ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата бинарных отношений при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия бинарных отношений

Бинарные отношения – это отношения, которые могут выполняться или не выполняться между элементами одного множества. Если X — множество решений (альтернатив), тогда отношение R на множестве X - это подмножество $R \subseteq X * X$, т.е. R - множество пар (x_i, x_j), определённые на декартовом произведении $X * X$ (X^2), для которых выполняется определённое (заданное) свойство.

Обозначение для отношения R.

Если пара $(x_i, x_j) \in R$, то $x_i R x_j$ (x_i находится в отношении R с x_j). Множество X – область задания отношений (отношения R).

Способы задания отношений:

1. Задание матрицей. Если множество X состоит из n элементов, то элементы $x_i \in X$ могут быть проидентифицированы индексами i такими, что $i = \overline{1,n}$; тогда для решений $x_i \in X$ может быть введена в рассмотрение матрица A размерности $n \times n$.

При этом если $x_i R x_j$, то, $a_{ij}=1$; если $x_i R x_j$ не является верным (т.е. $(x_i, x_j) \notin R$), то $a_{ij}=0$, тогда общее правило определения элементов матрицы A следующее ($(a_{ij}) = A$):

$$a_{ij}(A) = \begin{cases} 1, \textit{если } x_i R x_j \ ; \\ 0, \textit{если } x_i R x_j \textit{ не верно;} \end{cases}$$

при этом $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$.

Пример 1. Задание вида матрицы A (при $n = 4$).

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Заметим, что $a_{ii}=0$, (т.е. в данном (общем) рассматриваемом случае $(x_i, x_i) \notin R$).

2. Задание графом. Графом G называется пара $G(X, \Gamma)$, где X – конечное множество вершин, Γ (гамма) – конечное подмножество произведения X^2, множество дуг, соединяющих вершины; дугу, соединяющую вершину x_i с вершиной x_j, обозначим как (x_i, x_j).

Если множество решений (альтернатив) X однозначно соответствует множеству вершин графа X, тогда дуга (x_i, x_j) соединяет две вершины x_i и x_j в том случае, если выполнено отношение $x_i R x_j$.

Если задан граф G с n вершинами (где $|X| = n$), нумерация вершин G соответствует нумерации решений (альтернатив) из X, тогда на графе G (для элементов множества X) задаётся отношение R такое, что при $x_i R x_j$ на графе определяется дуга (формируется дуга) (x_i, x_j).

Пример 2. Задание графа отношения $G(R)$ (Рисунок 1).

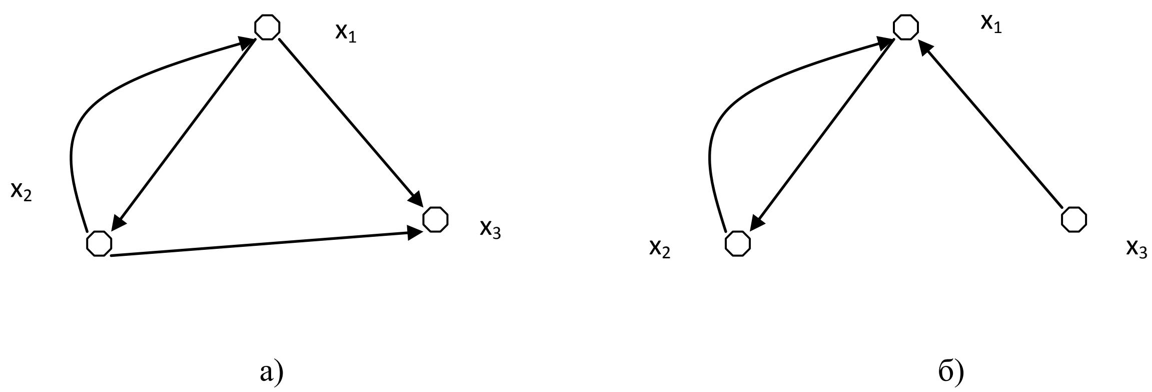


Рисунок 1 – Виды графов отношений $G(R)$

3. Задание сечением. Верхнее сечение множества (отношения) R обозначается как $R^+(x_i)$ (т.е. определяется для каждого элемента x_i множества X) и формируется в соответствии с выражением вида:

$$(x_i, x_j) \in R : R^+(x_j) = \{x_i \in X | x_i R x_j\}.$$

Если R – отношение предпочтения (доминирования), то для элемента x_j верхнее сечение $R^+(x_j)$ отношения R – это те решения x_i, которые предпочтительнее, чем рассматриваемое решение x_i. Нижнее сечение отношения R определяется аналогичным образом:

$$(x_i, x_j) : R^-(x_i) = \{x_j \in X | x_i R x_j\}$$

Таким образом, $R^+(x_j)$ – те элементы (решения) x_i, которые находятся с элементом x_j в отношении R; $R^-(x_i)$ – те элементы X (решения x_j), с которыми фиксированный элемент x_i находится в отношении R.

