# Основные теоремы дифференциального исчисления

## Теоремы о среднем

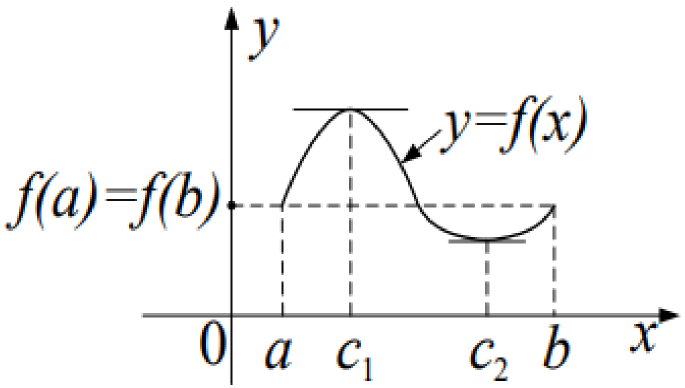
**Теорема 11.1.** *(теорема Ферма).* Пусть в интервале $(a;b)$ определена функция $f(x)$, которая в некоторой точке $x_0 \in (a;b)$ имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не существует.

Для дифференцируемой на $(a;b)$ функции $f(x)$ **геометрический смысл** теоремы Ферма в том, что, если такая функция имеет в точке $x_0$ $\in (a;b)$ наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси $Ox$.

**Теорема 11.2**. *(теорема Ролля)*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в $(a;b)$ и имеет равные значения на концах отрезка: $f(a)=f(b)$. Тогда существует хотя бы одно значение $c\in(a;b)$ такое, что $f'(c)=0$.

Теорему Ролля, по понятной причине, называют **теоремой о корнях производной** дифференцируемой функции.

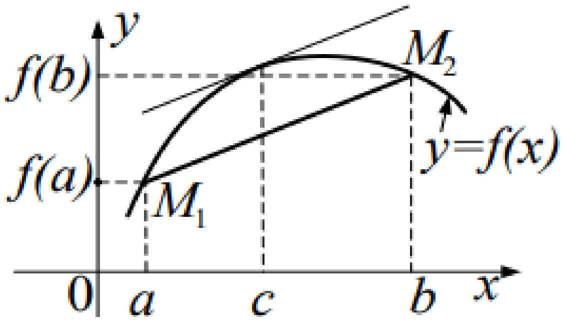
Геометрически она означает, что у графика функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует на $(a;b)$ точка $(c;f(c))$, в которой касательная параллельна оси $0x$ (см.



**Теорема 11.3.** *(теорема Коши)*. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы в $(a;b)$ и при $\forall x \in (a;b) \quad : \varphi'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

**Теорема 11.4** *(теорема Лагранжа)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ или $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
При этом последнее равенство называется формулой Лагранжа **или формулой конечных приращений.**

В силу того, что величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей (хорды) $M_1M_2$ графика функции $y=f(x)$ (где $M_1(a;f(a))$, $M_2(b;f(b))$), а $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(c;f(c))$,




**геометрический смысл** теоремы Лагранжа заключается в том, что в интервале $(a;b)$ существует, по крайней мере, одна точка $c$, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна секущей (хорде) $M_1M_2$ (см. рис. 11.2).

# Правило Лопиталя

**Теорема 11.5** *(теорема Лопиталя)*. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x_0$, и пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ или $\infty$, $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при неопределенности $(0/0)$ или $(\infty/\infty)$, и при этом имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Замечания**.

1. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x = a$.

2. Если при вычисления предела отношения производных функций $f(x)$ и $g(x)$ снова приходим к неопределённости вида 0/0 или ∞/∞, то правила Лопиталя следует применять многократно (минимум дважды).

3. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда аргумент функций (икс) стремится не к конечному числу $a$, а к бесконечности ($x \to \infty$).

К неопределённостям видов 0/0 и ∞/∞ могут быть сведены и неопределённости других видов.

**Пример 1.** Вычислить предел отношения двух функций, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 3)}.$$

Решение. Подстановка в заданную функцию значения $x$=2 приводит к неопределённости вида 0/0. Поэтому производную каждой функции и получаем

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln\left(x^2 - 3\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 3x + 2\right)'}{\left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right]'} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x / \left(x^2 - 3\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x - 3)\left(x^2 - 3\right)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

В числителе вычисляли производную многочлена, а в знаменателе - производную сложной логарифмической функции.

**Пример 2.** Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения икса, равного плюс бесконечности, приводит к неопределённости вида ∞/∞. Поэтому применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\bullet 1}=0$$

**Пример 3.** Вычислить предел отношения двух функций, пользуясь правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды, поскольку и предел отношения функций, и предел отношения производных дают неопределённость вида ∞/∞.

**Пример 4.** Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 12x^2}{7x^3 + x^2}.$$

Решение. Находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 12x^2}{7x^3 + x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{9x^2 + 24x}{21x^2 + 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{18x + 24}{42x + 2} = 12.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды, поскольку и предел отношения функций, и предел отношения производных дают неопределённость вида 0/0.