Лекция 5.2

Законы распределения случайных величин

3. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- Если $f(x)$ плотность распределения вероятностей X, то $M(X)$ находят по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- *Дисперсия*, как и в случае ДСВ, вычисляется по формуле

$$D(X)=M((X-M(X)^2)$$

что в случае НСВ имеет вид

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 f(x)dx$$

- Для расчёта удобно использовать формулу

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\right)^2$$

- *Среднее квадратичное отклонение* НСВ определяют следующим образом:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}$$

3. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- ***Модой*** *(Мо)* называется значение случайной величины, которое встречается чаще всего, т.е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (при непрерывной случайной величине).

- Одна и та же величина может иметь несколько мод. Однако возможно, что случайная величина и не имеет моды (если все её значения имеют одинаковую вероятность (равномерное распределение).

3. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- ***Медиана***. Определим сначала понятие квантиля непрерывной случайной величины. Корень уравнения

$F(x) = p$, где $F(x)$ - функция распределения и $0<p<1$, называется p-квантилем x_p.

- По определению функции распределения $F(x)$ получаем

$$P(X < Me) = \frac{1}{2} \quad \text{и отсюда} \quad P(X > Me) = \frac{1}{2}$$

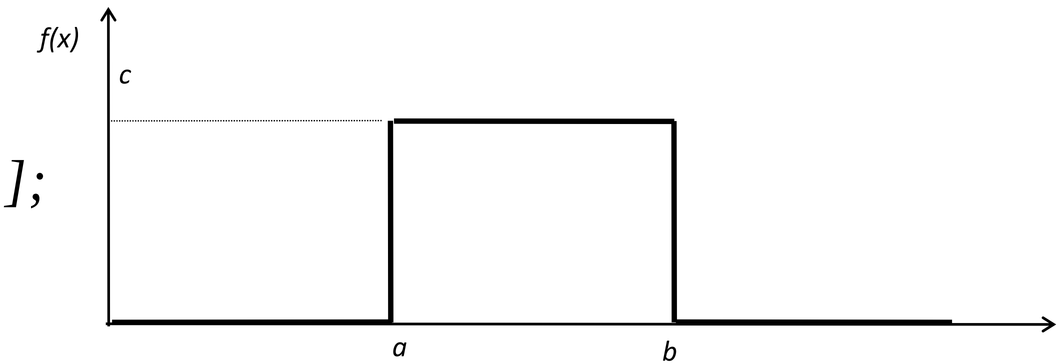
- Таким образом, медиана делит область значений случайной величины на две равные по вероятности части.

4. Законы распределения НСВ

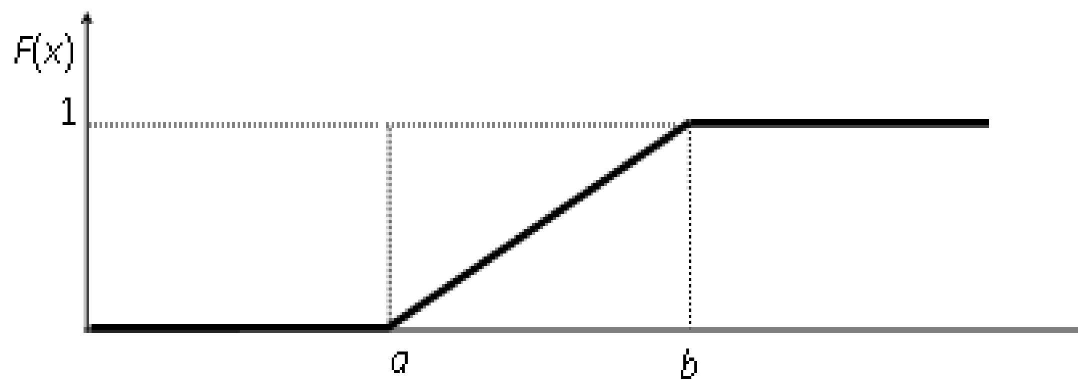
- ***Равномерное распределение***

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке [*a*, *b*], если ее плотность вероятности *f*(*x*) постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a},\_если\_x\in[a;b]; \\ 0,\_если\_x\notin[a;b]. \end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases} 0,\_x\le a; \\ \dfrac{x-a}{x-b},\_a<x\le b; \\ 1,\_x>b. \end{cases}$$



