Лекция 15.

Производная сложной функции

Пусть $y = f(z),\ z = g(x)$. Множество всех x, при которых значения z входят в область определения функции $f(z)$, является областью определения сложной функции

$$y = f\big(g(x)\big).$$

При этом $g(x)$ называется внутренней функцией, функция f называется внешней функцией. Переменная z - промежуточный аргумент; x - окончательный аргумент.

Если функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке $z = g(x)$, то *сложная функция y имеет производную, равную произведению производной от внешней функции по промежуточному аргументу на производную от внутренней функции по окончательному аргументу:*

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Внутренних функций и промежуточных аргументов может быть несколько.

Формула может быть обобщена

$z = f(y) \quad y = \varphi(t) \quad t = \psi(x)$

$z'_x = z'_y \cdot y'_t \cdot t'_x$

Пример.

$$y = \sqrt{tg(x^3 - 5x^2)}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x^3 - 5x^2)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 5x^2)} \cdot (3x^2 - 10x)$$

$$y = Ln(\cos^2 x)$$

$$y = LnU \quad U = V^2 \quad V = \cos x$$

$$y' = y'_u \cdot U'_v \cdot V'_x = \frac{1}{U} \cdot 2V \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot \sin x = -2tgx$$

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2+5}}$$

$$y' = e^{\frac{x-1}{x^2+5}} \cdot \left(\frac{x-1}{x^2+5}\right)' = e^{\frac{x-1}{x^2+5}} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+5) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = e^{\frac{x-1}{x^2+5}} \cdot \frac{-x^2 + 5 + 2x}{(x^2+5)^2}$$

С учетом правила дифференцирования сложной функции можно записать

$(U^n)' = nU^{n-1} \cdot U'$

$(\sqrt{U})' = \frac{1}{2\sqrt{U}} U'$

$(\frac{1}{U})' = -\frac{1}{U^2} U'$

и т. д.

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана следующим образом:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta .$$

Такое задание функции называется параметрическим, здесь переменная t называется параметром.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$ (то есть является строго монотонной на интервале (α, β)). Тогда y является функцией от x: $y = \phi(\Phi(x))$. Таким образом, уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$. определяют y как функцию от x.

Пусть $\varphi(t)$, $\phi(t)$ - дифференцируемые функции параметра t, причем $\varphi'(t) \ne 0$. Как всякие дифференцируемые функции они непрерывные. В силу этого при $\Delta t \to 0$ $\Delta x \to 0,$ $\Delta y \to 0$.

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y / \Delta t}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x / \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}$. Таким образом,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} .$$

Пример. Определить производную для функции $\begin{cases} x = \mathrm{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

Решение. Используя формулу (3), найдём y'_x для функции, заданной параметрически. Дифференцируем по t переменные x и y:

$$x'_t=\frac{1}{\cos^2 t},\quad y'_t=2\cos t\cdot(-\sin t)=-\sin 2t;\; {y_x}'=\frac{y'_t}{x'_t}=-\sin 2t\cdot\cos^2 t\,.$$

$$\begin{cases} x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$$

$$x'_t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$$

$$y'_t=e^t\cos t+e^t(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$y'_x=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

Производная функции, заданной неявно

Функция независимой переменной x называется неявной, если она определяется из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию y: $F(x,y)=0$. Часто разрешить это уравнение невозможно или нецелесообразно. При этом можно определить производную функции, дифференцируя обе части равенства по x, **помня, что y есть функция от x.**

Пример . Определить производную функции, заданной неявно

$$x^2y-xy^3+\sin(2x-3y)=1.$$

Решение

$(x^2y)'-(xy^3)'+(\sin(2x-3y))'=1'$,

$2xy+x^2y'-y^3-3xy^2y'+\cos(2x-3y)(2-3y')=0$,

$y'(x^2-3xy^2-3\cos(2x-3y))=y^3-2xy-2\cos(2x-3y)$,

$$y'=\frac{y^3-2xy-2\cos(2x-3y)}{x^2-3xy^2-3\cos(2x-3y)}.$$

Как видим, производная выражается явно относительно аргумента x и функции y.

