

ΣΤΟΙΒΕΣ

2.3 Εφαρμογή Στοίβας: Αντίστροφη Πολωνική Γραφή

Ενδοθεματική & μεταθεματική μορφή παράστασης

- Οι αριθμητικές εκφράσεις αποτελούνται από **τελεστές (operators)** και μεταβλητές ή **τελεστέους (operands)**.
- Οι τελεστές διακρίνονται σε **δυναδικούς (binary)** και **μοναδιαίους (unary)**.
- **Δυναδικοί** ονομάζονται οι τελεστές που αφορούν δύο μεταβλητές ή τελεστέους, ενώ **μοναδιαίοι** ονομάζονται οι τελεστές που αφορούν έναν τελεστέο.
- Συνήθως, όταν παριστάνουμε αριθμητικές εκφράσεις, ο μοναδιαίος τελεστής τίθεται πριν από τον τελεστέο και ο δυναδικός τελεστής μεταξύ των δύο τελεστέων, δηλαδή χρησιμοποιείται ο **ένθετος** ή **ενδοθεματικός** τρόπος παράστασης (**infix** notation). Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται και στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού.
- Κατά την μεταγλώττιση (compilation), όμως, του πηγαίου κώδικα σε εντολές γλώσσας μηχανής, οι αριθμητικές εκφράσεις μετατρέπονται πρώτα από την ενδοθεματική στην **επιθεματική** ή **μεταθεματική** μορφή (**postfix** notation) και μετά υπολογίζονται. Στην μεταθεματική μορφή, οι τελεστές έπονται των τελεστέων.

Ενδοθεματική & μεταθεματική μορφή παράστασης

Για παράδειγμα, η παρακάτω αριθμητική έκφραση που είναι γραμμένη σε ενδοθεματική μορφή

$$A * B - \Gamma + \Delta$$

θα γραφεί

$$A B * \Gamma - \Delta +$$

σε μεταθεματική μορφή.

Αυτή η διαδικασία δύο βημάτων, δηλαδή

α) μετατροπή από την ενδοθεματική μορφή στην μεταθεματική και

β) υπολογισμός της έκφρασης,

ακολουθείται επειδή η μετατροπή από την ενδοθεματική στην μεταθεματική μορφή γίνεται κατευθείαν και μηχανικά είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί μια έκφραση σε μεταθεματική μορφή παρά σε ενδοθεματική.

Όταν χρησιμοποιείται η ενδοθεματική μορφή, χρειάζεται συχνά να χρησιμοποιηθούν παρενθέσεις για να καθορίσουν τη σειρά με την οποία θα εκτελεστούν οι πράξεις.

Για παράδειγμα, η έκφραση

$$A * (B - \Gamma)$$

δείχνει ότι πρώτα πρέπει να γίνει η αφαίρεση και μετά ο πολλαπλασιασμός. Στην περίπτωση που οι παρενθέσεις απουσιάζουν, προκύπτει η έκφραση

$$A * B - \Gamma$$

στην οποία εκτελείται πρώτα ο πολλαπλασιασμός και έπειτα η αφαίρεση, σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας στις πράξεις.

Αντίστροφη Πολωνική γραφή

Στις αρχές της δεκαετίας του 1950, ο Πολωνός μαθηματικός Jan Łukasiewicz παρατήρησε ότι οι παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες στην μεταθεματική γραφή, η οποία ονομάζεται επίσης **Αντίστροφη Πολωνική Γραφή** (Reverse Polish Notation, **RPN**).

Για παράδειγμα, η ενδοθεματική έκφραση

$$A * (B - \Gamma)$$

μπορεί να γραφτεί σε Αντίστροφη Πολωνική Γραφή ως εξής:

$$A B \Gamma - *$$

Αντίστροφη Πολωνική γραφή: παράδειγμα

Ας πάρουμε για παράδειγμα την έκφραση

4 3 - 9 2 5 + - *

που αντιστοιχεί στην ενδοθεματική έκφραση

$(4 - 3) * (9 - (2 + 5))$

Διατρέχουμε την RPN έκφραση από τα αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να συναντήσουμε έναν τελεστή. Οι δύο τελευταίοι τελεστές πριν τον τελεστή συνδυάζονται με τον τελεστή αυτό.

