

# **Лабораторная работа №8**

**Модель конкуренции двух фирм**

Левкович Константин Анатольевич

# Содержание

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Цель работы</b>                    | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Выполнение лабораторной работы</b> | <b>5</b>  |
| 2.1      | Теоретическое введение . . . . .      | 5         |
| 2.1.1    | Модель одной фирмы . . . . .          | 5         |
| 2.1.2    | Конкуренция двух фирм . . . . .       | 8         |
| 2.2      | Задание . . . . .                     | 10        |
| 2.3      | Графики . . . . .                     | 11        |
| <b>3</b> | <b>Выводы</b>                         | <b>14</b> |

## Список иллюстраций

|     |                         |    |
|-----|-------------------------|----|
| 2.1 | Первый случай . . . . . | 12 |
| 2.2 | Второй случай . . . . . | 13 |

# 1 Цель работы

1. Рассмотреть модель конкуренции двух фирм в разных случаях.
2. Построить графики изменения оборотных средств фирм.

## 2 Выполнение лабораторной работы

### 2.1 Теоретическое введение

#### 2.1.1 Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

$N$  – число потребителей производимого продукта.

$S$  – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

$M$  – оборотные средства предприятия

$\tau$  – длительность производственного цикла

$p$  – рыночная цена товара

$\tilde{p}$  – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$\delta$  – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

$\kappa$  – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой

продукции.

$Q(S/p)$  – функция спроса, зависящая от отношения дохода  $S$  к цене  $p$ . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров длительного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{P}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right),$$

где  $q$  – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при  $p = p_{cr}$  (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина  $p_{cr} = Sq/k$ . Параметр  $k$  – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть,  $Q(S/p) = 0$  при  $p \geq p_{cr}$ ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены  $p$  представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \left( -\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + NQ \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр  $\gamma$  зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла  $\tau$ . При заданном  $M$  уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены  $p$  равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}NQ})$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{NQ} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию  $\partial M/\partial t = 0$ :

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае  $a^2 < 4b$ ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть,  $b \ll a^2$ ) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При  $b \ll a$  стационарные значения  $M$  равны

$$\tilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние  $\tilde{M}_+$  устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние  $\tilde{M}_-$  неустойчиво, так что при  $M < \tilde{M}_-$  оборотные средства падают ( $\partial M/\partial t < 0$ ), то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу  $\tilde{M}_-$  соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр  $\delta$  всюду входит в сочетании с  $\tau$ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:  $\delta = 1$ , а параметр  $\tau$  будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

### 2.1.2 Конкуренция двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_2 \end{cases}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины  $N_1$  и  $N_2$  – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене  $p$ . Тогда



$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \end{cases}$$

где  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$  – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}\right) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}\right) - \kappa_2 \end{cases}$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right)$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{1}{Nq} \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} \right) \right)$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки ( $\kappa_1, \kappa_2$ ) пренебрежимо малы. И введем нормировку  $t = c_1 \theta$ . Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

## 2.2 Задание

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед  $M_1 M_2$  будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.00044)M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 7.7, M_0^2 = 9.7$$

$$p_{cr} = 47, N = 50, q = 1,$$

$$\tau_1 = 33, \tau_2 = 27$$

$$\tilde{p}_1 = 9.7, \tilde{p}_2 = 11.7$$

Обозначения:

$N$  – число потребителей производимого продукта.

$\tau$  – длительность производственного цикла

$p$  – рыночная цена товара

$p_{cr}$  – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$q$  – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\theta = \frac{t}{c_1}$  – безразмерное время

## 2.3 Графики

Первый случай. (рис. -@fig:001)

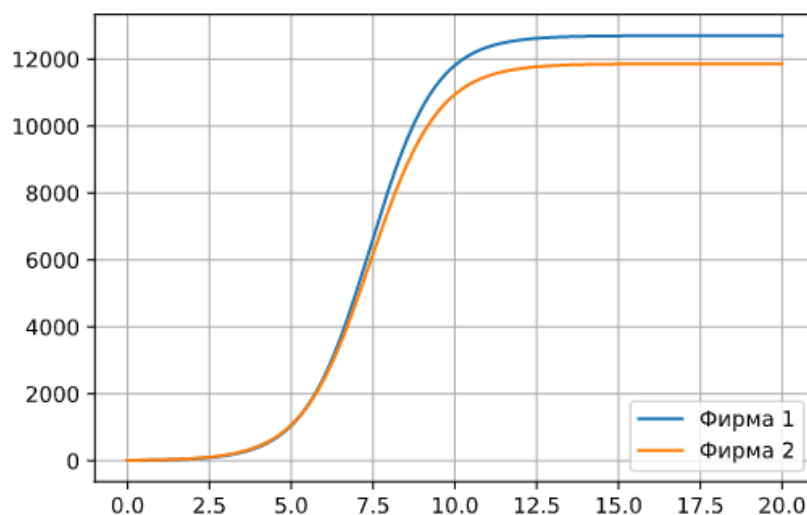


Рис. 2.1: Первый случай

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели (17) этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом  $M_1 M_2$ : в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях ( $\frac{b}{c_1}$ ). Это было обозначено в условиях задачи.

Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

Второй случай. (рис. -@fig:002)

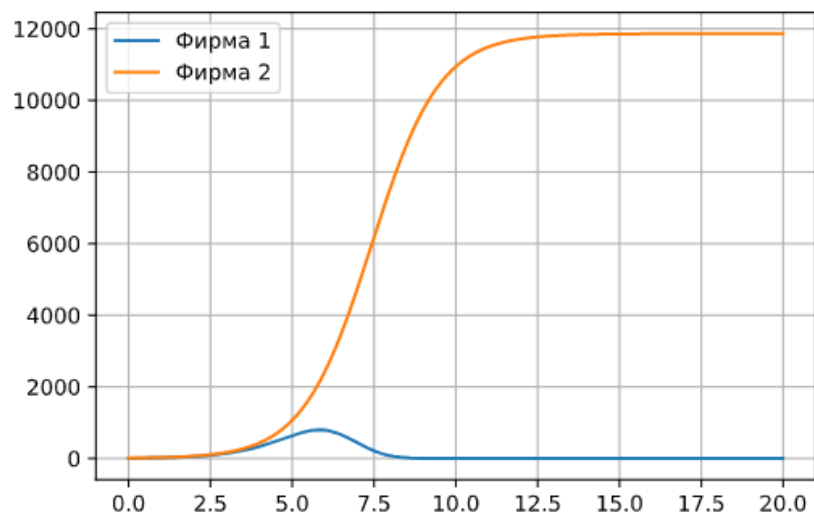


Рис. 2.2: Второй случай

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начинает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

## **3 Выводы**

1. Рассмотрел модель конкуренции двух фирм в разных случаях.
2. Построил графики изменения оборотных средств фирм.