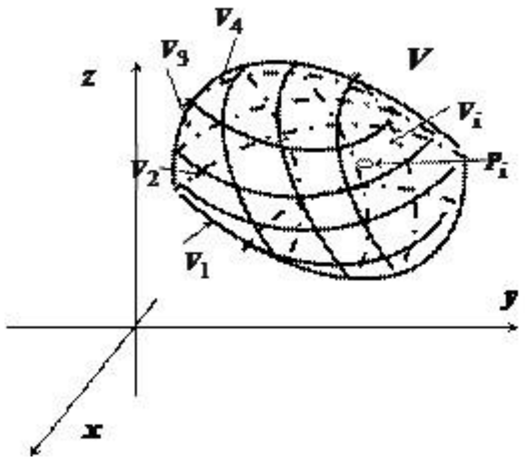
Кратные интегралы.
2. Тройной интеграл.

2.1. Основные понятия.

Пусть в замкнутой области V пространства OXYZ задана непрерывная функция U=f(x,y,z). Разбив область V сеткой поверхностей на n частей V_i $(i=\overline{1,n})$ и выбрав в каждой из них произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$, составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i$

ΔV_i - объем элементарной области

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$



Правая часть формулы (1) называется **тройным интегралом.**

Теорема (существования)

Если U=f(x,y,z) функция непрерывна в ограниченной замкнутой области, то предел интегральной суммы (1) существует и не зависит ни от выбора разбиения области V на части, ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$ в них.

2.2. Свойства тройного интеграла

1) $\iint\limits_V c\cdot f(x,y,z)dxdydz = c\cdot\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \quad c = const$

2) $\iint\limits_V f_1(x,y,z)\pm f_2(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_V f_1(x,y,z)dxdydz \pm \iint\limits_V f_2(x,y,z)dxdydz$

3) Если область V разбить линией на две области V_1 и V_2 такие, что $V_1 \cup V_2 = V$, то $\iint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

4) Если в области V имеет место неравенство $f(x,y,z) \geq 0$, то и $\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0$

5)Если $f(x,y,z) = 1$, то $\iiint\limits_V dV = V$ объем тела

6) $mV \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \leq MV$, где m и M- соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области V.

7) $\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V$

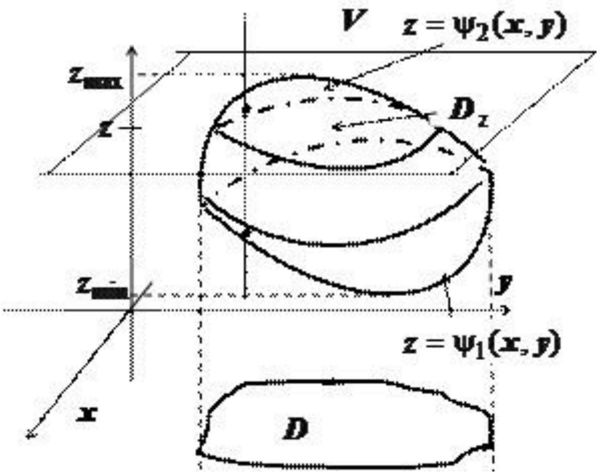
Величину $f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ называют средним значением функции $f(x,y,z)$ в области V. V- объем тела

2.3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

$$\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

V- область интегрирования. Тело , ограниченное снизу поверхностью $z = \psi_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = \psi_2(x,y)$

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость OXY



Если область V представляет собой прямоугольный параллелепипед, определяемый неравенствами $a \leq x \leq b;$ $c \leq y \leq d;$ $m \leq z \leq n$, то

$$\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz$$

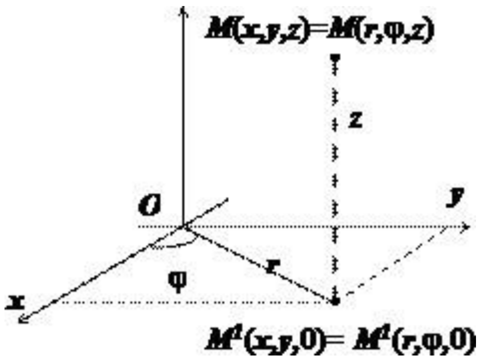
2.4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты- обобщение полярных координат на плоскости

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \iint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V rf(r,\varphi,z)drd\varphi dz$$

r,φ,z - цилиндрические координаты $\begin{cases} r \geq 0 \\ \varphi \in [0;2\pi] \\ z \in R \end{cases}$

К цилиндрическим координатам удобно прейти в случае. Если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью

