III. Wnioskowanie statystyczne - ćwiczenia

Struktura prezentacji

1. Wprowadzenie
2. Wybrane schematy losowania próby
    1. Losowanie proste
    2. Losowanie warstwowe
3. Rozkłady teoretyczne zmiennych losowych
    1. Rozkład normalny
    2. Rozkład *t*-Studenta
    3. Rozkład χ^2
    4. Rozkład Fishera-Snedecora
4. Weryfikacja hipotez statystycznych
    1. Testy parametryczne
        1. Test istotności dla średniej (mała i duża próba)
        2. Test istotności dla różnicy średnich
        3. Test istotności dla średniej w próbach zależnych
        4. Test istotności dla dwóch wariancji
        5. Test istotności dla frakcji
        6. Test istotności dla różnicy dwóch frakcji
    2. Testy nieparametryczne
        1. Test zgodności rozkładów
        2. Test istotności dla mediany (ang. *sign test*)
        3. Test niezależności χ^2

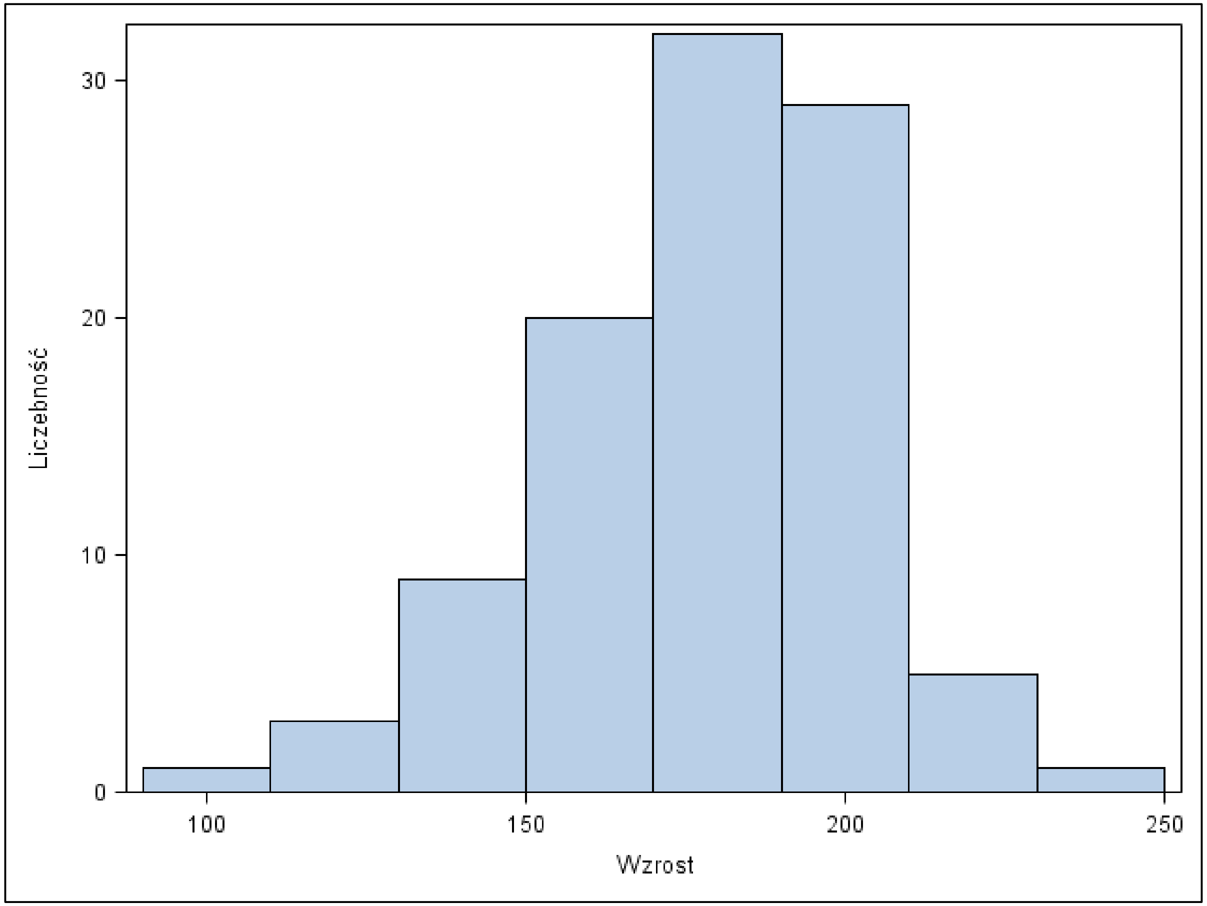
Wprowadzenie

Etapy weryfikacji hipotez statystycznych

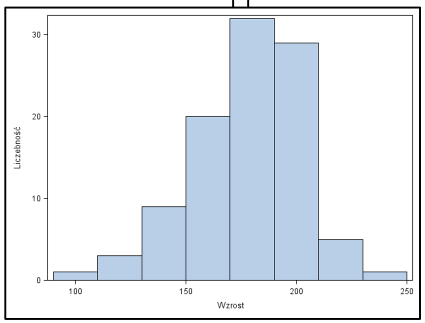
1. Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej.
2. Wybór testu i wyznaczenie jego wartości na podstawie próby.
3. Przyjęcie α i wyznaczenie wartości krytycznej testu, zbudowanie obszaru odrzucenia H_0.
4. Podjęcie decyzji.

Przykład 1.1 Rozkład wzrostu w populacji A

Rys. 1



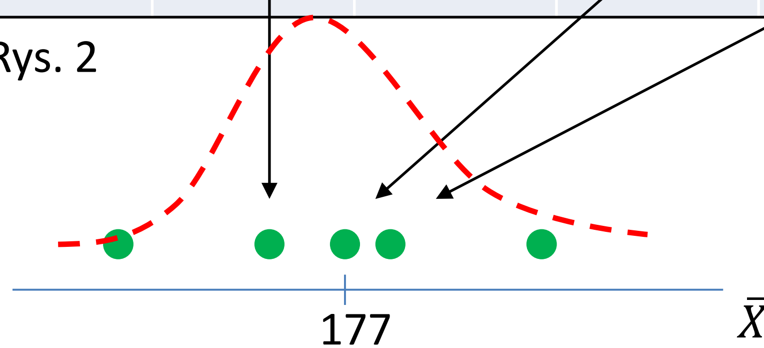
Przykład 1.1 c.d. Rozkład średniej z prób z populacji A



...

Obs.	Próba 1	Próba 2	Próba 3	Próba 4	Próba 5
1	221	176	207	159	201
2	156	156	166	158	166
3	156	179	177	134	171
4	177	168	177	240	184
5	171	190	171	203	172
6	172	172	175	172	203
7	188	198	147	176	175
8	190	188	154	180	181
9	191	170	203	191	158
10	174	157	144	157	170
Średnia z próby (w cm)	**180**	**175**	**172**	**177**	**178**

Rys. 2



$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Przykład 1.1 – program

```
/*Losowanie z rozkładu normalnego*/
data normal;
 do x=1 to 100 by 1;
  wzrost=int(rannor(1234)*22+177);
  output;
 end;
run;
/*Histogram*/
proc sgplot data=normal;
 histogram wzrost;
run;
/*Próba prosta*/
proc surveyselect data=normal out=samples reps=5 n=10
method=srs noprint;
run;
/*Wyznaczenie średniej*/
proc means data=sout n mean maxdec=0;
 var wzrost;
 where replicate=1;
run;
```

Wybrane schematy losowania próby

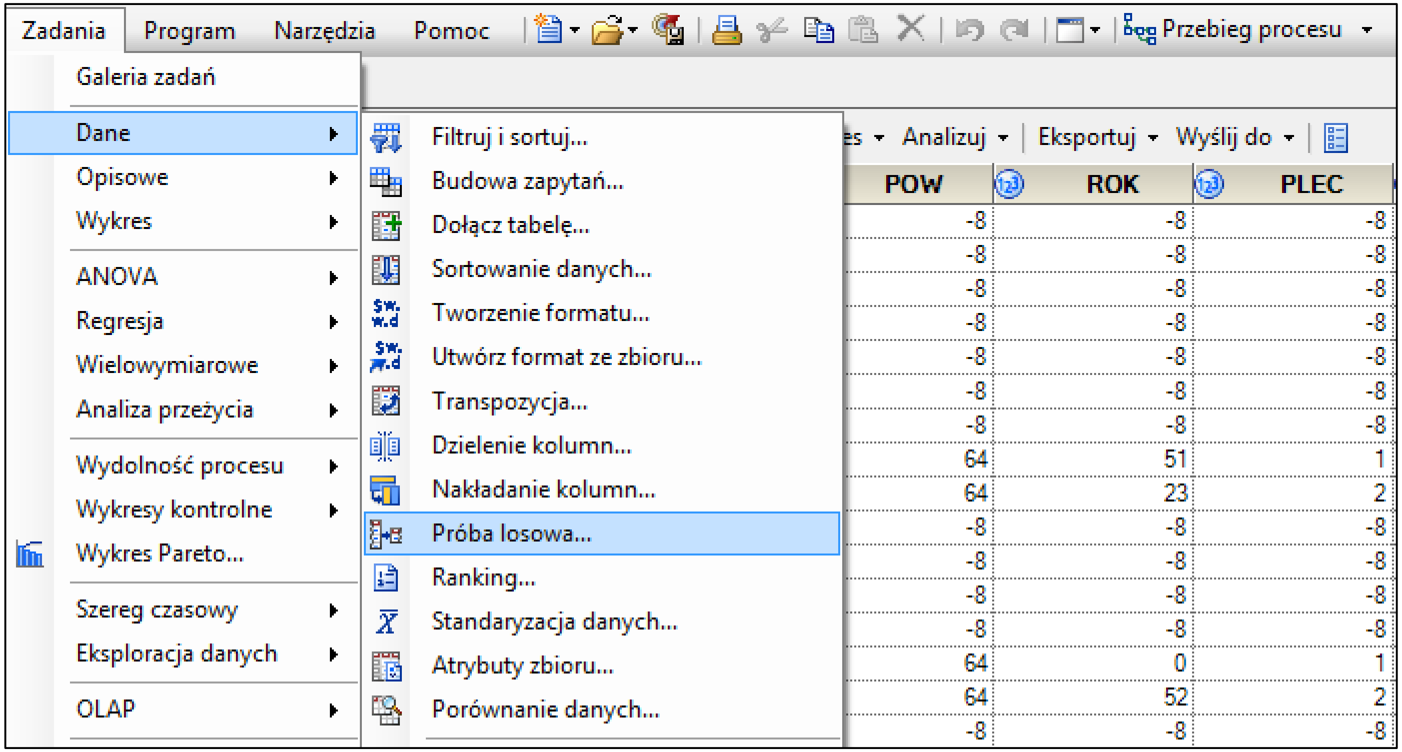
- **Metoda reprezentacyjna** jest działem statystyki matematycznej, którego przedmiotem są zagadnienia doboru próby losowej ze zbiorowości generalnej oraz metody uogólniania wyników badania próbnego na całą populację.
- Sposób losowego doboru próby określa tzw. schemat losowania. Natomiast szacowaniem wartości nieznanych parametrów populacji na podstawie wyników uzyskanych z próby zajmuje się teoria estymacji statystycznej.

