Лекция 9

Кривые второго порядка

1. Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра) той же плоскости.

Если точка $C(x_0; y_0)$ – центр, то уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \qquad (4.11)$$

где R – радиус окружности; x, y – текущие координаты.

Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 4.3. Составить уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;-1)$, чем к точке $B(-4;-4)$.

Решение. Запишем расстояние от точки $M(x; y)$ до точек A и B:

$|AM| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ и $|BM| = \sqrt{(x+4)^2 + (y+4)^2}$. Так как $2|AM| = |BM|$, то $2\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y+4)^2}$. Преобразуя это уравнение, получим $x^2 + y^2 = 8$. Это уравнение окружности с центром в $O(0;0)$ и радиусом $R = \sqrt{8}$.

2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a > 2c$, то есть $a > c$.

Если оси координат расположены так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.6*а*), то из равенства $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, где $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса, можно вывести **каноническое** или простейшее **уравнение эллипса**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,}\quad (b^2=a^2-c^2) \text{ и } (a>b). \tag{4.12}$$

Основными элементами эллипса являются:

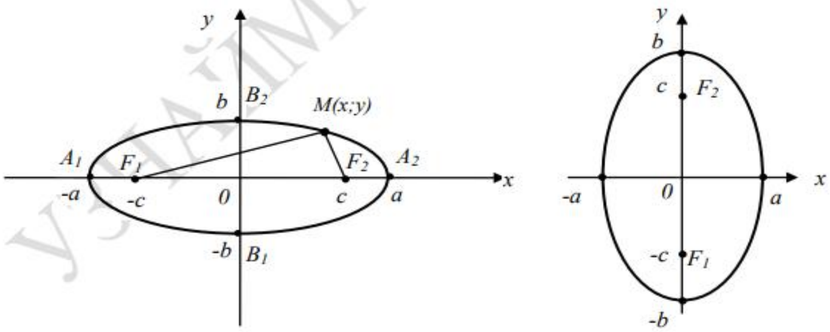
- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** эллипса;
- оси симметрии Ox и Oy;
- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ – **вершины** эллипса;
- отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ – **большая** и **малая ось** эллипса соответственно;
- a и b – **большая** и **малая полуось** эллипса соответственно.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется **эксцентриситетом** $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Так как $a>c$, то $0\le\varepsilon<1$.

если $\varepsilon\to 0$, то $\frac{b}{a}\to 1\Rightarrow b\approx a$ и эллипс превращается в окружность;

если $\varepsilon\to 1$, то $\frac{b}{a}\to 0\Rightarrow b\to 0$ и эллипс «сплющивается» к Ox.

Если $a<b$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задает эллипс, большая полуось которого равна b и лежит на оси Oy, а малая ось равна a и лежит на оси Ox. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где $a^2=b^2-c^2$ (рис. 4.6*б*).

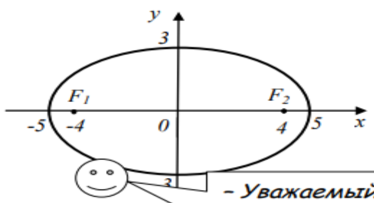


а *б*

Рис. 4.6

Если центр эллипса находится в точке $C(x_0;y_0)$, а оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{4.13}$$



– Уважаемый, студент, вы можете дать определение эллипса?
– Да! Эллипс – это круг, вписанный в квадрат со сторонами 3 на 4.

Рис. 4.7

<u>*Пример 4.4.*</u> Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Построить эллипс.

<u>*Решение*</u>. В соответствии с данным уравнением $a^2=25$, $b^2=9$, следовательно, $a=5$, $b=3$.

Отсюда $c^2=a^2-b^2=25-16=9$, $c=4$, $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Эллипс изображен на рис. 4.7.

3. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a < 2c$, то есть $a < c$.

Если выбрать систему координат так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.8), то из равенства $|MF_1 - MF_2| = 2a$, где $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы, можно вывести **каноническое уравнение гиперболы**

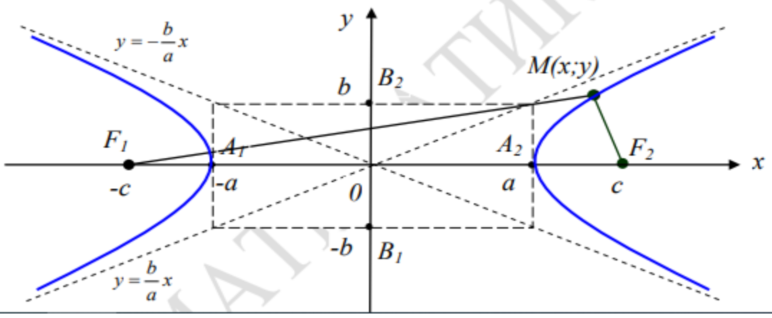
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,} \quad (b^2=c^2-a^2). \qquad (4.14)$$

Основными элементами гиперболы являются:

- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** гиперболы;
- оси симметрии Ox и Oy;

- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – **вершины** гиперболы;
- отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительная** ось гиперболы;
- отрезок $B_1B_2 = 2b$ – **мнимая ось** гиперболы;
- a и b – **действительная** и **мнимая полуоси** гиперболы соответственно;
- прямоугольник, образованный прямыми $x=a$; $x=-a$; $y=b$; $y=-b$ – **основной прямоугольник** гиперболы;
- две прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ – **асимптоты** гиперболы.