Στο παράδειγμά μας, ο πρώτος τελεστής που συναντάται είναι ο "-" και οι τελεστές που αντιστοιχούν σ' αυτόν είναι οι 4 και 3, όπως φαίνεται με την επισήμανση παρακάτω:

4 3 - 9 2 5 + - *

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι 1, οπότε προκύπτει η ακόλουθη RPN έκφραση

1 9 2 5 + - *

Αντίστροφη Πολωνική γραφή: παράδειγμα

Συνεχίζοντας την αναζήτηση από αριστερά προς δεξιά, συναντάμε τον τελεστή "+" στον οποίο αντιστοιχούν οι τελεστές 2 και 5, όπως φαίνεται και παρακάτω:

1 9 **2 5 +** - *

Εκτελώντας την πράξη, παίρνουμε αποτέλεσμα 7 και η αρχική μας έκφραση γράφεται τώρα:

1 9 7 - *

Στην συνέχεια, συναντάμε τον τελεστή "-" με τελεστές τους 9 και 7, δηλαδή

1 **9 7 -** *

και μετά από την πράξη της αφαίρεσης, έχουμε

1 2 *

Ο τελευταίος τελεστής είναι ο "*" και σ' αυτόν αντιστοιχούν οι τελεστές 1 και 2. Το αποτέλεσμα της πράξης είναι 2 και αυτή είναι και η τιμή της έκφρασης που εξετάζουμε.

Αντίστροφη Πολωνική γραφή: παράδειγμα

▪ 4 3 - 9 2 5 + - *

4

4 3 - 9 2 5 + - *

3
4

4 3 - 9 2 5 + - *

3
4

▪ 1 9 2 5 + - *

1

1 9 2 5 + - *

5
2
9
1

1 9 2 5 + - *

5
2
9
1

Αντίστροφη Πολωνική γραφή: παράδειγμα

▪ 1 9 7 - *

7
9
1

1 9 7 - *

7
9
1

1 2 *

2
1

▪ 1 2 *

2
1

2

Αντίστροφη Πολωνική γραφή: υλοποίηση

- Αυτή η μέθοδος υπολογισμού μιας RPN έκφρασης απαιτεί την αποθήκευση των τελεστών μέχρι να συναντήσουμε έναν τελεστή στην από αριστερά προς δεξιά αναζήτηση.
- Μόλις συναντήσουμε τελεστή, χρειάζεται να ανακτήσουμε τους δυο προηγούμενους αυτού τελεστές και να τους συνδυάσουμε με τον τελεστή αυτόν.
- Κάτι τέτοιο υποθέτει την χρήση μιας **τελευταίος μέσα - πρώτος έξω δομής**, δηλαδή μιας **στοίβας**, για την αποθήκευση των τελεστών.
- Κάθε φορά που συναντάμε έναν τελεστέο, αυτός εισάγεται μέσα στην στοίβα και, μόλις συναντήσουμε τελεστή, οι δυο κορυφαίες τιμές διαγράφονται από τη στοίβα, εφαρμόζεται η πράξη και το αποτέλεσμα εισάγεται στη στοίβα.
- Η διαδικασία αυτή φαίνεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος υπολογισμού RPN εκφράσεων

/*Δέχεται:	Μία RPN έκφραση.
Λειτουργία:	Υπολογίζει την έκφραση.
Έξοδος:	Η τιμή της RPN έκφρασης.
Σημείωση:	Χρήση στοίβας για την αποθήκευση των τελεστών.*/*

1. Αρχικοποίησε μια κενή στοίβα

2. Επανάλαβε

α. Πάρε τον επόμενο χαρακτήρα από την RPN έκφραση

β. **Αν** ο χαρακτήρας είναι τελεστέος **τότε**

εισήγαγε το χαρακτήρα στη στοίβα

Αλλιώς_αν ο χαρακτήρας είναι τελεστής **τότε**

i. Διάγραψε τις 2 κορυφαίες τιμές της στοίβας

ii. Εφάρμοσε την πράξη που δηλώνει ο τελεστής, δηλαδή ο τρέχων χαρακτήρας της RPN έκφρασης, σ' αυτές τις 2 τιμές

