Исследование функций и построение графиков

План исследования функции

1. **Найти область определения функции**.

Определение. Областью определения функции $y = f(x)$ называется совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция $y = f(x)$ определена.

2. **Определить является функция четной, нечетной или общего вида.**

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется четной, если $\forall x \in D$ выполняется условие $(-x) \in D$ и $f(-x) = f(x)$, называется нечетной, если $\forall x \in D$ выполняется условие $(-x) \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной – относительно начала координат.

Если функция $y = f(x)$ является четной или нечетной, то исследование можно провести только для $x \geq 0$ и при построении графика воспользоваться его симметричностью.

3. **Определить является ли функция периодической.**

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется периодической на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что для $\forall x \in D, (x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется периодом функции.

Наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x+T) = f(x)$, является основным периодом функции.

Если функция периодическая, то исследование проводится на любом интервале, длина которого совпадает с основным периодом функции.

4. **Определить координаты точек пересечения графика с осями координат, определить интервалы знакопостоянства функции.**

5. Найти наклонные (в т.ч. горизонтальные) асимптоты и вертикальные асимптоты графика функции.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, где a - точка разрыва или граничная точка области определения функций.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существует предел $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют пределы $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b$.

При нахождении этих пределов удобно пользоваться правилом Лопиталя.

6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания (убывания) функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком ее производной y'.

Достаточные условия возрастания (убывания) функции. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $\forall x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, ($f(x) > f(x_0)$).

Максимум и минимум функции называется экстремумом функции. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения функции и в которых первая производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Достаточные условия экстремума

I Если непрерывная функция $y = f(x)$, дифференцируема в некоторой δ - окрестности точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

II Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная существует и отлична от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то в точке x_0 функция имеет экстремум. Если $f''(x) < 0$ - максимум, если $f''(x) > 0$ - минимум.

7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости (вогнутости) графика функции.

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале $(a;b)$, если он расположен выше (ниже) любой ее касательной на этом интервале.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если же $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b)$ - график вогнутый.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части выпуклости и вогнутости, является точкой перегиба.

Достаточное условие существования точек перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Результаты проведенного исследования функции рекомендуется свести в таблицу, в первой строке которой указываются все значения x, выделенные в результате исследования, как самой функции $f(x)$, так и ее производных $f'(x)$ и $f''(x)$, а также интервалы, на которые данными точками разбивается область определения. Во второй строке указываются значения функции на каждом из выделенных интервалов. В третьей строке выделяются критические точки функции и указывается знак первой производной на каждом интервале. В четвертой строке – знак второй производной на каждом интервале. В последней строке по знакам $f'(x)$ определяется характер монотонности функции, по знакам $f''(x)$ выпуклость (вогнутость) графика функции, а также определяется характер выделенных точек (точки максимума, точки минимума, точки перегиба).

Построение графика функции рекомендуется начать с обозначения на координатной плоскости точек, выделенных в таблице и построения асимптот (если они есть). Для более точного построения можно вычислить значения функции в дополнительных точках.

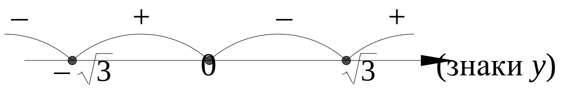
Приведем примеры полного исследования функции:

Пример 1: $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$

1. Область определения:
   $D(x):(-\infty;+\infty)$

2. $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-3(-x)}=-\sqrt[3]{x^3-3x}=-f(x)$
   $\Rightarrow$ функция нечетная.
3. Функция не является периодической.

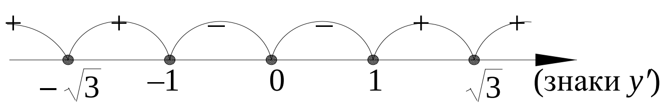
4. $y=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^3-3x}=0$
   $\Rightarrow x_1=0, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$ -нули функции.



5. Функция непрерывна на всей области определения, поэтому вертикальных асимптот нет.
   $$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}}{x}=1$$
   $$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x}-x=$$
   $$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2}=0$$
   Прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика функции.

6. Найдем первую производную:
   $$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^2-3\right)=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}$$

   $f'(x)=0$ при $x_1=-1,\ x_2=1$
   $f'(x)$ не существуют при $x_3=0,\ x_4=-\sqrt{3},\ x_5=\sqrt{3}$

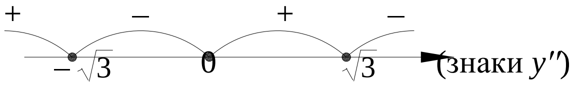


   Используя достаточные условия экстремума, получаем, что $x=1$ - точка минимума, $x=-1$ -точка максимума.

