

Học máy không giám sát

- Học không giám sát: tập các công cụ thống kê xử lý dữ liệu chỉ có biến đầu vào, không có biến đích
 - Ta chỉ có các biến X mà không có các nhãn Y
 - Mục tiêu: phát hiện các mẫu/các đặc tính của dữ liệu
 - VD: trực quan hóa hoặc diễn giải dữ liệu nhiều chiều



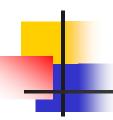


Học có giám sát

- Input: Cả X và Y đều đã biết
- Output: Dự đoán một kết quả (phân lớp/dự báo)

Học không giám sát

- Input: Chỉ biết X, không biết
 Y
- Output: Tạo ra một biến hoặc nhãn mới, (phân cụm/giảm chiều)



Học không giám sát

Ví dụ ứng dụng:

Cho một tập các tài liệu văn bản, cần xác định tập các tài liệu có chung chủ đề như

thể thao, chính trị, ca nhạc,...

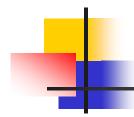
Cho các ảnh khuôn mặt có số chiều cao (high dimension), tìm một biểu diễn đơn giản/thu gọn của các ảnh này để đưa vào bộ phân lớp nhận dạng khuôn mặt







(AT&T Laboratories Cambridge)



Học không giám sát

Tại sao học không giám sát luôn là thách thức lớn?

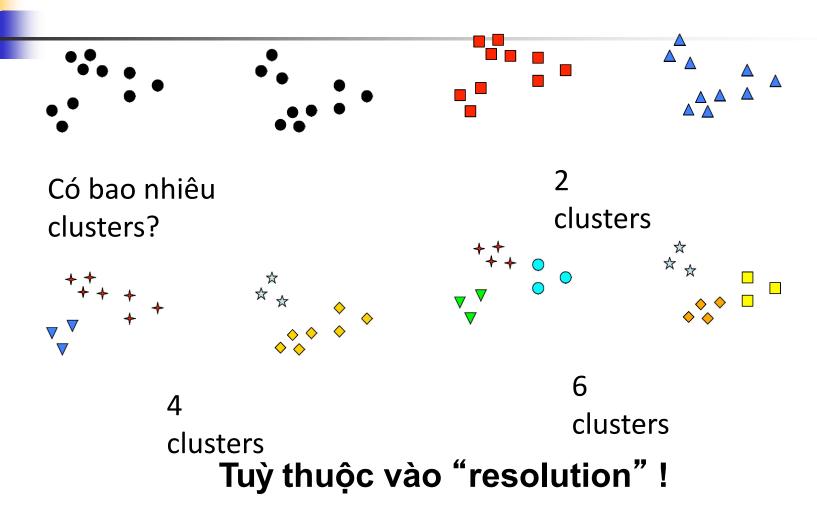
- Phân tích khám phá dữ liệu (Exploratory data analysis) –
 mục tiêu không được định nghĩa rõ ràng
- Khó đánh giá hiệu năng không biết được đáp án đúng ("right answer" unknown)
- Xử lý dữ liệu với số chiều lớn

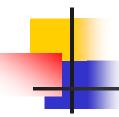
Sắp xếp các đối tượng vào các nhóm (clustering)





Có bao nhiêu clusters





Học không giám sát

Hai cách tiếp cận:

- Phân tích cụm (Cluster analysis)
 - Xác định các nhóm mẫu đồng nhất (có các đặc tính chung)
- Giảm chiều dữ liệu (Dimensionality Reduction)
 - Tìm cách biểu diễn với số chiều thấp hơn dựa trên tính chất và trực quan hóa dữ liệu

Các lĩnh vực ứng dụng

- 4
 - Marketing: Xác định các nhóm khách hàng (khách hàng tiềm năng, khách hàng giá trị, phân loại và dự đoán hành vi khách hàng,...) sử dụng sản phẩm hay dịch vụ của công ty để giúp công ty có chiến lược kinh doanh hiệu quả hơn;
 - ✓ Biology: Phân nhóm động vật và thực vật dựa vào các thuộc tính của chúng;

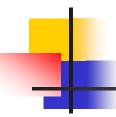
Các lĩnh vực ứng dụng



- ✓ Libraries: Theo dõi độc giả, sách, dự đoán nhu cầu của độc giả...;
- ✓ Insurance, Finance: Phân nhóm các đối tượng sử dụng bảo hiểm và các dịch vụ tài chính, dự đoán xu hướng (trend) của khách hàng, phát hiện gian lận tài chính (identifying frauds);
- ✓ WWW: Phân loại tài liệu (document classification); phân loại người dùng web (clustering weblog);...



Phân tích cụm & K-means

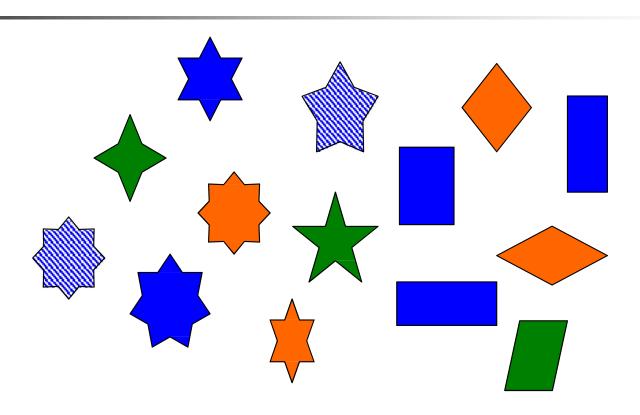


Phân tích cụm (Phân cụm)

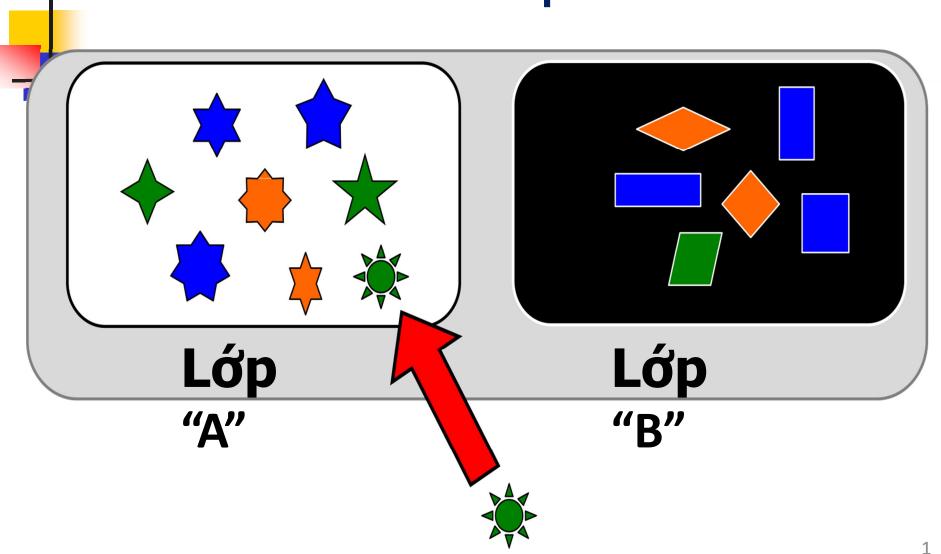
- Phân cụm (clustering): là tập các phương pháp nhằm tìm ra các nhóm con trong dữ liệu
 - Các mẫu có đặc điểm chung trong cùng 1 nhóm nhưng khác
 với các mẫu ở ngoài nhóm
 - Việc gom nhóm là phân tích cấu trúc dữ liệu nội tại, điều này khác với phân lớp

