ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

1. Цель работы: исследовать способы определения эффективных решений при групповом выборе.

2. Теоретическое введение

Имеется n различных бинарных отношений $R_1, R_2, \ldots, R_N$ на множестве X. Отношение R_i называется индивидуальным. Оно задает предпочтение i-го субъекта (ЛПР, эксперта). Требуется сформировать отношение $R \subseteq X \times X$, согласованное с отношениями $R_1, R_2, \ldots, R_N$. Отношение R называется *групповым отношением*.

Правило (система правил), описывающее способ построения группового отношения R, исходя из системы индивидуальных отношений $R_1, R_2, \ldots, R_N$, называется *принципом согласования отношений*.

Обозначив через F способ (правило) отображения группы отношений $R_1, R_2, \ldots, R_N$ в групповое отношение R, имеем: $F: (R_1, R_2, \ldots, R_N) \rightarrow R.$ Отображение F – принцип согласования. Разные отображения F могут быть использованы для определения отношения R.

__Пример 1__. Множество X имеет вид: $X = \{a, b, c\}$. Предпочтения трёх экспертов заданы следующими ранжированиями $R_1 = (a, b, c)$ (т.е. элементы x_i в R упорядочены в соответствии с рангами r_i^1, при этом $a \succ b,\ a \succ c,\ b \succ c$), $R_2 = (a \sim b,\ c)$ (т.е. $a \succ c,\ b \succ c,\ a \sim b$), $R_3 = (b,\ c \sim a)$ (т.е. $b \succ c,\ b \succ a,\ c \sim a$). Определен принцип отображения F, предполагающий, что $R = R_1$.

Правила согласования группы отношений $R_1, R_2, \ldots, R_N$ с отношением R могут быть сформулированы довольно сложно.

__Например:__ $(a, b) \in R$, если $(b, c) \in R_1$ и $(a, c) \notin R_2$.

Правило большинства.

Правило большинства – наиболее распространённый принцип согласования. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_N$ – индивидуальные отношения на $X \times X$. Обозначим через $n(a, b)$ количество индексов i (i – индекс отношения), для которых $(a, b) \in R_i$ ($i = \overline{1, N}$). Тогда могут быть сформированы два способа построения (определения) множества R:

1) $(a, b) \in R <=> n(a, b) \geq \frac{n}{2}$

2) $(a, b) \in R^+ <=> n(a, b) \geq n(b, a)$, где R и R^+ соответствующие обобщающие отношения.

Отношения R и R^+ называются *мажоритарными отношениями*.

__Пример 2__ определения обобщающего отношения R.

$X = \{a, b, c\}$, отношения R_1, R_2, R_3 задаются ранжированием в следующем виде:

$R_1 = (a, b, c)$, $R_2 = (c, b, a)$, $R_3 = (b, a, c)$.

$n(a, b) = 1$, $n(b, c) = 2$, $n(b, a) = 2$, $n(a, c) = 2$, $n(c, a) = 1$

Так как $n(b, c) = n(b, a) = n(a, c) = 2$, то $(b, c) \in R$, $(b, a) \in R$ и $(a, c) \in R$, то вид отношения R: $R = R_3 = (b, a, c)$. По аналогии рассуждения формируются для R^+. В результате имеем $R = R^+ = R_3$.

__Пример 3.__

$X = \{a, b, c\}$,

$R_1 = (a,\ b,\ c)$, $R_2 = (b,\ c,\ a)$, $R_3 = (c,\ a,\ b)$.

$n(a,b) = 2$, $n(b,c) = 2$, $n(a,c) = 1$, $n(b,\ a) = 1$, $n(c,a) = 2$, $\Rightarrow aRb,\ bRc,\ cRa$ (но не aRc как следовало бы из рассуждений о транзитивности).

Таким образом, групповое отношение R не является транзитивным, что не приемлемо, если для задания формы отношений R_i использованы ранговые шкалы. Так как групповое отношение R выражает некоторый согласованный признак, то оно должно индуцировать *отношение квазипорядка* (некоторого порядка).