7. Найдем вторую производную:
   $$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)}{(x^3-3x)^{\frac{5}{3}}}$$

$f''(x) \neq 0 \qquad \forall x \in D(f)$

$f''(x)$ не существует при $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$



В точках $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ - перегиб графика.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	(-1;0)
y	-	0	+	$\sqrt[3]{2}$	+
y'	+		+		-
y''	+		-		-
	$\cup$ ↗	пере-гиб	$\cap$↗	max	$\cap$↘

Продолжение таблицы

x	0	(0;1)	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
y	0	-	$-\sqrt[3]{2}$	-	0	+
y'		-		+		+
y''		+		+		-
		$\cup$↘	min	$\cup$↗	пере-гиб	$\cap$↗

Строим график функции (рис.1).

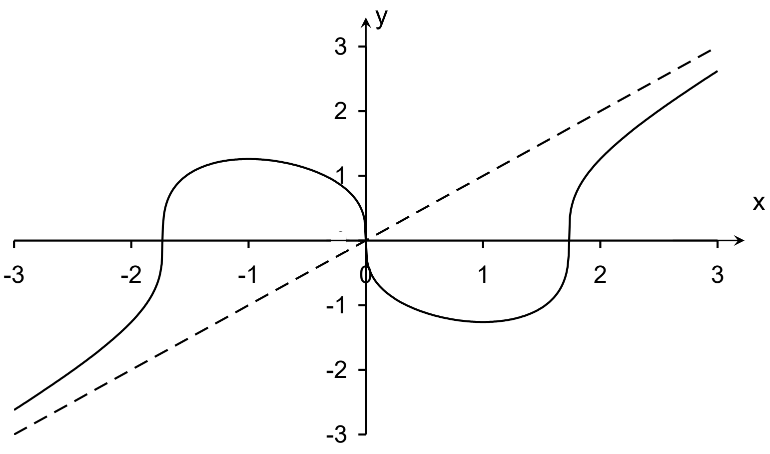


Рис.1

Пример 2: $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

1. Область определения:

   $x^2 - 4 \neq 0$

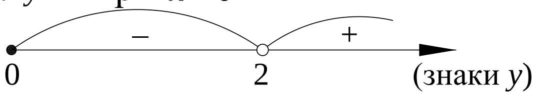
   $x_1 \neq 2, x_2 \neq -2 \Rightarrow D(f): (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$

   $\Rightarrow$ функция четная. Дальнейшее исследование проведем для $x \geq 0$.

3. Функция не является периодической.

4. $y = 0$ при $x = 0$



5. Поскольку $x = 2$ и $x = -2$ - точки разрыва

   и $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$,

   то $x = 2$ и $x = -2$ - вертикальные асимптоты.

   $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 \cdot x} = 0,$

   $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 1,$

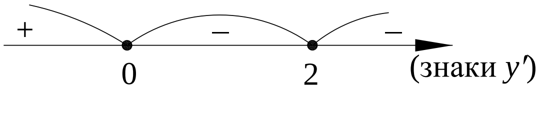
   $\Rightarrow y = 1$ - горизонтальная асимптота.

6. Найдем первую производную:

   $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$

   $f'(x) = 0$ при $x = 0$

   $f'(x)$ не существует при $x_1 = 2, x_2 = -2$.



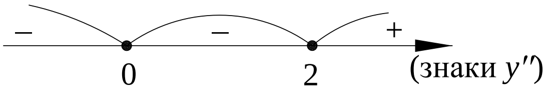
   $x = 0$ - точка максимума.

7. Найдем вторую производную:

   $f''(x) = \dfrac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

   $f''(x) \neq 0$ при $\forall x \in D(f)$

   $f''(x)$ не существует при $x_1 = 2, x_2 = -2$



Т.к. при $x=\pm 2$ функция $f(x)$ не определена, то точек перегиба нет.

Составим таблицу:

x	0	(0;2)	2	$(2;+\infty)$
y	0	-	Не существует	+
y'		-		-
y''		-		+
	max	$\cap\searrow$	Вертикальная асимптота	$\cup\searrow$

Строим график функции для $x\in[0;+\infty)$, затем на интервале $(-\infty;0)$строим линию, симметричную относительно оси Oy (рис.2).

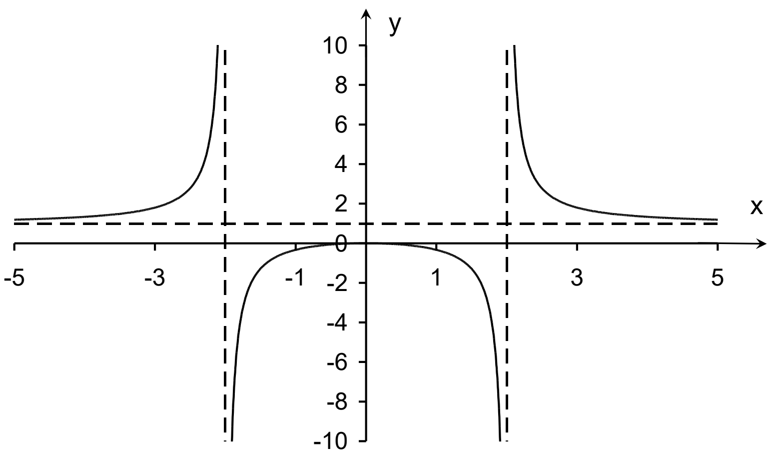


Рис.2

Пример 3: $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

1. Область определения:

