Севастопольский государственный университет
Институт информационных технологий

Методы и системы искусственного интеллекта

Бондарев Владимир Николаевич

Исчисление предикатов. Логики высокого порядка и псевдофизические логики.

В.Бондарев

Исчисление предикатов

В **исчислении высказываний** рассматриваются логические связи только между утверждениями, а сама структура утверждений не анализируется. **Исчисление предикатов** рассматривает логические связи между различными элементами утверждений.

Предикатом называется неоднородная двузначная логическая функция от любого числа аргументов. Ее записывают в виде ***P(x1,x2,..,xn)*** и называют ***n-местным предикатом.*** Аргументы ***x1,x2,..,xn*** называют ***предметными переменными***, а их конкретные значения – ***предметными постоянными***. Букву ***P*** называют предикатной буквой.

Предметные переменные и предметные постоянные называются ***термами.*** Если все переменные предиката заменить соответствующими предметными постоянными, то получается 0-местный предикат или высказывание.

Исчисление предикатов

Например, трехместный предикат ***P(x1,x2,x3)*** = “***x1*** есть произведение ***x2*** на ***x3***” переходит в высказывание при постановке ***x1*=6, *x2*=2, *x3*=3.**

В общем случае ***n*-местный** предикат ***P(x1,x2,..,xn)*** **задает отношение** между аргументами ***x1,x2,..,xn*** , которое означает, что “ ***x1,x2,..,xn*** *находятся между собой в отношении P”*. При *n*=1 предикат выражает свойство предметной переменной, например, “*x* – студент отличник “.

Вместо предметных переменных в предикаты могут подставляться ***n*-местные функции *f*(*x1,x2,..,xn*),** определенные на множестве объектов предметной области.

Исчисление предикатов

Множество базовых элементов (алфавит) исчисления предикатов включает:

- знаки логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$;
- знаки кванторов $\forall, \exists$;
- знаки пунктуации ( );
- предметные переменные x, y, z…;
- предметные постоянные a, b, c…;
- функциональные символы f, g, h…;
- предикатные буквы P, Q, R, S, T, V, N.

Множество синтаксических правил, определяющих понятие ППФ исчисления предикатов, строится на основе понятий ***терм*** и ***элементарная формула***.

Исчисление предикатов

Терм определяется рекурсивно следующим образом:

а) предметная переменная или предметная постоянная -терм;

б) если ***t1, t2, .., tn*** – термы и ***f*** – *n*-местная функциональная буква, то ***f(t1, t2, .., tn)*** – терм;

в) никакие другие выражения термами не являются.

Элементарная формула (атом) вводится следующим образом: если ***P*** – предикатная буква, а ***t1, t2, .., tn*** – термы, то ***P(t1, t2, .., tn)*** – элементарная формула (атом). Частным случаем элементарной формулы является высказывание.

ППФ исчисления предикатов определяется следующим образом:

- всякая элементарная формула есть формула;

- если ***P*** и ***Q*** – формулы, и *x* – предметная переменная, то каждое из выражений

$$\overline{P}(x), P(x) \vee Q(x), P(x) \wedge Q(x), P(x) \to Q(x), \forall x P(x), \exists x P(x)$$

есть формула;

- никакое другое выражение формулой не является.

В.Бондарев

Исчисление предикатов

Утверждение, что все $x \in X$ обладают свойством ***P***, записывается в виде формулы $\forall x P(x)$, которая читается “для всех *x*, ***P*** от *x*”. Утверждение о том, что существует хотя бы один объект *x* предметной области ***X***, обладающий свойством ***P***, записывают в виде формулы $\exists x P(x)$ и читают: “существует такое *x*, что *P* от *x*”.

Выражения $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ не зависят от переменной *x*, т.е. кванторы **связывают** переменную в области своего действия. Если какая-либо переменная не связана квантором, то ее называют ***свободной переменной.***

Порядок следования одноименных кванторов не имеет значения, но разноименные кванторы переставлять нельзя.

