ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. *Если каждому натуральному числу* n *по некоторому правилу поставлено в соответствие действительное число* x_n, *то говорят, что задана числовая последовательность* $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Таким образом, числовая последовательность — это функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число x_n — ***общим*** или n-*м* ***членом*** данной последовательности.

Известными из школьного курса математики примерами числовых последовательностей являются бесконечные арифметическая и геометрическая прогрессии, общие члены которых определяются соответственно формулами:

$$x_n = x_1 + (n-1)d \ \ (d \text{ — разность прогрессии}),$$

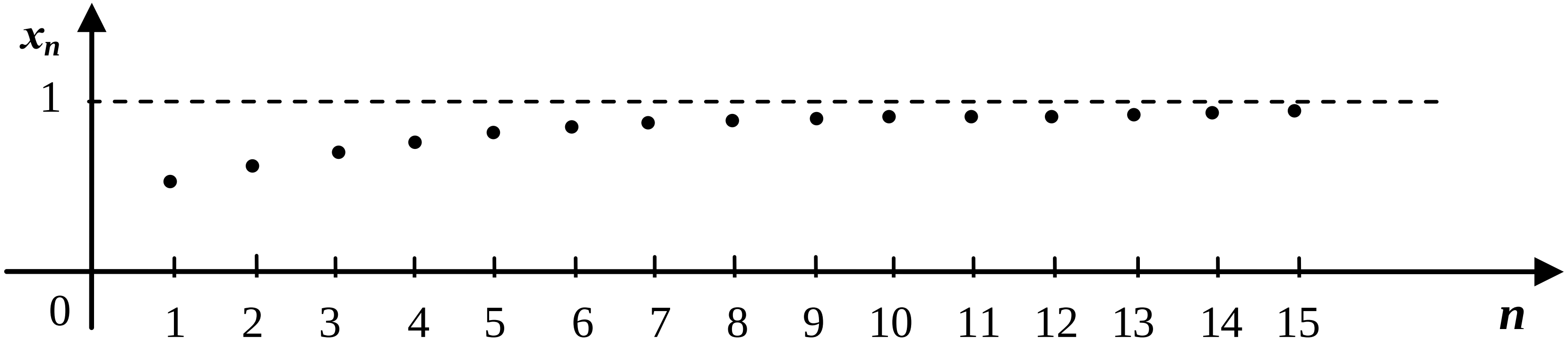
$$x_n = x_1 q^{n-1} \ \ (q \text{ — знаменатель прогрессии}).$$

Числовая последовательность называется ограниченной или монотонной, если соответствующим свойством обладает функция f, определяющая общий член этой последовательности. Так, например, последовательность $\{2n\} = 2, 4, \ldots, 2n, \ldots$, является возрастающей и неограниченной;

$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$ — ограниченная и возрастающая

Пример. Изобразить графически несколько членов последовательности $\{x_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ или

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{6}{7};\ \frac{7}{8};\ \frac{8}{9};\ \frac{9}{10};\ \frac{10}{11};\ \frac{11}{12};\ \frac{12}{13};\ \frac{13}{14};\ \frac{14}{15};\ \ldots$$



Видно, что члены последовательности «накапливаются» возле значения 1.

Иначе, точка 1 является «точкой сгущения» (т.е. все x_n «близки» к 1). При этом абсолютная величина разности $|x_n - 1|$ становится все меньше и меньше. Действительно,

$$|x_1 - 1| = \frac{1}{2},\ |x_2 - 1| = \frac{1}{3},\ |x_3 - 1| = \frac{1}{4},\ \ldots,\ |x_n - 1| = \frac{1}{n+1},\ \ldots,$$

т.е. с ростом n модуль разности $|x_n - 1|$ будет меньше любого, сколь угодно малого положительного числа.

Определение. *Число a называется* ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, *если для любого сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$, *найдется такой номер* N, *зависящий от* ε $(N = N(\varepsilon))$, *что для всех членов последовательности с номерами* $n > N$ *выполняется неравенство* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, в противном случае — ***расходящейся***.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Пример. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ имеет предел, равный единице.

Решение:Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Чтобы доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$, нужно указать номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, т.е.