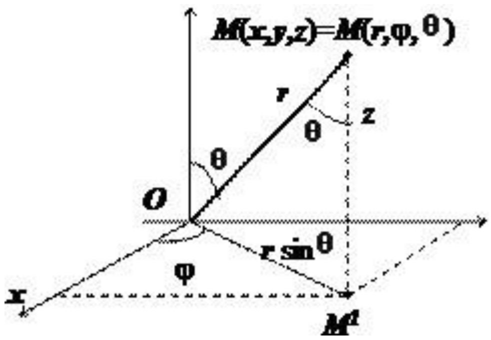


2.5. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Переходить к сферическим координатам удобно, когда V шар $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ или $r = R$ часть шара, или если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$

r,φ,Θ - сферические координаты $\begin{cases} r \geq 0 \\ \varphi \in [0;2\pi] \\ \Theta \in [0;\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\Theta \\ y = r\sin\varphi\sin\Theta \\ z = r\cos\Theta \end{cases} \qquad \iint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V r^2\sin\Theta f(r,\varphi,\Theta)drd\varphi d\Theta$$



$$V = \iiint_V r^2\sin\Theta drd\varphi d\Theta$$

Пример 1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (z+y+z)\,dx\,dy\,dz$$,

где V - параллелепипед, ограниченный
плоскостями $x = -1$, $x = +1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

Решение. $$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{2} (x+y-z)\,dz$$.

Вычисляем самый внутренний интеграл - по переменной z, считая икс и игрек константами. Получаем:

$$\int_{0}^{2} (x+y-z)\,dz = \left[xz + yz - \frac{z^2}{2} \right]\Bigg|_{0}^{2} = 2x+2y-2$$.

Вычисляем интеграл "в серединке" - по переменной y. Получаем;

$$\int_{0}^{1} (2x+2y-2)\,dy = \left[2xy + y^2 - 2y \right]\Big|_{0}^{1} = 2x-1$$.

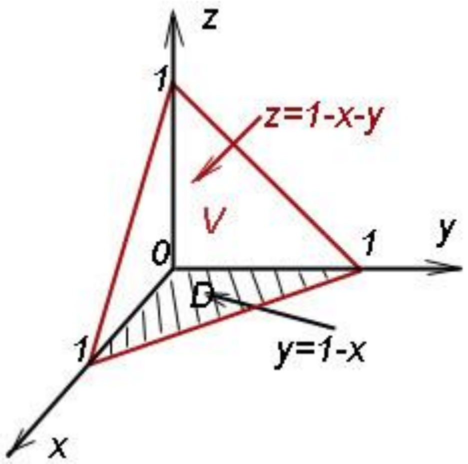
Теперь вычисляем самый внешний интеграл - по переменной x:

$$\int_{-1}^{1} (2x-1)\,dx = \left[x^2 - x \right]\Bigg|_{-1}^{1} = -2$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где V - пирамида, ограниченная плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Область V проецируется на плоскость xOy в треугольник D, как показано на рисунке ниже.



Решение
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz.$$

Вычисляем самый внутренний интеграл - по переменной z, считая икс и игрек константами. Получаем:

$$\int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}.$$

Вычисляем средний интеграл - по переменной y. Получаем:

$$\int_0^{1-x} \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{1-x}.$$

Наконец, вычисляем самый внешний интеграл - по переменной x:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[y-yx^2-xy^2-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left(2-3x+x^3\right)dx=$$

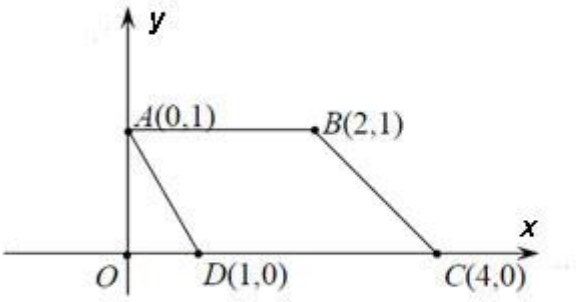
$$=\frac{1}{6}\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\bullet\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

Пример 3. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V 6xy\;dxdydz$$
,

если область интегрирования ограничена
плоскостями $x + y = 1$, $x + 2y = 4$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$, $z = 5$.

Решение.



$$I=6\int_0^1 ydy\int_{1-y}^{4-2y}xdx\int_1^5 dz$$
.

Внимание! В этом примере самый внешний интеграл - не по переменной "икс", а по переменной "игрек", а "средний" - по переменной "икс"!

Вычисляем самый внутренний интеграл - по переменной z, считая икс и игрек константами. Получаем:

$$\int_1^5 dz=z\Big|_1^5$$
.

Вычисляем средний интеграл - по переменной x. Получаем:

$$\int_{1-y}^{4-2y}x\left(5-1\right)dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{1-y}^{4-2y}$$
.