Phân cụm vs. Phân lớp

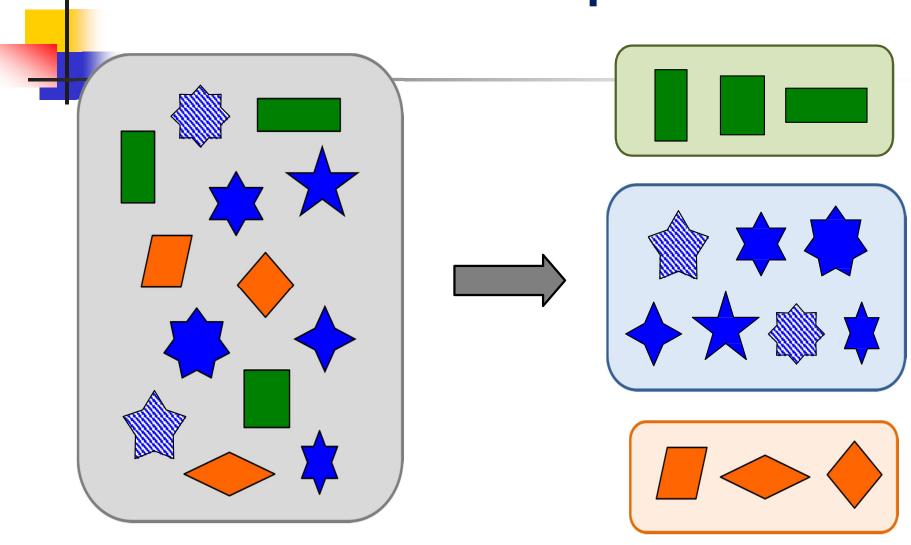




Phân lớp

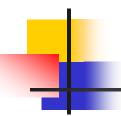


Phân cụm



Phân cụm là gì?

- Là quá trình phân chia 1 tập dữ liệu ban đầu thành các cụm dữ liệu thỏa mãn:
 - Các đối tượng trong 1 cụm "tương tự" nhau.
 - Các đối tượng khác cụm thì "không tương tư" nhau.
 - Mục đích: giải quyết vấn đề tìm kiếm, phát hiện các cụ rang chustering do chustering algorithm chusters of data

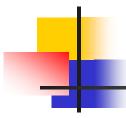


Các mô hình phân cụm

Hai mô hình phân cụm thông dụng:

- Phương pháp dựa trên tâm cụm (Centroid-based)
- Phương pháp phân cấp (Hierarchical)

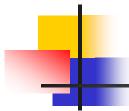
Phân cụm



Các mô hình khác:

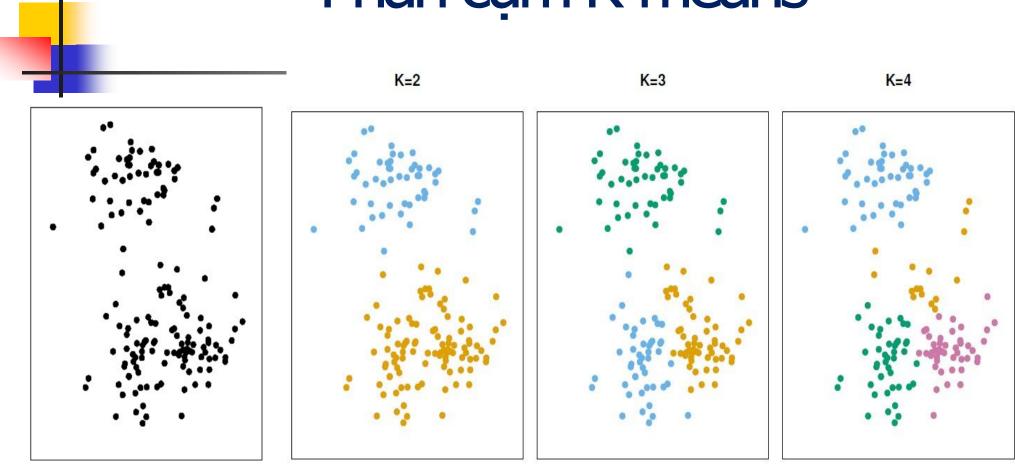
- Phân cụm dựa trên mô hình (Model-based)
 - Mỗi cụm được thể hiện bằng một phân bố thống kê tham số
 - Dữ liệu là một hỗn hợp các phân bố
- Phân cum mờ
 - Cứng (Hard): Các mẫu được chia thành các cụm riêng biệt
 - Mờ (fuzzy): Các mẫu có thể thuộc nhiều hơn 1 cụm với một độ thuộc nhất định.





- Gom nhóm dữ liệu thành K cụm riêng biệt
 - Mỗi cụm K được định nghĩa bởi 1 véc tơ tâm cụm (centroid là giá trị trung bình của tất cả các đối tượng trong cụm)
 - Mỗi đối tượng gán cho 1 cụm đơn (tâm cụm gần nhất)
 - Yêu cầu số lượng cụm đầu vào K
 - "Phân cụm tốt" là cực tiểu sự biến đổi giữa các cụm
 "Tính tương tự (Similarity)" trong K-means được xác định theo khoảng cách Euclid

Phân cụm K-means





Do lường khoảng cách (distance)

Euclid

$$\sqrt{\left[\sum (y-x)^2\right]}$$

• Squared Euclid $\Sigma (y - x)^2$

$$\sum (y - x)^2$$

City-Block

$$\Sigma \mid y - x \mid$$

Chebychev

cos r_{xv}

Cosine

Khoảng cách Euclide

Ví dụ: Cho 2 điểm X(2, 0) và Y(-2, -2). Tính khoảng cách Euclide giữa 2 điểm này

Ta có:

Euclidean(X,Y) =
$$\sqrt{(-2-2)^2 + (-2-0)^2}$$

= $\sqrt{(4^2 + 2^2)} = \sqrt{20} = 4.47$

Khoảng cách giữa X và Y = 4.47

1

Squared Euclidean

Ví dụ: Cho 2 điểm X(2, 0) và Y(-2, -2). Tính khoảng cách Squared Euclidean giữa 2 điểm này

Ta có:

Squared_Euclidean (X,Y) =
$$(-2-2)^2 + (-2-0)^2$$

= $4^2 + 2^2 = 20$

Khoảng cách giữa X và Y = 4.47

Ví dụ với 5 điểm: Khoảng cách Euclide

Cho 5 điểm với các tọa độ tương ứng. Tính khoảng cách Euclide giữa 5 điểm này

	Χ	Υ	(1) (2) ((3)	(4)	(5)
(1)	4	4	(1) - 4.0 1	1.7	20.0	21.5
(2)	8	4	(2) - 8	3.1	16.0	17.9
(3)	15	8	(3)	-	9.8	9.8
(4)	24	4	(4)		-	8.0
(5)	24	12	(5)			-

Ma trận tương tự (Similarity matrix)

```
(1) (2) (3) (4) (5)

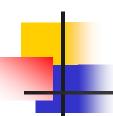
* 4.0 11.7 20.0 21.5 (1)

* 8.1 16.0 17.9 (2)

* 9.8 9.8 (3)

* 8.0 (4)

* (5)
```



Mục đích của phân cụm

- Xác định được bản chất của việc nhóm các đối tượng trong 1 tập dữ liệu không có nhãn.
- Phân cụm không dựa trên 1 tiêu chuẩn chung nào, mà dựa vào tiêu chí mà người dùng cung cấp trong từng trường hợp.