$$e^{xy} - \cos(x^2 + y^2) = 0$$
$$e^{xy} \cdot (y + xy') + \sin(x^2 + y^2) \cdot (2x + 2y \cdot y') = 0$$
$$e^{xy} y + e^{xy} xy' + 2x\sin(x^2 + y^2) + 2y \cdot y' \sin(x^2 + y^2) = 0$$
$$y'(e^{xy} x + 2y \cdot \sin(x^2 + y^2)) = -e^{xy} y - 2x\sin(x^2 + y^2)$$
$$y' = \frac{-e^{xy} y - 2x\sin(x^2 + y^2)}{e^{xy} x + 2y \cdot \sin(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 + y^2 = Ln\frac{y}{x} + 7$$
$$(\frac{y}{x}) = y \cdot \frac{1}{x} = y'\frac{1}{x} + y(-\frac{1}{x^2})$$
$$2x + 2yy' = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot (y'\frac{1}{x} + y(-\frac{1}{x^2}))$$
$$2x + 2yy' - \frac{x}{y} \cdot y'\frac{1}{x} = -\frac{x}{y} y\frac{1}{x^2}$$
$$y'(2y - \frac{1}{y}) = -2x - \frac{1}{x}$$
$$y' = \frac{-2x - \frac{1}{x}}{2y - \frac{1}{y}}$$

Логарифмическое дифференцирование

$(x^5)' = 5x^4$ $\qquad$ $(5^x)' = 5^x Ln5$

$(x^x)' = ?$

Для дифференцирования функции $y = u(x)^{v(x)}$ нельзя непосредственно применить ни одно из правил дифференцирования или пункт таблицы производных, так как и основание, и показатель степени – функции независимой переменной. Функция называется показательно – степенной или сложной показательной.

Отношение $\frac{y'}{y}$ называется ***логарифмической производной*** функции y, т.к. $(Lny)' = \frac{y'}{y}$

Дифференцирование функций, которые допускают операцию логарифмирования (произведение, частное, возведение в степень, извлечение корня), значительно упрощается, если эти функции предварительно прологарифмировать, а затем воспользоваться логарифмической производной. Такой способ дифференцирования называется логарифмическим дифференцированием

Пример 1.

$$y = u^v$$

$$Lny = Lnu^v = vLnu$$

$$\frac{y'}{y} = v'Lnu + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = y(v'Lnu + v \cdot \frac{u'}{u}) = u^v(v'Lnu + v \cdot \frac{u'}{u})$$

Пример 2. $\quad y = (\mathrm{tg}x)^{e^x}$.

Решение. Логарифмируем левую и правую части по основанию e:

$$\ln y = \ln(\mathrm{tg}x)^{e^x}, \quad \ln y = e^x \cdot \ln(\mathrm{tg}x).$$

Теперь дифференцируем равенство, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, так как $y = y(x)$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(e^x\right)' \ln(\mathrm{tg}x) + e^x \left(\ln(\mathrm{tg}x)\right)', \qquad \frac{y'}{y} = e^x \ln(\mathrm{tg}x) + e^x \cdot \frac{(\mathrm{tg}x)'}{\mathrm{tg}x},$$

$$y' = y\left(e^x \ln(\mathrm{tg}x) + e^x \frac{1}{\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right), \qquad y' = (\mathrm{tg}x)^{e^x} \cdot e^x \left(\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{2}{\sin 2x}\right).$$

Пример 3.

$$y=\frac{(x-1)^{10}e^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$Lny=Ln\frac{(x-1)^{10}e^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$Lny=Ln(x-1)^{10}+Lne^{\sin x}-Ln\sqrt{(1+x^2)^3}$$

$$Lny=10Ln(x-1)+\sin xLne-\frac{3}{2}Ln(1+x^2)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{10}{x-1}+\cos x-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$$y'=y(\frac{10}{x-1}+\cos x-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2})$$

$$y'=\frac{(x-1)^{10}e^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}(\frac{10}{x-1}+\cos x-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2})$$

$$y=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$$

$$Lny=Ln\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$$

$$Lny=\frac{1}{5}(Ln(x^2+1)+Ln(x+3)-Ln(x-3)^3)$$

$$Lny=\frac{1}{5}Ln(x^2+1)+\frac{1}{5}Ln(x+3)-\frac{3}{5}Ln(x-3)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{5(x^2+1)}+\frac{1}{5(x+3)}-\frac{3}{5(x-3)}$$

$$y'=y\cdot(\frac{2x}{5(x^2+1)}+\frac{1}{5(x+3)}-\frac{3}{5(x-3)})$$

$$y'=\sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}\cdot(\frac{2x}{5(x^2+1)}+\frac{1}{5(x+3)}-\frac{3}{5(x-3)})$$

$$y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$Lny = Ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot Ln\sin x$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot Ln\sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = y \cdot (-\sin x \cdot Ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot Ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$$