ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата теории важности критериев при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия теории важности критериев

Основное понятие, используемое при решении многокритериальных задач – это понятие относительной важности критериев. С точки зрения важности критериев определены понятия «один критерий важнее другого», «критерии равноважны» (имеют одинаковую важность), на основе этих понятий сформулирована качественная теория важности критериев. Развитие качественной теории важности критериев определило количественное сравнение важности критериев (т.е. «во сколько раз один критерий важнее другого»).

Математическая модель задачи принятия решений при многих критериях и учете их (критериев) важности имеет вид: X – множество решений; K – векторный критерий; $\succ, \sim$ – отношения предпочтения и безразличия ЛПР соответственно; x_i - некоторое i-е решение, характеризуется значениями критериев $K_j(j=\overline{1,m})$; K_j – некоторый частный критерий. Тогда векторный критерий K имеет вид $K=(K_1,K_2,...,K_m)$, т.е. векторный критерий K – это упорядоченный набор критериев. Тогда решение x_i характеризуется векторный его оценкой в виде $K(x_i)=(K_1(x_i),K_2(x_i),...,K_m(x_i))$. Через K^j может быть обозначено множество возможных значений критерия K^j, тогда $K^X = \mathop{X}\limits_{i=1}^{m} K^j$ - множество всех векторных оценок, соответствующих возможным решениям, где X – декартово произведение множеств.

Пример постановки задачи многокритериального принятия решений.

Определено (задано) множество из 7 студентов, каждый из которых получил оценки по 4 предметам, тогда $|X|$=7, количество критериев равно 4, k_{ij} – оценки j-го критерия для i-го студента (т.е. оценка для i-го студента по j-му предмету). Таким образом, $X=\{x_1,x_2,...,x_7\}$, шкала для каждого критерия имеет вид $\{2,3,4,5\}$. Полученные данные сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Скалярные оценки k_{ij} критериев K_j для решений x_i ($i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,4}$)

Варианты	Критерии			
	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	5	5	4
x_2	4	4	4	5
x_3	5	4	3	3
x_4	3	5	3	5
x_5	4	2	4	5
x_6	3	5	3	5
x_7	5	3	4	3

Требуется выбрать лучшего по успеваемости студента из семи претендентов, учитывая оценки по четырем предметам. Наряду с приведенными векторными оценками $K(x_i)$ вариантов могут быть указаны возможные векторные оценки, тогда $K^X = \underset{j=1}{\overset{4}{X}} K^j$, $|K^X| = 256$. Сравнение вариантов осуществляется на основе их векторных оценок. Варианты x_4 и x_6 являются эквивалентными ($x_4 \sim x_6$).

Если через $\succ$ обозначено отношение предпочтения, тогда для x_2 и x_5 является верным:
$(4,4,4,5) \succ (4,2,4,5)$, т.к. для оценок $k_{2j} \geq k_{5j} (j = \overline{1,4})$, а по критерию k_2 решение x_2 строго лучше решения x_5 ($k_{22} > k_{52}$). Таким образом, решение x_2 является предпочтительнее решения x_5, так как по всем оценкам $k_{2j} \geq k_{5j}$, а по одной оценке вариант x_2 строго лучше x_5 ($k_{22} > k_{52}$), тогда $x_2 \succ x_5$. Для векторных оценок $(3,5,5,4)$ и $(4,4,4,5)$ отношение $\succ$ не реализуется, так как однозначно для них введенные условия предпочтения не выполняются. Таким образом, $(3,5,5,4) \overline{\succ} (4,4,4,5)$ и $(4,4,4,5) \overline{\succ} (3,5,5,4)$ в итоге $x_1 \overline{\succ} x_2$, $x_2 \overline{\succ} x_1$ и векторные оценки для решений x_1, x_2 и сами эти решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. Аналогичные выводы могут быть сделаны для пар решений: $(x_1, x_3), (x_1, x_4)$, (x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_7). Таким образом, приведенные в парах решения являются несравнимыми по отношению $\succ$. Так для решений x_1 и x_6 вектора оценок имеют вид: $(3,5,5,4)$ и $(3,5,3,5)$, для критерия K_4 имеем $k_{64} > k_{14}$, хотя $k_{1j} \geq k_{6j} (j = \overline{1,3})$, поэтому x_1 и x_6 – несравнимы.

Если $x_i \succ x_j$ выполняется, то решение x_j является доминируемым и не может быть выбрано наилучшим.

Решение x_i^* такое, что $\forall x_j \in X$, $x_j \overline{\succ} x_i^*$ называется недоминируемым (оптимальным по Эджворту-Парето). Множество таких решений – множество Эджворта-Парето обозначим как X^*. Решение x_5 доминируется решением x_2, а все остальные решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$, то для рассматриваемого случая имеем $X^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ при этом $x_4 \sim x_6$. Т.к. $|X^*| > 1$, то не может быть выбрано решение x_i^* являющееся наилучшим, поэтому должна быть привлечена дополнительная информация о предпочтениях ЛПР. Для этого могут быть использованы следующие виды дополнительной информации: 1) сведения об относительной важности критериев; 2) сведения о шкалах критериев. Вид дополнительной информации обозначим как Ω, тогда $\sim_\Omega$ и $\succ_\Omega$ – отношения, вытекающие из этой информации.

Простейший способ скаляризации оценок критериев K_j - это формирование обобщенного критерия на основе аддитивной свертки следующим образом:

$$\Phi = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + ... + \alpha_m K_m, \tag{1}$$

где Φ – обозначение оценки обобщенного (агрегированного) критерия, $\alpha_i (i = \overline{1,m})$– коэффициенты важности (веса) критериев, $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

В случае одинаковой важности критериев $\alpha_i = 1/m$, а значение Φ для рассматриваемого примера представляет собой средний балл. Т.к. в рассматриваемом случае разные дисциплины могут иметь разную значимость, следовательно должна быть определена относительная важность критериев и значения α_i в выражении (1). Таким образом, базовые методы анализа (и решения) многокритериальных задач основаны на свертывании набора исходных критериев в один обобщенный (агрегированный, в частности используется аддитивная свертка) критерий, имеющий вид взвешенный при помощи коэффициентов важности суммы исходных критериев. Однако данные методы обладают рядом недостатков, ограничивающих их использование.

При многокритериальном принятии решений должна быть учтена информация о предпочтениях ЛПР (какой из критериев является более предпочтительным), выраженная в виде сведений об относительной их (критериев) важности. При этом сведения об относительной важности критериев должны быть строго формализованы.

2.2. Использование качественной теории важности критериев при принятии решений

Определение важности критериев возможно в случае их (критериев) однородности, т.е. критерии должны иметь сопоставимый вид. Условиями однородности критериев являются: 1) наличие единой (общей) шкалы; 2) каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого критерия.

Требованиями для градаций шкалы (требованиями к шкале) являются: 1) градации нумеруются в порядке возрастания предпочтительности оценок критериев, для работы с которыми используются шкалы; 2) номера градаций шкалы отражают упорядоченность оценок критерия по предпочтениям; 3) с номерами градаций не могут быть выполнены какие-либо арифметические операции для получения оценок предпочтений; 4) решения (для реализации требования их однородности) оцениваются по всем критериям в единой бальной шкале, при этом градации шкалы (отражающие степень предпочтения одного решения перед другим) для всех критериев являются одинаковыми.