Для кванторов справедливы следующие ***законы де Моргана***:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x) \quad ,$$

$$\overline{\exists x P(X)} = \forall x \overline{P}(x) \quad .$$

Исчисление предикатов

Формулы исчисления предикатов имеют смысл, если имеется какая-либо **интерпретация** входящих в них знаков. Для упрощения интерпретации предикатных символов их часто записывают словами, которые являются названиями определяемых отношений. Например, **отец(*x*,*y*)** – означает, что ***x*** приходится отцом ***y***.

Формула называется ***выполнимой* (*непротиворечивой*),** если она истинна, по крайней мере, в одной интерпретации.

Формула Q ***логически следует*** из формул $P_1, P_2, \dots, P_n$, тогда и только тогда, когда всякая интерпретация I, удовлетворяющая $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_n}$, удовлетворяет также и Q. Отношение логического следования $P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$ соответствует **общезначимости** формулы $\models P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \to Q$ или **противоречивости** формулы $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \overline{Q}$.

Исчисление предикатов

Рассматривая исчисление предикатов как ФС, отметим, что к **системе аксиом** исчисления высказываний добавляются еще две аксиомы:

$$\forall x P(x) \to P(t)$$, где t – терм;

$$P(t) \to \exists x P(x)$$

.

К **правилам вывода** пропозициональной логики добавляются следующие 4 правила, построенные на основе рассмотренных аксиом.

Правило УК

$$\frac{\forall x P(x)}{P(t)}$$

Правило ЭК

$$\frac{\exists x P(x)}{P(a)}$$

Правило УО

$$\frac{Q \to P(x)}{Q \to \forall x P(x)}$$

Правило ЭО

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

Исчисление предикатов

В исчислении предикатов первого порядка **всякая общезначимая формула является теоремой,** т.е. ***для нее существует вывод***, в котором эта формула является последней. Данное утверждение представляет собой ***теорему о полноте в широком смысле***, которую в 1930г. предложил выдающийся немецкий математик К. Гёдель.

Исчисление предикатов – **неразрешимая формальная система**, т.е. не существует эффективной процедуры, позволяющей узнать по данной формуле, возможен ли ее вывод в исчислении предикатов или нет (теорема А. Черча, 1936).

Не существует общего метода для установления общезначимости любых формул исчисления предикатов первого порядка. Тем не менее, **если**, на самом деле, **некоторая формула общезначима**, то для нее **существует процедура проверки общезначимости**. Поэтому исчисление предикатов – **полуразрешимая ФС**.

Пример: база знаний для мира Вампуса

Предположим, что агент Вампус использует БЗ в виде предикатов и воспринимает запах (*Stench*) и ветерок (*Breeze*) (но без блеска (*Glitter*)) при $t = 5$:

$$Tell(KB, Percept([Stench, Breeze, None], 5))$$

Чтобы определить, какое действие следует при $t = 5$, программа агента формирует такой запрос:

$$Ask(KB, \exists a\ Action(a,5))$$

Функция *Ask* должна разрешить этот запрос и возвратить:
Yes, $\{a/Shoot\}$ ← подстановка (список связывания)

Запрос *Ask(KB,S)* возвращает подстановку $\sigma = \{a/Shoot\}$, такую что $KB \models \sigma$.

Затем программа агента может вернуть *Shoot* как действие, которое должно быть выполнено, но в начале должна внести в свою БЗ данные о том, что будет выполнено действие *Shoot* с помощью *Tell*.

Пример: База знаний для мира Вампуса

Из исходных данных о восприятии следуют некоторые факты о текущем состоянии, например:

$$\forall t,s,b\ Percept([s,b,Glitter],t) \Rightarrow AtGold(t)$$

Подобные правила являются проявлением простейшей **формы процесса формирования рассуждений, называемого восприятием**. Обратите внимание на то, что квантификация происходит по переменной *t* с обозначением времени. А в пропозициональной логике приходилось бы создавать копии каждого высказывания для каждого интервала времени.

