Лекция 14

Элементы операционного исчисления

Важным разделом приложений теории функции комплексного переменного является операционное исчисление. Развитие и систематическое применение операционного исчисления началось в конце 19 века с работ английского инженера-электрика О. Хевисайда (1880 – 1925), который предложил формальные правила обращения с оператором дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и успешно решил ряд прикладных задач в электротехнике. Однако операционное исчисление не получило у него строгого математического обоснования. Первоначальное обоснование символического исчисления дали в 20 годах 20 века Т.Д. Бромвич (8.2.1875 – 26.8.1929) и Дж. Карсон (23.7.1898 – 28.11.1952), английские математики, связав этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований. Обоснование операционного исчисления было дано с помощью преобразования Лапласа.

Методы операционного исчисления позволяют упростить алгоритм дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью перехода к решению более простых алгебраических уравнений.

1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения

Пусть $f(t)$ действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату)

Определение. ***Оригиналом*** называется функция $f(t)$, которая удовлетворяет требованиям:

1) $f(t)$ непрерывна вместе со всеми своими производными достаточно высокого порядка для всех $t \geq 0$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода на каждом интервале конечной длины;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции, т. е. существуют $M > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что для всех t справедливо $|f(t)| < Me^{-s_0 t}$.

Число s_0 называют показателем роста $f(t)$. Для ограниченных функций его обычно берут равным нулю.

Первое условие означает, что процесс начинается с некоторого момента времени. Удобнее считать, что в момент t=0.

Пример.

Проверить, являются ли функции оригиналами

1) $f(t)=\begin{cases}2e^{5t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $\quad M=2\ \ S_0=5\ \ \textit{оригинал}$

2) $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-2} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $\quad \textit{в т. } t=2 \textit{ разрыв } 2 \textit{ рода} \qquad \textit{не является оригиналом}$

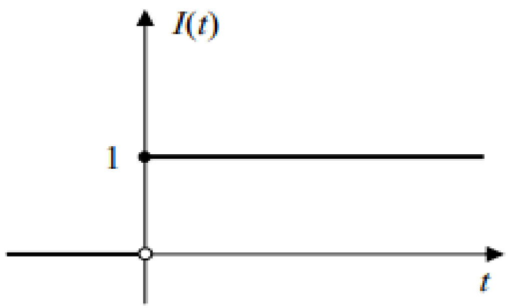
$f(t)=\begin{cases}3^{5t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

3) $3^{5t}>Me^{S_0 t}\quad \forall M\ \ \forall S_0,\ t>0,$ *т.е. растет быстрее показатльой функции*

не является оригиналом

4)Простейшей функцией оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\chi(t)=\begin{cases}1 \textit{ при } t\ge 0,\\ 0 \textit{ при } t<0.\end{cases}$$



Замечание. Если функция $f(t)=\cos wt$ не удовлетворяет условию первому, то $\chi(t)f(t)=\chi(t)\cos wt$ уже ему удовлетворяет, т.е. будет оригиналом. Пишут просто $\cos wt$

Определение. ***Изображением оригинала*** функции $f(t)$ действительной переменной *t* называется функция $F(p)$ комплексной переменной *p*, определяемая формулой:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (1)$$

Несобственный интеграл в правой части формулы (1), зависящий от комплексного параметра *p*, называется ***интегралом Лапласа***.

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют **преобразованием Лапласа.**

Символически соответствие между оригиналом и изображением записывается обычно так:

$$f(t) \to F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \to f(t).$$

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

Необходимый признак существования изображения. Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$

Теорема о единственности оригинала

Если функция $F(p)$ служит изображением 2-х оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках , в которых они непрерывны.

Пример.

