Лабораторная работа №4
Мовенко Константин
ИС15-21-2-0

① Дано:

$$P(X, Y) = \begin{vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{vmatrix}, \quad x \in X, \, y \in Y$$

Определить: $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$, $H(X, Y)$, $I(X, Y)$.

Решение:

По формуле полной вероятности:

$$P(X_1) = \sum_{j=1}^{3} P(X_1, Y_j) = \frac{3}{8}; \quad P(X_2) = \frac{1}{4}; \quad P(X_3) = \frac{3}{8}$$

$$P(Y_1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_i, Y_1) = \frac{3}{8}; \quad P(X_2) = \frac{1}{4}; \quad P(X_3) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow H(X) = \sum_{i=1}^{3} P(X_i) \log_2 \frac{1}{P(X_i)} = 1,57$$

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{3} P(Y_i) \log_2 \frac{1}{P(Y_i)} = 1,57$$

По теореме умнож-я $p\left(\dfrac{x_i}{y_i}\right) = \dfrac{p(x_i, y_i)}{p(y_i)}$.

$p\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right) = \dfrac{1}{3}$; $p\left(\dfrac{x_1}{y_2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $p\left(\dfrac{x_1}{y_3}\right) = \dfrac{1}{3}$

$p\left(\dfrac{x_2}{y_1}\right) = \dfrac{1}{3}$; $p\left(\dfrac{x_2}{y_2}\right) = 0$; $p\left(\dfrac{x_2}{y_3}\right) = \dfrac{1}{3}$

$p\left(\dfrac{x_3}{y_1}\right) = \dfrac{1}{3}$; $p\left(\dfrac{x_3}{y_2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $p\left(\dfrac{x_3}{y_3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow H(X/Y) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} p(x_i, y_j) \log_2 \dfrac{1}{p(x_i/y_j)} = 1{,}43$

Аналогично $H(Y/X) = 1{,}43$

Энтропия объединения:

$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) = 1{,}57 + 1{,}43 = 3$

Взаимная инф-я величин X и Y:

$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y) = 0{,}14$

Ответ: $1{,}57$; $1{,}57$; $1{.}43$; $1{.}43$; 3, $0{.}14$

② Дано:

$P(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.75 & 0.3 \\ 0.01 & 0.15 & 0.5 \end{pmatrix}$

Найти:

1) сред. кол-во инф-ции, переносимое 1-им символом, если $p(x_1) = 0.7$, $p(x_2) = 0.2$, $p(x_3) = 0.1$;

2) чему равны инф. потери при передаче сообщу-я из 1000 символов x_1, x_2, x_3;

3) кол-во принятой инф-ции;

Решение:

Энтропия источника сообщений:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = -(0.7 \log 0.7 + 0.2 \log 0.2 +$$

$$+ 0.1 \log 0.1) = 1.16 \text{ бит}$$

Общая условная энтропия:

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i) p\left(\frac{y_j}{x_i}\right) \log_2 p\left(\frac{y_j}{x_i}\right)$$

$$H(Y|X) = -0.7[0.88 \cdot \log_2 0.88 + 0.01 \log_2 0.01 +$$

$$+ 0.01 \log_2 0.01) + 0.2 \cdot (0.1 \log_2 0.1 + 0.75 \log_2 0.75 +$$

$$0.15 \log_2 0.15) + 0.1 (0.2 \log_2 0.2 + 0.3 \log_2 0.3 + \log_2 0.5)] = 0.4$$

Ответ: 1.16 бит, 0.473 бит

③ Дано:

$H(X) = 3400$ бит

$H(Y) = 6800$ бит

$H(X|Y) = 700$ бит

Найти: $H(Y|X)$

Решение:

Взаимная информация источника сообщений:

$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 3400 - 700 = 2700$ бит

Энтропия шума $H(Y|X)$:

$H(Y|X) = H(Y) - I(X,Y) = 6800 - 2700 = 4100$ би

Ответ: 4100 бит

④ Дано:

$$p(x_1, y_1) = 0.73$$
$$p(x_1, y_2) = 0.21$$
$$p(x_2, y_1) = 0.02 \cdot$$
$$p(x_2, y_2) = 0.04$$

Найти: кол-во информации о фазовом сдвиге сигнала;

Решение:

Среднее кол-во инф-ции о фазовом сдви и при известной амплитуде $H(X, Y)$ =

$$= H(Y) - H(Y|X),$$

$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0.75$$
$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0.25$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_i) \log_2 p(y_i) = 0.81 \text{ бит}$$

$$p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) = 0.94$$
$$p(x_2) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) = 0.06$$

По теореме умножения $p\left(\dfrac{y_i}{x_i}\right) = \dfrac{p(x_i y_i)}{p(x_i)}$

$P(y_1 | x_1) = 0.78$ $P(y_2 | x_1) = 0.22$

$P(y_1 | x_2) = 0.33$ $P(y_2 | x_2) = 0.67$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} P(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{P(y_j | x_i)} =$$

$$= 0.73 \log_2 \frac{1}{0.78} + 0.21 \log_2 \frac{1}{0.22} + 0.02 \log_2 \frac{1}{0.33} +$$

$$+ 0.04 \log_2 \frac{1}{0.67}$$

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y|X) = 0.04 \text{ бит}$$

Ответ: 0.04 бит