АНАЛИЗ И ПОДДЕРЖКА РЕШЕНИЙ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Задачи принятия решений пронизывают и жизнь каждого человека, и существование сообществ людей. Мы решаем, в какой вуз поступить учиться, куда пойти работать, на ком жениться или же за кого выйти замуж, какую машину (квартиру, дачу) купить, в какую школу отдать учиться детей. Коллективные решения принимаются на референдумах, парламентами, собраниями жильцов дома, в различных комитетах и комиссиях.

В тех случаях, когда цена ошибки очень высока, мы часто пытаемся найти подходящее решение «наощупь», сравнивая различные допустимые варианты решения. Вместе с тем, за последние 150 лет интенсивно разрабатывается наука об анализе и поддержке решений. К настоящему времени в этой области уже создано значительное число эффективных методов.

Для того чтобы восполнить возникший за последние 10–15 лет пробел в отечественной литературе, издательство Физматлит и Высшая школа экономики решили начать издание серии «Анализ и поддержка решений», в которой будут представлены как изданные ранее и ставшие классическими в этой области книги, так и новые монографии и учебники. Тематика, охватываемая серией, включает в себя проблемы индивидуального и коллективного выбора (в том числе путем голосования), методы анализа многокритериальных решений, проблемы построения аналитических систем поддержки принятия решений, а также приложения теории к анализу политических, социально-экономических, технических и иных решений, и многое другое.

Редакционный совет серии состоит из крупнейших, получивших мировое признание российских и зарубежных специалистов в области анализа и поддержки решений, и поэтому, я уверен, издаваемые в серии книги предоставят читателю возможность познакомиться с современным уровнем развития соответствующих разделов науки.

Научный руководитель
Государственного университета –
Высшей школы экономики

Е.Ясин

Е.Г.Ясин

АНАЛИЗ И ПОДДЕРЖКА РЕШЕНИЙ

АНАЛИЗ И ПОДДЕРЖКА РЕШЕНИЙ

В.В. Подиновский

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области экономики, менеджмента, логистики и бизнес-информатики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Бизнес-информатика» (080700), «Логистика и управление цепями поставок» (080506), «Менеджмент» (080500), «Экономика» (080100)

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 519.8
ББК 22.18
П 44

Подиновский В. В. **Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 64 с. — ISBN 978-5-9221-0743-3.

Учебное пособие, посвященное новому разделу математической теории принятия решений при многих критериях. Рассматриваются основные идеи и дается представление о методах выбора оптимальных вариантов, оцениваемых по нескольким критериям с использованием информации об их относительной важности. Изложение опирается на строгие определения понятий «один критерий важнее другого» и «один критерий важнее другого во столько-то раз».

Рекомендовано УМО по образованию в области экономики, менеджмента, логистики и бизнес-информатики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Бизнес-информатика» (080700), «Логистика и управление цепями поставок» (080506), «Менеджмент» (080500), «Экономика» (080100).

Табл. 5. Ил. 4. Библиогр. 54 назв.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор Поспелов И.Г., доктор эконом. наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ Рофе А.И.

Учебное издание

ПОДИНОВСКИЙ Владислав Владимирович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *А.А. Пярнпуу*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 06.03.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 751

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-0743-3

Оглавление

Порядок больше всего
помогает ясному усвоению.

Цицерон

«Наслушавшись таких насмешек над религией, брат Юнипер и пришел к убеждению, что пробил час на земле доказать — с цифрами в руках доказать — ту веру, которая так ярко и волнующе жила в нем. Когда повальная болезнь напала на милую его сердцу деревню Пуэрто и унесла множество крестьян, он тайком составил таблицу характеристик пятнадцати жертв и пятнадцати выживших — статистику их ценности sub specie aeternitatis[1]. Каждая душа оценивалась по десятибалльной шкале в отношении своей доброты, своего религиозного рвения и своего значения для семейной ячейки. Вот отрывок этой дерзновенной таблицы:

	Доброта	Благочестие	Полезность
Альфонсо Г.	4	4	10
Нина	2	5	10
Мануэль Б.	10	10	0
Альфонсо В.	−8	−10	10
Вера Н.	0	10	10

Задача оказалась труднее, чем он предполагал. Почти каждая душа в стесненной пограничной общине оказалась экономически незаменимой, и третий столбец практически ничего не давал. Исследователь был вынужден прибегнуть к отрицательным числам, столкнувшись с характером Альфонсо В., который не был, как Вера Н., просто плохим — он пропагандировал плохое и не только избегал церкви, но и других научал ее избегать. Вера Н. действительно была плохой, но она была примерной прихожанкой и опорой переполненной хижины. Из этих неутешительных данных брат Юнипер вывел показатель для каждого крестьянина. Он подсчитал сумму для жертв, сравнил с суммой для выживших и нашел, что покойные в пять раз больше заслуживали спасения. Все выглядело так, как будто мор был направлен именно против самых ценных людей в деревне Пуэрто. В этот день брат Юнипер бродил по берегу Тихого океана. Он порвал свои выкладки и бросил в волны; он час смотрел на громадные жемчужные облака, вечно висевшие над этим морем, и зрелище красоты родило в нем смирение, которого он не отдал на испытание разуму. Вера расходится с фактами больше, чем принято думать.»

Уайдлер Торнтон. «Мост короля Людовика Святого»

[1] С точки зрения вечности (*лат.*).

Моей жене Наталии
и дочери Ольге
посвящается

Предисловие

Пишут для того, чтобы рассказать, а не для того, чтобы доказать.

Квинтилиан

В настоящее время в связи с растущими потребностями практики и быстро расширяющимися возможностями информационно-вычислительной техники активно развивается междисциплинарное научное направление, направленное на анализ и поддержку принятия решений. Одним из его «секторов», имеющих большое практическое значение, является математическая теория принятия решений при многих критериях.

Теория важности критериев — новый раздел этой теории, созданный и активно развиваемый в России. Однако доступно (не для специалистов) написанных книг и, тем более, учебной литературы по этой теории до настоящего времени не было. Этот пробел призвано частично восполнить настоящее учебное пособие, цель которого — дать представление о базовых понятиях теории важности критериев и основанных на них методах анализа многокритериальных задач принятия решений.

Для расширения круга потенциальных читателей пособие написано на элементарном уровне, живым языком и не содержит формул (за исключение нескольких совсем простых), но в нем широко использован ряд математических понятий (смысл которых объясняется) и соответствующие обозначения. Поэтому, как и всякий текст с математическим содержанием, оно требует вдумчивого чтения[2].

Автор признателен Ф. Т. Алескерову и П. Ю. Чеботареву, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний и предложений по улучшению изложения материала[3], рецензентам И. Г. Поспелову и А. И. Рофé, рекомендовавших пособие к изданию.

---

[2] Сноски в тексте будут двух видов. Сноски с обычными номерами (как эта) несут дополнительную к основному тексту информацию. Сноски с номерами в кружочках (① или ❶, и т. д.) ориентированы на более подготовленного читателя и набраны более мелким шрифтом.

[3] Просьба к читателям присылать свои замечания и предложения по электронной почте в адрес: `podinovski@nccom.ru`

ГЛАВА 1

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Какого мнения о сем святая церковь?»
— «Святая церковь о сем умалчивает».

Александр Куприн. «Поединок»

§ 1.1. Общая характеристика многокритериальных задач

Ведущий принцип не может формулироваться в виде требования одновременной максимизации двух или более функций. (Одна функция, вообще говоря, не будет иметь максимум там, где его имеет другая). Это ничем не лучше, чем сказать, например, что фирма должна получить максимальные цены при максимальном обороте или же максимальный доход при минимальных издержках. Если подразумевается некоторый порядок важности этих принципов или некоторое их взвешенное среднее, то это следует оговаривать явным образом.

Джон фон Нейман, Оскар Моргенштерн. «Теория игр и экономическое поведение»

1. Проблемы, связанные с отысканием наилучших решений для достижения поставленных целей при ограниченных возможностях (ресурсах), вставали перед людьми всегда. Концепция принятия решения в качестве первичного элемента деятельности рассматривает решение как сознательный выбор одного из ряда вариантов (альтернатив, планов, стратегий, ...). Этот выбор производит *лицо, принимающее решение* (общепринятым становится сокращение *ЛПР*), которое стремится к достижению

определенных целей[4]. В его роли выступает человек (или группа людей), обладающий правами принятия решения, возможностями его реализации и несущий ответственность за его последствия (например, руководитель организации, совет директоров, ведущий конструктор, военачальник, главный тренер, ., наконец, гражданин, семья — все зависит от конкретной ситуации принятия решения).

Еще совсем недавно считалось, что выработка решения является искусством, основанным на опыте, знаниях и интуиции. Однако в современных условиях только этого недостаточно для выработки даже просто приемлемых решений в сложных, масштабных, ответственных практических задачах. Поэтому стали интенсивно развиваться научные методы анализа решений, появились новые прикладные научные дисциплины: исследование операций, теория принятия решений, системный анализ, в рамках которых созданы специальные информационно-аналитические технологии, опирающиеся на новые математические методы.

2. Вообще всякое применение математических методов предполагает построение математической модели объекта анализа. При построении модели ситуации принятия решения дается формализованное описание доступных вариантов действий и возможных последствий их реализации. При этом особое внимание уделяется выявлению и описанию предпочтений ЛПР. Его цели чаще всего моделируются стремлением к увеличению или же уменьшению специальных функций, называемых *критериями* (а также показателями эффективности или качества, целевыми функциями). В относительно простых случаях удается обойтись одним критерием. И тогда наилучшим, или оптимальным вариантом считается тот, который максимизирует или же минимизирует этот критерий. В качестве примера укажем на задачу планирования перевозок, известную под названием «транспортная задача». Состоит она в следующем. Имеются склады, на каждом из которых хранится определенное количество (запас) некоторого однородного материала (песка, угля, зерна и т. п.). Имеются также заказчики, для каждого из которых известен его запрос (потребность, заявка) на определенное количество этого материала. Предполагается, что суммарные запасы на складах равны сумме запросов потребителей. Под планом перевозок понимается указание, сколько материала следует доставить (пере-

---

[4] В русском языке слово «лицо» среднего рода (оно), что оказалось весьма удобным. В англоязычной литературе, например, ссылаясь на ЛПР (*DM — decision maker*) — неопределенного человека, — сейчас принято указывать он/она или же она/он.

везти) с каждого склада тому или иному потребителю, причем запросы всех потребителей должны быть удовлетворены (при этом запасы всех складов окажутся исчерпанными). Известны стоимости перевозки единицы материала с каждого склада каждому потребителю. Требуется составить такой план, чтобы суммарная стоимость перевозок (это и есть критерий) была минимальной.

Однако в более сложных случаях обойтись одним критерием не удается, и тогда задача называется *многокритериальной.* Например, в задаче выбора места для нового предприятия необходимо учитывать экономические, социальные и иные последствия, каждое из которых может характеризоваться одним или же несколькими критериями. Даже большинство бытовых задач многокритериальны. Так, при выборе нового платья, помимо его цены, учитываются модность покроя; качество материала; то, как оно «сидит», Принципиальная сложность многокритериальных задач состоит в том, что обычно не существует варианта, который был бы наилучшим сразу по всем критериям: если по одному из критериев вариант очень хорош, то по другому, как правило, он будет далеко не лучший. Так, если в транспортной задаче учитывать не только стоимость, но и время перевозок, то более быстрая доставка (скажем, авиатранспортом) весьма дорога, а более дешевая (например, водным транспортом) занимает много времени. И поэтому выбор наилучшего варианта связан с необходимостью разрешения центральной в теории принятия решений при многих критериях проблемы замещений (компенсации), т. е. проблемы сопоставления по предпочтению (с точки зрения ЛПР!) потерь по одним критериям с выигрышами по другим[5]. Она решается по-разному в рамках различных методов многокритериальной оптимизации.

3. Многообразие многокритериальных задач породило огромное число методов их анализа. Одним из основных понятий, используемых в подавляющем большинстве таких методов, является понятие относительной, или сравнительной *важности* (весомости, значимости) критериев. Однако никаких строгих (формальных) определений этого понятия разработчики методов не

---

[5] Например, в упомянутой транспортной задаче с двумя критериями вопрос о замещении может быть поставлен, скажем, следующим образом. Пусть для некоторого плана суммарная стоимость перевозок составляет 100 млн. руб., а время перевозок — 15 суток. Существует другой план, который позволяет осуществить перевозки за 10 суток. Сколько ЛПР согласен «доплатить» за переход от первого плана ко второму?

давали, ограничиваясь интуитивными представлениями о нем. Вообще проблема строгого определения понятия «важность» является одной из самых «старых» проблем в исследовании операций, которая длительное время не поддавалась усилиям исследователей. В некоторых научных работах даже высказывалось мнение о том, что в принципе невозможно найти математически обоснованное, психологически приемлемое и практически полезное определение этого понятия. И, тем не менее, многолетние исследования «проблемы важности» увенчались успехом. Вначале были найдены определения понятий «один критерий важнее другого» и «критерии равноважны» (т. е. имеют одинаковую важность) и развита теория «качественной важности». А затем на основе этой теории удалось предложить определение понятия «один критерий важнее другого во столько-то раз» и разработать теорию «количественной важности». Таким образом, можно сказать, что были созданы основы теории важности критериев. В настоящее время эта теория продолжает интенсивно «достраиваться».

Далее будут изложены основные понятия и идеи этой теории и на простом примере проиллюстрирована «работа» ее методов.

§ 1.2. Математическое описание проблемной ситуации

> но там же математика! — с неподдельным ужасом воскликнул студент. Меня она погружает в неизбывную тоску самим фактом своего существования
>
> *Александр Бушков. «Меж трех времен»*

1. Математическая модель ситуации принятия решения при многих критериях включает следующие три элемента: множество вариантов V, векторный критерий K и отношения предпочтения и безразличия (разумеется, ЛПР), которые будут обозначаться соответственно буквами P и I с нижними или верхними индексами[6]. Разберем содержание модели.

Каждый вариант v из множества всех вариантов V характеризуется значениями критериев K_i, $i = 1, \quad , m$, которые называются *частными* и, будучи записаны по порядку, составляют *векторный критерий* $K = (K_1, . \quad , K_m)$. Под *критерием* K_i по-

---

[6] Обозначения P и I обязаны первым буквам английских слов *preference* (предпочтение) и *indifference* (безразличие). Об индексах речь пойдет позднее.

нимается функция, определенная на V и принимающая значения из множества X_i, называемого *шкалой*[①], а также множеством оценок, градаций этого критерия. В общем случае шкала может иметь произвольную природу: оценки могут быть числовыми (скажем, годовая прибыль фирмы в млн. руб.), словесными (например, «очень высокий уровень обслуживания», «высокий уровень обслуживания»,), символьными (в частности, для характеристики отелей используют оценки *****, ****, ..) и т. д. Существенно лишь то, что эти оценки упорядочены по предпочтению. Но для простоты и единообразия изложения далее будем полагать, что шкалы всех критериев — числовые, причем бо́льшие их значения предпочтительнее меньших[7]

Таким образом, каждый вариант v характеризуется m оценками по критериям (т. е. значениями этих критериев) $K_1(v), \ldots$ $, K_m(v)$. Эти числа составляют вектор $(K_1(v), \ldots, K_m(v))$, который называется *векторной оценкой* варианта. Для векторной оценки будем использовать двоякое обозначение: либо $K(v)$, либо $x(v)$ — как будет удобнее «по месту»[8], так что можно записать равенства

$$K(v) = \big(K_1(v), \ldots, K_m(v)\big) = x(v) = \big(x_1(v), \ldots, x_m(v)\big).$$

Сравнение вариантов по предпочтению сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (как реальных, т. е. соответствующих тем или иным вариантам, так и гипотетических) обозначим через X.

