случае, если $x_i \in P(X)$, тогда для решения x_i вычисляется расстояние r_{x_i} точки утопии $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, выполняется сравнение полученного для решения x_i расстояния до точки утопии с расстоянием текущего локально эффективного решения x_j^*. Если для текущего решения x_i расстояние r_{x_i} является меньшим, чем $r_{x_j^*}$, то решение x_i становится локально эффективным ($x_j^* = x_i$).

Тогда для задачи определения эффективных решений на Парето-границе при наличии двух критериев (при векторном критерии) разработан алгоритм соответствующей процедуры принятия решений. Для реализации алгоритма принятия решений при двух критериях в рассмотрение введены следующие обозначения:

1) $P1$– множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P1$); $P2$– множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P2 \big| \, x_i \in P(X)$);

2) kp – количество элементов в множествах $P1$ и $P2$;

3) i – индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$;

4) $P1_i$, $P2_i$ – i-е текущие рассматриваемые элементы множеств $P1$ и $P2$;

5) j– индекс рассматриваемого решения из множества X, принадлежность которого Парето-границе будет исследована на текущем шаге алгоритма;

6) x_i - некоторое текущее решение, принадлежность которого к Парето-границе определена на предыдущих шагах алгоритма и значения критериев которого $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ сри исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_i соответствуют значения критериев $f_1(x_i)$ и $f_2(x_i)$.

7) x_j - некоторое текущее решение ($x_j \in X$), для которого исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_j соответствуют значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$;

5) s – индекс текущего шага алгоритма.

7) n– количество решений в множестве X (мощность множества решений X).

Первоначальная инициализация введенных параметров, выполняемых на первом шаге алгоритма (при $s = 1$) выглядит следующим образом: 1) $P1(1) = 0$; $P2(1) = 0$; 2) $kp(1) = 0$.

В случае рассмотрения первого решения x_1 (при $P1 = 0; P2 = 0; kp = 0$), преобразование введенных параметров выполняется в соответствии с выражениями вида (при этом индекс шага алгоритма $s = 2$):

$$P1(2) = P1(1) \cup \{ f_1(x_1) \}; P2(2) = P2(1) \cup \{ f_2(x_1) \};$$
$$kp(2) = kp(1) + 1.$$

Для решения x_1 выполняется вычисление расстояния до идеальной точки $r_{x_1} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_1))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, после чего реализуется присваивание $r_{x^*} = r_{x_1}$ и, соответственно, $x^* = x_1$. Т.е. локально эффективным решением на начальной стадии реализации алгоритма является решение x_1.

Для всех последующих решений x_i ($i = \overline{2,n}$) шаги алгоритма принятия решений при двух критериях предполагают: определение принадлежности x_i ($i = \overline{2,n}$) Парето-границе (определение, что $x_i \in P(X)$), вычисление расстояния r_{x_i} до точки утопии (точки

(f_1^{max}, f_2^{max})), определение выполнения условия минимума значения метрики до этой точки $x_i^* = arg \min_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$ (фиксация локально эффективного и глобально эффективного решений). Если *kp* соответствует количеству элементов, включенных в результате реализации алгоритма в Парето-границу, тогда возможность включения в эту границу нового x_j-го решения исследуется путем сравнения его значений критериев f_1 и f_2 (значений $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$) со значениями этих критериев для решений x_i (с его значениями $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, при этом $i = \overline{1,kp}$).

В этом случае алгоритм определения эффективных решений в множестве *X* на основе метода идеальной точки имеет следующую последовательности шагов:

1) значения индекса j решения $x_j \in X$, возможность добавления которого в Парето-границу исследуется на текущем шаге алгоритма, задается равным 2 ($j=2$);

2) значение индекса i текущего рассматриваемого решения в множестве *P(X)* (т.е. $x_i \in P(X)$) задается равным 1 ($i=1$); для рассматриваемого элемента x_i, значения критериев равны соответственно $P1_i$, $P2_i$;