Phân cụm K-means

Các tâm cụm cực tiểu sự biến đổi giữa các cụm

$$J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} \sum_{x \in c_i} |x - \mu_i|^2 \longrightarrow \min$$

– Các tâm cụm (trung tâm của cụm): $\mu_i = \frac{1}{|c_i|} \sum_{x \in C} x$

Bài toán cực tiểu hóa này là tối ưu tổ hợp
 Giải pháp cho cực tiểu hóa địa phương ta sử dụng phương pháp lặp

4

Thuật toán K-means

Input

- ightharpoonup Tập mẫu X = {x_i| i = 1, 2, ..., N}, $x_i \in R^d$
- ➤ Số cụm: K

Output

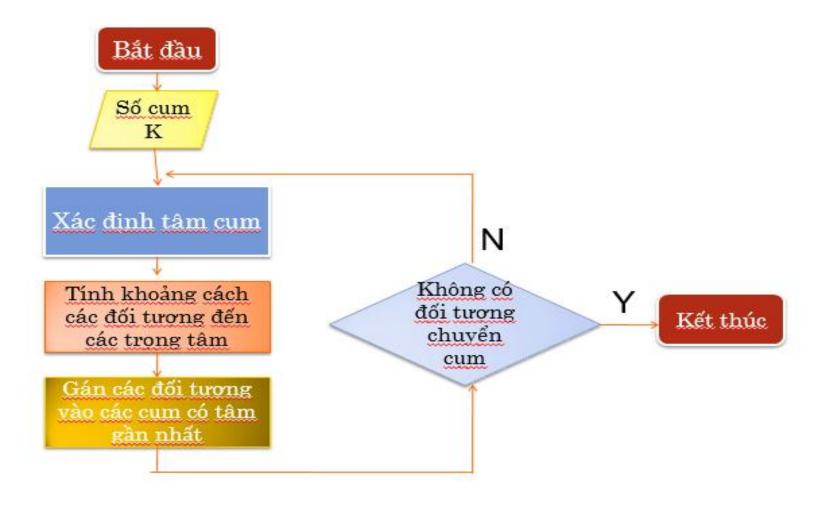
Các cụm C_k ($k=1\div K$) tách rời và hàm mục tiêu J đạt cực tiểu

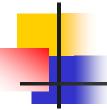


- 1) Khởi tạo: Chọn **ngẫu nhiên** K tâm cụm
- 2) Tính toán khoảng cách từ các đối tượng đến các tâm để phân hoạch dữ liệu (bằng cách gán mỗi đối tượng vào cụm mà nó gần tâm nhất)
- 3) Tính lại các tâm cụm mới trong mỗi cụm
- 4) Lặp lại 2 và 3 cho đến khi "thỏa mãn điều kiện" (khi các tâm cụm ổn định và các đối tượng không dịch chuyển giữa các cụm)