2. Для иллюстрации вводимых теоретических понятий и конструкций рассмотрим условный пример, к которому будем постоянно обращаться и дальше. Пусть требуется выбрать самого лучшего по успеваемости студента из семи претендентов, учитывая их оценки по четырем учебным дисциплинам (курсам, предметам). О целях выбора и о том, кто здесь ЛПР, поговорим позже. Данные об успеваемости студентов приведены в табл. 1, причем используемые в российских вузах оценки: *отлично*, *хорошо*,

---

[①] Этот термин имеет здесь обычно вкладываемый в него смысл, который отличается от смысла принятого в математической теории измерений определения шкалы.

[7] Формально от критерия K_i, который желательно минимизировать, легко перейти к критерию, который желательно максимизировать. например, заменой знака, т. е. вместо K_i взять $-K_i$. Если же критерий принимает лишь положительные значения, его можно также заменить на $1/K_i$.

[8] Вспомните, что и в математическом анализе для функции $y = f(x)$ часто пишут $y(x)$.

Таблица 1

Оценки успеваемости студентов

Студент (№ по списку)	Предметы			
	А	*Б*	*В*	*Г*
1	*уд*	*отл*	*отл*	*хор*
2	*хор*	*хор*	*хор*	*отл*
3	*отл*	*хор*	*уд*	*уд*
4	*уд*	*отл*	*уд*	*отл*
5	*хор*	*неуд*	*хор*	*отл*
6	*уд*	*отл*	*уд*	*отл*
7	*отл*	*уд*	*хор*	*уд*

удовлетворительно, *неудовлетворительно* записаны в общепринятом сокращенном виде[9].

Здесь в роли вариантов выступают студенты: v^1 — студент 1, и т. д., так что $V = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7\}$. Критериев всего четыре ($m = 4$): это — успеваемость по соответствующим предметам (K_1 — по предмету $А$, и т. д.). Исходная шкала у всех критериев общая: {*отл*, *хор*, *уд*, *неуд*}. Заменяя эти словесные оценки общепринятыми цифрами, получаем числовую шкалу $\{2, 3, 4, 5\}$[10]. Этой шкалой и будем пользоваться в дальнейшем[11]. Полученные данные приведены в табл. 2.

Оценки каждого студента по четырем предметам, записанные в порядке перечисления этих предметов (согласно порядку нумерации критериев), образуют его векторную оценку. Напри-

---

[9] Четырехбалльная система оценок — отлично, хорошо, посредственно и неудовлетворительно — в вузах страны введена с 1 сентября 1938 г. Постановлением ЦК ВКП(б) и СНК СССР №458 от 10.04.1938 г. Замена применявшейся в школе словесной системы оценки успеваемости и поведения учащихся — отлично, хорошо, посредственно, плохо, очень плохо — цифровой пятибалльной системой: 5, 4, 3, 2, 1 произошла 11 января 1944 г. по Постановлению СНК РСФСР от 10.01.1944 г.

[10] По своему происхождению эта шкала является «усеченной» цифровой шкалой школьных оценок $\{5, 4, 3, 2, 1\}$, что и объясняет отсутствие в ней числа 1.

[11] Можно дать и совсем *иные интерпретации* задачи с *той же* таблицей исходных данных. Например: на конкурс представлено семь проектов некоторой новой системы, качество и эффективность работы которой оценивается при помощи четырех критериев (скажем, надежность работы, воздействие на окружающую среду, и т. д.); требуется выбрать лучший проект.

Таблица 2

Значения критериев

Варианты	Критерии			
	K_1	K_2	K_3	K_4
v^1	3	5	5	4
v^2	4	4	4	5
v^3	5	4	3	3
v^4	3	5	3	5
v^5	4	2	4	5
v^6	3	5	3	5
v^7	5	3	4	3

мер, векторная оценка $x(v^1)$ [или, иначе, $K(v^1)$] первого студента v^1 есть $(3,5,5,4)$ [см. первую строку столбца «Критерии» табл. 2]. Таким образом, всего имеется шесть разных векторных оценок (у четвертого и шестого студентов векторные оценки совпадают). Эти шесть векторных оценок называют *реальными*, или *достижимыми*. Наряду с ними полезно, как выяснится далее, рассматривать и *гипотетические векторные оценки* — произвольные упорядоченные наборы четырех чисел из принятой шкалы, например, $(5,4,3,2)$, $(5,5,5,5)$ и $(2,2,2,2)$. Число всех векторных оценок (и реальных, и гипотетических) равно 256 $(= 4 \times 4 \times 4 \times 4)$. Совокупность всех 256 векторных оценок есть множество X.

Сравнение студентов осуществляется только на основе их векторных оценок. Поэтому, например, четвертый и шестой студенты, имеющие совпадающие (равные) векторные оценки, должны считаться одинаковыми по успеваемости. Этот факт записывается следующим образом: $v^4 I_0 v^6$ (или, что равносильно, $v^6 I_0 v^4$). Здесь через I_0 обозначено отношение безразличия, определенное на множестве вариантов (студентов) V Название объясняется тем, что если нужно было бы выбрать лучшего по успеваемости среди этих двух студентов, то можно было бы взять любого из них (безразлично, какого именно).

3. По существу дела очевидно, что если один из студентов имеет по каждому предмету оценку не ниже, чем другой, и при этом хотя бы по одному предмету у него оценка выше, то следует признать, что и успеваемость его в целом лучше. Так, сравнивая векторную оценку $(4,4,4,5)$ второго студента с векторной оценкой $(4,2,4,5)$ пятого студента, сразу видим, что второй студент по успеваемости лучше пятого. Представим в формализованном виде рассмотренные соображения.

Через P^0 будем обозначать отношение предпочтения между векторными оценками[12] и писать yP^0z, если векторная оценка y предпочтительнее в рассмотренном смысле, чем векторная оценка z. Запись yP^0z читается так: y предпочтительнее (по отношению P^0), чем z. Учитывая сказанное выше, видим, что верна запись: $(4,4,4,5)P^0(4,2,4,5)$, т.е. векторная оценка $(4,4,4,5)$ предпочтительнее, чем $(4,2,4,5)$. Однако две любые другие векторные оценки не связаны рассматриваемым отношением. Так, для векторных оценок $(3,5,5,4)$ и $(4,4,4,5)$ первого и второго студентов соответственно неверно ни $(3,5,5,4)P^0(4,4,4,5)$, ни $(4,4,4,5)P^0(3,5,5,4)$. Такие векторные оценки называют *несравнимыми* по отношению P^0 Отношение P^0 считается определенным на всем множестве векторных оценок X. Например, верно $(5,5,5,5)P^0(2,2,2,2)$, однако неверно $(5,4,3,5)P^0(4,4,4,4)$.

Отношение P^0 для векторных оценок порождает аналогичное по смыслу отношение P_0 на множестве вариантов (студентов). (Напомним, что верхним индексом снабжаются отношения на множестве векторных оценок, а нижним — отношения на множестве вариантов.) Так, поскольку справедливо $(4,4,4,5)P^0(4,2,4,5)$, то верно и $v^2P_0v^5$ Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что для любой другой пары студентов v', v'' неверно ни $v'P_0v''$, ни $v''P_0v'$

Понятно, что поскольку верно $v^2P_0v^5$, т.е. студент v^5 по успеваемости хуже студента v^2, то он не может претендовать на звание лучшего. Вообще, если для двух вариантов v', v'' справедливо $v'P_0v''$, то вариант v'', называемый *доминируемым*, не может считаться наилучшим. Вариант v^* такой, для которого не существует варианта v, лучшего по отношению P_0, т.е. для которого было бы верно vP_0v^*, называется *недоминируемым*, или *оптимальным по Эджворту–Парето*[13]. Множество всех таких вариантов, также называемым множеством *Эджворта–Парето*, будем обозначать V_0. Понятно, что только варианты из этого

---

[12] Обращаем внимание читателя на то, что отношение P^0 определяется для векторных оценок и имеет верхний индекс 0 в отличие от ранее введенного для вариантов отношения I_0, которое снабжено нижним индексом. И далее все вводимые отношения для векторных оценок будут иметь верхние индексы, а отношения для вариантов — нижние индексы. Смысл индекса 0 будет пояснен далее.

[13] По именам ученых (Edgeworth, 1845–1926; Pareto, 1848–1923), впервые использовавших приведенные понятия в экономико-математических исследованиях.

множества могут претендовать на роль наилучшего, или оптимального варианта[14]. В нашем примере множество V_0 состоит из шести студентов — всех, кроме пятого: $V_0 = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^6, v^7\}$. Причем среди этих шести студентов лишь два одинаковы по успеваемости (v^4 и v^6), а остальные четверо не сравнимы (по P_0) ни с ними, ни между собой.

4. Итак, предварительный анализ задачи позволил сузить исходное множество выбора — множество всех вариантов V — до множества V_0. Однако обычно, как и в нашей задаче, это множество содержит далеко не один вариант. Как же произвести осознанный выбор[15] одного наилучшего варианта из всех, составляющих множество V_0? Для этого необходимо привлечь дополнительную информацию о предпочтениях, разумеется, ЛПР (напомним, что это сокращение означает «лицо, принимающее решение»)[16].

Кто же может быть лицом, принимающим решение, в нашей задаче со студентами? Это зависит от конкретной ситуации. Например, если речь идет о выборе лучшего студента для работы в некоторой фирме, то в роли ЛПР может выступать представитель этой фирмы. Если же выбирается участник студенческой олимпиады, то ЛПР — это собрание студентов или же деканат.

Далее в качестве дополнительной информаций о предпочтениях будут выступать сведения об относительной важности критериев, а также об их шкалах. Информация будет обозначаться одной или несколькими буквами, которые будут использоваться также в качестве нижних и верхних индексов у символов отношений предпочтения и безразличия, вводимых на основе такой информации. Например, для информации Ω будем иметь отношение безразличия I_Ω для вариантов и отношение предпочтения P^Ω для векторных оценок.

---

[14] Оптимальный — от *лат.* optimus (наилучший). Поэтому неграмотно говорить «самый оптимальный», «наиболее оптимальный», «максимально оптимальный» и т. п.

[15] Случайным (но «справедливым») будет, например, выбор с «равными шансами» одного из вариантов, входящих во множество V_0. В нашем примере его можно осуществить при помощи бросания игральной кости, если заранее сопоставить каждому числу возможных выпавших очков 1, 2, 3, 4, 5, 6 одного из шести студентов, входящих в состав этого множества.

[16] Рассмотренные ранее отношения I_0, P^0 и P_0 потому и снабжены индексами 0, что введены без использования такой информации.

§ 1.3. Взвешенная сумма критериев

> Очевидность — дело сугубо субъективное. Очевидности всегда можно избежать, противопоставив ей тонкость ума . .
>
> *Рекс Стаут. «Умолкнувший оратор»*

1. «Зачем так усложнять проблему?» — может спросить искушенный читатель. — «Нужно просто сложить все критерии, а их относительную важность учесть при помощи соответствующих коэффициентов: чем больше такая взвешенная сумма, тем лучше, и оптимален тот вариант, для которого соответствующая сумма максимальна!». Формально указанный подход, который и в самом деле очень широко используется на практике, означает, что все исходные критерии K_i «сворачиваются» в один *обобщенный* (глобальный, интегральный, комплексный, составной, агрегированный, синтетический, ...) *критерий* Φ, причем относительная, или сравнительная, важность критериев учитывается специальными множителями, которые именуются коэффициентами важности. Чем значение такого критерия больше, тем лучше. Поэтому оптимальным считается тот вариант, для которого соответствующее значение критерия Φ окажется наибольшим[17] Для нашего примера обобщенный критерий будет выглядеть так:

$$\Phi = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \alpha_4 K_4.$$

Здесь коэффициенты важности α_1, α_2, α_3 и α_4 — это положительные числа, в сумме равные единице[18]. Их величина характеризует (относительную, или сравнительную) важность критериев: чем важнее критерий K_i (относительно остальных, или по сравнению с остальными), тем больше соответствующий ему коэффициент α_i, что обеспечивает бóльший «вклад» этого критерия в общую сумму, или, иными словами, большее его влияние на Φ и, тем самым, на конечный результат (выбор).

2. В нашей задаче со студентами критериев всего четыре. Предположим вначале, что все учебные предметы (а потому и все критерии) считаются одинаково важными[19]. Тогда нужно принять $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/4$, и взвешенная сумма Φ приобретает смысл среднего балла:

$$\Phi = 1/4(K_1 + K_2 + K_3 + K_4).$$

---

[17] Если таких вариантов окажется несколько, то любой из них «с равным правом» может претендовать на роль наилучшего.

[18] Иногда устанавливается другое значение для суммы (например, 100), но тогда Φ теряет смысл среднего взвешенного.

[19] Точнее, так считает ЛПР.

Например, для седьмого студента $\Phi(v^7) = 1/4(5+3+4+3) = 3(3/4)$.

Знакомый способ, не правда ли? Простой и понятный. И чем он плох? Разберем, однако, его внимательнее. Прежде всего, отметим, что конструирование среднего балла (как и в общем случае обобщенного критерия Ф с коэффициентами важности) предполагает выполнение арифметических операций со значениями отдельных критериев. А это фактически означает, что в нашем примере отметки играют роль количественных оценок успеваемости, подобно тому, например, как число предметов или результаты взвешивания оценивают их количество или вес (массу). Если, к примеру, в одном наборе имеется 5 предметов, а в другом — 2, то осмысленным является утверждение о том, что в первом наборе предметов в 2,5 раза больше, чем во втором. Точно так же, если первый предмет весит 5 кг, а второй — 2 кг, то можно утверждать, что первый тяжелее второго в 2,5 раза (причем результат не изменится, если от килограммов перейти к любым другим единицам, скажем, тоннам, фунтам или каратам)[20].

Рассмотрим теперь двух студентов, имеющих по некоторому предмету оценки 5 и 2 соответственно. Можно ли осмысленно утверждать, что знания первого в 2,5 раза лучше, чем второго? Пусть, далее, один студент по двум предметам имеет оценки 2 и 4, а другой — две 3. Средний балл у них (по этим двум предметам) одинаков — 3. Если считать студентов одинаковыми по успеваемости, то следует признать, что улучшение знаний при переходе от 2 к 3 в точности равно улучшению знаний при переходе от 3 и 4. Является ли это утверждение осмысленным? Таким образом, использование среднего балла на самом деле означает принятие допущения о том, что балльная шкала является количественной. Разумеется, это весьма сильное допущение, которое, как показывает вдумчивый анализ, далеко не всегда приемлемо.

Если же предметы имеют разную значимость, то относительную важность критериев нужно выразить при помощи коэффициентов α_i, т. е. фактически ее количественно измерить! Но возможно ли корректно это сделать, если само понятие «важность» формально не определено?

3. Заметим, наконец, что в нашей задаче все четыре критерия изначально имеют единую шкалу. Но в общем случае критерии могут иметь разные шкалы: один из них может оценивать, например, мощность (в киловаттах), другой — массу (в кг), третий —

[20] Со строгим определением понятия допустимого преобразования шкалы можно ознакомиться, например, по прекрасно написанной книге: *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М.: Физматлит, 1974.

дизайн (в баллах), и т. п. Поэтому для построения обобщенного критерия Ф все критерии надо вначале преобразовать — привести к сопоставимому (обычно безразмерному) виду, или, как говорят, *нормализовать*. Очень часто нормализацию проводят путем деления исходного (положительного) критерия K_i на его максимальное значение K_i^*. При этом фактически предполагается, что предпочтения равномерно возрастают (причем от нуля до K_i^*). Это — сильное допущение, и оно может приводить к явно неверным рекомендациям.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что Вы хотите купить автомашину, и Вам, выслушав все Ваши пожелания, продавец предложил три машины *А*, *Б* и *В*. Цена и все интересующие Вас основные их характеристики примерно одинаковы, кроме максимальной скорости (км/ч) и экономичности (км/л)[21]. Значения этих двух характеристик Вы записали в таблицу (см. табл. 3).