4. Законы распределения НСВ

Числовые характеристики равномерно распределенной *НСВ*

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность того, что равномерно распределённая НСВ попадёт в промежуток $[x_1; x_2]$ при условии

$$a \le x_1 < x_2 \le b$$

высчитывается по формуле

$$P(x_1 < X < x_2)=\frac{x_1-x_2}{b-a}$$

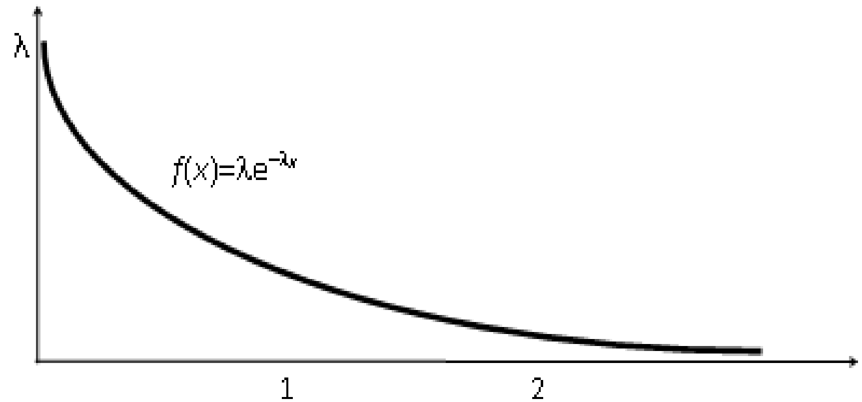
4. Законы распределения НСВ

- Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке [-0,5; +0,5]), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению.
- Так, случайная величина X, распределенная по равномерному закону на отрезке [0;1], называемая случайным числом от 0 до 1, служит исходным материалом для получения случайных величин с любым законом распределения.

4. Законы распределения НСВ

- *Определение*. Непрерывная случайная величина *X* имеет ***показательный*** (экспоненциальный) закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \_ при \_ x \geq o; \\ 0, \_ при \_ x < 0. \end{cases}$$



- *Интегральная функция распределения для НСВ, имеющей показательное распределение* задаётся формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \_ при \_ x \geq 0; \\ 0, \_ при \_ x < 0. \end{cases}$$

4. Законы распределения НСВ

- *Числовые характеристики:*

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- *Вероятность того, что распределённая по показательному закону НСВ попадёт в интервал* (a; b) при условии $0 < a < b$

вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

4. Законы распределения НСВ

- Показательный закон распределения играет большую роль в *теории массового обслуживания* и *теории надежности*.
- Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ - интенсивностью потока.

