画像工学特論 課題 3

M1 田川幸汰

1 課題

$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{f})^2 \to min$ の最小化の解が、行列 $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^\top)^2$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられることを示せ。

1.1 解答

左辺を展開し、内積の交換則を用いて順番を入れ替える。

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{f})^2 = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{f}) \tag{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}^\top\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^\top\boldsymbol{f} \tag{2}$$

$$= \boldsymbol{f}^\top(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^\top)\boldsymbol{f} \tag{3}$$

$$= (\boldsymbol{f}, (\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^\top)\boldsymbol{f}) \tag{4}$$

$$= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{f}) \tag{5}$$

ここで、$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{f})$ はレイリー商を適用することで、式 (6) の形に書き換えられる。

$$R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{f}) = \frac{\boldsymbol{f}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{f}^\top\boldsymbol{f}} \tag{6}$$

このとき、ベクトル $\boldsymbol{f}$ が行列 MU の固有値に対応する固有ベクトルとすると、$R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{f})$ の解は行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値となる。したがって、$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{f})^2$ の最小化の解は、行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対応する最小固有ベクトル $\boldsymbol{f}$ を与えることで算出できる。