

ΔΕΝΤΡΑ

5.6 Πλήρη Δυαδικά Δέντρα, Μέγιστα/Ελάχιστα Δέντρα & Εισαγωγή στο Σωρό

Ο ΑΤΔ του σωρού (heap) που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο αποτελεί ειδική περίπτωση του πλήρους δυαδικού δέντρου.

Για να είμαστε σε θέση όμως να περιγράψουμε τον ΑΤΔ του σωρού θα πρέπει πρώτα να δώσουμε μια αναλυτικότερη περιγραφή των εξής δομών:

- γεμάτο δυαδικό δέντρο (full binary tree)
- πλήρες δυαδικό δέντρο (complete binary tree)
- μέγιστο/ελάχιστο δέντρο (max/min tree)

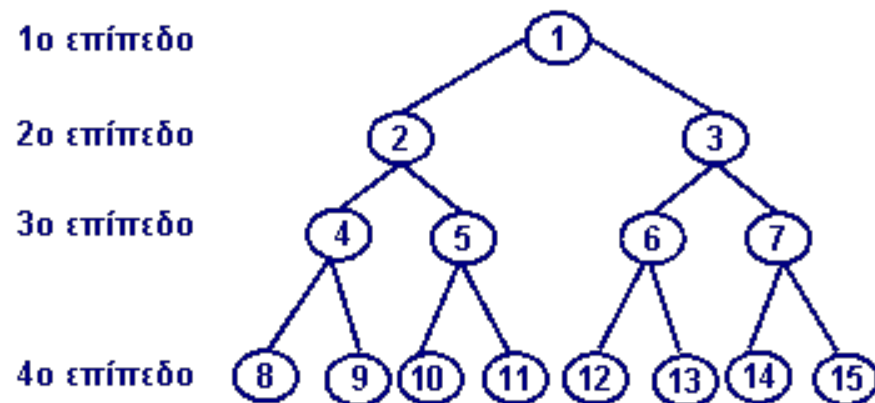
Γεμάτο δυαδικό δέντρο

Ένα **γεμάτο δυαδικό δέντρο** (full binary tree) ύψους k είναι ένα δυαδικό δέντρο με $2^{k+1} - 1$ κόμβους, όπου $k \geq 0$.

Ο αριθμός των κόμβων ($2^{k+1} - 1$) ενός γεμάτου δυαδικού δέντρου είναι ο μέγιστος αριθμός κόμβων που μπορεί να έχει ένα δυαδικό δέντρο ύψους k .

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ένα γεμάτο δυαδικό δέντρο ύψους 3.

Οι κόμβοι αριθμούνται ξεκινώντας με τη ρίζα που βρίσκεται στο 1ο επίπεδο, στη συνέχεια αριθμούνται οι κόμβοι του 2ου επιπέδου από αριστερά προς τα δεξιά κ.ο.κ.



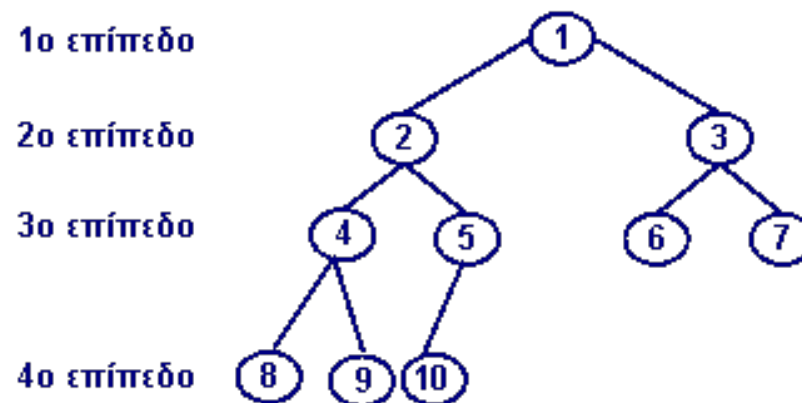
Πλήρες δυαδικό δέντρο

Ένα **πλήρες δυαδικό δέντρο** (**complete trees**), είναι ένα δέντρο στο οποίο κάθε επίπεδο είναι συμπληρωμένο πλήρως, εκτός ίσως από το τελευταίο, στο οποίο οι κόμβοι βρίσκονται στις πιο αριστερές θέσεις

ή αλλιώς

ένα δυαδικό δέντρο ύψους k με n κόμβους, ονομάζεται πλήρες αν οι κόμβοι του αντιστοιχούν στους κόμβους 1 έως n ενός γεμάτου δυαδικού δέντρου ύψους k .

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με 10 κόμβους.



Ο τρόπος αρίθμησης των κόμβων του πλήρους δυαδικού δέντρου μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα **μονοδιάστατο πίνακα** για την αποθήκευση των κόμβων του.

Για την αναπαράσταση ενός πλήρους δυαδικού δένδρου λοιπόν, χρησιμοποιούμε ένα πίνακα στον οποίο τοποθετούμε τη ρίζα στην θέση 1, τα παιδιά της στις θέσεις 2 και 3, τους κόμβους του επόμενου επιπέδου στις θέσεις 4, 5, 6, 7 κ.τ.λ.

