Нечеткие множества

- Нечеткие множества. Основные определения.
- Нечеткая логика. Основные определения.

компьютера. Компьютер - это логически последовательная детерминированная машина, которая по своей природе не может делать теоретических ошибок. Он по определению не может быть нечеткой машиной. В то же время человек, помимо способности рассуждать и логически мыслить, обладает, как и все живые существа, способностью принимать в расчет параллельные соображения как общего, так и сопутствующего характера. Они являются нечеткими и должны быть нечеткими. Любое живое существо, наделенное инициативой, воспринимает и обрабатывает более или менее нечеткую информацию и своевременно приспосабливается к ней. Так, человек может выбирать, решать, допускать и устранять ошибки, начинать сначала, понимать не все, формировать свои знания в процессе научных изысканий по формальной программе. Значительная часть необходимой ему информации недоступна в форме точных, четко определенных чисел, и чисто символьная обработка данных может быть недостаточной. По разным причинам - из-за несовершенства измерительных устройств и вследствие того, что во многих случаях человек (эксперт) представляет собой единственный источник сведений, - информация является неточной, противоречивой, неполной. Поэтому с появлением информатики разработка теорий, средств и методов представления и анализа неточности и неопределенности (в том числе субъективной неопределенности) становится важной целью, отчасти обусловливающей прогресс как самой информатики, так и использующих ее дисциплин.

Как объединить общие соображения с логическим рассуждением ? Как связать то, что является физической истиной, с тем, что представляет собой интерпретацию человеческой мысли ? Как ввести нечеткость в математику, поскольку именно в такой наиболее ясной математической форме следует выразить эту, на первый взгляд, странную взаимосвязь ?

Что означает слово "нечеткий" для математика ? Это значит, что некий элемент принадлежит подмножеству, но только несколько неопределенным образом. Но, с другой стороны, мы знаем, что в математике есть только две приемлемые ситуации для элемента: он может либо быть, либо не быть элементом заданного подмножества. Любая формальная логика, в том числе булева, основана на этом: элемент принадлежит или не принадлежит подмножеству данного множества.

Американский математик Л.А.Заде в 1965 г. попытался выйти из этого тупика путем введения понятия *взвешенной принадлежности*. Элемент может принадлежать подмножеству в большей или меньшей степени, и отсюда появляется основное понятие - понятие нечеткого подмножества или четкого множества.

Теория нечетких множеств позволяет наилучшим образом описать все то, что разделено не очень точными границами, например, мысль, язык и восприятие у людей. Общественные науки наполнены всеми видами абстрактных и конкретных форм. Но и науки, называемые точными, могут иметь дело с ситуациями, в которых неопределенность заложена самой природой вещей. Поэтому эта относительно новая теория полезна и важна как для точных наук, так и для наук, не относящихся к ним, в частности, общественных.

Характеристическая функция принадлежности

Пусть E - множество и A - его собственное подмножество, что обозначается как $A \subset E$. Тот факт, что элемент x множества E есть элемент подмножества A (т.е. принадлежит A), как известно, обозначается с помощью символа $\in$, а именно, $x \in A$.

Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое, новое, понятие - *характеристическую функцию принадлежности* $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли (да или нет) x элементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Пример 4.1. Рассмотрим конечное множество из пяти элементов

$$E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \tag{4.1}$$

и пусть $A=\{x_2, x_3, x_5\}$. Выпишем для каждого элемента из E степень его принадлежности множеству A:

Характеристическая функция принадлежности

Это позволяет представить А через *все* элементы множества Е, сопроводив каждый из них значением функции принадлежности:

$$A=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0)\}. \qquad (4.3)$$ ◆

Напомним некоторые сведения из булевой алгебры, необходимые для понимания дальнейшего. Пусть $\overline{A}$ - дополнение А относительно Е, т.е. такое подмножество Е, для которого справедливы соотношения $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=E$. Если $x\in A$, то $x\notin\overline{A}$, и можно записать $\mu_A(x)=1$ и $\mu_{\overline{A}}(x)=0$.

