Задания для самостоятельной работы к модулю

«Теория функций комплексной переменной»

Задание 1

1. Письменно ответить на вопросы:

а) какая функция $f(z)$ называется аналитической в области D?

б) запишите условия Коши Римана, как называются функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$?

2. Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция аналитической?

1. $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$.
2. $f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$
3. $w = z^2 \cdot e^{-z}$.
4. $f(z) = e^x \cos y + i \sin y$.
5. $f(z) = y^2 + 2xi$.
6. $w = \bar{z} \cdot \sin z$.
7. $w = z \cdot e^z$.
8. $w = z \cdot |z|$.
9. $w = \bar{z} \cdot |z|$.
10. $w = e^{z^2}$.
11. $f(z) = e^x(\cos y - i \sin y)$.
12. $w = \sin 3z - i$.
13. $w = \bar{z} \cdot \mathrm{Re}\, z$.
14. $f(z) = x^2 y + i \cdot x \cdot y^2$.
15. $w = \bar{z} \cdot \mathrm{Im}\, z$.
16. $w = |z| \cdot \mathrm{Im}\, z$.
17. $w = z \cdot \sin z$.
18. $w = z \cdot \cos z$.
19. $w = (iz)^3$.
20. $w = i(1 - z^2) - 2z$.
21. $w = z^3 - 2z + i$.
22. $w = e^{1+2z}$.
23. $w = z^2 \cdot \mathrm{Im}\, z$.
24. $w = e^{2iz}$.
25. $f(z) = y^2 - 3xi$.
26. $w = |z| \cdot \mathrm{Re}\, z$.
27. $f(z) = \sin x \cdot \cos y + i \cos x \cdot \sin y$.
28. $f(z) = (x^2 + x^2 y^2) + i(xy^2 - y^2)$.
29. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^2)$.
30. $f(z) = \sin x \cdot \mathrm{ch} y + i \cos x \cdot \mathrm{sh} y$.

Задание 2

1. Письменно ответить на вопросы:

а) запишите комплексную переменную и её дифференциал в алгебраической и показательной формах.

б) что называется интегралом от функции комплексной переменной по кривой С?

в) запишите формулу вычисления интеграла от ФКП через сумму криволинейных интегралов.

2. Вычислить интеграл

1. $\int\limits_C z \,\mathrm{Im}\, z^2 dz$, где $C: |z| = 1, \quad (-\pi \le \arg z \le 0)$.
2. $\int\limits_C e^{|z|^2} \mathrm{Re}\, z dz$, где С – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 1 + i$.
3. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.
4. $\int\limits_C z \,\mathrm{Re}\, z dz$, где С: $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.
5. $\int\limits_C \bar{z}^2 dz$, где С: луч $\phi = \dfrac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 2$.
6. $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z| = 1$, $\left(0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.
7. $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z dz$, где С: $z = (2 + i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.
8. $\int\limits_C z \,\mathrm{Im}\, z dz$, где $C: |z| = 1, \quad (-\pi \le \arg z \le 0)$.
9. $\int\limits_C e^{|z|^2} \mathrm{Im}\, z dz$, где С – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0, \quad z_2 = -1 - i$.
10. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z| = 2$, обход против часовой стрелки.

11. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, где С: $|z|=2$, $(0 \le \arg z \le \pi)$.

12. $\int\limits_C \bar{z}^3 dz$, где С: луч $\phi = -\dfrac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 1$.

13. $\int\limits_C \mathrm{Im}\,z \cdot \sin z dz$, где С: отрезок прямой, соединяющий точки

$z_1 = i, \quad z_2 = \dfrac{\pi}{2} + i$.

14. $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z|=2$, $\left(0 \le \arg z \le \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

15. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, где С: $z = (-1+i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.

16. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, где $C: |z|=1, \quad (0 \le \arg z \le \pi)$.

17. $\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где С – прямая, соединяющая точки

$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 - i$.

18. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z|=1$, обход по часовой стрелке.

19. $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где С: отрезок от точки $z_1 = 1+i$ до точки $z_2 = 0$.

20. $\int\limits_C \bar{z}^2\,\mathrm{Im}\,z dz$, где С: отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки

$z_2 = 1 - i$.

21. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, где С: отрезок прямой $z = (1+i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.

22. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z dz$, где $C: |z|=1, \quad (0 \le \arg z \le \pi/2)$.