1) Найти изображение функции Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 \; при \; t \ge 0, \\ 0 \; при \; t < 0. \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^\infty \chi(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{1 \risingdotseq \frac{1}{p}}$$

2)

$\chi(t) = e^{at}$ $\quad a$ – *любое число*

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^\infty = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{p-a} e^{-b(p-a)} \Big|_0^b = \frac{1}{p-a}$$

$$\boxed{e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}}$$

3)

$f(t) = t$

$$F(p) = \int_0^\infty t e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} U = t & dU = dt \\ dV = e^{-pt} dt & V = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{bmatrix} = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p^2}{}^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p^2}$$

$$\boxed{t \risingdotseq \frac{1}{p^2}}$$

4)
$f(t)=\sin t$

$$F(p)=\int_0^\infty \sin t e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} U=\sin t & dU=\cos t dt \\ dV=e^{-pt}dt & V=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt=$$

$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty+\frac{1}{p}\begin{bmatrix} U=\cos t & dU=-\sin t dt \\ dV=e^{-pt}dt & V=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty-\frac{1}{p^2}\int_0^\infty \sin t e^{-pt}dt$$

$$F(p)(1+p^2)=-\frac{\cos t+p\sin t}{e^{pt}}\Big|_0^\infty=0+1=1 \qquad F(p)=\frac{1}{1+p^2}$$

$$\boxed{\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+p^2}} \qquad \boxed{\cos t \risingdotseq \frac{p}{1+p^2}}$$

Свойства преобразования Лапласа

1. ***Теорема линейности.***

Если $f_1(t)\to F_1(p),\ f_2(t)\to F_2(p)$, то для любых постоянных α и β линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, то есть $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\to\alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$

Доказательство.

$$\int_0^\infty (c_1f_1(t)+c_2f_2(t))e^{-pt}dt=c_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt+c_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt=c_1F_1(p)+c_2F_2(p)$$

Замечание. Для функции $f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_if_i(t)$ существенно, что все слагаемые являются оригиналами. Т.к. например функция $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$ оригинал, а слагаемые $f_1(t)=\frac{e^t}{t}$ и $f_2(t)=\frac{1}{t}$ оригиналами не являются.

Справедливо и обратное. Слагаемые $c_iF_i(p)$ должны быть изображениями. Например $F(p)=Ln\frac{p-1}{p}$ изображение, а слагаемые $Ln(p-1)$ и $-Ln(p)$ нет.

Пример.

$$f(t) = 3 + 2e^{-t}$$

$$3 \to \frac{3}{p} \qquad 2e^{-t} \to 2 \cdot \frac{1}{p+1}$$

$$3 + 2e^{-t} \to \frac{3}{p} + \frac{2}{p+1}$$

2. *Теорема подобия*

Если $f(t) \to F(p)$, то $f(at) \to \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$ для любого постоянного $a > 0$.

Доказательство.

$$f(at) \to \int_0^\infty f(at) e^{-pt} dt = \left[at = z \;\; dt = \frac{1}{a} dz \right] = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(z) e^{-\frac{p}{a} z} dz = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$$

$$\cos t \fallingdotseq \frac{p}{1+p^2} \qquad \boxed{\cos at \fallingdotseq \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{1 + (\frac{p}{a})^2} = \frac{p}{a^2 + p^2}}$$

$$\sin t \fallingdotseq \frac{p}{1+p^2} \qquad \boxed{\sin at \fallingdotseq \frac{1}{a} \frac{1}{1 + (\frac{p}{a})^2} = \frac{a}{a^2 + p^2}}$$

3. Теорема смещения изображения

Если $f(t) \to F(p)$, то $e^{-at} f(t) \to F(p+a)$ для любого постоянного числа a; т.е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

Доказательство.

$$e^{-at} f(t) \to \int_0^\infty f(t) e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(a+p)t} dt = F(p+a)$$

$$\cos bt \fallingdotseq \frac{p}{b^2 + p^2} \qquad \boxed{e^{-at} \cos bt \fallingdotseq \frac{p+a}{b^2 + (p+a)^2}}$$

$$\sin bt \fallingdotseq \frac{b}{b^2 + p^2} \qquad \boxed{e^{-at} \sin bt \fallingdotseq \frac{b}{b^2 + (p+a)^2}}$$

Пример.

$$F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}$$

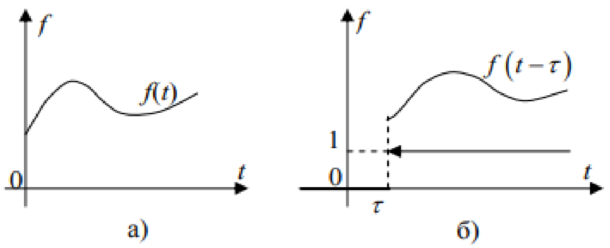
$$F(p)=\frac{p}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2}$$

$$f(t)=e^t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

4. *Теорема запаздывания*

Если $f(t)\to F(p)$, то $f(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p)$ для любого постоянного $\tau>0$; т.е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала на $e^{-p\tau}$.