На основе анализа приведенных примеров видно, что правило большинства может приводить как к транзитивным, так и к не транзитивным отношениям R. Необходимо сформировать условия, при которых индивидуальные отношения R_i и мажоритарное отношение R являются линейными квазипорядками (т.е. обеспечивают упорядоченность решений).

Рассмотрим множество $X = \{a,\ b,\ c\}$. Существует 13 ранжирований (линейных квазипорядков) этого множества: $R_1 = (a,\ b,\ c)$, $R_2 = (b,\ c,\ a)$, $R_3 = (c,\ a,\ b)$, $R_4 = (b,\ a,\ c)$, $R_5 = (a,\ c,\ b)$, $R_6 = (c,\ b,\ a)$, $R_7 = (a \sim b,\ c)$, $R_8 = (a \sim c,\ b)$, $R_9 = (b \sim c,\ a)$, $R_{10} = (c,\ a \sim b)$, $R_{11} = (b,\ c \sim a)$, $R_{12} = (a,\ b \sim c)$, $R_{13} = (a \sim b \sim c)$. Здесь знак «~» обозначает неразличимость (эквивалентность) решений. Далее при рассмотрении нумерация ранжирований является фиксированной. Через n_i обозначим количество субъектов (ЛПР, экспертов), которые придерживаются отношения R_i (ранжирования R_i). При этом $\sum_{i=1}^{13} n_i = n$.

В рассмотрение вводится подмножество D таких элементов p_i, для которых $n_i \geq 0$. Подмножество $D \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$, при этом $R_i \in D$, если $n_i > 0$, и $R_i \notin D$, если $n_i = 0$. Тогда множество D называется совокупностью ранжирований.

Пусть имеется совокупность трех строгих ранжирований вида: $(a,\ b,\ c)$, $(b,\ c,\ a)$, $(c,\ a,\ b)$, полученных друг из друга циклической перестановкой объектов (решений). Эта совокупность ранжирований называется циклической. Каждое из упорядочений циклической совокупности порождает остальные упорядочивания перестановкой первого элемента на последнее место и перестановкой последнего элемента на первое место. Эти два элемента называются циклическими. Например, упорядочивание $(a,\ b,\ c)$ порождает $(b,\ c,\ a)$ с циклическим объектом (элементом) a и упорядочивание $(c,\ a,\ b)$ с циклическим объектом c.

Рассмотрим ранжирование вида: $(a \sim b,\ c)$, $(a \sim c,\ b)$, $(c,\ a \sim b)$, каждое из которых представляет из себя линейный квазипорядок (частичный порядок). Каждое из этих ранжирований содержит в себе 2 класса объектов: эквивалентные и связанные с ними доминирующие или доминируемые элементы.

Тогда линейный квазипорядок называется *дихотомическим*, им соответствующее ранжирование состоит из 2-х классов (т.е., в частном случае, ранжирование состоит из 3-х элементов, один из классов обязательно содержит один элемент). Дихотомическое ранжирование называется однотипным, если их одноэлементные классы имеют один и тот же номер. Тогда ранжирование $(a \sim b,\ c)$ и $(a \sim c,\ b)$ являются однотипными, а $(a \sim b,\ c)$ и $(c,\ a \sim b)$ не являются однотипными.

То есть, необходимо охарактеризовать (определить условия) индивидуальные отношения (наборы индивидуальных отношений), для которых хотя бы одно (т.е. построенное с использованием одного из правил) мажоритарное отношение было транзитивно.

Для упрощения рассуждений может быть выполнен переход от множества X к любому его трехэлементному подмножеству (к трехэлементным подмножествам). Требуется сформировать критерий допустимости множества ранжирований D

Обобщенное понятие циклической совокупности строгих ранжирований формируется следующим образом. Множество трех линейных квазипорядков (ранжирований) вида $\{aRbRc,\ bRcRa,\ cRaRb\}$ называется циклическим, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) если в одном из отношений объекты (элементы, решения) являются неразрывными, тогда для циклических объектов остальных отношений имеет место строгое предпочтение;

б) все три отношения не могут быть однотипно дихотомическими.