Отношения специального вида.

1. Пустое отношение. Отношение называется пустым Ø, если оно не выполняется ни для одной пары $(x_i, x_j) \in X^2$. Тогда матрица $A(\varnothing)$ такая, что $a_{ij}(\varnothing) = 0$ для всех i, j граф $G(\varnothing)$ не имеет дуг, сечения $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$.
2. Полное отношение. Отношение называется полным, если оно выполняется для всех пар $(x_i, x_j) \in X^2$. Полное отношение обозначается ***P***. Тогда $A(P)$ такая, что $a_{ij}(P) = 1$ для всех индексов i, j; граф $G(P)$ такой, что дуги соединяют любую пару вершин; $R^+(x) = R^-(x) = X \setminus \{x\}$ для любого $x \in X$.

Операции над отношениями.

1. Вложение отношений. Отношение R_1 вложено или включено в отношение R_2 (обозначается $R_2 \succ R_1$), если множество пар (x_i, x_j), для которых выполнено отношение R_1, содержится в множестве пар, для которых выполнено отношение R_2. Если $R_2 \succeq R_1$, то либо $R_2 = R_1$, либо $R_2 \succ R_1$.

2. Дополнение отношения R. Отношение $\overline{R}$ называется дополнением отношения R, если оно выполняется для тех пар (x_i, x_j), для которых не выполняется отношение R. Таким образом, если $(x_i, x_j) \notin R$, то $(x_i, x_j) \in \overline{R}$ (т.е. $\overline{R} = X \setminus R$). Тогда $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R)$, граф $G(\overline{R})$ содержит те дуги, которые отсутствуют в графе $G(R)$.

3. Обратное отношение. Обратным к отношению R называется отношение R^{-1}, определяемое условием:

$$x_i R^{-1} x_j <=> x_j R x_i .$$

Если R – отношение «меньше» на множестве действительных чисел, то обратное отношение R^{-1} – «больше». Для обратного отношения справедливо:

1) $a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R)$ при $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$;

2) граф $G(R^{-1})$ получается из графа $G(R)$ изменением направления дуг.

Свойства отношений

1. Рефлексивность. Отношение R называется рефлексивным, если $x_i R x_i$. Тогда:

а) в матрице $A(R)$ рефлексивного отношения R на главной диагонали заданы 1;

б) в графе $G(R)$ при каждой вершине имеется петля.

Соответственно, если отношение R антирефлексивно, то выражение вида $x_i R x_i$ не является верным, в этом случае диагональные элементы матрицы $A(R)$ равны 0.

2. Симметричность. Отношение R - симметрично, если из $x_i R x_j$ вытекает $x_j R x_i$. Тогда:

а) матрица $A(R)$ отношения R симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

б) каждая вершина x_i графа $G(R)$ имеет исходящую дугу (x_i, x_j) и входящую дугу (x_j, x_i).

3. Асимметричность. Для пары (x_i, x_j) выполняется либо $x_i R x_j$, либо $x_j R x_i$, т.е. если $x_i R x_j$ выполняется, то $x_j R x_i$ нет. В этом случае граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги (x_i, x_j) и (x_j, x_i) (содержит одну из этих дуг).

4. Антисимметричность. Для антисимметричного отношения R выражения $x_i R x_j$ и $x_j R x_i$ справедливы тогда, когда $x_i = x_j$. Для антисимметричного отношения R граф $G(R)$ не может одновременно содержать дуги (x_i, x_j) и (x_j, x_i) при $i \neq j$.

5. Транзитивность. Из xRz и zRy следует xRy.

6. Ацикличность. Из $x_i R x_j$, $x_j R x_k, \ldots$, $x_{k+l} R x_m$ следует, что $x_i \neq x_m$ (т.е. путь на графе не является циклом).