В этом случае используемая для определения оценок критерия (критериев) шкала (шкалы) является качественной, все критерии являются однородными, т.е. имеют единую порядковую шкалу. В случае неоднородных критериев (вес, стоимость, площадь) перед сравнением этих критериев по важности их нужно привести к единой порядковой шкале с одинаковым числам градаций q. Т.е. критерии не нормализуются по формуле k_i / k_{max}, а их исходная шкала разделяется на q частей таким образом, чтобы некоторый l-ый интервал исходной шкалы соответствовал l-ой градации обобщенной шкалы. Тогда любое значение k_{ij} критерия K_j, принадлежащее l-му интервалу, интерпретируется как l-я градация формируемой единой шкалы.

Качественными оценками важности критериев являются суждения вида: «Критерий K_i важнее критерия K_j». Для формализации важности критерия K_i по отношению (по сравнению) с критерием K_j также как и для решений может быть использовано отношение предпочтения $\succ$ и безразличия (эквивалентности) $\sim$. Т.е. выражение вида $K_i \succ K_j$ означает, что критерий K_i важнее (предпочтительнее) критерия K_j, а $K_i \sim K_j$ – что критерии являются эквивалентными. Если $K_1 \succ K_2$ и $K_2 \sim K_3$, то критерий K_1 важнее критерия, а критерии K_2 и K_3 эквивалентны.

Обозначим через $K(x)$ некоторую векторную оценку для решения x. Вид векторной оценки: $K(x) = (K_1(x), K_2(x), .., K_m(x))$. Через $K^{ij}(x)$ обозначим векторную оценку решения x, полученную из оценки $K(x)$ путем перестановки в ней i-ой и j-ой компонент (т.е. k_i и k_j).

Пример формирования векторных оценок $K^{ij}(x)$. Исходная векторная оценка: $K(x) = (5,4,3,4)$, $K^{14}(x) = (4,4,3,5)$, $K^{23}(x) = (5,3,4,4)$.

Критерии K_i и K_j равно важны (эквивалентны с точки зрения важности) если две векторные оценки $K(x)$ и $K^{ij}(x)$ одинаковы по предпочтению. Т.е. если перестановка значений i-го и j-го критериев в векторной оценке $K(x)$ позволяет получить векторную оценку $K^{ij}(x)$ эквивалентную $K(x)$.

Пример перестановки в векторе оценок критериев для равно важных критериев K_i и K_j. Исходная векторная оценка имеет вид $K(x)=(5,4,3,4)$. Критерии K_2 и K_3 являются равно важными (т.е. $K_2 \bar{\succ} K_3$ и $K_3 \bar{\succ} K_2$).

Тогда формируемая векторная оценка $K^{23}(x)=(5,3,4,4)$ будет являться эквивалентной оценке $K(x)$, т.е. $(5,4,3,4) \sim (5,3,4,4)$ при $K_2 \sim K_3$ (где $\sim$ – отношение эквивалентности, т.е. критерии не различаются с точки зрения их важности и векторные оценки тоже не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$, векторные оценки фактически не изменились при перестановке значений критериев). Т.е. перестановка оценок k_i и k_j соответствующих критериев позволяет получить для дальнейшего анализа вектор оценок $K^{ij}(x)$, который эквивалентен исходному вектору $K(x)$.

Пример перестановки в векторе оценок критериев при условии разной важности критериев.

Критерий K_1 является более важным, чем критерий $K_2 (K_1 \succ K_2)$. Исходная оценка имеет вид $K(x)=(5,4,3,4)$. Тогда оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом полученная оценка не является эквивалентной исходной оценке $K(x)$, т.к. рассматриваемые критерии не равны по важности. Т.к. критерий K_1 более важный, чем критерий K_2, то получаемая оценка $(4,5,3,4)$ является худшей, чем исходная оценка $(5,4,3,4)$ по значению первого (более важного критерия). Таким образом, исходная оценка $K(X)=(5,4,3,4)$, оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом $(5,\overline{4,3},4) \sim (4,5,3,4,)$, т.к. $K_1 \succ K_2$, то $(5,4,3,4) \succ (4,5,3,4)$.

Таким образом, с точки зрения качественной теории важности критериев возможны следующие ситуации: $K_i \succ K_j$, $K_j \succ K_i$, $K_i \sim K_j$, K_i и K_j являются несравнимыми по важности $(K_i \bar{\succ} K_j, \overline{K}_j \bar{\succ} K_i, K_i \sim K_j)$.

Введем в рассмотрение обозначения: $\sim_{ij}$ – отношение эквивалентности векторных оценок, вторая из которых получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой; $\succ_{ij}$ – отношение предпочтения векторных оценок, вторая из оценок получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой. Тогда в рассмотренных примерах $(5,4,3,4) \sim_{23} (5,3,4,4)$ и $(5,4,3,4) \succ_{12} (4,5,3,4)$. Т.е. предпочтение векторных оценок вида $(3,5,4,5) \succ (3,5,3,5)$ – это предпочтение, полученное в результате сравнения значений скалярных оценок критериев на соответствующих позициях, а $(3,5,5,4) \succ_{34} (3,5,4,5)$ - предпочтение первой векторной оценки перед второй, полученной в результате перестановки скалярных оценок в 3-ей и 4-ой позициях при условии разной важности критериев K_3 и $K_4 (K_3 \succ K_4)$, при этом по критерию K_3 в полученной оценке меньшее значение.

Дополнительной информацией Ω для определения предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев, используемой для принятия решений, является информация о предпочтительности (важности) критериев или их эквивалентности (безразличии при анализе оценок для соответствующих критериев). Пример дополнительной информации о предпочтениях ЛПР, используемой в рассуждениях выше, имеет вид: $\Omega = \{ k_1 \succ k_2, k_2 \sim k_3, k_3 \succ k_4 \}$.

Таким образом, комбинируя отношения $\succ_{ij}$, $\sim_{ij}$ и отношение $\succ$ для векторных оценок (соответственно, решений), можно выполнить сравнение по предпочтению всех векторных оценок с использованием информации Ω.

Тогда могут быть определены (сформированы) новые отношения $\succ$, порождаемые информацией о предпочтениях ЛПР с точки зрения важности критериев Ω. Обозначим отношение предпочтения $\succ$, формируемое для векторных оценок решений x с использованием дополнительной информации Ω через $\succ_\Omega$.

Пример использования качественной информации о важности критериев Ω при решении двухкритериальной задачи. Вид информации $\Omega = \{K_1 \succ K_2\}$, даны две векторные оценки $K(x_1)=(5,3)$, $K(x_2)=(2,4)$.

Т.к. векторные оценки не сравнимы между собой (т.е. $(5,3)\overline{\succ}(2,4)$ и $(2,4)\overline{\succ}(5,3)$ и $x_1\overline{\succ}x_2$, $x_2\overline{\succ}x_1$) тогда при отсутствии предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев эффективное решение не может быть определено.

