Лекция 7

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УАВНЕНИЙ

Определение. Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Определение. Система ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производной

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_{1,} y_2, ... y_n) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_1(x, y_{1,} y_2, ... y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Называется нормальной системой ДУ порядка n.

Теорема Коши.

Если в системе (1) все функции $f_i(x, y_{1,} y_2, ... y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными в некоторой области Д(n-1 мерное пространство), то в каждой т. $M_0(x_0, y_{1,}^\circ y_2^\circ, ... y_n^\circ)$ этой области существует и притом единственное решение $y_1 = \varphi_1(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0) = y_1^\circ, ..., y_n(x_0) = y_n^\circ$.

Метод интегрирования нормальной системы, есть метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - 3z \qquad y'' = 4y' - 3z' \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - 3z \qquad z' = 2y - 3z \end{cases} \qquad y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$$

$y'' - 4y' + 6y - 9z = 0$ *Из первого уравнения выразим* $z = \dfrac{4y - y'}{3}$

$$y'' - 4y' + 6y - 9 \cdot \frac{4y - y'}{3} = 0 \qquad y'' - 4y' + 6y - 12y + 3y' = 0$$

$$y'' - y' - 6y = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0 \quad k_1 = 3 \quad k_2 = -2$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \qquad y' = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$z = \frac{1}{3}(4c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-2x} - 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{-2x}) = \frac{1}{3} c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{-2x}$$

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{matrix} \quad x'' = 3x' - 2y' \quad x'' = 3x' - 2(2x - y)$$

$x'' - 3x' + 4x - 2y = 0$ *Из первого уравнения выразим* $y = \dfrac{3x - x'}{2}$

$$x'' - 3x' + 4x - 2 \cdot \frac{3x - x'}{2} = 0 \qquad x'' - 3x' + 4x - 3x + x' = 0$$

$$x'' - 2x' + x = 0$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 1$$

$$x = c_1 e^t + c_2 t e^t \qquad x' = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t$$

$$y = \frac{1}{2}(3c_1 e^t + 3c_2 t e^t - c_1 e^t - c_2 e^t - c_2 t e^t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2} c_2 e^t$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 2 = c_1 - \dfrac{1}{2} c_2 \end{cases} \quad c_2 = -2$$

$$x = e^t - 2te^t = e^t(1 - 2t) \qquad y = e^t - 2te^t + e^t = e^t(2 - 2t)$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

$$\begin{cases} x' = \cos t - y \\ 4x' - y' = \sin t - 3x \end{cases} \quad \begin{matrix} x'' = -\sin t - y' \\ y' = 4x' - \sin t + 3x \end{matrix} \quad x'' = -\sin t - 4x' + \sin t - 3x$$

$$x'' + 4x' + 3x = 0 \quad k^2 + 4k + 3 = 0 \quad k_1 = -3 \quad k_2 = -1 \quad x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

$$y = \cos t - x' = \cos t + 3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

$$y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}. \quad x(0) = 2 \quad y(0) = 3$$