Пример ранжирований, соответствующих условию а).

$(x \sim y \sim z), (y \sim z, x), (z,\ x \sim y)$.

Пример ранжирований, соответствующих условию б).

$(x,\ y \sim z), (y \sim z, x), (z,\ x \sim y)$.

Подмножество $\delta \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$ является допустимым, если при $n_i > 0$ для $R_i \in$ D и $n_i = 0$ для $R_i \notin$ D существует транзитивное мажоритарное отношение R. В том случае, если будет сформирована допустимая совокупность ранжирований $\text{D} = \{R_i |\ i = \overline{1,m}\}$, то существует транзитивное мажоритарное отношение R.

На основе рассмотренных свойств (признаков) циклических ранжирований может быть сформировано условие допустимости совокупности ранжирований D.

Теорема 1. Совокупность ранжирований D является допустимой, когда она не включает циклического множества (т.е. всякое циклическое множество недопустимо и не может содержаться в δ).

В качестве примера, комментирующего суть Теоремы 1, рассмотрим циклические ранжирования следующего вида: $\{(a \sim b \sim c),\ (c, aR_ib), (bR_ic, a)\}$. За каждое отношение отдано одинаковое число голосов. Тогда $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, но $(a,c) \notin R$, следовательно, R не является транзитивным.

Пусть циклическое множество состоит из дихотомических ранжирований и в соответствии с пунктом б) имеет следующий вид: $\{(a \sim b \sim c),\ (b \sim c, a), (c, a \sim b)\}$, тогда $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, но $(a,c) \notin R$, следовательно, отношение R нетранзитивно.

В итоге получим, что правило большинства позволяет сформировать транзитивное мажоритарное ранжирование R только в том случае, если множество D ранжирований R_i является допустимым, т.е. в него не могут входить циклические ранжирования. В итоге правило большинства может быть применено в частном случае. Для общего случая (когда отсутствуют ограничения на вид ранжирований) правило большинства не позволяет получить транзитивное мажоритарное ранжирование R.

Правило большинства может быть обобщено (т.е. применимо при построении ранжирования R в общем виде) в терминах *расстояния* между исходными отношениями (ранжированиями).

На основе ранжирования R_i может быть сформирована *матрица парных сравнений*

$$A^k = \begin{vmatrix} a_{11}^k & \dots & a_{1n}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^k & \dots & a_{nn}^k \end{vmatrix}, \text{ где } a_{ij}^k = \begin{cases} 1 \text{ при } x_i \succ x_j \\ 0 \text{ при } x_i \sim x_j \\ -1 \text{ при } x_j \succ x_i \end{cases},$$

k – индекс эксперта.

В том случае, если заданы два ранжирования R_h и R_l, тогда расстояние между этими двумя ранжированиями будет определено согласно отношению:

$$d(R_h, R_l) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^h - a_{ij}^l\right|$$

Пусть дано множество ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$, тогда расстояние от некоторого ранжирования R до этого множества определяется следующим образом:

$$d(R, R_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}^k - a_{ij}\right|$$

где a_{ij} – элемент матрицы A соответствующий некоторому ранжированию R (произвольному ранжированию R_i из множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$).

В случае рассмотрения отдельного элемента $a_{ij} = 1$ (соответствующего ранжированию R) может быть определено для него расстояние между R и остальными ранжированиями $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{N} d_{ij}(R, R_k) = \sum_{k=1}^{N}\left|a_{ij}^k - a_{ij}\right|$$

То есть p_{ij} определяется для тех элементов a_{ij}, соответствующих ранжированию R, которые равны 1. Элемент p_{ij} – коэффициент потерь (при этом $p_{ii} = 0$), а матрица P называется *матрицей потерь.*

Ранжирование R, такое, что $P = \arg\min d(R, R_k)$ называется *медианой* множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$. Т.е. это такое ранжирование, которое с точки зрения расстояния является «наиболее близким» ко всем ранжированиям $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Для определения мажоритарного транзитивного ранжирования применим *метод Кемени*, в котором при расчете элемента p_{ij}, матрицы потерь P используются отличия значений элементов a_{ij}^k матриц соответствующих ранжирований R_k

Алгоритм Кемени определения меридианы (ранжирования) R, которое будет являться транзитивным, предполагает выполнение следующих шагов.

