Лабораторная работа №5

Модель «хищник-жертва»

Левкович Константин Анатольевич

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Цель работы

1. Научиться строить модели «хищник-жертва» на примере модели Лотки-Вольтерры.
2. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв.
3. Найти стационарное состояние системы

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.13x(t) + 0.041x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.31y(t) - 0.042x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7, y_0 = 20$. Найдите стационарное состояние системы.

2.2 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4.

Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (положение равновесия, не зависящее от времени решения). Если начальное состояние будет другим, то это приведет к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние. Стационарное состояние системы будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

2.3 Графики

График колебаний изменеия числа популяции хищников и жертв (рис. 1-@fig:001)

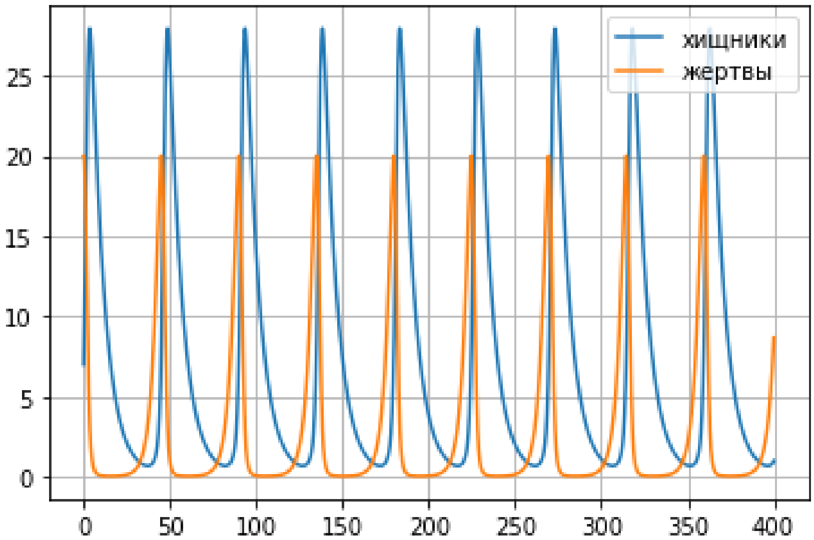

Рис. 2.1: График колебаний изменеия числа популяции хищников и жертв

Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями =20, =7. (рис. 2-@fig:002)

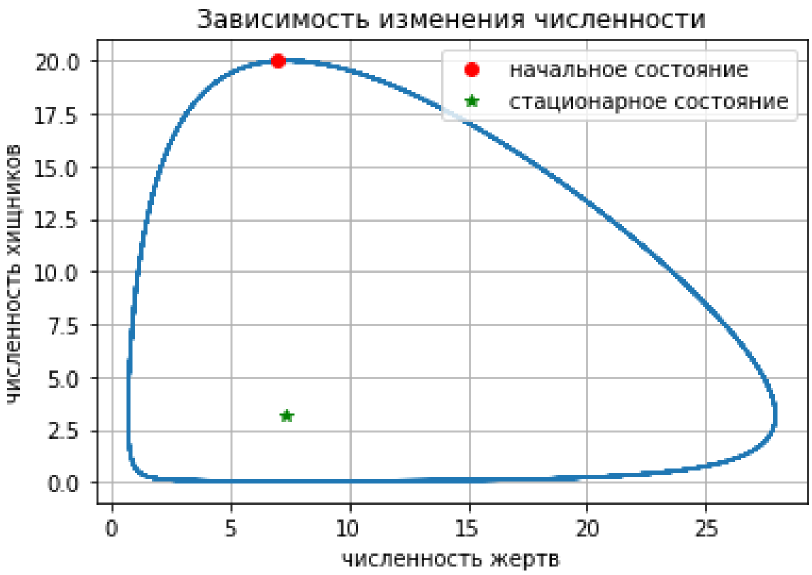

Рис. 2.2: Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв

3 Выводы

1. Познакомился с моделью «хищник-жертва» на примере простейшей модели взаимодействия - модели Лотки-Вольтерры.
2. Построил график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$
3. Нашёл стационарное состояние системы.