В частности, рассматривая пример 4.1, видим, что для него

$$\mu_{\overline{A}}(x_1)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_2)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_3)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_4)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_5)=0,$$

и можно записать дополнение А через все элементы множества Е:

$$\overline{A}=\{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}.$$

Для двух данных множеств А и В можно рассматривать их пересечение $A\cap B$. Очевидно, имеем

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A,\\ 0, \text{ если } x\notin a,\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in B,\\ 0, \text{ если } x\notin B,\end{cases} \qquad \mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A\cap B,\\ 0, \text{ если } x\notin A\cap B.\end{cases}$$

Это позволяет написать $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$, где операция $\wedge$ обозначает булево произведение (конъюнкцию).

Таким же образом можно определить объединение двух множеств A и B:

$$\mu_{A\cup B} = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A\cup B, \\ 0, \text{ если } x \notin A\cup B, \end{cases}$$

обладающее свойством $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$, где операция $\vee$ - булева сумма (дизъюнкция).

Пример 4.2. Рассмотрим множество (4.1) и два его подмножества

$$A = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}, \quad (4.4)$$

$$B = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}. \quad (4.5)$$

Имеем

$$A\cap B = \{(x_1|0\wedge 1), (x_2|1\wedge 0), (x_3|1\wedge 1), (x_4|0\wedge 0), (x_5|1\wedge 1)\} =$$
$$= \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\},$$
$$A\cup B = \{(x_1|0\vee 1), (x_2|1\vee 0), (x_3|1\vee 1), (x_4|0\vee 0), (x_5|1\vee 1)\} =$$
$$= \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}.$$

Дополнения к эти двум подмножествам имеют вид:

$$\overline{A\cap B} = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\},$$

$$\overline{A\cup B} = \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}. \quad \blacklozenge$$

Эти два примера пока являются только введением к пониманию нечетких множеств.

Начнем с примера. Рассмотрим подмножество А множества Е, приведенное в (4.3) и (4.4). Каждый из пяти элементов Е или принадлежит или не принадлежит А, и поэтому здесь характеристическая функция принимает только значения 0 или 1.

Представим теперь, что характеристическая функция может принимать *любое* значение из интервала [0, 1]. В соответствии с этим элемент x_i множества Е может не принадлежать А (т.е. $\mu_A = 0$), может быть элементом множества А в небольшой степени (μ_A близко к 0), может более или менее принадлежать А (μ_A ни слишком близко к 0, ни слишком близко к 1) или, наконец, может в точности быть элементом А ($\mu_A = 1$). Таким образом, понятие принадлежности получает обобщение, приводящее к очень полезным результатам.

Математический объект, определяемый выражением типа

$$A = \{(x_1|0.2), (x_2|0), (x_3|0.3), (x_4|1), (x_5|0.8)\}, \qquad (4.6)$$

где x_i - элемент универсального множества Е, а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции принадлежности для этого элемента, называется *нечетким подмножеством* множества Е и обозначается $A \subset E$. В дальнейшем будем называть его нечетким множеством *А*.

Итак, нечеткое подмножество, определенное в (4.6), содержит в небольшой степени x_1, не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_2, полностью содержит x_4 и в значительной мере - x_5. Таким образом, можно создать математическую структуру, которая позволяет оперировать с относительно неполно определенными элементами и принадлежность которой к данному подмножеству лишь в какой-то мере иерархически упорядочена. К таким структурам можно, например, отнести:

Это понятие особенно хорошо подходит к описанию нечеткости, присущей социальным наукам.

В рассмотренном примере фигурировало дискретное нечеткое множество. Но нечеткое множество может быть и непрерывным.

Дадим строгое определение понятия нечеткого подмножества, введенное Л. А. Заде.

Пусть E - множество, счетное или нет, и x - элемент E. Тогда нечеткое подмножество A множества E определяется как множество упорядоченных пар

$$\{(x|\mu_{\tilde{A}}(x)\}, \quad \forall x \in E, \qquad (4.7)$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - *характеристическая функция принадлежности*, принимающая свои значения в множестве $M = \{ x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 1 \}$. Она указывает *степень* или *уровень* принадлежности элемента x подмножеству A. Множество M называется *множеством принадлежности*.

Если M ={0, 1}, то "нечеткое подмножество" A будет рассматриваться как "не-нечеткое" или просто "обычное" подмножество A.