Кроме того, в логике предикатов могут быть реализованы простые **"рефлекторные" варианты поведения** с помощью импликационных высказываний с кванторами. Например, может быть предусмотрено следующее правило:

$$\forall t\ AtGold(t) \Rightarrow Action(Grab,t)$$

При наличии результатов восприятия *Percept([None,None,Glitter], 6)* применение данных правил приведет к заключению *{Grab, 6}* о том, что в данный момент следует выполнить действие *Grab*.

Пример: Вывод в мире Вампуса

Как описывается среда? Можно использовать списковый терм для представления квадратов, например [1,2]. Тогда **понятие соседства** 2-х квадратов можно представить следующим образом:

$$\forall x,y,a,b\ Adjacent([x,y],[a,b]) \Leftrightarrow [a,b] \in \{[x+1,y], [x-1,y],[x,y+1],[x,y-1]\}$$

Будем применять предикат $At(Agent, x, t)$ для указания на то, что агент находится в квадрате x во время t. Зная свое текущее местонахождение, агент сможет выявлять свойства текущего квадрата на основании данных о свойствах его текущего восприятия. Например, если агент находится в некотором квадрате и в этот момент чувствует ветерок, то в этом квадрате ветерок:

$$\forall x,t\ At(\text{Agent}, x, t) \wedge Breeze(t) \Rightarrow Breezy(\text{x})$$

В квадратах рядом с ямами чувствуется ветерок.

Диагностические правила - позволяют по наблюдениям определять скрытые причины

$$\forall y\ Breezy(y) \Rightarrow \exists \text{x}\ Adjacent(x,y) \wedge Pit(x)$$

Причинные правила – определяют по причинам скрытые наблюдения

$$\forall x,y\ Adjacent(x,y) \wedge Pit(x) \Rightarrow Breezy(y)$$

Инженерия знаний в логике первого порядка

Общий процесс конструирования БЗ называется **инженерией знаний.**

1. Идентификация задачи (круг вопросов и фактов).
2. Сбор относящихся к делу знаний (приобретение знаний о предметной области).
3. Определение словаря предикатов, функций и констант (онтология предметной области).
4. Регистрация общих знаний о проблемной области (записываются аксиомы для всех терминов словаря).
5. Составление описания данного конкретного экземпляра задачи (сводится к написанию простых атомарных высказываний об экземплярах понятий, которые уже являются частью онтологии).
6. Передача запросов процедуре логического вывода и получение ответов.
7. Отладка базы знаний.

Логики высокого порядка

Основными элементами **исчисления предикатов первого порядка** являются термы и предикаты. Термы представляют собой сущности описываемой предметной области, а предикаты выражают отношения между сущностями. При этом **предикаты не могут представляться в виде переменных.**

Это не позволяет на языке исчисления предикатов записать некоторые выражения естественного языка. Например, “В каких отношениях находятся объекты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$?” или “Два объекта $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равны, если и только если все их свойства попарно совпадают”. Описание указанных предложений можно выполнить с помощью следующих формул: $\exists P P(x, y)$ и $\forall x \forall y \ ((x = y) \leftrightarrow (\forall P \ \ P(x) \leftrightarrow P(y)))$.

Данные формулы используют кванторы по предикатным буквам. Такая расширенная формальная система называется ***логикой высокого порядка.***

В.Бондарев

Псевдофизические логики

Псевдофизические логики учитывают особенности восприятия окружающей действительности человеком. Выделяют следующие виды псевдофизических логик:
- временная логика – изучает взаимосвязь временных отношений;
- пространственная логика – изучает пространственные отношения;
- каузальная логика – изучает взаимосвязь отношений “причина-следствие”;
- логика действий – рассматривает отношения типа субъект-действие или действие-место.

Для установления ряда отношений в указанных логиках используются ***метрические*** и ***топологические*** шкалы.
Метрические шкалы позволяют установить точные соотношения между положением фактов предметной области на абсолютной или относительной шкале. **Топологические шкалы** позволяют установить отношения нестрогого порядка между фактами, проецируемыми на такую шкалу

В.Бондарев