Лекция 5

Законы распределения случайных величин

1. Функция распределения случайной величины

- ***Определение.*** *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

- Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения.***

- **Геометрически** функция распределения интерпретируется как *вероятность того, что случайная точка* X *попадет левее заданной точки* x

1. Функция распределения случайной величины

Общие свойства функции распределения

- **1.** Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1$$

- **2.** Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

- **3.** На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице, т.е.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

- 4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ (включая x_1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

1. Законы распределения ДСВ

- Особенно важными являются ДСВ, которые принимают значения из множества целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, ...

Эти величины описывают реальные задачи.

- К наиболее распространенным законам распределения ДСВ относят:
- ***биномиальное распределение***,
- ***распределение Пуассона,***
- ***геометрическое распределение***.

1. Законы распределения ДСВ

- *Определение.* Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$ с вероятностями $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

где $0 < p < 1, q = 1 - p$.

X	0	1	2	…	$n-1$	n
P	q^n	$C_m^1 pq^{n-1}$	$C_m^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_m^{m-1} p^{n-1} q$	p^n

1. Законы распределения ДСВ

- *Теорема.* Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону:

Числовые характеристики ДСВ X при биномиальном распределении

$$M(X) = nq\ ; \qquad D(X) = npq; \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

- Очевидно, что определение биномиального закона корректно, так как основное свойство ряда распределения

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

выполнено, так как сумма в левой части является сумой всех членов разложения бинома Ньютона:

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots C_n^m p^m q^{n-m} + \cdots + p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

1. Законы распределения ДСВ

Следствие. Математическое ожидание частости $\frac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может наступить с одной и той же вероятностью p, равно p, т.е. $M\left(\frac{m}{n}\right) = p$, а дисперсия $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$

Доказательство. Частость события $\frac{m}{n}$ есть $\frac{X}{n}$, т.е. $\frac{m}{n} = \frac{X}{n}$, где X – случайная величина, распределенная по биномиальному закону. Поэтому

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}M(X) = \frac{1}{n} \cdot np = p,$$

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(X) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}.$$

1. Законы распределения ДСВ

- *Смысл аргументов* в функциях *f(x)* и *Ф(x)*, содержащихся в локальной и интегральной теоремах Муавра-Лапласа:
- 1) аргумент *x* функции *f(x)* есть отклонение числа X=m появления события A в n независимых испытаниях, распределенного по биномиальному закону, от его среднего значения $M(X)$=np, выраженное в стандартных отклонениях

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$$

- 2) аргумент x функции $\Phi(x)$, рассматриваемой в следствии интегральной теоремы Муавра-Лапласа, есть отклонение A частости m/n события A в n независимых испытаниях от его вероятности p в отдельном испытании, выраженное в стандартных отклонениях

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{D\left(\frac{m}{n}\right)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

1. Законы распределения ДСВ

- Если в схеме повторных независимых испытаний $n \to \infty$, а число p близко к 0, и кроме того $np \to \lambda$ при $n \to \infty$, тогда ДСВ X, которая определяет количество появлений определённого события с схеме Бернулли имеет **распределение Пуассона**, которое задаётся таблицей:

X	0	1	2	...	$n-1$	n
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Определение. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2,..., m,... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda)$$

1. Законы распределения ДСВ

- **Определение.** Дискретная случайная величина X=*m* имеет *геометрическое распределение* с параметром *p*, если она принимает значения 1,2,..., *m*, ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X=m)=pq^{m-1}$$

где $0<p<1$, $q=1-p$.

- *Случайная величина X=m, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.*

- Числовые характеристики ДСВ *X*, которые имеют геометрический закон распределения:

$$M(X)=\frac{1}{p} \qquad D(X)=\frac{q}{p^2}$$

1. Законы распределения ДСВ

Ряд геометрического распределения:

X	1	2	3	...	m	…
p	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	…

Вероятности pq образуют *геометрическую* прогрессию с первым членом p и знаменателем q (отсюда название *«геометрическое распределение»*).
Определение геометрического распределения корректно, так как сумма ряда

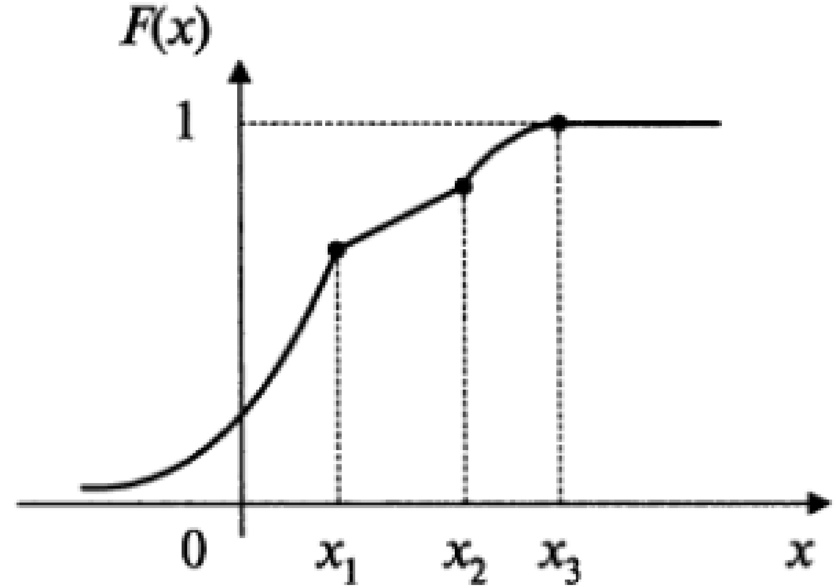
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \cdots + pq^{m-1} + \cdots = p(1 + q + \cdots + q^{m-1} + \cdots) = p\frac{1}{1-q} = 1,$$

(так как $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}$ при $|q|<1$).

2. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Определение.*** Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Будем рассматривать пространство элементарных событий как совокупность всех точек числовой оси.



В этом случае введенная ранее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = P(X > x)$$

2. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Пусть функция распределения является непрерывной. Вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение a, где a - произвольное действительное число

$$P(x = a) = \lim_{n\to\infty} P(a \le X < a + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(-F(a) + F(a + \frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty}(F(a + \frac{1}{n}) - F(a)) = 0$$

Теорема. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю.

- Из приведенной выше теоремы следует, что нулевой вероятностью могут обладать и возможные события, так как событие, состоящее в том, что случайная величина X приняла конкретное значение a, является возможным.

2. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Следствие.*** Если X - непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т.е.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

Определение. Плотностью вероятности (плотностью распределения или просто плотностью) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\mathrm{P}(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Свойства плотности вероятности***

1. Плотность вероятности является неотрицательной функцией.

2. $$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(U)dU \ .$$

$$F(x) = F(x) - F(-\infty)$$

Геометрически полученная вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающейся на отрезок [*a*, *b*]

3. $$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(X < \infty) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Следствие: Если пространством элементарных событий является отрезок числовой оси, то пространство элементарных событий формально можно распространить на всю числовую ось, положив вне отрезка значение плотности вероятности равное 0.

В случае НСВ математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение имеют тот самый вид и те же свойства, но рассчитываются по другим формулам.