23. $\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\,z dz$, где С – отрезок прямой, соединяющей точки

$z_1 = 0, \quad z_2 = -1 + i$.

24. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z|=2$, обход по часовой стрелке.

25. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, где С: $|z|=2$, обход по часовой стрелке.

26. $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z|=5$, обход по часовой стрелке.

27. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, где С: $z = (2+i)t, \quad (0 \le t \le 2)$.

28. $\int\limits_C \mathrm{Im}\,z \cdot \mathrm{Re}\,z dz$, где С: $C: |z|=1, \quad (0 \le \arg z \le \pi/2)$.

29. $\int\limits_C \mathrm{Im}(z^2) \cdot \mathrm{Re}\,z dz$ где С: $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

30. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, где С: $|z|=1$, обход по часовой стрелке.

Ответы в вариантах задания 2.

1. $-\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\dfrac{1}{4}\left(e^2-1\right)\left(1+i\right)$. 3. $2\pi i$. 4. 0. 5. $\dfrac{4}{3} - i\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 6. $-1+i$. 7. $2+i$. 8. $\dfrac{2}{3}i$.

9. $\dfrac{1}{4}(e^2-1)(1+i)$. 10. $4\pi i$. 11. $-\dfrac{32}{3}$. 12. $-\dfrac{1}{8} + i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. 13. $\mathrm{ch}1 + i\,\mathrm{sh}1$. 14. $-8-8i$. 15. $\dfrac{1}{2}(1-i)$.

16. $-\dfrac{\pi}{2}$. 17. $\dfrac{1}{4}(e^2-1)(1-i)$. 18. $-2\pi i$. 19. $-\dfrac{2}{3}$. 20. $\dfrac{-1-i}{2}$. 21. $\dfrac{1+i}{2}$. 22. $-\dfrac{2}{3} - i\dfrac{1}{3}$.

23. $\dfrac{1}{4}(e^2-1)(-1+i)$. 24. $-4\pi i$. 25. 0. 26. 0. 27. $8+4i$. 28. $\dfrac{13}{12}(1+i)$. 29. $-\dfrac{\pi}{2}$. 30. 0.

Задание 3

1. Письменно ответить на вопросы:
а) сформулируйте теоремы Коши для односвязной и многосвязной области;
б) напишите интегральную формулу Коши и обобщенную интегральную формулу Коши в той форме, которая применяется для вычисления интегралов.

2. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл по двум замкнутым контурам: 1) $|z| = 0{,}5$; 2) $|z| = 2$.

1. $\int\limits_C \frac{\sin iz}{(z-1)(z+3)^3}\,dz$.

2. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} iz}{(z+1)(z-3)^2}\,dz$.

3. $\int\limits_C \frac{\cos i2z}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$.

4. $\int\limits_C \frac{z^2-3z+1}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

5. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-3)^2}\,dz$.

6. $\int\limits_C \frac{\operatorname{ch} i2z}{(z+1)(z-3i)^2}\,dz$.

7. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+3i)^2}\,dz$.

8. $\int\limits_C \frac{z^2+z+2}{(z+i)(z-3)^2}\,dz$.

9. $\int\limits_C \frac{\sin 2z}{(z-i)(z-3)^2}\,dz$.

10. $\int\limits_C \frac{\cos 2z}{(z+i)(z+3)^2}\,dz$.

11. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z-1)(z+5i)}\,dz$.

12. $\int\limits_C \frac{\operatorname{ch} 2z}{(z+1)(z-5i)}\,dz$.

13. $\int\limits_C \frac{z+1}{(z-1)(z+3i)^3}\,dz$.

14. $\int\limits_C \frac{\sin iz}{(z-1)^3(z+3)}\,dz$.

15. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} iz}{(z+1)^2(z-3)}\,dz$.

16. $\int\limits_C \frac{\cos(i2z)}{(z-i)^2(z+3)}\,dz$.

17. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-3)}\,dz$.

18. $\int\limits_C \frac{\operatorname{ch}(iz)}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

19. $\int\limits_C \frac{z^3+2z-1}{(z-i)^2(z+3)}\,dz$.

20. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-1)^3(z+3i)}\,dz$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)^3(z-3)}\,dz$.

22. $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z+1)(z+7i)^2}\,dz$.

23. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} z}{(z-1)^2(z+5i)}\,dz$.