Наконец, вычисляем самый внешний интеграл - по переменной y:

$$24\int_0^1 y \bullet \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1-y}^{4-2y} dy =$$

$$= 12\int_0^1 y\left[(4-2y)^2-(1-y)^2\right]dy =$$

$$= 12\int_0^1 y\left(16-16y+4y^2-1+2y-y^2\right)dy =$$

$$= 12\int_0^1 \left(15y-14y^2+3y^3\right)dy =$$

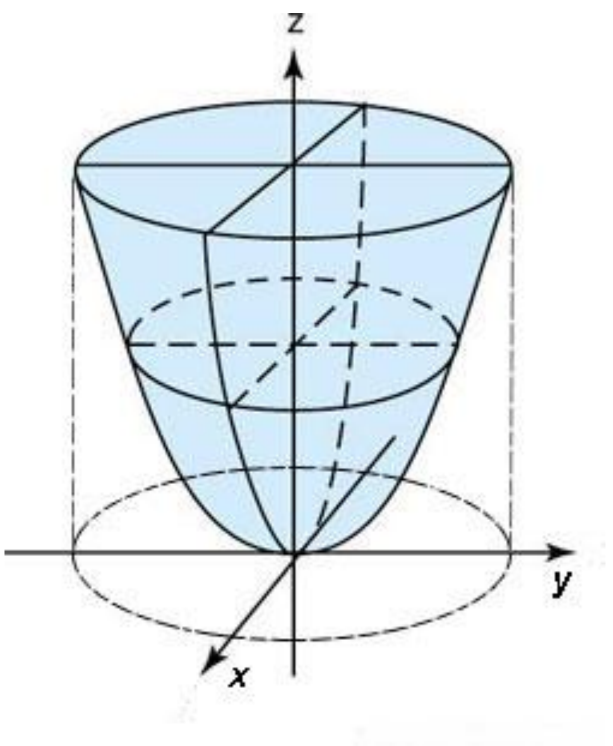
$$= 12\bullet\left(15\bullet\frac{y^2}{2}-14\bullet\frac{y^3}{3}+3\bullet\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 12\bullet\left(\frac{15}{2}-\frac{14}{3}+\frac{3}{4}\right)=90-56+9=43.$$

Пример 4. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

переходом к цилиндрическим координатам, где V - область, ограниченная поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$.



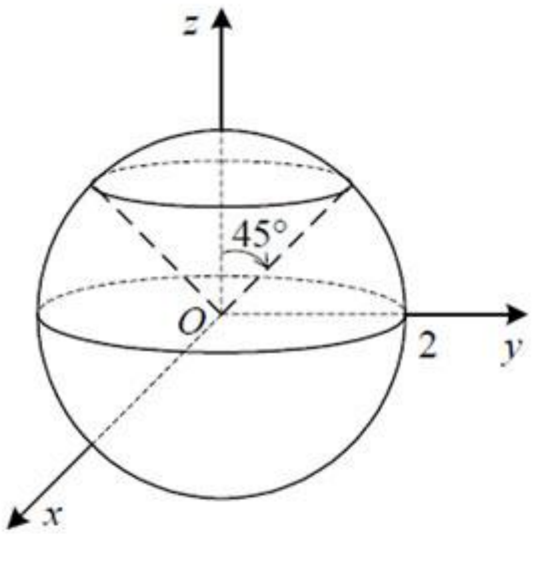
Решение. Так как область V на плоскость xOy проектируется в круг $x^2+y^2\le 1$, то координата φ изменяется в пределах от 0 до 2π, а координата r - от r=0 до r=1. Постоянному значению $r\left(0\le\rho\le 1\right)$ в пространстве соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью V, получаем изменение ординаты z от $z = r^2$ до $z = 1$. Переходим к цилиндрическим координатам и получаем:

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{r^2}^1 r^2 \bullet r\,dz =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[r^2 z\right]\Big|_{r^2}^1 dr =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi =$$
$$= \frac{1}{12} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12} \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$$

переходом к сферическим координатам, где V - область, ограниченная неравенствами $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.



Решение. Снизу область интегрирования ограничена конической поверхностью $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$, а сверху - сферой $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$. Так как область интегирования представляет собой часть шара, перейдём к сферическим координатам. Перепишем подынтегральную функцию:

$$z\sqrt{x^2+y^2} =$$
$$= \rho\cos\theta\sqrt{(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2} =$$
$$= \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$
$$= \rho\cos\theta\bullet\rho\sin\theta = \rho^2\sin\theta\cos\theta.$$

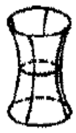
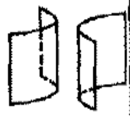
Учитывая, что $dxdydz = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, получаем

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_\Omega \rho^2\sin\theta\cos\theta\bullet\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$
$$= \iiint\limits_\Omega \rho^4\sin^2\theta\cos\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Расставим пределы интегрирования и перепишем последний полученный интеграл в виде трёх повторных интегралов. По рисунку видно, что $0\le\rho\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. Поэтому

$$\iiint\limits_\Omega \rho^4\sin^2\theta\cos\theta d\rho d\varphi d\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^4 d\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\left(\sin\theta\right)\bullet\varphi\Big|_0^{2\pi}\bullet\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2 =$$
$$= 2\pi\bullet\frac{32}{5}\bullet\frac{\sin^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{64\pi}{15}\left(\sin^3\frac{\pi}{4}-\sin^3 0\right) =$$
$$= \frac{64\pi}{15}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-0\right) =$$
$$= \frac{64\pi}{15}\bullet\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15}.$$

Так как все три интеграла - независимые друг от друга, мы смогли интегрировать каждый отдельно и результаты перемножить.

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$