Таблица 3

Значения исходных критериев

Марка автомобиля	Максимальная скорость K_1	Экономичность K_2
А	240	10
Б	140	14
В	120	15

Испытывая затруднения с выбором, Вы вспомнили о существовании метода взвешенной суммы и решили им воспользоваться.

- Для начала рассчитали нормированные значения характеристик-критериев $\hat{K}_1 = K_1/K_1^*$, $\hat{K}_2 = K_2/K_2^*$, учтя, что $K_1^* = 240$, $K_2^* = 15$, и полученные значения занесли в новую таблицу (см. табл. 4).
- Затем, прикинув, Вы решили, что обе характеристики для Вас примерно одинаково значимы, и поэтому приняли значения коэффициентов важности $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.
- Наконец, рассчитали значения обобщенного критерия Ф — взвешенной суммы $Ф = 0{,}5\hat{K}_1 + 0{,}5\hat{K}_2$ — для всех машин и результаты записали в ту же таблицу.

[21] Обычно экономичность оценивается расходом бензина в литрах на 100 км пробега. Но такой критерий желательно минимизировать. Поэтому для простоты изложения в примере взят «обратный» критерий, который желательно максимизировать — пробег в км при расходе 1 л бензина.

- Поскольку самое большое значение обобщенного критерия Ф оказалось для машины A, то Вам стало ясно, что именно ее «рекомендует» приобрести использованный метод.

Таблица 4

Значения нормализованных и обобщенного критериев

Марка автомобиля	$\hat{K}_1 = K_1/K_1^*$	$\hat{K}_2 = K_2/K_2^*$	$\Phi = 0{,}5\hat{K}_1 + 0{,}5\hat{K}_2$
A	1	0,667	0,83
$Б$	0,583	0,933	0,76
$В$	0,5	1	0,75

Однако все-таки что-то во всей этой «истории» Вам не понравилось. Поразмыслив, Вы заметили, что иметь возможность развить скорость более 200 км/ч, конечно, заманчиво. Однако реально со скоростью более 140 км/ч Вам поехать если и придется, то лишь в каких-то исключительных случаях. Но вот за бензин приходится платить постоянно, да и цена на него растет и растет. А максимальная скорость 120 км/ч все-таки маловата. Приглядевшись, Вы заметили, что значение обобщенного критерия для машины A оказалось больше, чем для машины $Б$, именно за счет солидной прибавки в скорости, которая «перевесила» существенное ухудшение экономичности. А эта прибавки в скорости, хотя и велика, но для Вас привлекательности прибавляет немного. Напротив, прибавка в скорости всего на 20 км/ч (при отсчете от 120 км/ч), которая для Вас весьма ощутима, делает машину $Б$ (при небольшой разнице в экономичности) предпочтительнее машины $В$. Вам стало понятно, что результаты расчетов Вас не удовлетворили потому, что на самом деле Ваши предпочтения вдоль шкалы скорости растут явно неравномерно, и это не было учтено. Поэтому, взвесив все «за» и «против», Вы решили выбрать машину $Б$.

Таким образом, «простая нормализация», подобная рассмотренной в примере, таит в себе опасность получения неверных рекомендаций. Поэтому встает проблема подбора (и обоснования!) подходящих формул преобразований для осуществления нормализации исходных неоднородных критериев[②].

[②] Существует строгая теория аддитивных функций ценности, которые можно использовать в роли обобщенных критериев. (см. книгу: *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1981). Однако разработанные в ней методы построения таких функций требуют от ЛПР больших затрат времени

4. И, наконец, еще одно существенное замечание. При использовании обобщенных критериев приходится оперировать их значениями, которые обычно лишены содержательного («физического») смысла. Это затрудняет пояснения и обоснования рекомендаций, полученных в результате анализа задач принятия решений. Для иллюстрации предположим, что Вы — ЛПР, и при решении сложной и ответственной задачи со многими критериями консультант принес Вам результаты анализа, согласно которым из трех возможных вариантов решения он в качестве оптимального предлагает выбрать первый, так как значение обобщенного показателя для него равно, скажем, 1,36; для двух остальных вариантов его значения меньше — соответственно 1,24 и 1,21. На просьбу пояснить смысл этих чисел аналитик ответил, что они получены в результате расчетов и являются значениями взвешенной (при помощи коэффициентов важности) суммы нормированных значений критериев для этих вариантов. Насколько убедителен будет для Вас представленный довод в пользу первого варианта?

5. Итак, рассмотренный подход, представляющийся на первый взгляд простым и ясным, связан с целым рядом проблем (и здесь разобраны не все из них!), корректно разрешить которые далеко не всегда удается. Более того, зачастую о многих из них и не вспоминают (или даже вовсе не подозревают). Поэтому, мягко говоря, безоговорочно рекомендовать конструирование обобщенных критериев в качестве пути анализа многокритериальных задач принятия сложных и ответственных решений нельзя[22].

И, тем не менее, взвешенная сумма критериев очень часто используется при анализе прикладных многокритериальных задач. Почему? Известный ученый и замечательный преподаватель профессор Вентцель Елена Сергеевна так ответила на этот вопрос[23]: «Здесь мы встречаемся с очень типичным для подобных ситуаций приемом — переносом произвола из одной инстанции в другую. Простой выбор компромиссного решения на основе

и сил для ответов на весьма трудные для него вопросы. Например, ему предлагается указать такое значение c критерия K_i, при котором возрастание предпочтений при переходе от значения a этого критерия к значению c в точности такое же, как при переходе от c к b (при фиксированных значения всех остальных критериев). В силу сложности и трудоемкости этих методов, а также ограничительности допущений, обеспечивающих само ее существование, функцию ценности нельзя считать универсальным, эффективным и надежным инструментом анализа решений.

[22] А. А. Корбут как-то остроумно назвал процесс «свертывания» набора критериев в единый обобщенный критерий с использованием коэффициентов важности λ_i «*облямбдиванием*».

[23] *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пособие. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 2001.

мысленного сопоставления всех «за» и «против» каждого решения кажется слишком произвольным, недостаточно «научным». А вот маневрирование с формулой, включающей (пусть столь же произвольно назначенные) коэффициенты — совсем другое дело. Это уже «наука»! По существу же никакой науки тут нет, и нечего обманывать самих себя».

Выводы из главы 1

Материала для выводов будет достаточно. Его уже достаточно. Порой даже кажется, что слишком много.

Эрнест Хемингуэй. «По ком звонит колокол»

1. *Сложные* практические *задачи* принятия решений, как правило, оказываются *многокритериальными*: последствия принятых решений приходится оценивать при помощи не одного, а *нескольких критериев* (показателей качества или эффективности, целевых функций).

2. Для анализа сложных и ответственных многокритериальных задач принятия решений только *опыта, знаний и интуиции* лица, принимающего решение (ЛПР) и экспертов (специалистов) *недостаточно*. Необходимо не только надлежащее информационное обеспечение, но и привлечение специальных *математических методов*, разрабатываемых в теории принятия решений.

3. Применение методов *теории принятия решений* предполагает в процессе анализа задачи использование *математической модели* проблемной ситуации, включающей *множество вариантов решений* и *набор критериев* для характеристики последствий их реализации.

4. Чтобы выбрать оптимальный вариант решения, задания только лишь набора критериев недостаточно. *Необходима дополнительная информация о предпочтениях* ЛПР, которая должна быть формализованно представлена в модели проблемной ситуации.

5. Многообразие и принципиальная сложность многокритериальных задач принятия решений (по сравнению с однокритериальными) предопределило появление большого числа методов их анализа. Подавляющее большинство этих методов предполагает получение в качестве дополнительной информации о предпочтениях сведений об *относительной важности критериев*. Однако *формального определения* самого понятия важности критериев *не давалось*.

6. Наиболее распространенные *методы* анализа многокритериальных задач основаны на *свертывании набора исходных критериев в один обобщенный* (или агрегированный, интегральный, глобальный и т. п.) критерий, имеющий, например, вид взвешенной при помощи коэффициентов важности суммы исходных критериев. Несмотря на кажущуюся простоту и ясность, эти методы обладают целым *рядом серьезных недостатков*, существенно ограничивающих возможности получения при их помощи *обоснованных рекомендаций* по выбору оптимальных вариантов сложных и ответственных решений.

7. В связи с этим весьма актуальной оказалась проблема разработки *математической теории*, основанной на *строгих* (*формальных*) *определениях* понятия *относительной важности* критериев, которая включала бы методы корректного анализа многокритериальных задач с использованием информации о важности. Такая теория была создана, и основные идеи этой теории излагаются в последующих главах.

Контрольные вопросы и задания к главе 1

> Доводы, до которых человек додумался сам, обычно убеждают его больше, чем те, которые пришли в голову другим.
>
> *Блез Паскаль*

1. Приведите практические примеры многокритериальных задач принятия решений (бытовых, учебных, производственных, ...).
2. Сформулируйте причины (источники) появления нескольких критериев в задачах принятия решений. Постарайтесь конкретизировать ответ и проиллюстрировать его примерами.
3. Каков смысл доминирования (по Эджворту–Парето) одного варианта над другим? Что такое недоминируемый вариант? Почему на роль наилучших могут претендовать только недоминируемые варианты?
4. В чем состоит метод решения многокритериальных задач при помощи обобщенного критерия? В чем заключаются достоинства и каковы недостатки такого подхода?
5. Проанализируйте задачу о выборе автомашины из § 1.3 при помощи метода взвешенной суммы с использованием другого, также широко применяемого способа нормализации критериев, согласно которому каждый исходный критерий K_i заменяется дробью $(K_i - K_{i*})/(K_i^* - K_{i*})$, где K_i^* — его наибольшее значение, а K_{i*} — наименьшее.

ГЛАВА 2

КАЧЕСТВЕННАЯ ВАЖНОСТЬ КРИТЕРИЕВ

Это единственное подходящее слово, хотя оно до того истаскано и затрепано, что истинный смысл его давно уже стерся.

Эрнест Хемингуэй. «По ком звонит колокол»

§ 2.1. Однородные критерии

Что же у тебя получилось в результате сложения лампочек и апельсинов? — Лампельсины!

По радиоспектаклю Владимира Левшина «Приключения Нулика»

1. Сравнение критериев по важности, т. е. выяснение, является ли один из них более важным, чем другой, или же они одинаковы по важности, предполагает, что критерии являются *однородными*, т. е. имеют сопоставимый вид. Это означает, что у критериев должна быть единая (общая) шкала. Более того, должно выполняться следующее *условие* (требование) *однородности*: каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого из критериев[24]. Это условие выполняется, например, в том случае, когда градации являются вербальными (словесными), причем имеют смысл, одинаковый для всех критериев, например, «превосходно», «отлично», ..., «отвратительно». Так, в частности, обстоит дело в нашем примере со студентами: одна и та же оценка по любому предмету со-

---

[24] Если же сравнивать по важности неоднородные критерии, то придется указывать, какие конкретно изменения имеются в виду для каждого из сравниваемых критериев. Например, указать, что важнее (предпочтительнее): увеличить значение первого критерия на a единиц (его шкалы) или увеличить значение второго критерия на b единиц (его шкалы). Такую важность можно назвать параметрической (связанной со значениями параметров a и b). Теория важности неоднородных критериев также разработана, но мы ее рассматривать не будем.

держательно одинакова. Обычно градации нумеруются в порядке возрастания предпочтительности; если всего градаций q, то номер 1 получает наименее предпочтительная градация, а номер q — самая предпочтительная (в примере со студентами нумерацию привычнее было начинать числом 2). Нужно подчеркнуть, что номера градаций, которые часто называют баллами, отражают лишь упорядоченность их по предпочтению. Поэтому с числами-номерами градаций нельзя производить арифметические операции для получения каких-либо иных оценок предпочтений, например, для выражения степени превосходства одной градации над другой или же сравнения приращений предпочтений при переходе от одних градаций к другим. Например, уже упоминалось о том, что бессмысленно говорить, будто при отличной оценке успеваемость (знания, умения и навыки) в 2,5 раза выше, чем при неудовлетворительной. По это причине такая шкала называется *качественной* (точнее, *порядковой*).

Указанное выше условие будет выполнено и в том случае, если варианты будут оцениваться по всем критериям в единой балльной шкале, причем «цена балла» для всех критериев одинакова (как, например, в школьных оценках).

2. Однако на практике часто встречаются задачи, в которых критерии изначально *неоднородны*, например, выражают вес, стоимость, площадь и т. д. Прежде чем такие критерии сравнивать по важности, их нужно привести к единой шкале, причем всего лишь порядковой. В этом состоит весьма существенное отличие от нормализации, которой должны подвергаться все критерии перед построением обобщенного критерия: после нормализации критерии должны описывать предпочтения количественно[25]!

Для приведения некоторого количественного критерия к порядковой шкале с q градациями можно «разрезать» исходную шкалу этого критерия на q частей так, чтобы любое значение этого критерия из части номер i имело интерпретацию по предпочтительности, соответствующую градации i общей шкалы. На-

[25] Другое отличие состоит в том, что для построения обобщенного критерия «нормализация» (приведение к единой шкале) может осуществляется и без соблюдения требования однородности. Однако тогда коэффициенты, при помощи которых осуществляется «взвешивание» значений исходных критериев, вынуждены играть двоякую роль: они должны отражать не только относительную важность, но и соизмерять шкалы нормализованных критериев. В этом случае такие коэффициенты называются (относительными) весами, весовыми, или шкалирующими множителями. Правда, часто в литературе и для этого случая используется название «коэффициенты важности», что было отражено и в гл. 1.

пример, если в задаче выбора помещения под офис для небольшой фирмы один из критериев выражает общую его площадь, а число градаций q вводимой единой шкалы равно пяти, причем 1 — это «очень плохо», а 5 — «очень хорошо», то можно, скажем, указать, что площадь офиса менее 15 м^2 — «очень плохо», площадь от 15 м^2 до 20 м^2 — «плохо», ..., а площадь более 40 м^2 — «очень хорошо».

Итак, далее предполагается (хотя специально и не оговаривается), что все критерии однородны — имеют единую порядковую шкалу.

§ 2.2. Базовые определения качественной важности

Важность — *см.* важный.
Важный — имеющий большое, особое значение, значительный.
Значение — важность, значительность, роль.
Значительный — имеющий большое значение, важный.

Сергей Ожегов. «Словарь русского языка»

1. Оценки относительной важности критериев могут быть качественными и количественными. *Качественными* (нечисловыми) оценками важности являются суждения (утверждения, сообщения) вида «Один критерий важнее другого» и «Оба критерия равноважны (т. е. имеют одинаковую важность)» [26]. *Количественными* оценками важности являются суждения вида «Один критерий важнее другого во столько-то раз» [27].

Качественные оценки менее информативны, чем количественные, но зато они проще для человека и потому более надежны (меньше возможности появления в них ошибок). Чтобы «почувствовать разницу» в сложности получения качественных и количественных оценок, проведите мысленно следующий эксперимент (впрочем, его легко реализовать и на практике). Представьте, что Вы в каждой руке держите по предмету (скажем, камню)

[26] К качественным относятся также суждения об относительной важности групп критериев и о сравнительных степенях превосходства в важности (типа «превосходство в важности первого критерия над вторым больше, чем третьего над четвертым»).

[27] Это — точные, или точечные оценки. Возможны также и интервальные оценки типа «один критерий важнее другого более чем в a раз и менее чем в b раз». Они, конечно, проще для человека, и потому более надежны.

и сравниваете их по весу. На какой из двух вопросов ответить труднее и в каком легче допустить ошибку:

— Какой из предметов тяжелее?

— Во сколько раз один из предметов тяжелее другого?

Под *качественной важностью* критериев будем понимать качественные оценки их относительной важности, под *количественной* — количественные оценки. Далее в этой главе будем рассматривать качественную важность, отложив рассмотрение количественной важности до следующей главы.