iii. Εισήγαγε το αποτέλεσμα της πράξης στη στοίβα

Τέλος_αν

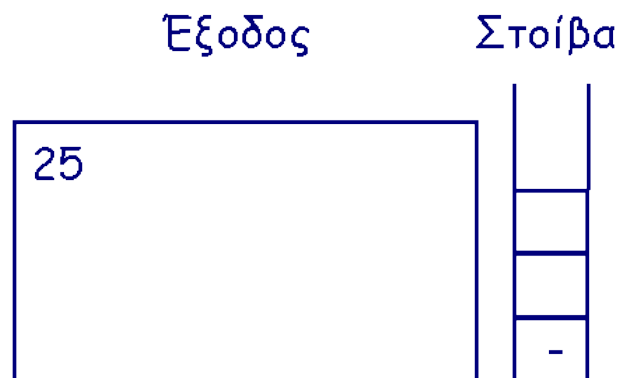
Μέχρις_ότου να φτάσεις στο τέλος της έκφρασης

3. Όταν φτάσεις στο τέλος της PRN έκφρασης, η τιμή της βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

Έστω, για παράδειγμα η έκφραση

$$25 - 10 * 2 + 4$$



Διατρέχοντας την έκφραση από αριστερά προς δεξιά, συναντάμε πρώτα τον αριθμό 25, ο οποίος μπορεί να εμφανιστεί απευθείας στην έξοδο.

Εν συνεχεία συναντάμε τον τελεστή "-".

Καθώς όμως δεν έχει εμφανιστεί ακόμα ο δεξιός τελεστέος του (ο αριστερός είναι προφανώς ο αριθμός 25), δεν μπορούμε ακόμα να τον εμφανίσουμε και γι' αυτό χρειάζεται να τον αποθηκεύσουμε, εισάγοντάς τον σε μια στοίβα τελεστών.

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

$$25 - 10 * 2 + 4$$

Έξοδος

Στοίβα

25 10

-

Μετά από το "-" βρίσκεται ο αριθμός 10, ο οποίος μπορεί να εμφανιστεί αμέσως στην έξοδο.

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

$$25 - 10 * 2 + 4$$

Έξοδος

Στοίβα

25 10

*
-

Στο σημείο αυτό, πρέπει να καθοριστεί αν το 10 είναι ο δεξιός τελεστέος του "-", που αποθηκεύσαμε πριν λίγο, ή αν είναι ο αριστερός τελεστέος του επόμενου τελεστή.

Συγκρίνοντας τον τελεστή "-", που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, με τον τελεστή "*", που ακολουθεί, βλέπουμε ότι ο δεύτερος έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τον πρώτο κι επομένως ο αριθμός 10 είναι ο αριστερός τελεστέος του "*".

Άρα ο τελεστής "*" αποθηκεύεται στη στοίβα και συνεχίζουμε για να βρούμε τον δεξιό τελεστέο του.

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

25 - 10 * 2 + 4

Έξοδος

Στοίβα

25 10 2

+

Έξοδος

Στοίβα

25 10 2 *

-

Ακολουθεί ο αριθμός 2, τον οποίο εμφανίζουμε στην έξοδο.

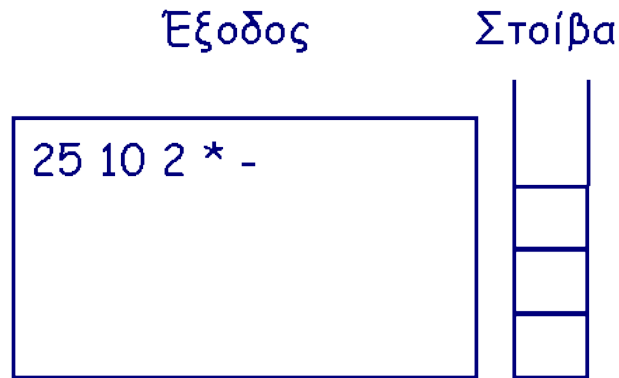
Τώρα πάλι πρέπει να ελέγχουμε αν ο αριθμός 2 είναι ο δεξιός τελεστέος του τελεστή "*" ή ο αριστερός τελεστέος του επόμενου τελεστή.