Замечание. При удалении от начала координат гипербола сколь угодно близко подходит к своим асимптотами, не пересекая их. Построение гиперболы удобно начинать с построения основного прямоугольника и его диагоналей, которые являются асимптотами гиперболы.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом гиперболы** и характеризует ее форму. Если $a = b$, то гиперболу называют **равносторонней**.

Если центр гиперболы находиться в точке $C(x_0; y_0)$, а оси параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b). \tag{4.15}$$

__Пример 4.5.__ Определить вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$. Построить гиперболу.

__Решение.__ Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$9x^2 - 4y^2 = 36$, разделим обе части уравнения на 36. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Тогда $a^2 = 4$, $b^2 = 9$, следовательно, $a = 2$, $b = 3$.

Вершины гиперболы $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$.

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$, $c = \sqrt{13}$, $F_1(-\sqrt{13}; 0)$, $F_2(\sqrt{13}; 0)$ – фокусы.

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{2}x$ (рис. 4.9).

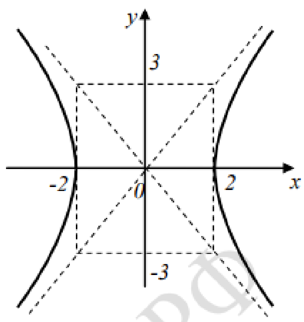


Рис. 4.9

4. Парабола

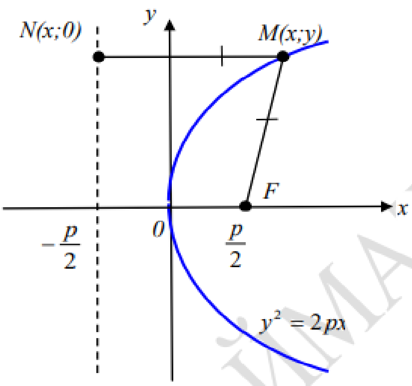


Рис. 4.10

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (**фокуса**) и данной прямой (**директрисы**), расположенных в той же плоскости (рис. 4.10). Расстояние от фокуса до директрисы обозначают p и называют **параметром** параболы. Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокус, перпендикулярно директрисе по направлению от директрисы к фокусу и начало координат посредине между фокусом и директрисой, то уравнение директрисы будет $x = -\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Тогда из равенства $|MF| = |MN|$, где $M(x; y)$ – произвольная точка параболы, можно вывести **каноническое уравнение параболы**

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{4.16}$$

Основными элементами параболы являются:

- ось Ox – **ось симметрии** параболы;
- точка $O(0;0)$– **вершина** параболы;

- прямая $x = -\frac{p}{2}$ – **директриса** параболы;
- точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – **фокус** параболы.

Возможны другие расположения параболы на плоскости (рис. 4.11), которые задаются уравнениями:

а) $y^2 = -2px$; б) $x^2 = 2py$; в) $x^2 = -2py$.

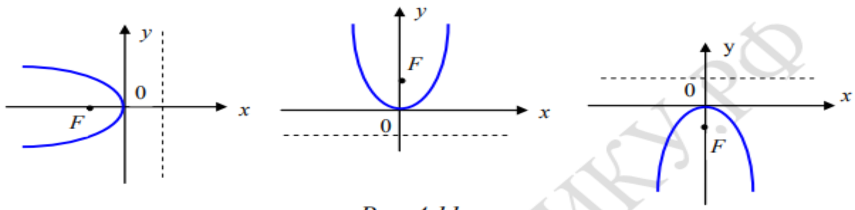


Рис. 4.11

Если вершина параболы лежит в точке $C(x_0;y_0)$, то канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0); \qquad &(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0), \\ &(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0); \qquad &(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0). \end{aligned} \tag{4.17}$$

<u>*Пример 4.6.*</u> Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2;8)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение.

<u>*Решение*</u>. Так как парабола симметрична относительно оси Oy и имеет вершину в начале координат, то ее уравнение $x^2 = 2py$. Точка $A(2;8)$ лежит на параболе, подставим ее координаты в уравнение параболы: $2^2 = 2p \cdot 8$. Отсюда $p = \frac{1}{4}$. Тогда уравнение гиперболы $x^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} y$ или $x^2 = \frac{1}{2} y$.