Суждение «критерий K_i важнее критерия K_j» будем обозначать «словом» $i \succ j$, а суждение «критерии K_i и K_j равноважны» — «словом» $i \approx j$. Качественная информация о важности, для обозначения которой будет использоваться последняя буква греческого алфавита Ω (омега), образуется накопленными (полученными от ЛПР и/или экспертов) сведениями о том, что некоторые критерии одинаковы по важности и что одни критерии важнее других[28], т. е. сообщениями вида $i \approx j$ и $i \succ j$. Например, если стало известно, что первый критерий важнее второго, а второй и третий критерии равноважны, то $\Omega = \{1 \succ 2, 2 \approx 3\}$.

2. Обратимся, наконец, к центральному вопросу точного определения понятий равенства и превосходства критериев в важности.

Предположим, что студенты изучали всего два учебных предмета, так что каждый студент получил всего две итоговые оценки. Если для характеристики общей успеваемости студента достаточно (и так нередко делается в жизни) перечислить полученные им оценки в произвольном порядке, не указывая при этом, какая оценка относится к тому или иному предмету (т. е. сказать, например, что у этого студента пятерка и тройка, а у того — пятерка и четверка), то это и означает, что каждый из предметов имеет одинаковую важность. Если же это не так, причем считается, что из любых двух студентов, имеющих одинаковые пары оценок, лучше учится тот, у которого более высокая оценка по определенному предмету, то этот предмет важнее другого. Если предметов более двух, то сравнивать относительную важность двух выбранных предметов можно путем сопоставления общей успеваемости таких студентов, которые имеют одинаковые пары оценок по этим предметам, но по всем остальным предметам оценки у них должны быть одинаковыми.

---

[28] Частично сведения такого рода иногда могут быть получены и из других источников, например, в результате исследований моделей более высокого уровня. Например, относительная важность некоторых критериев, характеризующих работу предприятия, может быть оценена при помощи модели функционирования объединения, в которое оно входит.

Идеи разобранного примера лежат в основе следующих определений. В них под x^{ij} понимается векторная оценка, полученная из x перестановкой ее компонент x_i и x_j. Например, если $x = (5,4,3,4)$, то $x^{14} = (4,4,3,5)$ и $x^{23} = (5,3,4,4)$.

Определение 1. Критерии K_i и K_j *равноважны*, или *одинаково важны*, когда любые две векторные оценки x и x^{ij} одинаковы по предпочтению.

Определение 2. Критерий K_i *важнее* критерия K_j, когда всякая векторная оценка x, в которой $x_i > x_j$, предпочтительнее, чем x^{ij}

Согласно первому из этих определений сообщение $i \approx j$ связывает векторные оценки x и y такие, что $y = x^{ij}$, отношением безразличия $I^{i\approx j}$ Согласно второму определению сообщение $i \succ j$ связывает векторные оценки x и y такие, что $x_i > x_j$, $y = x^{ij}$, отношением предпочтения $P^{i\succ j}$

Например, верно $(5,4,3,4)\,P^{1\succ 2}\,(4,5,3,4)$, поскольку вторая векторная оценка получается из первой перестановкой ее первых двух компонент, причем именно в первой векторной оценке на первом месте (как значение более важного критерия) стоит 5 — большее из двух чисел 4 и 5. Иными словами, указанная перестановка приводит к ухудшению первой векторной оценки.

Верно также $(5,4,3,4)I^{2\approx 3}(5,3,4,4)$. Действительно, здесь вторая векторная оценка получена из первой перестановкой второй и третьей компонент, а второй и третий критерии равноважны. Поэтому такая перестановка не приводит к изменению предпочтений. Но вот $(5,4,3,4)I^{2\approx 3}(5,3,5,4)$ неверно.

§ 2.3. Получение и анализ качественной информации о важности критериев

> Если у тебя спрошено будет: что полезнее, солнце или месяц? — ответствуй: месяц. Ибо солнце светит днем, когда и без того светло, а месяц — ночью.
>
> Но, с другой стороны: солнце лучше тем, что светит и греет; а месяц только светит, и то лишь в лунную ночь!
>
> *Козьма Прутков. «Плоды раздумья»*

1. Для получения от ЛПР (или эксперта) качественной информации о важности критериев Ω ему необходимо предложить попарно сравнивать критерии по важности. Для каждой выбранной пары критериев ЛПР должно указать, что один из критериев более важен, чем другой, или что они равноважны, или же, возможно, считать эти критерии несравнимыми по важности.

Для сравнения критериев K_i и K_j можно исходить непосредственно из определений 1 и 2 равенства и превосходства в важности и сопоставлять по предпочтению пары векторных оценок вида x и $y = x^{ij}$ Так, для сравнения по важности первого и второго критериев нужно сопоставлять векторные оценки вида $(a, b, *, \ldots, *)$ и $(b, a, *, \ldots, *)$, где $a < b$ (или же $a > b$) и звездочки $*$ означают, что на одинаковых местах в обеих оценках стоят произвольные, но равные шкальные значения. Следует брать несколько пар векторных оценок такого вида, причем для повышения контрастности целесообразно на месте $*$ использовать один раз наихудшее шкальное значение, один раз — наилучшее, и один раз — некоторое среднее значение (в задаче со студентами, например, 2, 3 и 5). И в роли чисел a и b следует использовать указанные шкальные значения и ближайшие к ним (если из предыдущих ответов можно предположить, что первый критерий важнее второго) или, наоборот, наихудшее и наилучшее значения (2 и 5, если появляется предположение о равенстве сравниваемых критериев по важности). Таким образом, пар чисел a, b тоже будет несколько. Если из ответов ЛПР будет следовать, что во всех случаях первая векторная оценка предпочтительнее второй, то можно задать заключительный вопрос типа: «Если варианты различаются лишь перестановкой значений первых двух критериев, а значения всех остальных соответствующих критериев для них равны, то верно ли, что всегда предпочтительнее тот вариант, для которого значение первого критерия больше?». При положительном ответе на этот вопрос можно считать, что первый критерий важнее второго, т. е. получено сообщение $1 \succ 2$. Аналогично надо действовать, если выяснится, что обе векторные оценки всегда одинаковы по предпочтительности, и, возможно, получить сообщение $1 \approx 2$.

Конечно, опрос ЛПР согласно приведенной «полной программе» — процедура весьма трудоемкая и потому реально вряд ли выполнимая. Поэтому практически можно для выбранной пары критериев предложить ему сравнить лишь две–три пары векторных оценок и задать заключительный вопрос. А затем, когда ЛПР поймет смысл, вкладываемый в понятия равенства и превосходство по важности, и согласится с ним, то ограничиваться лишь одним заключительным вопросом для каждой предъявляемой пары критериев. Хотя целью опроса ЛПР является упорядочение всех критериев по важности, число пар критериев, предъявляемых для сравнения, должно быть по возможности минимальным.

Но, разумеется, для проверки могут быть заданы и контрольные вопросы. Например, если установлено, что $1 \succ 2$ и $2 \approx 3$, то можно проверить, верно ли, что $1 \succ 3$.

В каждой конкретной задаче ЛПР нужно представлять не абстрактные векторные оценки, а варианты (реальные или гипотетические) с соответствующими векторными оценками, состоящими из действительно возможных значений критериев. Например, в задаче со студентами можно предлагать попарно сравнивать студентов, имеющих оценки успеваемости по предметам *А*, *Б*, *В*, *Г* соответственно 2, 3, 3, 3 и 3, 2, 3, 3; затем (если первый из сравниваемых студентов будет признан лучшим по успеваемости, чем второй) 2, 5, 3, 3 и 5, 2, 3, 3, и т. д.

Разумеется, далеко не во всякой задаче обязательно все критерии удастся сравнить по важности: некоторые из них могут оказаться несравнимыми (т. е., например, не будет верно ни $1 \succ 2$, ни $2 \succ 1$, ни $1 \approx 2$)[29].

2. И последнее замечание, касающееся сбора сведений о важности критериев. Предварительные исследования показали[30], что смысл, вкладываемый людьми в утверждения «один критерий важнее другого» и «критерии равноважны», вполне согласуется[31] с определениями 1 и 2. Поэтому при дефиците времени можно, казалось бы, вовсе обойтись без описанных выше процедур,

---

[29] Причин такого положения может быть несколько. Одна из них состоит в том, что данные выше определения вводят, по существу, понятие «глобальной» важности, т. е. охватывающей все множество векторных оценок. Однако на практике нередки случаи, когда в одной части этого множества, например, при малых значениях третьего критерия, первый критерий важнее второго, а в другой, при больших значениях третьего критерия, наоборот, второй важнее первого (так что существует зависимость соотношений по важности первых двух критериев от третьего критерия). В таких случаях следует скорректировать исходные определения, ограничив их «действие» лишь некоторой областью из множества векторных оценок (что будет соответствовать понятию «локальной» важности).

[30] *Подиновский В. В.* Коэффициенты важности как информация о предпочтениях // Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределенности: Тез. докл. на IV Всесоюзном семинаре по исследованию операций и системному анализу (Батуми, 10–15 октября 1983). — М.: ВШПД ВЦСПС, 1983. — С. 43.

[31] Мне кажется, что это может относиться лишь к случаю, когда людям очевидно, что критерии имеют одну шкалу. И представляется очень важным *явно* предостеречь от использования такого «наивного» подхода к опросу в случае разных шкал (*замечание П. Ю. Чеботарева*).

просто предлагая ЛПР, исходя из своего интуитивного представления о важности критериев, в каждой предъявляемой паре критериев указать более важный критерий или отметить, что оба критерия одинаково важны. Или даже сразу ранжировать все критерии по важности. Однако на деле все-таки стоит проверить хотя бы некоторые из полученных сообщений о важности, воспользовавшись описанным выше подходом, причем специально подчеркнуть, что критерии имеют общую шкалу!

3. Накопленную качественную информацию о важности Ω нужно проверять на непротиворечивость, поскольку в нее могут вкрасться ошибки. Противоречивость проявится в том, что при помощи сообщений из Ω можно будет составить цикл, приводящий к заключению, что некоторый критерий важнее самого себя. Тогда соответствующие сообщения надо проверить и скорректировать. Так, если Ω содержит сообщения $1 \succ 2$, $2 \succ 3$ и $3 \succ 1$, то отсюда будет формально вытекать[3], например, что $1 \succ 1$. Следовательно, по крайней мере, одно из трех суждений в Ω ошибочно. Если при проверке выяснится, что неверно суждение $3 \succ 1$, то его нужно заменить на $1 \succ 3$.

§ 2.4. Использование качественной информации о важности критериев для анализа многокритериальных задач

Слов немного — ну, может, пяток,
Но какие из них комбинации!

Александр Иванов. «Обучение русскому»

Каждое сообщение $i \succ j$ и $i \approx j$ из полученной качественной информации о важности Ω задает на множестве векторных оценок, как было выяснено выше, отношение предпочтения $P^{i \succ j}$ или безразличия $I^{i \approx j}$ Комбинируя эти отношения и отношение Эджворта–Парето P^0, можно сравнивать по предпочтению векторные оценки с использованием всей информации Ω, т. е. сконструировать отношения P^Ω и $I^{i\Omega}$, порождаемым этой информацией.

Пусть, например, в двухкритериальной задаче известно, что первый критерий важнее второго, т. е. $\Omega = \{1 \succ 2\}$. Понятно, что для векторных оценок $(5, 3)$ и $(2, 4)$ неверно ни $(5, 3) P^{1 \succ 2} (2, 4)$, ни

[3] В предположении, что отношение важности транзитивно.

$(5,3)P^0(2,4)$. Однако можно составить цепочку из двух звеньев — верных соотношений

$$(5,3)P^0(3,5) \quad \text{и} \quad (3,5)P^0(2,4),$$

которую сокращенно запишем следующим образом:

$$(5,3)P^{1\succ 2}(3,5)P^0(2,4).$$

Рассмотрев эту цепочку, можно утверждать[4], что векторная оценка $(5,3)$ предпочтительнее, чем $(2,4)$, т. е. верно $(5,3)P^{\Omega}(2,4)$.

Построенная цепочка не единственна. Например, можно построить и такую цепочку:

$$(5,3)P^0(4,3)P^{1\succ 2}(3,4)P^0(2,4),$$

и другие цепочки. Но для того, чтобы убедиться в справедливости $(5,3)P^{\Omega}(2,4)$, достаточно было построить только одну цепочку от $(5,3)$ до $(2,4)$. Более того, построить «обратную» цепочку от $(2,4)$ до $(5,3)$ невозможно (попробуйте убедиться в этом сами).

Пусть теперь в рассматриваемой двухкритериальной задаче оба критерия равноважны: $\Omega = \{1 \approx 2\}$. Векторные оценки $(5,3)$ и $(2,4)$ связывает цепочка

$$(5,3)I^{1\approx 2}(3,5)P^0(2,4),$$

т. е. векторная оценка $(5,3)$ одинакова по предпочтительности с векторной оценкой $(3,5)$, которая, в свою очередь, предпочтительнее векторной оценки $(2,4)$. Поэтому и здесь следует признать, что векторная оценка $(5,3)$ предпочтительнее, чем $(2,4)$, т. е. верно $(5,3)P^{\Omega}(2,4)$.

2. Отношения P^{Ω} и $I^{i\Omega}$ порождают на множестве вариантов V аналогичные по смыслу отношения P_{Ω} и I^i_{Ω}, при помощи которых можно сравнивать по предпочтению варианты. (Напомним еще раз, что верхние индексы ставятся у обозначений, касающихся векторных оценок, а нижние — у обозначений, касающихся вариантов.)

Вариант v^* такой, для которого не существует варианта v, лучшего по отношению P_{Ω}, т. е. для которого было бы верно $vP_{\Omega}v^*$, называется *недоминируемым* (по отношению P_{Ω}). В противном случае он является *доминируемым*. Множество недоминируемых вариантов будем обозначать V_{Ω}. Только недоминируемые варианты могут претендовать на роль оптимальных.

---

[4] То есть принимается допущение о транзитивности предпочтений.

3. Обратимся к нашему примеру со студентами. Предположим, что получена информация: предмет *А* важнее предмета *Б*, предметы *Б* и *В* одинаково важны, и каждый из них важнее предмета *Г* (разумеется, в смысле данных выше определений). Эту информацию сокращенно можно записать так: $\Omega = \{1 \succ 2, 2 \approx 3, 3 \succ 4\}$. Попробуем, используя ее, продолжить поиск лучшего в учебе студента.

Поскольку предмет *В* (критерий K_3) важнее предмета *Г* (критерия K_4), то векторная оценка $x(v^1) = (3,5,5,4)$ согласно определению 1 предпочтительнее, чем $y = x^{34} = (3,5,4,5)$, т. е. верна запись $x(v^1)P^{3\succ 4}y$. Далее, справедливо соотношение $yP^0(3,5,3,5)$. Таким образом, имеем цепочку из трех звеньев:

$$(3,5,5,4)\ P^{3\succ 4}\ (3,5,4,5)\ P^0\ (3,5,3,5).$$

Следовательно, верно $(3,5,5,4)P^{\Omega}(3,5,3,5)$. Но $(3,5,3,5)$ есть векторная оценка и студента v^4, и студента v^6 Следовательно, первый студент по учебе предпочтительнее, чем и четвертый, и шестой: $v^1 P_{\Omega} v^4$ и $v^1 P_{\Omega} v^6$. Отсюда вытекает, что четвертый и шестой студенты не могут претендовать на роль наилучших (т. е. согласно общей терминологии v^4 и v^6 — доминируемые варианты).

Подчеркнем двоякую роль построенной цепочки и подобных ей. С одной стороны, такая цепочка от x к y показывает, что верно $xP^{\Omega}y$. С другой стороны, она позволяет наглядно и ясно объяснить, причем в терминах собранных сведений о предпочтениях, почему x предпочтительнее, чем y. И в этом еще одно существенное преимущество рассматриваемых методов перед теми, которые опираются на построение обобщенных критериев. Поэтому подобного рода цепочки будем называть *объясняющими*. Понятно, что в роли объясняющей желательно иметь цепочку возможно меньшей длины.