2.1 Losowanie proste

- Losowanie proste jest podstawowym schematem pobierania próby. Każda jednostka populacji ma w tym schemacie losowania identyczne prawdopodobieństwo znalezienia się w próbie. Próby proste mogą być pobierane, w zależności od typu badania, ze zwracaniem lub bez zwracania

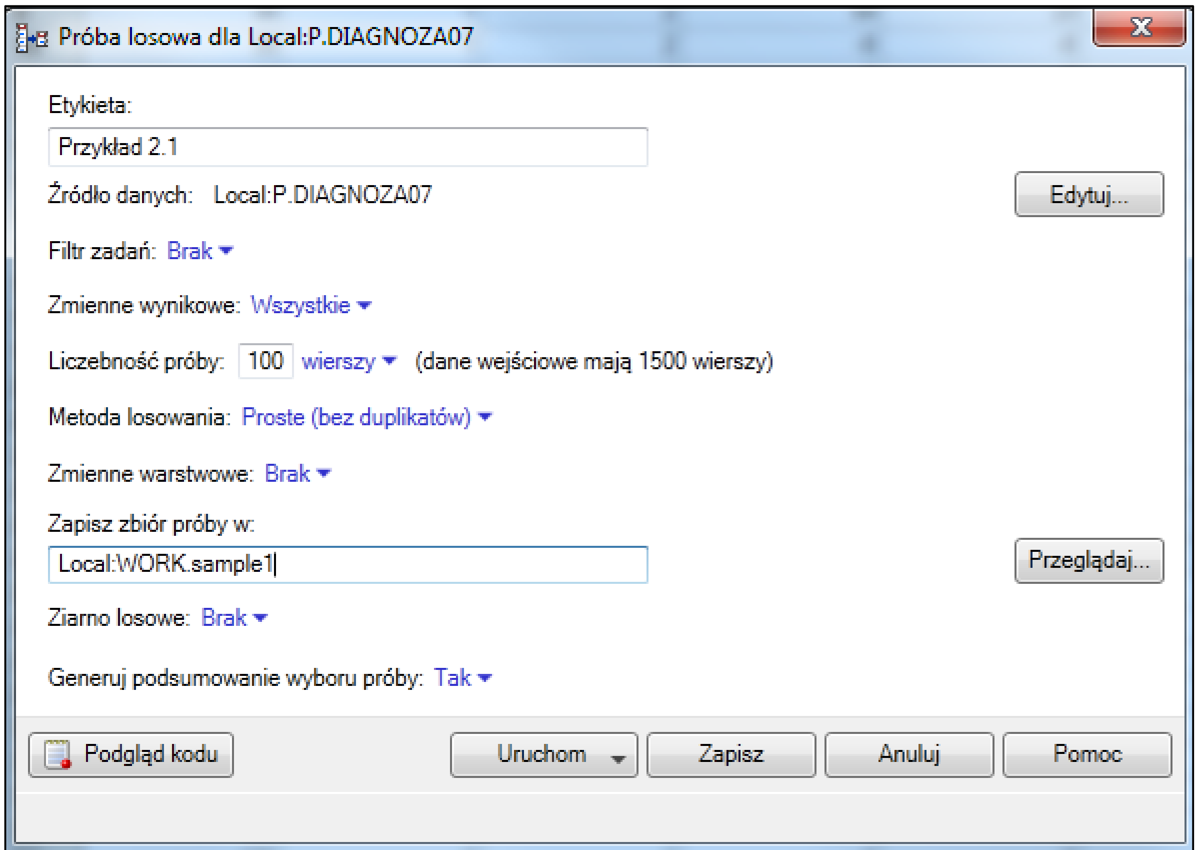
Przykład 2.1 Losowanie proste

- Ze zbioru *diagnoza07* wylosuj 100-elementową próbę stosując losowanie proste bez zwracania.
- *Zadania → Dane → Próba losowa…*



Przykład 2.1 Losowanie proste

- Ze zbioru *diagnoza07* wylosuj 100-elementową próbę stosując losowanie proste.




```
/*Przykład 2.1
Losowanie proste*/
proc surveyselect
data=p.diagnoza07
out=work.sample1
method=srs
n=100;
run;
```

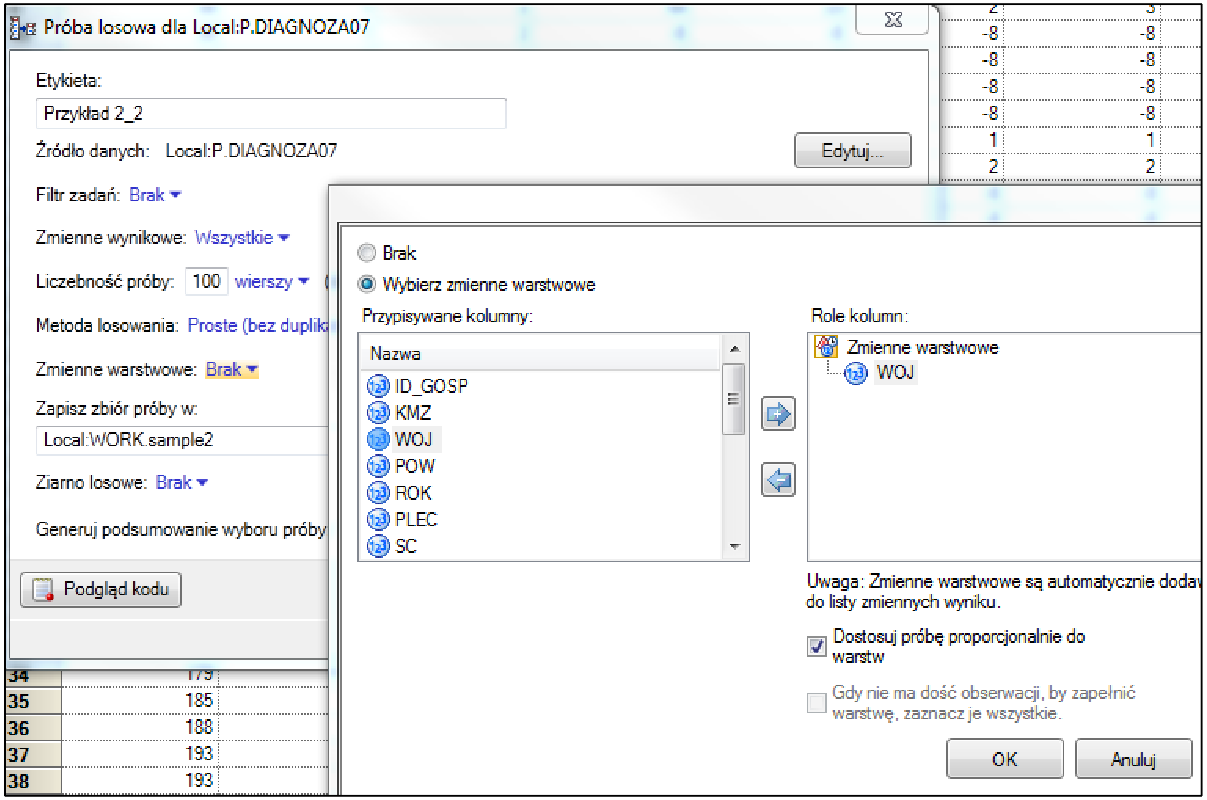
2.2 Losowanie warstwowe

- Schemat losowania warstwowego znajduje zastosowanie w sytuacji, gdy wyniki badania uogólnia się w pierwszej kolejności na podpopulacje, a następnie na populację.

Przykład 2.2 Losowanie warstwowe

- Wylosuj 100-elementową próbę ze zbioru *diagnoza07* w taki sposób, aby liczba reprezentantów poszczególnych województw w próbie losowej była proporcjonalna do ich liczebności w zbiorze wejściowym. Próbę dobieramy metodą losowania warstwowego proporcjonalnego. Ponadto w próbie losowej mają znaleźć się wyłącznie unikalne obserwacji (losowanie bez zwracania).

Przykład 2.2 Losowanie warstwowe - rozwiązanie




```
/*Przykład 2.2
Sortowanie*/
proc sort
 data=p.diagnoza07;
 by woj;
run;

/*Próba warstwowa*/
proc surveyselect
 data=p.diagnoza07
 out=work.sample2
 method=srs
 n=100;
 strata woj /
  alloc=prop;
run;
```

Przykład 2.2 Losowanie warstwowe – porównanie odsetka gospodarstw w ramach województw

Populacja			
Województwo	**n**	**%**	**n skumul.**
DOLNOŚLĄSKIE	108	7.20	108
KUJAWSKO-POMORSKIE	80	**5.33**	188
LUBELSKIE	76	5.07	264
LUBUSKIE	59	3.93	323
ŁÓDZKIE	92	6.13	415
MAŁOPOLSKIE	115	7.67	530
MAZOWIECKIE	164	10.93	694
OPOLSKIE	66	4.40	760
PODKARPACKIE	92	6.13	852
PODLASKIE	57	3.80	909
POMORSKIE	88	5.87	997
ŚLĄSKIE	153	10.20	1150
ŚWIĘTOKRZYSKIE	83	5.53	1233
WARMIŃSKO-MAZURSKIE	75	5.00	1308
WIELKOPOLSKIE	121	8.07	1429
ZACHODNIOPOMORSKIE	71	4.73	**1500**

Próba – losowanie warstwowe			
Województwo	**n**	**%**	**n skumul.**
DOLNOŚLĄSKIE	7	7.00	7
KUJAWSKO-POMORSKIE	5	**5.00**	12
LUBELSKIE	5	5.00	17
LUBUSKIE	4	4.00	21
ŁÓDZKIE	6	6.00	27
MAŁOPOLSKIE	8	8.00	35
MAZOWIECKIE	11	11.00	46
OPOLSKIE	4	4.00	50
PODKARPACKIE	6	6.00	56
PODLASKIE	4	4.00	60
POMORSKIE	6	6.00	66
ŚLĄSKIE	10	10.00	76
ŚWIĘTOKRZYSKIE	6	6.00	82
WARMIŃSKO-MAZURSKIE	5	5.00	87
WIELKOPOLSKIE	8	8.00	95
ZACHODNIOPOMORSKIE	5	5.00	**100**

Rozkłady teoretyczne zmiennych losowych

- Rozkłady zmiennych losowych możemy przedstawiać za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa (w przypadku zmiennych ciągłych) lub funkcji prawdopodobieństwa (w przypadku zmiennych skokowych), jak i dystrybuanty.
- Chcąc wygenerować wartości funkcji gęstości rozkładu teoretycznego możemy skorzystać z polecenia PDF (*ang. Probability Density Function*). Jeśli interesuje nas wygenerowanie wartości dystrybuanty rozkładu, wtedy stosujemy polecenie CDF (*ang. Cumulative Probability Distribution*).

