Лекция 2

Основные теоремы теории вероятностей

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

- ***Теорема.*** Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B)} \qquad (1)$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B – l элементарных событий.

Так как A и B – несовместимые события, то ни одно из элементарных событий U_1, U_2, ..., U_n не может одновременно благоприятствовать и событию A, и событию B.

Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий.

По определению вероятности

$$P(A) = k/n, \quad P(B) = 1/n, \quad P(A + B) = (k + l)/n, \qquad (2)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

- ***Следствие 1.*** Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\boldsymbol{P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1} \qquad (3)$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них – достоверное событие, и, значит,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$$

А так как эти события и несовместимые, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

что и приводит к искомому равенству.

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

- ***Следствие 2***. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:

$$\boldsymbol{P(A) + P(\bar{A}) = 1} \qquad (4)$$

Это следствие — частный случай следствия 1.

Пример. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

Вероятность вынуть красный шар $P(A)$ = 3/10, синий $P(B)$= 5/10. Так как события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,3+0,5=0,8.$$

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Определение 1.*** Два события A и B называют *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.
- В противном случае события A и B называют *зависимыми*.
- Несколько событий $A_1, \ldots, A_k$ называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

Пример. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие A - вынут белый шар. Очевидно, $P(A) = ½$.
После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар.
Событие B - во втором испытании вынут белый шар - также имеет вероятность $P(B) = 1/2$, т. е. события A и B - независимые.

2. Теорема умножения вероятностей

- Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну.
- Тогда, если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается и оказывается равно одной трети, если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается и становится равно двум третям.
- Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A, в таких случаях события A и B - зависимые.

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Определение 2.*** Пусть A и B - зависимые события. *Условной вероятностью $P_A(B)$* события B называют вероятность события B, найденную в предположении, что событие A уже наступило.
  - Так, в только что рассмотренном примере $P_A(B) = 1/3$.
  - Обозначение $\boldsymbol{P_A(B) \sim P(B|A) \sim P(B/A)}$

Условие независимости события B от события A можно записать в виде

$$P(B|A) = \boldsymbol{P_A(B) = P(B)}, \qquad (5)$$

а ***условие зависимости*** - в виде

$$\boldsymbol{P_A(B) \neq P(B)}, \qquad (6)$$

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Теорема 1.*** Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\boldsymbol{P(AB)= P(A)P_A(B).} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а, значит, и событию AB.

Тогда

$$P(AB) = l/n = k/n \cdot l/k = P(A) \cdot P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (7).

2. Теорема умножения вероятностей

- Применив формулу (7) к событию *BA*, получим

$$P(BA) = P(B)P_B(A). \qquad (7')$$

- Так как $AB = BA$, то

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (8)$$

- Сравнивая (7) и (7'), получаем равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \qquad (9)$$

Пример. В терапевтическом отделении больницы 70% пациентов - женщины, а 21% - курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность того, что он курит?

Пусть *M* означает, что пациент - мужчина, а *K* - что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(M) = 0{,}3$, а $P(MK) = 0{,}21$.

Поэтому с учетом формулы (7) искомая условная вероятность $P_M(K) = 0{,}21/0{,}3 = 0{,}7$.

2. Теорема умножения вероятностей

Задача. В группе туристов 20% детей, причем 12% девочки. Наугад выбирают ребенка. Какова вероятность того, что это девочка? Какова вероятность того, что это мальчик?

Задача (*курение и случай заболевания легких*). В группе обследуемых 1000 человек. Из них 600 курящих и 400 некурящих. Среди курящих 240 человек имеют те или иные заболевания легких. Среди некурящих легочных больных 120 человек. Являются ли курение и заболевание легких независимыми событиями?

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Задача.*** Предположим, что вероятности встретить реку, загрязняемую постоянным фактором A – $P(A)$, временным фактором B – $P(B)$ и обоими факторами – $P(AB)$, равны соответственно 0,4; 0,1 и 0,05.

Найдем:

1) вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором, будет к тому же загрязнена и постоянным фактором, т.е. $P_B(A)$;

2) вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором, будет еще загрязнена и временным фактором, т.е. $P_A(B)$.

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Теорема 2.*** Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (10)$$

Доказательство. Действительно, если A и B – независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (7) превращается в формулу (10).