1 шаг. Для расчета значения элемента p_{ij} матрицы потерь P выполняется идентификация такого ранжирования R^l, для которого выполняется условие:

$$a_{ij}^l = \max_{k=\overline{1,N}}(a_{ij}^k)$$

Тогда значение p_{ij} матрицы потерь определяется согласно отношению:

$$p_{ij} = d_{ij}(R_1, R_l) + d_{ij}(R_2, R_l) + \dots + d_{ij}(R_N, R_l)$$

В итоге формируется матрица P^N, соответствующая элементам $(x_i, x_j) \in X^2$.

После идентификации матрицы потерь требуется определить матрицу Q, на основе которой в дальнейшем идентифицируются альтернативы, соответствующие удаляемым из матрицы P (и, соответственно из матрицы $A_k (k = \overline{1,N})$.

2 шаг. Определение матрицы Q:

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n, \text{ где } E^n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

где E^n – матрица, все элементы (кроме диагональных) равны 1.

3 шаг. В полученной матрице Q^n реализуется определение элемента $q_{ij}^n = \min q_{ij}^n$. Альтернативы (решения), определяющие строку и столбец элемента q_{ij}^n обозначаются x_{i_n} и x_{i_l} соответственно (т.е. они размещаются в позиции n и l соответственно).

4 шаг. Полученные таким образом альтернативы x_i и x_j размещаются в n-ой и первой позициях формируемого ранжирования R. После этого реализуется удаление соответствующих i-ой строки и j-го столбца.

Пример определения медианы для множества ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Задано 4 эксперта и сформулированные ими ранжирования в следующем виде:

$R_1 = (a_2, a_4, a_1, a_3)$, $R_2 = (a_1, a_3 \sim a_4, a_2)$, $R_3 = (a_2 \sim a_3, a_4, a_1)$, $R_4 = (a_3, a_2, a_1 \sim a_4)$

Ранжированием $R_k(k = \overline{1,N})$ соответствуют матрицы отношений следующего вида:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1 шаг. Определение матрицы потерь P^N.

Имеем:

$$r_{12}^2 = \max_{k=\overline{1,N}} (r_{12}^k) = 1 \quad => \quad p_{12}^N = d_{12}(R_1, R_2) + d_{12}(R_3, R_2) + d_{12}(R_4, R_2) = 6.$$

По аналогии:

$$r_{13}^2 = \max_{k=\overline{1,N}} (r_{13}^k) = 1 \quad => \quad p_{13}^N = d_{13}(R_1, R_2) + d_{13}(R_3, R_2) + d_{13}(R_4, R_2) = 4.$$

Выполняя расчеты подобным образом, получим матрицу потерь P в следующем виде:

$$P^N = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2 шаг. Определение матрицы потерь Q^N:

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n$$

Имеем матрицу Q^N в следующем виде:

$$Q^N = \begin{vmatrix} 24 & 24 & \mathbf{23} & 28 \\ 32 & 24 & 30 & 31 \\ 33 & 26 & 24 & 31 \\ 28 & 25 & 25 & 24 \end{vmatrix}$$

<u>3 шаг</u>. Определение матрицы потерь $q_{ij}^N = \min\limits_{i,j=\overline{1,n}} (q_{ij}^N)$.

В данном случае – это $q_{13}^N = 23$. Тогда альтернативы в результирующем ранжировании разметим следующим образом: $R = \{x_3, \dots, x_1\}$.

