Лекция 7

Смешанное произведение векторов

$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$

Возможны три случая

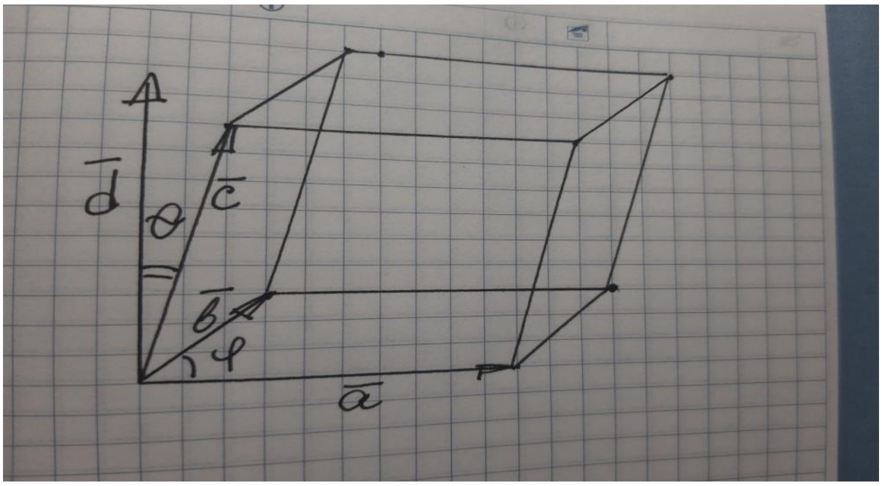
$(\bar{a}\cdot\bar{b})\times\bar{c}$ Вектор на скаляр

$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ Двойное векторное произведение

$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ $\quad\quad$ $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ Смешанное произведение

Геометрический смысл

Возьмем три некомпланарных вектора $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ и на них, как на ребрах построим параллелепипед



Так как $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$, то $|\bar{d}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi=S_{параллелорамма}$

$$\bar{d}\cdot\bar{c}=|\bar{d}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\theta$$

$$\bar{d}\cdot\bar{c}=|\bar{d}|\cdot Пр_{\bar{d}}\bar{c}$$

$$Пр_{\bar{d}}\bar{c}\ \ высота\ \ параллелипипеда=H$$

$$\bar{d}\cdot\bar{c}=|\bar{d}|\cdot H$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{d}\cdot\bar{c}=|\bar{d}|\cdot H=S_{осн}\cdot H=V$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\pm V$$

Знак + берется, если $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ – правая тройка векторов

Знак – в противном случае

Смешанное произведение в координатной форме

$\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)\quad \bar{b}(b_x,b_y,b_z)\quad \bar{c}(c_x,c_y,c_z)$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}==\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

Свойства

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\overline{c}\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{c}\overline{a}=-\overline{b}\overline{a}\overline{c}=-\overline{a}\overline{c}\overline{b}=-\overline{c}\overline{b}\overline{a}$

3)Векторы $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0\qquad (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{d}\cdot\bar{c}=|\bar{d}||\bar{c}|\cos\theta=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi|\bar{c}|\cos\theta=|\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\sin\varphi\cos\theta$$

Возможно в следующих случаях:

а) хотя бы один вектор нулевой, тогда все три вектора компланарны

б) $\sin\varphi=0$ тогда $\bar{a},\ \bar{b}$ коллинеарны и $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ компланарны

в) $\cos\theta=0$ тогда вектор $\bar{c}$ ортогонален $\bar{a}\times\bar{b}$, т.е. компланарен $\bar{a},\ \bar{b}$

Вывод формулы для высоты пирамиды

$$V_{пирамиды}=\frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|=\frac{1}{3}S_{осн}H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|H=\frac{1}{6}|\bar{a}\times\bar{b}|H$$

$$H=\frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{|\bar{a}\times\bar{b}|}$$

Пример

Даны четыре точки A(1; 2; 0), B(-1; 2; 1), C(-1; -1; -1) и D(0; 1; 3). Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и длину высоты, опущенную из точки D, на плоскость основания. Является ли тройка векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ правой?

Решение.

