Лекция 5

Векторы. Линейные операции над векторами

Значения многих геометрических и физических величин могут быть разделены на две категории. С одной стороны существуют такие физические и механические величины, которые определяются заданием некоторого числа (масса, плотность, длина и т.д.). Подобные величины называются скалярными. Таким образом скаляр– это число.

Другие величины определяются заданием направлении и числа (сила, приложенная к некоторой точке). Такие величины называются векторными.

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. Обозначается $\overline{a} = \overline{AB}$

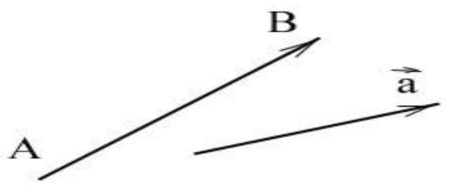
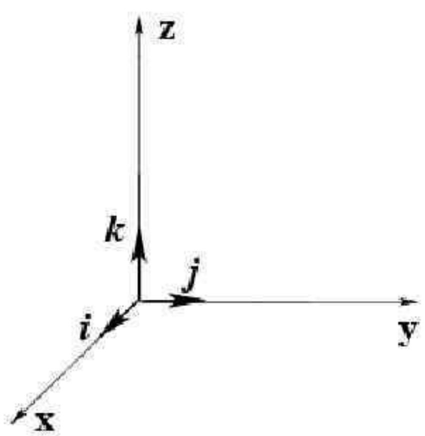


Рис. 1

Длиной $|\overline{AB}|$ *(или модулем) вектора* $\overline{a} = \overline{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.
Если длина вектора равна 1, то он называется *единичным вектором или ортом*. (обозначается $\overline{e}$)

Декартова система координат— ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными (перпендикулярными) векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ проведенными из начала координат.



Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{AA} = 0$.

Два ненулевых вектора называются *противоположными,* если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Обозначают $\bar{a}$ $-\bar{a}$

Векторы называются *коллинеарными,* если лежат на одной прямой или на параллельных прямых. $\bar{a} // \bar{b}$

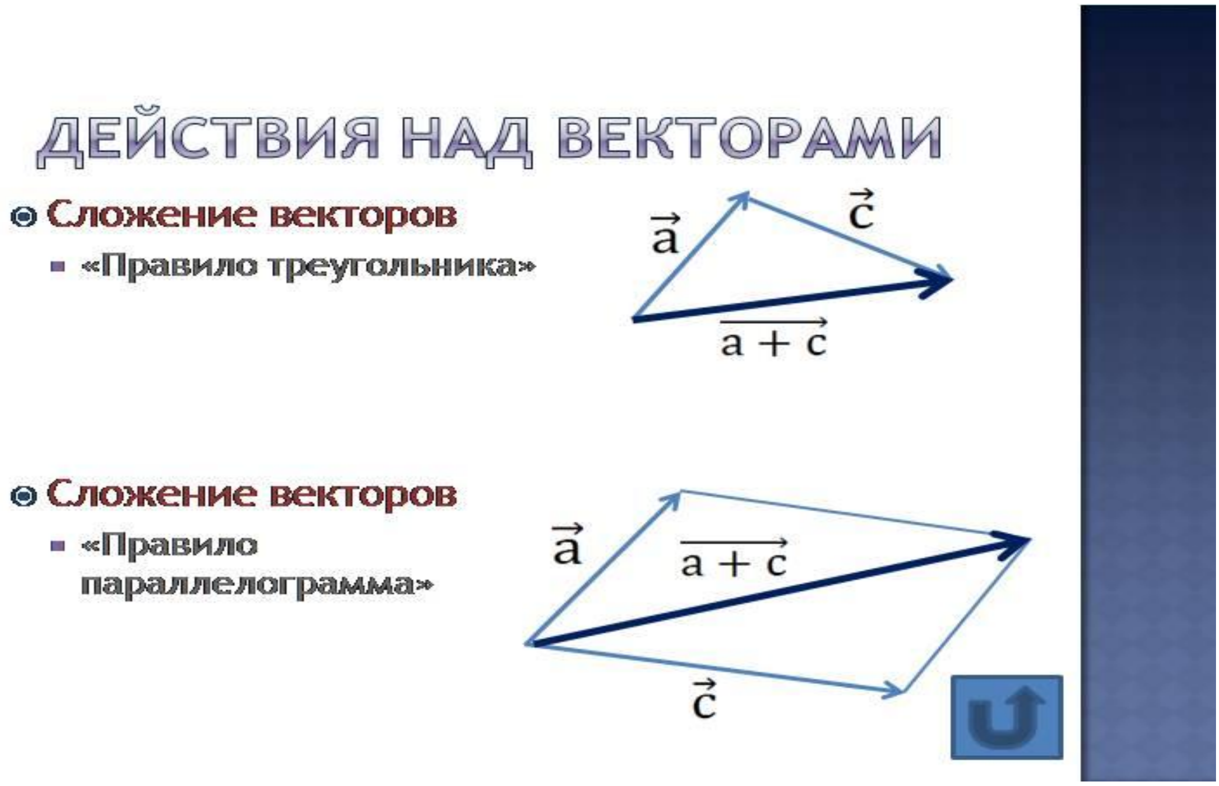
Три вектора называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называются *равными* $\bar{a} = \bar{b}$, если они сонаправлены, т.е. имеют одинаковое направление и имеют равные длины.

