ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть *x* и *y* – действительные переменные, тогда переменная величина

$$z = x + yi$$

называется комплексной переменной в алгебраической форме

(напомним *i* – мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$)

Действительную и мнимую части комплексной переменной *z* обозначают

$$x = \mathrm{Re}\,z \text{ и } y = \mathrm{Im}\,z$$

Сопряженная комплексная переменная обозначается

$$\bar{z} = x - yi$$

Пусть на комплексной плоскости z задано множество точек M, а на комплексной плоскости ϖ - множество точек N.

Определение. Если каждому значению z из множества M поставить в соответствие по закону f одно или несколько значений другой комплексной переменной $\varpi = u + vi$ из множества N, то комплексная переменная ϖ называется функцией z в области M, $\varpi = f(z)$.

Другими словами, *функция осуществляет отображение множества точек плоскости z на соответствующее множество точек плоскости ϖ*.

Функция $\varpi = f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие только одно значение ϖ, и *многозначной*, если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие несколько значений $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \dots$

Если $\operatorname{Re}\varpi = u(x,y)$ – действительная часть функции ϖ, $\operatorname{Im}\varpi = v(x,y)$ – мнимая часть функции ϖ, то функция $f(z)$ записывается в виде суммы действительной части и мнимой части, умноженной на i (запись функции $f(z)$ в алгебраической форме):

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Однозначная функция $\varpi = f(z)$ при $z \to z_0$ имеет определенный предел c (z_0 и c – комплексные числа) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - c| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$.

Функция $\varpi = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если она определена в этой точке z_0 и некоторой её окрестности и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется *непрерывной в этой области*.

Область D – это множество точек, обладающих свойством *открытости* (вместе с точкой области D принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке) и свойством *связности* (две любые точки D можно соединить ломаной, полностью лежащей в D).

Порядком связности ограниченной области D называется число связных частей, на которые разбивается её граница. Граница может состоять из замкнутых линий, разрезов и точек.

ПРИМЕР 1. Определить и построить на комплексной плоскости Z линии, заданные уравнениями:

а) $|z+2-3i|=2$,

б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$

Решение. а) Чтобы определить, какая линия задана уравнением

$$|z+2-3i|=2,$$

воспользуемся определением модуля комплексного числа. С учетом, что $z=x+iy$, получим:

$$|z+2-3i|=|x+iy+2-3i|=|x+2+i(y-3)|=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2},$$

тогда,

$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=2$ или $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $z_0 = -2 + 3i$ радиуса 2 (рис. 1).

б) Преобразуем заданное уравнение. Так как $z = x + iy$, получим:

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{x+iy-1}{x+iy-i} = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{\big((x-1)+iy\big)\big(x-i(y-1)\big)}{\big(x+i(y-1)\big)\big(x-i(y-1)\big)} =$$

$$= \frac{x^2 - x + y^2 - y + i(x+y-1)}{x^2 + (y-1)^2},$$

следовательно,

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i} = \frac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} = 2.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$x^2 - x + y^2 - y = 2x^2 + 2(y^2 - 2y + 1) \Rightarrow (x+0{,}5)^2 + (y-1{,}5)^2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i}=2$$

является уравнением окружности радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $z_0=-0{,}5+1{,}5i$ (рис. 2).