Пример 4.3. Рассмотрим конечное множество E = {a, b, c, d, e, f} и конечное упорядоченное множество M = (0, 0.5, 1).Тогда A ={(a|0), (b|1), (c|0.5), (d|0), (e|0.5),(f|0)} можно рассматривать как некоторое нечеткое подмножество множества E. ◆

При введении операций над нечеткими множествами удобно пользоваться их наглядными представлениями, родственными применяемым в обычной теории множеств диаграммам Эйлера-Венна.

Рассмотрим прямоугольную систему координат (рис.4.1), на оси ординат которой откладываются значения $\mu_A(x)$, а на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы Е (если Е по своей природе упорядоченное множество, то такой же порядок должен сохраняться в расположении элементов на оси абсцисс). На рис.4.1 степень принадлежности каждого элемента множества A множеству Е изображена ординатой кривой, ограничивающей заштрихованную фигуру. Заштрихованная часть наглядно изображает нечеткое подмножество $A \subset$ Е и все нечеткие подмножества, содержащиеся в A (см. ниже). Такая штриховка удобна, чтобы отличать одно подмножество от другого.

Теперь рассмотрим операции над нечеткими множествами, применяя указанные диаграммы, что позволит сделать их наглядными.

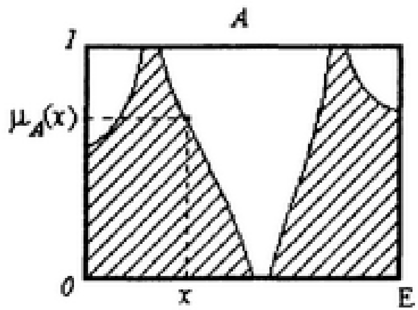

Рис.4.1. Диаграмма для нечеткого множества

Включение

Пусть E - множество, M - множество принадлежностей и A и B - два нечетких подмножества множества E. Говорят, что B *содержится* в A, если

$$\forall x \in E: \quad \mu_B(x) \le \mu_A(x)$$

и обозначают $B \subset A$. На рис.3.1 штриховкой обозначены все нечеткие множества, содержащиеся в A.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.4. Пусть даны множество $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и два его нечетких подмножества

$$A = \{(x_1 | 0.4), (x_2 | 0.2), (x_3 | 0), (x_4 | 1)\},$$
$$B = \{(x_1 | 0.3), (x_2 | 0), (x_3 | 0), (x_4 | 0)\}.$$

Имеем $B \subset A$, так как $0.3 < 0.4$, $0 < 0.2$, $0 = 0$, $0 < 1$. ◆

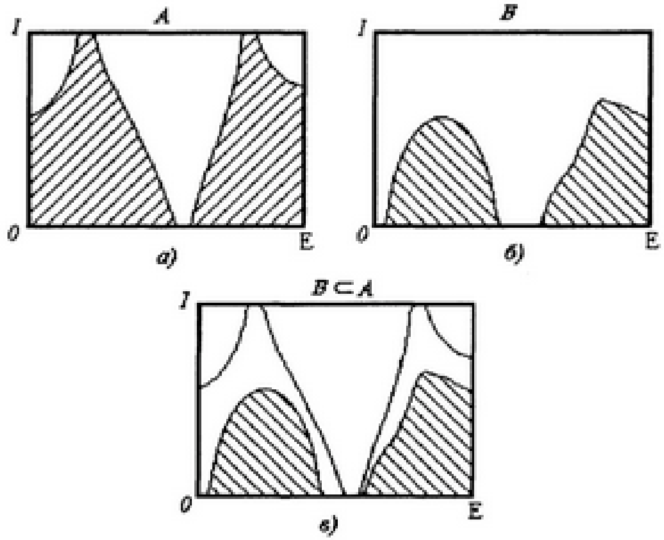

Рис.4.2. Диаграммы, иллюстрирующие свойство включения

Пример 4.5. Пусть множества A и B задаются диаграммами рис.4.2а и 4.2б. Рис.4.2в наглядно иллюстрирует свойство включения. ◆

Равенство

Пусть E - множество, M = [0, 1] - множество принадлежностей, A и B - два нечетких подмножества множества E. Считается, что A и B *равны* тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in E: \quad \mu_B(x) = \mu_A(x).$$

Это обозначается $B = A$. Если найдется по крайней мере один такой элемент x из E, что равенство $\mu_B(x) = \mu_A(x)$ не удовлетворяется, то B и A не равны, что обозначается как $B \neq A$.