При учете информации $\Omega=\{K_1 \succ K_2\}$ о важности критериев в векторной оценке $K(x_1)=(5,3)$ выполнена перестановка скалярных оценок (в позициях 1 и 2, соответствующих информации Ω). В результате получена модифицированная векторная оценка $K^{12}(x_1)=(3,5)$. Т.к. для критериев K_1 и K_2 выполняется $K_1 \succ K_2$, тогда для оценок $K(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$ выполняется $K(x_1)\succ_{12} K^{12}(x_1)$ (т.к. значение по первому критерию является более важным, чем значении по второму), т.е. $(5,3)\succ_{12}(3,5)$. Полученная оценка $K^{12}(x_1)$ может быть соотнесена с оценкой $K(x_2)$, при этом $(3,5)\succ(2,4)$ или $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$. В итоге получены две пары отношений: для $K(x_1)$, $K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$, $K(x_2)$ в виде: $(5,3)\succ_{12}(3,5)$ и $(3,5)\succ(2,4)$ (либо $K(x_1)\succ_{12} K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$), которые в сокращенной форме могут быть записаны в виде последовательности отношений: $(5,3)\succ_{12}(3,5)\succ(2,4)$.

Т.к. через $\succ_\Omega$ обозначено отношение предпочтения, полученное с использованием дополнительной информации Ω о важности критериев, тогда $(5,3)\succ_\Omega(2,4)$, $K(x_1)\succ_\Omega K(x_2)$.

Пример использования дополнительной информации Ω о равной важности критериев K_1 и K_2 при выборе эффективного решения.

Вид информации $\Omega=\{K_1 \sim K_2\}$, вид векторных оценок $K(x_1)=(5,3)$, $K(x_2)=(2,4)$. Тогда $(5,3)\overline{\succ}(2,4)$, $(2,4)\overline{\succ}(5,3)$, $x_1\overline{\succ}x_2$, $x_2\overline{\succ}x_1$, $(5,3)\sim(2,4)$ (где ~ – отношение безразличия (не сравнимости) двух векторных оценок и, соответственно, решений). Использование информации Ω о равной важности критериев для ЛПР позволяет на основе оценки $K(x_1)=(5,3)$ сформировать оценку $K^{12}(x_1)$ в виде: $K^{12}(x_1)=(3,5)$. При этом $K(x_1)\sim_{12} K^{12}(x_1)$, так как при этом $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$, то следовательно $K(x_1)\succ_\Omega K(x_2)$ и $x_1 \succ_\Omega x_2$.

Вариант (решение) x_i^*, такой, для которого не существует решений x_j таких, что $x_j \succ_\Omega x_i^*$ называется не доминируемым (по отношению $\succ_\Omega$), т.е. $\forall x_j \mid x_j \overline{\succ}_\Omega x_i^*$. Таким образом, решение x_i^* является не доминируемым по отношению $\succ_\Omega$, т.е. с учетом дополнительной информации о важности критериев. Тогда может быть сформировано множество X_Ω не доминируемых решений: $X_\Omega=\{x_i \mid \forall x_j, x_j \overline{\succ}_\Omega x_i\}$. Только среди этих решений может быть выбрано эффективное.

Алгоритм формирования множества X_Ω содержит рассматриваемую ниже последовательность шагов:

1) сформировать первоначальный вид множества не доминируемых решений следующим образом: $X_\Omega=\{x_i \mid i=\overline{1,n}\}$, где n - общее количество решений;

2) выполнить проверку условия доминирования решением x_i решения x_l (условие вида $k_{ij} \ge k_{lj}$ для всех j и $k_{ij'} > k_{lj'}$ для одного j'), при этом $l=\overline{1,n}$; если условие доминирования решения x_l решением x_i выполняется, то исключить x_l из множества не доминируемых решений $X_\Omega : X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

3) шаг 2 повторить для каждого решения x_i ($i=\overline{1,n}$), исключая из множества X_Ω на каждом шаге доминируемые решения x_l ;

4) для решения x_i в соответствии с информацией о важности критериев Ω, содержащей отношение предпочтения для критериев $K_j \succ K_h$, сформировать на основе векторной оценки $K(x_i)$ новую векторную оценку $K^{jh}(x_i)$, получаемую в результате перестановок значений скалярных критериев K_j и K_h (значения k_{ij} и k_{ih});

5) проверить выполнение условия доминирования для векторных оценок $K(x_i)$ и $K^{jh}(x_i)$, если условие $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ выполняется, тогда выполнить проверку условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$ (при этом проверка выполняется последовательно для каждого l-го решения, где $l=\overline{1,n}$); если условия доминирования оценки $K(x_l)$ оценкой $K^{jh}(x_i)$ выполняется (т.е. $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$ и, соответственно, $K(x_i) \succ_\Omega K(x_l)$), то решение $K(x_l)$ исключается из множества X_Ω как доминируемое : $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

6) изменение индекса текущего рассматриваемого решения x_i (переход к следующему решению), доминирование которым остальных решений x_l ($l=\overline{i+1,n}$) в соответствии с отношением $\succ_\Omega$ будет исследоваться (при учете текущей информации о важности критериев $K_j \succ K_h$); если решение x_i , для которого исследуется доминирование им остальных решений x_l ($l=\overline{i+1,n}$), имеется в наличии $(i \le n)$, тогда выполнить переход к шагу 4;

7) если для всех решений $x_i \in X_\Omega$ выполнена проверка доминирования ими (текущим рассматриваемым решением x_i) других решений x_l ($l=\overline{i+1,n}$) в соответствии о текущей информацией о важности критериев $K_j \succ K_h$, то в Ω выполнить переход к следующей информации о важности критериев $(K_{j'} \succ K_{h'})$, если $|X_\Omega|>1$ и в Ω имеется информация о важности критериев $K_{j'} \succ K_{h'}$, то выполняется переход к шагу 4;

8) если в Ω дополнительная информация о предпочтительности критериев $(K_{j'} \succ K_{h'})$ отсутствует, то выполняется переход к информации об эквивалентности критериев $K_j \sim K_h$;

9) в соответствии с информацией об одинаковой важности критериев K_j и K_h для некоторого решения x_i на основе его векторной оценки $K(x_i)$ формируется новая векторная оценка $K^{jh}(x_i)$, где j и h - позиции в векторе критериев, являющихся одинаковыми по важности; полученная оценка $K^{jh}(x_i)$ в силу равной важности критериев K_j и $K_h (K_j \sim K_h)$ является эквивалентной исходной оценке $K(x_i)$ (т.е. проверять условие доминирования $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ не требуется, $K(x_i) \sim K^{jh}(x_i)$);

10) проверка выполнения условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ ($l=\overline{i+1,n}$) полученной векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$; если условие доминирования оценки $K(x_l)$

оценкой $K^{jh}(x_i)$ (условие $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$) выполняется, тогда реализуется $K(x_i) \succ_{\Omega} K(x_l)$ (т.е. доминирование с учетом дополнительной информации о равной важности критериев); тогда решение x_l исключается из X_{Ω} как доминируемое : $X_{\Omega} = X_{\Omega} \setminus x_l$;

11) изменение индекса рассматриваемого решения x_i (переход к следующему решению), т.е. выполняется переход к решению, доминирование которым остальных решений x_l $(l = \overline{i+1,n})$ будет исследоваться (при учете дополнительной информации об одинаковой (равной) важности критериев K_j и K_h ($K_j \sim K_h$)); при наличии решения x_i (условие $i \le n$), доминирование которым решений x_l при учете $K_j \sim K_h$ будет исследоваться, выполняется переход к шагу 9;

12) в случае, если проверка для всех x_i $(i = \overline{1,n})$ условия доминирования ими решений x_l $(l = \overline{i+1,n})$ (с учетом текущей рассматриваемой дополнительной информации $K_j \sim K_h$) выполнена, тогда при условии $|X_{\Omega}| > 1$ в Ω выделяется информация, касающаяся эквивалентности других критериев ($K_{j'} \sim K_{h'}$), индекс текущего рассматриваемого решения задается равным 1($i = 1$, рассматривается решение x_1), выполняется переход к шагу 9.