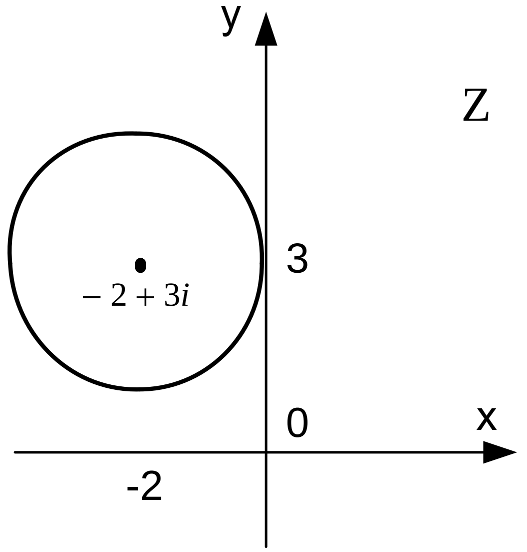

Рис. 1 – Линия, заданная уравнением $|z+2-3i|=2$

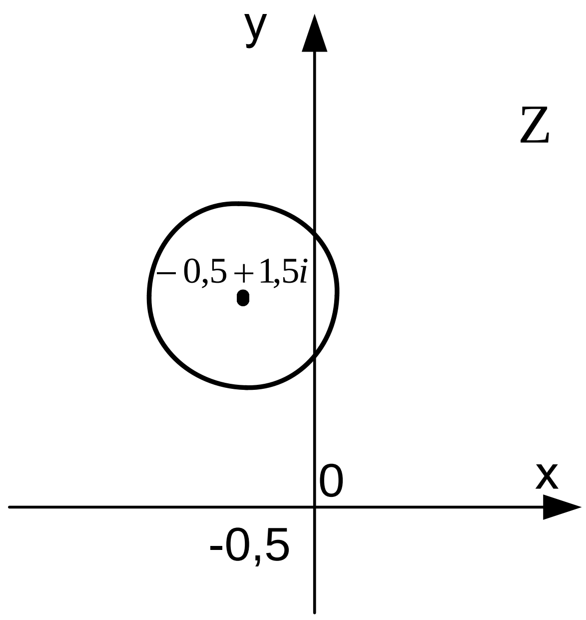

Рис. 2 – Линия, заданная уравнением $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i}=2$

Пример 2. Изобразить на комплексной плоскости Z множества точек, определяемые следующими неравенствами или системами неравенств:

а) $1 \le |z - 3 + 2i| < 2$, б) $\left|\arg z - \dfrac{\pi}{3}\right| < \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. а) Искомое множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям: $1 \le |z - 3 + 2i|$ и $|z - 3 + 2i| < 2$. Пользуясь определением модуля комплексного числа и учитывая, преобразуем выражение $|z - 3 + 2i|$:

$$|z - 3 + 2i| = |x + iy - 3 + 2i| = |x - 3 + i(y + 2)| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}.$$

Следовательно, неравенство $1 \le |z - 3 + 2i|$ определяет внешность единичного круга с центром в точке $z_0 = 3 - 2i$, включая границу окружности, а неравенство $|z - 3 + 2i| < 2$ – круг радиуса 2 с центром в той же точке $z_0 = 3 - 2i$, без точек окружности, его ограничивающей. Поэтому данное множество точек представляет собой кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0 = 3 - 2i$ (рис. 3).

б) Так как неравенство $\left|\arg z - \dfrac{\pi}{3}\right| < \dfrac{\pi}{4}$ равносильно неравенству

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4},$$

то ему удовлетворяют все точки z, лежащие внутри угла, равного $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, не включая его границы, с вершиной в начале координат (рис. 4).

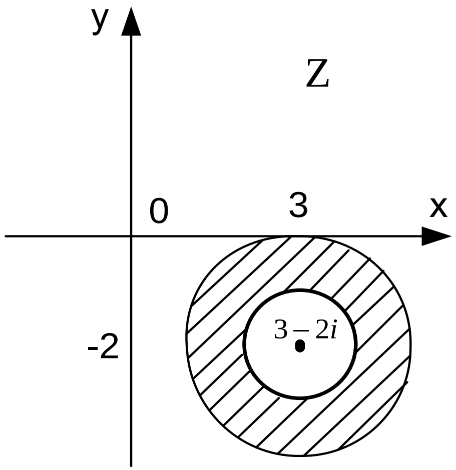

Рис. 3 – Множество точек, определяемых системой неравенств

$$1 \le |z - 3 + 2i| < 2$$

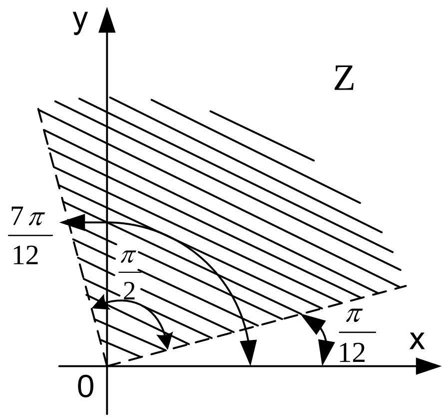

Рис. 4 – Множество точек, определяемых неравенством $\left|\arg z - \frac{\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{4}$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z.

Функция дифференцируема в точке z, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области* D.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в некоторой области D, необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Данные равенства называются условиями **Коши-Римана.**

К элементарным функциям комплексной переменной относят следующие:

1. Степенная функция $\varpi = z^n$, где n - любое целое положительное число.
2. Показательная функция $\varpi = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.
3. Тригонометрические синус и косинус $\varpi = \sin z$, $\varpi = \cos z$.
4. Гиперболические синус и косинус $\varpi = \mathrm{sh} z$, $\varpi = \mathrm{ch} z$.
5. Общая показательная функция $\varpi = \alpha^z$, где $\alpha \neq 0$ - комплексное число;
6. Общая степенная функция $\varpi = z^\alpha$, где α - любое комплексное число; в частном случае $\alpha = n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$
7. Логарифмическая функция определяется как обратная показательной $e^\varpi = z$: $\varpi = \ln z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg} z$.