Доказательство.

$$t-\tau=t_1 \qquad dt=dt_1 \qquad t=\tau+t_1$$

$$f(t-\tau)\to\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-p(\tau+t_1)}dt_1=\begin{bmatrix} при\ \ t<\tau & f(t-\tau)=0 \\ при\ \ t_1<0 & f(t_1)=0\end{bmatrix}$$

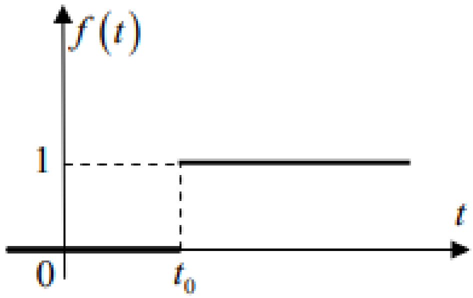
$$=\int_0^\infty f(t_1)e^{-p(\tau+t_1)}dt_1=\int_0^\infty f(t_1)e^{-p\tau}e^{-pt_1}dt_1=e^{-p\tau}\int_0^\infty f(t_1)e^{-pt_1}dt_1=e^{-p\tau}F(p)$$

Пояснение термина запаздывание.

Графики функций $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-\tau)$ сдвинута на τ единиц вправо.

Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

Обобщенная единичная функция $\chi(t-t_0)=\begin{cases}1\ при\ t\geq t_0, \\ 0\ при\ t<t_0.\end{cases}$



Запаздывающая функция $g(t)=\begin{cases} f(t-\tau)\ при\ t\ge\tau, \\ 0\ при\ t<\tau \end{cases}$

записывается так: $g(t)=f(t-\tau)\cdot\chi(t-\tau)$.

Примеры.

Найти $F(p)$ функции $f(t)=t-1$

Чтобы $f(t)$ удовлетворяла определению оригинала

$$f(t)=(t-1)\chi(t)\to\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=F(p)$$

$$т.е.\ \ f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t-1 & t\ge 0 \end{cases}\quad рис.1$$

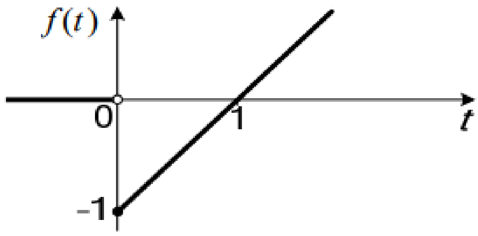


рис.1

Если же $f(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ t-1 & t\ge 1 \end{cases}$ $рис.2$

$$f(t)=(t-1)\chi(t-1)\to\frac{1}{p^2}e^{-p}=F(p)$$

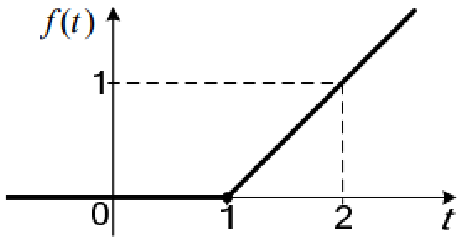


рис.2

Пример

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<2\\ 4-t & 2<t<4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$

Запишем функцию оригинал одним аналитическим выражением, используя функцию Хевисайда

$$f(t)=t\chi(t)-t\chi(t-2)+(4-t)\chi(t-2)-(4-t)\chi(t-4)=$$
$$=t\chi(t)+\chi(t-2)(4-t-t)-(4-t)\chi(t-4)=$$
$$=t\chi(t)-2(t-2)\chi(t-2)+(t-4)\chi(t-4)$$
$$F(p)=\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p}$$