24. $\int\limits_C \frac{\operatorname{ch} 2z}{(z+1)^2(z-5i)}\,dz$.

25. $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

26. $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$.

27. $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z-3)(z+i)^2}\,dz$.

28. $\int\limits_C \frac{z^2+3z-1}{(z-5i)(z+i)^2}\,dz$.

29. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+6i)}\,dz$.

30. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} z}{(z+1)^2(z+3i)}\,dz$.

Ответы в вариантах задания 3 (интеграл по контуру $|z| = 2$).

1. $-\frac{1}{32}\pi\sinh 1$. 2. $\frac{1}{8}\pi\sin 1$. 3. $\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cos 2$. 4. $\left(\frac{12}{5}+\frac{9}{5}i\right)\pi$. 5. $\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cdot e$.

6. $\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\pi\cos 2$. 7. $\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\pi\cdot e^2$. 8. $\left(\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i\right)\pi$. 9. $\left(\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i\right)\pi\sinh 2$.

10. $\left(\frac{-3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cosh 2$. 11. $\left(\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i\right)\pi\sinh 2$. 12. $\left(\frac{-5}{13}-\frac{1}{13}i\right)\pi\cosh 2$. 13. $\left(\frac{-9}{125}-\frac{13}{125}i\right)\pi$.

14. $\pi\left(\frac{1}{8}\cosh 1-\frac{9}{32}\sinh 1\right)$. 15. $\pi\left(\frac{1}{2}\cos 1-\frac{1}{8}\sin 1\right)$. 16. $\pi\left(\left(-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i\right)\sin 2+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cos 2\right)$.

17. $\left(\frac{12}{25}-\frac{9}{25}i\right)\pi\cdot e$. 18. $\pi\left(\left(-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\sin 1+\left(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\cos 1\right)$. 19. $\left(\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i\right)\pi$.

20. $\left(\frac{18}{125}+\frac{26}{125}i\right)\pi\cdot e$. 21. $\pi\left(\left(-\frac{33}{125}-\frac{6}{125}i\right)\sinh 1+\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cosh 1\right)$. 22. $\left(\frac{-7}{625}-\frac{24}{625}i\right)\pi\cos 1$.

23. $\pi\left(\left(-\frac{5}{169}-\frac{12}{169}i\right)\sinh 1+\left(\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i\right)\cosh 1\right)$. 24. $\pi\left(\left(\frac{10}{13}+\frac{2}{13}i\right)\sinh 2+\left(-\frac{5}{169}+\frac{12}{169}i\right)\cosh 2\right)$.

25. $\left(\frac{24}{25}+\frac{18}{25}i\right)\pi$. 26. $\left(\frac{-4}{25}+\frac{3}{25}i\right)\pi\sinh 1$. 27. $\pi\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\sinh 1+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cosh 1\right)$.

28. $\left(\frac{-5}{6}+\frac{5}{9}i\right)\pi$. 29. $\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{49}i\right)\pi\cdot e^i$. 30. $\pi\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\cosh 1+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\sinh 1\right)$.

Примечание – в пакете MathCAD синус и косинус гиперболические обозначаются $\sinh(z)$ *и* $\cosh(z)$.

Задание 4

1. Письменно ответьте на вопросы:

а) что называется рядом Лорана для ФКП, какая часть ряда Лорана называется правильной, какая главной;

б) как по ряду Лорана в окрестности особой точки определить её тип.

2. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z. Определить тип особых точек $z=0$ и $z=\infty$.