Wykreślanie rozkładów w SAS (funkcje *PDF* i *CDF*)

```
data normal;
 do x=-10 to 10 by 0.1;
  y_pdf=pdf('normal',x,0,1);
  y_cdf=cdf('normal',x,0,1);
 output;
 end;
run;
/*opcje graficzne*/
goptions reset=all i=join hsize=6 vsize=5;
 axis1 label=("u");
 axis2 label=(f=greek "f" f=simplex "(u)");
 axis3 label=(f=greek "F" f=simplex "(u)");
/*funkcja gęstości prawdopodobieństwa*/
proc gplot data=normal;
 plot y_pdf*x/ haxis=axis1 vaxis=axis2 ;
run;
/*dystrybuanta*/
proc gplot data=normal;
 plot y_cdf*x/haxis=axis1 vaxis=axis3;
run;
```

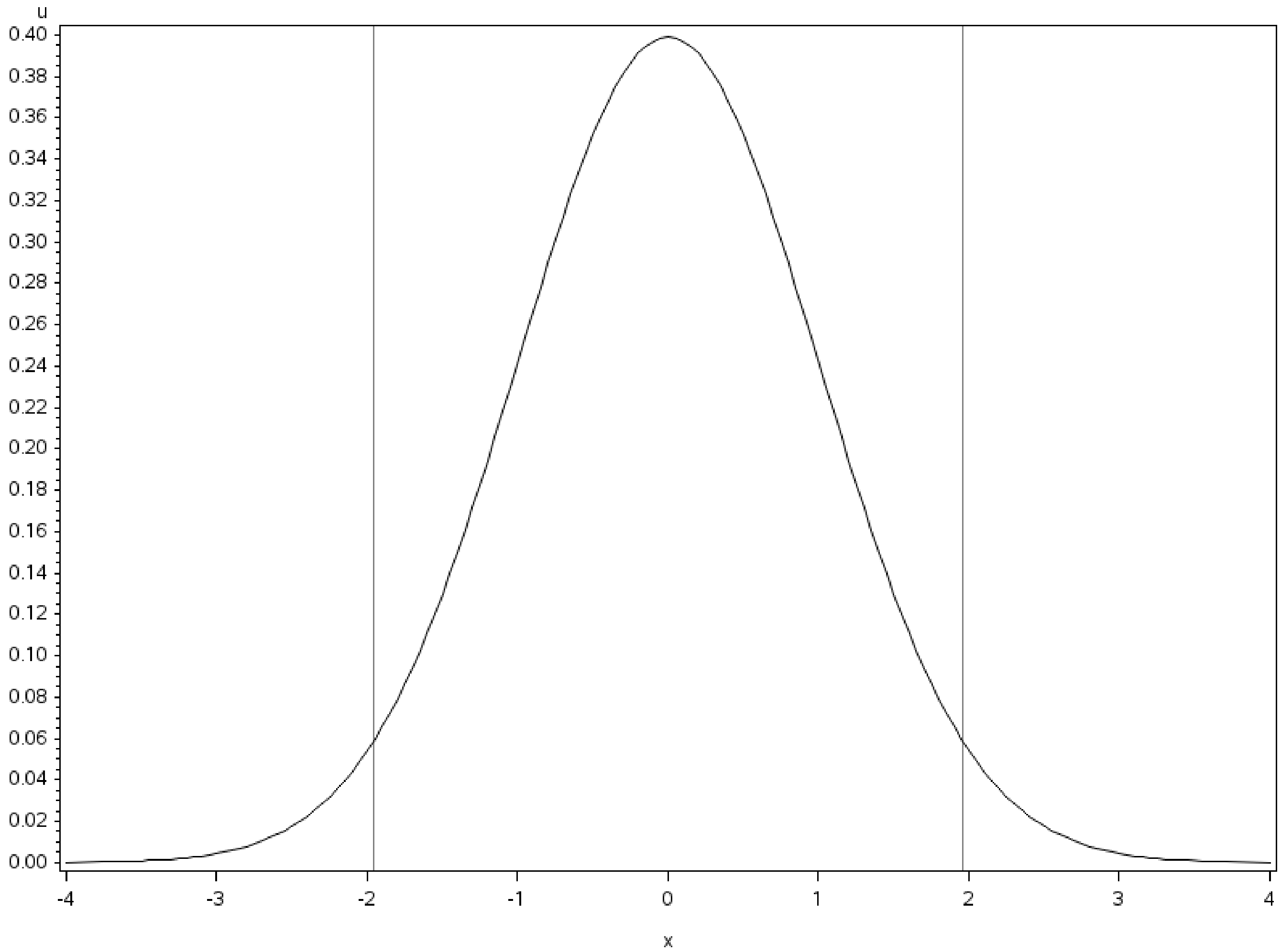
Rozkłady dostępne w ramach funkcji *PDF* i *CDF*

- Zero-jedynkowy (BERNOULLI);
- Beta (BETA);
- Dwumianowy (BINOMIAL);
- Cauchy’ego (CAUCHY);
- Chi-Kwadrat (CHISQUARE);
- Wykładniczy (EXPONENTIAL);
- F-Snedecora (F);
- Gamma (GAMMA);
- Geometryczny (GEOMETRIC);
- Hipergeometryczny (HYPERGEOMETRIC);
- Laplace’a (LAPLACE);
- Logistyczny (LOGISTIC);
- Lognormalny (LOGNORMAL);
- Ujemny dwumianowy (NEGBINOMIAL);
- Normalny (NORMAL|GAUSS);
- Mieszanina rozkładów normalnych (NORMALMIX);
- Pareto (PARETO);
- Poissona (POISSON);
- *t*-Studenta (T);
- Jednostajny (UNIFORM);
- Walda (odwrócony rozkład normalny) (WALD|IGAUSS);
- Weibulla (WEIBULL).

Przykład 3.1 Rozkład normalny

- Sporządź wykres standardowego rozkładu normalnego.
- Podaj wartości *u* wyznaczające obszar krytyczny w teście dwustronnym. Przyjmij $\alpha=0,05$.
- Zaznacz obszar krytyczny na wykresie z punktu 1.1.

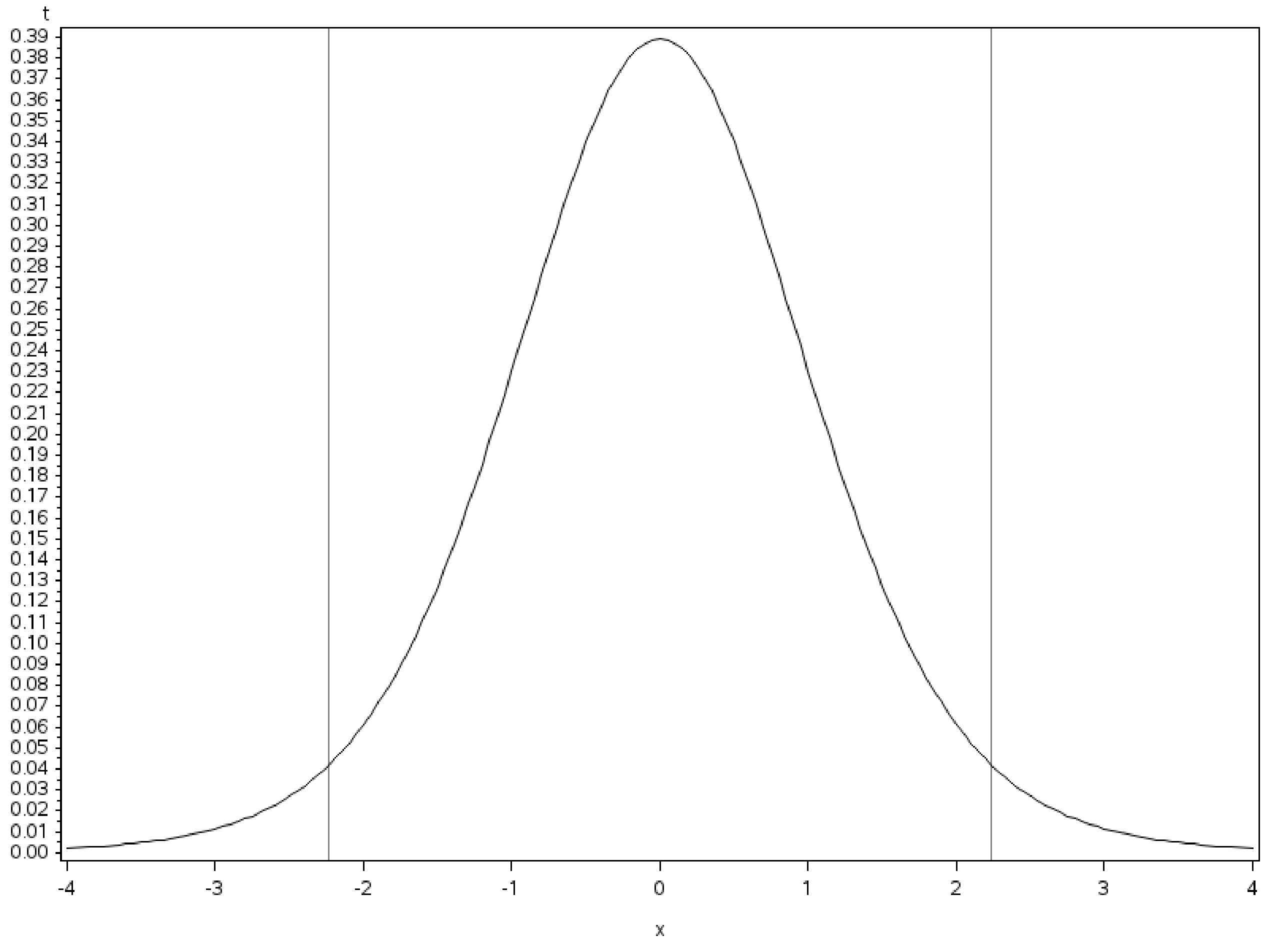
Przykład 3.1 Rozkład normalny - rozwiązanie



Przykład 3.2 t- Studenta

- Sporządź wykres rozkładu t-Studenta z 10 stopniami swobody.
- Podaj wartości t wyznaczające obszar krytyczny w teście dwustronnym. Przyjmij $\alpha=0,05$.
- Zaznacz obszar krytyczny na wykresie z punktu 2.1.

Przykład 3.2 *t* – Studenta - rozwiązanie



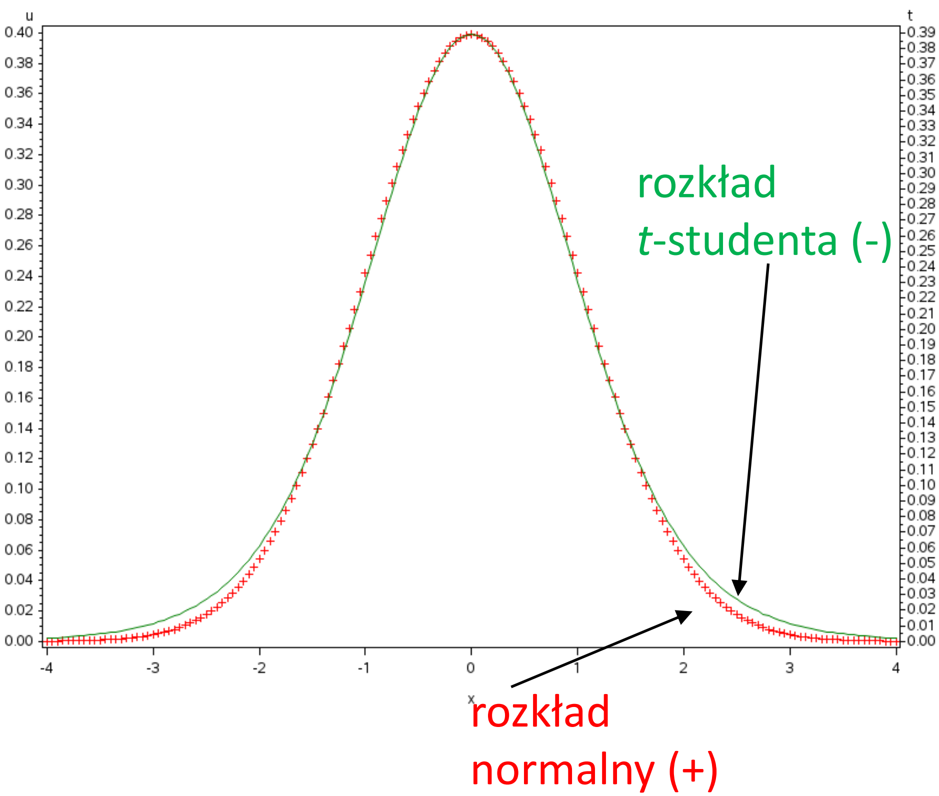
Przykład 3.3 Porównanie rozkładu normalnego i rozkładu *t*-Studenta.