Дополнение

Пусть E - множество, M = [0, 1] - множество принадлежностей, A и B - два нечетких подмножества множества E. Считается, что A и B *дополняют* друг друга, если

$$\forall x \in E: \quad \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Это обозначается как $B = \overline{A}$. Очевидно, что всегда $\overline{\overline{A}} = A$.

Заметим, что здесь дополнение определено для M = [0, 1], но его можно распространить на другие упорядоченные множества M, используя другие подходящие определения.

Пример 4.6. Пусть даны множество E = { $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ } и два его нечетких подмножества

$$A = \{(x_1|\ 0.13), (x_2|0.6), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0.03)\},$$
$$B = \{(x_1|0.87), (x_2|0.4), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|0.97)\}.$$

Очевидно, эти два множества являются дополнением друг друга. ◆

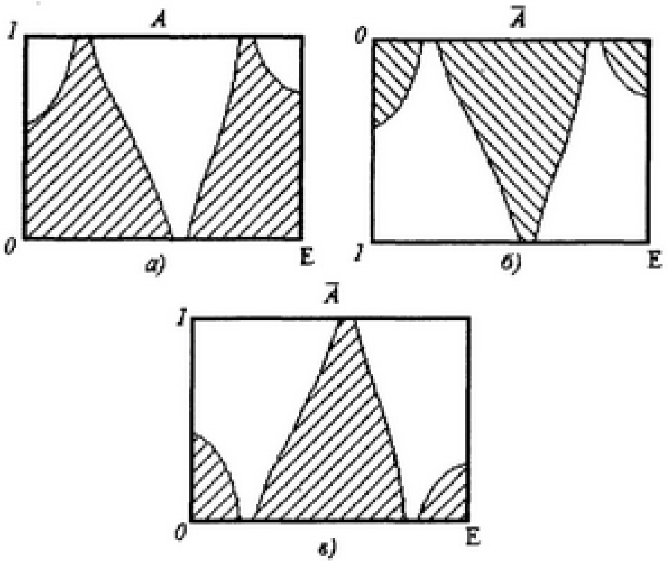

Рис.4.3. Диаграммы, иллюстрирующие дополнение нечеткого множества

Пересечение

Пусть E - множество, M = [0, 1] - множество принадлежностей, A и B - два нечетких подмножества множества E. *Пересечение* $A \cap B$ определяют как *наибольшее* нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B:

$$\forall x \in E: \quad \mu_{A \cap B}(x) = \text{MIN}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Пример 4.7. Пусть имеются E = { x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 } и

$$A = \{(x_1| \ 0.2), (x_2|0.7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.5)\},$$

$$B = \{(x_1|0.5), (x_2|0.3), (x_3|1), (x_4|0.1), (x_5|0.5)\}.$$

Тогда

$$A \cap B = \{(x_1| \ 0.2), (x_2|0.3), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.5)\}. \ \blacklozenge$$

Свойства пересечения видны на диаграммах рис.4.4. На рис.4.4а и 4.4б пред-

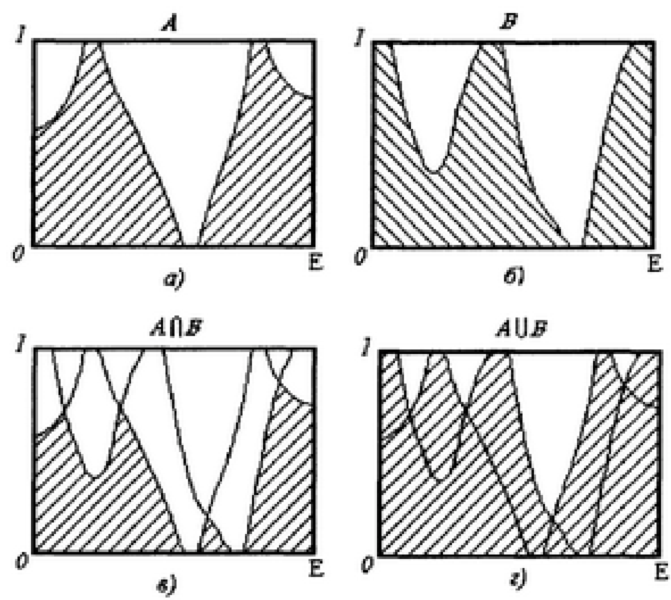

Рис.4.4. Диаграммы, иллюстрирующие свойства пересечения и объединения

множеств A и B.