1. $f(z)=z^3\cdot\sin\frac{1}{z}$.
2. $f(z)=z^2\cdot\cos\frac{1}{z}$.
3. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\sin z$.
4. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\cos z$.
5. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot e^z$.
6. $f(z)=z^3\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}$.
7. $f(z)=z^2\cdot\operatorname{ch}\frac{1}{z}$.
8. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\operatorname{sh}z$.
9. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\operatorname{ch}z$.
10. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$.
11. $f(z)=z^3+\sin\frac{1}{z}$.
12. $f(z)=z^2+z-3\cos\frac{1}{z}$.
13. $f(z)=\frac{1}{z^5}+\frac{2}{z}-\sin z$.
14. $f(z)=z^5\cdot\sin\frac{1}{z^2}$.
15. $f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^2}+\cos z$.
16. $f(z)=\frac{1}{z^6}-\frac{5}{z^2}+e^z$.
17. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\sin z^2$.
18. $f(z)=z^3-z+\operatorname{sh}\frac{1}{z}$.
19. $f(z)=z^6\cdot\cos\frac{1}{z^2}$.
20. $f(z)=z^2-z+6+\operatorname{ch}\frac{1}{z}$.
21. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$.
22. $f(z)=\frac{1}{z^5}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}+\operatorname{sh}z$.
23. $f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\operatorname{ch}z$.
24. $f(z)=z^3+5z^2-z+e^{\frac{1}{z}}$.
25. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\operatorname{sh}z^2$.
26. $f(z)=z^4\cdot\sin\frac{1}{z}$.
27. $f(z)=z^3\cdot\cos\frac{1}{z}$.
28. $f(z)=z^5\cdot e^{\frac{1}{z}}$
29. $f(z)=4-z-6z^3+\operatorname{sh}\frac{1}{z^2}$.
30. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\operatorname{ch}z$.

Задание 5

1. Письменно ответить на вопросы:

а) что называется вычетом ФКП в изолированной особой точке;

б) записать формулы вычисления вычетов в простых полюсах и в полюсе порядка m.

2. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции.

1. $f(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2\cdot(z-1)(z+i)}$.
2. $f(z)=\frac{z^2+2z+7}{z\cdot(z+1)^2(z+i)}$.
3. $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z\cdot(z-2)(z+i)^2}$.
4. $f(z)=\frac{z+3}{z^3\cdot(z-2)(z+i)}$.
5. $f(z)=\frac{z^2+i}{z^2\cdot(z-2i)(z+3)}$.
6. $f(z)=\frac{z^2+2z+1}{z\cdot(z-3)^2(z+3i)}$.
7. $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2\cdot(z-1-i)(z+2)}$.
8. $f(z)=\frac{z+1}{z\cdot(z-1)^3(z+i)}$.
9. $f(z)=\frac{z+2}{z^3\cdot(z-1)(z+i)}$.
10. $f(z)=\frac{z-1}{z\cdot(z+2i)(z-3i)^2}$.
11. $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2\cdot(z-2)(z+2i)}$.
12. $f(z)=\frac{z^2+3z+1}{z\cdot(z-2)^2(z+i)}$.

13. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z\cdot(z-2)(z-i)^2}$. 14. $f(z)=\dfrac{z-3}{z^3\cdot(z+2i)(z+1)}$.

15. $f(z)=\dfrac{z^2-8}{z^2\cdot(z+2i)(z+3)}$. 16. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z\cdot(z-1)^2(z-3i)}$.

17. $f(z)=\dfrac{z^2+9}{z^2\cdot(z-1-i)(z+1)}$. 18. $f(z)=\dfrac{z+i}{z\cdot(z-1)^3(z+2i)}$.

19. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3\cdot(z-1)(z+3i)}$. 20. $f(z)=\dfrac{z-5}{z\cdot(z+i)(z-3)^2}$.

21. $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2\cdot(z-1)(z+i)}$. 22. $f(z)=\dfrac{3z-1}{z\cdot(z+2i)^2(z-3i)}$.

12

23. $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z^2\cdot(z-5)(z+2)}$. 24. $f(z)=\dfrac{z^2+z+7}{z\cdot(z-2)^2(z-1+i)}$.

25. $f(z)=\dfrac{z^2+6}{z\cdot(z-2)(z-i)^2}$. 26. $f(z)=\dfrac{z^2+z+7}{z\cdot(z+1)^2(z-i)}$.

27. $f(z)=\dfrac{z-3}{z^3\cdot(z+2)(z+i)}$. 28. $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z\cdot(z-3)^2(z+2i)}$.

29. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2\cdot(z-2+i)(z+1)}$. 30. $f(z)=\dfrac{z-3}{z\cdot(z+1)(z-3i)^2}$.

Ответы в вариантах задания 5 (первым записан вычет в кратном полюсе).

1. $(-1+2i)$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$. 2. $(3+6i)$, $(-7i)$, $(-3+i)$.

3. $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i\right)$. 4. $\left(\frac{-5}{4}-\frac{7}{8}i\right)$, $(1+i)$, $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}i\right)$.

