ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y, из некоторой области их изменения Д, соответствует определенное значение величины U, то говорят, что U есть функция двух переменных x и y, определенная в области Д.

Функция 2-х переменных обозначается $U = f(x, y)$ $z = f(x, y)$

Функция может иметь не только две но и три и более независимых переменных: $U = f(x, y, z, t)$

Определение.

Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция $U = f(x, y)$, называется *областью определения этой функции* или областью существования.

Пара (x,y) определяет точку M(x,y) в области существования. Следовательно область определения– часть плоскости оху. *Окрестностью точки* M(x,y) является открытый круг малого радиуса с центром в этой точке.

В области Д существует множество точек, в которых функция $U = f(x, y)$ принимает одинаковые значения. Пусть $U = c = const$. Тогда уравнение $f(x, y) = c$ определяет линию в плоскости оху, во всех точках которой $U = c$. Такая линия называется *линией уровня.*

Если функция трех переменных $U = f(x, y, z)$, то уравнение $f(x, y, z) = c$ определяет поверхность в пространстве, во всех точках которой $U = c$. Такая поверхность называется *поверхностью уровня.*

Пример. $U = x^2 + 2y^2$

Значениям функции U=4 соответствует линия уровня $x^2 + 2y^2 = 4$ (эллипс)

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Т.к. x и y независимые переменные, то одна из них может изменятся , а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx , сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением z по x* и обозначается $\Delta_x z$.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x;\ y) - f(x; y)$$

Аналогично *частное приращение z по y* $\Delta_y z = f(x;\ y + \Delta y) - f(x; y)$.

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x+\Delta x;\ y+\Delta y) - f(x;y)$$

Если существует предел

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x;\ y) - f(x;y)}{\Delta x} = z'_x$, он называется *частной производной функции по переменной x* и обозначается $z'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ f'_x,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется *частная производная по y*

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;\ y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Из определений следует, что частная производная по одной переменной вычисляется при условии, что другие независимые переменные являются постоянными величинами. Все правила дифференцирования функции одной переменной сохраняются.

Пример.1. $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$

Находя частную производную z по x, считаем что y есть число, постоянная. И находим производную как обычно.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2-y} \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2 - e^{x^2-y}$$

2. $z = cos(3x+5y) + xy + \dfrac{x}{y}$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin(3x+5y) + y + \frac{1}{y} \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -5\sin(3x+5y) + x - \frac{x}{y^2}$$

3. $z = x^y \qquad z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y\, Lnx$

3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции от $(x,y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = z''_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = z''_{xy}$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) = z'''_{xxy}$.

Определение. Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, *называется смешанной частной производной* z''_{xy}, z''_{yx}

Пример.

1.

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$$

$$z'_x = 4x^3 - 4xy^3 \qquad z''_{xy} = -4x \cdot 3y^2 = -12xy^2$$

$$z'_y = -2x^2 \cdot 3y^2 + 5y^4 \qquad z''_{yx} = -6y^2 \cdot 2x = -12xy^2$$

$$z''_{xx} = 12x^2 - 4y^3 \qquad z''_{yy} = -6x^2 \cdot 2y + 20y^3 = -12x^2y + 20y^3$$

2.

$$z = e^{xy^3}$$

$$z'_x = y^3 e^{xy^3} \qquad z''_{xx} = y^6 e^{xy^3}$$

$$z''_{xy} = 3y^2 e^{xy^3} + y^3 \cdot x3y^2 e^{xy^3} = e^{xy^3}(3y^2 + 3xy^5)$$

$$z'_y = 3y^2 x e^{xy^3} \qquad z''_{yy} = 6yxe^{xy^3} + 3y^2x \cdot 3y^2 x e^{xy^3} = e^{xy^3}(6yx + 9x^2y^4)$$

$$z''_{yx} = 3y^2 e^{xy^3} + x3y^2 \cdot y^3 e^{xy^3} = e^{xy^3}(3y^2 + 3xy^5)$$

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки M(x,y). Составим полное приращение функции в точке M.

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x; y)$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в т. M(x,y), если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \qquad (1)$$

Где $\cdot\, \alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0 \quad \beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \to 0 \quad при \quad \Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0$

Сумма первых двух слагаемых в формуле (1) представляет собой главную часть приращения функции.

Определение. Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$

Выражения $A\Delta x$ *и* $B\Delta y$ называют частными дифференциалами. Для независимых переменных x и y полагают

$$\Delta x = dx \quad \Delta y = dy$$

$$dz = Adx + Bdy$$

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \qquad (2)$$

Теорема. Чтобы функция $z = f(x,y)$ была дифференцируема в точке, необходимо чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ.

При достаточно малых Δx и Δy имеет место $\Delta z \approx dz$

Т.к.
$$\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0)$$
$$dz = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

То
$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$
$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

Пример 1.

$1{,}02^{3{,}01} = ?$

$x_0 = 1\ \Delta x = 0{,}02$ $\qquad$ $y_0 = 3\ \Delta y = 0{,}01$

$f(x,y) = x^y$ $\qquad$ $f(x_0,y_0) = 1^3 = 1$

$f'_x(x,y) = yx^{y-1}$ $\qquad$ $f'_x(x_0,y_0)\Big|_{\substack{x=1\\y=3}} = 3\cdot 1^{3-1} = 3$

$f'_y(x,y) = x^y Lnx$ $\qquad$ $f'_y(x_0,y_0)\Big|_{\substack{x=1\\y=3}} = 1^3\cdot Ln1 = 0$

$1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 3\cdot 0{,}02 = 1{,}06$

Пример 2.

$$\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}=?$$

$x_0=1\ \Delta x=0{,}02$ $\qquad$ $y_0=2\ \Delta y=-0{,}03$

$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ $\qquad$ $f(x_0,y_0)=\sqrt{1^3+2^3}=3$

$$f'_x(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \qquad f'_x(x_0,y_0)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \qquad f'_y(x_0,y_0)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=2$$

$$\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}\approx 3+0{,}5\cdot 0{,}02-2\cdot 0{,}03=2{,}95$$