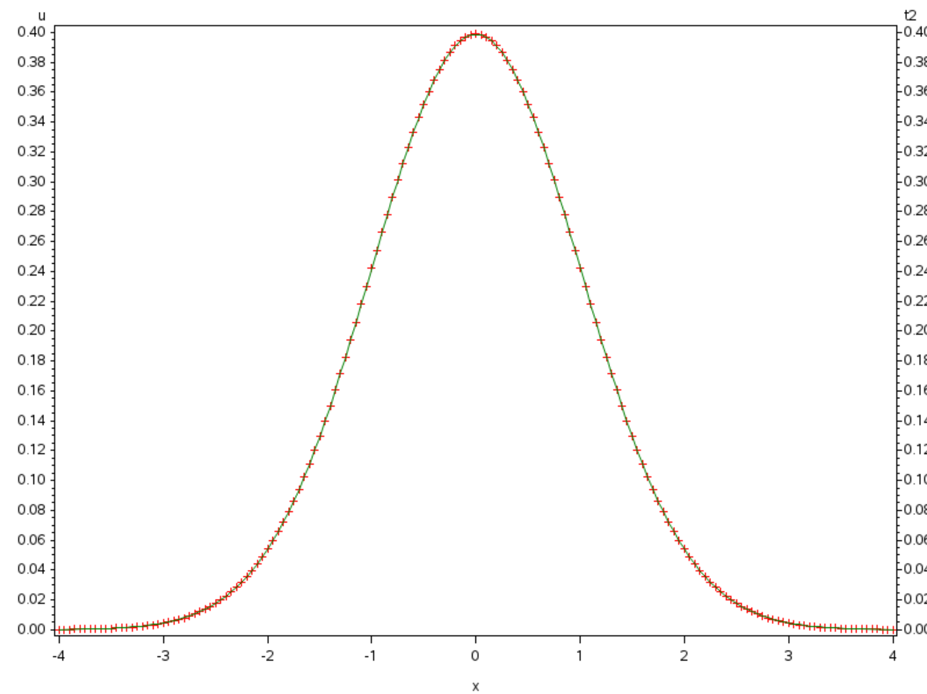
Mała próba:

```
t=pdf('t',x,10);
```

Duża próba:

```
t2=pdf('t',x,500);
```



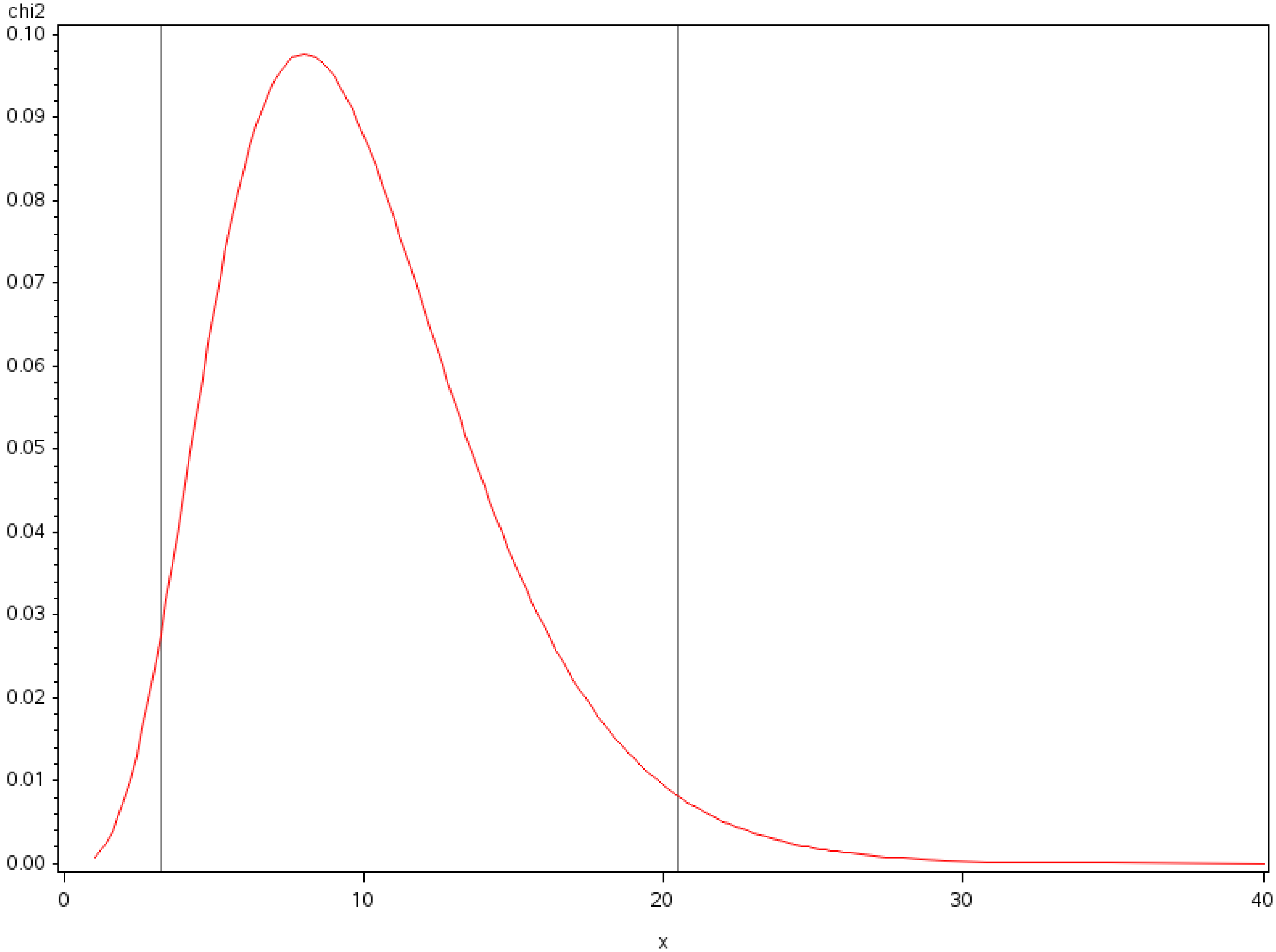


Przykład 3.4 Rozkład χ^2

– Sporządź wykres rozkładu χ^2 z 10 stopniami swobody.

– Podaj wartości χ^2 wyznaczające obszar krytyczny w teście dwustronnym. Przyjmij $\alpha=0,05$.

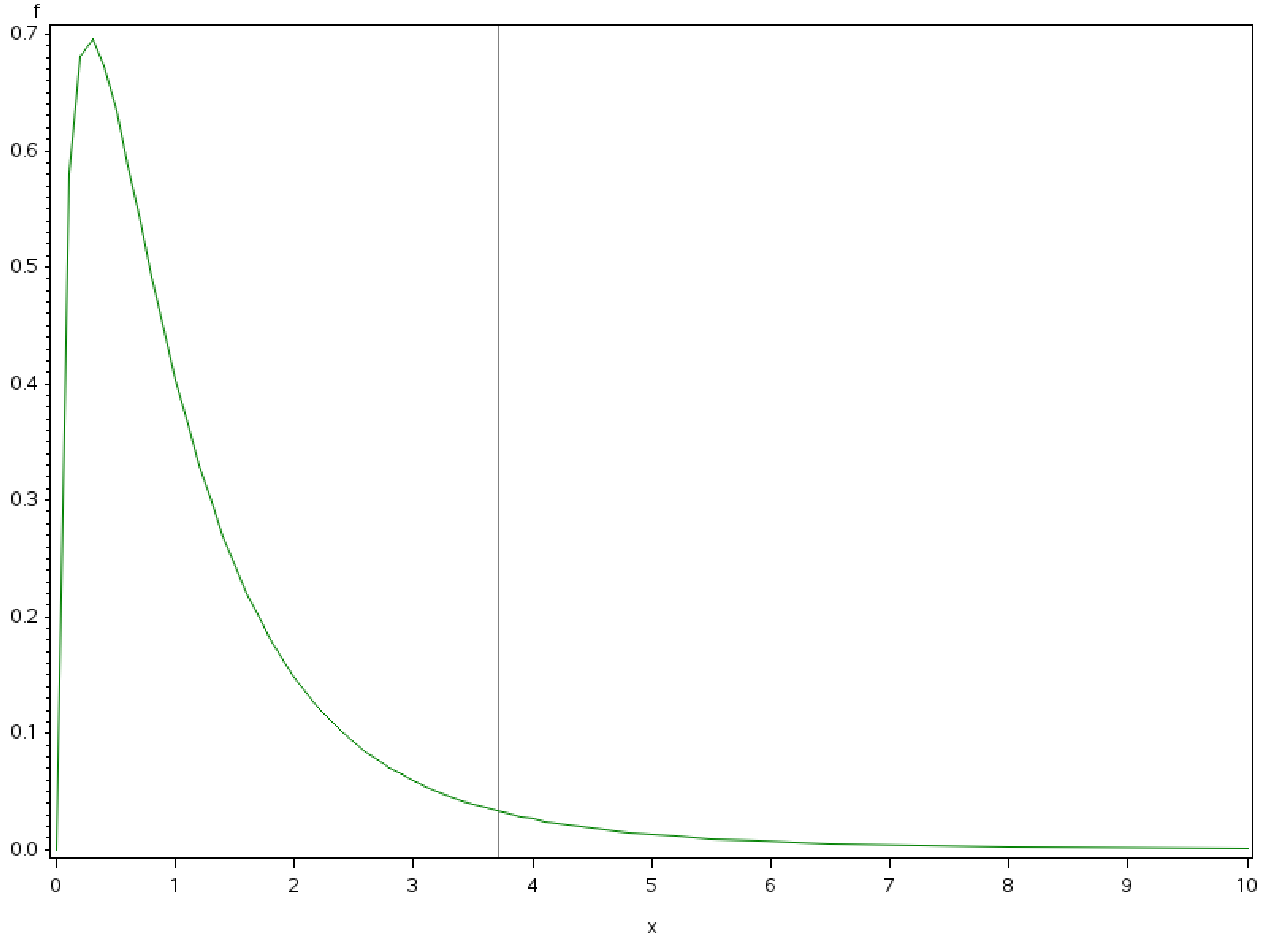
Przykład 3.4 Rozkład χ^2 - rozwiązanie



Przykład 3.5 Rozkład *Fishera-Snedecora*

– Sporządź wykres rozkładu F z $v_1=3$ i $v_2=10$ stopniami swobody.
– Wyznacz wartość F wyznaczającą obszar krytyczny w teście prawostronnym. Przyjmij $\alpha=0{,}05$.

Przykład 3.4 Rozkład *Fishera-Snedecora - rozwiązanie*



Weryfikacja hipotez statystycznych

- Testy statystyczne dzielimy na parametryczne oraz nieparametryczne. Zgodnie z przyjętym kryterium podziału możemy wyróżnić następujące testy statystyczne:
- Parametryczne:
  - test istotności dla średniej,
  - test istotności dla różnicy dwóch średnich,
  - test istotności dla wariancji,
  - test istotności dla dwóch wariancji,
  - test istotności dla frakcji.
- Nieparametryczne:
  - testy zgodności (χ^2, *Shapiro-Wilka*, *Kołmogorowa-Smirnowa*, *Cramera-von Misesa, Andersona-Darlinga*),
  - test znaków (testowanie istotności mediany),
  - test serii,
  - test niezależności χ^2.