$\overrightarrow{AB}$=(-1-1; 2-2; 1-0) = (-2; 0; 1),

$\overrightarrow{AC}$=(-1-1; -1-2; -1-0) = (-2; -3; -1),

$\overrightarrow{AD}$=(0-1; 1-2; 3-0) = (-1; -1; 3);

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -2 & -3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=18+2-3+2=19;$$

Так как $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}>0$, то тройка векторов – правая.

$$V_{пирамиды}=\frac{|19|}{6}=\frac{19}{6}\text{ (куб.ед.);}$$

$$V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\frac{1}{3}S_{осн}H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|H=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|H$$

$$H=\frac{\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -2 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=i(0+3)+j(-2+2)+k(6+0)=3i+6k;$$

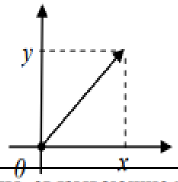
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9+36}=\frac{1}{2}\sqrt{45}=\frac{3}{2}\sqrt{5}\text{ (кв.ед.).}$$

$$H=\frac{3\cdot V_{пирамиды}}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 19\cdot 2}{6\cdot 3\cdot\sqrt{5}}=\frac{19}{3\sqrt{5}}\text{ (ед.).}$$

Аналитическая геометрия на плоскости

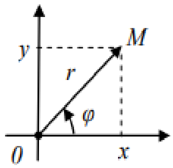
1. Система координат на плоскости

Система координат – способ, позволяющий численно описать положение точки. Рассмотрим две системы координат на плоскости – *прямоугольную (декартова) и полярную.*

Прямоугольная система координат	Полярная система координат
Положение точки M определяется координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}=\{x;y\}$, где x – **абсцисса**, y – **ордината** точки M. Абсцисса и ордината составляют **прямоугольные координаты** точки M и записываются $M(x;y)$.  	Положение точки M определяется расстоянием r (**полярный радиус**) от точки M до полюса O (то есть $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$) и углом φ (**полярный угол**) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Полярный радиус и полярный угол составляют **полярные координаты** точки M и записываются $M(r;\varphi)$.

Формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты x, y точки M и ее полярные координаты r, φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

<u>*Пример 4.1*</u>. Найти: а) прямоугольные координаты точки $M_1\left(4;\dfrac{3\pi}{4}\right)$; б) полярные координаты точки $M_2\left(-1;\sqrt{3}\right)$.

<u>*Решение*</u>. а) По формулам имеем:

$$x=4\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2};\quad y=4\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Итак, $M_1\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

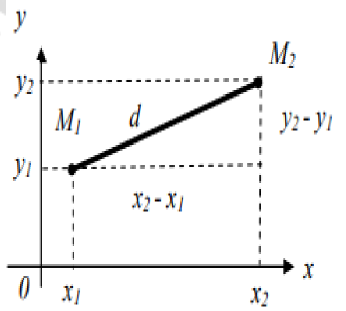
б) По формулам имеем:

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2;\ \cos\varphi=-\frac{1}{2};\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{Отсюда}\ \varphi=\frac{2\pi}{3}.$$

Итак, $M_2\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2. Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ определяется по формуле $\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ (рис. 4.1).



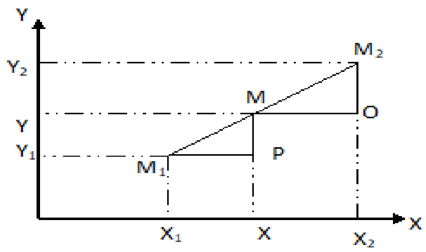
Середина отрезка

$$\Delta M_1PM=\Delta MOM_2$$

$$M_1P=MO$$

$$x-x_1=x_2-x \qquad x=\frac{x_2+x_1}{2}$$

Аналогично $\qquad y=\dfrac{y_2+y_1}{2}$



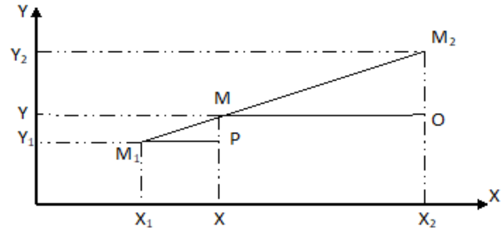
Если в пространстве $z=\dfrac{z_2+z_1}{2}$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме одноименных координат его концов

Деление отрезка в данном отношении

$$\Delta M_1PM \sim \Delta MOM_2$$

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1P}{MO}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda$$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \lambda_2x-\lambda_2x_1=\lambda_1x_2-\lambda_1x_1$$

$$(\lambda_2+\lambda_1)x=\lambda_1x_2+\lambda_2x_1$$

$$x=\frac{\lambda_1x_2+\lambda_2x_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

Если числитель и знаменатель сократить на λ_2, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{\lambda+1} \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{\lambda+1}$$

Аналогично $\quad y=\dfrac{\lambda_1y_2+\lambda_2y_1}{\lambda_2+\lambda_1} \qquad x=\dfrac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}$

Площадь треугольника

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=S_{A_1M_1M_2A_2}+S_{A_2M_2M_3A_3}-S_{A_1M_1M_3A_3}=$$

$$=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)+\frac{y_3+y_2}{2}(x_3-x_2)-\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)-(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$$