Лекция 4.

Системы линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащих m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$a_{11},\ a_{12},\ldots,a_{mn}$ - коэффициенты $\qquad b_1, b_2,\ldots,b_m$ - свободны члены

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица системы $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} & b_m \end{pmatrix}$ -расширенная матрица системы

Определение. Решением системы называется n значений неизвестных, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Определение. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной,* если она не имеет ни одного решения.

Определение Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. И *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

В случае неопределенной системы каждое ее решение называется *частным решением* системы.
Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.
Решить систему, значит выяснить, совместна она или несовместна. Если совместна, найти ее общее решение.

Теорема Кронекера- Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна т. и т.т.к. ранг расширенной матрицы равен рангу основной системы. $r(A) = r(\overline{A})$

1) Если $r(A) < r(\overline{A})$, то система несовместна

2) Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (числу неизвестных), то система совместна и определенная, т.е. имеет единственное решение

3) Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система совместная и неопределенная, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Для определения ранга системы и для нахождения ее решения применяют метод Гаусса

Метод Гаусса

Метод Гаусса- метод последовательно исключения переменных- заключается в том, что с помощью элементарных последовательных преобразований над строками расширенной матрицы системы, ее приводят к ступенчатому виду из которой последовательно начиная с последних (по номеру) переменных находятся все остальные переменные.

Переход исходной системы к ступенчатой называется прямым ходом метода Гаусса, а нахождение переменных из системы обратным ходом.

Пример 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right), \quad \left| \begin{array}{l} \textit{от первой строки отнимем вторую, умноженную на } 2 \\ \textit{от третьей строки отнимем вторую, умноженную на } 3 \\ \textit{от четвертой строки отнимем вторую, умноженную на } 7 \\ \textit{первую строку поменяем местами с первой} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2 < n \qquad n = 4$ *Совместная неопределенная*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1 \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3 \end{cases}$$

$(\ 5x_4 - 8x_3 - 1;\ -13x_3 + 5x_4 - 3;\ x_3;\ x_4)$ *общее решение*

частное решение $x_3 = 0\ x_4 = 1 \quad x_1 = 4\ x_2 = 2$

Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна. $r(A) = r(\overline{A})$ Она имеет нулевое тривиальное решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$

Теорема 1. Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения Необходимо и Достаточно, чтобы $r(A) < n$

Теорема 2. Для того чтобы система n однородных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения Необходимо и Достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Обозначим решения системы (2) $x_1 = k_1 ...... x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, ..., k_n)$

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1) если строка $e_1 = (k_1, k_2, ..., k_n)$ – решение системы (2), то и $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, ..., \lambda k_n)$ – также решение этой системы.

2) Если $e_1 = (k_1, k_2, ..., k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, ..., l_n)$ решения системы (2), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация также решение системы.

$e_1 c_1 + e_2 c_2$

Следовательно. Всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.

Определение. Строки матрицы $e_1, e_2, ..., e_m$ **называются линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулю.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0 \quad (3)$$

Линейность строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если линейная комбинация (3) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_i = 0$ т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, ..., e_m$ называются **линейно независимыми.**

Определение. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, ..., e_m$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (2) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, ..., e_m$

Теорема. Если r– ранг матрицы коэффициентов при неизвестных системы (2) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений (2) состоит из n-r решений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$r = 2 \qquad n = 5 \qquad 5 - 2 = 3$

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \qquad x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_1 = \frac{19}{8} \quad x_2 = \frac{7}{8}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0 \quad x_1 = \frac{3}{8} \quad x_2 = -\frac{25}{8}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$