

Построение матрицы достижимостей графа

2.1. Пример

Найти матрицы достижимостей и обратных достижимостей для графа G , приведенного на рис. 2.1. Матрица смежности графа

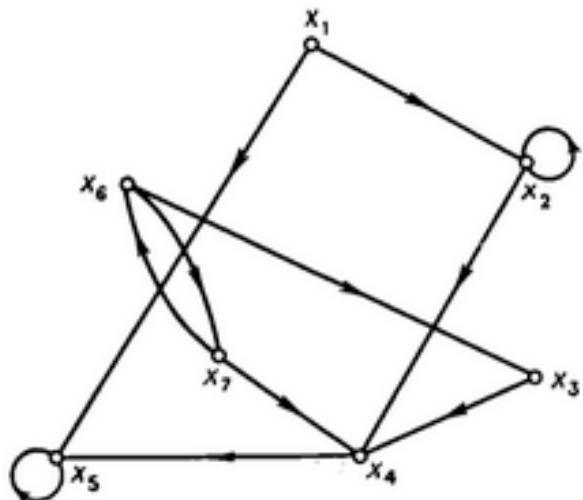


Рис. 2.1.

G имеет вид

$$A = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Множества достижимостей находятся с помощью соотношения (2.1):

$$\begin{aligned} R(x_1) &= \{x_1\} \cup \{x_2, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \\ &= \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_2) &= \{x_2\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \\&= \{x_2, x_4, x_5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_3) &= \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \\&= \{x_3, x_4, x_5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_4) &= \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \\&= \{x_4, x_5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_5) &= \{x_5\} \cup \{x_5\} = \\&= \{x_5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_6) &= \{x_6\} \cup \{x_3, x_7\} \cup \{x_4, x_8\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_8\} = \\&= \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(x_7) &= \{x_7\} \cup \{x_4, x_6\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \\&= \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}\end{aligned}$$

Следовательно, матрица достижимостей имеет вид

$$\bullet \quad \mathbf{R} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

матрица обратных достижимостей такова:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}' = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

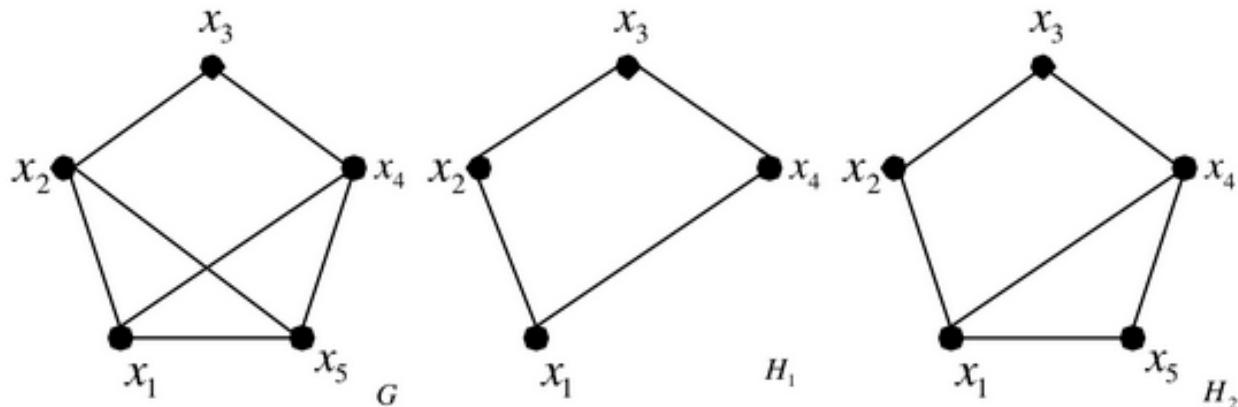
Матрицы достижимостей и обратных достижимостей, определенные выше, являются полными в том смысле, что на длины путей от x_i к x_j не накладывались никакие ограничения. С другой стороны, можно определить матрицы *ограниченных* достижимостей и контрадостижимостей — надо потребовать, чтобы длины путей не превышали некоторого заданного числа. Эти ограниченные матрицы тоже могут быть построены с помощью соотношений (2.1) и (2.2) — надо действовать точно так, как раньше, при нахождении «неограниченных» матриц, но только теперь r будет верхней границей длины допустимых путей.

Граф называют *транзитивным*, если из существования дуг (x_i, x_j) и (x_j, x_k) следует существование дуги (x_i, x_k) . *Транзитивным замыканием* графа $G = (X, A)$ является граф $G_{tc} = (X, A \cup A')$, где A' является минимально возможным множеством дуг, необходимых для того, чтобы граф G_{tc} был транзитивным. Так как путь от x_i к x_j в графе G должен соответствовать дуге (x_i, x_j) в G_{tc} , то совершенно очевидно, что матрица достижимостей \mathbf{R} графа G почти полностью совпадает с матрицей смежности \mathbf{A} графа G_{tc} — надо только в матрице \mathbf{A} поставить на главной диагонали единицы.

