# Badanie przebiegu zmienności funkcji – lista zadań z przykładowymi rozwiązaniami

1) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

*Rozwiązanie.* Badając monotoniczność funkcji $f$, różniczkowalnej w przedziale $(a, b)$, $a < b$, $a, b, \in \mathbb{R}$, będziemy wykorzystywali wnioski z twierdzenia Lagrange'a:

- jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja $f$ jest rosnąca w przedziale $(a, b)$;
- jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(a, b)$,
- jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja $f$ jest stała w $(a, b)$.

Zaczniemy od wyznaczenia dziedziny funkcji, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Widzimy, że nasza funkcja jest różniczkowalna (jako złożenie i iloczyn funkcji różniczkowalnych) i

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) \qquad \text{oraz} \qquad D_{f'} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Rozwiązujemy nierówności:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}(2x-1) > 0 \xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f'}}\ e^{\frac{1}{x}}>0} 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{2} \wedge x \in D_{f'}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}(2x-1) < 0 \xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f'}}\ e^{\frac{1}{x}}>0} 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2} \wedge x \in D_{f'}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

**Uwaga.** Przy bardziej skomplikowanych nierównościach warto narysować sobie siatkę znaków (zobacz zadanie 4).

**Odpowiedź**: Funkcja $f$ jest rosnąca w przedziale $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ oraz malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

**Uwaga.** Zwróćmy uwagę na sformułowanie odpowiedzi. Piszemy "funkcja $f$", a nie "funkcja $f(x)$". $f(x)$ to wartość funkcji $f$ dla pewnego $x$, a przecież wartość funkcji $f$ (jedna konkretna, dla ustalonego $x$) nie może być rosnąca. Dalej piszemy że "funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$", a nie w sumie przedziałów. Zwróćmy jeszcze raz uwagę na wnioski z twierdzenia Lagrange'a, wyraźnie widać, że znak pochodnej w **przedziale** decyduje o monotoniczności funkcji w **przedziale**. Często się zdarza, że funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów, ale nie jest malejąca w sumie przedziałów. Gdybyśmy chcieli powiedzieć, że funkcja jest malejąca w sumie przedziałów musielibyśmy to jeszcze dodatkowo sprawdzić (odwołując się do definicji funkcji malejącej).

2) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

*Rozwiązanie.* Jak już wiemy, dziedzina funkcji to $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z materiałów do wykładu wiemy, że funkcja może mieć ekstremum lokalne w punktach nazywanych punktami krytycznymi. Są to punkty $x$, dla których $f'(x) = 0$ (punkty stacjonarne) lub w których pochodna funkcji nie istnieje (ale funkcja jest określona). Z poprzedniego zadania wiemy, że

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) \qquad \text{oraz} \qquad D_{f'} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Oznacza to, że funkcja $f$ jest różniczkowalna (czyli w każdym punkcie wykresu istnieje styczna, a wykres nie ma ostrzy), więc jedynymi punktami krytycznymi są punkty stacjonarne. W celu ich znalezienia, rozwiązujemy równanie:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) = 0 \xLeftrightarrow{\forall_{x \in D_{f'}}\ e^{\frac{1}{x}} > 0} 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Mamy zatem jeden punkt stacjonarny $x_0 = \frac{1}{2}$. Oczywiście, nie oznacza to, że funkcja przyjmuje w nim ekstremum lokalne. Na razie sprawdziliśmy jedynie warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji i wiemy, że funkcja nie może mieć ekstremów lokalnych w innych punktach niż te które wyznaczyliśmy. Mówiąc kolokwialnie, punkty krytyczne (a więc i stacjonarne) to "punkty podejrzane o istnienie ekstremum". Teraz sprawdzimy, czy w znalezionym punkcie spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum (zob. twierdzenie 3 z materiałów do wykładu). W tym celu posiłkujemy się poprzednim zadaniem, w którym wyznaczyliśmy przedziały monotoniczności funkcji $f$ (normalnie musielibyśmy teraz powtórzyć rozumowanie z zadania 1). Mamy:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Widzimy, więc że pochodna funkcji $f$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ zmienia znak z "$-$" na "$+$" (inaczej funkcja $f$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ z malejącej staje się rosnąca). Zatem funkcja $f$ w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ ma ekstremum lokalne, co więcej jest to minimum lokalne. Obliczymy jeszcze wartość tego minimum:

$$f_{min}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} e^2.$$

Odpowiedź: Funkcja $f$ osiąga w punkcie $x = \frac{1}{2}$ minimum lokalne równe $\frac{1}{4}e^2$.

