<u>Понятие определённого интеграла:</u>

Пусть функция f(x) определена на промежутке $a \le x \le b.$ Считаем, что функция f(x) на указанном промежутке непрерывная и $a<b.$ Разобьём этот отрезок на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2..<x_n=b.$ На каждом из отрезков $x_{i-1} \le x \le x_i \, (i=1, 2, 3,...n)$ возьмём произвольную точку c_i и вычислим сумму:

$$f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+f(c_2)\Delta x_2+...+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i\text{-}1}.$ Эта сумма называется **интегральной суммой** функции f(x) на отрезке $a \le x \le b.$

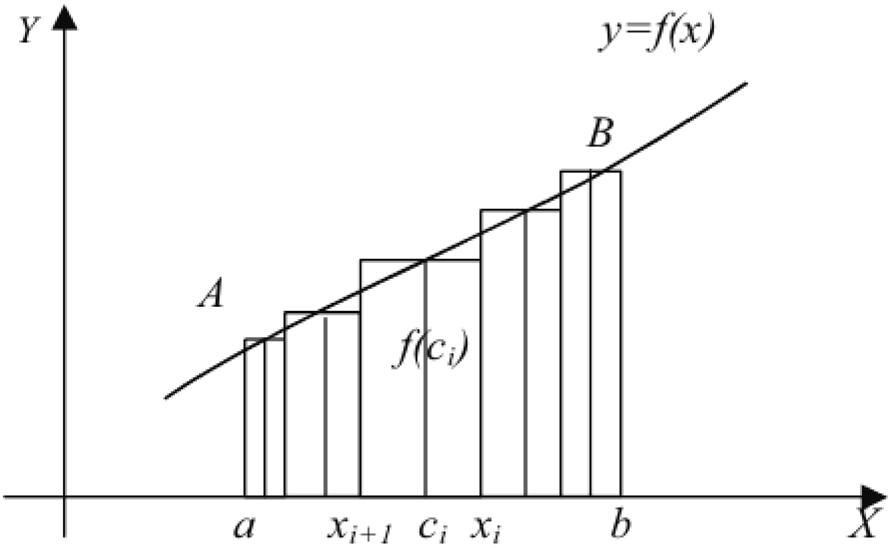


рис.1

Геометрически (рис. 1) каждое слагаемое интегральной суммы равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, а вся сумма равна площади фигуры, которую получили соединением всех указанных выше прямоугольников.

Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы длина наибольшего отрезка $x_{i\text{-}1} \le x \le x_i$ стремилась к нулю. Во многих случаях при таком разбиении интегральная сумма будет стремиться к некоторому конечному пределу, независимым ни от способа, которым выбираются точки деления x_i, ни от того, как выбираются промежуточные точки c_i.

Это предел и называют определённым интегралом для функции f(x) на отрезке $a \leq x \leq b$.

Определённым интегралом для функции f(x) на отрезке $a \leq x \leq b$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

Число a называется нижней границей интегрирования; число b — верхней границей; отрезок $a \leq x \leq b$ — отрезком интегрирования.

Теорема о существовании определенного интеграла. Определенный интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$, существует, т.е. предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них.

Функция, для которой существует определенный интеграл на данном отрезке, называется *интегрируемой* на данном отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

3. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ \ , \ \textit{где} \ \ a < c < b.$$

4. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + + \int_a^b f_2(x)dx.$$

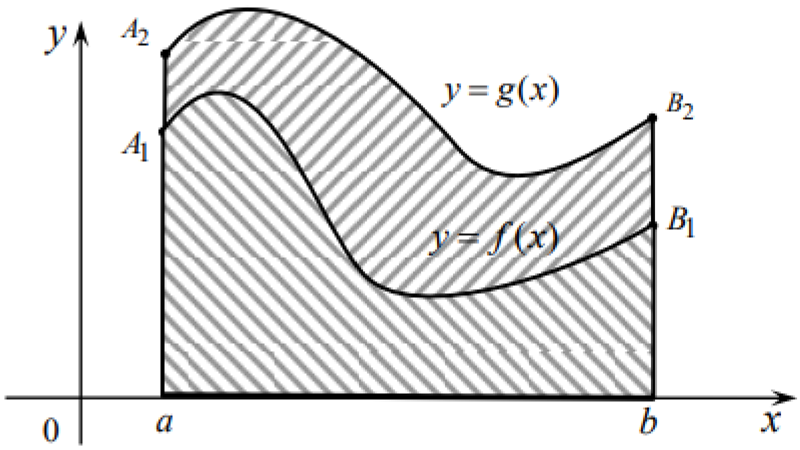
5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

6.