Далее, поскольку предметы *Б* и *В* (критерии K_2 и K_3) одинаково важны, то векторные оценки $x(v^3) = (5,4,3,3)$ и $x(v^7) = (5,3,4,3)$, согласно определению 2, одинаковы по предпочтению: $(5,4,3,3)I^{2\approx 3}(5,3,4,3)$, и поэтому верно соотношение[32]: $(5,4,3,3)I^{\Omega}(5,3,4,3)$. Поэтому верно и $v^3 I_{\Omega} v^7$, так что студенты v^3 и v^7 в учебе равны.

---

[32] Можно считать, что векторные оценки $(5,4,3,4)$ и $(5,3,4,4)$ связывает цепочка, состоящая лишь из двух звеньев: $(5,4,3,4)I^{2\approx 3}(5,3,4,4)$.

4. Разумеется, хотелось бы иметь эффективные методы, позволяющие построить объясняющую цепочку, связывающую две произвольные векторные оценки x и y, или же выяснить, что таковой не существует. И такие методы (они называются комбинаторными, так как носят переборный характер) были разработаны. С их помощью можно убедиться в том, что сравнить по общей успеваемости студентов v^1, v^2 и v^3 (или v^7) между собой на основе информации Ω невозможно. Поэтому варианты v^1, v^2, v^3, v^7 являются недоминируемыми по отношению P_Ω. Таким образом, информация Ω позволила сузить множество выбора V_0 до множества $V_\Omega = \{v^1, v^2, v^3, v^7\}$, в котором два варианта одинаковы по предпочтительности.

5. Для случая, когда все критерии упорядочены по важности, как в примере со студентами, разработаны более простые, алгебраические методы проверки верности соотношений $xP^\Omega y$ и $xI^\Omega y$ (эти методы состоят в построении систем линейных равенств и неравенств и проверке их выполнения). Наиболее просто метод выглядит в случае, когда все критерии равноважны, т. е. любые два критерия одинаковы по важности. Такую информацию будем обозначать буквой[⑤][33] S. Этот метод нам понадобится в дальнейшем. Пусть $x_\downarrow$ — векторная оценка, полученная из x упорядочением ее компонент по убыванию (точнее, по невозрастанию). Например, если $x = (3,4,2,3,5)$, то $x_\downarrow = (5,4,3,3,2)$. Теперь можно записать утверждения, лежащие в основе метода:

$$xP^S y \text{ верно в том и только том случае,}$$
$$\text{когда справедливо } x_\downarrow P^0 y_\downarrow;$$

$$xI^S y \text{ верно в том и только том случае,}$$
$$\text{когда справедливо } x_\downarrow = y_\downarrow.$$

Для иллюстрации предположим, что в нашем примере со студентами все предметы одинаково важны. Тогда, например, второй студент будет предпочтительнее седьмого, поскольку $x_\downarrow(v^2) = (5,4,4,4)$, $x_\downarrow(v^7) = (5,4,3,3)$ и верно $(5,4,4,4)\ P^0\ (5,4,3,3)$.

[⑤] Формально $S = \{i \approx j \mid i < j\}$.

[33] Первая буква английского слова *symmetry* — симметрия.

Выводы из главы 2

Вывод — то место в тексте,
где вы устали думать.

Законы Мэрфи

1. *Сравнивать критерии по важности*, т. е. выяснять, является ли один из них важнее другого или же они одинаково важны (без указания величин изменения их значений), можно лишь тогда, когда они *однородны*. Если критерии изначально *неоднородны*, то их надо *преобразовать в однородные*, приведя к единой шкале, градации которой имеют общую для всех критериев интерпретацию (например, в виде словесной характеристики) в терминах предпочтений.

2. *Точные определения равенства и превосходства в важности* одного критерия над другим основаны на сравнении по предпочтению векторных оценок *специального вида*. Определения имеют ясный и простой смысл, непосредственно задают отношения безразличия и предпочтения и согласуются с интуитивными представлениями о важности. Опираясь на эти определения, можно как собирать сведения о важности критериев, так и использовать их для сравнения вариантов по предпочтению.

3. Существуют *специальные методы* сравнения по предпочтению любых двух вариантов. Для общего случая методы достаточно сложны. Однако в случае, когда все критерии имеют одинаковую важность, метод совсем прост.

4. Конструируемые для сравнения вариантов объясняющие цепочки позволяют *наглядно и ясно*, в терминах собранной информации о предпочтениях, *объяснять* ЛПР, *почему* один вариант предпочтительнее другого, или почему они одинаковы по предпочтению. Если объясняющей цепочки, которая соединяет векторные оценки двух вариантов, *не существует*, то сравнить эти варианты по предпочтению на основании накопленной информации о предпочтениях *невозможно*.

5. *Оптимальными* могут быть лишь те варианты, которые являются *недоминируемыми* по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной качественной информацией о важности критериев.

6. Если качественная информация о важности не позволяет выделить один наилучший вариант, то для анализа задачи следует получить и использовать *дополнительную информацию* о предпочтениях.

Контрольные вопросы и задания к главе 2

Упражнения рождают мастерство.

Тацит Публий Корнелий

1. Что такое однородные критерии? Приведите примеры многокритериальных задач, в которых исходные критерии оказываются однородными или, напротив, неоднородными.

2. Сформулируйте определения понятий «один критерии важнее другого» и «оба критерия равноважны». Как в них использовано свойство однородности критериев?

3. Объясните, почему при непротиворечивости информации о важности Ω нельзя построить двух объясняющих цепочек — от x к y и от y к x, — в которых было бы звено с P?

4. Найдите все недоминируемые варианты в задаче о студентах, предполагая, что все критерии одинаково важны. Сравните полученное множество недоминируемых вариантов V_S с множеством V_Ω, выделенным при анализе этой задачи в § 2.4, и обсудите результат.

5. Покажите, что если верно xP^0y, то верно и $xP^\Omega y$ при любом составе информации Ω.

6. Пусть, согласно правилу, сформулированному в конце гл. 2, верно xP^Sy или же xI^Sy. Как, исходя из того, что верно $x_\downarrow P^0 y_\downarrow$ или же $x_\downarrow = y_\downarrow$, построить объясняющую цепочку от x к y? Будет ли она обязательно самой короткой из всех возможных объясняющих цепочек?

7. Пусть $x_\uparrow$ — векторная оценка, полученная из x упорядочением ее компонент по возрастанию (точнее, по неубыванию). Например, если $x = (3, 4, 2, 3, 5)$, то $x_\uparrow = (2, 3, 3, 4, 5)$. Покажите, опираясь на правило, сформулированное в конце гл. 2, что справедливы утверждения:

$$xP^Sy \text{ верно в том и только том случае, когда справедливо } x_\uparrow\, P^0\, y_\uparrow;$$

$$xI^Sy \text{ верно в том и только том случае, когда справедливо } x_\uparrow = y_\uparrow.$$

ГЛАВА 3

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ВАЖНОСТЬ КРИТЕРИЕВ

В оный день, когда над миром новым
Бог склонял свое лицо, тогда
Солнце останавливали словом,
Словом разрушали города.
. . .   . . .
А для низкой жизни были числа,
Как домашний, подъяремный скот,
Потому, что все оттенки смысла
Умное число передает.

Николай Гумилев. «Слово»

§ 3.1. Базовое определение количественной важности

такая точка зрения не лишена логики, но заключенная в ней истина, пожалуй, чересчур обща.

Альбер Камю. «Чума»

1. Количественная важность может выступать в двух основных формах:

1) *степенях превосходства в важности* одних критериев над другими: «критерий K_i в h раз важнее критерия K_j», где $h > 0$; если $h < 1$, то фактически критерий K_j в $1/h > 1$ раз важнее критерия K_i, а при $h = 1$ критерии равноважны;
2) *значениях важности* отдельных *критериев*, количественно «измеряемой» по общей для них «шкале важности»: «важность критерия K_i имеет величину β_i», где $\beta_i > 0$.

Между обоими указанными видами количественной важности имеется тесная взаимосвязь: степень превосходства h критерия K_i над критерием K_j равна отношению значений их важности β_i и β_j:

$$h = \beta_i/\beta_j.$$

Если изменить значения важности всех критериев в одно и то же число раз $t > 0$, т. е. заменить β_i на $t\beta_i$, то величины степеней важности не изменятся:

$$t\beta_i/t\beta_j = \beta_i/\beta_j = h.$$

Это свойство вполне аналогично свойствам оценок при «обычных» измерениях: например, если один предмет весит β_i кг, а второй β_j кг, то первый тяжелее второго в $h = \beta_i/\beta_j$ раз, причем величина h остается неизменной при переходе к любым другим единицам измерения.

В том случае, когда оценки важности критериев β_i в сумме равны единице, они называются *коэффициентами важности.* Эти коэффициенты, обозначаемые через α_i, суть доли «единичной важности» совокупности всех критериев, приходящиеся на каждый отдельный критерий K_i.

Суждение о степени превосходства в важности «критерий K_i в h раз важнее критерия K_j» будем обозначать «словом» $i \succ^h j$. Количественная информация о важности, обозначаемая далее греческой буквой Θ (тэта), образуется накопленными (полученными от ЛПР и/или экспертов) сведениями о степенях превосходства в важности одних критериев над другими.

2. Базовое определение количественной важности опирается не на обобщенный критерий, а на расширение исходной модели до так называемой N-кратной модели, или, сокращенно, *N-модели.* Идею базового определения и «устройство» такой модели можно пояснить при помощи примера со студентами, учитывая накопленную ранее качественную информацию о важности $\Omega = \{1 \succ 2, 2 \approx 3, 3 \succ 4\}$. Вначале оценим степень превосходства в важности третьего критерия (учебного предмета B) над четвертым критерием (предметом Γ). Предположим, что предмет B можно представить состоящим из двух одинаковых по значимости разделов (например, курс математики может состоять из алгебры и анализа). Если каждый из этих разделов имеет такую же значимость, как и предмет Γ, то предмет B (критерий K_3) в два раза важнее предмета Γ (критерия K_4). Теперь обратимся к первому и второму критериям (предметам A и $Б$). Поскольку второй и третий критерии одинаково важны, то можно оценивать степень превосходства первого критерия над третьим. Пусть предмет A можно представить состоящим из трех одинаковых по значимости разделов. Если каждый из этих трех разделов столь же значим, что и один из двух разделов предмета B, то предмет A (критерий K_1) в $3/2$ раза важнее предмета B (критерия K_2). Поскольку критерии K_2 и K_3 равноважны, то всю указанную количественную информацию можно представить записью $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \approx 3, 3 \succ^{2} 4\}$.

На основании вышеизложенного для сравнения по успеваемости оставшихся четырех претендентов (студентов v^1, v^2, v^3, v^7) можно построить, в соответствии с информацией Θ, их «удлиненные» векторные оценки, выписывая оценку по каждому предмету столько раз, на сколько равноважных разделов можно было разделить этот предмет:

$$x^{\Theta}(v^1) = (3,3,3;5,5;5,5;4), \quad x^{\Theta}(v^2) = (4,4,4;4,4;4,4;5),$$
$$x^{\Theta}(v^3) = (5,5,5;4,4;3,3;3), \quad x^{\Theta}(v^7) = (5,5,5;3,3;4,4;3).$$

Подчеркнем, что компоненты этих векторных оценок, согласно их «происхождению», можно рассматривать как значения восьми равноважных критериев! Подобного вида векторные оценки и характеризуют варианты в N-модели, где $N = (3,2,2,1)$ для рассматриваемой задачи. Понятно, что коэффициенты важности критериев здесь таковы: $\alpha_1 = 3/8$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/4$, $\alpha_4 = 1/8$.

3. Опишем теперь конструкцию N-модели для общего случая. Будем полагать, что важности отдельных критериев β_i — натуральные числа n_i, которые и составляют вектор $N = (n_1, \ldots, n_m)$, где, напомним, m — это число критериев. Если вначале числа β_i были дробными, то для приведения к требуемому виду все их надо умножить на подходящее натуральное число. Пусть, например, критериев всего два ($m = 2$), $\beta_1 = 2{,}3$ и $\beta_2 = 4{,}5$. После умножения на 10 получаем соответственно $n_1 = 23$ и $n_2 = 45$, так что $N = (23, 45)$. Если же $\beta_1 = 1/4$ и $\beta_2 = 2/3$, то после умножения на 12 получим $n_1 = 3$ и $n_2 = 4$, так что $N = (3, 4)$.

Под *N-моделью* понимается модель с $n_1 + \ldots + n_m$ однородными критериями, причем первые n_1 критериев получаются повторением («клонированием») первого критерия n_1 раз, следующие n_2 критериев получаются повторением первого критерия n_2 раз и т. д. При этом все первые n_1 полученные критерии считаются равноважными между собой, все следующие n_2 критерии тоже считаются равноважными и т. д. Аналогичным способом векторные оценки исходной модели превращаются в «удлиненные» векторные оценки N-модели, или N-кратные оценки, или, короче, *N-оценки*: оценка варианта по каждому из критериев K_i повторяется n_i раз. И наоборот, если в N-оценке первые n_1 компонент между собой равны, следующие n_2 компонент также равны между собой и т. д., то ей можно поставить в соответствие векторную оценку в исходной модели. Пусть, например, для двухкритериальной задачи построена N-модель, где $N = (3, 4)$. Векторной оценке $(1, 6)$ будет соответствовать N-оценка $(1,1,1,6,6,6,6)$, а N-оценке $(2,2,2,5,5,5,5)$ — векторная оценка $(2,5)$. А вот N-оценке $(1,2,3,4,5,6,7)$ поставить в соответствие векторную оценку из исходной модели нельзя.

Информации Θ соответствует не одна, а целое множество N-моделей: достаточно умножить все числа n_i на любое натуральное число, большее 1 (или разделить, если это возможно), и получится новая N-модель. Например, из N-модели с $N = (3,4)$ можно получить N-модели с $N = (6,8)$, $N = (9,12)$ и т. д. Однако все такие модели эквивалентны в том смысле, что использование любой из них на рассматриваемом далее пути приведет к одним и тем же конечным результатам. Среди всех N-моделей, соответствующих информации Θ, наиболее простой является та, в которой все m чисел $n_1, \ldots, n_m$ являются взаимно простыми. Примером является N-модель с $N = (3,2,2,1)$ в задаче о студентах. Использование именно таких моделей, которые можно назвать *основными*, упрощает выкладки.

4. Теперь можно сформулировать базовое определение количественной важности.

Определение 3. Критерий K_i в h раз важнее критерия K_j, когда для N-модели, соответствующей исходной модели, выполнены следующие условия: 1) $n_i/n_j = h$; 2) каждый из n_i критериев, полученных из критерия K_i, равноважен любому из n_j критериев, полученных из критерия K_j.

§ 3.2. Получение и анализ количественной информации о важности критериев

Что для одного ошибка, для другого — исходные данные.

Законы Мэрфи

1. К настоящему времени разработано огромное количество методов и методик определения количественных оценок важности критериев на основе ответов ЛПР и/или экспертов на «лобовые» (типа: «Во сколько раз первый критерий важнее второго?») или специальным образом сконструированные вопросы[6]. Однако все они не опираются на точное определение понятия важности

---

[6] См., например, обзорные статьи:
Анохин А. М., Глотов В. А., Павельев В. В., Черкашин А. М. Методы определения коэффициентов важности критериев // АиТ. — 1997. — №8. — С. 3–35.

критериев. Поэтому разные методы зачастую приводят к разным результатам. При этом остается непонятным, как проверить адекватность полученных результатов и, следовательно, как выяснить, какие из них верны (если таковые вообще есть). С другой стороны, нет обоснованных рекомендаций о том, как полученные оценки важности корректно использовать в составе тех или иных методов анализа многокритериальных задач.

