Вычисление интегралов при помощи вычетов

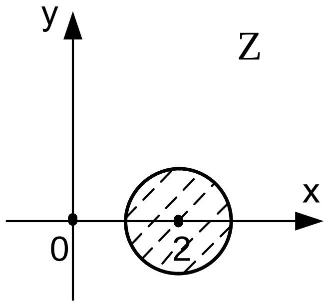
Прежде всего, напомним **основную теорему о вычетах**, которая была доказана на прошлой лекции.

Основная теорема Коши о вычетах. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n; (a_k \in D)$. Тогда *интеграл по замкнутому контуру* C *равен умноженной на* $2\pi i$ *сумме вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри контура:*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum res\ f(a_k)$$

Именно на основе данной теоремы оказывается возможным вычислить интегралы, в том числе те, которые не вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz$



В круге $|z-2| \le 1$ функция $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2)^2}$ аналитическая за исключением изолированной особой точки $z=2$, которая лежит в центре этого круга. При этом функция cos*z*аналитическая всюду на комплексной плоскости, то есть точка $z=2$- полюс второго порядка. Найдем вычет:

$$resf(2) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}(z-2)^2 f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{\cos z}{z} = -\lim_{z\to 2}\frac{z\sin z + \cos z}{z^2} =$$

$$= -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{4}$$

Тогда интегралравен $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = 2\pi i\, res\; f(2) = -\frac{2\sin 2+\cos 2}{2}\pi i$

Рассмотрим несколько типов интегралов на действительной оси $\boldsymbol{R}$.

1) **Несобственные интегралы от рациональных функций, т.е интегралы вида**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены соответствующих степеней *n* и *m*.

Тогда если подынтегральная дробь непрерывна на всей действительной оси, т.е. если $Q_m(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} z\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} res \frac{P_n(z_0)}{Q_m(z_0)}$$

Интеграл равен сумме вычетов аналитического продолжения подынтегральной функции во всех полюсах, расположенных в верхней комплексной полуплоскости Im*z> 0.*

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2},$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$, введем функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2},$$

которая на действительной оси, т.е. при $z = x$, совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}$.

Введенная функция – дробно-рациональная, знаменатель которой не имеет действительных корней.

Функция $f(z)$ имеет полюсы второго порядка $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Нас интересует только тот полюс, мнимая часть которого положительна (расположен в верхней полуплоскости), то есть $z_1 = 2i$.

Найдем вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ в точке $z_1=2i$:

$$res\ f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2\frac{1}{(z^2+4)^2}\right)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=-\frac{1}{32}i.$$

Таким образом, $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{32}i\right)=\frac{\pi}{16}.$$

2) Несобственные интегралы от рациональных функций умноженных на $\sin ax$ или $\cos ax$, т.е интегралы вида

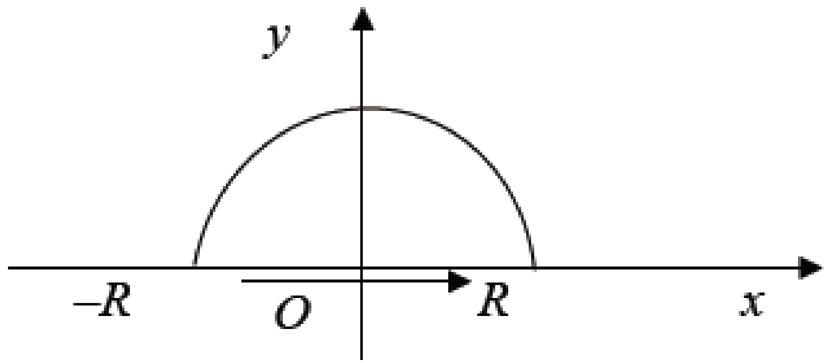
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\sin ax dx \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\cos ax dx$$

Использование теории вычетов к вычислению подобных интегралов обосновывает **лемма Жордана** (приводим без доказательства):

Если функция f(z) аналитична в верхней полуплоскости Im z >0, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и при $|z| \to \infty$ стремиться к нулю равномерно относительно arg*z*, тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0 \quad (\lambda > 0)$$

где γ_R - верхняя полуокружность $|z| = R, \quad \operatorname{Im} z > 0$ (см. рис.)