Примечание. Необходимость исключения решений x_l из множества X_{Ω} исследуется первоначально с точки зрения разной важности критериев K_j и K_h (предпочтений для критериев K_j и K_h – $K_j \succ K_h$), а затем с точки зрения одинаковой важности критериев ($K_j \sim K_h$). Это объясняется тем, что дополнительная информация Ω, используемая при принятии решений, представляется в виде двух матриц – первая матрица A_1 предпочтений для критериев ($a_{jh} = 1$ если $K_j \succ K_h$ и $a_{jh} = 0$, если $K_j \bar{\succ} K_h$, $j = \overline{1,n}, h = \overline{1,n}$), вторая матрица A_2 «эквивалентных» критериев (критериев, имеющих одинаковую важность, $K_j \sim K_h$).

Пример матрицы предпочтений критериев и матрицы отношения эквивалентности критериев (с одинаковой (равной) важностью).

$$A_1 = \begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; \qquad A_2 = \begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Пример применения алгоритма многокритериального поиска эффективных решений при учете важности критериев для задачи ранжирования студентов.

Информация о важности критериев имеет следующий вид: $\Omega = \{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4\}$. Векторные оценки $K(x_i)$ для каждого решения x_i приведены в Таблице 1. Рассматривается решение x_1. Т.к. $K_3 \succ K_4$, то на основе векторной оценки $K(x_1) = (3{,}5{,}5{,}4)$ может быть сформирована модифицированная векторная оценка $K^{34} = (3{,}5{,}4{,}5)$. Однако оценка $K(x_1) = (3{,}5{,}5{,}4)$ предпочтительной оценки $K^{34}(x_1) = (3{,}5{,}4{,}5)$ в силу важности: критериев ($K(x_1) \succ_{34} K^{34}(x_1)$ или $(3{,}5{,}5{,}4) \succ_{34} (3{,}5{,}4{,}5)$). Сравниваем векторную оценку $K^{34}=(3{,}5{,}4{,}5)$ с векторной оценкой $K(x_4)=(3{,}5{,}3{,}5)$ с точки зрения выполнения условия $k_{1j}\geq k_{4j}$ для всех k_{ij} $(i=\overline{1,4})$ и для одного $k_{13}>k_{43}$. Т.к. эти условия выполняются, то $x_4\notin X_{\Omega}$, при этом т.к. $x_4\sim x_6$, то $x_6\notin X_{\Omega}$. Таким образом:

$$(3{,}5{,}5{,}4)\succ_{34}(3{,}5{,}4{,}5)\succ_{\Omega}(3{,}5{,}3{,}5)\ ;\ K(x_1)\succ_{34}K^{34}(x_1)\succ_{\Omega}K(x_4)\sim K(x_6).$$

Для решения x_1 выполним модификацию его векторной оценки $K(x_1)$ следующим образом: $K(x_1)=(3{,}5{,}5{,}4)$, $K^{12}(x_1)=(5{,}3{,}5{,}4)$. Если бы оценка $K(x_1)$ доминировала оценку $K^{12}(x_1)$, тогда при $K^{12}(x_1)\succ_{\Omega}K(x_7)$ имели: $K(x_1)\succ_{\Omega}K(x_7)$, но т.к. $K(x_1)\bar{\succ}_{\Omega}K^{12}(x_1)$, то $K(x_1)\bar{\succ}_{\Omega}K(x_7)$, следовательно, решение x_7 не может быть исключено из множества X_{Ω}. Рассмотренным действием была учтена важность критериев вида $K_1\succ K_2$ в Ω. Проинтерпретируем информацию об одинаковой важности K_2 и K_3 в Ω. Для K_1 и K_2 изменение позиций оценок k_{12},k_{13} и k_{22},k_{23} не имеет смысла т.к. оценки $K(x_1)$ и $K(x_2)$ при этом не изменяются, x_4,x_5,x_6 исключены из рассмотрения, поэтому информация $K_2\sim K_3$ может быть применена только к решениям x_3 и x_7. Для решения x_3 на основе его векторной оценки $K(x_3)$ при учете $(K_2\sim K_3)$ может быть сформирована новая векторная оценка $K^{23}(x_3)=(5{,}3{,}4{,}3)$, т.к. $K_2\sim K_3$, то $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)$. Сравнение $K^{23}(x_3)$ с $K(x_7)$ показывает, что $K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$. Тогда может быть сформирована следующая цепочка: $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$, поэтому в итоге $K(x_3)\sim K(x_7)$ и $x_3\sim x_7$. Поэтому множество недоминируемых решений X_{Ω}, сформированное с учетом информации о различной и одинаковой важности критериев, будет иметь вид: $X_{\Omega}=\{x_1,x_2,x_3,x_7\}$.

2.3. Использование количественной теории важности критериев при принятии решений

При использовании количественной теории важности критериев для принятии решений используются следующие формы задания их (критериев) важности:

1) степень превосходства в важности одних критериев над другими (критерий K_i в h раз важнее критерия K_j), степень превышения важности критерия K_i относительно критерия K_j обозначается через h, где $h>0$, понятно, что при $h>1$ критерий K_i в h раз важнее критерия K_j, при $h<1$ (для $K_i\succ K_j$) критерий K_j в $1/h>1$ раз важнее критерия K_i, при $h=1$ критерии K_i и K_j равно важны (эквивалентны по важности, т.е. $K_i\sim K_j$);

2) задание абсолютного значения важности критериев, количественно измеряемой по общей шкале важности, в этом случае важность критерия K_i имеет величину β_i, $\beta_i>0$.

Первый способ задания важности критериев связан со вторым способом с помощью следующей формулы: $h=\beta_i/\beta_j$, где h - степень превосходства важности β_i критерия K_i над важностью β_j критерия K_j.

Утверждение о степени превосходства важности критерия K_i над важностью критерия K_j в h раз обозначается следующим образом: $K_i\succ^{h}K_j$. Для обозначения количественной информации о степенях превосходства важностей критериев K_i введен в рассмотрение символ Θ (т.е. Θ – информация о важности критериев, характеризующая предпочтения ЛПР). Для использования количественной информации о важности критериев выполняется расширение исходной модели «качественной» важности критериев до так называемой N-

кратной модели (N-модели). Способ построения N-модели может быть рассмотрен на основе примера, введенного в рассмотрение выше (определение студентов, наиболее предпочтительных с точки зрения успеваемости).

