Лекция 5
Знакочередующиеся ряды.

Определение. ***Знакочередующимся рядом*** называется ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots \qquad (1)$$

где $U_n > 0 \quad \forall n \in N$

Достаточный признак сходимости. Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд сходится, если

1) Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \ldots$$

2) Общий член ряда по абсолютной величине стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = o \quad 0 < S < U_1$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Решение. Это знакочередующийся ряд. Абсолютные величины его членов убывают:

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots\ldots.$ а предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = o$

Оба условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд сходится

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$

Решение. Это знакочередующийся ряд. Абсолютные величины его членов убывают:

$1 > \frac{2}{7} \approx 0{,}28 > \frac{3}{13} \approx 0{,}23 > \frac{4}{19} \approx 0{,}21\ldots\ldots.$ а предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0$

Второе условие признака Лейбница не выполняется, поэтому ряд расходится

Замечания.

1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства выполняются, начиная с некоторого N.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n-1}{(-5)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{5^n}$

Решение. Это знакочередующийся ряд. Абсолютные величины его членов убывают:

$-1 \quad \frac{2}{5}=0{,}4 > \frac{5}{25}==0{,}2 \quad > \frac{8}{125} > ....$ а предел общего члена

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5^n Ln5}=0$

Оба условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд сходится

2. Исследование знакочередующегося ряда вида (с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (1)

3. Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена. Т.е.

$S_n < U_{n+1}$

Пример 4.

Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$

По признаку Лейбница ряд сходится. Можно записать $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-...=S$

Взяв пять членов, т.е. заменив S на $S_5=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}\approx 0{,}7834$

Сделаем ошибку, меньшую чем $\frac{1}{6^6}=\frac{1}{46656}<0{,}00003$

Пример 5.

Какое число членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ надо взять, чтобы вычислить его с точностью до 0,001?

По условию $S_n<0{,}001$. Учитывая замечание 3, запишем более сильное неравенство $|\ U_{n+1}\ |\le 0{,}001$ или $\frac{1}{(n+1)^2}\le 0{,}001$, откуда $(n+1)^2\ge 1000$ и $n\ge\sqrt{1000}-1$ или $n\ge 30{,}6$, т.е. необходимо взять не менее 31 члена ряда.

Знакопеременные ряды.

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Определение. Числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным.*

Общий достаточный признак сходимости

Пусть дан знакопеременный ряд $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots$

Если сходится ряд $|U_1| + |U_2| + |U_3| + |U_4| + \ldots$, составленный из модулей данного ряда, то и сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение. Если ряд, составленный из модулей членов знакопеременного ряда, сходится , то исходный ряд *сходится абсолютно.*

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся,* если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ – условно сходящийся ряд $\quad$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ – абсолютно сходящийся ряд

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема 1**. (Теорема Дирихле) Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

2) Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$

3) Под произведением двух рядов понимают ряд вида. Произведение 2-х абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 S_2$

Теорема 2. Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число A, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, окажется расходящимся.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots=(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\ldots=$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\ldots=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots)=\frac{1}{2}S$$

Примеры. Исследовать сходимость ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, так как его член меньше членов сходящегося ряда $\left|(-1)^n \frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, следовательно данный ряд сходится и притом абсолютно.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{3}$ Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости. $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi n}{3}$ не существует. Следовательно, ряд расходится