5. $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12}i\right)$, $\left(\frac{5}{26}-\frac{11}{52}i\right)$, $\left(\frac{-29}{117}+\frac{5}{39}i\right)$. 6. $\left(\frac{4}{27}+\frac{4}{27}i\right)$, $\left(\frac{-1}{27}i\right)$, $\left(\frac{-4}{27}-\frac{1}{9}i\right)$.

7. $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\right)$, $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)$, $\left(\frac{-3}{8}+\frac{1}{8}i\right)$. 8. $\left(\frac{-3}{2}i\right)$ (i), $\left(\frac{1}{2}i\right)$. 9. $(-3+i)$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

10. $\left(\frac{1}{25}+\frac{8}{225}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{25}+\frac{1}{50}i\right)$. 11. $\left(\frac{-1}{8}+\frac{1}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{16}i\right)$, $\left(\frac{-3}{16}+\frac{3}{16}i\right)$.

12. $\left(\frac{-9}{25}+\frac{73}{100}i\right)$, $\left(\frac{-1}{4}i\right)$, $\left(\frac{9}{25}-\frac{12}{25}i\right)$. 13. $\left(\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{50}+\frac{6}{25}i\right)$.

14. $\left(1+\frac{13}{8}i\right)$, $\left(\frac{-1}{5}-\frac{1}{40}i\right)$, $\left(\frac{-4}{5}-\frac{8}{5}i\right)$. 15. $\left(\frac{-2}{3}-\frac{4}{9}i\right)$, $\left(\frac{9}{13}+\frac{6}{13}i\right)$, $\left(\frac{-1}{39}-\frac{2}{117}i\right)$.

16. $\left(\frac{7}{50}-\frac{12}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}i\right)$, $\left(\frac{-7}{50}+\frac{11}{75}i\right)$. 17. $\left(\frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$, $(-4+2i)$.

18. $\left(\frac{57}{125}+\frac{1}{125}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{250}-\frac{1}{125}i\right)$. 19. $\left(\frac{-2}{9}+\frac{17}{27}i\right)$, $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right)$, $\left(\frac{1}{45}-\frac{4}{135}i\right)$.

20. $\left(\frac{11}{50}-\frac{43}{450}i\right)$, $\left(\frac{5}{9}i\right)$, $\left(\frac{-11}{50}-\frac{23}{50}i\right)$. 21. $(-1+4i)$, $(2-2i)$, $(-1-2i)$.

22. $\left(\frac{3}{25}-\frac{7}{100}i\right)$, $\left(\frac{1}{12}i\right)$, $\left(\frac{-3}{25}-\frac{1}{75}i\right)$. 23. $\left(\frac{3}{50}i\right)$, $\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{175}i\right)$, $\left(\frac{-1}{7}-\frac{1}{14}i\right)$.

24. $\left(\frac{-3}{8}+\frac{29}{8}i\right)$, $\left(\frac{-7}{8}-\frac{7}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{4}-\frac{11}{4}i\right)$. 25. $\left(\frac{-18}{5}-\frac{4}{5}i\right)$, (3), $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$.

26. $\left(3-\frac{13}{2}i\right)$, $(7i)$, $\left(-3-\frac{1}{2}i\right)$. 27. $\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}i\right)$, $(-1+i)$, $\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{8}i\right)$.

28. $\left(\frac{1}{13}+\frac{20}{117}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{13}-\frac{3}{26}i\right)$. 29. $\left(\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i\right)$, $\left(\frac{-3}{5}-\frac{1}{5}i\right)$, $\left(\frac{8}{25}+\frac{4}{25}i\right)$.

30. $\left(\frac{-1}{75}+\frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{-8}{25}-\frac{6}{25}i\right)$.

Задание 6

1. Письменно ответить на вопрос: сформулировать основную теорему Коши о вычетах.
2. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. а) $\displaystyle\int\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1}\frac{\sinh iz}{(z+1)^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}dz$.

2. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^2(z+1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sinh\frac{1}{z}dz$.

3. а) $\int\limits_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-1)}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^3\cos\frac{1}{z}dz$.

4. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cosh iz}{(z+1)^2(z-i)}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^4\sin\frac{1}{z}dz$.

5. а) $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{z^2+2z-1}{(z-i)(z+2)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z\cosh\frac{1}{z}dz$.

6. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{z}}{(z-1)^3(z+2)}dz$; б) $\int\limits_{|z-1|=1} (z-1)^2\sin\frac{1}{z-1}dz$.

7. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3(z+1)}dz$; б) $\int\limits_{|z+i|=1} (z+i)^5\cos\frac{1}{z+i}dz$.

8. а) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^3(z+1)}dz$; б) $\int\limits_{|z+1|=1} (z+1)^4\sinh\frac{1}{z+1}dz$.

9. а) $\int\limits_{|z+i|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)^2(z+i)}dz$; б) $\int\limits_{|z-i|=1} (z-i)^3\cosh\frac{1}{z-i}dz$.

10. а) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)^2(z-1)}dz$; б) $\int\limits_{|z+2|=1} (z+2)e^{\frac{1}{z+2}}dz$.

11. а) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^2+1}{(z+1)(z-3)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{zi}dz$.

12. а) $\int\limits_{|z-\pi|=1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-\pi)^3}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{1}{iz}dz$.

13. а) $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\sinh z}{(z+1)(z-2)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^5\cosh\frac{1}{iz}dz$

14. а) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz}{(z-2i)\cdot z^3}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^4\sinh\frac{1}{iz}dz$

15. а) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^2-3z+1}{(z+1)(z-i)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^3e^{\frac{1}{iz}}dz$.

16. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-1)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^4\sin\frac{2}{z}dz$.

17. а) $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)(z-2)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^2\sinh\frac{2}{z}dz$.

18. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{z}}{(z-1)(z+i)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^3\cos\frac{3}{z}dz$.

19. а) $\int\limits_{|z-3|=5} \frac{z^2+z+2}{(z+i)(z-4)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z\cosh\frac{3}{z}dz$.

20. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{(z-i)(z-1)^3}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^2e^{\frac{3}{z}}dz$.

21. а) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z+i)\cdot z^3}dz$; б) $\int\limits_{|z+1|=1} (z+1)^2\sin\frac{1}{z+1}dz$.

22. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sinh(iz)}{(z-1)(z-i)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z-i|=1} (z-i)^5\cos\frac{1}{z-i}dz$.

23. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cosh(iz)}{(z+1)(z-i)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z-2|=1} (z-2)^4\sinh\frac{1}{z-2}dz$.

24. а) $\int\limits_{|z+3|=5} \frac{z+1}{(z-1)(z+3)^3}dz$; б) $\int\limits_{|z+i|=1} (z+i)^3\cosh\frac{1}{z+i}dz$.

25. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin iz}{(z-1)^2(z+2)}dz$; б) $\int\limits_{|z-3|=1} (z-3)e^{\frac{1}{z-3}}dz$.

26. а) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)(z+1)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{i}{z}dz$.

27. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=0,5} \frac{\cos(iz)}{(z+i)\cdot z^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^4 \sinh\frac{i}{z}dz$.

28. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin iz}{(z+i)^2(z-i)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{i}{z}dz$.

29. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} \frac{\cosh(iz)}{(z-1)(z+i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{i}{z}}dz$.

30. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2-z+5}{(z-i)(z+1)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^5 \cosh\frac{i}{z}dz$.

Ответы в вариантах задания 6.

1. а) $\frac{-8\pi}{(\pi+2)^2}$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 2. а) $\pi\cdot\cos 1$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 3. а) $-i\cdot\pi\cdot e^1$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 4. а) $\pi\cdot\cosh 1$; б) $\frac{\pi i}{60}$.

5. а) $\left(\frac{28}{25}+\frac{46}{25}\cdot i\right)\cdot\pi$; б) πi. 6. а) $\frac{5\cdot i\cdot\pi}{27}\cdot e$; б) $-\frac{\pi i}{3}$. 7. а) $\pi\cdot(\sinh 1-\cosh 1)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$.

8. а) $\frac{\pi}{2}\cos 1\cdot(1+i)$; б) $\frac{\pi i}{60}$. 9. а) $-i\cdot\pi\cdot\sin 1$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 10. а) $\frac{1}{4}i\pi(e-3e^{-1})$; б) πi.

11. а) $2i\pi$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 12. а) $\frac{2i\pi}{(\pi-1)^2}$; б) πi. 13. а) $\frac{2}{9}i\cdot\pi(e^2+2e^{-2})$; б) $-\frac{\pi i}{360}$. 14. а) $\frac{-\pi}{4}$;

б) $\frac{\pi}{60}$. 15. а) $2i\pi$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 16. а) $\pi\cdot e^i(-2+i)$; б) $\frac{8\pi i}{15}$. 17. а) $\frac{2}{9}i\pi(e^2-2e^{-2})$; б) $\frac{8\pi i}{3}$.