Ο τελεστής που ακολουθεί είναι ο "+", και έχει μικρότερη προτεραιότητα από τον "*", επομένως συμπεραίνουμε ότι ο 2 είναι ο δεξιός τελεστέος του "*".

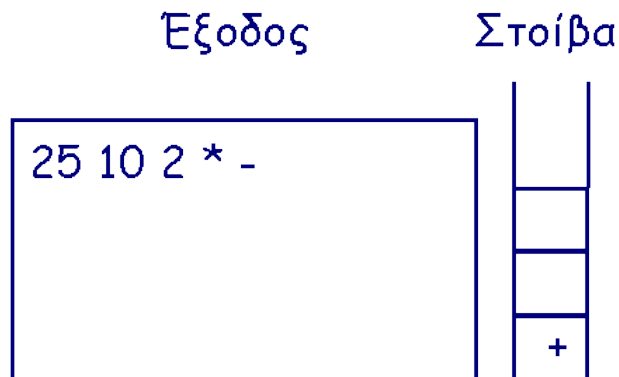
Αφού λοιπόν έχουν εμφανιστεί και ο αριστερός και ο δεξιός τελεστέος του "*", μπορεί να βγει από τη στοίβα και να εμφανιστεί στην έξοδο και ο ίδιος ο τελεστής.

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

$$25 - 10 * 2 + 4$$



Η παράσταση "10 2 *" αποτελεί τον δεξιό τελεστέο του "-" που αποθηκεύτηκε αρχικά, επομένως βγαίνει και αυτός από τη στοίβα και εμφανίζεται στην έξοδο.



Ο τελεστής "+" πρέπει να αποθηκευτεί στη στοίβα μέχρι να εμφανιστεί ο δεξιός τελεστέος του, όπως φαίνεται δίπλα:

Μετατροπή έκφρασης από ενδοθεματική σε RPN

$$25 - 10 * 2 + 4$$

Έξοδος

Στοίβα

25 10 2 * - 4



Μετά από το "+" ακολουθεί ο αριθμός 4, ο οποίος εμφανίζεται απευθείας στην έξοδο.

Έξοδος

Στοίβα

25 10 2 * - 4 +



Φτάσαμε πλέον στο τέλος της αριθμητικής έκφρασης, πράγμα που σημαίνει ότι ο αριθμός 4 είναι ο δεξιός τελεστέος του "+" και ότι ο τελεστής "+" βγαίνει από τη στοίβα και εμφανίζεται στην έξοδο.

Έτσι, η στοίβα είναι τώρα κενή και στην έξοδο εμφανίζεται η αριθμητική έκφραση σε μορφή RPN.

Αλγόριθμος μετατροπής ενδοθεματικής εκφ. σε RPN

1. Αρχικοποίησε μια κενή στοίβα τελεστών
2. **Όσο** δεν έχει εμφανιστεί λάθος **και** δεν έχεις φτάσει στο τέλος της έκφρασης **επανάλαβε**

α. Πάρε τον επόμενο χαρακτήρα στην ενδοθεματική έκφραση

β. **Επίλεξε** χαρακτήρας

Περίπτωση αριστερή παρένθεση

Εισήγαγέ την στη στοίβα

Περίπτωση δεξιά παρένθεση

Διάγραψε και εμφάνισε τα στοιχεία της στοίβας μέχρι να διαγραφεί μια αριστερή παρένθεση, χωρίς όμως να την εμφανίσεις

Περίπτωση τελεστής

Αν η στοίβα είναι κενή **ή** ο χαρακτήρας έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας **τότε**

Εισήγαγε τον χαρακτήρα στη στοίβα

Αλλιώς

Διάγραψε και εμφάνισε το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας

Τέλος_αν

Επανάλαβε την σύγκριση του χαρακτήρα με το νέο κορυφαίο στοιχείο

Περίπτωση τελεστέος

Εμφάνισέ τον

Τέλος_Επιλογών

Τέλος_επανάληψης

3. Όταν φτάσεις στο τέλος της αριθμητικής έκφρασης, διάγραψε και εμφάνισε τα στοιχεία της στοίβας μέχρι να αδειάσει η στοίβα