Лекция 6.
Функциональные ряды. Степенные ряды

Определение. Ряд, членами которого являются функции от х, называется *функциональным.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ...$$

При $x = x_0$ получается числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) = U_1(x_0) + U_2(x_0) + ... + U_n(x_0) + ...$$

Ряд может сходиться или расходиться.
Совокупность тех значений х, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости ряда*.
В области сходимости ряда, его сумма является некоторой функцией от х.
$S = S(x)$

Например.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2. + x^3 + ...$$

$$\text{если } |x| < 1 \text{ то ряд сходится } S(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ т.е. } x \in (-1;1)$$

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... \qquad (1)$$

Где $a_0, a_1, a_2, ...$ – коэффициенты ряда

Определение. Степенным рядом также называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ... \quad (2)$$

Говорят, что степенной ряд расположен по степеням $(x - x_0)$

При $x_0 = 0$ получим степенной ряд (1), который является частным случаем ряда (2)

Теорема Абеля. (теорема об области сходимости ряда)

1) Если степенной ряд сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях х, для которых $|x| < |x_0|$

2) Если ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всяком х, для которых $|x| > |x_1|$

Если $x_0 \neq 0$ точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда.

Теорема. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат

Определение. Если $|x_0| = R$, то интервалом сходимости степенного ряда, называется интервал $(-R;R)$

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

При $|x| < R$ ряд сходится абсолютно

При $|x| > R$ ряд расходится

Если ряд (1) сходится в одной точке $x_0 = 0$, то $R = 0$

Если ряд сходится при $x \in R$, то $R = \infty$

Найдем R радиус сходимости

Путь $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ – степенной ряд

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \ldots$

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$$

Ряд сходится, если $|x| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad |x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Ряд расходится, если $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (3)$$

Аналогично по радикальному признаку Коши

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (4)$$

На концах интервала сходимости, т.е. при $x = -R$ и $x = R$ ряд может как сходиться так и расходиться.

Например.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\cdot x^n$ Ряд расходится на всей числовой прямой , кроме точки $x = 0$,т.к. его радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0$

2)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \infty \qquad \textit{область сходимости } (-\infty;\infty)$$

3)

$$1+x+2^2x^2+3^3x^3++++=\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}n^n x^n\neq 0 \quad \text{при} \quad x\neq 0$$

Ряд расходится по необходимому признаку сходимости

Область сходимости состоит из одной точки $x=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{(2n+1)^2}.$$

4) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n+3)}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$

$$|x|<\frac{1}{2}\qquad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

Исследуем ряд на концах интервала сходимости

$$x=\frac{1}{2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(\frac{1}{2})^n}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\quad \text{ряд Дирихле сходится}$$

$$x=-\frac{1}{2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(-\frac{1}{2})^n}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\quad \text{сходится абсолютно}$$

$$[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$$

Замечание.

Интервал сходимости степенного ряда (2) находят из неравенства $|x-x_0|<R$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}\qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n}\right|=3$$

$$|x+2|<3\qquad -3<x+2<3\qquad -5<x<1$$

$$x=1\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot}\quad \text{расходится}$$

$$x=-5\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\quad \text{сходится}$$

$$[-5;1)$$

Свойства степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$

2. Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, имеющие соответственно радиусы сходимости R_1 и R_2 можно почленно складывать, вычитать, умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше , чем меньшее из чисел R_1 и R_2

3. Степенной ряд на интервале сходимости $(-R;R)$ можно почленно дифференцировать, при этом

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

4. Степенной ряд на интервале сходимости $(-R;R)$ можно почленно интегрировать

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx + \int_{x_1}^{x_2} a_2 x^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_3 x^3 dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx + \ldots$$

При этом после дифференцирования или интегрирования, полученные ряды имеют тот же радиус сходимости.