18. а) $\pi\cdot e$; б) $\frac{27\pi i}{4}$. 19. а) $2i\pi$; б) $9\pi i$. 20. а) $\pi\cdot e^{-i}$; б) $9\pi i$. 21. а) -3π; б) $-\frac{\pi i}{3}$.

22. а) $\pi(\cosh 1-\sinh 1+i\cdot\cosh 1)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$. 23. а) $\pi(\sinh 1-\cosh 1-i\cdot\sinh 1)$; б) $\frac{\pi i}{60}$. 24. а) 0;

б) $\frac{\pi i}{12}$. 25. а) $\frac{2}{9}\pi(-e-2e^{-1})$; б) πi. 26. а) $\frac{1}{4}i\pi(-3e^{-1}-e)$; б) $-\frac{\pi i}{3}$. 27. а) $2\pi\cos 1$; б) $-\frac{\pi}{60}$.

28. а) $\frac{1}{2}i\cdot\pi\cdot\sin 1$; б) πi. 29. а) $\pi(\sinh 1-\cosh 1-i\cdot\sinh 1)$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 30. а) $\pi(-4+3i)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$.

Задачи модуля «ТФКП»

Задание 1. Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция $w=\bar z\cdot\cos z$ аналитической?

Решение. Представим функцию в алгебраической форме, учитывая, что $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$.

$w=\bar z\cdot\cos z=(x-iy)\cdot\cos(x+iy)=(x-iy)(\cos x\cdot\cos iy-$
$-\sin x\cdot\sin iy)$. С учетом зависимостей $\cos iy=\mathrm{ch}y$ и $\sin iy=i\mathrm{sh}y$ получим: $w=u(x,y)+iv(x,v)$, где

$u(x,y)=\mathrm{Re}\,w=x\cos x\mathrm{ch}y-y\sin x\mathrm{sh}y$,

$v(x,y)=\mathrm{Im}\,w=-x\sin x\mathrm{sh}y-y\cos x\mathrm{ch}y$.

Ответ: условия Коши-Римана не выполняются. Функция $w=\bar z\cdot\cos z$ не аналитическая.

Задание 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C z^2\,\mathrm{Re}\,z dz$,

а) если C: $z=(-1+2i)t,\quad(0\le t\le 2)$;

б) если $C:|z|=1,\quad(0\le\arg z\le\pi/3)$.

Решение а) Уравнение пути интегрирования задано через параметр t: $x=-t,\quad y=2t$. Избавляясь от параметра, получим $y=-2x$, откуда $dy=-2dx$. Представим подынтегральную функцию в алгебраической форме: $z^2\,\mathrm{Re}\,z=(x+iy)^2x=x^3-xy^2+i2x^2y$. Дифференциал $dz=dx+idy=(1-2i)dx$.

$$\int\limits_C z^2\,\mathrm{Re}\,zdz=\int\limits_C\left(x^3-xy^2+i2x^2y\right)(1-2i)dx=\left|y=-2x\right|=$$

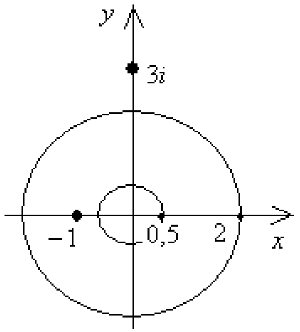
$$=(1-2i)\int\limits_0^{-2}\left(x^3-4x^3-i4x^3\right)dx.$$

б) Так как $C:|z|=1,\quad(0\le\arg z\le\pi/2)$ - часть дуги окружности с центром в начале координат, то вычисления удобно производить в полярной системе координат, при этом переменную интегрирования представим в показательной форме, с учетом, что $\rho=|z|=1$, $\arg z=\varphi$. $z=\rho\cdot e^{i\varphi}=e^{i\varphi}$, $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$; $z^2=e^{i2\varphi}$; $\operatorname{Re} z=\rho\cos\varphi=\cos\varphi$. В свою очередь, по формуле Эйлера $\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$. Тогда

$$\int_C z^2 \operatorname{Re} z dz=\int_0^{\pi/2} e^{i2\varphi}\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi=\frac{i}{2}\int_0^{\pi/2}\left(e^{i4\varphi}+e^{i2\varphi}\right)d\varphi .$$

Ответ: а) $-44+8i$; б) -1/2.