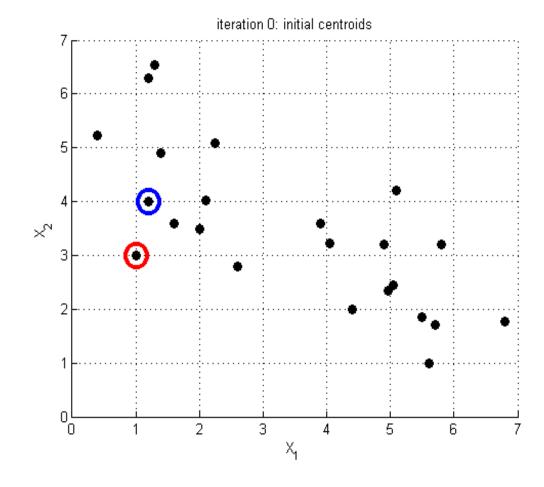


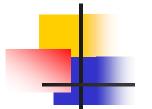


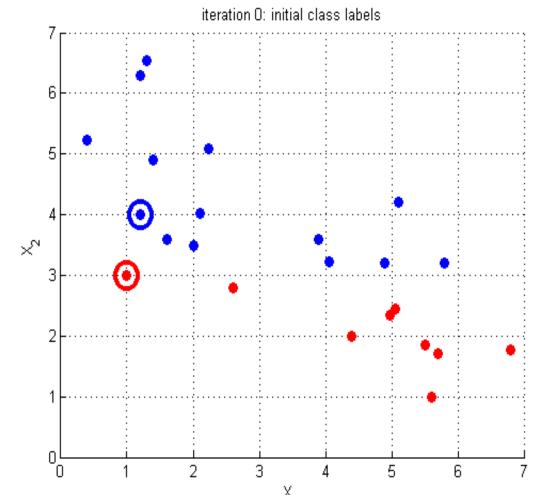




Khởi tạo tâm cụm



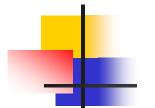


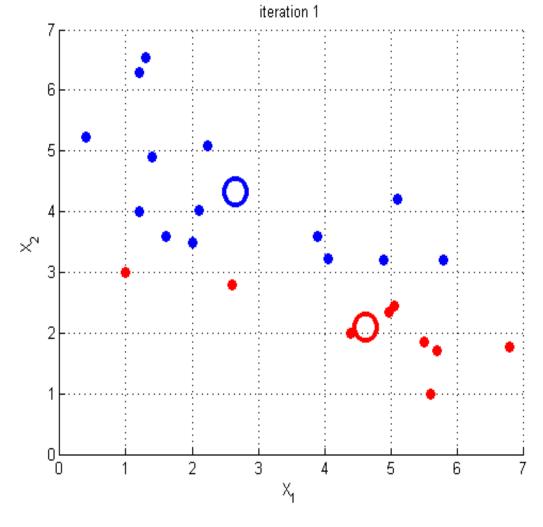


Khởi tạo tâm cụm

Gán các cụm ban

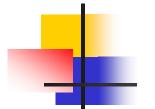
đầu

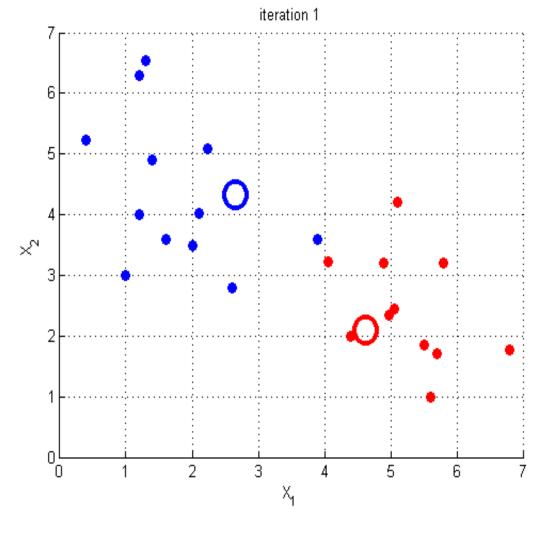




Khởi tạo tâm cụm Gán các cụm ban đầu Cập nhật các tâm

Cập nhật các tâm cụm

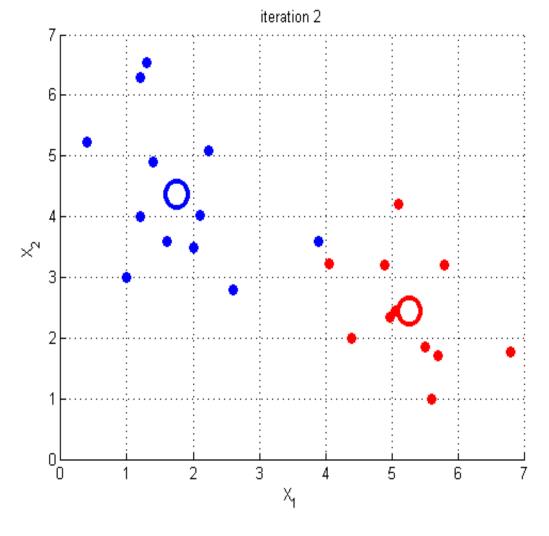




Khởi tạo tâm cụm Gán các cụm ban đầu Cập nhật các tâm cụm

Gán lại các cụm

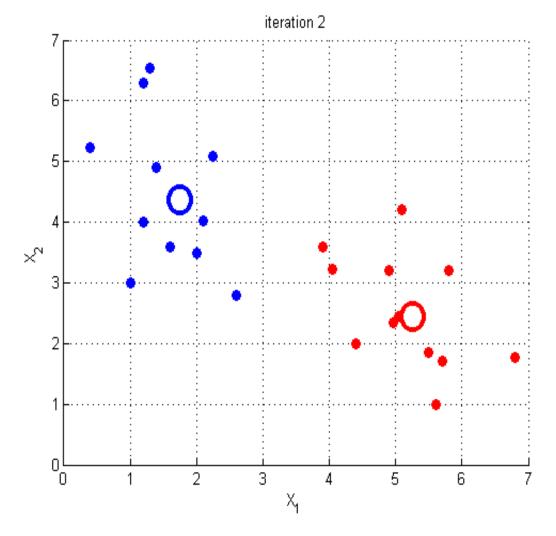




Khởi tạo tâm cụm
Gán các cụm ban đầu
Cập nhật các tâm
cụm
Gán lại các cụm

Cập nhật tâm cụm



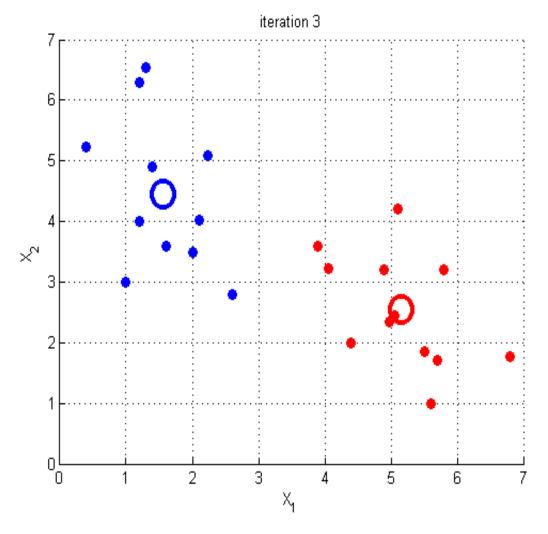


Khởi tạo tâm cụm
Gán các cụm ban đầu
Cập nhật các tâm
cụm
Gán lại các cụm
Cập nhật tâm cụm

Gán lại các cụm



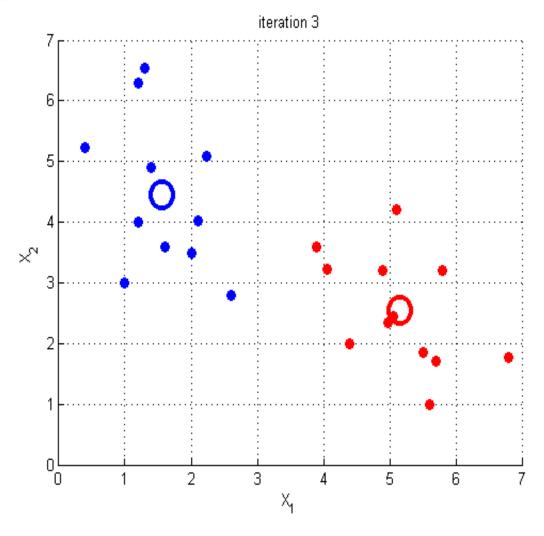




Khởi tạo tâm cụm
Gán các cụm ban đầu
Cập nhật các tâm cụm
Gán lại các cụm
Cập nhật tâm cụm
Gán lại các cụm

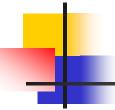


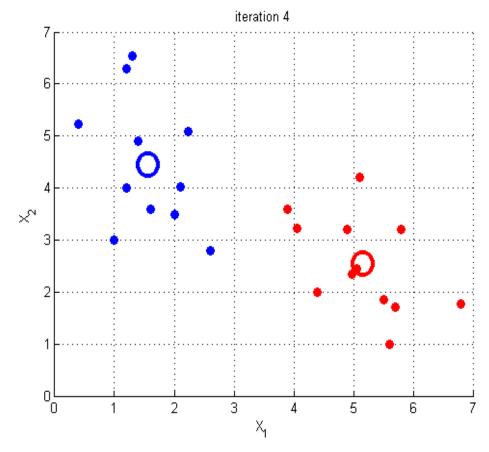




Khởi tạo tâm cụm
Gán các cụm ban đầu
Cập nhật các tâm cụm
Gán lại các cụm
Cập nhật tâm cụm
Gán lại các cụm
Cập nhật tâm cụm
Cập nhật tâm cụm





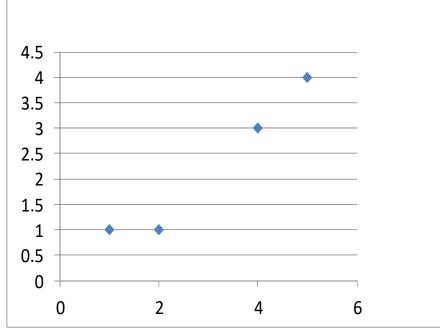


Khởi tạo tâm cụm Gán các cụm ban đầu Cập nhật các tâm cụm Gán lại các cụm Cập nhật tâm cụm Gán lại các cụm Cập nhật tâm cụm Gán lại các cụm Thỏa mãn điều kiện

Ví dụ:



Đối tượng	Thuộc tính 1 (X)	Thuộc tính 2 (Y)
Α	1	1
В	2	1
С	4	3
D	5	4



Ví du

Bước 1: Khởi tạo Chọn 2 trọng tâm ban đầu: $c_1(1,1) \equiv A \text{ và } c_2(2,1) \equiv B, \text{ thuộc 2 cụm}$

- o Bước 3: Cập nhật lại vị trí trọng tâm
- ➤ Trọng tâm cụm 1 $c_1 \equiv A(1, 1)$ ➤ Trọng tâm cụm 2 $c_2(x,y) = (\frac{2+4+5}{3}, \frac{1+3+4}{3})$

$$=\left(\frac{11}{3},\frac{8}{3}\right)$$

• Bước 2: Tính toán khoảng cách

$$d(C, c_1) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2}$$

= 3.61

d(C, c₂) =
$$\sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2}$$

= 2.83

$$d(C, c_1) > d(C, c_2) \implies C thuộc cụm 2$$

$$d(D, c_1) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2}$$
= 5

d(D, c₂) =
$$\sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2}$$

= 4.24

$$d(D,c_1) > d(D,c_2) \implies D thuộc cụm 2$$

Ví dụ



- Bước 4-1: Lặp lại bước 2 Tính toán khoảng cách
- \rightarrow d(A, c₁) = 0 < d(A, c₂) = 3.14

A thuộc cụm 1

- \rightarrow d(B, c₁) = 1 < d(B, c₂) = 2.36
 - B thuộc cụm 1
- \rightarrow d(C, c₁) = 3.61 > d(C, c₂) = 0.47
 - C thuộc cụm 2
- \rightarrow d(D, c₁) = 5 > d(D, c₂) = 1.89
 - D thuộc cụm 2

Ví dụ

- Bước 4-2: Lặp lại bước 2
- $d(A, c_1) = 0.5 < d(A, c_2) = 4.3$ A thuộc cụm 1
- $d(B, c_1) = 0.5 < d(B, c_2) = 3.54$ B thuộc cụm 1
- $d(C, c_1) = 3.2 < d(C, c_2) = 0.71$ C thuộc cụm 2
- $d(D, c_1) = 4.61 > d(D, c_2) = 0.71$ D thuộc cụm 2
- => Vì không có sự thay đối trọng tâm của cụm nên thuật toán dừng.
- Với: cụm 1 gồm: A,B cụm 2 gồm: C,D