3) если для решения x_j значение $f_1(x_j) > P1_i$, тогда решение x_j доминирует решение x_i по критерию f_1 $(x_j \succ_{f_1} x_i)$, которому соответствует значение $(f_1(x_i) = P1_i) \in P1$; если условие доминирования решением x_j решения x_i по критерию f_1 выполняется, тогда необходимо реализовать проверку условия ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$); при невыполнении условия $f_1(x_j) > P1_i$ требуется осуществить переход к шагу 8;

4) если ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то рассматриваемое решение x_j не может быть сравнимо с использование отношения предпочтения $\succ$ с решением x_i, которому соответствуют значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ (т.е. $x_j \overline{\succ} x_i$ и $x_i \overline{\succ} x_j$), выполняется переход к шагу 15;

5) если ($f_2(x_j) \geq P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то $(x_j \succ x_i)$, где $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, тогда x_i не может входить в Парето-границу, т.к. является доминируемым, поэтому значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ необходимо исключить из множеств $P1$ и $P2$ следующим образом:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

6) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),…,kp* в позиции с индексами *i,…,kp-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

7) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1 и* переход на шаг 3;

8) если условие ($f_1(x_j) < P1_i \mid x_i \in P(X)$) выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по критерию f_1 ($x_i \succ_{f_1} x_j$), должна быть выполнена проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$

($x_i \in P(X)$); если условие $f_1(x_j) < P1_i$ выполняется, то реализуется переход к шагу 9; при невыполнении условия $f_1(x_j) < P1_i$ реализуется переход к шагу 11;

9) выполняется проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие выполняется, то решения x_j и $x_i \in P(X)$ не могут быть сравнимы с использованием отношения предпочтения $\succ$ ($x_{kp} \overline{\succ} x_i$ и $x_i \overline{\succ} x_{kp}$), выполняется переход к шагу 15;

10) реализуется проверка условия $f_2(x_j) \le P2_i$, если условие $f_2(x_j) \le P2_i$ выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по векторному критерию f ($x_i \succ_f x_j$), т.е. рассматриваемое решение x_j не может быть включено в Парето-границу; тогда должно быть определено следующее решение x_j, его значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$, выполнен последующий анализ возможности включения его в *P(X)*, для этого реализуется переход на шаг 19;

11) выполняется проверка условия $f_1(x_j) = P1_i$ (при реализации перехода на этот шаг данное условие выполняется априори); реализуется проверка условия $f_2(x_j) \le P2_i$, если условие ($f_2(x_j) < P2_i$) является истинным, то решение x_j доминируется решением x_i (которому соответствует значение $f_2(x_i) = P2_i$), поэтому решение x_j не может быть включено в Парето-границу, реализуется переход к шагу 19; если $f_2(x_j) = P2_i$, то решение x_j эквивалентно решению x_i (переход к решению x_j не приводит к улучшению значения векторного критерия и анализируемое решение x_j не включается в Парето-границу), выполняется переход к шагу 19;

12) выполняется проверка $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие является верным, то по критерию f_2 решение x_j доминирует решение x_i ($x_j \succ_{f_2} x_i$); т.к. по критерию f_1 решения x_j и x_i эквивалентны и $x_j \succ_{f_2} x_i$, то решение x_j доминирует решение x_i по векторному критерию f ($x_j \succ_f x_i$ или $x_j \succ x_i$), следовательно решение x_i должно быть исключено из Парето-границы, а его значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ из множеств *P1* и *P2* соответственно, тогда преобразования этих множеств выполняется с использованием выражений:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

13) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),…,n* в позиции с индексами *i,…,n-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

14) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 3;

15) изменение индекса *i* текущих рассматриваемых элементов $P1_i$ и $P2_i$ множеств $P1$ и $P2$ следующим образом: *i=i+1,* если $i \le kp$, то выполняется переход к шагу 3; если $i > kp$, то выполняется переход на шаг 16;

16) значения критериев f_1 и f_2 для анализируемого решения x_j добавляются в множества $P1$ и $P2$ соответственно (само решение x_j принадлежит Парето-границе $P(X)$):

$$P1(s+1) = P1(s) \cup \{f_1(x_j)\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \cup \{f_2(x_j)\};$$
$$kp(s+1) = kp(s)+1;$$

