ЛЕКЦИЯ 5.
ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ)

СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛНДУ 2-ГО ПОРЯДКА

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = f(x) \qquad (1)$$

Где $a_1(x)$ и $a_2(x)$, $f(x)$ -заданные, непрерывные на $(a;b)$ функции.

Уравнение $\quad y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0 \qquad (2)$

Левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (1), называется соответствующим ему *однородным уравнением.*

Теорема. (Структура общего решения ЛНДУ)

Общим решением у уравнения (1) является сумма его произвольного частного решения $y_{ч.н.} = y^*$ и общего решения $y_{о.о.} = \bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ соответствующего однородного уравнения (2).

$$y = y^* + \bar{y} \qquad (3)$$

Доказательство

Убедимся, что функция (3) есть решение уравнения (1). Так как y^* – есть решение уравнения (1), а $\bar{y}$ – решение уравнения (2), то

$$y^{*''} + a_1(x)\cdot y^{*'} + a_2(x)\cdot y^* = f(x)$$

$$\bar{y}'' + a_1(x)\cdot \bar{y}' + a_2(x)\cdot \bar{y} = 0$$

$$(y^* + \bar{y})'' + a_1(x)\cdot(y^* + \bar{y})' + a_2(x)\cdot(y^* + \bar{y}) = f(x) + 0 = f(x)$$

Это означает, что функция $y = y^* + \bar{y}$ является решением (1). Покажем теперь, что функция $\quad y = y^* + c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (4)$

Является общим решением уравнения (1). Для этого надо доказать, что из решения можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0 \qquad (5)$

Продифференцировав функцию (4) и подставив начальные условия (5) в ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = y^* + c_1y_1 + c_2y_2 \\ y' = y^{*'} + c_1y_1' + c_2y_2' \end{cases} \qquad (6)$$

Подставим (5) в (6)

$$\begin{cases} y_0 = y^*(x_0) + c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\ y'_0 = y^{*'}(x_0) + c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'_0 - y^{*'}(x_0) \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке x_0.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Следовательно, образуют фундаментальную систему решений, т.е. $W(x_0) \neq 0$

Следовательно, система имеет единственное решение $c_1 = c_1^0 \quad c_2 = c_2^0$

Решение $y = y^* + c_1^0y_1 + c_2^0y_2$ является частным решением уравнения (1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (5).

Теорема (О наложении решений)

Если правая часть уравнения (1) представляет собой сумму 2-х функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* – частные решения уравнений $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением данного уравнения.

Доказательство

$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^* + y_2^*)' + a_2(x) \cdot (y_1^* + y_2^*) =$

$= (y_1^{*''} + a_1(x) \cdot y_1^{*'} + a_2(x) \cdot y_1^*) +$

$+ (y_2^{*''} + a_1(x) \cdot y_2^{*'} + a_2(x) \cdot y_2^*) = f_1(x) + f_2(x)$

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ

Рассмотрим ЛНДУ (1). Его общим решением является функция

Частное решение y^* уравнения (1) можно найти, если известно общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (2) методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа)

Пусть $\bar{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ – общее решение уравнения (2). Заменим $const$ c_1 и c_2 на неизвестные функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ и подберем их так, что бы функция

$$y^* = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \qquad (6)$$

была решением уравнения (1)

$$y^{*'} = c_1'(x) y_1(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

Подберем функции c_1 и c_2 так, чтобы

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \qquad (7)$$

Следовательно $y^{*'} = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$

$$y^{*''} = c_1'(x) y_1'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_2(x) y_2''(x)$$

Подставим в (1)

$c_1'(x) y_1'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_2(x) y_2''(x) +$

$+ \alpha_1(x)[c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)] + \alpha_2(x)[c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)] = f(x)$

$c_1(x)(y_1''(x) + \alpha_1(x) y_1'(x) + \alpha_2(x) y_1(x)) + c_2(x)(y_2''(x) + \alpha_1(x) y_2'(x) + \alpha_2(x) y_2(x)) +$

$+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$

Т.к. y_1 и y_2 – решения уравнения (2), то выражение в скобках равно нулю.

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \qquad (8)$$

Тогда функция (6) будет частным решением y^* уравнения (1) если функции c_1 и c_2 удовлетворяют (7) и (8)

$$\begin{cases} c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Система (9) имеет единственное решение $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ и $c_2'(x) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ некоторые функции от x.

Интегрируя функции, находим c_1 и c_2 и следовательно y^*

Пример 1.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0 \quad k^2 = -1 \quad k = \pm i$$

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y^* = c_1(x) \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{cases} c_1'(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \\ c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \\ 0 & \sin x \end{vmatrix} = tgx \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_1' = -tgx \qquad c_1 = \int -tgx dx = Ln|\cos x|$$

$$c_2' = 1 \quad c_2 = x$$

$$y^* = \cos x \cdot Ln|\cos x| + x \sin x$$

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot Ln|\cos x| + x \sin x$$

Пример 2.

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+2e^x} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \quad k_1 = -1 \quad k_2 = -2$$

$$\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y^* = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{-2x}$$

$$\begin{cases} c_1'(-e^{-x}) + c_2'(-2e^{-2x}) = \dfrac{1}{1+2e^x} \\ c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+2e^x} & -2e^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{(1+2e^x)}$$

$$c_1{}' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^x}{1+2e^x} \qquad c_1 = \int \frac{e^x}{1+2e^x}dx = \int \frac{de^x}{1+2e^x} = \frac{1}{2}Ln(1+2e^x)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -e^{-x} & \dfrac{1}{1+2e^x} \\ e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{(1+2e^x)}$$

$$c_2{}' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{2x}}{1+2e^x} \qquad c_2 = \int \frac{e^{2x}}{1+2e^x}dx = \int \frac{e^x de^x}{1+2e^x} = \frac{1}{2}\int \frac{2t+1-1dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+2t}dt$$

$$= \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}Ln(1+2t)) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}Ln(1+2e^x)$$

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x}\frac{1}{2}Ln(1+2e^x) + e^{-2x}(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}Ln(1+2e^x))$$