В случае независимых событий в совокупности эта теорема распространяется на любое конечное число их, т. е. имеет место равенство

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n), \qquad (11)$$

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Замечание 1.*** Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример. Пусть у нас перемешаны записи нейронной активности 10 клеток из одной области мозга (у 5 клеток зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания», у 5 - другой вид активности) и 20 из другой области (у 15 - активность типа клеток «внимания», у 5 - другого вида). Выясним, зависимы ли события А - «выбранная наугад запись сделана в первой области» и В - на «выбранной наугад записи зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания».
Имеем

$$P(A) = 10/30 = 1/3; \quad P(B) = 20/30 = 2/3;$$
$$P(AB) = 5/30 = 1/6; \quad P(AB) \neq P(A)P(B).$$

Следовательно, события A и B зависимы.

2. Теорема умножения вероятностей

- ***Теорема 3.*** Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т. е. вероятность суммы) вычисляется по формуле

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n) \qquad (12)$$

Доказательство. Событие $\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$ состоит в том, что не произошло ни одно из событий A_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Оно противоположно событию, состоящему в том, что произошло хотя бы одно из событий A_i, т.е. сумме событий $A_1+A_2+\ldots+A_n$. Поэтому, согласно формуле (6): $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)=1$, откуда

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)$$

Но с учетом замечания 1 и формулы (11)

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n),$$

что и приводит к искомому равенству (12).

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- ***Теорема.*** Вероятность суммы двух совместимых событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).} \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l - событию B и m - одновременно событиям A и B.

Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда

$$P(A + B) = \frac{k + l - m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- ***Замечание 1.*** При использовании формулы (13) следует иметь в виду, что события *A* и *B* могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B); \qquad (14)$$

для зависимых событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B).$$

- ***Замечание 2.*** Если события *A* и *B* несовместимы, то их произведение *AB* есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (1) является частным случаем формулы (13).

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- ***Пример.*** Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A) = 0{,}7$ и $P(B)=0{,}8$. Найдем вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы.
Поэтому
$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(\mathrm{AB}) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7\cdot 0{,}8 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94$.

4. Формула полной вероятности.

- ***Теорема.*** Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из *n* попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{Bn}(A) \quad (15)$$

(*формула полной вероятности*).

Доказательство.

Событие А может наступить лишь при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, т.е. $A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA$, причем ввиду несовместимости событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ события $B_1A, B_2A, \ldots, B_nA$ также несовместимы.

Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA) =$$
$$= P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{Bn}(A)$$

События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем называть гипотезами.

4. Формула полной вероятности.

- ***Задача***. В санатории 30% пациентов - мужчины (*М*) и 70% - женщины (*Ж*). Болезни сердца среди мужчин встречаются в два раза чаще, чем среди женщин. Какова вероятность того, что наугад выбранный пациент сердечник?

- ***Задача*** *(смог над городом)*. На город примерно 100 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году - с запада. Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Как часто город подвергается воздействию вредных выбросов? Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

5. Формулы Байеса

- Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, осуществлено одно испытание, в результате которого произошло событие *A*.

Спрашивается, как изменились (в связи с тем, что событие *A* уже произошло) вероятности гипотез, т.е. величины $P(B_к)$, $к=1, 2, ..., n$?

Найдем условную вероятность $P_A(B_к)$.
По формуле (9) имеем $P(AB_к) = P(A)P_A(B_к) = P(B_к)P_{Bк}(A)$.
Отсюда

$$P_A(B_к) = \frac{P(B_к)\cdot P_{B_к}(A)}{P(A)}$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим:

$$P_A(B_к) = \frac{P(B_к)\cdot P_{B_к}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)} \qquad (16)$$

формулы Байеса
(Томас Байес 1702—1761)

где $к=1,2,...,n$.

5. Формулы Байеса. Применимость и значение

- ***Формулы Байеса применяются***, когда событие А, которое может появиться только с одной из гипотез B_1, B_2, ..., B_n образующих полную группу событий, произошло и необходимо произвести количественную переоценку априорных вероятностей этих гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$,...,$P(B_n)$, известных до испытания, т.е. надо найти апостериорные (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, ..., $P_A(B_n)$.

- ***Значение формулы Байеса*** состоит в том, что при наступлении события A, т.е. по мере получения новой информации, мы можем проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы.
- Такой подход, называемый ***байесовским***, дает возможность корректировать управленческие решения в экономике, оценки неизвестных параметров распределения изучаемых признаков в статистическом анализе и т.п.

5. Формулы Байеса

- ***Задача.*** Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25% всех деталей, второй - 35%, третий - 40%. В продукции первого рабочего брак составляет 5%, в продукции второго - 4% и в продукции третьего - 2%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

- ***Задача.*** Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго - 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит:

    а) 1-му стрелку;

    б) 2-му стрелку?