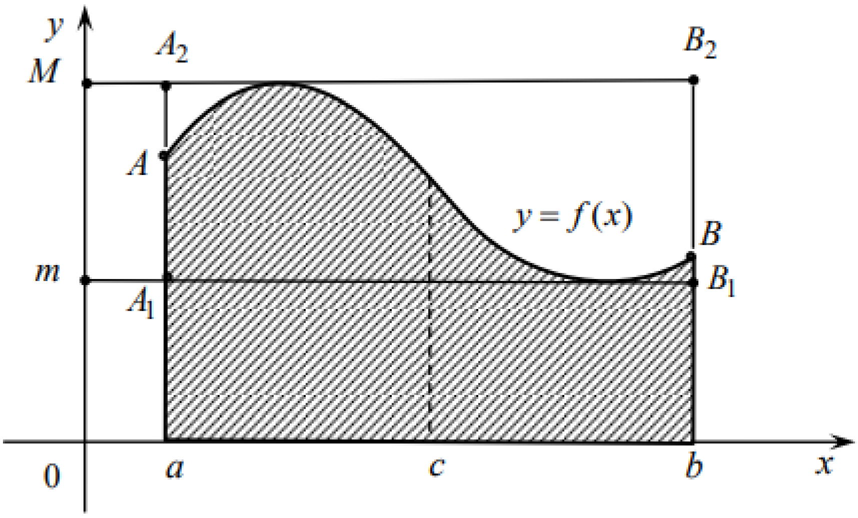
Если на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$



7.

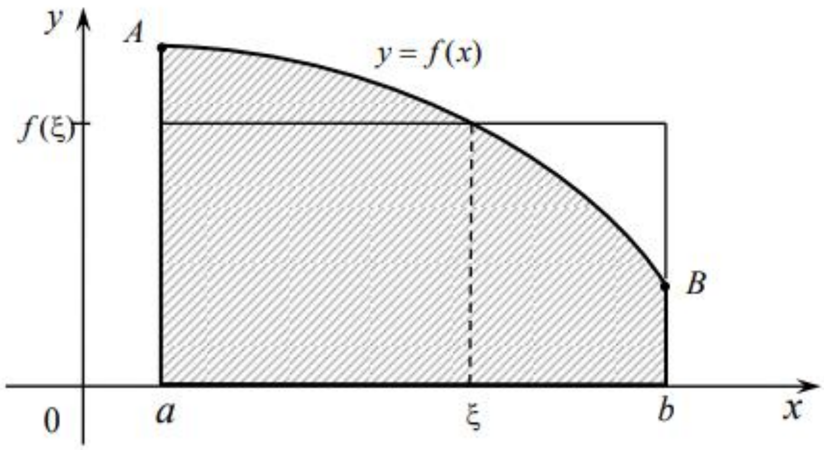
Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $a \le b$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.



8.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

Геометрическая интерпретация дана на рисунке для $f(x) > 0$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, площадь которого равна площади криволинейной трапеции $aABb$.



Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ служит формула Ньютона-Лейбница**.**

Формула Ньютона-Лейбница. Если для непрерывной функции $f(x)$ известна какая-либо первообразная функция $F(x)$ то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула устанавливает взаимосвязь между неопределенным и определенным интегралами.

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки (замены переменной). Пусть для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

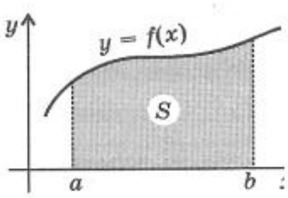
Отметим, что при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется. Новые пределы интегрирования находятся из соотношений $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

Интегрирование по частям определенных интегралов

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула $\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Фигура, ограниченная непрерывной, неотрицательной функцией *y = f(x),* осью *ох,* прямыми *y=a и y=b* называется криволинейной трапеции (рис. 1).



Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции*.

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$