Виды отношений, используемых в ТПР

1. Отношение эквивалентности ~ (вид отношения, связывающего пару решений (x_i, x_j) – $(x_i \sim x_j)$. Свойства отношения: рефлексивно ($x_i \sim x_i$), симметрично ($x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_i$), транзитивно ($x_i \sim x_j$, $x_j \sim x_k$, $x_i \sim x_k$). Отношение эквивалентности ~ определяет, что два решения x_i и x_j эквивалентны.

2. **Отношение нестрогого предпочтения** $x_i \succeq x_j$ определяет, что решение x_i не хуже, чем решение x_j (т.е. лучше или эквивалентно). Таким образом для пары решений выполняется либо $x_i \succ x_j$ либо $x_i \sim x_j$. Свойства отношения: рефлексивность ($x_i \succeq x_i$), антисимметричность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_i$, то $x_i \sim x_j$), ~~транзитивность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_k$, то $x_i \succeq x_k$)~~. Таким образом, отношение $\succeq$ позволяет реализовывать упорядоченность решений при возможной их эквивалентности. **Отношение нестрогого предпочтения индуцирует отношение нестрогого (частичного) порядка на множестве *X*.**

3. **Отношение строгого предпочтения** $x_i \succ x_j$ (т.е. решение x_i строго лучше, чем x_j). Свойства отношения: антирефлексивность ($x_i \succ x_j$ не является верным), антисимметричность (если верно $x_i > x_j$, то $x_j \succ x_i$ - не верно и наоборот). Отношение $\succ$ также соответствует отношению строгого предпочтения (доминирования). Т.е. при $x_i \succ x_j$ решение x_i строго предпочтительнее решения x_j, решение x_i доминирует решение x_j. Отношение строгого предпочтения индуцирует отношение строгого порядка на множестве решений *X*.

Тогда с использованием отношений $\succ$ и $\sim$ может быть определён порядок (предпочтительность, доминирование) решений.

Пример 3. Задание вида порядка решений.

$x_i \succ x_j \sim x_k \succ x_l$

2.2. Выбор эффективных решений, порождённый бинарными отношениями

Если X - множество решений, тогда в нём может быть определено подмножество $C(X)$ решений, называемых предпочтительными элементами (решениями) в X. Для определения в множестве X подмножества $C(X)$ в рассмотрение введена функция отображения C, составляющая множеству X его подмножество $C(X)$, т.е. $C: X \to C(X)$.

Функция выбора – это способ построения подмножества предпочтительных решений $C(X)$ на основе множества решений X. Если на множестве решений X определено (задано) бинарное отношение R (в частности, отношение строгого предпочтения $\succ$), то этому отношению может быть поставлена в соответствие функция выбора C. Тогда с использованием функции выбора на основе бинарного отношения R $(\succ)$ может быть определено множество предпочтительных решений.

В случае, если для каждой пары $(x_i, x_j) \in X^2$ выполнено (задано) отношение R (т.е. задано $x_i R x_j$, $x_i \succ x_j$), тогда при определении подмножества $C(X) \subseteq X$ могут быть использованы следующие рассуждения:

1) если $x_i \succ x_j$, то при определении выбора решения $x_i, x_j \in X$ из X считается, что $x_j \notin C(X)$;

2) если $x_i \succ x_j$, то x_i может быть включено в $C(X)$.

Если $\succ$ – отношение предпочтения ($x_i \succ x_j, x_i$ предпочтительнее x_j), $\bar{\succ}$ - отсутствие предпочтения ($x_i \bar{\succ} x_j$, x_i не предпочтительнее x_j), тогда из отношения $\succ (x_i \succ x_j)$ вытекают два способа формирования множества $C(X)$.

Первый способ.

Множество $C^R(X)$ образуется теми решениями x_i, для которых условие предпочтительности ими других решений (решений x_j) не выполняется (т.е. $\forall x_j \in x$ не предпочтительнее решений $x_i \in C^R(X)$). Данная формулировка может быть представлена следующим выражением:

$$C^R(X) = \left\{ x_i \in X \middle| \forall x_j \in X,\ x_j \bar{\succ} x_i \right\}. \qquad (1)$$

Тогда $C^R(X)$ - это те решения x_i, для которых все возможные решения $x_j \in X$ не предпочтительнее их.