**Uwaga 1.** Znów zwróćmy uwagę na odpowiedź. Zaznaczmy, że ekstremum lokalnym jest wartość funkcji, a nie sam punkt $x_0$. Również nie jest prawdą, że funkcja przyjmuje minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}e^2\right)$, ten punkt leży na krzywej, a ekstremum lokalne może być przyjęte tylko w punkcie należącym do dziedziny funkcji.

**Uwaga 2.** Gdyby funkcja $f$ miała więcej punktów krytycznych, musielibyśmy przeprowadzić powyższe rozumowanie dla każdego punktu z osobna. Ponadto, ze względu na definicję ekstremum lokalnego funkcji (zobacz materiały do wykładu), funkcja może posiadać więcej niż jedno ekstremum lokalne danego typu (np. może mieć dwa minima lokalne, nawet o różnej wartości).

**Uwaga 3.** Zauważmy, że rozwiązując zadanie 2 i tak musielibyśmy rozwiązać zadanie 1, dlatego najczęściej zadania te występują jako jedno zadanie o treści "Zbadaj monotoniczność funkcji i wyznacz jej ekstrema lokalne."

3) Zbadaj wypukłość krzywej $y = f(x)$ oraz znajdź jej punkty przegięcia, jeżeli:

(a) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

(b) $f(x) = \ln(8 - x^3)$

*Rozwiązanie.* Wiemy, że jeśli funkcja $f$ jest dwukrotnie różniczkowalna w $(a, b)$ i jeśli:

- $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła w $(a, b)$;
- $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to krzywa $y = f(x)$ jest wklęsła w $(a, b)$.

Natomiast jeśli $f''(x) = 0$ dla pewnego $x = x_0$, to punkt $(x_0, f(x_0))$ może być punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.
Definicje wklęsłości i wypukłości krzywej znajdziemy w materiałach do wykładu.
a) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$
Zaczynamy od dziedziny funkcji, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Następnie wyznaczymy punkty, w których pochodna drugiego rzędu funkcji $f$ się zeruje, a potem, badając wypukłość i wklęsłość krzywej $y = f(x)$, sprawdzimy czy w tych punktach mamy punkty przegięcia.
Musimy więc policzyć pochodną drugiego rzędu funkcji $f$ (czyli pochodną pochodnej funkcji $f$). Z zadania 1 mamy:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) .$$

Zatem:

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (2x - 1) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2 = e^{\frac{1}{x}} \left(2 - \frac{2x - 1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

oraz $D_{f''} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stąd:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} = 0 \overset{\forall_{x \in D_{f''}}\ e^{\frac{1}{x}} > 0}{\Longleftrightarrow} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2 - 2x + 1 = 0 \wedge x \neq 0\right)$$

Zauważmy, że powyższe równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych, bo $\Delta = = 4 - 8 = -4 < 0$. Teraz wyznaczymy przedziały wypukłości i wklęsłości krzywej, czyli rozwiążemy nierówności:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-2x+1}{x^2}>0,$$
$$f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-2x+1}{x^2}<0.$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-2x+1}{x^2}>0 &\xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f''}}\ e^{\frac{1}{x}}>0} \frac{2x^2-2x+1}{x^2}>0 \Leftrightarrow\\
&\xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f''}}\ x^2>0} \left(2x^2-2x+1>0 \wedge x\neq 0\right),\\
f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-2x+1}{x^2}<0 &\xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f''}}\ e^{\frac{1}{x}}>0} \frac{2x^2-2x+1}{x^2}<0 \Leftrightarrow\\
&\xLeftrightarrow{\forall_{x\in D_{f''}}\ x^2>0} \left(2x^2-2x+1<0 \wedge x\neq 0\right)
\end{aligned}$$

Ponieważ powyższa funkcja kwadratowa nie posiada miejsc zerowych oraz współczynnik przy $x^2$ jest dodatni, więc

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$
$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

Widzimy, że pochodna drugiego rzędu funkcji $f$ jest stale dodatnia. Stąd dostajemy:

**Odpowiedź**: Krzywa $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$ jest wypukła w przedziałach $(-\infty,0)$ i $(0,+\infty)$ oraz nie ma punktów przegięcia.