Линейные операции над векторами

1) **Сложение векторов (коммутативное свойство)**

Суммой 2-х векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец с концом вектора $\bar{b}$.

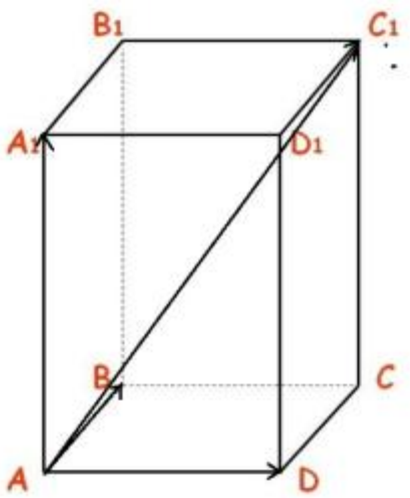


Свойства.

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$

2) Сочетательное свойство $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$

Видно, что сумма трех векторов $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}$ представляет собой диагональ параллелипипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$, не лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях (правило параллелипипеда)



$$(\overline{AB}+\overline{AD})+\overline{AA_1}=\overline{AC}+\overline{AA_1}=\overline{AC_1}$$
$$\overline{AB}+(\overline{AD}+\overline{AA_1})=\overline{AB}+\overline{AD_1}=\overline{AB}+\overline{BC_1}=\overline{AC_1}$$

Операция сложения векторов может быть распространена на любое число слагаемых векторов.

Например: Начало вектора $\bar{s}$ совпадает с началом вектора $\overline{a_1}$, а конец с концом вектора $\overline{a_4}$ (Правило многоугольника) $\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\overline{a_4}=\bar{s}$