Второй способ.

Решения x_i, формирующие $C_R(X)$, предпочтительнее любого решения $x_j \in X$.

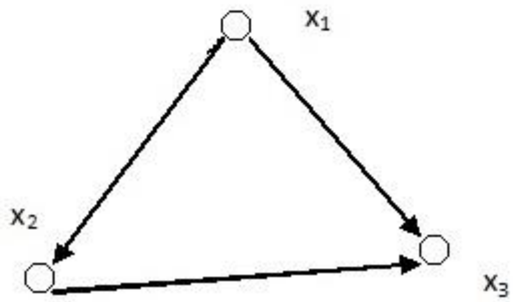
Данная формулировка формализована в виде выражения:

$$C_R(X) = \left\{ x_i \in X \ \ \forall x_j \in X, x_i \succ x_j \right\}. \qquad (2)$$

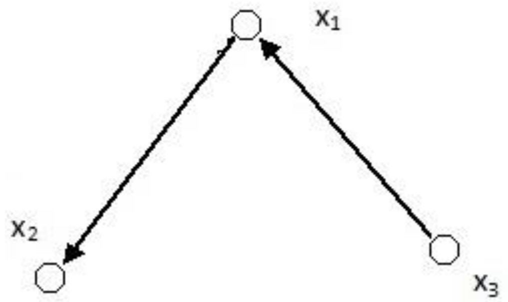
Условие для определения $C^R(X)$ называется условием блокировки, условие для определения $C_R(X)$ - условие предпочтения.

Таким образом, решения x_i, входящие в множество $C^R(X)$ или $C_R(X)$, определяемые выражениями (1), (2), являются наилучшими решениями, т.к. они непосредственно доминируют (являются предпочтительными) остальные решения x_j либо не доминируются ни одним из решений x_j.

Пример определения наилучших (предпочтительных) решений на основе графовой модели представления бинарных отношений приведён на Рисунке 2.



а)



б)

Рисунок 2 – Вид графовой моделей для определения наилучших (предпочитаемых) решений

На Рис. 2а) решение x_1 является предпочитаемым так как оно домирирует оставшиеся решения x_2 и x_3. На Рис. 2б) решение x_3 является предпочитаемым, т.к. оно не диминируется ни одним из решений, входящих в множество X. Определение предпочтительных решений $x_i \in X$, доминирующих остальные решения множества X, на основе графовых моделей рассмотрено ниже.

Альтернативный вариант графа отношения строго предпочтения представлен на Рисунке 3.

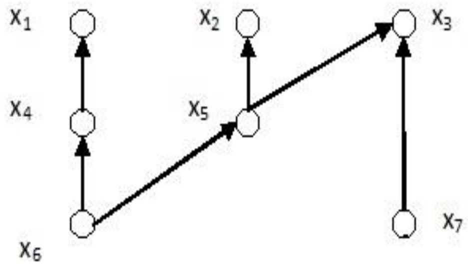


Рисунок 3 – Вид графовой модели отношения, для которой не выполняются условия для наилучший решений

На Рис.3 решения x_6 и x_7. являются не сравнимыми и они не доминируются ни одним другим решением из множества X.

В случае, если для множества X не может быть сформировано множество предпочитаемых решений, то для этого множества может быть сформировано множество максимальных элементов обозначенное как $Max_R X$, среди которых могут быть выбраны эффективные решения. Для включения элемента (решения) x_i множества $X(x_i \in X)$ в множество максимальных элементов $Max_R X$ (где R - отношение предпочтения/доминирования $\succ$) должно выполняться одно из следующих условий:

1) $\forall x_j : x_i \succ x_j$ (x_i предпочтительнее x_j для всех x_j), тогда если элемент x_j доминируем , то он не включается в $Max_R X$;

2) решения x_i и x_j эквивалентны ($x_i \sim x_j$) и решение $x_i \in Max_R X$;

3) решения x_i и x_j не сравнимы.