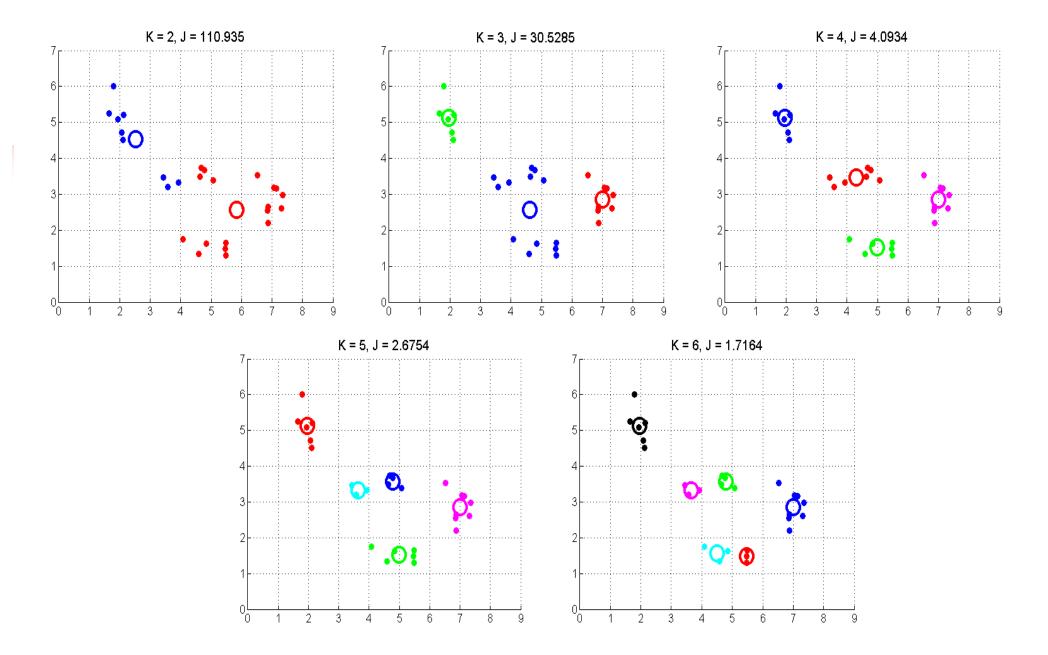


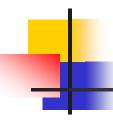


- Chọn ngẫu nhiên trong K đối tượng
- Phân hoạch ngẫu nhiên dữ liệu
- Chọn K điểm xa nhau "far apart"
- Khởi tạo bằng cách sử dụng kết quả của phương pháp phân cụm khác

Bao nhiêu cụm?

- K-means yêu cầu đầu vào là K (number of clusters)
 - Ta cần hiểu về bài toán ứng dụng để chọn K
 - Ngược lại, việc chọn K được xác định từ dữ liệu





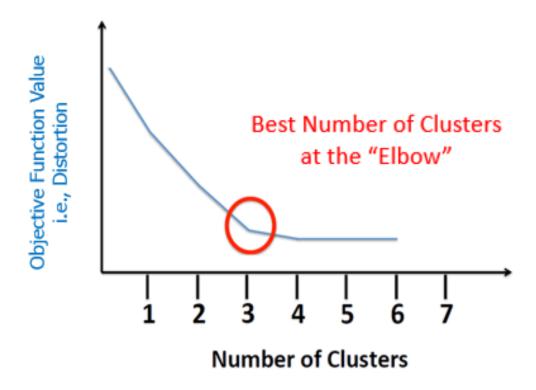
Bao nhiêu cum?

- Không thể tính được giá trị K để cực tiểu mục tiêu J
 - J giảm đồng thời với tăng K
- Phương pháp dựa trên kinh nghiệm (Heuristic):
 - Với mỗi giá trị ứng viên của K,
 - Tính toán phân cụm bằng K-means M lần, tìm mục tiêu nhỏ nhất J_{κ}
 - Tìm điểm "khuỷu tay (elbow)" trong đường mục tiêu
 (K vs J_K)



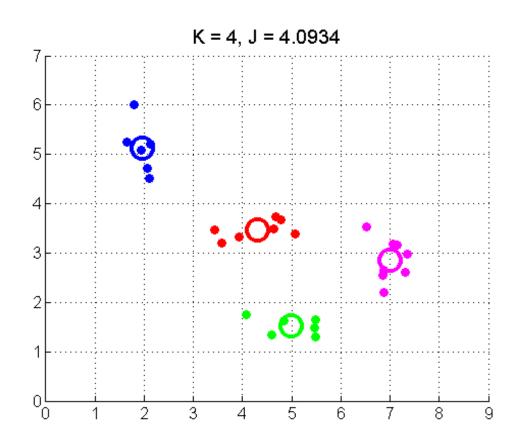
Bao nhiêu cụm? - Exploratory







Bao nhiêu cụm?





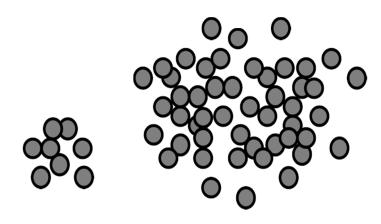
Ưu điểm

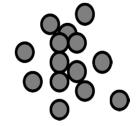
- Dễ cài đặt
- Luôn hội tụ với số lần lặp ít
- Có thể triển khai trên những tập dữ liệu với số chiều lớn

Nhược điểm

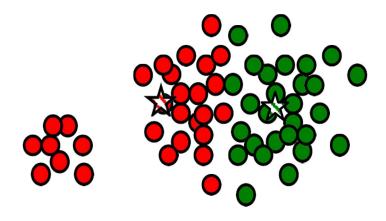
- Giá trị K là tham số đầu vào (khó xác định tối ưu)
- Thuật toán lặp trả về cực tiểu địa phương*

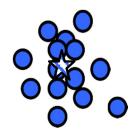


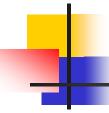












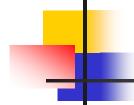
Ưu điểm

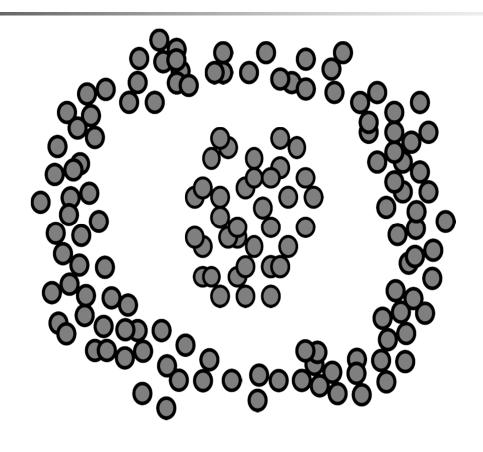
- Dễ cài đặt
- Luôn hội tụ với số lần lặp ít
- Có thể triển khai trên những tập dữ liệu với số chiều lớn

Nhược điểm

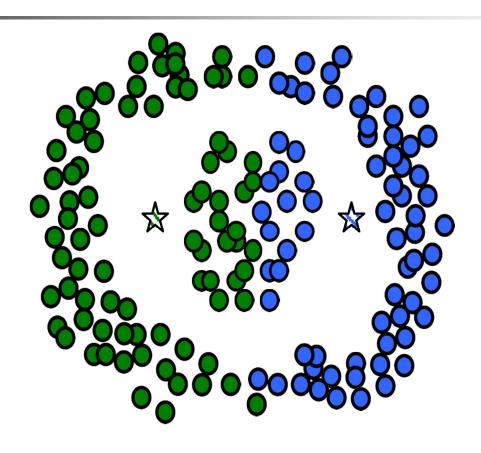
- Giá trị K là tham số đầu vào (khó xác định tối ưu)
- Thuật toán lặp trả về cực tiểu địa phương*
- Giả thiết tất cả các cụm hình cầu và có kích thước xấp xỉ nhau *











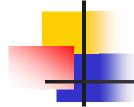


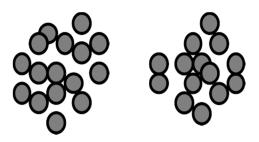
Ưu điểm

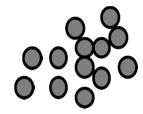
- Dễ cài đặt
- Luôn hội tụ với số lần lặp ít
- Có thể triển khai trên những tập dữ liệu với số chiều lớn