2. На основе базового определения 3 можно предложить целый ряд методов оценки относительной важности критериев. Эти методы можно разбить на два класса — прямые методы и косвенные методы. *Косвенные* методы предполагают вычисление оценок важности путем решения системы (зачастую несовместной!) линейных равенств и неравенств, построенной по результатам сравнения по предпочтению (без обращения к понятию важности!) достаточно большого количества пар «контрольных» векторных оценок. Далее такие методы рассматриваться не будут, так как для этого потребовалось бы вначале достаточно подробно изложить алгебраические методы построения отношений предпочтения и безразличия, порождаемых количественной информацией о важности критериев.

Прямые методы позволяют найти количественные оценки важности (обычно степени превосходства в важности), по существу, на основе результатов сравнения по предпочтению пар векторных оценок специального вида, используемых в определениях понятий равенства или превосходства в важности. Рассмотрим идеи, положенные в основу трех прямых методов — комбинационного, декомпозиционного и вероятностного. Разумеется, все упоминаемые в дальнейшем сведения о равенстве или превосходстве в важности должны быть получены от ЛПР и/или экспертов.

Комбинационный метод основан на проведении сравнений по важности пар отдельных критериев и групп критериев[34]. Конкретный порядок действий определяется спецификой анализируемой многокритериальной задачи. Пусть, например, имеется группа, состоящая из нескольких равноважных критериев, которую назовем *опорной*. Если подгруппа из s критериев опорной группы и некоторый другой критерий K_i, не входящий в нее, имеют одинаковую важность, то, в соответствии с определением 3,

---

Глотов В. А., Павельев В. В. Экспертные методы определения весовых коэффициентов // АиТ. — 1976. — № 12. — С. 95–107.

[34] В теории важности критериев разработаны базовые определения понятий «Одна группа критериев важнее другой» и «Обе группы критериев равноважны», являющиеся обобщениями базовых определений 1 и 2. И сравнение по важности групп критериев должно проводиться на их основе.

критерий K_i в s раз важнее каждого из критериев, входящих в опорную группу. Если этот отдельный критерий важнее, чем указанная подгруппа из s критериев, то степень превосходства в важности этого критерия над любым из опорной группы больше, чем s. Если же этот отдельный критерий менее важен, чем указанная подгруппа из s критериев, то степень превосходства в важности этого критерия над любым из опорной группы меньше, чем s. Этот простой пример показывает, что комбинаторный метод более эффективен при анализе задач с достаточно большим числом критериев. Поэтому его целесообразно применять совместно с декомпозиционным методом.

Декомпозиционный метод предполагает, что некоторые критерии характеризуют «комплексные» характеристики вариантов и потому могут быть разложены на составляющие. Примерами таких характеристик могут служить «ущерб окружающей среде», «надежность системы», «социальные последствия» и т. д. При наличии таких критериев ЛПР и/или эксперту можно предложить подумать, разлагается ли каждый из них на подкритерии равной важности. Если это возможно, то исходный критерий представляется в виде группы равноважных критериев. А далее проводится анализ тем же путем, что и в предыдущем методе.

Иллюстрацией рассмотренного подхода является проведенный выше анализ задачи со студентами.

3. Из изложенного становится ясным, что результатом количественного оценивания важности чаще оказываются интервальные оценки (значение степени превосходства в важности одного критерия над другим лежит в интервале от l до r), чем точечные (значение степени превосходства в важности одного критерия над другим равно h). Более того, в отличие от информации качественной, противоречивость собранной количественной информации о важности (т. е. совокупности оценок степеней превосходства в важности) — типичный случай, особенно для точечных оценок. Но ведь и требования на согласованность, предъявляемые к количественным оценкам, в особенности точечным, являются существенно более жесткими. Действительно, если выяснено, например, что первый критерий важнее второго, а второй — важнее третьего, то при сравнении первого и третьего критериев должно получиться лишь, что первый важнее третьего. Если же получены количественные оценки: первый критерий важнее второго в 2 раза, а второй важнее третьего в 3 раза, то при сравнении первого и третьего критериев степень превосходства важности должна оказаться равной ровно 6. А теперь представьте, что вместо 3 было 1,5 и вместо 3 было 2,5 .   Требование непротиворечивости к накопленным интервальным оценкам более мягкое: должны найтись согласованные точные значения степеней превосходства в важности, такие, чтобы каждое из них попадало в «свою» интервальную оценку.

4. *Вероятностный метод* основан, естественно, на понятии вероятности. Под вероятностью события понимается число, которое заключено в пределах от 0 до 1 и является количественной мерой возможности наступления этого события (разумеется, при реализации некоторого комплекса условий). Если событие наступит обязательно (такое событие называется *достоверным*), то его вероятность равна 1. Если событие заведомо не наступит (такое событие называется *невозможным*), то его вероятность равна 0. Если событие может как наступить, так и не наступить (такое событие называется *случайным*), то его вероятность лежит в пределах между 0 и 1, причем, чем более возможно его наступление, тем ближе его вероятность[35] к 1.

Например, при бросании монеты возможности выпадения и герба, и цифры (в силу симметрии монеты) одинаковы, и потому, скажем, вероятность выпадения герба (как, впрочем, и цифры) равна $1/2$. Разумеется, при этом подразумевается, что выполнены определенные условия: монета — правильная (не «подправлена»), бросание осуществляется без ухищрений, на Земле (а не в невесомости), над горизонтальной ровной достаточно большой площадкой, без ураганного ветра и т. п. При указанных условиях окончательное положение монеты — лежа плашмя на одной из двух своих сторон (лицевой — аверсе, или же оборотной — реверсе) — событие достоверное, а вот зависание монеты в воздухе или остановка ее на ребре — события невозможные.

Если имеется комплект (колода) n одинаковых карточек (карт), то после тщательного их перемешивания («тасовки») вероятность открыть (вытащить наугад) некоторую заранее «задуманную» карточку (карту) равна $1/n$. Разумеется, и здесь предполагается, что для каждой карточки обеспечена равная возможность ее выбора (такое условие может оказаться нарушенным при игре в карты с шулером). При помощи карточек можно сформировать событие с любой заранее заданной (не очень «некруглой») вероятностью. Например, для вероятности 0,3 можно взять десять карточек и на трех из них сделать пометки: вероятность открыть помеченную карточку окажется равной $3/10 = 0{,}3$. Аналогично, для вероятности $5/8$ нужно взять 8 карточек и 5 из них пометить. Понятно, что для вероятности,

[35] Случайные явления изучает теория вероятностей, в которой даются строгие определения и случайного события, и его вероятности.

например, 0,123456789 такой способ становится технически слишком сложным.

Нам для дальнейшего изложения приведенных сведений о вероятности вполне достаточно. Отметим лишь, что при проведении расчетов на компьютерах программно обеспечена возможность моделирования случайных событий практически с любой заданной вероятностью.

Обратимся теперь к вероятностному методу оценки важности критериев. Вначале разберем его для случая двухкритериальной задачи ($m = 2$), в которой первый критерий важнее второго в $h > 1$ раз (разумеется, в смысле данного ранее определения), причем величина h неизвестна и ее нужно оценить. Пусть a и b — две произвольные шкальные градации, причем $a < b$. ЛПР предлагается либо сразу согласиться на вариант с векторной оценкой (b, a), либо, как говорят, принять участие в лотерее L, где вариант с векторной оценкой (b, b) появляется с вероятностью p, а вариант с векторной оценкой (a, b) — с вероятностью $1 - p$.

Схематически эти две возможности для выбора ЛПР можно представить так:

$$\bullet \xrightarrow{\quad 1 \quad} (b, a) \qquad\qquad \begin{tikzcd} & (b, b) \\ L\,\bullet \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & (a, b) \end{tikzcd}$$

Здесь выбор одного варианта с векторной оценкой (b, a) наверняка условно изображен в виде «лотереи» с одним «выигрышем» (b, a), получаемым с вероятностью 1.

Понятно, что если вероятность p близка к 1, то ЛПР предпочтет участие в лотерее, так как (b, b) предпочтительнее, чем (b, a): $(b, b)P^0(b, a)$. Если же вероятность p^* близка к 0, то ему предпочтительнее выбрать вариант с векторной оценкой (b, a), так как $(b, a)P^{1\succ 2}(a, b)$. Следовательно, теоретически должно существовать некоторое значение вероятности p^*, при котором для ЛПР безразлично, выбрать ли вариант с векторной оценкой (b, a) или же согласиться на участие в лотерее. Оказывается, что

$$p^* = 1 - \frac{1}{h},$$

и это справедливо при любых значениях a и b (!)®.

5. Сформулированное утверждение указывает следующий путь определения степени превосходства в важности. Вначале

® Предполагается, что ЛПР нейтрален к риску.

надо выяснить, какой из критериев важнее. Пусть это будет первый критерий. Затем по ответам ЛПР найти такое значение вероятности p^*, при котором ему будет безразлично, взять ли вариант (b, a) или же принять участие в выше указанной лотерее. И, наконец, вычислить

$$h = \frac{1}{1 - p^*}.$$

Полезно посмотреть на следующую таблицу (значения h в ней приведены с точностью до двух знаков после запятой).

Для оценки величины p^* можно, назначив числа a и b (их разность $b - a > 0$ должна быть не «слишком большой» и не «слишком малой»), начать с величины вероятности p, близкой к 1, такой, чтобы ЛПР заведомо предпочел участие в лотерее

Таблица 5

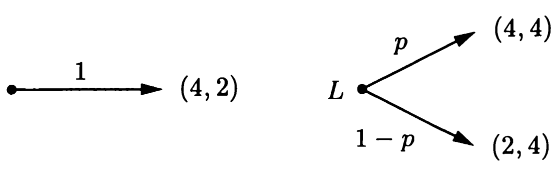
Значения вероятности p^* и соответствующие степени превосходства в важности h

p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
h	1,05	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00	2,50	3,33	5,00	10,00	20,00

(которую можно смоделировать, например, при помощи подходящего комплекта карточек). Постепенно уменьшая вероятность p, доходим до такого значения p^+, при котором ЛПР еще предпочтет лотерею, а после очередного уменьшения p уже не сможет сказать, что для него предпочтительнее. Затем аналогичную процедуру необходимо проделать, начиная с величины p, близкой к 0, и получить значение p^- Понятно, что искомое значение p^* будет лежать в найденных пределах: $p^- < p^* < p^+$ А для величины степени превосходства в важности h будем иметь интервальную оценку

$$\left(\frac{1}{1 - p^-}, \frac{1}{1 - p^+}\right)$$

Предположим, что шкала критериев имеет пять градаций, $a = 2$, $b = 4$ и возможности выбора для ЛПР представляются схемой:



Пусть при вероятностях $p = 0{,}9$ и $p = 0{,}8$ ЛПР предпочел участвовать в лотерее, а при $p = 0{,}7$ затруднился с ответом. Тогда $p^+ = 0{,}8$. Пусть, далее, при $p = 0{,}4$ и $p = 0{,}5$ ЛПР предпочел выбрать вариант с $(4, 2)$, а при $p = 0{,}6$ затруднился с ответом. Тогда $p^- = 0{,}5$. Согласно табл. 5, можно принять, что степень превосходства в важности h первого критерия над вторым лежит в пределах от 2 до 5, т. е. в интервале $(2, 5)$. Практика показала, что при использовании вероятностного метода подобная достаточно большая величина интервала — типичный случай, так как предлагаемый выбор для ЛПР оказывается далеко не простым (особенно если у него нет навыка количественно анализировать решения в условиях риска)!

Заметим, что, по возможности, стоит провести описанную выше процедуру при нескольких парах чисел a и b. Значения полученных границ не должны «сильно» различаться. За итоговый результат можно, например, принять («для надежности») наименьшее из полученных чисел p^- и наибольшее из чисел p^+

В случае, когда критериев больше двух, метод остается в принципе тем же, с той лишь разницей, что для сравнения по важности двух выбранных критериев значения всех остальных следует фиксировать на некоторых уровнях подобно тому, как это было описано в § 2.3 при рассмотрении вопроса о получении качественной информации о важности.

6. Если накопленная количественная информация о важности критериев Θ представляет собой достаточно полную совокупность суждений о превосходстве в важности одних критериев над другими, задающих непротиворечивые точечные оценки, то она позволяет однозначно вычислить коэффициенты важности критериев. Примером служит информация о важности в задаче о студентах $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \approx 3, 3 \succ^{2} 4\}$. Значения коэффициентов важности для нее уже были приведены выше:

$$\alpha_1 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{8}.$$

Сложнее обстоит дело в случае интервальных или противоречивых точечных оценок важности. Существуют два возможных пути обработки такой информации о важности, преследующие разные цели: получение согласованных точечных оценок степеней превосходства в важности и получение согласованных интервальных оценок. Обычно следуют по первому пути, так как использование точечных оценок важности значительно проще и эффективнее при анализе многокритериальных задач, чем интервальных, хотя вторые существенно более надежны, чем первые[7]. Второй путь ранее использовался редко, хотя он более корректен.

§ 3.3. Использование количественной информации о важности критериев для анализа многокритериальных задач

Что ж, метод определен. Теперь техника.

Борис Акунин. «Смерть Ахиллеса»

1. Вначале рассмотрим случай, когда на основе количественной информации о важности критериев Θ получены точные (точечные) согласованные значения степеней превосходства в важности, так что можно построить соответствующую N-модель. Поскольку в этой модели все критерии равноважны, то для сравнения N-оценок можно использовать простые правила, сформулированное в конце гл. 2. Проиллюстрируем это положение на примере со студентами.

Для этого примера в § 3.1 было выяснено, что информации $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \approx 3, 3 \succ^2 4\}$ соответствует N-модель с $N = (3, 2, 2, 1)$ и были выписаны N-оценки четырех студентов. Представим эти оценки еще раз:

$$x^\Theta(v^1) = (3, 3, 3; 5, 5; 5, 5; 4), \quad x^\Theta(v^2) = (4, 4, 4; 4, 4; 4, 4; 5),$$

$$x^\Theta(v^3) = (5, 5, 5; 4, 4; 3, 3; 3), \quad x^\Theta(v^7) = (5, 5, 5; 3, 3; 4, 4; 3).$$

Перепишем эти оценки, упорядочив их компоненты по невозрастанию:

$$x^\Theta_\downarrow(v^1) = (5, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 3), \quad x^\Theta_\downarrow(v^2) = (5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4),$$

$$x^\Theta_\downarrow(v^3) = x^\Theta_\downarrow(v^7) = (5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3).$$

Сравнивая N-оценки первого и третьего (или седьмого) студентов по отношению P^0, т. е. сопоставляя по величине их соответствующие компоненты, приходим к выводу, что верно

$$x^\Theta_\downarrow(v^1) P^0 x^\Theta_\downarrow(v^3) \quad \text{и} \quad x^\Theta_\downarrow(v^1) P^0 x^\Theta_\downarrow(v^7).$$

---

[7] С методом расчета при точечных оценках, использующим понятие правого собственного вектора матрицы, можно ознакомиться по книге: *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993. Метод расчета при интервальных оценках, опирающийся на линейное программирование, был предложен в статье: *Подиновский В. В.* Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации // АиТ. — 2003. — №5. — С. 150–162.

Это означает, что первый студент, с учетом информации Θ, по успеваемости предпочтительнее, чем третий и седьмой: $v^1 P_\Theta v^3$, $v^1 P_\Theta v^7$ Используя общую терминологию, можно сказать, что первый вариант доминирует (по отношению P_Θ) над третьим и над седьмым вариантами, так что последние оказываются доминируемыми[36].

Рассматривая N-оценки первого и второго студентов, приходим к выводу, что они оказываются несравнимыми по предпочтению. Следовательно, только первый и второй студенты могут претендовать на звание самого лучшего. Таким образом, информация Θ позволила сузить множество выбора $V_\Omega = \{v^1, v^2, v^3, v^7\}$ до множества $V_\Theta = \{v^1, v^2\}$, включающего лишь два несравнимых между собой варианта.

2. Обратимся теперь к случаю, когда на основе количественной информации о важности критериев Θ получены непротиворечивые интервальные оценки важности, так что для пар критериев K_i и K_j, которые сравнивались по важности, известен интервал (l_{ij}, r_{ij}), в котором лежит неизвестное значение h_{ij} степени превосходства в важности K_i над K_j. При такой информации ввести какую-то одну определенную N-модель не представляется возможным. Поэтому отношения предпочтения и безразличия определяются следующим образом.