b) $f(x)=\ln(8-x^3)$
Wyznaczamy dziedzinę funkcji $f$:

$$8-x^3>0 \Leftrightarrow 8>x^3 \Leftrightarrow 2>x,$$

czyli $D_f=(-\infty,2)$. Następnie musimy policzyć pochodną drugiego rzędu funkcji $f$:

$$f'(x)=\frac{1}{8-x^3}\cdot(-3x^2)=-3\cdot\frac{x^2}{8-x^3},$$
$$f''(x)=-3\cdot\frac{2x(8-x^3)-x^2\cdot(-3x^2)}{(8-x^3)^2}=-3\cdot\frac{16x+x^4}{(8-x^3)^2}=-3\cdot\frac{x(16+x^3)}{(8-x^3)^2}.$$

Pamiętajmy o wyznaczeniu dziedzin pochodnych pierwszego i drugiego rzędu funkcji $f$. Zauważmy, że chociaż dziedziną funkcji $y=\frac{-3x^2}{8-x^3}$ jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, to ponieważ $D_{f'}\subseteq D_f$ oraz $D_{f''}\subseteq D_f$, więc $D_{f'}=D_{f''}=(-\infty,2)$. Jeśli przypomnimy sobie definicję pochodnej w punkcie $x_0$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

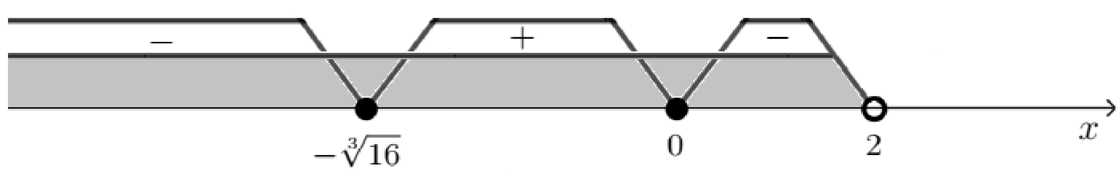
(jeżeli tylko powyższa granica istnieje i jest skończona), to widzimy, że we wzorze pojawia się w liczniku $f(x_0)$, więc pochodna może istnieć tylko w punktach, w których określona jest funkcja (stąd zawsze $D_{f''} \subseteq D_{f'} \subseteq D_f$). Rozwiązujemy nierówności:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \left(-3 \cdot \frac{x(16+x^3)}{(8-x^3)^2} > 0 \wedge x < 2\right),$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \left(-3 \cdot \frac{x(16+x^3)}{(8-x^3)^2} < 0 \wedge x < 2\right).$$

Zauważmy, że ponieważ $(8-x^3)^2 > 0$ dla wszystkich $x \in D_{f''}$, to powyższe nierówności są równoważne nierównościom:

$$-x(16+x^3) > 0 \wedge x < 2,$$
$$-x(16+x^3) < 0 \wedge x < 2.$$

Widzimy, że miejsca zerowe wielomianu $y = -x(16+x^3)$ to $-\sqrt[3]{16}$ oraz 0. Narysujemy więc siatkę znaków dla drugiej pochodnej:




Na powyższym rysunku zaznaczyliśmy również dziedzinę funkcji (zacieniowany przedział). Zatem:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[3]{16}, 0),$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt[3]{16}) \cup (0, 2).$$

Zauważmy, że pochodna drugiego rzędu funkcji $f$ zmienia znaki w punktach $-\sqrt[3]{16}$ oraz 0. Stąd punkty (teraz już punkty na płaszczyźnie, bo są to punkty na krzywej!) $(-\sqrt[3]{16}, f(-\sqrt[3]{16}))$ i $(0, f(0))$ są punktami przegięcia krzywej $y = \ln(8-x^3)$. Policzmy jeszcze:

$$f(-\sqrt[3]{16}) = \ln 24 \qquad \text{oraz} \qquad f(0) = \ln 8.$$

**Odpowiedź**: Krzywa $y = \ln(8-x^3)$ jest wypukła w przedziale $(-\sqrt[3]{16}, 0)$, a wklęsła w przedziałach $(-\infty, -\sqrt[3]{16})$ oraz $(0, 2)$. Punkty $(-\sqrt[3]{16}, \ln 24)$ oraz $(0, \ln 8)$ są punktami przegięcia krzywej $y = \ln(8-x^3)$.

4) Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ i naszkicuj jej wykres.

*Rozwiązanie.* Aby naszkicować wykres funkcji musimy zebrać razem poszczególne elementy badania przebiegu zmienności funkcji, które ćwiczyliśmy wcześniej. W szczególności powinniśmy:

- wyznaczyć dziedzinę funkcji i zastanowić się czy nie posiada ona jakichś specyficznych własności (np. parzystość, nieparzystość, przecięcia krzywej z osiami układu współrzędnych, okresowość itp.),
- wyznaczyć równania asymptot funkcji oraz policzyć granice na końcach dziedziny,
- wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji oraz jej ekstrema lokalne,
- wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości wykresu funkcji i punkty przegięcia.