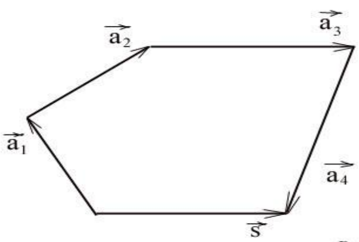
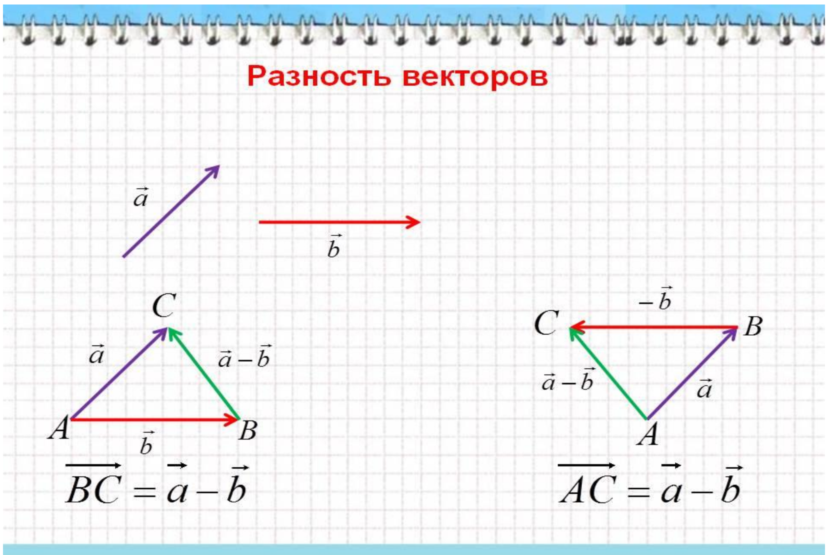


Рис. 4

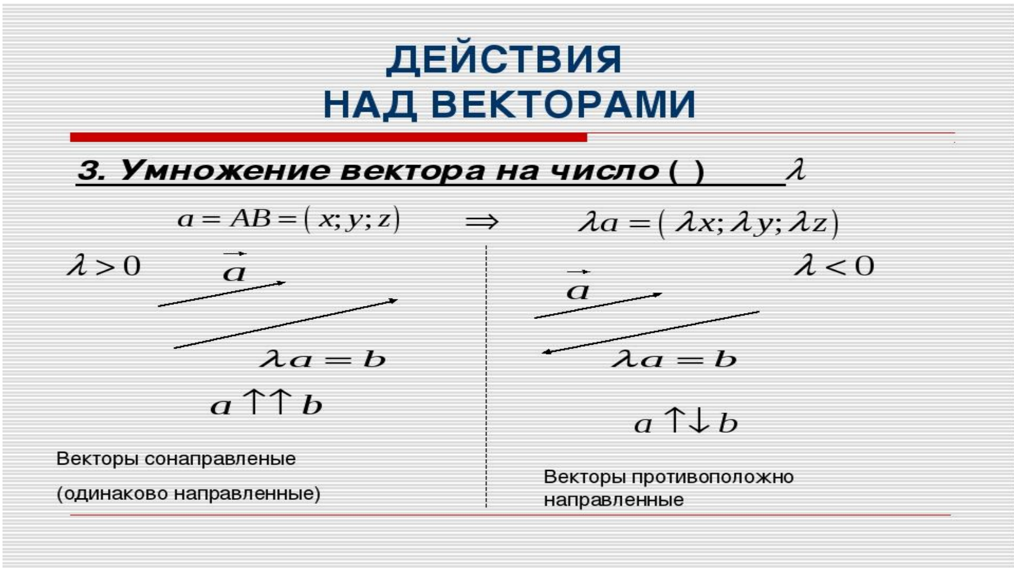
2) Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется сумма вектора $\bar{a}$ и вектора $-\bar{b}$, противоположного $\bar{b}$, т.е. такой вектор $\bar{c}$, для которого $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$

В параллелограмме меньшая диагональ представляет собой сумму векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, а большая их разность.



3) **Умножение вектора на число**



Свойства.

$\bar{a}\cdot 1 = \bar{a}$ $\quad$ $\bar{a}\cdot 0 = 0$

Сочетательное $\quad \lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a} \quad (\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a} \quad \lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$