17) для решения $x_j \in P(X)$ вычисляется значение расстояния r_{x_j} до точки утопии:

$$r_{x_j} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_j))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_j))^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

18) реализуется сравнение полученного значения со значением r_{x^*} текущего эффективного решения, если $r_{x^*} > r_{x_j}$, то: $r_{x^*} = r_{x_j}$; $x^* = x_j$ (т.е. выполняется сохранение (буферизация) текущего локального эффективного решения);
19) изменение индекса текущего рассматриваемого решения j следующим образом: $j=j+1$; если $j \le n$, то переход к шагу 2; в противном случае – шаг 20;
20) останов алгоритма (окончание алгоритма).

После окончания алгоритма множества (массивы) *P1* и *P2* содержат значения всех решений x_i ($i = \overline{1,kp}$), которые входят в Парето-границу (множество *P(X)*), а параметр x^* представляет собой то решение, которое ближе всего находится к точке утопии.

Предложенный алгоритм может быть модифицирован следующим образом:
1) определение координат идеальной точки (координат точки утопии);
2) формирование Парето-границы для множества *X* (определение множества *P(X)* решений и соответствующих им значений критериев f_1 *и* f_2);
3) определение среди элементов множества *P(X)* такого решения x_j^*, расстояние r_{x_j} до идеальной точки $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$ для которого будет являться минимальным.

Метод уступок при определении эффективного решения x_j^* также предполагает, что первоначально должна быть сформирована Парето-граница, затем, начиная от решений с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ и $(f_1^2, f_2^{\max})$, выполняются последовательные уступки по каждому из критериев:
1) для точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$ – уступки по критерию f_1 для получения приращения по критерию f_2;
2) для точки $(f_1^2, f_2^{\max})$ – уступки по критерию f_2 для получения приращения по критерию f_1.
Порядок последовательных уступок по критериям для поиска эффективных решений на Парето-границе комментирует Рис.3.

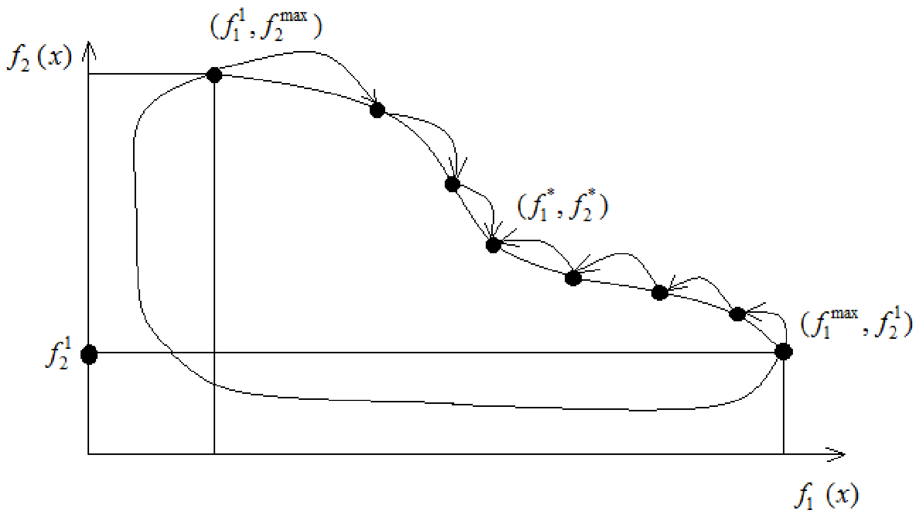

Рисунок 3– Реализация процедуры метода последовательных уступок

Реализация метода уступок предполагает, что по каждому из критериев может быть выполнена уступка (в значении этого критерия) для получения приращения по другому критерию. Т.е. может быть выполнен переход от одного решения к другому, который гарантирует при уменьшении значения одного из критериев увеличение значения другого критерия. Реализация метода предусматривает переход между решениями на Парето-границе при анализе уступок и приращений критериев f_1 и f_2. Реализация метода последовательных уступок позволит:

1) при переходе от решения с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$ путем выполнения уступки по критерию f_2 получить приращение по критерию f_1;

2) при переходе от решения с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ путем выполнения уступки по критерию f_1 получить приращение по критерию f_2.

При этом, т.к. критерии f_1 и f_2 являются равными по важности, то величины приращений по каждому критерию (размеры приращений по критериям) должны быть если не одинаковыми, то хотя бы сравнимыми друг с другом (сравнимыми с точки зрения их величин). Если при реализации уступки по критерию f_2 (при переходе из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$) получено приращение критерия f_1, обозначенное Δ_1, а при реализации уступки по критерию f_1 (при переходе из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$) получено приращение критерия f_2, обозначенное Δ_2, тогда желательной является ситуация $\Delta_1 \approx \Delta_2$.

Если $\Delta_1 >> \Delta_2$ (либо $\Delta_1 > \Delta_2$), тогда на следующем шаге реализации алгоритма метода уступка по критерию f_2 для получения нового приращения Δ_1 по критерию f_1 может не выполняться, в то же время уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 должна быть выполнена. Если $\Delta_1 << \Delta_2$ (либо $\Delta_1 < \Delta_2$), тогда уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 может не выполняться, при этом уступка по f_2 для получения приращения Δ_1 по критерию f_1 должна быть выполнена. Сформулированные рассуждения должны обеспечивать одинаковый порядок приращений по каждому из критериев при реализации метода последовательных уступок.

Уступки по каждому из критериев будут продолжаться до тех пор, пока не будут определена некоторая «общая» точка критериального пространства, достижимая как из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$, так и из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$. Если такая точка не может быть найдена (т.е. не может быть выполнено одинакового количества уступок по каждому критерию для определения «общей» точки), тогда по каждому критерию выбираются те повторяющиеся решения, которые уже были выбраны (рассмотрены) до этого при реализации уступок по противоположному критерию, т.е.: 1) при реализации уступки по критерию f_2 определяется решение, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_1; 2) при реализации уступки по критерию f_1 выполняется переход к решению, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_2. При этом выполнение приведенных выше условий фиксируется одновременно, алгоритм реализации дальнейших уступок останавливается, а в качестве действующего (эффективного) решения может быть выбрано любое из двух решений, на которых алгоритм последовательных уступок был остановлен.

Для реализации метода последовательных уступок при сформированной Парето-границе в рассмотрение введены следующие дополнительные обозначения (дополняющие введенные выше в рассмотрение обозначения):

1) $P11$ – множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P11$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$, $P21$ – множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е.

$f_2(x_i) \in P21$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

2) $P12$ – множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P12$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$, $P22$ – множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P22$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

3) $i1$ – индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}1, P11, P21$ при реализации уступок по критерию f_2;

4) $i2$ – индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}2$, $P12$, $P22$ при реализации уступок по критерию f_1;

5) $PX1$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P11_{i1}$ и $f_2(x_i) = P21_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$

4) $PX2$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P12_{i1}$ и $f_2(x_i) = P22_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

8) *delta1*– параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_1 при реализации уступок по критерию f_2 при переходе из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

9) *delta2*– параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_2 при реализации уступок по критерию f_1 при переходе из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

Первоначальная инициализация значений параметров алгоритма выполняется следующим образом: *delta1=0; delta2=0.* В соответствии с введенными обозначениями порядок шагов алгоритма метода последовательных уступок следующий (при условии сформированной предварительно Парето-границы и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$):

1) на основе множества решений PX и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев f_1 и f_2 реализовать инициализацию значений элементов множеств $PX1$ и $PX2$, $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ следующим образом: $PX1 = PX2 = PX$, $P11 = P12 = P1$, $P21 = P22 = P2$ (множества $PX1, P11$, $P21$ используются для реализации уступок по критерию f_2, множества $PX2$, $P12$, $P22$ для реализации уступок по критерию f_1);

2) элементы множеств (векторов) сортируются по: убыванию значений критерия f_2 для вектора (множества) $P21$, по возрастанию критерия f_1 для вектора (множества) $P12$;