Реализация второго условия предполагает, что для пары элементов $(x_i, x_j) \in R$ между вершинами имеются две разнонаправленные стрелки. Реализация третьего условия предполагает, что решения x_i и x_j не связаны отношением предпочтения (т.е. не сравнимы), тогда между ними нет стрелки на графе $G(R)$;

Тогда $x_i \in X$ является максимальным элементом в модели $< X, R >$ если:

$$\forall x_j \in X : (x_i, x_j) \in R <=> (x_j, x_i) \in R .$$

Таким образом, основное понятие для принятия решений с использованием бинарного отношения предпочтения $\succ$ – это максимальный элемент и множество максимальных элементов $Max_R X$. Тогда формирование множества $Max_R X$ – это выделение наилучших элементов $x_i \in X$ по бинарному отношению $\succ$.

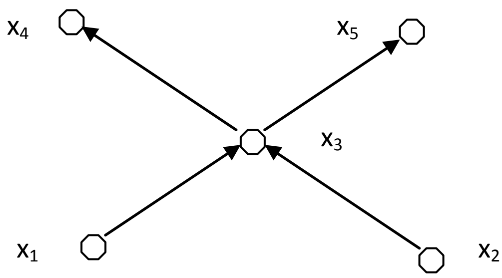
Определение. Множество $Max_R X$ называется внешне устойчивым, если для любого элемента $x_j \in X \setminus Max_R X$ найдется такой элемент $x_i \in Max_R X$, что $x_i R x_j$.

Если множество $Max_R X$ внешне устойчиво, то выбор эффективных решений x_i производится только в пределах $Max_R X$. Множество $Max_R X$ называется ядром множества X .

Тогда под задачей принятия решений с использованием бинарных отношений подразумевается задача выделения ядра $Max_R X$ из множества X . На Рис. 3 множество $Max_R X$ имеет вид: $Max_R X = \{x_6, x_7\}$, но при этом оно не является внешне устойчивым, т.е. в нем не могут быть выбраны эффективные решения.

Особенности построения алгоритма формирования множества $Max_R X$ далее прокомментированы на примерах.

Пример 4. Вид графа $G(R)$ и матрицы отношения (Рис. 4).



$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 4 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

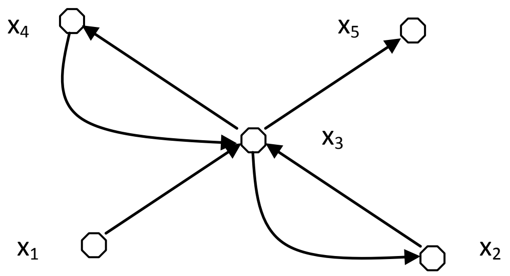
Матрица (a_{ij}) отображает непосредственное предпочтение решения x_i над решением x_j $(x_i R x_j)$.

Так как элементы x_i строго упорядочены с точки зрения отношения $\succ$, то $a_{ij} \neq a_{ji}$. Решения x_1 и x_2 доминируют все остальные решения (предпочтительнее всех остальных решений) поэтому в столбцах $j = 1$, $j = 2$ $a_{ij} = 0$ для всех i .

Для рассматриваемого примера синтаксис определения состава множества $Max_R X$ (в рассмотрение введен массив $MaxR$) имеет следующий вид:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
 Цикл j=1 до 5
   Цикл i=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
            MaxR[j]=0;
```

Пример 5. Вид графа $G(R)$ и матрицы парных сравнений для отношения $\succ$ (Рисунок 5).



$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 5 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

Предлагаемый код программы для формирования множества $Max_R X$ (вектора $MaxR$) следующий:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
 Цикл i=1 до 5
   Цикл j=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
      Если a[j,i]=0 то
         MaxR[j]=0;
      Если (a[j,i]=1)&( MaxR[i]=0) то
          MaxR[j]=0;
```

Подобный синтаксис определения элементов множества $Max_R X$ (массива Max_X) может быть применен и для вида графа $G(R)$ в Примере 6 (Рисунок 6).

Пример 6. Вид графа $G(R)$ бинарных отношений для множества решений *X*.

