ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΠΡΙΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ

1. **100 μονάδες (10% της συνολικής βαθμολογίας)**.
2. **Bonus 10%** εάν οι εργασίες κατατεθούν σε LaTeX, **χωρίς** σφάλματα.
3. Επιτρέπεται **εκπρόθεσμη υποβολή έως 5 ημέρες** αργότερα με **ποινή 20%** του βαθμού.
4. Οι απαντήσεις παραδίδονται αποκλειστικά σε **μία** από τις παρακάτω μορφές:
   - **ένα zip** αρχείο το οποίο περιλαμβάνει τα αρχεία tex και pdf (που παράχθηκε από το tex), εάν χρησιμοποιηθεί LaTeX.
   - **ένα pdf** αρχείο, σε κάθε άλλη περίπτωση.
5. Το αρχείο πρέπει να έχει την **ονομασία** (ext $\in$ {zip, pdf}):
   - **username.ext**, αν η εργασία κατατεθεί **ατομικά**. Για παράδειγμα, sdi2300999.ext.
   - **username1-username2.ext**, αν η εργασία κατατεθεί από **ομάδα δύο ατόμων**. Για παράδειγμα, sdi2300998-sdi2300999.ext.
6. Στις απαντήσεις σας **τηρήστε τη σειρά** των ασκήσεων και των υπο-ερωτημάτων όπως δίνονται. Στην περίπτωση που οι απαντήσεις σας είναι χειρόγραφες, φροντίστε το κείμενο να είναι ευανάγνωστο.

Άσκηση 1. (**25 μονάδες**) Προσδιορίστε την τάξη (Θ) των ακόλουθων αναδρομικών εξισώσεων. Η απάντησή σας πρέπει να συνοδεύεται από αιτιολόγηση.

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$,
- $T(n) = T(n-1) + c^n$, όπου $c > 1$ σταθερά,
- $T(n) = 7T\left(\frac{n}{7}\right) + n$,
- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$,
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$, όπου $a > 1$ και $c > 0$ σταθερές.

Άσκηση 2. (**25 μονάδες**) Δίνεται πίνακας $A[1, ..., n]$, τα στοιχεία του οποίου αντιστοιχούν σε διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά με την εξαίρεση ότι ένας όρος απουσιάζει. Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για την εύρεση του *χαμένου* όρου που δεν εμφανίζεται στον πίνακα. Επιχειρηματολογήστε για την οθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγόριθμού σας.

Άσκηση 3. (**25 μονάδες**) Υποθέστε ότι έχετε $k = 2^r$, $r \in \mathbb{Z}^+$, ταξινομημένες ακολουθίες, η καθεμία με n στοιχεία και θέλετε να τις συνδυάσετε σε μία ταξινομημένη ακολουθία με kn στοιχεία. Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη στρατηγική "διαίρει και κυρίευε". Ποιά είναι η χρονική πολυπλοκότητα της λύσης σας;

Άσκηση 4. (**25 μονάδες**) Δίνονται n μη-κενά κλειστά διαστήματα φυσικών αριθμών. Έστω $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $\ldots$, $[\alpha_n, \beta_n]$. Δυο διαστήματα λέγονται εμφωλευμένα όταν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου. Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο (σε φυσική γλώσσα) ο οποίος να υπολογίζει το πλήθος των ζευγών εμφωλευμένων διαστημάτων στο $[\alpha_1, \beta_1]$,$[\alpha_2, \beta_2]$, $\ldots$, $[\alpha_n, \beta_n]$ σε χρόνο $\mathcal{O}(n \log n)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(Για παράδειγμα, για τα διαστήματα: [1,8], [2,3], [3,4], [7,12], ισχύει $[2, 3] \subseteq [1, 8]$ και $[3, 4] \subseteq [1, 8]$ αλλά κανένα άλλο ζεύγος διαστημάτων δεν είναι εμφωλευμένο και άρα το πλήθος είναι 2.)