Объединение

Пусть E - множество, M = [0, 1] - соответствующее ему множество принадлежностей, A и B - два нечетких подмножества множества E. *Объединение* $A \cup B$ определяют как *наименьшее* нечеткое подмножество, которое содержит хотя бы A или B.

$$\forall x \in E: \quad \mu_{A \cup B}(x) = MAX\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Вернувшись к примеру, рассмотренному выше, получим

$$A \cup B = \{(x_1 | 0.5), (x_2 | 0.7), (x_3 | 1), (x_4 | 0.1), (x_5 | 0.5)\}.$$

На рис.4.4г представлена диаграмма объединения нечетких множеств A и B, диаграммы которых изображены на рис.4.4а и 4.4б. Она включает в себя все элементы этих обоих множеств.

Разность

Разность нечетких множеств определяется соотношением $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Пример 4.8. Пусть A и B - множества, заданные в примере 4.7. Тогда имеем

$$\overline{B} = \{(x_1 | 0.5), (x_2 | 0.7), (x_3 | 0), (x_4 | 0.9), (x_5 | 0.5)\}$$

и

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{(x_1 | 0.2), (x_2 | 0.7), (x_3 | 0), (x_4 | 0), (x_5 | 0.5)\}. \quad \blacklozenge$$

В общем случае

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

На рис.4.5 представлены диаграммы, иллюстрирующие на примере нечетких множеств A и B рисунка 4.4 получение диаграммы для разности. Разность представлена на рис.4.5б фигурой с двойной штриховкой.

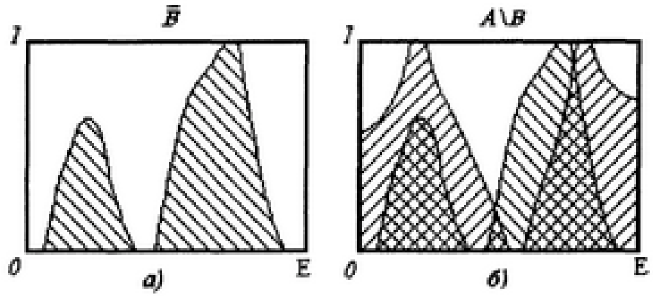

Рис.4.5. Разность нечетких множеств

Возведение в степень

Множество $B = A^{\alpha}$, представляющее собой *степень* нечеткого множества A, определяется как

$$\forall x \in E: \quad \mu_B(x) = [\ \mu_A(x)\ ]^{\alpha}, \qquad (\alpha > 0).$$

В соответствии с этим определением вводятся две специальных операции. Первая из них - операция *концентрирования* нечеткого множества:

$$\mathrm{CON}(A) = A^2.$$

Эта операция уменьшает степень принадлежности элементов множеству тем больше, чем меньше степень их принадлежности первоначальному множеству.

Вторая - операция *растяжения* нечеткого множества. Она противоположна концентрированию и определяется соотношением

$$\mathrm{DIL}(A) = A^{0.5}$$

(от слова dilution - "разбавление").

Пример 4.9. Пусть

$$A = \{(x_1|\ 0.2), (x_2|0.7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.5)\}.$$

Тогда концентрированное множество есть

$$\mathrm{CON}(A) = \{(x_1|\ 0.04), (x_2|0.49), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.25)\},$$

а растянутое -

$$\mathrm{DIL}(A) = \{(x_1|\ 0.447), (x_2|0.837), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.707)\}. \blacklozenge$$

Пример построения диаграмм для концентрированного и растянутого нечетких множеств дан на рис.4.7.