Nhược điểm

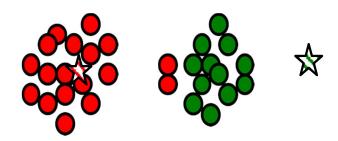
- Giá trị K là tham số đầu vào (khó xác định tối ưu)
- Thuật toán lặp trả về cực tiểu địa phương*
- Giả thiết tất cả các cụm hình cầu và có kích thước xấp xỉ nhau *
- Nhạy với các phần tử ngoại lai*

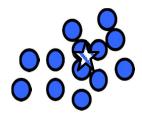












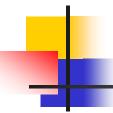


Ưu điểm

- Dễ cài đặt
- Luôn hội tụ với số lần lặp ít
- Có thể triển khai trên những tập dữ liệu với số chiều lớn

Nhược điểm

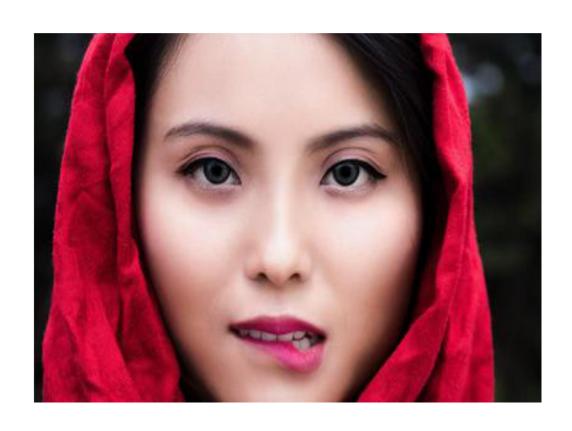
- Giá trị K là tham số đầu vào (khó xác định tối ưu)
- Thuật toán lặp trả về cực tiểu địa phương*
- Giả thiết tất cả các cụm hình cầu và có kích thước xấp xỉ nhau *
- Nhạy với các phần tử ngoại lai*
- *một số nhược điểm được khắc phục bằng vài biến thể của K-means

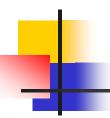


- Khắc phục nhược điểm
 - Khởi tạo K không tốt -> ta chạy thuật toán nhiều lần
 - K-medians: Tâm cụm được tính bằng giá trị trung vị thay cho giá trị trung bình của K-means
 - K-medoids
 - Yêu cầu: "tâm cụm" phải là 1 trong các điểm dữ liệu
 - xử lý tốt hơn các phần tử ngoại lai
 - linh hoạt hơn có thể dùng nhiều độ đo
 - nhưng thời gian tính toán lâu hơn vì phải tính các tâm cụm

Ví dụ: Phân đoạn/nén ảnh







- Ånh→ điểm ảnh (pixels) → véc tơ RGB (colors)
- Áp dụng K-means tập hợp các véc tơ RGB
 - Một véc tơ RGB ứng với 1 điểm ảnh
 - Các cụm thể hiện các màu giống nhau
- · Thay thế mỗi điểm ảnh bằng một tâm cụm liên quan
 - Kết quả trên ảnh với K màu khác nhau



Chất lượng nén ảnh với số lượng cluster khác nhau. Ảnh: K=5



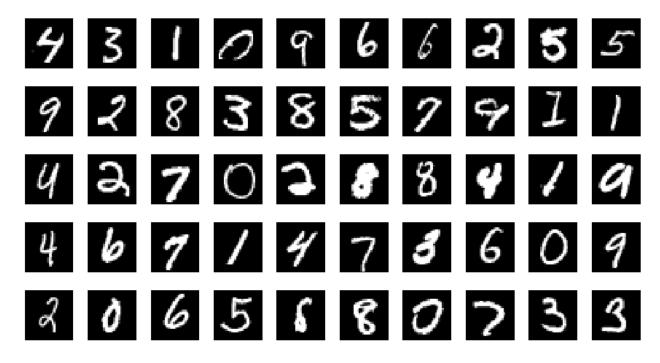






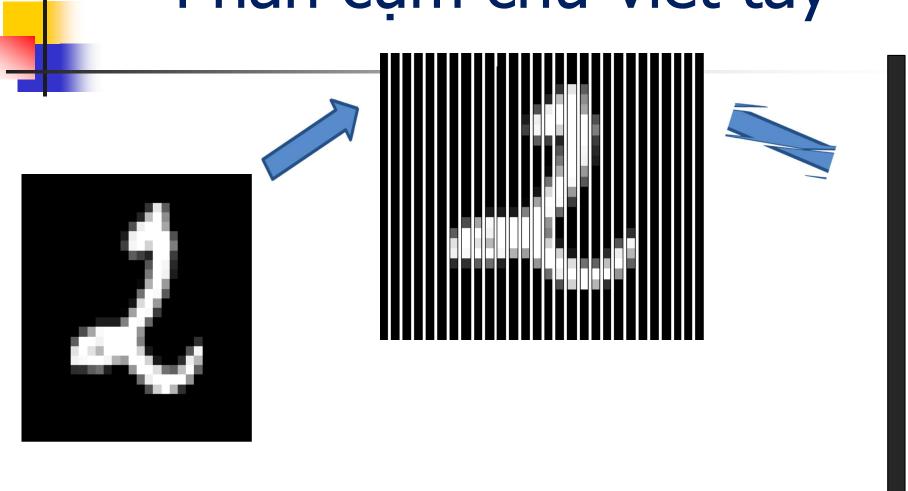
K=15 K=20

- Chúng ta thực hiện thuật toán với dữ liệu có 2-3 thuộc tính (rất dễ để minh họa). Tuy nhiên, trong thực tế, ta thường gặp nhiều hơn 2 thuộc tính khi phân tích dữ liệu
- Phân cụm sẽ khó khăn hơn rất nhiều khi gặp số chiều lớn

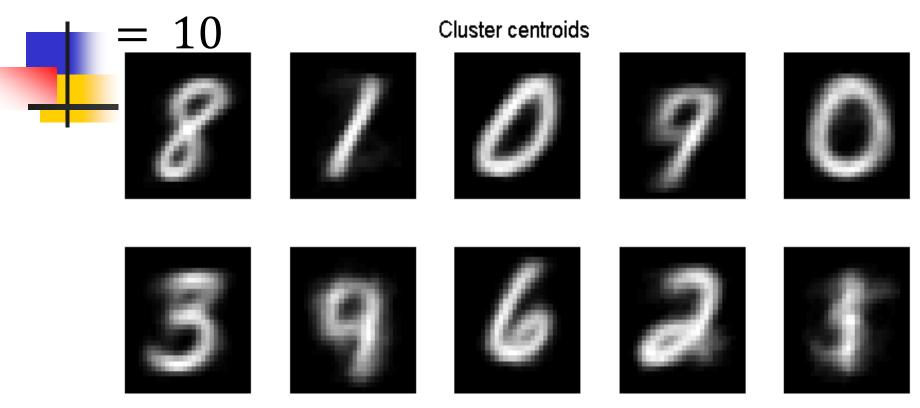


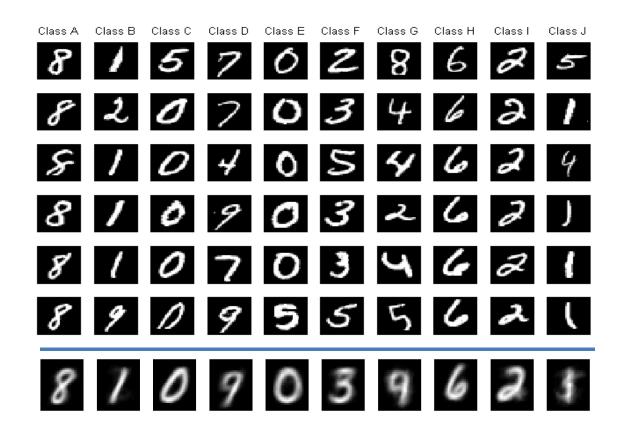
MNIST dataset:

http://cis.jhu.edu/~sachin/digit/digit.html



• Áp dụng K-means, sử dụng K





Phương pháp phân cấp

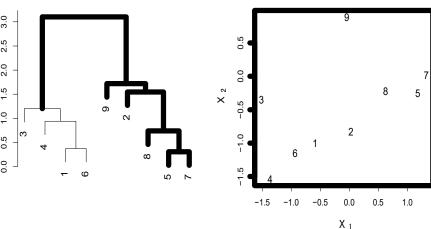
- Phương pháp phân cấp (phân cụm cây)
 - Các cụm dựa trên khoảng cách giữa các mẫu
 - Hiển thị theo phân cấp mà không theo cách phân hoạch dữ liệu