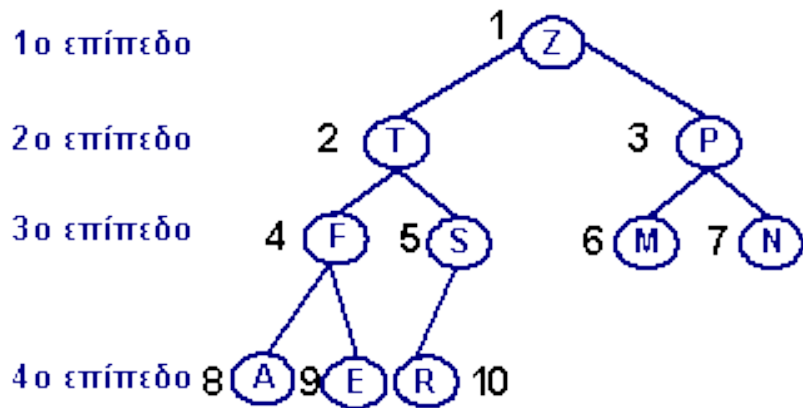
Η αναπαράσταση αυτή είναι πολύ χρήσιμη γιατί επιτρέπει την εύκολη μετάβαση από οποιαδήποτε κόμβο στον πατέρα και στα παιδιά του.

Στην περίπτωση αναπαράστασης ενός πλήρους δυαδικού δέντρου n κόμβων με ένα πίνακα, για κάθε κόμβο j :

1. ο **πατέρας** του βρίσκεται στη θέση $j / 2$, αν $j \neq 1$.
Αν $j = 1$ τότε πρόκειται για τη ρίζα, η οποία φυσικά δεν έχει πατέρα.
2. το **αριστερό παιδί** του βρίσκεται στη θέσης $2*j$, αν $2*j \leq n$.
Αν $2*j > n$ τότε ο κόμβος j δεν έχει αριστερό παιδί.
3. το **δεξί παιδί** του βρίσκεται στη θέση $2*j+1$, αν $2*j+1 \leq n$.
Αν $2*j+1 > n$ τότε ο κόμβος j δεν έχει δεξί παιδί.

Πλήρες δυαδικό δέντρο

Αναπαράσταση ενός πλήρους δυαδικού δέντρου σχηματικά και με πίνακα:



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	T	P	F	S	M	N	A	E	R

Με έντονα γράμματα φαίνεται η αρίθμηση των κόμβων, η οποία συμπίπτει και με τις θέσεις του πίνακα που αποθηκεύονται οι κόμβοι.

Ένα **μέγιστο δέντρο** (**max tree**), είναι ένα δέντρο στο οποίο η τιμή του πεδίου κλειδιού κάθε κόμβου δεν είναι μικρότερη από τις τιμές των πεδίων κλειδιών των παιδιών του, εφόσον υπάρχουν.

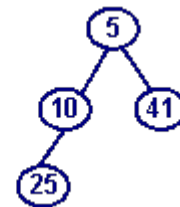
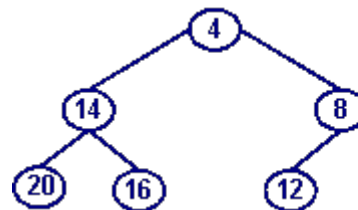
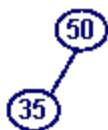
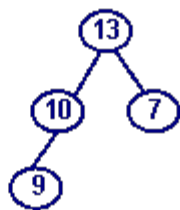
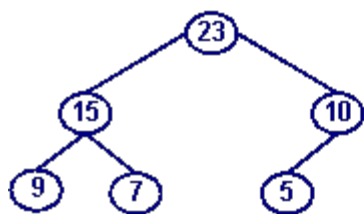
Ένα **ελάχιστο δέντρο** (**min tree**), είναι ένα δέντρο στο οποίο η τιμή του πεδίου κλειδιού κάθε κόμβου δεν είναι μεγαλύτερη από τις τιμές των πεδίων κλειδιών των παιδιών του, εφόσον υπάρχουν.

Από τον ορισμό του μέγιστου και του ελάχιστου δέντρου, είναι προφανές ότι η τιμή του πεδίου κλειδιού της ρίζας ενός μέγιστου δέντρου είναι η μεγαλύτερη τιμή στο δέντρο, ενώ σε ένα ελάχιστο δέντρο είναι η μικρότερη τιμή.

Ο σωρός αποτελεί ειδική περίπτωση ενός πλήρους δυαδικού δέντρου και διακρίνεται σε μέγιστο και ελάχιστο σωρό:

Ο **μέγιστος σωρός** (**max heap**) είναι ένα πλήρες δυαδικό δένδρο, το οποίο είναι ταυτόχρονα και ένα μέγιστο δένδρο.

Αντίστοιχα, ο **ελάχιστος σωρός** (**min heap**) είναι ένα πλήρες δυαδικό δένδρο που είναι ταυτόχρονα και ένα ελάχιστο δένδρο.



παραδείγματα μέγιστων σωρών

παραδείγματα ελάχιστων σωρών

Στις περισσότερες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στις **ουρές προτεραιότητας** (**priority queues**) που υλοποιούνται με τον ΑΤΔ του σωρού, χρησιμοποιούνται μέγιστοι σωροί.

Γι' αυτό και όταν αναφερόμαστε στη δομή του σωρού, χωρίς να προσδιορίζουμε αν πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο σωρό, εννοούμε *μέγιστο σωρό*.

Πολλές φορές μάλιστα χρησιμοποιείται ο παρακάτω ορισμός για το σωρό:

Ο **σωρός** είναι ένα πλήρες δυαδικό δέντρο, του οποίου κάθε κόμβος ικανοποιεί την **ιδιότητα προτεραιότητας**, σύμφωνα με την οποία το κλειδί σε κάθε κόμβο πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τα κλειδιά των παιδιών του (αν έχει).