Na koniec wygodnie jest zebrać wszystkie wyniki w tabelce.

Jak już wiemy z poprzednich zadań, dziedzina funkcji to $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Łatwo sprawdzić, że funkcja nie jest parzysta i nie jest też nieparzysta. Widzimy też, że wartości funkcji $f$ są zawsze większe od zera (mamy $x^2 \geqslant 0$ i $e^{\frac{1}{x}} > 0$, co daje nam $x^2 e^{\frac{1}{x}} > 0$), co za tym idzie nie posiada ona miejsc zerowych (oznacza to też, że wykres funkcji jest położony w górnej półpłaszczyźnie). Natomiast z dziedziny funkcji wynika, że wykres funkcji $f$ nie może się przecinać z osią $OY$.

Policzymy granice na końcach dziedziny:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \text{bo} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \text{bo} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \text{bo} \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \text{więc} \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$
$$\lim_{x\to0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-2}} \underset{H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^{-1}} \underset{H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-2}} =$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty.$$

Widzimy więc, że prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną krzywej $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ oraz że nie ma asymptot poziomych. Sprawdzimy jeszcze czy są asymptoty ukośne:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Ponieważ powyższe granice okazały się granicami niewłaściwymi oznacza to, że nie istnieją asymptoty ukośne.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
P4S POWER for Student Staff Science
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Monotoniczność i ekstrema tej funkcji wyznaczyliśmy w zadaniach 1 i 2. Wiemy, że funkcja $f$ jest rosnąca w przedziale $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ oraz malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ oraz, że funkcja $f$ osiąga minimum lokalne w punkcie $x = \frac{1}{2}$ równe $\frac{1}{4}e^2$.

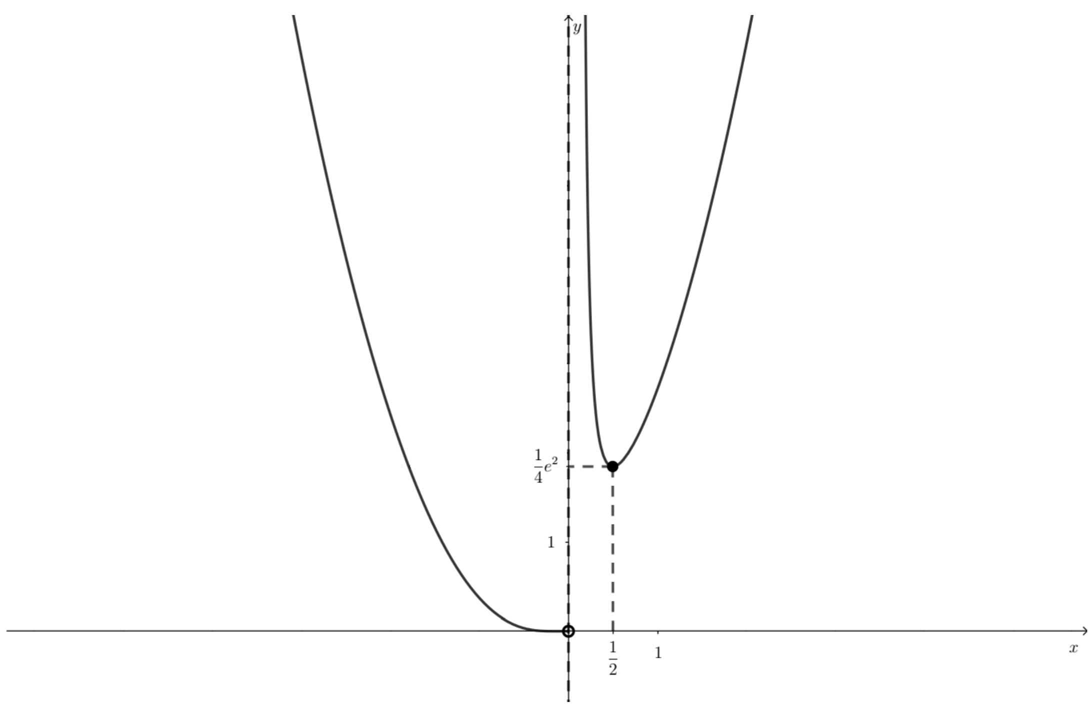
W zadaniu 3 sprawdziliśmy, że krzywa $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ jest wypukła w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$ (to znaczy, że funkcja $f$ ma wykres wypukły w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$).

