ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНЦИЙ

Тип.

Интеграл вида $\int \boldsymbol{\sin^m x \cdot \cos^n x\, dx}$

Возможны два случая:

1. Если хотя бы один из показателей *m* или*n*– нечетный, то соответствующая функция подводится под дифференциал и интеграл сводится к вычислению двух интегралов от степенных функций по формуле:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Пример:

Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,;\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Если оба показателя *m* или *n*– нечетные, то множитель для подведения под дифференциал отделяют от меньшей из степеней.

2. Если оба показателя степени *m* или*n*– четные, интеграл находится понижением порядка (степени) в два раза с помощью следующих формул тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Пример:

Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

Тип.

Интегралы вида

$\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$

$\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$

$\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx,$

берутся по следующим формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Пример:

Найти $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

Решение:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin(-2x))dx = \frac{1}{2}(\int \sin 8x \, dx - \int \sin 2x \, dx)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

Тип. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида берутся универсальной подстановкой $tg\frac{x}{2} = t$, далее используются формулы тригонометрии, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$:

$$sin\, x = \frac{2\, tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\, x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg\, t, \text{ тогда } x = 2arctg\, t$$

$$dx = (2arctg\, t)'dt$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример:

Найти $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+4-4t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{9+t^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3} arc\operatorname{tg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} arc\operatorname{tg}\frac{t\frac{x}{2}}{3} + C.$$