Podejście tradycyjne i współczesne w podejmowaniu decyzji weryfikacyjnej (1)

- Przed przejściem do opisu poszczególnych testów, należy zaznaczyć, iż obecnie możemy wyróżnić dwa podejścia stosowane do weryfikacji hipotez statystycznych, a mianowicie podejście **tradycyjne** oraz **współczesne**.
- W podejściu tradycyjnym, które prezentowane jest w większości podręczników wprowadzających do statystyki decyzja weryfikacyjna podejmowana jest w oparciu **o wartość statystyki testującej i wyznaczony obszar krytyczny**. Wartość statystyki testującej obliczana jest na podstawie próby. Obszar krytyczny wyznacza pewna, odczytywana z tablic statystycznych wartość w rozkładzie statystyki testującej. Jeżeli wartość statystyki testującej znajduje się w obszarze krytycznym, hipotezę zerową odrzucamy.

Podejście tradycyjne i współczesne w podejmowaniu decyzji weryfikacyjnej (2)

- W podejściu współczesnym, weryfikacja hipotez statystycznych polega na porównaniu przyjętego poziomu istotności α z prawdopodobieństwem ***P*** (ang. *p-value*), które jest nazywane **krytycznym poziomem istotności**. *P* należy interpretować, jako najniższy poziom istotności, przy którym następuje odrzucenie weryfikowanej hipotezy. Decyzję weryfikacyjną przy wyznaczonej wartości testu empirycznego można podjąć porównując wartość przyjętego poziomu istotności α z wartością *P* (krytycznym poziomem istotności). Prawdopodobieństwo *P* może być traktowane jako miara wiarygodności sprawdzonej hipotezy (im mniejsze *P*, tym mniej wiarygodna jest weryfikowana hipoteza).

Testy parametryczne

Test istotności dla średniej

- Hipoteza zerowa w teście istotności dla średniej jest przypuszczeniem, że średnia m cechy X jest równa m_0, co formalnie zapisujemy jako:

$$H_0: m = m_0$$

- Hipoteza alternatywna może być **dwustronna** bądź **jednostronna**. Przypuszczenie, że **średnia *m* jest różna od m_0**

$$H_1: m \neq m_0$$

- Hipotezy jednostronne formułowane są w sposób następujący:
- **średnia *m* jest większa od m_0** – hipoteza **prawostronna**

$$H_1: m > m_0$$

- **średnia *m* jest mniejsza od m_0** – hipoteza **lewostronna**

$$H_1: m < m_0$$

Test istotności dla średniej w SAS

- Test istotności dla średniej możemy przeprowadzić z wykorzystaniem EG za pomocą polecenia *t Test* (proc ttest). Należy zaznaczyć, iż raport otrzymywany za pomocą polecenia *t Test* zawiera wartość *P* dla hipotezy alternatywnej dwustronnej. W celu uzyskania wartości *P* dla hipotezy alternatywnej jednostronnej należy dokonać odpowiedniego przekształcenia wartości *P*:
- dla hipotezy prawostronnej prawidłowe jest przekształcenie postaci:

0,5P dla $t>0$ (w szczególnym przypadku, gdy wartość statystyki testującej jest niedodatnia, co raczej jest hipotetyczne, należy zastosować przekształcenie: 1-0,5P dla $t \leq 0$),

- dla hipotezy lewostronnej prawidłowe jest przekształcenie postaci:

0,5P dla $t<0$ (w szczególnym przypadku, gdy wartość statystyki testującej jest nieujemna, co raczej jest hipotetyczne, należy zastosować przekształcenie: 1-0,5P dla $t \geq 0$).

Opis konstrukcji testu istotności dla średniej

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie	Odczyt P z raportu EG
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0: m = m_0$ $H_1: m \neq m_0$	Średnia m jest różna od m_0	P
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0: m = m_0$ $H_1: m > m_0$	Średnia m jest większa od m_0	0,5P dla t>0 1-0,5P dla t≤0
Hipoteza alternatywna jednostronna (lewostronna)	$H_0: m = m_0$ $H_1: m < m_0$	Średnia m jest mniejsza od m_0	1-0,5P dla t≥0 0,5P dla t<0

Statystyka testująca w teście dla średniej, znane σ

Przyjmimijmy, że dysponujemy n-elementową próbą losową $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Hipoteza o średniej m w populacji normalnej ze znanym odchyleniem standardowym σ. W tym przypadku statystyka testująca dana jest następującą formułą:

$$U = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

U posiada przy prawdziwej H_0 standardowy rozkład normalny. Przypadek ten, możemy uznać za teoretyczny, gdyż w praktyce, rzadko znana jest wartość odchylenia standardowego w populacji.

Statystyka testująca w teście dla średniej, nieznane σ

Hipoteza o średniej *m* w populacji normalnej, gdy odchylenie standardowe σ nie jest znane. Decyzja weryfikacyjna podejmowana jest w tym przypadku na podstawie statystyki:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n} \qquad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

Statystyka *t* dana wzorem ma rozkład *t*-Studenta z *n*-1 stopniami swobody.

Statystyka testująca w teście dla średniej, dowolny rozkład, duża próba

Hipoteza o średniej w populacji o dowolnym rozkładzie na podstawie dużej próby ($n \geq 30$). W tym przypadku wykorzystujemy statystykę postaci:

$$U = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

która ma w przybliżeniu standardowy rozkład normalny. W sytuacji, gdy nie jest znana wartość odchylenia standardowego w populacji, σ możemy zastąpić odchyleniem standardowym z próby *s*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

Jest to uzasadnione, ze względu na dużą liczebność próby.

Przykład 4.1 Test istotności dla średniej, mała próba

- Zbiór *axles* (STAT z SAS, s.162).
- **PROC TTEST (EG**: ANOVA – TEST T…)
- Zgodnie z zapotrzebowaniem maszyna wykonująca osie jest ustawiona na produkcję osi o średnicy 24 mm. Ze względu na brak precyzji, średnicę wyprodukowanej osi uznajemy za zmienną losową o rozkładzie normalnym N(m,σ). Proces produkcyjny uznajemy za nieprawidłowy jeżeli: $m \neq 24$ (przeciętna średnic istotnie różni się od zadanej wielkości) lub $\sigma > 0.13$ (wzrasta odsetek osi o średnicach odbiegających od zadanej wielkości). Naszym zadaniem jest weryfikacja hipotezy dotyczącej wartości średniej *m*.
  - Zapisz hipotezę dotyczącą przeciętnej średnicy osi.
  - Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.
  - Sporządź wykres pudełkowy rozkładu średnic.

Przykład 4.1 Test istotności dla średniej, mała próba –rozwiązanie w SAS

1. Weryfikacja poddana jest następująca hipoteza:

$$H_0: m = 24,$$

$$H_1: m \neq 24.$$

2. Mała próba, a więc korzystamy z statystyki danej rozkładem *t*-Studenta:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n} = \frac{24,02 - 24}{0,2021}\sqrt{15} = 0,3833$$

3. Przyjmujemy α=0,05. W teście dwustronnym obszar odrzuceń hipotezy zerowej, czyli tzw. **obszar krytyczny** dany jest następującą równością:

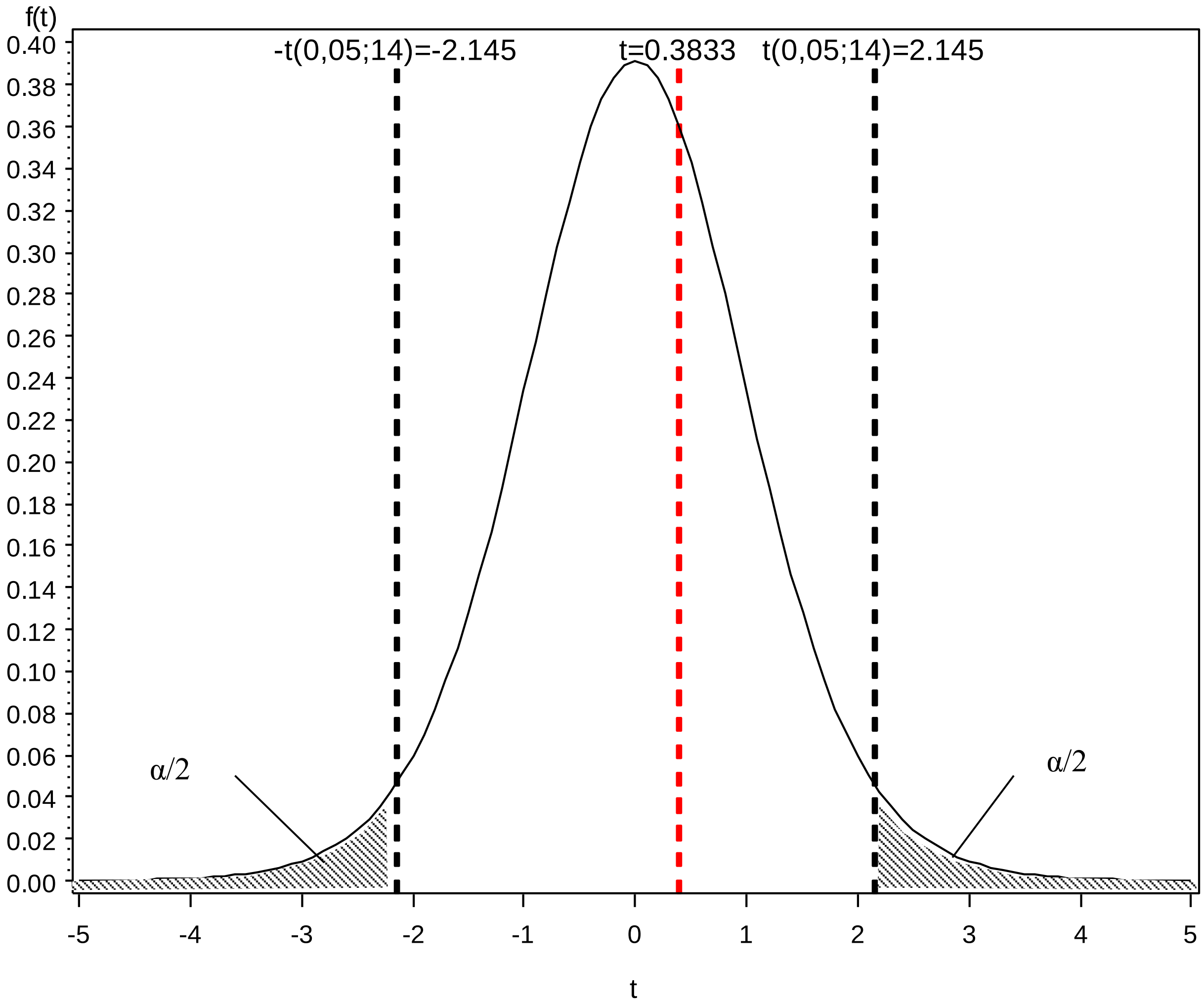
$$P(|t| \geq t_{0,05;n-1}) = 0,05$$

Wartość krytyczną dla przyjętego poziomu istotności oraz n-1=14 stopni swobody odczytujemy z tablic rozkładu *t*-Studenta. Wartość krytyczna wynosi $t_{0,05;14}$=2,145. Ponieważ wartość statystyki testującej nie znalazła się w obszarze krytycznym

$$|t| = |0,3833| < 2,145 = t_{0,05;14}$$

brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej zakładającej, że przeciętna średnica osi otrzymywanych w wyniku procesu produkcyjnego jest równa 24 mm. Nie ma zatem podstaw by twierdzić, iż proces produkcyjny odbiega od przyjętej normy.