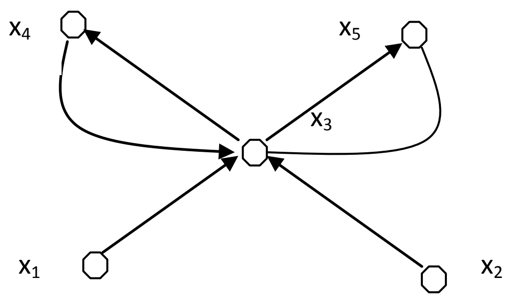


Рисунок 6 – Вид графовой модели отношений, для которой формируется множество $Max_R X$

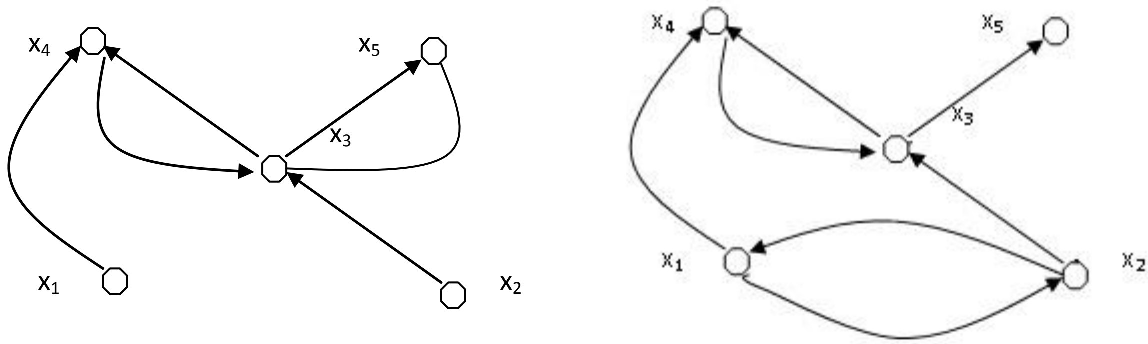
Понятно, что в результате должно быть получено множество $Max_R X$ в виде: $Max_R X = \{x_1 x_2\}$. Таким образом условиями включения/не включения элемента $x_i \in X$ в множество $Max_R X$ являются:

1) $x_i \succ x_j \Rightarrow x_j \notin Max_R X$;

2) если $\forall x_j : x_i \succ x_j \Rightarrow x_i \in Max_R X$;

3) если $x_i \overline{\succ} x_j$ $x_j \overline{\succ} x_i$ $\Rightarrow x_i \in Max_R X$ и $x_j \in Max_R X$ при условии, что ни x_i ни x_j не доминируются.

Задание. Выполнить проверку применимости приведенного программного кода для графов отношений следующего вида (Рис.7).



а) **б)**

Рисунок 7– Виды графовых моделей отношений, для которых формируются множества $Max_R X$

2.3.Определение порядка решений для графовых моделей бинарных отношений

Бинарные отношения между решениями могут быть представлены в виде графовой модели $G(R)$, дуги на графе соединяют вершины x_i и x_j если бинарное отношение R связывает решения x_i и x_j.

Задание. На графе $G(R)$, определяющем бинарные отношения и представленным на Рис.8, идентифицировать сравнимые и несравнимые решения.

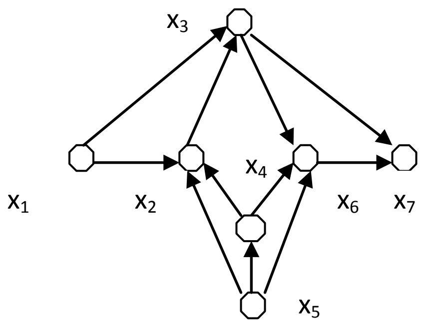


Рисунок 8 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений

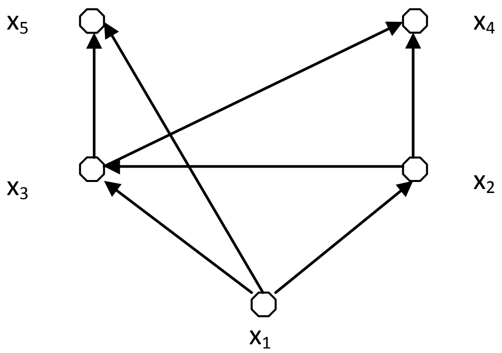
Если граф не содержит контуров, то все его вершины могут быть упорядочены таким образом, что направления всех дуг будут совпадать. В результате вершины графа $G(R)$ (решения x_i) могут быть распределены по ярусам. В вершины x_j яруса k входят дуги из вершин x_i $(k-1)$-го яруса если $x_i R x_j$, из вершин x_j k-го яруса вы ходят дуги в вершины x_h