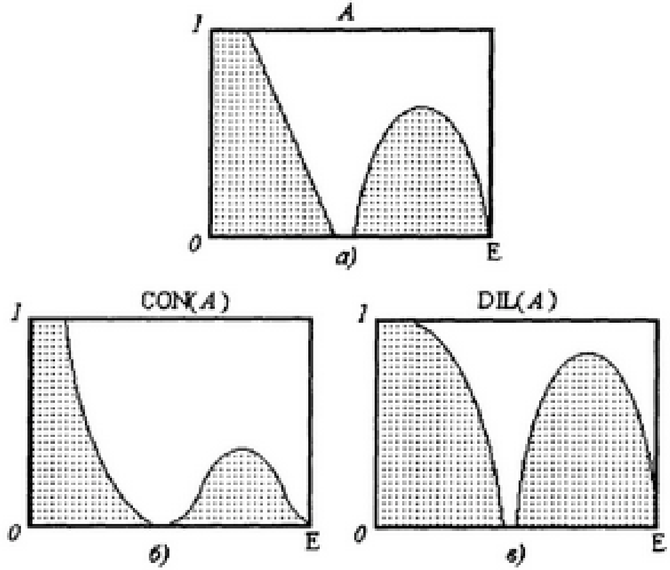

Рис.4.7. Концентрирование и растяжение нечеткого множества

Нечеткие высказывания и операции над ними

Нечетким высказыванием называется предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности в данное время. *Степень истинности* или *степень ложности* каждого нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого интервала M=[0, 1], причем 0 и 1 являются предельными значениями степени истинности и совпадают с понятиями лжи и истинности для "четких" высказываний. Нечеткое высказывание, имеющее значение степени истинности, равное 0.5, называется *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Примеры нечетких высказываний: "Два - маленькое число", "Петров занимается большой общественной работой". Степень истинности нечеткого высказывания, вообще говоря, является *субъективной характеристикой* и зависит от многих факторов, в частности, от цели использования этого нечеткого высказывания. Степень истинности первого из рассматриваемых нечетких высказываний положим равной 0.9, степень истинности второго высказывания определяется общественной полезностью выполняемой Петровым работы и, допустим, по мнению его сотрудников, равна 0.3.

Нечеткие высказывания и операции над ними

Нечеткие высказывания бывают *простыми* и *составными*. Составные высказывания образуются из простых с помощью логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и других.

Отрицанием нечеткого высказывания x называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\bar{x}$ (или $\rceil x$), степень истинности которого определяется выражением

$$\bar{x} = 1 - x. \qquad (5.1)$$

Отсюда следует, что степень ложности высказывания $\bar{x}$ совпадает со степенью истинности высказывания x (рис. 5.1).

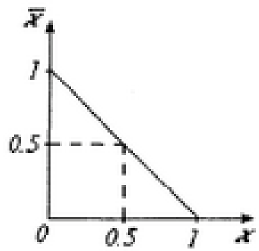

Рис.5.1. Связь степеней истинности нечеткого высказывания и его отрицания

Нечеткие высказывания и операции над ними

На рис.5.1. показана зависимость (5.1). Из него видно, что увеличение степени истинности нечеткого высказывания ведет к линейному уменьшению степени истинности его отрицания. Точка (0.5, 0.5) есть точка индифферентности.

Конъюнкцией нечетких высказываний x, y называется нечеткое высказывание, обозначаемое $x \wedge y$ (или $x \& y$), степень истинности которого определяется следующим образом:

$$x \wedge y = \mathrm{MIN}(x, y), \qquad (5.2)$$

что вытекает из минимаксной трактовки логических операций, введенной Л.Заде.

Следовательно, степень истинности нечеткого высказывания $x \wedge y$ совпадает со степенью истинности *менее истинного* высказывания.

Дизъюнкцией нечетких высказываний x, y называется нечеткое высказывание, обозначаемое $x \vee y$, степень истинности которого находится как

$$x \vee y = \mathrm{MAX}\ (x, y). \qquad (5.3)$$

Таким образом, степень истинности нечеткого высказывания $x \vee y$ совпадает со степенью истинности *более истинного* высказывания.

Для того, чтобы найти степень истинности нечеткого высказывания, порождаемого импликацией, обратимся к таблице истинности операции импликации обычных высказываний:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Нечеткие высказывания и операции над ними

Обратимся к эквивалентности нечетких высказываний. Для обычных высказываний она задается таблицей истинности

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Отсюда для обычных высказываний по первой нормальной форме имеем

$$x \leftrightarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge y, \qquad (5.7)$$

а по второй нормальной форме -

$$x \leftrightarrow y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y). \qquad (5.8)$$

Учитывая соотношение (5.6), можно последнее равенство привести к виду

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x). \qquad (5.9)$$