Для упомянутого примера качественная информация о важности критериев K_1, K_2, K_3, K_4 имеет вид: $\Omega = \{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4\}$. Допустим, что на основе качественной информации Ω получена количественная информация Θ в следующем виде:

$$\Theta = \{ K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^2 K_4 \}.$$

С точки зрения изучаемых дисциплин, каждой из которых соответствует свой критерий K_i, введенную в рассмотрение дополнительную информацию Θ о важности критериев можно прокомментировать следующим образом. Предмет 3 (критерий K_3) состоит из двух разделов, каждый из которых эквивалентен предмету 4 (критерий K_4). Т.к. предмет 3 содержит два раздела, а предмет 4 один раздел, то $K_3 \succ^2 K_4$. Предмет 1 (критерий K_1) состоит из трех разделов, каждый из которых имеет одинаковую важность с одним из двух разделов второго предмета (критерий K_2), поэтому $K_1 \succ^{3/2} K_2$. Рассмотрим для принятия решений на основе качественной информации о важности критериев полученное в предыдущем разделе множество X_Ω. Расширенная модель принятия решений введена в следующем виде:

1) Исходное множество решений X_Ω, для которого формируется расширенная N-модель имеет вид $X_\Omega = \{ x_1, x_2, x_3, x_7 \}$;

2) для каждого решения x_i ($i \in \{1,2,3,7\}$) его векторная оценка формируется путем повторения скалярной оценки k_{ij} (где i – индекс решения, j – индекс критерия) такое количество раз, сколько равноважных разделов содержит соответствующий j-ый предмет;

3) сформированная расширенная модель с учетом количественной важности критериев примет в этом случае следующий вид (формируются новые векторные оценки):

$$K^{\Theta}(x_1) = (\underbrace{3,3,3,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{5,5,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{5,5,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{4}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_2) = (\underbrace{4,4,4,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{5}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_3) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{3,3,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_4) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{3,3,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}}).$$

Полученные векторные оценки $K^{\Theta}(x_i)$ могут быть проинтерпретирована как состоящие из восьми критериев с одинаковой важностью. Число повторений для критериев K_i определяется на основе значений Θ_i, соответствующих этим критериям: для критерия K_1: $n_1 = 3$; для K_2: $n_2 = 2$; для K_3: $n_3 = 2$; для K_4: $n_4 = 1$. Тогда N-модель представляет собой совокупность количества повторений скалярных оценок для каждого критерия, т.е. N-модель представляет собой вектор $N=(n_1,n_2,...,n_m)$, где m - количество критериев, который содержит количество повторений скалярных оценок k_{ij} каждого из критериев K_j. Таким образом, N-модель – это модель с $n_1+n_2+...+n_m$ скалярными оценками, где первые n_1 оценок – это повторение n_1 раз оценки k_{i1} в исходном векторе K_j, вторые n_2 оценок – это повторение n_2 раз оценки k_{i2} в исходном векторе K_j и т.д. Если N-модель в виде $N=(n_1,n_2,...,n_m)$ сформирована, то отдельный коэффициент α_i в аддитивной многокритериальной модели (аддитивная свертка) может быть определен следующим образом: $\alpha_i = n_i / \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Таким образом N - модель – это совокупность чисел n_i, каждое из которых определяет число повторений скалярной оценки k_{ij} из исходной векторной оценки в формируемом новом векторе значений.

Определение. Критерий K_i в h раз важнее критерия K_j, если на основе N-модели коэффициент важности h может быть определен следующим образом: $n_i / n_j = h$. При этом каждая из n_i оценок критерия K_i в формируемом векторе $K^{\Theta}(x_l)$ имеет равную важность с любой из n_j оценок критерия K_j в этом же векторе.

В соответствии с сформированным определением и введенным выше выражением вида $h=\beta_i/\beta_j$ приходим к выводу, что $h=n_i/n_j=\beta_i/\beta_j$, где β_i и β_j - коэффициенты важности критериев. Владея информацией о значениях β_i и β_j может быть выполнен переход к значениям n_i и n_j, формирование N-модели и ее использование для принятия решений.

Один из способов определения коэффициентов важности критериев $\beta_i (i=\overline{1,m})$ предполагает из попарное сравнение по абсолютной важности. В ходе использования данного метода строится матрица $A=(a_{ij})_{m\times m}$ парных сравнений критериев $K_1,...,K_m$ по важности. ЛПР указывает свои предпочтения относительно важности критериев следующим образом: $a_{ij}=1$ если $K_i \succeq K_j$ и $a_{ij}=0$, если $K_i \prec K_j$. Тогда важность *i*-го критерия K_i (выраженная коэффициентомх β_i), определяется формулой $\beta_i = a_i / m$ ($a_i \neq 0$), где $a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$. Если значения β_i являются дробными (если дробная часть β_i не равна 0), а значения n_i должно быть строго целым, то для приведения β_i к требуемому виду их необходимо умножить на соответствующее натуральное число. Рассмотрим пример для двух критериев.

Пример приведения дробных значений коэффициентов важности β_o к целому виду :

1) $\beta_i = 0{,}2$; $\beta_j = 0{,}4$, следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 10, тогда $n_i = 2$; $n_j = 4$;

2) $\beta_i = 0{,}25$; $\beta_j = 0{,}45$, следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 100, тогда $n_i = 25$; $n_j = 45$;

Таким образом, если получены значения $n_1,n_2,...,n_m$, то N-модель может быть представлена в следующем виде: $N=(n_1,n_2,..,n_m)$. Например, если $n_1 = 2$, а $n_2 = 4$ то N-модель имеет вид $N=(2{,}4)$.

Пример построения n_i-оценок для соответствующих N-моделей.

1) если $m=2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(2{,}5)$, а N-модель имеет вид $(3{,}4)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i)=(2{,}2{,}2{,}5{,}5{,}5{,}5)$;

2) если $m=2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(3,6)$, а N - модель имеет вид $(3,5)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i)=(3,3,3,6,6,6,6,6)$.

В силу того, что в построенной N - модели (соответственно, в оценках $K^{\Theta}(x_i)$ ($i=\overline{1,m}$)) все критерии являются одинаково важными, тогда для определения не доминируемых решений (решений $x_i \in X_{\Theta}$, где X_{Θ} - множество не доминируемых решений, сформированное на основе количественной информации Θ о важности критериев) используются введенные выше условия вида: $k_{ij} \geq k_{il}$ и $k_{ij'} > k_{il'}$ хотя бы для одной оценки $k_{ij'}$. Таким образом, формирование N-модели должно обеспечивает приведение всех критериев к одинаковой степени важности (все оценки в $K^{\Theta}(x_i)$ являются равными по важности). Для удобства выполнения действий по сравнению оценок k_{ij}^{Θ} вектора K эти оценки могут быть предварительно упорядочены по убыванию. Таким образом, выполняется сравнение непосредственное сравнение оценок k_{ij}^{Θ} для соответствующих решений, устанавливается отношение предпочтения (доминирования) $\succ$ между оценками $K^{\Theta}(x_i)$ и $K^{\Theta}(x_l)$, и, соответственно, между самими решениями (т.е. $x_i \succ x_l$).