Obszar krytyczny – przykład 4.1



Źródło: Statystyka od podstaw z systemem SAS, 2013, s. 166.

Obszar krytyczny – przykład 4.1

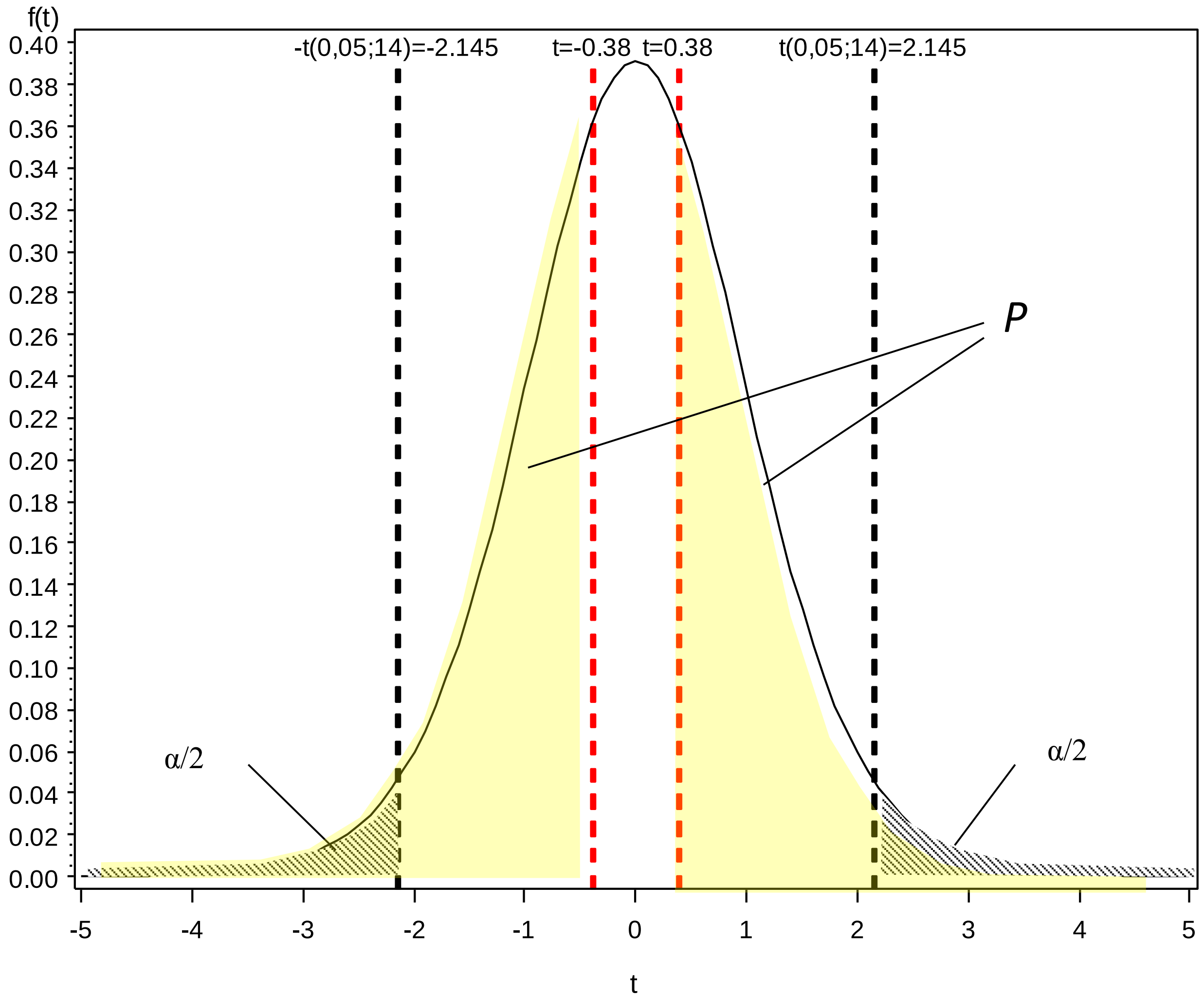
Analogiczne wnioskowanie możemy przeprowadzić odwołując się do współczesnego podejścia w testowaniu hipotez statystycznych, bazującego na krytycznym poziomie istotności (*P*). W teście istotności dla średniej, gdy korzystamy ze statystyki testującej, wartość *P* obliczana jest jako:

$P = P(|t| \geq |t_{obl.}|)$ – przy hipotezie alternatywnej dwustronnej

$P = P(t \geq t_{obl.})$ – przy hipotezie alternatywnej prawostronnej

$P = P(t \leq t_{obl.})$ – przy hipotezie alternatywnej lewostronnej

Krytycznym poziom istotności *P* w teście istotności dla średniej – przykład 4.1



Źródło: Statystyka od podstaw z systemem SAS, 2013, s. 167.

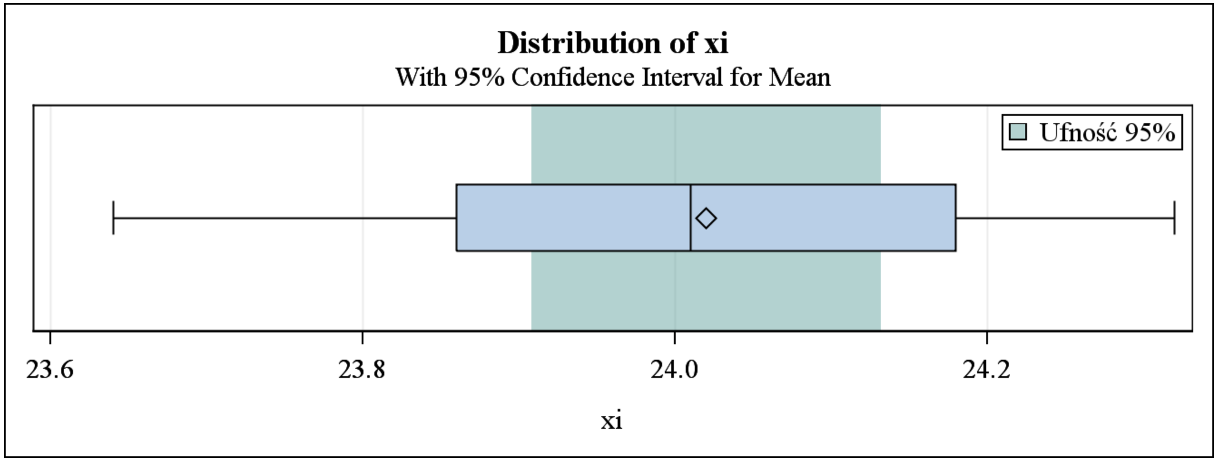
Przykład 4.1 Test istotności dla średniej, mała próba –rozwiązanie w SAS

N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
15	24.0200	0.2021	0.0522	23.6400	24.3200

Mean	95% CL Mean		Std Dev	95% CL Std Dev	
24.0200	23.9081	24.1319	0.2021	0.1480	0.3187

DF	Wartość t	Pr. > |t|
14	0.38	0.7073

Przy przyjętym poziomie istotności α=0,05, $P>\alpha$ stąd brak jest podstaw do odrzucenia H_0.



Procedura TTEST

```
ods graphics on;
proc ttest data = biblioteka.zbiór
PLOTS(ONLY)= (lista_wykresów)
alpha = poziom_istotności
h0 = wartość_średnia_w_H0;
var zmienna
side=2; /*(2 możemy zastąpić przez
„l” lub „u” w zależności od H1)*/
run;
ods graphics off;
```

Przykład 4.2 Test istotności średniej

- Zbiór danych *wages* zawiera dane o godzinowym wynagrodzeniu w dolarach próby pracowników pewnej firmy. Zweryfikuj hipotezę, że wynagrodzenie w tej firmie wynosi \$9 za godzinę, wobec hipotezy alternatywnej, że wynagrodzenie to jest większe od \$9.
  1. Zapisz hipotezę.
  2. Wylicz statystykę testową.
  3. Przyjmij wartość α.
  4. Podejmij decyzję weryfikacyjną.
  5. Sporządź wykres pudełkowy oraz histogram rozkładu wynagrodzenia.

4.3 Test istotności dla różnicy średnich

Oznaczmy przez X_1 badaną cechę w populacji pierwszej, a przez X_2 tę samą cechę w populacji drugiej. Liczebności badanych prób oznaczmy przez n_1 i n_2. Hipoteza zerowa w teście istotności dla różnicy średnich zakłada, że różnica pomiędzy średnimi cechy w badanych populacjach przyjmuje określoną wartość δ_0:

$$H_0: m_1 - m_2 = \delta_0$$

Postać hipotezy alternatywnej w omawianym teście zależy od tego, jak sformułowane jest przypuszczenie co do relacji pomiędzy m_1-m_2 oraz δ_0

4.3 Test dla różnicy średnich –postać H_1

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie	Odczyt P z raportu EG
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0 : m_1 - m_2 = \delta_0$ $H_1 : m_1 - m_2 \neq \delta_0$	Różnica średnich m_1-m_2 jest nierówna δ_0	P
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0 : m_1 - m_2 = \delta_0$ $H_1 : m_1 - m_2 > \delta_0$	Różnica średnich m_1-m_2 jest większa od δ_0	0,5P dla $t>0$ 1-0,5P dla $t\leq 0$
Hipoteza alternatywna jednostronna (lewostronna)	$H_0 : m_1 - m_2 = \delta_0$ $H_1 : m_1 - m_2 < \delta_0$	Różnica średnich m_1-m_2 jest mniejsza od δ_0	1-0,5P dla $t\geq 0$ 0,5P dla $t<0$

4.3 Test dla różnicy średnich, statystyka testująca (1)

Procedura weryfikacyjna zależna jest od sposobu doboru prób z badanych populacji, a także od założeń co do rozkładu X_1 i X_2. Przy porównaniu dwóch średnich możemy wyodrębnić następujące przypadki:

- **Próby n_1 i n_2 pobierane są niezależnie** z obu populacji

a) X_1 ma w populacji rozkład normalny $N(m_1,\sigma_1)$, a X_2 ma rozkład $N(m_2,\sigma_2)$, przy czym znane są wartości odchyleń standardowych σ_1 i σ_2. Do weryfikacji sformułowanej hipotezy korzystamy ze statystyki:

$$U = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(m_1 - m_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

która ma standardowy rozkład normalny.

b) X_1 ma w populacji rozkład $N(m_1,\sigma_1)$, a X_2 ma rozkład $N(m_2,\sigma_2)$. Wartości odchyleń standardowych σ_1 i σ_2 są nieznane, ale jednakowe ($\sigma_1=\sigma_2$). W tym przypadku, stosujemy statystykę postaci:

$$t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(m_1 - m_2\right)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \qquad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

4.3 Test dla różnicy średnich, statystyka testująca (2)

- **Próby n_1 i n_2 pobierane są niezależnie** z obu populacji

c) X_1 ma w populacji rozkład normalny $N(m_1,\sigma_1)$, a X_2 ma rozkład $N(m_2,\sigma_2)$. Wartości odchyleń standardowych σ_1 i σ_2 są nieznane, ale wiemy, że $\sigma_1 \neq \sigma_2$. W tej sytuacji statystyka testująca (*t Satterthwaite*'a)

