Комплексные числа
1. Основные понятия

Определение. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z = x + iy$, где число x называется *вещественной частью* числа z, а число y называется *мнимой частью* числа z. $i = \sqrt{-1}$ $\quad i^2 = -1$

Обозначения: $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел,

x = Re z, y = Im z.

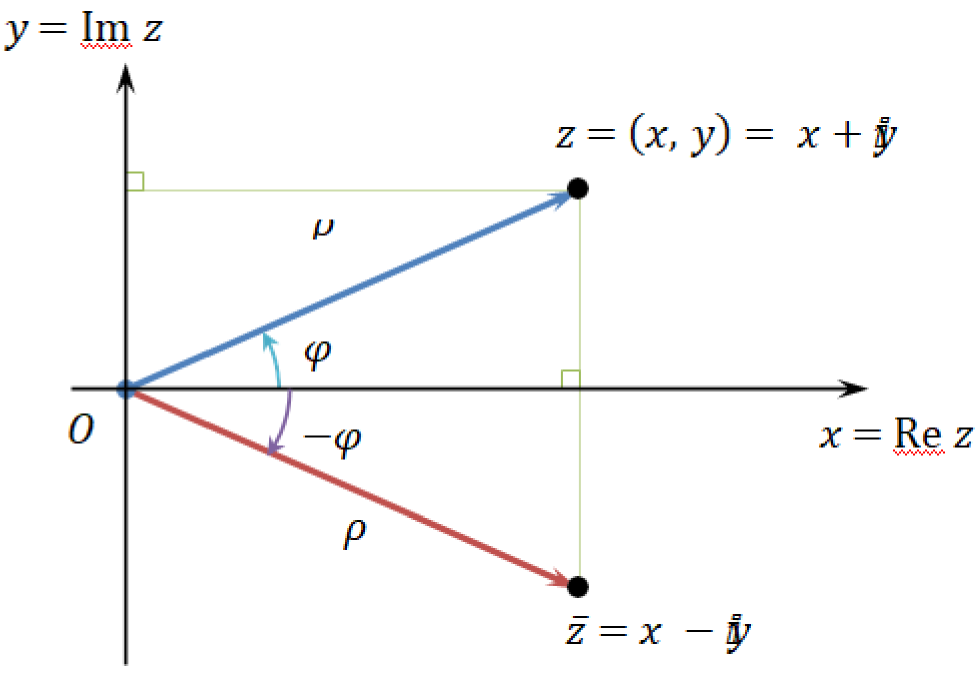
Если y=0, то z=x, т.е. действительные числа являются частью комплексных чисел.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если у них совпадают соответственно вещественные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array}$$

Определение. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*, если они отличаются лишь знаком мнимой части.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел



Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости или радиусом-вектором этой точки (вектором, начало которого находится в точке (0;0), а конец в точке $M(x, y)$).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, т.к. на ней лежат действительные числа z=x+0i. Ось ординат называется мнимой осью, т.к. на ней лежат чисто мнимые числа z=0+iy

Радиус вектор $\rho = \overline{OM} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi -$ аргумент числа z $(\varphi = \operatorname{Arg} z)$ – это величина угла между радиусом-вектором точки z и положительным направлением оси Ox, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведется по часовой стрелке.

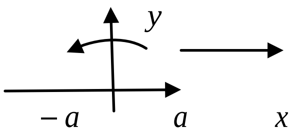
$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

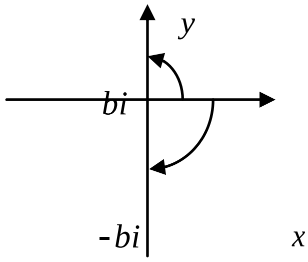
$\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями: $-\pi < \arg z \le \pi$,

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, \ y \ge 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, \ y < 0. \end{cases}$$

Значения аргумента действительных и чисто мнимых чисел лучше находить из геометрической интерпретации чисел.

$$z = x, \quad \arg x = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0; \\ \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$





$$z = iy, \quad \arg iy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y > 0; \\ \dfrac{\pi}{-2}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

3. Формы записи комплексных чисел

Алгебраическая форма комплексного числа $(x; y)$ имеет вид

$$z = x + iy, \quad (1)$$

Модуль и аргумент комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\rho = \overline{OM} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = \rho\cos\varphi \;\; y = \rho\sin\varphi$

$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi$

Тригонометрическая форма комплексного числа $(x; y)$ имеет вид

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2)$$

формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Показательная форма комплексного числа $(x; y)$ имеет вид

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (3)$$

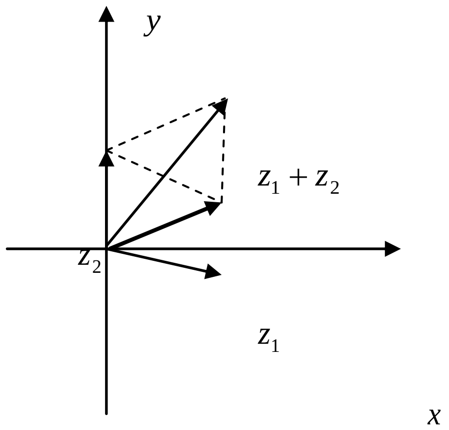
4. Действия над комплексными числами

Определение. *Суммой* комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Определение. *Разностью* комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется такое комплексное число z, которое при сложении с числом z_2 даёт число z_1: $z + z_2 = z_1$.

Найти сумму, разность комплексных чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2i$, изобразить на плоскости данные числа и результаты операций, пользуясь векторным представлением.

$z_1 + z_2 = (3 + i) + 2i = 3 + 3i$. Изобразим все числа на координатной плоскости.



Геометрические операции сложения (вычитания) выполняются по правилу сложения (вычитания) векторов.

Вектор, соответствующий числу $z_1 + z_2 = 3 + 3i$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах, соответствующих числам $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2i$.

Найдем разность $z_1 - z_2 = (3 + i) - 2i = 3 - i$ и изобразим число $z_1 - z_2 = 3 - i$ на плоскости. (Соответствующий вектор параллелен второй диагонали параллелограмма).

Определение.
Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 y_2 - y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 y)$$

Найдем произведение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Формула Муавра $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$

Деление определяется как действие , обратное умножению**.**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}$$

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Корнем n-ой степени комплексного числа z называется такое число w, что $w^n=z$. Если $z\neq 0$, то для корня n-ой степени существуют n различных значений.

Запишем $z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Для $w^n=z$ получим:

$$z=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Из равенства двух комплексных чисел получим:

$$r^n=R,\quad r=\sqrt[n]{R}$$

$$n\theta=\varphi+2\pi k \qquad\qquad \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}\ (k\in Z)$$

Значения при $k>n$ отличаются от первых n **значений** на 2π

Поэтому, должно соблюдаться следующее:

$$\theta_k=\frac{\varphi+2\pi k}{n}\quad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

Формула корни n-ой степени комплексного числа

Если $z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$ здесь ($k = 0, 1, ..., (n - 1)$)