Phân cụm phân cấp

- Phân cụm theo phương pháp K-Means yêu cầu chọn tham số đầu vào là số lượng cụm K
- Nếu ta không muốn làm theo cách trên, ta có thể dùng phương pháp phân cụm phân cấp
- Phân cụm phân cấp có ưu điểm là hiển thị các quan sát (mẫu) dạng hình cây nên dễ hình dung, được gọi là phân cụm theo cấu trúc cây (Dendogram)

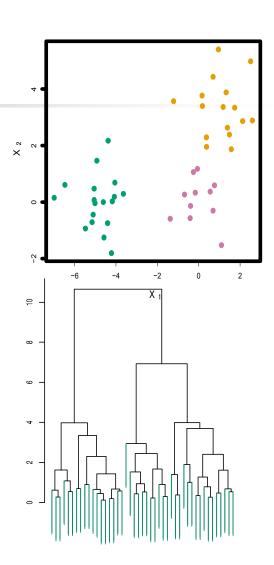
Phân cụm phân cấp

- Đầu tiên nhập các điểm gần nhau nhất (5 và 7)
- Độ cao của việc hợp nhất (theo trục dọc) phản ánh độ tương tự của các điểm
- Sau khi các điểm được hợp nhất, chúng được xem như 1 mẫu để tiếp tục
- Tiến hành giải thuật

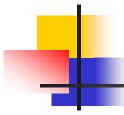




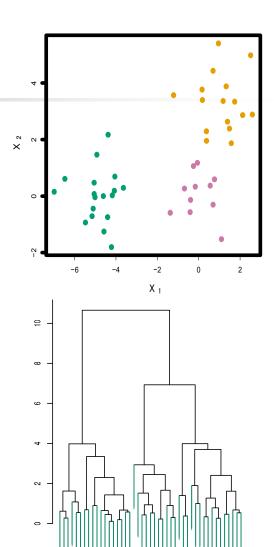
- Mỗi "lá" của cây phân cấp biểu diễn một trong 45 mẫu
- Phần đáy của cây, mỗi mẫu là 1 lá riêng biệt. Tuy nhiên, càng lên cao các lá sẽ hợp nhất với nhau. Việc này thể hiện các mẫu có độ tương tự với các mẫu khác.



Phương pháp phân cấp

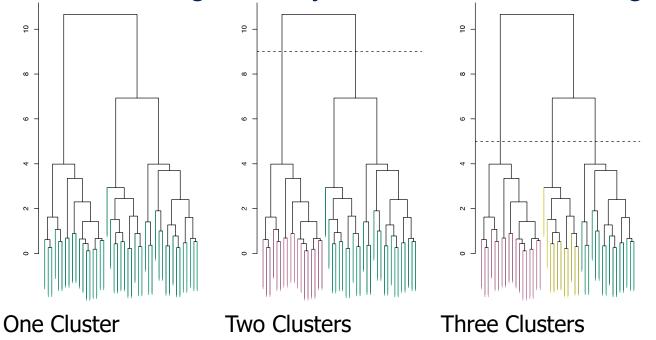


Khi di chuyển cao lên phần ngọn của cây, số lượng mẫu đã được hợp nhất. Trước đó (phần dưới của cây) với 2 mẫu hợp nhất, chúng có chung đặc tính (gần) với nhau.



Lựa chọn các cụm

- Để chọn các cụm ta kẻ đường thẳng ngang cây phân cấp
- Ta có thể chọn số lượng cụm tùy thuộc vào vị trí đường kẻ



Giải thuật (trộn các cụm)



- Phân cụm bằng cấu trúc cây:
- Khởi tạo với mỗi điểm là 1 cụm riêng biệt (n cụm), chính là 1 nút trong dendrogram
- Tính toán độ tương tự (gần) giữa các điểm/cụm
- Hợp nhất 2 cụm mà chúng có độ tương tự cao nhất, ta còn lại n-1 cụm
- Hợp nhất 2 cụm tiếp theo có độ tương tự cao nhất, ta còn lại n-2 cụm
- Quá trình trên tiếp tục cho đến khi chỉ còn 1 cụm (là nút gốc trong dendrogram)

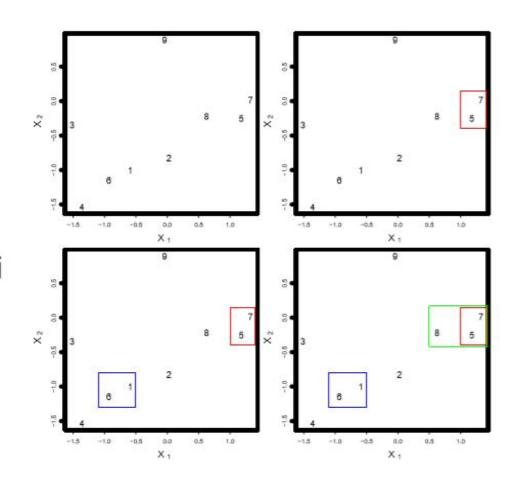
Giải thuật (trộn các cụm)



Ví dụ

Bắt đầu với 9 cụm Hợp nhất 5 và 7 Hợp nhất 6 và 1 Hợp nhất cụm (5,7) với 8.

Quá trình tiếp tục cho đến khi tất cả các cụm được hợp nhất.

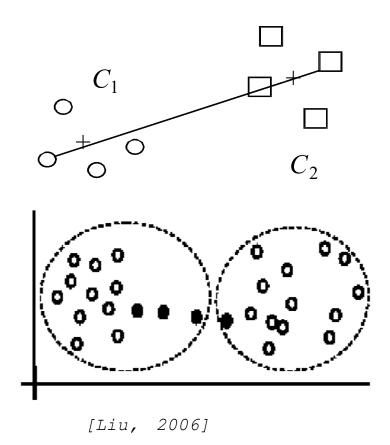




Định nghĩa sự khác biệt?

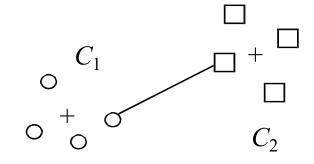
- Việc triển khai phương pháp phân cấp cần giải quyết vấn đề khá hiển nhiên, đó là làm sao để định nghĩa sự khác biệt (dissimilarity) hoặc mối liên kết (linkage) giữa cụm hợp nhất (5, 7) và cụm 8?
- Có 4 lựa chọn:
 - Liên kết đầy (Complete Linkage)
 - Liên kết đơn (Single Linkage)
 - Liên kết trung bình giữa các nhóm (Average Linkage)
 - Liên kết tâm (Centroid Linkage)

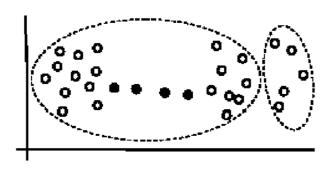
- Liên kết đầy: Khoảng cách giữa 2 cụm là khoảng cách lớn nhất giữa 2 mẫu tương ứng của 2 cụm đó
- Nhạy cảm (gặp lỗi phân cụm) đối với các ngoại lai (outliers)
- Có xu hướng sinh ra các cụm có dạng "bụi cây" (clumps)





- Liên kết đơn: Khoảng cách giữa 2 cụm là khoảng cách nhỏ nhất giữa các mẫu (các thành viên) của 2 cụm đó.
- Có xu hướng sinh ra các cụm có dạng "chuỗi dài" (long chain)