   Функция определена для всех x, для которых $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$,

   т.е. $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

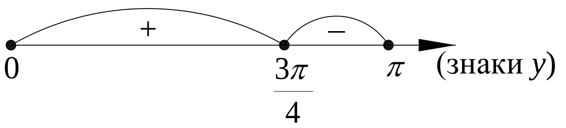
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. $f\left(x+T\right) = \dfrac{\sin\left(x+T\right)}{\sin\left(x + T + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$ при $T = \pi$

   π - основной период, основной промежуток $\left[0;\pi\right]$.

4. $y = 0$ при $\sin x = 0, \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$.

   Промежутку $\left[0;\pi\right]$ принадлежат точки $x_1 = 0, x_2 = \pi$.



5. В промежутке $\left[0;\pi\right]$ одна точка разрыва $x = \dfrac{3\pi}{4}$, в остальных точках функция непрерывна.

   $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4} - 0} \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4} + 0} \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = -\infty$.

   Прямая $x = \dfrac{3\pi}{4}$ - вертикальная асимптота.

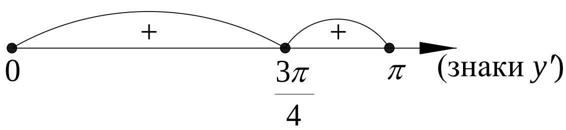
   Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. Найдем первую производную:

   $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

   $f'(x) \neq 0$ при $\forall x \in D(f)$,

   $f'(x)$ не существует при $x = \dfrac{3\pi}{4}$.



Следовательно, точек экстремума нет.

7. Найдем вторую производную:

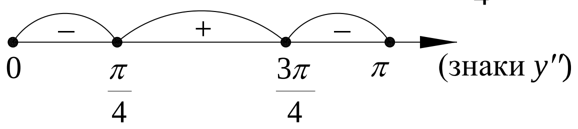
$$f''(x)=\frac{-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$f''(x)=0$, если $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$,

т.е. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

Из этого множества промежутку $[0;\pi]$ принадлежит точка $x=\frac{\pi}{4}$.

$f''(x)$ не существует при $x=\frac{3\pi}{4}$.



Составим таблицу:

x	0	$\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$	π
y	0	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	$-\infty/+\infty$	-	0
y'		+		+		+	
y''		-		+		-	
		$\nearrow$	пе-ре-гиб	$\cup\nearrow$	верти-каль-ная асим-птота	$\cap\nearrow$	

Строим график функции на промежутке $[0;\pi]$, затем используем ее периодичность (рис.3).

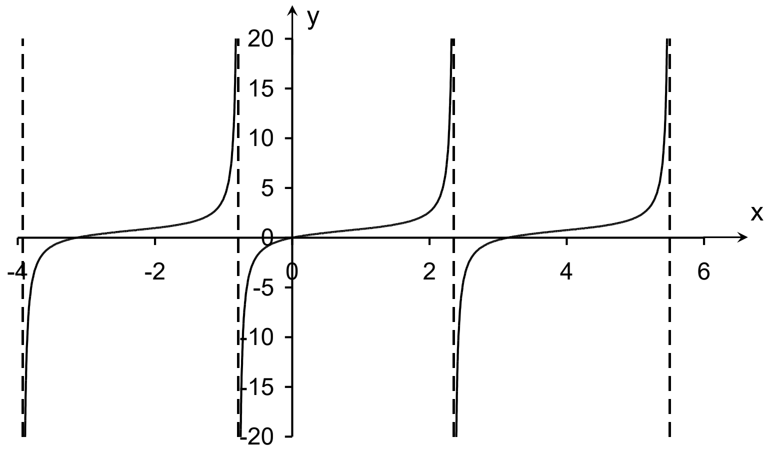


Рис.3

Пример 4: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5x - x^5$ на отрезке $[0;3]$.

1. Найдем критические точки на $[0;3]$
   $y' = 5 - 5x^4$
   $y' = 0$ при $5 - 5x^4 = 0$
   $x_1 = 1, x_2 = -1$
   $x = -1$ не принадлежит $[0;3] \Rightarrow$
2. Вычислим значения функции в критической точке $x = 1$ и на концах отрезка $x = 0, x = 3$.
   $y(1) = 4$
   $y(0) = 0$
   $y(3) = -238$
3. Среди полученных значений функции выберем наибольшее и наименьшее:
   $y_{наибольшее} = 4$
   $y_{наименьшее} = -238$