$(k+1)$-го яруса в том случае, если $x_j R x_h$. Формирование распределения вершин x_i по ярусам для графовой модели $G(R)$ позволяет определить порядок этих вершин (порядок решений) и, соответственно, выделить лучшие решения. Для определения порядка (упорядочивания) решений (вершин графа $G(R)$) может быть реализован следующий алгоритм. На i-ой итерации алгоритм реализует выделение вершин источников (т.е.вершин. в которые не входят стрелки). Решения, соответствующие этим вершинам, ставятся на i-е место в последовательности решений Π, после чего выбранные вершины отбрасываются. Обобщенный порядок шагов алгоритма, реализующего определение последовательности решений с точки зрения бинарного отношения предпочтения, следующий:

1) $i=1$;
2) выбрать варианты–источники (вершины, решения). Если таковые отсутствуют – переход на шаг 7;
3) выбранные вершины отнести к i-ому ярусу;
4) $i=i+1$;
5) выбранные на втором шаге вершины – источники удаляются из графа (в дальнейшем не рассматриваются);
6) переход к шагу 2;
7) конец.

Пример реализации данного алгоритма ориентирован на работу с матрицей инциденций. Элемент матрицы $(a_{ij})=1$ в случае, если из вершины x_i в вершину x_j идет направленная дуги. Если вершина является источником, то отсутствуют дуги, идущие в неё. Тогда весь j-ый столбец, соответствующий вершине-источнику x_i, должен содержать нулевые элементы (т.к. данная вершина не зависит от других и в неё не ведут дуги).

Реализацию алгоритма построим на примере графа $G(R)$, представленного на Рис. 9, и соответствующей ему матрицы инциденций.



$$a_{ij} = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 9 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений и соответствующая ей матрица отношений

В результате реализации приведенного фрагмента программы все решения будут упорядочены, при этом лучшее решение будет являться первым в массиве $MaxR$.

Аналогичный подход может быть реализован и при анализе вершин-приемников, т.е вершин, в которые идут стрелки. Тогда самыми первыми в упорядоченном массиве решений $MaxR$будут являться те вершины, из которых не выходят стрелки, а самым лучшим решением в их последовательности будет являться последнее решений.

//**Обозначение параметров, используемых при реализации алгоритма**

// K - количество элементов, добавленных в массив $Max[i]$

// $MaxR[i]$ - массив решений, упорядоченных с точки зрения убывания предпочтения

```
// счётчик – текущее количество решений, которые могут быть проанализированы

Счётчик =5;    K =0;  K1=1;

Пока счётчик >=0
    // определение исключаемых элементов
    Цикл j = 1 до 5
      Сумма =0;
      Цикл i = 1 до 5
        Сумма=Сумма + a[i, j];
        Если Сумма =0 то
            K = K +1;
            MaxR[ K ] = j ;
    Цикл q = K1 до K
      // обнуление элементов в a_ij , зависящих только от решений,
      //  находящихся в массиве MaxR.
      Цикл j = 1 до 5
        a[ MaxR[ q ], j ] = 0 ;
      // исключение элементов, добавленных в MaxR
    Цикл q = K1 до K
      Цикл i = 1 до 5
        a[ j ,MaxR[ q ]] = 1; ;

    K1=K+1;  Счетчик=5-K;
Конец цикла пока;
```