Задание 3. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл $\int_C \frac{\mathrm{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz$ по двум замкнутым контурам:



1) $|z|=0{,}5$; 2) $|z|=2$.

Решение. Рисуем на комплексной плоскости заданные контуры интегрирования и отмечаем особые точки подынтегральной функции: $z_1=-1,\quad z_2=3i$.

1) $\displaystyle\oint_{|z|=0,5}\frac{\mathrm{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz=0$ согласно теореме Коши для односвязной области (подынтегральная функция аналитическая во всех точках замкнутой области).

2) Внутри контура $|z|=2$ имеется одна особая точка $z=-1$.

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz=2\pi i\cdot\left.\left(\frac{sh4z}{z-3i}\right)'\right|_{z=-1}.$$

Ответ: $-195{,}611-82{,}35i$.

Задание 4. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^8}\cdot\mathrm{ch}2z$ в ряд Лорана по степеням z. Определить тип особых точек $z=0$ и $z=\infty$.

Решение. Воспользуемся определением гиперболического косинуса [1, §2.5]: $\mathrm{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ Подставим в ряд вместо z выражение $2z$ и умножим ряд почленно на $\frac{1}{z^8}$:

$$f(z)=\frac{1}{z^8}\cdot\mathrm{ch}2z=\frac{1}{z^8}\left(1+\frac{2^2z^2}{2!}+\frac{2^4z^4}{4!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^8}+\frac{2}{z^6}+\frac{2^4}{z^4\cdot 4!}+\frac{2^6}{z^2\cdot 6!}+\frac{2^8}{8!}+\frac{2^{10}z^2}{10!}+\frac{2^{12}z^4}{12!}+\ldots$$

На комплексной плоскости заданная функция имеет только одну особую точку $z=0$. Область $0<|z|<\infty$ - окрестность точки $z=0$ и бесконечно удаленной изолированной особой точки $z=\infty$. Поэтому ряд Лорана по степеням z позволяет судить о типе этих точек.

Ответ: $z=0$ - полюс 8-го порядка (ряд содержит конечное число членов главной части со старшим членом z^{-8}); $z=\infty$ - существенно особая бесконечно удаленная точка (ряд содержит бесконечное число членов с положительными степенями z).

Задание 5. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции $f(z)=\frac{z^2+z+9}{z^3\cdot(z-2+i)^2(z+1)}$.

Решение. Значения z, превращающие в ноль знаменатель функции, являются полюсами. Функция имеет три полюса: простой полюс $a=-1$, полюс второго порядка $a=2-i$, полюс третьего порядка.

$\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ $\qquad$ $\mathrm{f(z)} := \frac{z^2+z+9}{z^3\cdot(z-2+i)^2\cdot(z+1)}$

$$a := -1 \quad \lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) \to \frac{-18}{25} - \frac{27}{50}\cdot i$$

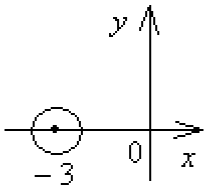
$$a := 2-i \quad m := 2 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m \cdot f(z) \to \frac{124}{625} - \frac{661}{1250}\cdot i$$

$$a := 0 \quad m := 3 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m \cdot f(z) \to \frac{326}{625} + \frac{668}{625}\cdot i$$

Задание 6. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^5 \cosh\frac{2i}{z}\,dz$.

Решение. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$. Рисуем на комплексной плоскости



контур интегрирования – окружность радиуса 1 с центром в точке $z=-3$. Внутри окружности расположен один полюс второго порядка. Вычисляем вычет в этом полюсе.

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1} \qquad \mathrm{f(z)} := \frac{z^2 - 2z + 7}{(z-i)\cdot(z+3)^2}$$

$$a := -3 \quad m := 2 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m \cdot f(z) \to \frac{16}{25} + \frac{13}{25}\cdot i$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{16}{25}+\frac{13}{25}i\right) = \pi\left(-\frac{26}{25}+\frac{32}{25}i\right).$$

Ответ: $\pi\left(-\frac{26}{25}+\frac{32}{25}i\right)$.