$\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Откуда $n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ и $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.

Среди сходящихся числовых последовательностей важную роль играют так называемые бесконечно малые последовательности.

Определение. Бесконечно малой *последовательностью называется последовательность* $\{\alpha_n\}$, *имеющая своим пределом нуль, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Например, бесконечно малыми являются последовательности с общими членами $x_n = \dfrac{2}{n}$ и $x_n = 3^{-n}$.

Очевидно, что неограниченная последовательность не имеет конечного предела. Однако она может иметь бесконечный предел.

Определение. *Говорят, что числовая последовательность* $\{x_n\}$ *имеет бесконечный предел, если для любого сколь угодно большого положительного числа* $M > 0$, *найдется такой номер* N, *зависящий от* M $(N = N(M))$, *что для всех членов последовательности с номерами* $n > N$, *выполняется неравенство* $|x_n| > M$.

Символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Например, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n^3) = -\infty$.

На основании определений доказывается следующее утверждение: если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая последовательность, имеющая бесконечный предел

и наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность. Символически эти утверждения записываются в виде

$$\left[\frac{1}{0}\right]=\infty \text{ и } \left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Например, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, а последовательность $\{n\}$ — бесконечно большая ($\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$).

Перечислим основные свойства сходящихся последовательностей, которые в курсе математического анализа сформулированы в виде теорем.

СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, то этот предел единственный. Сходящаяся последовательность ограничена.

2) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для произвольного действительного числа c существует

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n .$$

3) Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то существует

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) если $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4) Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности (или числа) есть бесконечно малая числовая последовательность.

5) Произведение конечного числа бесконечно малых числовых последовательностей есть бесконечно малая числовая последовательность.

Приведем пример использования свойств.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}+9}{\frac{2}{n}-7}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}+9\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-7\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}9}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}7}=\frac{0+0+9}{0-7}=-\frac{9}{7},$$

При вычислении пределов последовательностей часто приходится сталкиваться с неопределенными выражениями. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то о пределе последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ заранее ничего определенного сказать нельзя. Этот предел может принимать как любое конечное, так и бесконечное значение, или вообще не существовать. В этом случае говорят, что мы имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскрыть эту неопределенность означает выяснить вопрос о существовании предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ и вычислить его в случае существования.

Другими неопределенностями, кроме $\left[\frac{0}{0}\right]$, являются неопределенности типа

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ [1^{\infty}],\ [0^{0}],\ [\infty^{0}].$$

Для раскрытия неопределенности в каждом конкретном случае применяются специальные приемы, некоторые из них рассмотрим на следующих примерах.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-5n^3-4n^2+1\right)=[\infty-\infty]$.

Неясно, к чему стремится выражение в скобках при $n\to\infty$, так как n^4 стремится к $+\infty$, а выражение $\left(-5n^3-4n^2\right)$ стремится к $-\infty$. Вынесем за скобки n^4, так как это старшая степень

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4-5n^3-4n^2+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(1-\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right]=+\infty\,.$$

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+3}{7n^2+5n-10}$.

Решение. При $n\to\infty$, числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, и мы имеем неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. С целью раскрытия этой неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на n^2. Применяя затем теоремы о пределе частного и суммы, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+3}{7n^2+5n-10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{7+\frac{5}{n}-\frac{10}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{5}{n}-\frac{10}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}.$$

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Решение. При $n\to\infty$, имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность умножим и разделим выражение под знаком предела на $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Аналогичным образом, можно показать, что вообще говоря

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\ldots+b_{l-1}n+b_l}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & m<l;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=l;\\ \infty, & m>l.\end{cases}$$

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}+\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[6]{n^4+2}+\sqrt{n^3+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$.

Решение: Получили неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя $\dfrac{5}{4}$, а старшая степень знаменателя $\dfrac{3}{2}$. Так как $\dfrac{3}{2}>\dfrac{5}{4}$, то предел частного при $n\to\infty$ равен 0.

Пример. Старшая степень числителя n^2, старшая степень знаменателя n^2, делим числитель и знаменатель на n^2, в результате получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{7/6}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{\left(1+\frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{1}=2$$