Интегрирование четных и нечетных функций

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \quad \text{если } f(x) - \text{нечетная} \quad \text{функция}; \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ если} \quad f(x) - \text{ четная} \quad \text{функция}. \end{cases}$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a;a]$ симметричном относительно точки x=0.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \begin{bmatrix} x = -t \\ dx = -dt \\ x_1 = -a \quad t_1 = a \\ x_2 = 0 \quad t_2 = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$\begin{bmatrix} \text{так как интеграл не зависит от обозначения} \\ \text{переменной интегрирования} \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \begin{cases} \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0, \quad \text{если } f(x) - \text{нечетная} \quad \text{функция}; \\ -\int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \\ = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ если} \quad f(x) - \text{ четная} \quad \text{функция}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx$$

Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами (1 рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом 1 рода и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

где с - произвольное число. В этом случае, интеграл слева сходится если сходятся оба интеграла справа.

$$\int_{-\infty}^{0} cosxdx$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$

Интегралы от разрывных функций (2 рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a;b]$ и имеет бесконечный разрыв 2 рода при $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

Если предел, стоящий в правой части равенств существует, то несобственный интеграл 2 рода называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Если функция $y = f(x)$ терпит разрыв 2 рода во внутренней точке $c \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

В этом случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_1^6 \frac{dx}{x-3}$$