Tworzymy tabelkę. W pierwszym wierszu wypisujemy wszystkie przedziały, na które naszą dziedzinę podzieliły punkty charakterystyczne (ekstrema, punkty przegięcia itp.), możemy też uwzględnić osobno te punkty. W drugim wierszu wpisujemy znaki pochodnej funkcji $f$, w trzecim znaki pochodnej drugiego rzędu funkcji $f$, a w ostatnim wierszu narysujemy, w przybliżeniu, jak wyglądałaby nasza funkcja w tym przedziale.

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 0$ | $+\infty \searrow$ | $\frac{1}{4}e^2$ min | $\nearrow +\infty$ |

W ostatnim wierszu uwzględniliśmy również wartości granic na końcach przedziału.

Pozostaje jedynie naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. Zauważmy, że w ostatnim wierszu tabelki mamy już prawie gotowe wykresy poszczególnych fragmentów wykresu. Zatem wykres ten wygląda następująco:



# Zadania do samodzielnego rozwiązania

Poniższe zadania pochodzą z następującego zbioru zadań:
E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises. Part 1*, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2020.

1. Zbadaj monotoniczność funkcji:
   (a) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$
   (b) $y = (2x+4)e^{-3x}$
   (c) $y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

2. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:
   (a) $y = x + \sqrt{1-2x}$
   (b) $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$
   (c) $y = x^2 + \ln(1+2x)$

3. Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema lokalne funkcji:
   (a) $y = x^2(2-x)^2$
   (b) $y = x - \ln(1+x^2)$
   (c) $y = \ln\frac{e^x}{x+1}$
   (d) $y = (x+1)e^{2x^2-x}$
   (e) $y = x - 2\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
   (f) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

4. Zbadaj wypukłość i znajdź punkty przegięcia krzywej
   (a) $y = xe^{-x^2}$
   (b) $y = e^{\operatorname{arctg}(2x)}$
   (c) $y = \ln(x^2-1)$
   (d) $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$
   (e) $y = \frac{3}{x}\ln\frac{x}{3}$

5. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres
   (a) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$

(b) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

(c) $y = x^2 e^{-x^2}$

(d) $y = \ln(1+x^2)$

# Odpowiedzi

1. **(a)** rosnąca w $(-\infty, 0)$, malejąca w $(0, +\infty)$, **(b)** rosnąca w $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$, malejąca w $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$, **(c)** rosnąca w $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$

2. **(a)** maksimum $y_{max}(0) = 1$, **(b)** minimum $y_{min}(0) = 0$, **(c)** brak

3. **(a)** rosnąca w $(0,1)$ i $(2,+\infty)$, malejąca w $(-\infty, 0)$ i $(1,2)$, $y_{max}(1) = 1$, $y_{min}(0) = = y_{min}(2) = 0$ **(b)** rosnąca w $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$, brak ekstremów, **(c)** rosnąca w $(0, +\infty)$, malejąca w $(-1, 0)$, $y_{min}(0) = 0$, **(d)** rosnąca w $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$ i $(0, \infty)$, malejąca w $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, $y_{max}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} e^{\frac{15}{8}}$, $y_{min}(0) = 1$, **(e)** rosnąca w $\left(0, \frac{7}{6}\pi\right)$ i $\left(\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right)$, malejąca w $\left(\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$, $y_{max}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{7}{6}\pi + \sqrt{3}$, $y_{min}\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{11}{6}\pi - \sqrt{3}$, **(f)** rosnąca w $(1, e^2)$, malejąca w $(0,1)$ i $(e^2, +\infty)$, $y_{max}(e^2) = 4e^{-2}$, $y_{min}(1) = 0$

4. **(a)** wypukła w $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ i w $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, wklęsła w $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ i $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, punkty przegięcia: $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}\right)$, **(b)** wypukła w $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, wklęsła w $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, punkt przegięcia $\left(\frac{1}{4}, e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$, **(c)** wklęsła w $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, brak punktów przegięcia, **(d)** wklęsła w $(0, +\infty)$, brak punktów przegięcia **(e)** wypukła w $(3e\sqrt{e}, +\infty)$, wklęsła w $(0, 3e\sqrt{e})$, punkt przegięcia $(3e\sqrt{e}, \ln(1+9e^3))$

5. wykresy można sobie narysować przy pomocy programów dostępnych on-line, przykładowo:

   - GeoGebra `https://www.geogebra.org`
   - WolframAlpha `https://www.wolframalpha.com` – trudniejszy w obsłudze

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
P4S POWER for Student Staff Science
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny