Лекция 4
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ
1. Основные понятия

Определение. ***Числовым рядом*** или просто рядом называется выражение вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \qquad (1)$$

где $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ – действительные или комплексные числа – члены ряда

U_n – общий член ряда

Определение. Сумма первых n членов ряда (1) называется ***n-й частичной суммой*** ряда. $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Определение. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1) , то этот предел называется ***суммой ряда*** (1). В этом случае говорят, что ряд сходится.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} U_n$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд называется расходящимся. Ряд суммы не имеет.

$$0+0+0+\ldots.. \uparrow \quad \sum = 0$$

Например. $1+1+1+\ldots.. \quad \text{рас}-\text{ся} \quad \sum = \infty$

$$1-1+1-1+\ldots \quad S_1 = 1 \;\; S_2 = 0 \;\; S_3 = 1 \;\; \text{рас}-\text{ся} \qquad \text{предел } S_n \text{ не существует}$$

Пример 1. Записать первые пять членов числового ряда, если дана формула его общего члена:

$$u_n = \frac{4n-3}{n^2+1}.$$

Решение. Подставляем в формулу вместо *n* последовательно числа 1, 2, 3, 4, 5. Получаем:

$$u_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{10} + \frac{13}{17} + \frac{17}{26} + \ldots \quad .$$

Пример 2. Записать формулу общего члена числового ряда, если даны пять его первых членов:

$$u_n = 1+\frac{4}{3}+\frac{7}{9}+\frac{10}{27}+\frac{13}{81}+\ldots$$

Решение. Ищем закономерность образования членов ряда. Нетрудно заметить, что знаменатель является числом 3 в некоторой степени. Для первого члена ряда степень равна нулю, то есть 1 - 1, для второго члена степень равна 1, то есть 2 - 1, для пятого - 4, то есть 5 - 4. Следовательно, степень числа три равна n - 1. В свою очередь, в числителе число всегда на 2 меньше 3n. Следовательно, формула общего члена ряда:

$$u_n = \frac{3n-2}{3^{n-1}}$$

Пример 3. Найти сумму ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$A(2n+1)+B(2n-1)=1$$

$$n=\frac{1}{2}\ \ A=\frac{1}{2} \qquad\qquad n=-\frac{1}{2}\ \ B=-\frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

$$S = \underset{n\to\infty}{Lim} S_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{1}{2}(1--\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$$

$$т.е.\ ряд\ сходися.\ Его\ сумма\ равна\ \frac{1}{2}$$

2. Свойства рядов

1) Если у сходящегося (расходящегося) ряда отбросить конечное число n его членов, то полученный ряд также будет сходится (расходиться).

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k = U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots$ называется n-м остатком ряда. Он получается из исходного ряда отбрасыванием n первых его членов.

2) Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty}U_n$ сходится и его сумма S. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty}c\cdot U_n$, где $c-const$ также сходится и его сумма $c\cdot S$

3) Пусть ряды $\sum_{i=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{i=1}^{\infty}V_n$ сходятся, и их суммы соответственно S_1 и S_2 . Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$ также сходится и его сумма $S = S_1 + S_2$

4) Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Сумма (разность) 2-х расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Гармонический ряд. Ряд Дирихле.

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется гармоническим

Обобщенный гармонический ряд или ряд Дирихле

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases} p>1 \ \ \textit{сходится} \\ 0<p\le 1 \ \ \textit{расходится} \end{cases}$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{расходится} \ p=\frac{1}{2}<1 \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \quad \textit{сходится} \quad p=2>1$$

4. Ряд геометрической прогрессии

Определение. Ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии, называется геометрическим рядом.

$$\sum_{i=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1}=a+aq+aq^2+...=\begin{cases} |q|<1 \ \ \textit{сходится} \quad S=(\frac{b_1}{1-q})=\frac{a}{1-q} \\ |q|\ge 1 \ \ \textit{расходится, т.к.} \ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty \end{cases}$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n \quad \textit{расходится} \ q=3>1 \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n \quad \textit{сходится} \quad q=\frac{1}{3}<1$$

5. Необходимый признак сходимости

Теорема. Если ряд (1) сходится, то его общий член U_n стремится к нулю при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=0$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}U_n\ne 0$ или Lim не существует, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд, используя необходимый признак сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+3}\text{расходится, т.к.} \quad \lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{2}\ne 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{3}$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} U_n=\infty\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{n})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}\cdot 2}$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} U_n=e^2\neq 0$

6.Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

6.1. 1-й признак сравнения

Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ с положительными членами, причем $U_n\le V_n$, тогда

1) если $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ сходится, то и меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ тоже сходится

2) если меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ расходится, то и больший $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ также расходится

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$ $\quad \frac{5^n+1}{2^n}\ge(\frac{5}{2})^n$ *меньший ряд* $(\frac{5}{2})^n$ *расходится, значит больший* $\frac{5^n+1}{2^n}$ *тоже расходится*

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn+1}{n^2}$ $\quad \frac{arctgn+1}{n^2}<\frac{\frac{\pi}{2}+1}{n^2}$ *больший ряд* $\frac{\frac{\pi}{2}+1}{n^2}$ *сходится, знаит меeньший* $\frac{arctgn+1}{n^2}$ *тоже сходится*

6.2. 2-й предельный признак сравнения

Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ с положительными членами . Если существует конечный $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=A\neq 0\neq\infty$ $\quad 0<A<\infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}$ $\quad \frac{n+2}{n^2+n+1}$ *эквивалентно* $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ *расходящийся ряд*

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}:\frac{1}{n}=1\to$ *исходный ряд также расходится*

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2} \quad U_n=\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2} \ ????$$

$$V_n=\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}=\frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}} \ \textit{сходящийся ряд } p>1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}}=1 \quad \to \textit{исходный ряд сходится}$$

6.3 Признак Даламбера

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ с положительными членами и существует конечный предел .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=p=\begin{cases} p<1 \ \textit{сходится} \\ p>1 \ \textit{расходится} \\ p=1 \ \textit{признакне работает}\end{cases}$$

Признак Даламбера применяют, когда общий член содержит выражение вида a^n или $n!$

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 2^n}=2>1 \quad \textit{расходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 3^n}=0<1 \quad \textit{сходится}$$

6.4 Радикальный признак Коши

Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty}U_n$ с положительными членами и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=p=\begin{cases} p<1 \ \textit{сходится} \\ p>1 \ \textit{расходится} \\ p=1 \ \textit{признакне работает}\end{cases}$$

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1 \quad \textit{расходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1 \quad \textit{сходится}$$

6.5. Интегральный признак сходимости

Ряд с положительными убывающими членами $U_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная убывающая функция

Пример 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLn^3n} \quad \textit{сходится}$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{xLn^3x}=\int_2^{\infty}\frac{dLnx}{Ln^3x}=-\frac{1}{2Ln^2x}\Big|_2^{\infty}=0+\frac{1}{2Ln^2 2} \qquad \textit{сходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}x^{-p}dx=\lim_{a\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases} p>1 \quad \frac{1}{p-1} \quad \textit{сходится} \\ p<1 \quad \infty \quad \textit{расходится}\end{cases}$$