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

ma asymptotyczny rozkład *t*-Studenta o *v* stopniach swobody, gdzie:

d) X_1 i X_2 mają dowolne rozkłady. Próba losowa jest duża. W tym przypadku do weryfikacji hipotezy dotyczącej różnicy średnich stosujemy statystykę U, która ma asymptotyczny rozkład N(0,1).

$$U = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

4.3 Test dla różnicy średnich, statystyka testująca (3)

Próby n_1 i n_2 są zależne, z czym mamy do czynienia w sytuacji, gdy pomiar badanej cechy przeprowadzony jest np. dwukrotnie wśród tych samych jednostek (np. ocena zainteresowania pewnym produktem wystawiona przez respondenta przed i po kampanii reklamowej). Tego typu eksperyment charakteryzuje występowanie par obserwacji powiązanych X_{1i} i X_{2i} (i=1,2,…,n). Decyzję weryfikacyjną podejmujemy na podstawie zmiennej losowej $R_i = X_{1i} - X_{2i}$ będącej różnicą pomiędzy obserwacjami dokonanymi w momentach t_1 i t_2. Zwykle interesuje nas odpowiedź na pytanie, czy średnia różni się istotnie pomiędzy badanymi pomiarami ($\delta_0=0$). Zakładając, że dysponujemy małą próbą, a zmienne R_i mają w populacji rozkład normalny z nieznanym odchyleniem standardowym, za sprawdzian postawionej hipotezy przyjmujemy statystykę t która ma rozkład t-Studenta o n-1 stopniach swobody.

$$t = \frac{\bar{R}}{S_R}\sqrt{n} \qquad \bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \qquad S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)^2}$$

Przykład 4.3 Test istotności dla różnicy średnich

Przypuszcza się, że średnia liczba klientów odwiedzających pewien sklep z artykułami gospodarstwa domowego jest znacznie większa w dzień weekendowy, w porównaniu z dniem roboczym. W celu weryfikacji sformułowanego przypuszczenia, wylosowano 20 dni roboczych i 20 dni weekendowych, dla których zgromadzono informację o liczbie klientów odwiedzających ten sklep.

- Zapisz hipotezę.
- Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.
- Sporządź wykres pudełkowy rozkładu liczby klientów w grupach.

Przykład 4.3 Test istotności dla różnicy średnich - rozwiązanie

H_0: m_1-m_2=0

H_1: m_1-m_2< 0

DZIEN	N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
DR	20	18.0500	6.5008	1.4536	9.0000	31.0000
WE	20	20.0500	7.5705	1.6928	8.0000	36.0000
Różn. (1-2)		-2.0000	7.0560	2.2313		

Method	Variances	DF	Wartość t	Pr < t
Wariancji sumarycznej	Równe	38	-0.90	0.1879
Satterthwaite'a	Nierówne	37.151	-0.90	0.1879

Equality of Variances				
Method	Num DF	Den DF	Wartość F	Pr. > F
Folded F	19	19	1.36	0.5130

Przykład 4.4 Test istotności dla różnicy średnich – duża próba

PROC TTEST (EG: ANOVA – TEST T…)

Zweryfikuj hipotezę o równości poziomu wynagrodzenia w grupach płci.

- Zapisz hipotezę.
- Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.
- Sporządź wykres pudełkowy rozkładu wynagrodzenia w grupach płci.

Przykład 4.5 Test istotności dla różnicy średnich – próby zależne
PROC TTEST (EG: ANOVA – TEST T…)

- Zbiór *noise* zawiera wyniki badania głośności tłumika samochodowego w zależności od strony jego montażu. Sprawdź czy wyniki pozwalają twierdzić, że strona montażu tłumika wpływa na poziom hałasu samochodu.
  - Zapisz hipotezę.
  - Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.
  - Sporządź wykres pudełkowy rozkładu wynagrodzenia w grupach płci.

Przykład 4.5 Test istotności dla różnicy średnich – próby zależne - rozwiązanie

H_0: $m_R = 0$

H_1: $m_R \neq 0$

N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
18	0.2778	14.4987	3.4174	-25.0000	30.0000

Mean	95% CL Mean		Std Dev	95% CL Std Dev	
0.2778	-6.9323	7.4878	14.4987	10.8796	21.7356

DF	Wartość t	Pr. > |t|
17	0.08	0.9362

Przykład 4.6 Test istotności dla różnicy średnich – próby zależne - rozwiązanie

Zbiór *XM13_05* zawiera informacje o rocznym wynagrodzeniu managerów z działów finansów i marketingu. Pary managerów (finansów i marketingu) były dobierane zgodnie z wynikami testu kompetencji, tzn. najpierw losowano parę managerów, którzy osiągnęli wynik z zakresu a_0-a_1, następnie parę managerów z wynikiem a_1-a_2, itd. Na podstawie otrzymanej próby, sprawdź czy średnia występuje statystycznie istotna różnica pomiędzy rocznym wynagrodzeniem managerów finansów i managerów marketingu.

- Zapisz hipotezę.
- Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.
- Sporządź wykres pudełkowy rozkładu różnicy wynagrodzenia pracowników obu oraz rozkłady dla każdej grupy z osobna.

4.7 Test istotności dla wariancji

- Przyjmijmy, że badana jest populacja o rozkładzie normalnym z nieznaną wartością średniej i odchylenia standardowego N(m,σ). Hipoteza zerowa w teście istotności dla wariancji zakłada, że σ przyjmuje określoną wartość σ_0 ($H_0{:}\sigma=\sigma_0$). Postać hipotezy alternatywnej zależy od tego jak sformułowano przypuszczenie co do relacji pomiędzy σ i σ_0.

4.7 Test istotności dla wariancji – postać H_1

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	Wariancja σ^2 jest różna od σ_0^2
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	Wariancja σ^2 jest większa od σ_0^2
Hipoteza alternatywna jednostronna (lewostronna)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	Wariancja σ^2 jest mniejsza od σ_0^2

Hipoteza dotycząca wariancji w populacji weryfikowana jest na podstawie *n*-elementowej próby losowej $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, za pomocą statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

gdzie $\bar{X}$ to średnia arytmetyczna z próby. Statystyka ta ma rozkład *chi-kwadrat* o *n*-1 stopniach swobody.

Przykład 4.7 Test istotności dla wariancji

- Uzupełnij badanie jakości procesu produkcyjnego (patrz Przykład 4.1) o test istotności dla wariancji. Sprawdź czy $\sigma > 0.13$, co oznaczałoby wzrost odsetka osi o średnicach odbiegających od zadanej wielkości).
  - Zapisz hipotezę.
  - Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.

Przykład 4.7 Test istotności dla wariancji - rozwiązanie

$$\sigma_0 = 0.13 \Rightarrow \sigma_0^2 = 0.0169$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1)0,2021^2}{0,0169} \approx 33,83$$

	chi2	critcal_value	p_value
1	33.834319527	23.684791305	0.0021805382

4.8 Test istotności dla dwóch wariancji

Załóżmy, że badane są populacje o rozkładach normalnych N(m_1, σ_1) i N(m_1,σ_2). Parametry rozkładów obu populacji nie są znane. Hipoteza zerowa w teście zakłada równość wariancji, co zapisujemy jako: H_0:σ_1=σ_2. H_1 formułujemy jako:

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie	Odczyt P z raportu EG
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	Wariancje σ_1^2 i σ_2^2 nie są sobie równe	P
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	Wariancja σ_1^2 jest większa od σ_2^2 (przy założeniu s_1^2 > s_2^2)	0,5P

4.8 Test istotności dla dwóch wariancji – statystyka testująca

Sformułowana hipoteza weryfikowana jest na podstawie niezależnych prób z obu populacji, za pomocą statystyki:

$$F = \frac{S^2_{\max}}{S^2_{\min}} \qquad S^2_{\max} = \max\{S_1^2, S_2^2\}, \qquad S^2_{\min} = \min\{S_1^2, S_2^2\},$$

$S_1{}^2$ i $S_2{}^2$ oznaczają wariancje z badanych prób. Statystyka F ma rozkład F-Snedecora z $v_1 = n_1$-1 i $v_2 = n_2$-1 stopniami swobody.

Przykład 4.8 Test istotności dla dwóch wariancji

PROC TTEST (EG: ANOVA – TEST T…)

Zweryfikuj hipotezę o równości wariancji w populacjach klientów sklepu z Przykładu 4.3.

- Hipoteza:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Equality of Variances				
Method	Num DF	Den DF	Wartość F	Pr. > F
Folded F	19	19	1.36	0.5130

4.9 Test istotności dla frakcji

Przyjmijmy, że populacja ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p. Parametr p możemy interpretować jako frakcję elementów wyróżnionych w populacji, tzn. odsetek elementów populacji, dla których badana cecha przyjmuje określoną wartość. Hipoteza zerowa w teście dla frakcji zakłada, że parametr p jest równy p_0 co zapisujemy jako: H_0: $p=p_0$.

4.9 Test istotności dla frakcji – postać H_1

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie	Odczyt P z raportu EG
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	Wskaźnik struktury p różni się od p_0	$P_{dwustronne}$
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	Wskaźnik struktury p przyjmuje wartość większą od p_0	$P_{jednostronne}$ dla U>0 $1-P_{jednostronne}$ dla U≤0
Hipoteza alternatywna jednostronna (lewostronna)	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	Wskaźnik struktury p przyjmuje wartość mniejszą od p_0	$1-P_{jednostronne}$ dla U≥0 $P_{jednostronne}$ dla U<0

4.9 Test istotności dla frakcji – statystyka testująca (1)

Hipoteza dotycząca frakcji weryfikowana jest na podstawie *n*-elementowej próby losowej, w oparciu o statystykę:

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

gdzie:

X - liczba elementów wyróżnionych w próbie,

n - liczebność próby.

Statystyka $\hat{p}$ ma asymptotyczny rozkład normalny:

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

4.9 Test istotności dla frakcji – statystyka testująca (2)

Do podjęcia decyzji weryfikacyjnej korzystamy z wystandaryzowanej wartości statystyki $\hat{p}$:

$$U = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

która ma graniczny rozkład normalny N(0,1).
Przyjmuje się, iż z rozkładu granicznego możemy skorzystać, gdy:

n$\hat{p}$(1-$\hat{p}$)$\geq$ 5

Przykład 4.9 Test istotności dla frakcji

Dystrybutor elektroniki użytkowej szacuje, że 1/5 zakupów w jego sieci realizowana jest za pośrednictwem serwisu internetowego. Naszym celem jest zweryfikowanie powyższej hipotezy na podstawie próby 200 losowo dobranych transakcji z roku 2005.

– Wyznacz liczebności i częstości sprzedaży tradycyjnej i internetowej.
– Zapisz hipotezę.
– Wylicz statystykę testową i podejmij decyzję weryfikacyjną.

Przykład 4.9 Test istotności dla frakcji – rozwiązanie

$$H_0 : p = 0,2,$$

$$H_1 : p \neq 0,2.$$

KANAL	Liczebność	Procent	Liczebność skumulowana	Procent skumulowany
Internet	35	17.50	35	17.50
Sklep	165	82.50	200	100.00

Test of H0: Proportion = 0.2	
ASE under H0	0.0283
Z	-0.8839
One-sided Pr < Z	0.1884
Two-sided Pr > |Z|	0.3768

Przykład 4.10 Test istotności dla frakcji

Zbiór *oty* zawiera dane o liczbie osób z nadwagą w pewnej próbie losowej. Zweryfikuj następujące hipotezy:

– Odsetek osób otyłych w populacji wynosi 55%.