Пример выбора недоминируемых решений $x_i^* \in X_{\Theta}$ на основе множества X_{Ω}, полученного путем анализа качественной информации о важности критериев.

В процессе решения рассматриваются альтернативы X_1, X_2, X_3, X_7. Оценки $K(x_i)$ для них приведены в Таблице 1. Информация Θ о степенях важности критериев имеет вид: $\Theta=\{K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^{2} K_4\}$, т.е. N -модель, имеет вид: $N=(3,2,2,1)$. Оценки $K^{\Theta}(x_i)$ в соответствии с N - модели следующие: $K^{\Theta}(x_1)=(3,3,3,5,5,5,5,4)$; $K^{\Theta}(x_2)=(4,4,4,4,4,4,4,5)$; $K^{\Theta}(x_3)=(5,5,5,4,4,3,3,3)$; $K^{\Theta}(x_7)=(5,5,5,3,3,4,4,3)$. Для удобства дальнейших действий полученные оценок отсортированы по убыванию. В итоге: $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)=(5,5,5,5,4,3,3,3)$; $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)=(5,4,4,4,4,4,4,4)$; $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_3)=K_{\downarrow}^{\Theta}(x_7)=(5,5,5,4,4,3,3,3)$.

С точки зрения введенных условий для недоминирования (предпочтения) и доминирования решений имеем: $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)\succ K_{\downarrow}^{\Theta}(x_3)$, $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)\succ K_{\downarrow}^{\Theta}(x_7)$. Т.е. решения x_3 и x_7 не могут быть включены в множество недоминируемых решений X_{Θ} (т.е. $X_{\Theta}=X_{\Theta} \setminus \{x_3, x_7\}$). Сравнение оценок $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ показывает, что $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)\bar{\succ} K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)\bar{\succ} K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$, т.е. оценки $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. В итоге имеем $x_1 \succ_{\Theta} x_3$, $x_1 \succ_{\Theta} x_7$, $x_1 \bar{\succ}_{\Theta} x_2$, $x_2 \bar{\succ}_{\Theta} x_1$, где $\succ_{\Theta}$ – отношение предпочтения, формулируемое с учетом количественной информации Θ о важности критериев.

Понятно, что приведенный подход может быть применен непосредственно к множеству решений X без выделения множества X_{Ω} недоминируемых решений с использованием качественной информации о важности критериев.

2.4. Использование теории относительной важности критериев при принятии решений

При реализации выбора эффективных решений (в частности, в случае двух критериев) возможными стратегиями, которыми руководствуется ЛПР, являются: 1) стратегия компенсации; 2) стратегия исключения.

Стратегия компенсации предполагает, что незначительное уменьшение значения по одному из критериев компенсируется более значительным увеличением второго критерия. Стратегия исключения предполагает удаление из рассмотрения решения, которые не удовлетворяют введенным в рассмотрение ограничивающим условиям. По аналогии с рассмотренным ранее подходом теории важности критериев принятые обозначения имеют вид: $K = (K_1, K_2, ..., K_m)$ - векторный критерий, X - множество возможных решений, $\succ (x_i \succ x_j)$ – отношение предпочтения, заданное на множестве векторных оценок $K(x_i)$. Понятно, что $K(x_i) \succ K(x_j) <=> (x_i \succ x_j)$.

В основе теории относительной важности критериев положено следующее определение уступки и приращения для рассматриваемых критериев (в нашем случае, $m = 2$). Пусть i и j - два различных номера критериев. Тогда критерий K_i важнее критерия K_j с заданными положительными параметрами w_i и w_j, если для двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ вида:

$$K(x_l) = (K_1(x_l), K_2(x_l), .., K_i(x_l), .., K_j(x_l), .., K_m(x_l)),$$
$$K(x_h) = (K_1(x_h), K_2(x_h), .., K_i(x_h), .., K_j(x_h), .., K_m(x_h))$$

имеет место $K(x_h) \succ K(x_l)$, при этом $k_{h,i} = k_{l,i} + w_i; k_{h,j} = k_{l,j} - w_j$ и $k_{hs} = k_{ls}$ при $s = 1,2,...,m$ и $s \neq i$, $s \neq j$.

В силу введенного в рассмотрение определения векторы $K(x_l)$ и $K(x_h)$ отличаются только *i*-ой и *j*-ой компонентами (т.е. значениями $k_{h,i}$, $k_{h,j}$, $k_{l,i}$, $k_{l,j}$).

Таким образом, в соответствии с введенными определением $K(x_h) \succ K(x_l)$, тогда ЛПР может выполнить уступки w_j по критерию K_j, для того, что получить приращение w_i по критерию K_i ($k_{h,i} > k_{l,i}$ на величину w_i, а $k_{h,j} > k_{l,j}$ на величину w_j). Т.е. если для критерия K_j может быть выполнения уступка w_j для получения приращения w_i критерия K_i (а в результате решение x_h предпочтительнее решения x_l), то критерий K_i является более важным, чем критерий K_j. Т.к. в результате $x_h \succ x_l$, то $K_i \succ K_j$.

Степень важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j определяется как w_i / w_j. Для того, чтобы важность критерия K_i по сравнению с критерием K_j была пронормирована, должен быть использован коэффициент относительной важности критерия K_i, вычисляемый следующим образом:

$$\Theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j}.$$

Если $\Theta_{ij} \to 1$, то за небольшое приращение w_i критерия K_i должна быть реализована значительная уступка w_j по критерию K_j (т.е. $w_i < w_j$). В этом случае критерий K_i имеет высокую степень важности по сравнению с критерием K_j. Если $\Theta_{ij} \to 0$, то потери w_j по критерию K_j должны обеспечивать значительное приращение w_i по критерию K_i. В этом случае критерий K_j является более важным, чем критерий K_i и $w_i > w_j$. Если $w_i = w_j$, то $\Theta_{ij} = 1/2$. Таким образом, определение относительной важности критериев K_i и K_j реализуется путем задания значений уступок w_j и приращений w_i для соответствующих критериев K_j и K_i. Использование относительной важности критериев (коэффициента относительной важности Θ_{ij}) в процедуре принятия решений для выявления эффективных альтернатив основывается на понятии инвариантности отношения предпочтения.

Бинарное отношение R, заданное на пространстве R^m, называется инвариантным относительно линейного положительного преобразования, если для произвольных двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ из выражения $K(x_l) \succ K(x_h)$ следует соответствие $(\alpha K(x_l)+C) \succ (\alpha K(x_h)+C)$, где C - задаваемый вектор значений, α - положительный коэффициент $(\alpha > 0)$. Для задач многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ может считаться инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Из свойств инвариантности отношения $\succ$ вытекают свойства аддитивности и однородности этого отношения, т.е.: из $K(x_l) \succ K(x_h) => (K(x_l)+C) \succ (K(x_h)+C)$; из $K(x_l) \succ K(x_h)$ => $\alpha K(x_l) \succ \alpha K(x_h)$. Т.е. к векторам значений критериев $K(x_l)$ и $K(x_h)$ может быть прибавлен вектор C и при этом отношение предпочтения не изменится. Вектора $K(x_l)$ и $K(x_h)$ могут быть умножены на положительное число α и при этом отношение предпочтения также не изменится.