3) в соответствии с выполненным упорядочиванием элементов векторов (множеств) $P21$ и $P12$ реализовать упорядочивание элементов связанных с ними векторов (множеств) $PX1$ и $P11$; $PX2$ и $P22$; тогда элементы всех векторов (множеств) будут упорядочены следующим образом: а) $P11$, $P21$, $PX1$ – в соответствии с убыванием значений критерия f_2, б) $P12$, $P22$, $PX2$ – в соответствии с убыванием критерия f_1; первые элементы в векторах $P11$ и $P21$ имеют значения f_1^2 и f_2^{max}, а первый элемент в векторе $PX1$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$; первые элементы в векторах $P12$ и $P22$ имеют значения f_1^{max} и f_2^1, а первый элемент в векторе $PX2$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

4) значение индекса *i1* элементов в векторах (множествах) $P11$, $P21$, $PX1$ задается равным 2 (*i1=2*);

5) значение индекса *i2* элементов в векторах (множествах) $P12$, $P22$, $PX2$ задается равным 2 (*i2=2*);

6) реализуется сравнение элементов векторов (множеств) $P11_{i1}$ и $P12_{i2}$, $P21_{i1}$ и $P22_{i2}$; если выполняются условия $p11_{i1} = p12_{i2}$ и $P21_{i1} = P22_{i2}$, то выполненные уступки позволили получить некоторое «общее» решение (при упорядочивании векторов (множеств) $P11$, $P21$ в

соответствии с убыванием значений критерия f_2 и упорядочивании векторов (множеств) $P12$, $P22$ в соответствии с возрастанием значений критерия f_1 выполнение первого равенства гарантирует автоматическое выполнение второго), в этом случае $x^* = PX1_{i1}$, выполнить переход на шаг 12;

7) если условия $P11_{i1} = P12_{i2}$ и $P21_{i1} = P22_{i2}$ не являются истинными (не выполняются), то реализуется следующая проверка: $P11_{i1} = P12_{i2-1}$ и $P22_{i2} = P21_{i1-1}$; если данные условия выполняются, то решение x_{i1} было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_1, решение x_{i2} также было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_2; в этом случае «общее» решение, достигаемое путем реализации уступок по критериям f_1 и f_2, получено быть не может; в этом случае выполняется вычисление значений параметров *delta1* и *delta2* следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$
$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

в том случае, если $delta1 > delta2$, то в качестве эффективного решения выбирается решение $x^* = x1_{i1}$; при $delta1 < delta2$ эффективным выбирается решение $x^* = x2_{i2}$; при $delta1 = delta2$ в качестве эффективного решения может быть выбран любой из элементов $x1_{i1}$ либо $x2_{i2}$ множеств $X1$ и $PX2$ (т.е. $x^* = px1_{i1}$ либо $x^* = px2_{i2}$), выполняется переход на шаг 10; при невыполнении условий $P11_{i1} = P12_{i2-1}$ и $P22_{i2} = P21_{i1-1}$ реализуется переход на шаг 8;

8) выполняется вычисление значений параметров *delta1* и *delta2* следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$
$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

9) определение значений индексов элементов векторов (множеств) $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ выполняется следующим образом:

если $delta1 > delta2$, то $i2 = i2 + 1$, индекс $i1$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;

если $delta1 < delta2$, то $i1 = i1 + 1$, индекс $i2$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;

если $delta1 = delta2$, то $i1 = i1 + 1$ и $i2 = i2 + 1$, реализуется переход на шаг 7;

10) окончание алгоритма.

Реализация приведенного алгоритма позволяет определить единственное решение на Парето-границе, эффективное с точки зрения приращений по критериям f_1 и f_2 при реализации уступок по критериям f_2 и f_1.

3. Программа выполнения работы

3.1. Для первого и третьего вариантов в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:

а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества $P(X)$, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения координат идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) (точки утопии);

в) разработать процедуру расчета расстояния r_{x_i} до точки утопии для координат текущего рассматриваемого решения x_i;

г) разработать процедуру определения эффективного решения x^*, расстояние r_{x^*} до которого от идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) является минимальным.