Операции над графами

Над графами можно совершать операции.

Одна из простейших операций – удаление вершины или дуги (ребра). С помощью которых можно из имеющегося графа получить другие графы с меньшим числом элементов. Очевидно, что удаление вершины влечет за собой и удаление инцидентных ей дуг или ребер (рис.3.2.1).



а) исходный граф

б) граф $H_1 \subset G$, получен из
графа G удалением
вершины x_5

в) граф H_2 , полученный из
 G удалением ребра $\{x_2, x_5\}$

Рисунок 3.2.1 – Операции удаления

Дополнение \overline{H} подграфа H графа G осуществляется множеством всех дуг (ребер) графа G , не принадлежащих H (рис.3.2.2).

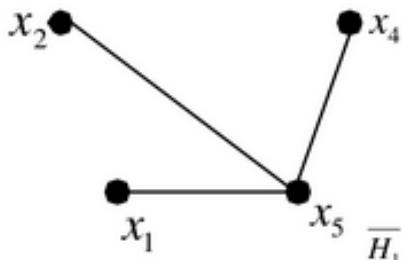


Рисунок 3.2.2 – Дополнение \overline{H}_1 подграфа H графа G

Операция добавления ребра в графе G осуществляется следующим образом: если вершины x_i и x_j графа $G = \langle X, U \rangle$ не смежны, то можно определить новый граф $G = \langle X, U_1 \rangle$, где U_1 получается из U добавлением $\{x_i, x_j\}$ (рис.3.2.3).

Одной из наиболее важных является операция объединения. Граф H называется объединением (или наложением) графов F и G , если:

$$\left. \begin{array}{l} XH = XF \cup XG \\ UH = UF \cup UG \end{array} \right\}$$

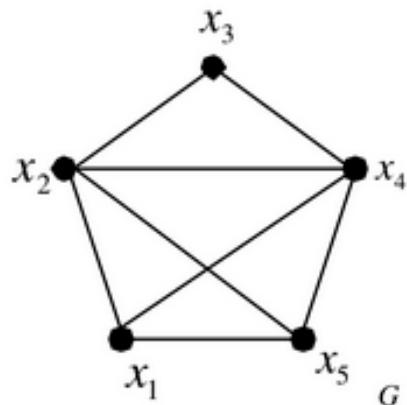


Рисунок 3.2.3 – Граф H_3 , полученный из графа G добавлением ребра $\{x_2, x_4\}$

На рис.3.2.4 $H = F \cup G$.

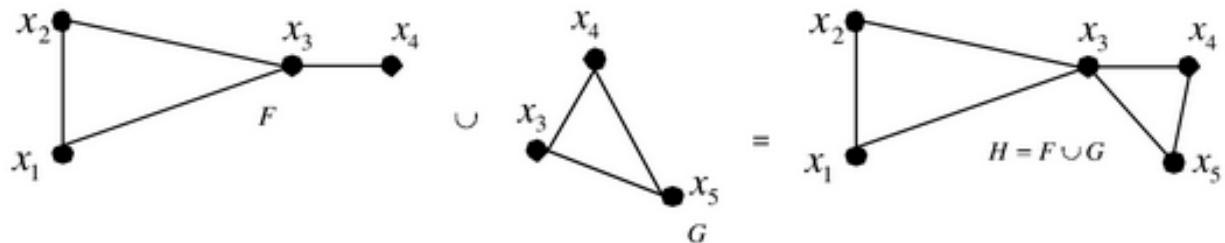


Рисунок 3.2.4 – Объединение графов F и G

Неориентированный граф H называется пересечением неориентированных графов G и F , если $XH = XF \cap XG$ и $UH = UF \cap UG$ (рис.3.2.5).