2.5. Использование понятия относительной важности критериев для сужения множества эффективных решений в многокритериальной задаче

Рассмотрение механизма использования относительной важности критериев для сужения множества выбираемых (эффективных) решений предварим формулировками аксиом ЛПР, которыми он руководствуется в процессе выбора. Для вводимых в рассмотрение аксиом определим следующие обозначения: $C(X)$ – множество эффективных (выбираемых) решений, $C(K)$ – множество соответствующих этим решениям векторов значений критериев.

Аксиома 1. Для всякой пары векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$, для которых имеет место $K(x_l) \succ K(x_h)$, выполняется $K(x_h) \notin C(K)$. Аналогично, для всякой пары допустимых решений x_l и x_h, для которых имеет место соотношение $x_l \succ x_h$, выполняется $x_h \notin C(X)$.

Аксиома 2. Иррефлексивное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, является транзитивным бинарным отношением.

Аксиома 3. Каждый из критериев $K_1, K_2, ..., K_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$ (при прочих равных значениях критериев K_j $(j=\overline{1,m})$ сравнение решений может быть выполнено с использованием одного критерия K_i (при $i \neq j$)); данное свойство выполняется для каждого критерия.

Тогда при условии, что для задачи многокритериального принятия решений выполняются аксиомы 1-3 и условие инвариантности отношения $\succ$, при условии большей важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j на основе множества $C(X)$ и множества $C(K)$ (выбираемых решений и выбираемых критериев) могут быть сформулированы новые множества $C'(X)$ и $C'(K)$, где множество $C'(X)$ является сужением исходного множества $C(X)$, а множество векторов $C'(K)$ определяется в соответствии с изложенной ниже процедурой.

Если критерий K_i является более важным, чем критерий K_j с параметрами w_i и w_j, то модифицированная оценка $K_j^{'}$ менее важного критерия может быть определена следующим образом:

$K_j^{'} = w_j K_i + w_i K_j$,

$K_s^{'} = K_s$, при $s = 1,2,...,m$ и $s \neq j$.

В результате для некоторого решения x_h формируется вектор модифицированных значений критериев $K'(x_h) = (K_1^{'}(x_h), K_2^{'}(x_h),..,K_j^{'}(x_h),..,K_m^{'}(x_h))$. В результате на основе полученных модифицированных векторов $K'(x_h)$ критериев $K'_s(x_h)$ ($s=\overline{1,m}$) для решений $x_h \in C(X)$ должна быть выполнена проверка выполнения отношения строгого предпочтения. Те решения x_h, для которых выполняется условие $x_l \succ x_h$ (при $K'(x_l) \succ K'(x_h)$), в множество $C'(X)$ включены быть не могут. Тем самым количество элементов в $C'(X)$ может быть уменьшено (т.е. $|C'(X)|<|C(X)|$). Для введенного в рассмотрение выражения, с использованием которого вычисляется оценка K'_j, могут быть выполнены следующие преобразования. Вследствие инвариантности отношения $\succ$ (и множества $C(X)$ соответственно) правую часть выражения для критерия K'_j разделим на $w_i + w_j$, оставив для K'_j тоже обозначение. Получим $K'_j = \Theta_{ij}K_i + (1-\Theta_{ij})K_j$, где критерий K_i более важен, чем критерий K_j, Θ_{ij} - коэффициент важности критерия. В дальнейшем с целью сужения множества $C(X)$ при получении векторных оценок $K'(x_h)$ должна быть использована полученная формула.

Таким образом, «новый» векторный критерий K' получен из «старого» критерия K заменой менее важного скалярного критерия K_j на линейную комбинацию критериев K_i и K_j с коэффициентами w_i и w_j (коэффициентом Θ_{ij}). Все остальные скалярные критерии K_s сохраняются (при $s=1,2,...,m$ и $s \neq j$).

Пример сужения множества выбираемых решений C(X) на основе относительной важности критериев с коэффициентами w_i и w_j.

Заданными являются значения коэффициентов w_1 и w_2: $w_1 = 1$; $w_2 = 2$. Т.е. уступка по критерию K_1 в одну единицу должно обеспечивать приращение по критерию K_2 в две единицы (критерий K_1 является более важным, чем критерий K_2). Тогда $\Theta_{ij} = 0.67$, а $(1-\Theta_{ij}) = 0.33$. Исходное множество решений X имеет вид: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, значения критериев K_i ($i=\overline{1,4}$) для соответствующих значений сведены в Таблицу 2.

Таблица 2. Значения критериев K_i ($i=\overline{1,4}$) для решений x_l ($l=\overline{1,}$)

K_i / x_l	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	5	5	4
x_2	5	4	3	5
x_3	5	4	4	3
x_4	2	5	3	3
x_5	4	2	4	5
x_6	3	5	3	2
x_7	4	5	3	5

Решение x_5 доминируется решением x_7 ($x_7 \succ x_5$), поэтому $x_5 \notin C(X)$, решение x_6 доминируется решением x_1, поэтому $x_6 \notin C(X)$ при $x_1 \succ x_6$. Решения x_1, x_2, x_3, x_4, x_7 являются не сравнимыми между собой, поэтому $C(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$. Значения $K'(x_l)$ определены в соответствии с введенной в рассмотрение формулой и сведены в Таблицу 3. Из анализа значений K'_i ($i=\overline{1,4}$) видно, что $x_2 \succ x_7$, $x_3 \succ x_4$, поэтому сформированное множество $C'(X)$ будет иметь вид: $C'(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Решения, входящие в это множество, являются эффективными.

Таблица 3. Значения критериев K_i' $(i=\overline{1,4})$ для решений x_l $(l=\overline{1,})$

K_i / x_l	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	3.66	5	4
x_2	5	4.67	3	5
x_3	5	4.67	4	3
x_4	2	2.99	3	5
x_7	4	4.33	3	5

Из анализа значений K_i' $(i=\overline{1,4})$ видно, что $x_2 \succ x_7$, $x_3 \succ x_4$, поэтому сформированное множество $C'(X)$ будет иметь вид: $C'(X)=\{x_1, x_2, x_3\}$. Решения, входящие в это множество, являются эффективными.

3. Программа выполнения работы

Для первого варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе информации Ω о качественной важности критериев сформировать матрицы $A1$ и $A2$ отношений предпочтения и эквивалентности для критериев K_i $(i=\overline{1,n})$;

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h; тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X_Ω не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$решений;

3) разработать процедуру, использующую информацию Ω о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица A_1 отношения предпочтения для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:

а) для решений x_l (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент k_{li} и k_{lj} в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы i и j соответствуют критериям K_i и K_j, связанным отношением предпочтения в следующем виде: $K_i \succ K_j$);

б) для каждого решения x_l для его модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Ω: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;

в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Ω, сформированного на основе информации Ω о предпочтениях критериев вида $K_i \succ K_j$;

4) разработать процедуру, использующую информацию Ω о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица A_2 отношения эквивалентности для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:

а) для решений x_l (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент k_{li} и k_{lj} в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы i и j

соответствуют критериям K_i и K_j, связанным отношением эквивалентности в следующем виде: $K_i \sim K_j$);

б) для модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ каждого решения x_l (при $l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Ω: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;

в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Ω, сформированного на основе информации Ω об эквивалентности критериев вида $K_i \sim K_j$;

5) выполнить вывод множества X_Ω, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете дополнительной информации Ω о предпочтениях и эквивалентности критериев.

