Лекция 15
Свойства преобразования Лапласа

5.Теорема дифференцирования оригинала

Если $f(t) \to F(p)$, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

В частности, если все начальные значения функции и её производных равны нулю, то $f^{(n)}(t) \to p^nF(p)$. Эта теорема лежит в основе операционного метода решения дифференциальных уравнений.

Доказательство

$$f'(t) \to \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} U = e^{-pt} & dU = -pe^{-pt}dt \\ dV = f'(t)dt & V = f(t) \end{bmatrix} = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt =$$
$$= -f(0) + pF(p)$$
$$f'(t) \to pF(p) - f(0)$$
$$f''(t) = (f'(t))' \to p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

И т.д.

$$\textit{Если}\quad f(0) = f'(0) = \ldots. = f^{(n-1)}(0) = 0$$
$$\textit{то}\quad F(p) \to f(t)$$
$$f'(t) \to pF(p)$$
$$f''(t) \to p^2F(p)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p)$$

Пример

$$f(t) = e^{-t}\cos 3t \qquad f(0) = 1$$
$$F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9}$$
$$f'(t) \to p \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} - 1$$

6. ***Теорема дифференцирования изображения***

Если $f(t) \to F(p)$, то

$$-tf(t) \to F'(p),$$

$$(-1)^n t^n f(t) \to F^{(n)}(p).$$

Доказательство

$$F'(t) = (\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt)'_p = \int_0^\infty (f(t)e^{-pt})'_p\,dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt) = \int_0^\infty (-tf(t))e^{-pt}dt \to -tf(t)$$

$$F''(p) = (F'(p))' \to -t(-tf(t)) = t^2 f(t)$$

и т.д.

Пример 1

$$f(t) = t\cos 3t \quad F(p) - ?$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+9} \to \cos 3t$$

$$F'(p) \to -tf(t) = -t\cos 3t$$

$$(\frac{p}{p^2+9})' = -\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} \to -t\cos 3t$$

$$t\cos 3t \to \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$$

Пример 2

$$f(t) = t^n \quad F(p) - ?$$

$$1 \to \frac{1}{p}$$

$$-t\cdot 1 \to -\frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad t \to \frac{1}{p^2}$$

$$-t^2 \to (\frac{1}{p^2})' = -\frac{2}{p^3}$$

$$t^2 \to \frac{2}{p^3}$$

…………………

$$\boxed{t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

По свойству смещения $\boxed{e^{at}t^n \to \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}}$

7. Теорема интегрирования оригинала

Если $f(t) \to F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau \to \dfrac{F(p)}{p}$.

Интегрированию оригинала от *0* до t соответствует деление его изображения на p.

Доказательство

Функция $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ является оригиналом

Пусть $\varphi(t) \to \Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$\varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$$

$$\varphi'(t) = (\int_0^t f(\tau)d\tau)'_t = f(t) \to F(p)$$

$$F(p) = p\Phi(p) \;\Rightarrow\; \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

$$\Rightarrow \int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}$$

Пример

$$f(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau \qquad\qquad F(p) - ?$$

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)p}$$

8. *Теорема интегрирования изображения*

Если $f(t) \to F(p)$, то $\dfrac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(p)dp$.

Доказательство

Используя определение изображения и изменяя порядок интегрирования

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_p^\infty (\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt)dp = \int_0^\infty (\int_p^\infty e^{-pt}dp) f(t)d = \int_0^\infty -\frac{1}{t}e^{-pt}\Big|_p^\infty f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \to \frac{f(t)}{t}$$

Пример

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \qquad\qquad F(p) - ?$$

$$\sin t \to \frac{1}{p^2+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin t}{t} \to \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \frac{\pi}{2} - arctg\, p$$

Таблица соответствия между основными оригиналами и изображениями

Функция оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^{n-1}e^{at}$	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}(n=1,2,3...)$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\mathrm{c}hat$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$\mathrm{s}hat$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(p+b)^2+a^2}$
$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$