При этом пишут $H = F \cap G$

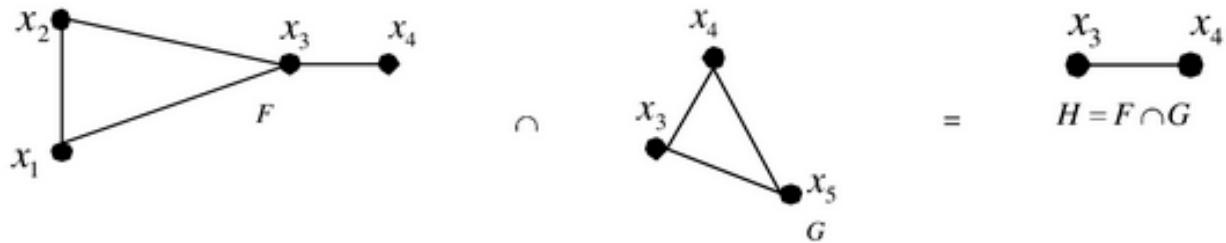


Рисунок 3.2.5 – Пересечение графов F и G

Элементы теории графов

Существует большое разнообразие задач, связанных с путями и маршрутами в графе, начиная от стандартных задач на существование, пересчет и перечисление и кончая задачами поиска путей, отвечающих определенным требованиям. Такими требованиями могут быть: требования максимальности (минимальности) длины, пропускной способности или надежности пути; требования к множеству вершин (ребер), принадлежащих (не принадлежащих) пути, и т. п. При этом сами графы могут иметь различные свойства, например, быть или не быть ориентированными, циклическими, взвешенными и т. д. Наконец, один и тот же график может быть описан по-разному. Поэтому даже одна и та же задача для различных по своим характеристикам и способу описания графов может решаться по-разному.

Задача существования путей

Эта задача эквивалентна задаче на достижимость в орграфе, решение которой рассмотрено в разд. 2. Действительно, матрица достижимости полностью определяет наличие или отсутствие пути для любой упорядоченной пары вершин. Поэтому ограничимся примером.

На рис. 4.1 изображены граф G и его матрица достижимости \mathbf{R} , полученная одним из ранее рассмотренных способов.

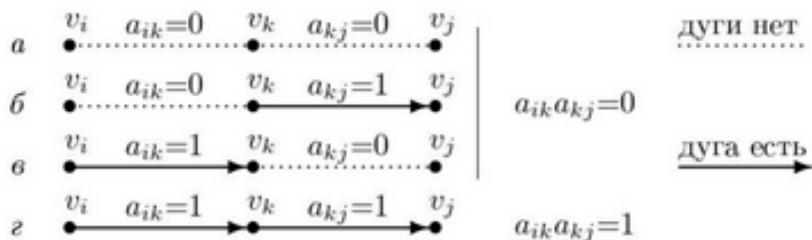


Рис. 4.1

Простая проверка убеждает, что для любой пары вершин в графе имеется хотя бы один путь. Именно это и следует из приведенной матрицы, поскольку все ее элементы равны 1.

Задача существования путей

Пусть $\Gamma(v_i)$ — множество вершин, являющихся концами дуг, выходящих из v_i , а $\Gamma^{-1}(v_j)$ — множество вершин, являющихся началами дуг, входящих в v_j . Тогда пересечение $\Gamma(v_i) \cap \Gamma^{-1}(v_j)$ представляет собой множество промежуточных вершин, принадлежащих цепям длиной в две дуги между v_i и v_j , а $|\Gamma(v_i) \cap \Gamma^{-1}(v_j)|$ — число таких цепей. Поскольку единичные элементы i - строки матрицы смежности соответствуют элементам множества $\Gamma(v_i)$, а единичные элементы j - столбца этой матрицы — элементам множества $\Gamma^{-1}(v_j)$, то $|\Gamma(v_i) \cap \Gamma^{-1}(v_j)| = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$. То же самое следует из анализа схем на рис. 4.2, где представлены все возможные комбинации



Задача существования путей

Таким образом, задача определения числа цепей (маршрутов) длины 2 между всеми парами вершин графа может быть решена простым возведением в квадрат его матрицы смежности. Аналогично, количество маршрутов длины 3 может быть получено из матрицы \mathbf{A}^3 и вообще количество маршрутов длины l между вершинами v_i и v_j равно элементу $a_{ij}^{(l)}$ матрицы \mathbf{A}^l . Наконец, количество маршрутов длины не более p между всеми парами вершин определяется как сумма

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^p = \sum_{l=1}^p \mathbf{A}^l.$$

В качестве примера приведем решение задачи пересчета маршрутов графа, изображенного на рис. 4.1 при $l=1, 2, 3, 4$. Информацию о путях в одну дугу несет матрица смежности \mathbf{A} , остальные три матрицы получаем простым умножением:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \underline{0} & 1 & 1 \end{matrix} \right] \end{matrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \underline{2} & 2 & 2 \end{matrix} \right] \end{matrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & \underline{4} \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \underline{4} & 1 & 2 \end{matrix} \right] \end{matrix}.$$

Непосредственной проверкой по изображению графа убеждаемся, что, например, между вершинами c и e есть

- 1 маршрут (путь) длины 2: (c, b, e) ;
- 1 маршрут длины 3: (c, e, c, e) ;
- 4 маршрута (цепи) длины 4: $(c, b, e, c, e), (c, b, d, c, e), (c, e, a, b, e), (c, e, c, b, e)$;

а между e и c есть

- 2 маршрута длины 3: $(e, c, e, c), (e, a, d, c)$ (путь);
- 4 маршрута длины 4: $(e, c, b, e, c), (e, a, b, d, c)$ (путь),
 (e, a, b, e, c) (цепь), (e, c, b, d, c) (цепь).