Поскольку интервальные оценки важности непротиворечивы, то существует N-модель, согласованная с информацией Θ. Это означает, что существует набор чисел $\{h_{ij}\}$ таких, что величина $h_{ij} = n_i/n_j$ для каждой пары критериев K_i и K_j, которые сравнивались по важности, попадает в соответствующий интервал $(l_{ij},\ r_{ij})$, т.е. выполняется двойное неравенство $l_{ij} < h_{ij} < r_{ij}$. Отношение предпочтения $P^{(\Theta)}$, порождаемое интервальными оценками важности, полученными на основе информации Θ, определяются так[8]:

$x P^{(\Theta)} y$ верно в том и только том случае, когда для каждой N-модели, согласованной с Θ, верно $x P^\Theta y$.

---

[36] Отметим, что разработаны методы проверки справедливости $x P^\Theta y$ и $x I^\Theta y$, которые не предполагают явного построения N-моделей.

[8] Возможен и иной подход к определению отношения предпочтения $P^{[\Theta]}$, согласно которому $x P^{[\Theta]} y$ верно в том и только в том случае, когда для каждой N-модели, согласованной с Θ, справедливо $x P^\Theta y$ или $x I^\Theta y$, причем хотя бы для одной такой модели верно $x P^\Theta y$. О взаимосвязи двух указанных подходов можно узнать из статьи: *Подиновский В. В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // АиТ. — 2004. — №11. — С. 141–159.

Понятно, что для проверки справедливости $xP^{(\Theta)}y$ «перепробовать» каждую N-модель, согласованную с Θ (а такая модель не единственна), невозможно. Поэтому нужно привлекать специальные методы, которые мы рассматривать здесь не будем.

Вернемся к примеру со студентами. Предположим, что степень превосходства первого критерия над вторым лежит в пределах от 1,2 до 1,7 и степень превосходства третьего над четвертым находится в пределах от 1,7 до 2,5. Оказывается, что при такой информации о важности Θ студенты (варианты) v^1 и v^3, а также студенты (варианты) v^1 и v^7 оказываются несравнимыми по предпочтению, т. е. сказать, кто из трех студентов лучше в учебе, не представляется возможным. Если же степень превосходства первого критерия над вторым лежит в более узких пределах, от 1,3 до 1,5, а степень превосходства третьего над четвертым находится в пределах от 1,7 до 2, то будет выполнено $v^1 P_\Theta v^3$, $v^1 P_\Theta v^7$, так что первый студент, с учетом интервальной информации Θ, по успеваемости предпочтительнее, чем третий и седьмой.

§ 3.4. Совершенствование шкалы критериев

Я не отрицаю, что цветы хороши, но
миллион цветов не в миллион раз
лучше одного цветка.

Рекс Стаут. «Черные орхидеи»

1. Количественная информация о важности, позволяющая получить точные оценки важности, далеко не всегда позволяет выделить единственный наилучший вариант. Так, в частности, обстояло дело в нашей задаче со студентами. Причина такого положения заключается в том, что шкала критериев предполагалась порядковой, т. е. градации шкалы были лишь упорядочены по предпочтительности. Для дальнейшего сужения множества выбора необходима дополнительная информация о предпочтениях. А чтобы ее получить, остается заняться усовершенствованием (уточнением) шкалы.

При порядковой шкале известно лишь, что при переходе от одной градации к следующей предпочтения возрастают. Теперь придется сравнивать «приращения предпочтений» при таких переходах. Для простоты ограничимся иллюстрацией этих положений, обратившись к примеру со студентами.

Предположим[37], что при переходе от оценки 2 к оценке 3 возрастание знаний оценивается как бо́льшее по сравнению с воз-

[37] Это вполне соответствует методике оценивания и сложившейся практике выставления оценок

растанием знаний при переходе от 3 к 4, которое, в свою очередь, больше, чем при переходе от 4 к 5. Это — пример случая замедления роста предпочтений вдоль шкалы. Такую информацию будем обозначать буквой D.

Если критерии K_i и K_j равноважны, то это означает, что векторная оценка x, в которой $x_i = x_j = 3$, предпочтительнее, чем векторная оценка y, получаемая из x заменой x_i на 2, а x_j — на 4 (или, наоборот, x_i на 4, а x_j — на 2), что можно записать так: $xP^{ij(33\to24)}y$. Аналогично, векторная оценка x, в которой $x_i = x_j = 4$, предпочтительнее, чем векторная оценка y, получаемая из x заменой x_i на 3, а x_j — на 5 (или, наоборот, x_i на 5, а x_j — на 3): $xP^{ij(44\to35)}y$.

Воспользуемся всей накопленной информацией Θ и D и попробуем сравнить по предпочтению оставшихся двух студентов — первого и второго. Для их N-оценок

$$x_{\downarrow}^{\Theta}(v^1) = (5,5,5,5,4,3,3,3) \quad \text{и} \quad x_{\downarrow}^{\Theta}(v^2) = (5,4,4,4,4,4,4,4)$$

с учетом равноважности всех компонент можно составить цепочку от второй оценки к первой (цепочка не уместилась на одной строке и записана на трех):

$$x_{\downarrow}^{\Theta}(v^2) = (5,4,4,4,4,4,4,4)\, P^{23(44\to35)}\, (5,3,5,4,4,4,4,4),$$
$$(5,3,5,4,4,4,4,4) P^{45(44\to35)} (5,3,5,3,5,4,4,4),$$
$$(5,3,5,3,5,4,4,4) P^{67(44\to35)} (5,3,5,3,5,3,5,4) = z.$$

А так как

$$z_{\downarrow} = (5,5,5,5,4,3,3,3) = x_{\downarrow}^{\Theta}(v^1),$$

то приходим к заключению, что второй студент по успеваемости предпочтительнее первого. Это можно записать так: $v^2 P_{\Theta D} v^1$. Иначе говоря, второй вариант доминирует (по отношению $P_{\Theta D}$) над первым вариантом, который оказывается доминируемым.

2. Таким образом, в рассматриваемой задаче усовершенствование шкалы при помощи качественной информации о скорости возрастания предпочтения вдоль нее позволило выделить одного наилучшего студента и решить поставленную задачу выбора. Конечно, далеко не во всякой задаче добавление информации D позволит выделить единственный наилучший вариант. И тогда придется, если это окажется возможным, продолжить совершенствование шкалы критериев, получая более полную, но и более сложную информацию об изменении предпочтений вдоль нее.

§ 3.5. Итеративный подход к решению многокритериальных задач

Обдумывать надо много раз,
принимать решение — однажды.

Публилий Сир

1. Как уже неоднократно отмечалось выше, качественная информация о предпочтениях по сравнению с количественной более надежна, но и менее эффективна в том смысле, что обычно не позволяет выделить единственный наилучший вариант или хотя бы небольшое число недоминируемых. А количественная информация более эффективна, но и менее надежна. Какую информацию и как лучше получать и использовать для анализа многокритериальных задач принятия решений? Общие рекомендации по этому вопросу дает подход к моделированию предпочтений, известный в литературе под названием *итеративный*[9] Он основан на двух основных соображениях:

1) в первую очередь следует получать *более простую и надежную* информацию о предпочтениях, и лишь потом, *в случае необходимости* (когда такой информации недостаточно), привлекать *более сложную* и *менее надежную* информацию;
2) необходимо *проводить проверку* ранее накопленной и получаемой дополнительно информации на непротиворечивость и при выявлении противоречий осуществлять ее *корректировку*; при этом проверку менее надежного сообщения надо проводить при помощи более надежных или хотя бы нескольких столь же надежных сообщений.

При реализации итеративного подхода процесс анализа задачи представляется в виде последовательности шагов, на каждом из которых вначале получается дополнительная информация о предпочтениях, затем она проверяется на непротиворечивость, при необходимости корректируется, и уже на основе такой информации строятся отношения предпочтения и безразличия. При этом отношения предпочтения и безразличия, конструируемые на каждом шаге, должны быть определенным образом связаны.

---

[9] Итеративный подход был предложен и обоснован в статье: *Озерной В. М., Гафт М. Г.* Построение решающих правил в многокритериальных задачах // Проблемы принятия решений. — М.: Ин-т проблем управления, 1974. — С. 30–44. Потом он был развит в ряде других работ, в том числе: *Озерной В. М., Гафт М. Г.* Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. *Д. М. Гвишиани* и *С. В. Емельянова.* — М.: Машиностроение, 1978. — С. 14–47. *Гафт М. Г., Подиновский В. В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // АиТ. — 1981. — №6. — С. 128—138.

Допустим, на k-м шаге имелась информация о предпочтениях $G(k)$ и на ее основе были построены отношения $P(k)$ и $I(k)$. Предположим, далее, что на следующем, $k+1$-м шаге, получена дополнительная информация и на основе всей накопленной информации $G(k+1)$ построены отношения $P(k+1)$ и $I(k+1)$. Должно выполняться следующее вполне понятное ***требование*** к последовательно конструируемым отношениям предпочтения и безразличия.

Требование непротиворечивости. *Если на k-м шаге было выявлено, что одна из векторных оценок более предпочтительна, чем другая, или же что они одинаковы по предпочтению, то такое же соотношение между ними должно остаться и на следующем, $k+1$-м шаге, т. е. для любых векторных оценок x, y должно быть выполнено условие:*[10]

$$x\,P(k)\,y \quad \textit{влечет} \quad x\,P(k+1)\,y;$$

$$x\,I(k)\,y \quad \textit{влечет} \quad x\,I(k+1)\,y.$$

Перед первым шагом процесса в качестве отношения $P(0)$ обычно принимается отношение Эджворта–Парето P^0, а в роли отношения $I(0)$ выступает отношение равенства. В случае, когда результаты k-го шага не позволяют выделить один наилучший вариант, а указывают несколько недоминируемых и несравнимых между собой вариантов, необходимо перейти к очередному, $k+1$-му шагу и организовать получение дополнительной информации о предпочтениях. Если возможность получения информации исчерпана, то итеративный процесс анализа задачи заканчивается.

При выполнении требования непротиворечивости каждый вариант, который был доминируемым на k-м шаге, не может стать недоминируемым на следующем, $k+1$-м шаге[11]. Поэтому в процессе анализа задачи множество недоминируемых вариантов, вообще говоря, сужается, причем ни один из «претендентов» на оптимальный вариант не теряется!

Практически процесс анализа задач принятия решений в рамках итеративного подхода осуществляется в виде интерактивной процедуры, в которой на каждом шаге чередуются этапы получения информации о предпочтениях от ЛПР и/или экспертов

---

[10] Это требование можно записать в таком виде: $P(k) \subseteq P(k+1)$, $I(k) \subseteq I(k+1)$.

[11] То есть справедливо $V(k) \supseteq V(k+1)$, где $V(k)$ и $V(k+1)$ — множества недоминируемых вариантов на k-м и $k+1$-м шагах соответственно.

с этапами их обработки на компьютере и представления результатов анализа ЛПР. При этом диалог с человеком должен вестись на привычном для него языке, а результаты анализа представляться в удобном и понятном для него виде.

Для практической реализации итеративного подхода нужно иметь достаточно богатый арсенал подходящих методов. Таких методов по мере развития теории принятия решений постепенно становится все больше и больше. Относительно наиболее полным является набор методов, использующих информацию о важности критериев. Существенным является и то, что при непротиворечивости информации о важности оказывается выполненным и только что обсуждавшееся требование непротиворечивости отношений предпочтения и безразличия, например:

Утверждение 1. *Пусть информация Θ уточняет информацию Ω, т. е. если в Ω есть сообщение $i \succ j$, то согласно Θ должно быть $i \succ^h j$ с $h > 1$, а если в Ω есть сообщение $i \approx j$, то согласно Θ должно быть $i \succ^1 j$. Тогда $xP^\Omega y$ влечет $xP^\Theta y$, а $xI^\Omega y$ влечет $xI^\Theta y$ для любых векторных оценок x и y.*

А как соотносятся эти отношения с обобщенными критериями? Оказывается, что тоже вполне естественным образом. Например, справедливы следующие утверждения о взвешенной сумме однородных критериев.

Утверждение 2. *Пусть коэффициенты важности α_i согласованы с информацией Ω: более важному критерию соответствует бóльший коэффициент важности (т. е. из $i \succ j$ следует $\alpha_i > \alpha_j$, а из $i \approx j$ следует $\alpha_i = \alpha_j$). Тогда для любых векторных оценок x и y:*

$xP^\Omega y$ влечет неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \quad + \alpha_m x_m > \alpha_1 y_1 + \quad + \alpha_m y_m,$$

$xI^\Omega y$ влечет равенство

$$\alpha_1 x_1 + \quad + \alpha_m x_m = \alpha_1 y_1 + \quad + \alpha_m y_m.$$

Утверждение 3. *Если коэффициенты важности α_i порождены информацией Θ: из $i \succ^h j$ следует $\alpha_i/\alpha_j = h$, то для любых векторных оценок x и y:*

$xP^\Theta y$ влечет неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \quad + \alpha_m x_m > \alpha_1 y_1 + \quad + \alpha_m y_m,$$

$xI^\Theta y$ влечет равенство

$$\alpha_1 x_1 + \quad + \alpha_m x_m = \alpha_1 y_1 + \quad + \alpha_m y_m.$$

Следовательно, если на последних этапах интерактивной процедуры будет решено прибегнуть к использованию обобщенного критерия, то требование непротиворечивости окажется выполненным.

Подчеркнем, что фактически в рамках итеративного подхода и осуществлялось решение задачи о студентах при помощи информации о важности критериев: вначале использовалась качественная информация, а потом была привлечена информация количественная.

3. И последнее замечание. Понятно, что проведение интерактивной процедуры согласно описанным выше правилам — дело весьма трудоемкое и сложное даже при использовании современных информационных и вычислительных технологий. Поэтому естественная область применения итеративного подхода — анализ сложных и ответственных задач принятия решений уникального или штучного (редко повторяющегося) характера. Однако и для типовых, часто решаемых задач он представляется полезным: прежде чем строить обобщенные показатели, стоит воспользоваться методами теории важности критериев. Это позволит составить ясное представление о том, какие результаты являются вполне корректными, а какие можно получить лишь после принятия трудно проверяемых допущений и недостаточно надежных экспертных оценок.

Выводы из главы 3

> Начала математического познания отчетливы, но в обыденной жизни не употребительны, потому с непривычки в них трудно вникнуть; зато всякому, кто вникнет, они совершенно очевидны, и только совсем дурной ум не способен построить правильного рассуждения на основе столь самоочевидных начал.
>
> *Блез Паскаль. «Мысли»*

1. Точное определение понятия *превосходства в важности* одного критерия над другим в определенное число раз опирается на понятие *N-модели.* Эта модель получается за счет того, что каждая составляющая исходной векторной оценки *повторяется подходящее число раз*, так, чтобы отношение числа повторений для двух составляющих было равно как раз отношению величин важностей соответствующих критериев. В отличие от конструирования взвешенной суммы критериев, такой прием *позволяет избежать* выполнения арифметических операций со значениями

критериев и потому оказывается подходящим и для критериев с *качественной* (порядковой) шкалой.

2. После построения N-модели, согласованной с количественной информацией о важности, для сравнения по предпочтению любых двух вариантов можно применить *простой метод*, так как в N-модели все критерии являются равноважными.

3. Для объяснения результатов сравнения вариантов по предпочтению, как и в случае качественной информации о важности, можно использовать *объясняющие цепочки*, которые связывают их «расширенные» векторные оценки из N-модели.

4. Оптимальными могут быть лишь те варианты, которые являются *недоминируемыми* по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной количественной информацией о важности критериев.

5. Если количественная информация о важности *не позволяет* выделить один наилучший вариант, то для дальнейшего анализа задачи следует получить и использовать *дополнительную информацию* в виде сведений *о характере роста предпочтений вдоль шкалы* критериев.