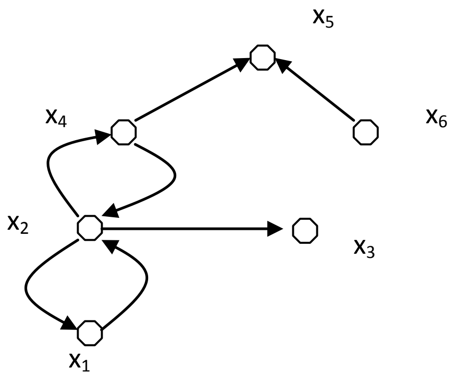
3. Программа выполнения работы

3.1. Для Варианта 1 задания на работу, связанного с формированием подмножества максимальных элементов $MaxR$ множества X, необходимо по заданному варианту графа отношений предпочтения между решениями сформировать матрицу A отношения R (где R– отношение $\succ$). При этом убедиться, что первый элемент множества X является строго независящим от других решений.
3.2. Выполнить формирование множества $MaxR$ вручную для заданного вида графа и соответствующего ему вида матрицы *A*.
3.3. Выполнить формирование программного кода соответствующей процедуры определения множества $MaxR$, при этом возможно руководствоваться ориентировочным видом процедуры определения этого множества, предложенным в теоретическом введении данной лабораторной работы.
3.4. Выполнить вывод результатов работы процедуры и сравнить полученные в процедуре результаты с результатами, сформированными аналитически.
3.5. Изменить исходные данные программы, используя графы отношений из примера 5 (Рис 7). Проверить получаемые с использованием процедуры результаты с аналитическим результатами, формируемыми для этих графов.
3.6. Варианты 2 и 3 задания на работу, связаны с построением упорядоченного множества решений, формируемого на основе задаваемого множества X и отношений между его элементами, представленными в виде графа. Для реализации задания необходимо на основе графа заданного вида сформировать матрицу A отношений между решениями x_i .
3.7. Для полученного вида матрицы A аналитически выполнить определение порядка решений– множества упорядоченных решений $MaxR$. Упорядочить рассматриваемые решения по ярусам. Определить количество элементов на первом (либо последнем) ярусе формируемой схемы, эти элементы (решения) являются эффективными.

3.8. В соответствии с предложенным возможным синтаксисом процедуры определения упорядоченного множества решений $MaxR$ выполнить формирование программы, которая в соответствии с видом матрицы отношений A реализует определение множества $MaxR$. Предусмотреть при написании программы указание номера яруса схемы, на котором находятся соответствующие решения. Руководствуясь нумерацией ярусов определить эффективные решения (на первом либо последнем ярусах).
3.9. Выполнить сравнение полученных с использованием процедуры результатов с результатами, полученными аналитически.
3.10. Изменить в реализуемой программе исходные данные, изменив их на данные Рис.9. Выполнить аналитическое построение множества $MaxR$ для этих данных и сравнить его с результатами, полученными с использованием процедуры.
3.11. В отчете представить графы отношений между решениями в соответствии с вариантом задания, виды матриц A отношений между решениями, аналитические виды решений поставленной задачи, распечатки результатов решения задачи с использованием разработанной программы.

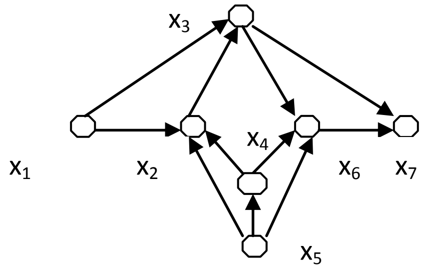
4. Варианты заданий

Вариант 1. Выполнит разработку программы, реализующей определение множества максимальных элементов $Max1$, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$. При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества *X*.



Применить разработанную процедуру к графам на Рис. 7.

Вариант 2. Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений $MaxR$ для множества *X*, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$ с учетом рассмотрения вершин-источников на каждом шаге алгоритма. При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества *X*.



Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

Вариант 3. Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений $MaxR$ для множества X, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$ с учетом рассмотрения вершин-приемников на каждом шаге алгоритма (задача, обратная рассматриваемой для Варианта 2). При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать вид графа отношений между решениями множества X, аналогичный варианту 2. Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

5. Контрольные вопросы.

5.1. Что такое бинарные отношения и что они характеризуют?
5.2. Каковы способы задания бинарных отношений?
5.3. Каковы свойства бинарных отношений и операции над ними?
5.4. Что такое функция выбора для предпочитаемых элементов и каким образом выбор предпочитаемых элементов формализуется?
5.5. Что такое условия блокировки и предпочтения и как они формализуются?
5.6. Что такое наилучшие элементы множества решений и каким образом реализуется из определение?
5.7. Что такое подмножество максимальных элементов $Max_R X$ в множестве решений X и каковы условия принадлежности решения этому множеству?
5.8. Что такое внешняя устойчивость множества $Max_R X$ и как она определяется (каковы условия внешней устойчивости множества $Max_R X$)?
5.9. Какой вид может иметь примерный синтаксис программы определения элементов в $Max_R X$ при выполнении условия эквивалентности (несравнимости) решений?
5.10. Какие условия для вершин графа $G(R)$ должны выполняться, чтобы решения могли быть упорядочены?
5.11. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?
5.12. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?
5.13. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?
5.14. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?
5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) множества $Max_R X$ для графов отношений $G(R)$ на Рис.7?
5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) упорядоченное множество решений для множества X и для графа отношений $G(R)$ на Рис.9?