Функции 2, 3, 4 пунктов связаны между собой *формулами Эйлера:*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,;$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz});$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,.$$

Кроме того, между тригонометрическими и гиперболическими функциями имеют место зависимости:

$$\mathrm{sh}\,iz = i\sin z;\quad \mathrm{ch}\,iz = \cos z;$$

$$\sin iz = i\,\mathrm{sh}z;\quad \cos iz = \mathrm{ch}z.$$

Для аналитических функций правила дифференцирования и таблица производной остаются теми же, что и для функции одной переменной:

Таблица 1.1 – Правила дифференцирования

Производная постоянной равна нулю $C' = 0$.
Производная суммы функций равна сумме производных этих функций: $$\left(f_1(z)+f_2(z)\right)' = f_1'(z)+f_2'(z)$$
Производная произведения: $$\left(f_1(z)\cdot f_2(z)\right)' = f_1'(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2'(z)$$
Постоянный множитель выносится за знак производной: $$\left(C\cdot f(z)\right)' = C\cdot f'(z).$$
Производная дроби: $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z)\cdot f_2(z)-f_1(z)\cdot f_2'(z)}{\left(f_2(z)\right)^2}$.
Производная сложной функции: $\left(f(g(z))\right)' = f_g'(g(z))\cdot g'(z)$.

ПРИМЕР 3. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию $w = f(z)$, найти ее производную, если она существует:

а) $w = \sin 2z;$

б) $w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1)$.

а) Определим действительную и мнимую части функции $w = \sin 2z$.

Так как $z = x + iy$, то

$$w = \sin 2z = \frac{e^{i\,2z} - e^{-i\,2z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-2y+i\,2x} - e^{2y-i\,2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x) - e^{2y}(\cos 2x - i\sin 2x)\right) =$$

$$= \frac{-i}{2}\left(\cos 2x(e^{-2y} - e^{2y}) + i\sin 2x(e^{-2y} + e^{2y})\right) =$$

$$= \sin 2x\frac{e^{-2y} + e^{2y}}{2} + i\cos 2x\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = \sin 2x\operatorname{ch} 2y + i\cos 2x\operatorname{sh} 2y.$$

Следовательно,

$\operatorname{Re}\sin 2z = u(x,y) = \sin 2x\operatorname{ch}2y$, $\quad$ $\operatorname{Im}\sin 2z = v(x,y) = \cos 2x\operatorname{sh}2y$.

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos 2x\,\mathrm{ch}2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2\cos 2x\,\mathrm{ch}2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y.$$

Сравнивая значения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, видим, что условия Коши-Римана выполняются при всех значениях x и y, поэтому функция $w = \sin 2z$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости Z. Производную функции $w = \sin 2z$ найдем по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \; f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \; f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$(\sin 2z)' = 2\cos 2x \operatorname{ch} 2\text{y} - i2\sin 2x \operatorname{sh} 2y =$$

$$= 2\left(\cos 2x \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - i\sin 2x \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} e^{2y} (\cos 2x - i\sin 2x) + \frac{1}{2} e^{-2y} (\cos 2x + i\sin 2x) \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} e^{2y} e^{-i\,2x} + \frac{1}{2} e^{-2y} e^{i\,2x} \right) = 2\left(\frac{1}{2} (e^{2y - i\,2x} + e^{-2y + i\,2x}) \right) =$$

$$= 2\frac{e^{i\,2z} + e^{-i\,2z}}{2} = 2\cos 2z.$$

Действительно, если воспользоваться правилами дифференцирования функции действительного переменного, то:

$$(\sin 2z)' = 2\cos 2z.$$

б) Найдем действительную и мнимую части функции $w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1)$. Получим:

$$w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1) = (x+iy+2)\operatorname{Re}(x+iy-1) =$$

$$= \big((x+2)+iy\big)\big(x-1\big) = x^2 + x - 2 + i(yx - y)$$

$\Leftrightarrow \quad u(x,y) = x^2 + x - 2, \quad v(x,y) = yx - y.$

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x-1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана, для чего сравним значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$2x+1 = x-1,\ y=0, \quad \Leftrightarrow \quad x=-2,\ y=0,$$

следовательно, функция $w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1)$ дифференцируема только в точке $z=-2$ и нигде не является аналитической, так как не существует окрестности точки $z=-2$, в которой функция была бы дифференцируемой.

Производную заданной функции в точке $z=-2$ найдем как

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=-2\\ y=0}} = (2x+1+iy)\Big|_{\substack{x=-2\\ y=0}} = -3.$$