6. В теории важности разработано уже достаточно много методов для информации различного типа и состава о важности критериев и их шкалах. Это позволяет подобрать подходящие методы и эффективно их использовать для анализа многокритериальных задач принятия решений в рамках *итеративного подхода*. Согласно этому подходу, *вначале* следует получать более *простую и надежную* информацию о предпочтениях, и лишь потом, в случае необходимости (когда такой информации недостаточно), привлекать *более сложную* и менее надежную информацию. При этом накопленную информацию о предпочтениях следует *проверять на непротиворечивость* и, при необходимости, *корректировать*. Такой подход ориентирован в первую очередь на анализ сложных и ответственных задач принятия решений уникального или редко встречающегося характера. Однако он может оказаться полезным и для типовых, часто повторяющихся задач.

Контрольные вопросы и задания к главе 3

Ключом ко всякой науке, бесспорно,
является вопросительный знак .

Оноре Бальзак. «Шагреневая кожа»

1. Из чего состоит количественная информация о важности критериев и в чем проявляется ее противоречивость?

2. Что такое N-модель и N-оценки?
3. Сформулируйте определение понятия «Один критерий важнее другого в h раз».
4. Объясните, почему именно N-модель при взаимно простых числах n_i удобнее других N-моделей использовать для сравнения по предпочтению вариантов.
5. Найдите N для построения основной (наиболее простой) N-модели в трехкритериальной задаче при наличии информации о важности $\Theta = \{1 \succ^{1,2} 2, 2 \succ^{1,8} 3\}$.
6. В задаче о студентах сравните по успеваемости всех студентов при помощи взвешенной суммы критериев с коэффициентами важности, соответствующими информации $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \approx 3,\ 3 \succ^{2} 4\}$. Сопоставьте полученный результат с приведенным в § 3.3 для отношения P^{Θ}
7. Попробуйте доказать справедливость выводов о сравнении студентов по успеваемости на основе интервальной информации о важности критериев, сделанные в конце § 3.3.
8. Какие сведения о предпочтениях позволяют совершенствовать шкалу критериев?
9. Предположим, что в задаче о студентах рост предпочтений вдоль шкалы критериев не замедляется, а ускоряется. Попробуйте с учетом этой информации сравнить первого и второго студентов.
10. В чем состоит итеративный подход к анализу задач принятия решений? Укажите на сильные и слабые стороны этого подхода.
11. Почему методы теории важности критериев позволяют реализовывать итеративный подход при анализе многокритериальных задач?

ПОСЛЕСЛОВИЕ

> Вот вам и вся суть. Остальное — пространные и неудобоваримые научные подробности в виде формул, расчетов и жутких фраз, которые ни один нормальный человек не поймет. Вряд ли вы захотите во все это вникать, если только не питаете патологического интереса к науке.
>
> *Александр Бушков. Сварог. «Рыцарь из ниоткуда»*

Теория важности критериев в настоящее время оказалась востребованной практикой принятия решений и продолжает активно развиваться. На основе ее идей и методов создаются компьютерные системы поддержки принятия решений, как проблемно-ориентированные, так и общего назначения, в том числе учебные (см., например, www.ppsh.ru).

В настоящей небольшой книжке далеко не все идеи и методы теории важности удалось даже хотя бы упомянуть. Читатель, желающий глубже ознакомиться с этой теорией, может обратиться к учебной и научной литературе, указанной в приложении.

> Я помню древнюю молитву мастеров:
> Храни нас, Господи, от тех учеников,
> Которые хотят, чтоб наш убогий гений
> Кощунственно искал все новых откровений.
> . . . .
> Лишь Небу ведомы пределы наших сил,
> Потомством взвесится, кто сколько утаил.
> Что создадим мы впредь, на это власть Господня,
> Но что мы создали, то с нами посегодня.
>
> *Николай Гумилев. «Молитва мастеров»*

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ИСТОРИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ

Истина долго проникала в мое сознание

Гастон Леру. «Призрак Оперы»

Теория качественной важности была создана в 70–80-е годы прошлого (теперь уже!) века. Первыми работами, содержащими базовые идеи и первые основные результаты этой теории, были статьи[1]:

1. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // ЖВМиМФ. — 1975. — №2. — С. 330–344.
2. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // АиТ. — 1976. — №11. — С. 118–127.
3. *Подиновский В. В.* Двухкритериальные задачи с неравноценными критериями // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. — 1977. — №5. — С. 44–50.

Затем был опубликован целый ряд работ, в том числе:

4. *Подиновский В. В.* Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности // АиТ. — 1978. — №10. — С. 130–141.
5. *Подиновский В. В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. *С. В. Емельянова.* — М.: Машиностроение, 1978. — С. 48–82.
6. *Подиновский В. В.* О построении множества эффективных стратегий в многокритериальных задачах с упорядоченны-

[1] Основное содержание этих статей было аннотировано в докладах на конференциях и опубликовано в работах: *Подиновский В. В.* Задачи принятия решений по нескольким однородным равноценным критериям // III Всесоюзная конференция по теории игр: Тез. докл. — Одесса: Изд-во Одесского гос. ун-та, 1974. — С. 131–132. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи синтеза сложных систем с неравноценными критериями // Автоматизированные системы планирования и управления. — Ереван: Айастан, 1975. — С. 106–109.

ми по важности критериями // ЖВМиМФ. — 1978. — Т. 18, №4. — С. 908–915.

7. *Яшина Н. П.* Упорядочение множества векторных оценок при наличии информации о сравнительной важности групп критериев // Деп. рук. №2903-В86. — М.: ВИНИТИ, 1986.
8. *Осипова В. А., Подиновский В. В.* Диалоговое восстановление многокритериальной структуры предпочтений // Модели и методы оптимизации экономических систем. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 57–69.
9. *Барышников Ю. М.* О среднем числе вариантов, недоминируемых по сравнению *В. В. Подиновского* // АиТ. — 1990. — №6. — С. 161–167.
10. *Барышников Ю. А., Подиновский В. В., Поляшук М. В.* Эффективность решающих правил в многокритериальных задачах выбора нескольких объектов // АиТ. — 1990. — №12. — С. 136–142.
11. *Podinovski V. V.* Problems with importance-ordered criteria // User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support / Wessels J. and Wierzbicki A.P. (Eds.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. — Berlin: Springer, 1993. — V. 397. — P. 150–155.
12. *Алексеев Н. С., Осипова В. А.* Декомпозиция задачи выбора оптимальных решений при аксиоматическом подходе к оценке сравнительной важности критериев // Деп. рук. №2218-В94. — М.: ВИНИТИ, 1994.
13. *Алексеев Н. С.* Алгоритмы сравнения вариантов решения при линейно упорядоченных критериях // Деп. рук. №1366-В95. — М.: ВИНИТИ, 1995.

Наиболее полно результаты теории качественной важности, полученные до 1980 г., изложены в главе монографии:

14. *Подиновский В. В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. *Н. Н. Моисеева.* — М.: Наука, 1979. — С. 117–145,

а более поздние результаты — в § 8.3 и § 8.4 монографий:

15. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи оптимизации с упорядоченными по важности критериями. Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. *Е. Г. Гольштейна.* — М.: Наука, 1991. — С. 308–336.

16. *Podinovski V. V.* Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria. Efficiency estimation of decision rules in discrete multiobjective problems // Modern Mathematical Methods of Optimization / Elster K.-H. (ed.). — Berlin: Akademie Verlag, 1993. — P. 254–277.

Некоторые приложения теории качественной важности освещены в работах:

17. *Грумондз В. Т., Яковлев Г. А.* Алгоритмы аэрогидробаллистического проектирования. — М.: МАИ, 1994.
18. *Подиновский В. В., Грумондз В. Т., Осипова В. А., Алексеев Н. С.* Методы теории важности критериев в задачах динамического проектирования // Сб. тр. 1-й Московской международной конференции по исследованию операций. — М.: ВЦ РАН, 1996. — С. 82–86.
19. *Podinovski V. V., Podinovski Vic. V.* Decision analysis under partial information // Trends in Multicriteria Decision Making / Stewart Th. J., Van der Honert R.C. (eds.). Lecture Notes in Economic and Mathematical system. — Berlin: Springer, 1998. — V. 465. — P. 77–84.
20. *Подиновский В. В., Раббот Ж. М.* Анализ экспертных оценок методами теории важности критериев // Научно-техн. информ. Сер. 2. — 2000. — №2. — С. 22–26.

В следующей статье описана компьютерная система поддержки принятия решений, основанная на качественной теории важности (система была создана в конце 80-х годов):

21. *Подиновский В. В.* Система, использующая информацию о важности критериев для анализа альтернатив (СИВКА) // Научно-техн. информ. Сер. 2. — 1998. — №3. — С. 52–57.

Основные результаты качественной теории важности нашли отражение во многих учебниках и монографиях по теории принятия решений, в том числе:

22. *Подиновский В. В.* Теоретические основы выработки решений в сложных ситуациях: Учеб. пособие. — М.: МО СССР, 1978.
23. *Гафт М. Г.* Принятие решений при многих критериях. — М.: Знание, 1979.
24. *Подиновский В. В.* Математическая теория выработки решений в сложных ситуациях: Учебник. — М.: МО СССР, 1981.
25. *Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.* Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. — М.: Наука, 1981.

26. *Вилкас Э. Й.*, *Майминас Е. З.* Решения: теория, информация, моделирование. — М.: Радио и связь, 1981.
27. *Макаров И. М.*, *Виноградская Т. М.*, *Рубчинский А. А.*, *Соколов В. Б.* Теория выбора и принятия решений: Учеб. пособие. — М.: Наука, 1982.
28. *Гаврилов В. М.* Методы многокритериальной оптимизации: Учеб. пособие. — М.: МАДИ, 1982.
29. *Розен В. В.* Цель–оптимальность–решение (математические модели принятия оптимальных решений). — М.: Радио и связь, 1982.
30. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982.
31. Надежность и эффективность в технике. Справочник. Т. 3. Эффективность технических систем / Под общ. ред. В. Ф. Уткина и Ю. В. Крючкова. — М.: Машиностроение, 1988.
32. *Березовский Б. А.*, *Барышников Ю. М.*, *Борзенко В. И.*, *Кемпнер Л. М.* Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. — М.: Наука, 1989.
33. *Полищук Л. И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. — Новосибирск: Наука, 1989.
34. *Вилкас Э. Й.* Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990.
35. *Батищев Д. И.*, *Шапошников Д. Е.* Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений. — Нижний Новгород: Ин-т прикл. физ. РАН, 1994.
36. *Ларичев О. И.*, *Мошкович Е. М.* Качественные методы принятия решений. — М.: Наука, 1996.
37. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений: Учебник. — М.: Логос, 2002.

Идеи и результаты теории качественной важности можно найти и в ряде таких монографий и учебников, которые не содержат ссылок на перечисленные выше первоисточники. В числе таковых:

38. *Литвак Б. Г.* Экспертные оценки и принятие решений. — М.: Патент, 1996.
39. *Балдин К. В.*, *Воробьев С. Н.* Управленческие решения: теория и технология принятия: Учебник. — М.: Проект, 2004.
40. *Балдин К. В.*, *Воробьев С. Н.*, *Уткин В. Б.* Управленческие решения: Учебник. — 2-е изд. — М.: «Дашков и К°», 2006.

Теория количественной важности была заложена на рубеже первого и второго тысячелетий. Первыми работами были статьи[2]:

41. *Подиновский В. В.* Количественные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техн. информ. Сер. 2. — 1999. — №5. — С. 22–25.
42. *Подиновский В. В.* Количественная важность критериев // АиТ. — 2000. — №5. — С. 110–123.
43. *Podinovski V. V.* The quantitative importance of criteria for MCDA // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. — 2002. — V. 11. — P. 1–15.

Затем были опубликованы статьи:

44. *Подиновский В. В.* Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техн. информ. Сер. 2. — 2002. — №10. — С. 19–21.
45. *Подиновский В. В.* Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики // АиТ. — 2004. — №8. — С. 196–203.
46. *Подиновский В. В.* Информация о важности критериев и их шкалах в многокритериальной оптимизации // Научно-техн. информ. Сер. 2. — 2005. — №1. — С. 22–26.
47. *Подиновский В. В.* Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // АиТ. — 2005. — №9. — С. 129–137.
48. *Подиновский В. В.*, *Раббот Ж. М.* Количественная важность критериев со шкалой первой порядковой метрики и выпуклыми предпочтениями // АиТ. — 2006. — №3. — С. 186–191.

Теория важности неоднородных критериев (теория параметрической важности), которая в данном учебном пособии не рассматривалась, была заложена в уже упомянутой работе [5]. В ней были предложены определения равенства и превосходства в важности отдельных неоднородных критериев и групп критериев, а также определения сравнений степеней превосходства в важности; были даны и решающие (задающие отношения предпочтения) правила для двухкритериальных задач с континуальными и дискретными критериями. Указанные определения, а также некоторые результаты были приведены также и в [14, 15]. Дальнейшие результаты теории важности для неод-

[2] Результаты из них были аннотированы в докладе: *Подиновский В. В.* Важность критериев // Тр. Межд. конф. по пробл. управл. Т. 2. — М.: Ин-т пробл. управл., 1999. — С. 336.

народных критериев (имеющих континуальные шкалы, причем как неограниченные, так и ограниченные) были опубликованы в статье[❽]:

49. *Меньшикова О. Р.*, *Подиновский В. В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // ЖВМиМФ. — 1988. — Т. 28, №5. — С. 647–659.

На [49] имеются ссылки и в [14, 15].
Затем методы этой теории была применены для задач с интервальными оценками замещений:

50. *Berman V. P.*, *Naumov G. Ye.*, *Podinovski V. V.* Interval value tradeoff: Theory, method, software, and applications / Multiple Criteria Decision Making. — Berlin: Springer, 1992. — P. 81–91.
51. *Berman V. P.*, *Naumov G. Ye.*, *Podinovski V. V.* Interval Value Tradeoffs Methodology and Techniques of Multi-Criteria Decision Analysis / User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support. — Berlin: Springer, 1993. — P. 144–149.

В указанных статьях, помимо обзора теоретических результатов и их приложений, кратко описана основанная на них компьютерная система поддержки принятия решений MSITOS (система была создана в начале 90-х годов); в следующей статье представлена современная система DAM:

52. *Podinovski Vic. V.* A DSS for multiple criteria analysis with imprecisely specified trade-offs // EJOR. — 1999. — V. 113. — P. 261–270.

Обобщение теории качественной важности и теории важности неоднородных критериев было дано в статьях:

53. *Podinovski V. V.* Criteria importance theory // Multiobjective Problems of Mathematical Programming / Lewandowski A., Volkovich V (Eds.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — V 351. — P. 64–70.
54. *Podinovski V. V.* Criteria importance theory // Mathematical Social Sciences. 1994. — V. 27. — P. 237–252.

а затем изложено в монографиях [14, 15].

[❽] Основные результаты статьи аннотированы в докладе: *Подиновский В. В.*, *Меньшикова О. Р.* Применение методов линейного программирования для решений задач с упорядоченными по важности критериями // I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации: Тез. докл. — М.: ВИНИТИ, 1981. — С. 145–146.

Примечание. Результаты, идентичные по сути базовым результатам статей [45, 49], касающимся случая критериев с неограниченными шкалами, были опубликованы в 1997–2000 годах Ногиным В. Д. в нескольких работах, а затем составили основное содержание его монографии: *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. (Случай критериев с ограниченными шкалами в этих работах не рассматривался.) В списке литературы, приведенном в этой монографии, присутствуют статья [49] и книга [14]. Во второе, исправленное и дополненное издание указанной монографии (2005 г.) добавлен список литературы, включающий и работы [5, 15, 50–54].

Конец! Как звучно это слово!
Как много, — мало мыслей в нем!

Михаил Лермонтов.
Из письма М. А. Лопухиной. 28.08.1832