Заметим, что для сходящихся несобственных интегралов 2) на действительной оси данная лемма будет выполняться, т.е. имеем по основной теореме теории вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_0 > 0} res \frac{P_n(z_0)}{Q_m(z_0)} e^{iaz_0}$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin kx}{x^2 + a^2} dx \quad (k > 0, a > 0)$$

Рассмотрим, функцию

$$g(z) = \frac{ze^{ikz}}{z^2 + a^2}$$

Если $z = x$, тоэта функция совпадает с подынтегральной

$$\mathrm{Im}\, g(z) = \mathrm{Im} \frac{x(\cos ax + i \sin ax)}{x^2 + a^2} = \frac{x \sin ax}{x^2 + a^2}$$

Далее рассмотрим контур γ_R - верхняя полуокружность $|z| = R, \quad \operatorname{Im} z > 0$ (см. рис.), при достаточно больших*R*имеем, что на этом контуре функция

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$$

Допускает оценку

$$|f(z)| = \left| \frac{R\, e^{i\varphi}}{R^2\, e^{2i\varphi} + a^2} \right| \geq \frac{R}{a^2}$$

Так как $\left|z^2 + a^2\right| \geq a^2$, а $\left|e^{i\varphi}\right| = |\cos\varphi + i \sin\varphi| \leq 1$

Согласно лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{z e^{ikz} dz}{z^2 + a^2} = 0$$

Так как $f(z)$ имеет единственную особую точку в верхней полуплоскости $z = ia$, то на основании теоремы о вычетах получаем

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin kx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = \pi \operatorname{Im} i \, res \left. \frac{z e^{ikz}}{z^2 + a^2} \right|_{z=ia}$$

Так как

$$res \left. \frac{z e^{ikz}}{z^2 + a^2} \right|_{z=ia} = \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{z e^{ikz}}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{ia e^{-ak}}{2ia} = \frac{e^{-ak}}{2}$$

Тогда

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin kx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-ka}}{2}$$

3) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$

Если положить $z = e^{it}$, тогда $dz = ie^{it}dt = izdt$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

При изменении t от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z| = 1$. Тогдаполучаем интеграл, который можно найти при помощи теории вычетов:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = -i \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)\frac{dz}{z}$$

Пример.Вычислим с помощью вычетов интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5 - 4\cos t)^2} dt$$

Проведем описанную замену, тогда:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz}\frac{(z^2+1)/(2z)}{\left(5-4(z^2+1)/(2z)\right)^2}dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{\left(2z^2-5z+2\right)^2} = I\,.$$

Найдем особые точки подынтегральной функции: $z_1 = 0{,}5$, $z_2 = 2$. Эти точки являются полюсами второго порядка для подынтегральной функции. Только полюс $z_1 = 0{,}5$ находится внутри окружности $|z| = 1$. Для вычисления интеграла воспользуемся основной теоремой теории вычетов

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum res\ f(a_k)$$

Найдем вычет подынтегральной функции в точке $z_1 = 0{,}5$:

$$\operatorname{Res} f(0{,}5) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0{,}5}\frac{d}{dz}\left((z-0{,}5)^2\frac{z^2+1}{4(z-0{,}5)^2(z-2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 0{,}5}\left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2}\right)' = \frac{1}{4}\lim_{z\to 0{,}5}\frac{2z(z-2)^2-2(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{8}{27}.$$

Тогда, получаем

$$I = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{\left(2z^2-5z+2\right)^2} = \frac{1}{2i}2\pi i\frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}.$$