Для второго варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе информации Θ о количественной важности критериев сформировать *N*-модель в виде вектора, каждый *i*-ый элемент которого соответствует *i*-му критерию и определяет число повторений исходных скалярных оценок k_{li} в формируемом векторе $K^\Theta(x_l)$ (при $l=\overline{1,n}$);

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h; тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X_Θ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$-решений;

3) разработать процедуру, использующую информацию Θ о важности критериев, входными данными для которой будет являться сформированный вектор значений, интерпретируемый как *N*-модель; разрабатываемая процедура реализует формирование векторов $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$), представляющих собой модификацию исходных векторных оценок $K(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$) по соответствующему виду *N*-модели; таким образом, результатом реализации процедуры являются модифицированные с учетом информации Θ о количественной важности критериев векторные оценки $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

4) разработать процедуру, упорядочивающую по убыванию скалярные оценки k_{li} ($i=\overline{1,n}$) для каждой сформированной векторной оценки $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

5) для модифицированных векторных оценок $K^\Theta(x_l)$ каждого решения x_l ($l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^\Theta(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^\Theta(x_l)$ и $K^\Theta(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Θ: $X_\Theta = X_\Theta \setminus x_h$;

6) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Θ, сформированного на основе информации Θ о количественной важности критериев;

7) выполнить вывод множества X_Θ, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете дополнительной информации Θ о количественной важности критериев.

Для третьего варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе задаваемых в качестве входных данных значений w_i и w_j, соответствующих уступкам и приращениям для критериев K_i и K_j, вычислить значения коэффициентов относительной важности критериев Θ_{ij};

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h ($h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X'_Θ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$решений;

3) разработать процедуру определения значений векторных оценок $K'(x_l)$ для всех n решений ($l=\overline{1,n}$) с учетом вычисленных значений Θ_{ij}; при этом учесть, что при $w_i < w_j$ критерий является менее важным, чем критерий K_i; в этом случае пересчитываются скалярные оценки k_{lj}, соответствующие этому j-му критерию (в этом случае определяется скалярная оценка k'_{lj}, входящая в модифицируемый вектор $K'(x_l)$);

4) для модифицированных векторных оценок $K'(x_l)$ каждого решения x_l ($l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K'(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K'(x_l)$ и $K'(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X'_Θ: $X'_\Theta = X'_\Theta \setminus x_h$;

5) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X'_Θ, сформированного на основе информации об относительной важности критериев;

7) выполнить вывод множества X'_Θ, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете информации об относительной важности критериев.

4.Задание на работу

В качестве исходных данных для выполнения задания по лабораторной работе (для всех вариантов) заданы: множество решений вида $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, оценки пяти критериев сведены в Таблицу 4.

Таблица 4. Скалярные оценки k_{ij} критериев K_j для решений x_i ($i=\overline{1,8}$, $j=\overline{1,5}$)

Варианты	Критерии				
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
x_1	3	5	5	4	4
x_2	4	4	4	5	4
x_3	5	4	3	3	5
x_4	3	5	3	5	3
x_5	4	2	4	5	5
x_6	3	5	3	5	3
x_7	5	3	4	3	4
x_8	4	5	3	4	3

Вариант 1. Определить множество несравнимых решений X_Ω, используя качественную информацию о важности критериев Ω в следующем виде:

$\Omega = \{ K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \sim K_4, K_4 \succ K_5 \}$.

Вариант 2. Определить множество несравнимых решений X_Θ, используя количественную информацию о важности критериев Θ в следующем виде:
$\Theta = \{ K_3 \succ^3 K_4, K_1 \succ^2 K_4, K_4 \succ^2 K_2, K_2 \sim K_5 \}$.

Вариант 3. Определить множество несравнимых решений $C'(X)$, используя информацию об относительной важности критериев в следующем виде:
$w_1 = 2$, $w_2 = 1$;
$w_4 = 1$, $w_5 = 2$.

5. Контрольные вопросы.

5.1. В каких ситуациях возникает необходимость учета важности критериев?
5.2. В чем состоят условия доминирования векторной оценки со стороны другой векторной оценки (одного решения другим решением при наличии векторного критерия) ?
5.3. В чем заключается понятие качественной важности критериев?
5.4. В какой форме может быть задана информация о качественной важности критериев?
5.5. В чем состоит способ формирования модифицированных векторных оценок решений на основе исходных векторных оценок с учетом качественной информации?
5.6. В чем заключаются условия доминирования сформированной модифицированной векторной оценкой исходной векторной оценки при учете качественной информации о важности критериев для одного и того же решения (в каком случае модифицированная векторная оценка доминирует исходную векторную оценку) ?
5.7. В какой ситуации сформированная модифицированная векторная оценка не доминирует исходную векторную оценку?
5.8. В чем состоят условия доминирования векторной оценкой одного решения векторной оценки другого решения при учете качественной информации о важности критериев?
5.9. В чем причина доминирования сформированной векторной оценкой исходной векторной оценки при условии эквивалентности критериев?
5.10. Какие шаги формируют алгоритм определения состава множества X_Ω не сравнимых решений при учете информации Ω о качественной важности критериев?
5.11. Что представляет из себя понятие количественной важности критериев?
5.12. Как определить относительную важность критерия K_i по сравнению с критерием K_j, если важность K_i равна β_i, а важность K_j равна β_j?
5.13. В чем заключается способ построения N-модели с учетом количественной информации Θ о важности критериев?
5.14. В чем заключается способ формирования модифицированных векторных оценок $K^\Theta(x_l)$ на основе исходных оценок $K(x_l)$ с учетом N-модели?
5.15. Каким образом можно выполнить переход от значений n_i в N-модели к значениям коэффициентов a_i в аддитивной свертке значений всех критериев K_i $(i = \overline{1,m})$ для решения x_l?
5.16. Как определяется коэффициент важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j на основе N-модели?
5.17. В чем состоит суть метода определения множества несравнимых решений X_Θ (в чем заключается алгоритм формирования множества X_Θ)?
5.18. Как в теории относительной важности критериев задается преобладание важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j?
5.19. В чем заключается понятие уступки и приращения и как они характеризуют относительную важность критериев?

5.20. Каким образом вычисляется коэффициент относительной важности критерия K_i (по сравнению с критерием K_j) и как значение этого коэффициента характеризует относительную важность критериев K_i и K_j?

5.21. Каким образом формулируются аксиомы принятия решений при многих критериях

5.22. В чем заключается способ модификации исходных векторных оценок $K(x_l)$ для получения оценок $K'(x_l)$?

5.23. Каким образом выполняется сужение множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев (какова последовательность шагов алгоритма сужения множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев)?