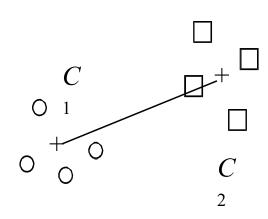
[Liu, 2006]

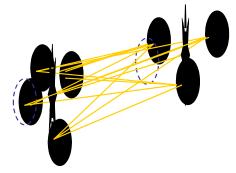


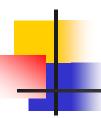
- <u>Liên kết trung bình</u>: Khoảng cách trong liên kết trung bình (Average-link) là sự thỏa hiệp giữa các khoảng cách trong liên kết hoàn toàn (Complete-link) và liên kết đơn (Single-link)
 - Để giảm mức độ nhạy cảm (khả năng lỗi) của phương pháp phân cụm dựa trên liên kết đầy đối với các ngoại lai (outliers)
 - Để giảm xu hướng sinh ra các cụm có dạng "chuỗi dài" của phương pháp phân cụm dựa trên liên kết đơn (dạng "chuỗi dài" không phù hợp với khái niệm tự nhiên của một cụm)
- Khoảng cách giữa 2 cụm là khoảng cách trung bình của tất cả các cặp mẫu (mỗi mẫu thuộc về một cụm)



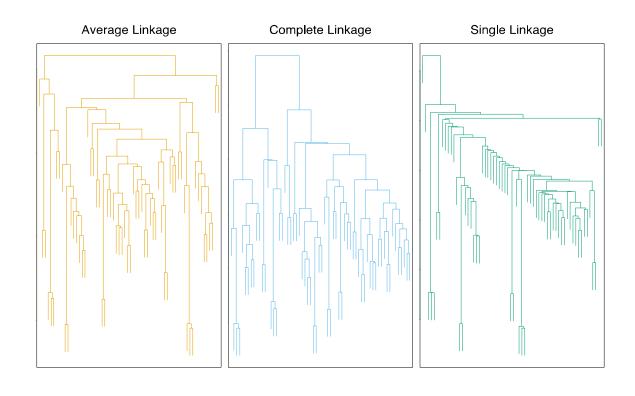
 Liên kết tâm: Khoảng cách giữa các tâm của các mẫu tương ứng







Mối liên kết rất quan trọng





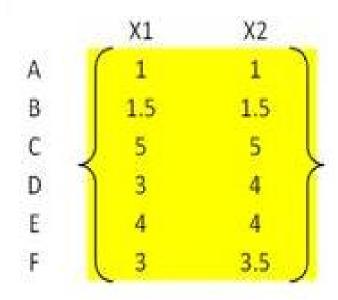
Mối liên kết rất quan trọng

- Ta có 3 kết quả phân cụm trên cùng 1 bộ dữ liệu
- Phương pháp tính mối liên kết khác nhau nhưng kết quả đem lại rất khác xa nhau
- Phương pháp liên kết đầy và liên kết trung bình dường như có cỡ cụm như nhau, tuy nhiên liên kết đơn lại cho số cụm nhiều hơn vì mỗi lá của cây được hợp nhất từng lần một



Ví du

 Cho dữ liệu gồm 6 đối tượng (các điểm trong không gian 2 chiều). Thực hiện phân cụm theo phân hoạch.



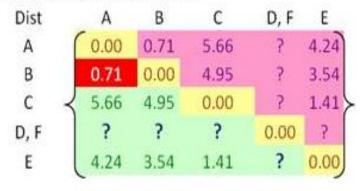
Tính ma trận khoảng cách

Dist	Α	В	C	D	E	F	
A	0.00	0.71	5.66	3.61	4.24	3.20	n
В	0.71	0.00	4.95	2.92	3.54	2.50	
c	5.66	4.95	0.00	2.24	1.41	2.50	
D	3.61	2.92	2.24	0.00	1.00	0.50	1
E	4.24	3.54	1.41	1.00	0.00	1.12	
F	3.20	2.50	2.50	0.50	1.12	0.00	

→ Gộp 2 cụm D và F thành cụm (D,F)

Tính lại ma trận khoảng cách → ghép cặp các đối tượng (A,B)

Min Distance (Single Linkage)



$$d_{(D,F)\to A} = \min(d_{DA}, d_{FA}) = \min(3.61, 3.20) = 3.20$$

$$d_{(D,F)\to B} = \min(d_{DB}, d_{FB}) = \min(2.92, 2.50) = 2.50$$

$$d_{(D,F)\to C} = \min(d_{DC}, d_{FC}) = \min(2.24, 2.50) = 2.24$$

$$d_{E \to (D,F)} = \min(d_{ED}, d_{EF}) = \min(1.00, 1.12) = 1.00$$

Thực hiện tương tự

Dist	Α	В	С	D	Ε	F	28
A	0.00	0.71	5.66	3.61	4.24	3.20	N
В	0.71	0.00	4.95	2.92	3.54	2.50	
c J	5.66	4.95	0.00	2.24	1.41	2.50	
D	3.61	2.92	2.24	0.00	1.00	0.50	1
E	4.24	3.54	1.41	1.00	0.00	1.12	
F	3.20	2.50	2.50	0.50	1.12	0.00	

Dist	A,B	C	(D, F)	E
A,B	0	?	?	?
C	?	0	2.24	1.41
(D, F)	?	2.24	0	1.00
Ε	?	1.41	1.00	0
	-			1

$$d_{(D,F)\to(A,B)} = \min\left(d_{DA}, d_{DB}, d_{FA}, d_{FB}\right) = \min\left(3.61, 2.92, 3.20, 2.50\right) = 2.50$$

Thực hiện tương tự

Min Distance (Single Linkage)

$$d_{((D,F),E)\to(A,B)} = \min\left(d_{DA}, d_{DB}, d_{FA}, d_{FB}, d_{EA}, d_{EB}\right) = \min\left(3.61, 2.92, 3.20, 2.50, 4.24, 3.54\right) = 2.50$$

Thực hiện tương tự

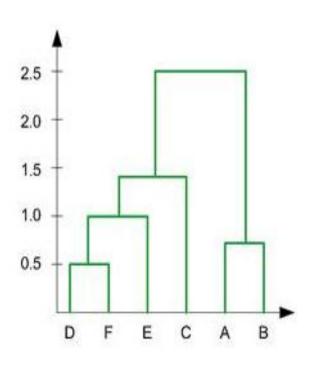
Min Distance (Single Linkage)

$$d_{(((D,F),E),C)\to(A,B)} = \min \left(d_{DA}, d_{DB}, d_{FA}, d_{FB}, d_{EA}, d_{EB}, d_{CA}, d_{CB} \right)$$

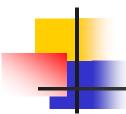
$$d_{(((D,F),F),C)\to(A,B)}=\min\big(3.61,2.92,3.20,2.50,4.24,3.54,5.66,4.95\big)=2.50$$

Ví dụ - Kết quả





- 1. Ban đầu có 6 cụm A, B, C, D, E, F
- 2. Gộp cụm D và F thành cụm (D, F): khoảng cách 0.50
- 3. Gộp cụm A và B thành cụm (A,B): khoảng cách 0.71
- 4. Gộp cụm E và (D, F) thành cụm ((D, F),E): khoảng cách 1.00
- 5. Gộp cụm ((D, F), E) và C thành cụm (((D, F),E),C): khoảng cách 1.41
- 6. Gộp cụm (((D, F),E),C) và (A,B) thành cụm ((((D, F),E),C),(A,B)) : khoảng cách 2.5
- 7. Cụm cuối cùng chứa tất cả các đối tượng → Dừng



Tóm lược

- Phân tích cụm: Phương pháp rất hữu hiệu để "nhận dạng" nhóm dựa vào các biến quan sát
- Chủ yếu dựa vào khoảng cách giữa các nhóm dựa trên dữ liệu thực tế
- Một phương pháp rất có ích trong thời đại "Big Data"