4. Законы распределения НСВ

- ***Нормальный закон распределения***

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях

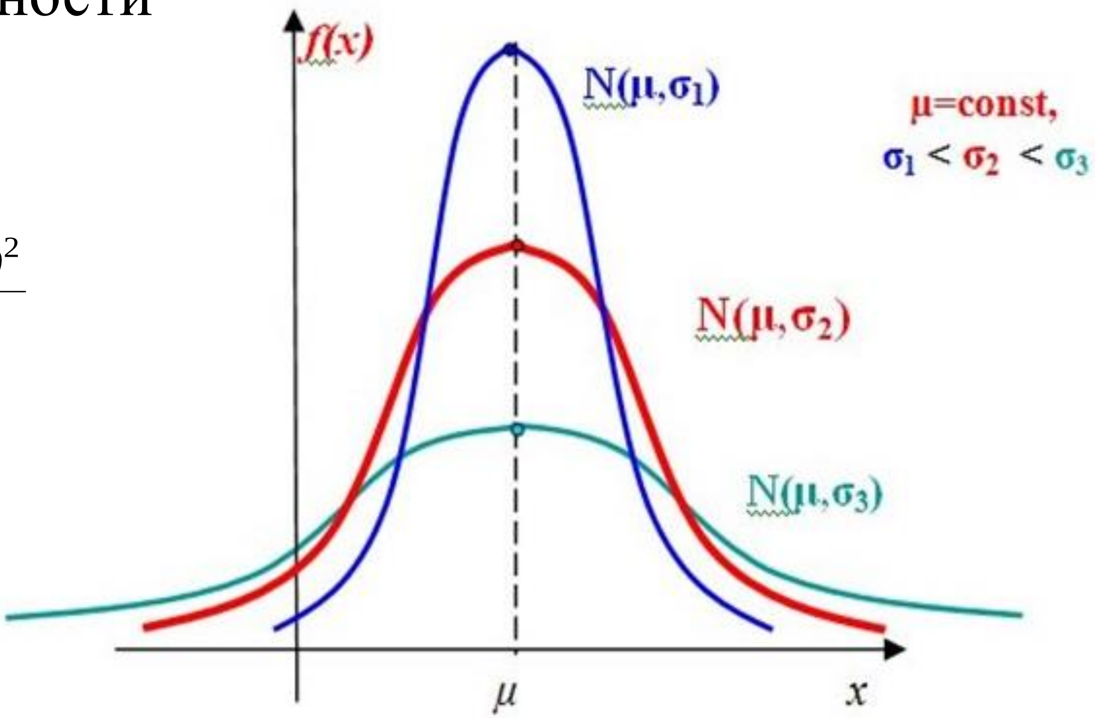
4. Законы распределения НСВ

- ***Нормальный закон распределения***

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной или гауссовой кривой.



4. Законы распределения НСВ

- *Интегральная функция нормального распределения* имеет вид

$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- *При μ= 0, σ = 1 нормальная кривая называется нормированной и НСВ X имеет стандартное или нормированное распределение.*

- Числовые характеристики НСВ X, распределенной по нормальному закону

$$M(X) = \mu \qquad D(X) = \sigma^2$$

4. Законы распределения НСВ

- Вероятность того, что нормально распределенная величина попадёт в промежуток (c; d)

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

где *Φ(x) функция Лапласа*, которая задаётся формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

4. Законы распределения НСВ

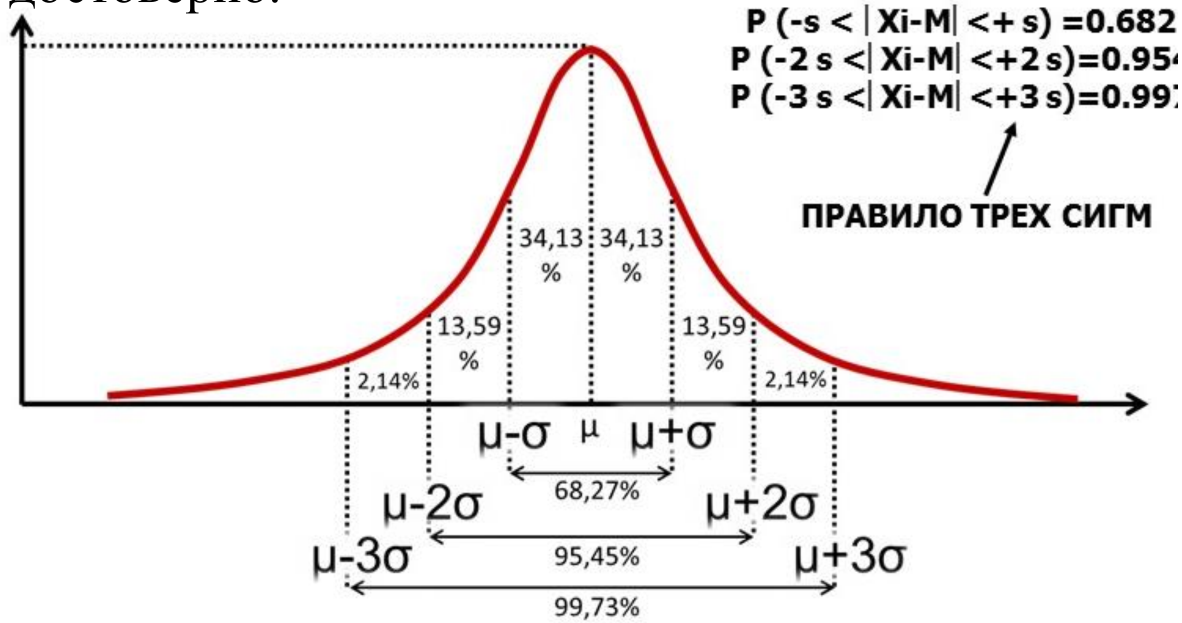
- Для вычисления вероятности отклонения нормально распределенной СВ от своего математического ожидания μ на наперед заданную величину δ используют формулу

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трёх сигм: Если СВ X распределена нормально, то вероятность того, что абсолютная величина отклонения *X* от математического ожидания стремится к нулю, то есть событие

$$|X-\mu|<3\sigma$$

практически достоверно.



5. Законы распределения НСВ

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике: если распределение случайной величины неизвестно, но условие, указанное в данном правиле выполняется, то есть основание предполагать, что *случайная величина распределена нормально*.