Так как решения x_3 и x_1, исключены из рассмотрения, тогда должны быть модифицированы матрицы R_k путём исключения из них 3-го столбца и 1-ой строки. В результате имеем:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & - & 0 \end{vmatrix} \qquad R_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & - & 0 \end{vmatrix}$$

<u>1 шаг</u>. Определение матрицы потерь. Матрица $P^{(N-2)}$ имеет вид:

$$P^{(N-2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>2 шаг</u>. Определение матрицы потерь $Q^{(N-2)}$. На основе матрицы $P^{(N-2)}$ формируем матрицу $Q^{(N-2)}$ в следующем виде:

$$Q^{(N-2)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{vmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 8 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

Так как решения x_1 и x_3 уже добавлены в ранжирование R, то нас будет интересовать решения x_2 и x_4. Соответственно рассматриваем элементы $q_{24}^{(N-2)} = 11$ и $q_{42}^{(N-2)} = 8$. Т.к. элемент $q_{42}^{(N-2)} < q_{24}^{(N-2)}$, тогда на основе элемента $q_{42}^{(N-2)}$ определяем позиции x_2 и x_4 в ранжировании. Получаем $x_2 = x_{i_2}$ (т.е. решение *i* во второй позиции в R) и $x_4 = x_{i_3}$ (т.е. решение *i* в третей позиции в R). Тогда результирующее ранжирование имеет вид: $R = \{x_3, x_2, x_4, x_1\}$.

3. Порядок выполнения работы

1. Разработать процедуру, реализующую формирование для заданных ранжирований соответствующих им матриц отношений R_i.

2. Разработать процедуру формирования матрицы потерь Q^n на основе сформированных матрицы отношений R_i.

3. Разработать процедуру определения решений, включаемых в итоговое ранжирование.

4. Разработать процедуру модификации матриц отношений R_i путем исключения решений, добавленных в формируемое итоговое ранжирование.

5. Разработать модуль, координирующий выполнение упомянутых выше процедур.

4. Варианты заданий.

Вариант 1. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_8, x_7, x_6)$;
$R_2=(x_1,x_5,x_4\sim x_2,x_6,x_7\sim x_8, x_6)$;
$R_3=(x_3,x_4,x_8\sim x_7,x_6,x_5,x_2, x_1)$;
$R_4=(x_7,x_8,x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_5=(x_4,x_8,x_3\sim x_7,x_6\sim x_1,x_2, x_5)$;

Вариант 2. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_6)$;
$R_2=(x_1,x_5,x_4\sim x_2,x_6, x_3)$;
$R_3=(x_3,x_4\sim x_6,x_5,x_2, x_1)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_5=(x_6\sim x_4,x_1\sim x_2,x_5, x_3)$;
$R_6=(x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;
$R_7=(x_3, x_4,x_1\sim x_2,x_5, x_6)$;
$R_8=(x_3,x_4,x_6\sim x_2,x_1\sim x_5)$;

Вариант 3. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_7,x_5, x_6)$;
$R_2=(x_1\sim x_7,x_5,x_4\sim x_2,x_6, x_3)$;
$R_3=(x_3,x_4\sim x_6,x_5,x_2\sim x_7, x_1)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1,x_7,x_5)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5\sim x_7)$;
$R_5=(x_6\sim x_4,x_1\sim x_2,x_7,x_5, x_3)$;
$R_6=(x_7,x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;
$R_7=(x_7\sim x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;

5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается постановка задачи группового выбора решений?
2. В каком виде представляются исходные отношения, формируемые группой экспертов?
3. В чем заключается правило большинства при построении мажоритарных отношений?
4. В чем состоит причина не выполнения свойства транзитивности для мажоритарного отношения R, обобщающие отношения экспертов?
5. Что из себя представляют дихотомические однотипные и разнотипные ранжирования?
6. Что представляет из себя медиана Кемени с точки зрения группового выбора?
7. Что такое матрица потерь и как она формируется?
8. Как формируются матрицы отношений на основе задаваемых ранжирований?
9. В чем состоит алгоритм формирования итогового ранжирования R?