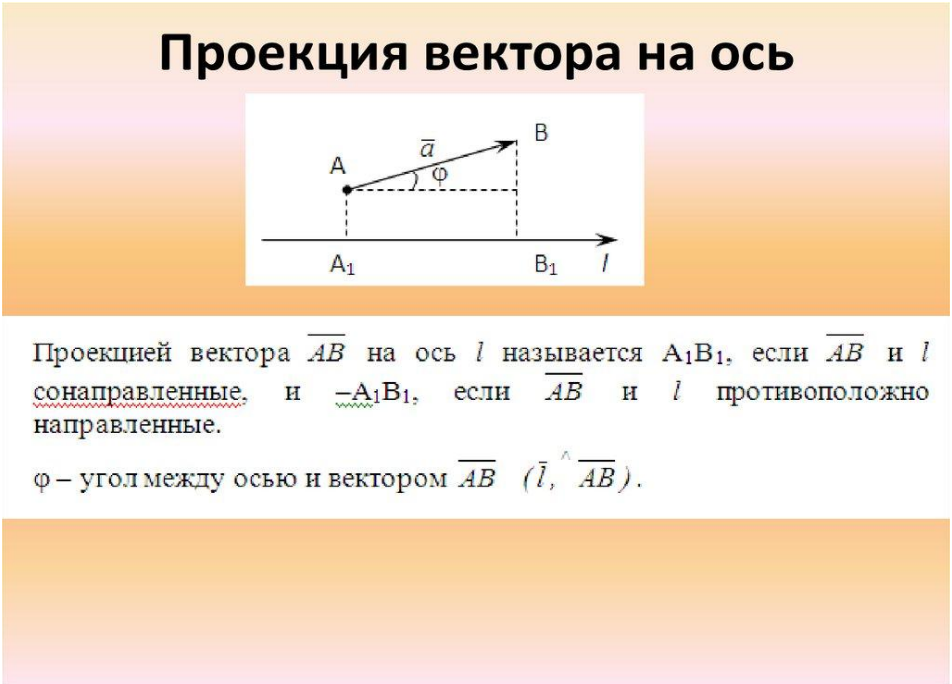
Два ненулевых вектора $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ коллинеарны т. и т.т.к. один из них есть произведение другого на некоторое число, т.е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}$

Три ненулевых вектора компланарны т. и т.т.к. один из них является линейной комбинацией других. $\bar{c} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$

4) Проекция вектора на ось.

Проекцией точки М на ось l называют основание перпендикуляра , опущенного из точки на ось.

Пусть $\bar{a} = \overline{AB}$ произвольный вектор. Обозначим через A_1 *и* B_1 проекции на ось l соответственно начала А и конца В вектора $\overline{AB}$



Если точки A_1 *и* B_1 совпадают, то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.
Обозначают $Пр_l\,\overline{AB}$

Основные свойства проекций

1) $Пр_l \lambda \bar{a} = \lambda Пр_l\, \bar{a}$

2) $Пр_l(\bar{a} + \bar{b}) = Пр_l\, \bar{a} + Пр_l\, \bar{b}$

3) $Пр_l\, \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = |A_1B_1|$

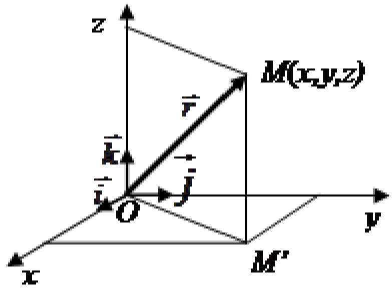
Проекция вектора на ось положительна (отрицательна) если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол прямой.
4) Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Разложение вектора по ортам координатных осей.
Модуль вектора. Направляющие косинусы.

Если $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – орты координатных осей прямоугольной системы координат $oxyz$, то любой вектор $\bar{a}$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

Коэффициенты a_x, a_y, a_z – проекции вектора на координатные оси, называются координатами вектора $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$



$a_x = Пр_x \overline{a}$ $a_y == Пр_y \overline{a}$ $a_z == Пр_z \overline{a}$

Вектор OM $= \overline{r} = \overline{a}$ идущий из начала координат к точке M, называется радиус вектором этой точки.

Длина вектора $\overline{a}$ определяется как модуль вектора $|\overline{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

Пусть углы вектора с координатными осями ox, oy, oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекций вектора на ось

$a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha$ $a_y = |\overline{a}| \cdot \cos\beta$ $a_z = |\overline{a}| \cdot \cos\gamma$

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}$ $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}$ $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$