1. Отличные от нуля диагональные элементы матриц указывают на присутствие в графе соответствующего количества циклов длины l . Например, в матрице \mathbf{A}^3 диагональный элемент $a_{bb}^{(3)}=3$. Это значит, что в графе есть три цикла длины 3, включающие вершину b . Непосредственно по рис. 4.1 находим: (b, d, c, b) , (b, e, c, b) и (b, e, a, b) .
2. Поскольку длина пути в графе не может превышать $n-1$, не имеет смысла возводить \mathbf{A} в более высокую степень.

Задача поиска пути

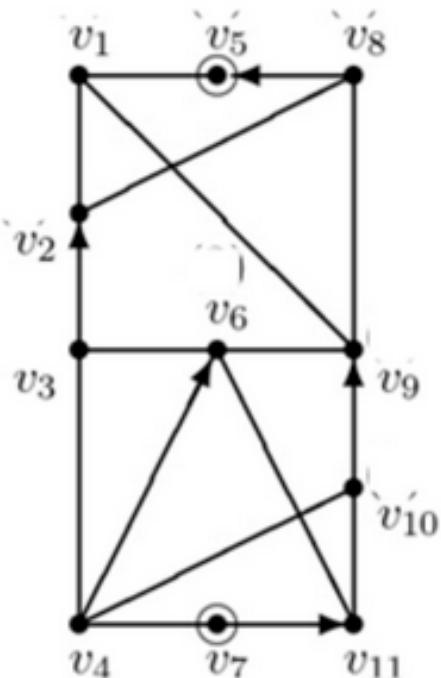
Большинство задач этого вида можно рассматривать как расширение, обобщение или модификацию следующей задачи.

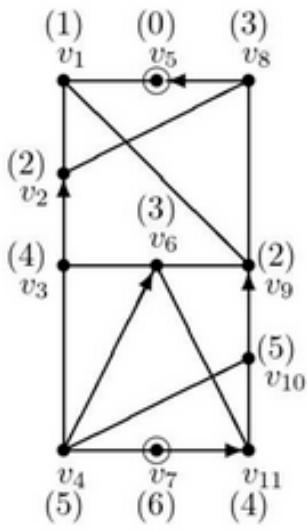
В графе G с матрицей весов $\mathbf{C}=[c_{i,j}]$ требуется найти путь между заданной парой вершин s и t , у которого сумма весов составляющих его дуг (ребер) минимальна. Здесь s и t являются соответственно начальной и конечной вершинами. Такое различие в обозначениях концевых вершин пути необходимо для орграфов, так как в этом случае, в отличие от простых графов, кратчайшие (s, t) - и (t, s) -пути различны.

Задача поиска кратчайшего пути на графе с ребрами единичной длины

Рассмотрим случай, когда веса всех дуг (ребер) графа одинаковы. Не нарушая общности, можно считать, что для любой дуги (ребра) $c_{i,j}=1$. Эффективное решение задачи получается с помощью простой процедуры, в результате которой каждая обработанная вершина получает пометку, равную расстоянию от s . Процесс начинается с того, что все $v \in \Gamma(s)$ получают пометку, равную единице. На второй итерации все $v \in \Gamma^2(s)$ помечаются двойкой, затем все $v \in \Gamma^3(s)$ помечаются тройкой, и вообще на i итерации для всех $v \in \Gamma^i(s)$ имеем $l(v)=i$. Процесс завершается, когда помеченной оказывается вершина t . Описанная процедура расстановки пометок называется *поиском в ширину*. Рассмотрим реализацию такого вида поиска на примере. Пусть требуется найти кратчайший путь между вершинами v_5 и v_7 в графе, представленном на рис. 4.3,а.

Задача поиска кратчайшего пути на графе с ребрами единичной длины – исходный граф





a

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1		1			1				1		
v_2	1								1		
v_3		1			1						
v_4			1			1	1			1	
v_5	1										
v_6			1						1	1	
v_7				1							1
v_8		1			1				1		
v_9	1					1		1			
v_{10}				1					1		1
v_{11}						1				1	
$l(v_i)$	1	2	4	5	0	3	6	3	2	5	4

б

Рис. 4.3

Для расчетов используем матрицу смежности графа, дополнив ее строкой $l(v_i)$ для пометок вершин, как показано на рис. 4.3.б. Сразу пометим вершину v_5 нулевым значением. На первой итерации, просматривая пятую строку матрицы, находим единицу в первом столбце. Следовательно, пометка первой вершины $l(v_1)=1$. На второй итерации просмат-