3.1. Для второго варианта в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:

а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества *P(X)*, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения решений x_i с координатами точек (f_1^{max}, f_2^1) и (f_1^2, f_2^{max}) в критериальном пространстве;

в) разработать процедуру упорядочивания векторов (множеств) $PX1, P11, P21$ по убыванию значений критерия f_2, начиная от значения f_2^{max}, векторов (множеств) $PX2, P12, P22$ по убыванию значений критерия f_1, начиная от значения f_1^{max};

г) разработать процедуру, реализующую переход между решениями в множестве (векторе) $PX1$ при осуществлении уступок по критерию f_2 и приращении по критерию f_1, в множестве (векторе) $PX2$ при осуществлении уступок по критерию f_1 и приращении по критерию f_2; кроме перехода между решениями в разрабатываемой процедуре требуется предусмотреть контроль выполнения условий реализации уступок на каждом шаге алгоритма, контролировать условие окончания процесса реализации перехода между решениями (контролировать условие окончания процесса осуществления уступок при переходе между решениями).

4. Задание на работу

Вариант 1. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{x_i, i = \overline{1,10}\}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i $(i = \overline{1,10})$ сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	4	5
x_3	5	3
x_4	8	3
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	6	4
x_{10}	2	5

Вариант 2. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{x_i, i = \overline{1,10}\}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода последовательных уступок. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i $(i = \overline{1,10})$ сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	5	6
x_3	5	3
x_4	8	4
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	9	2
x_{10}	3	9

Вариант 3. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1,10} \}$ выполнить определение эффективных решений трехкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1, f_2 и f_3 для соответствующих решений x_i ($i = \overline{1,10}$) сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2	f_3
x_1	3	2	2
x_2	5	6	4
x_3	5	3	3
x_4	8	4	4
x_5	6	2	6
x_6	3	8	5
x_7	6	4	3
x_8	2	5	2
x	9	2	5
x_{10}	3	5	2

5. Контрольные вопросы

5.1. В чем заключаются условия доминирования вектора $f(x_j)$ со стороны вектора $f(x_i)$ (условие для выполнения отношения $x_i \succ x_j$ при многих критериях).

5.2. В чем заключаются условия, в соответствии с которыми решение x_i несравнимо с решением x_j с использованием отношения предпочтения (при векторном критерии f).

5.3. В чем состоит смысл аксиомы Парето о предпочтениях ЛПР с точки зрения условия доминирования вектора $f(x_j)$ вектором $f(x_i)$.

5.4. В чем заключается условие формирования Парето-границы множества решений X с точки зрения аксиомы Парето о доминировании решений, какой вид имеет формализация этого условия.

5.5. Каким образом осуществляется определение эффективных решений в множестве X с точки зрения принципа Эджворта-Парето.

5.6. Каковы особенности определения решений, входящих в Парето-границу с точки зрения аксиомы о предпочтениях ЛПР (для двухкритериальной задачи).

5.7. В чем состоит понятие идеальной точки (точки утопии) и как она используется при определении эффективного решения на Парето-границе.

5.8. В чем состоит алгоритм метода построения Парето-границы множества решений *X* (определить обобщенно последовательность шагов).
5.9. Проверка каких условий включения текущего рассматриваемого решения в границу Парето и каким образом реализуется в алгоритме метода формирования *P(X)*.
5.10. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования *P(X)* позволяет исключить решение из Парето-границы.
5.11. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования *P(X)* позволяет не включать решение в Парето-границу.
5.12. Каким образом в методе идеальной точки выполняется выбор эффективного решения на Парето-границе.
5.13. В чем состоит подход к определению эффективных решений в методе последовательных уступок.
5.14. В чем заключается условие реализации на следующем шаге алгоритма уступки по одному (либо по каждому) из критериев в одноименном методе.
5.15. В чем состоит алгоритм метода последовательных уступок при условии использования сформированной Парето-границы.
5.16. Истинность каких условий позволяет выполнить остановку алгоритма метода последовательных уступок.
5.17. В чем заключаются причины использования метода идеальной точки и метода последовательных уступок при поиске эффективных решений на Парето-границе.