– Odsetek osób otyłych w populacji wynosi 50%.

4.11 Test dla różnicy dwóch frakcji

- Statystka w teście dla różnicy dwóch frakcji:

$$U = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$\hat{p}_k = \frac{X_k}{n_k}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{k=1}^{K} X_k}{\sum_{k=1}^{K} n_k}$$

Przykład 4.11 Test dla różnicy dwóch frakcji

Zbiór *XM13_09* (Keller 2008, s. 486).

Firma GPG zajmuje się produkcją kosmetyków. Ze względu na niską sprzedaż jednego z żelów pod prysznic dział marketingu zdecydował się na zmianę opakowania. Zaprojektowano dwa nowe wzory opakowania *A* oraz *B*. W ciągu jednego tygodnia jeden ze wzorów był dostępny w markecie *S1*, a drugi w markecie *S2*. Za test atrakcyjności opakowania przyjęto odsetek łącznej sprzedaży żeli w każdym z marketów. Zweryfikuj hipotezę, że projekt *A* cieszy się większą popularnością niż *B*. (Kod żelu firmy GPG to 9077.).

Testy nieparametryczne

4.12 Test zgodności rozkładów

Do podjęcia decyzji o istotności różnicy pomiędzy rozkładem empirycznym a rozkładem teoretycznym możemy wykorzystać następujące testy: *Kołmogorowa-Smirnowa*, *Andersona-Darlinga* oraz *Craméra-Von Misesa*. Wszystkie trzy testy bazują na porównaniu dystrybuant rozkładu empirycznego i teoretycznego.

Badając zgodność rozkładu empirycznego z rozkładem teoretycznym, weryfikacji poddajemy hipotezę, iż cecha ma w populacji rozkład określony dystrybuantą $F_0(x)$, co zapisujemy:

H_0: $F(x) = F_0(x)$ - wskazanie na zgodność rozkładu empirycznego z rozkładem teoretycznym

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$ - wskazanie na brak zgodności pomiędzy rozkładem empirycznym a rozkładem teoretycznym,

gdzie $F(x)$ to dystrybuanta empiryczna, a $F_0(x)$ to dystrybuanta rozkładu teoretycznego.

4.12 Test zgodności rozkładów – statystyka testująca

W **teście Kołmogorowa-Smirnowa** miarą zgodności rozkładów jest statystyka D_n bazująca na największej różnicy pomiędzy wartościami dystrybuanty empirycznej i teoretycznej, dana formułą:

$$D_n = \sup_x \left| F_n(x) - F_0(x) \right|$$

Testy Cramera-von Misesa oraz Andersona-Darlinga bazują na łącznej sumie kwadratów różnic pomiędzy wartościami z rozkładu empirycznego $F(x)$ a wartościami rozkładu teoretycznego $F_0(x)$.

Statystyka Cramera-von Misesa zdefiniowana

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x) - F_0(x) \right)^2 dF_0(x)$$

Przy obliczaniu statystyki **Andersona-Darlinga** różnice pomiędzy badanymi dystrybuantami są dodatkowo ważone, zgodnie z ich położeniem w rozkładzie cechy. Odchylenia na krańcach rozkładu mają większą wagę, niż odchylenia w centralnej części rozkładu.

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x) - F_0(x) \right)^2 \frac{1}{\left(F_0(x)[1 - F_0(x)] \right)} dF_0(x)$$

4.12 Test zgodności rozkładów w SAS

W EG możemy przeprowadzić test zgodności dla następujących rozkładów (PROC UNIVARIATE):

– normalnego,

– lognormalnego,

– wykładniczego,

– Weibulla,

– beta,

– gamma,

– *kernel density.*

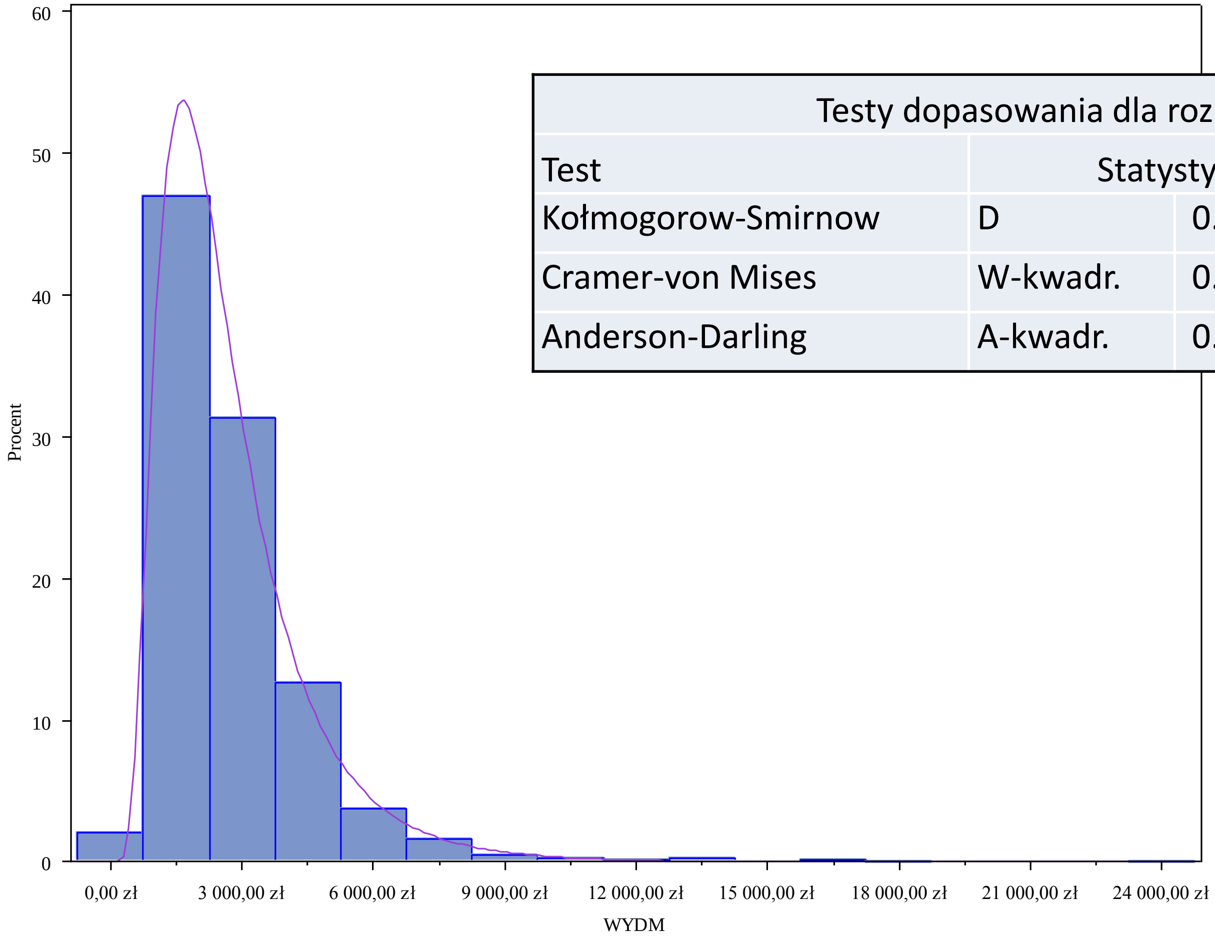
Przykład 4.12 Test zgodności rozkładów

Zbiór *gosp08*

PROC UNIVARIATE (EG: OPISOWE – ANALIZA ROZKŁADU…)

Sporządź wykres rozkładu *wydatków gospodarstw domowych* oraz sprawdź jego zgodność z rozkładem lognormalnym.

Przykład 4.12 Test zgodności rozkładów - rozwiązanie



Testy dopasowania dla rozkładu lognormalnego				
Test	Statystyka		Wartość p	
Kołmogorow-Smirnow	D	0.01454736	Pr. > D	>0.500
Cramer-von Mises	W-kwadr.	0.05814115	Pr. > W-kwadr.	>0.250
Anderson-Darling	A-kwadr.	0.42259087	Pr. > A-kwadr.	0.210

4.13 Test istotności dla mediany

Test znaków (ang. *sign test*) stosowany jest do oceny różnic pomiędzy parami obserwacji (np. pomiędzy ocenami pewnych usług). Pary obserwacji oznaczmy przez (X_i, Y_i), gdzie X_i oraz Y_i to oceny wystawione przez *i*-tą jednostkę. Hipoteza zerowa w teście znaków zakłada, że różnice pomiędzy obserwacjami rozkładają się równomiernie, co formalnie możemy zapisać jako: $H_0{:}P(X_i>Y_i)=0{,}5$. Tak sformułowana hipoteza równoważna jest przypuszczeniu, że mediana cechy przyjmuje w populacji określoną wartość m_0
$H_0{:}P(X_i>me_0)=0{,}5$. Z tego względu test znaków stosuje się do oceny **istotności mediany**.

4.13 Test istotności dla mediany – postać H_1

Typ hipotezy alternatywnej	Zapis hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej	Hipoteza alternatywna słownie	Odczyt P z raportu EG
Hipoteza alternatywna dwustronna	$H_0: P(X_i > me_0) = 0{,}5$ $H_1: P(X_i > me_0) \neq 0{,}5$	Mediana *me* jest różna od me_0	P
Hipoteza alternatywna jednostronna (prawostronna)	$H_0: P(X_i > me_0) = 0{,}5$ $H_1: P(X_i > me_0) < 0{,}5$	Mediana *me* jest większa od me_0	0,5P
Hipoteza alternatywna jednostronna (lewostronna)	$H_0: P(X_i > me_0) = 0{,}5$ $H_1: P(X_i > me_0) > 0{,}5$	Mediana *me* jest mniejsza od me_0	0,5P

4.13 Test istotności dla mediany – statystyka testująca (1)

W celu przeprowadzenia testu istotności dla mediany, w pierwszej kolejności wyznacza się liczbę obserwacji, które są uwzględniane przy weryfikacji hipotezy (n_t). Są to wszystkie obserwacje o wartościach różnych od me_0. Następnie zlicza się obserwacje, które przyjmują wartości większe od me_0. Liczba obserwacji o wartościach przekraczających me_0 (n^+) jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym. Przez analogię do klasycznego eksperymentu Bernoulliego możemy przyjąć, iż:

- n^+ jest liczbą sukcesów,
- n_t jest liczbą niezależnych prób, zaś
- p jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie.

4.13 Test istotności dla mediany – statystyka testująca (2)

Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi p=0,5, a oczekiwana liczba sukcesów wynosi:

$$E\left(n^{+}\right) = n_t p = n_t / 2$$

Decyzję weryfikacyjną podejmujemy na podstawie statystyki:

$$M = n^{+} - \frac{n_t}{2}$$

o rozkładzie dwumianowym z parametrami n_t oraz p. Przy prawdziwej hipotezie zerowej M powinna przyjmować wartości bliskie 0.

W sytuacji, gdy próba jest duża (n_t>10) do weryfikacji postawionej hipotezy stosujemy statystykę U~N(0,1):

$$U = \frac{M}{0,5\sqrt{n_t}}$$

Przykład 4.13 Test istotności dla mediany

- **PROC UNIVARIATE (EG**: OPISOWE – ANALIZA ROZKŁADU…)
- Losową próbę 10 studentów poproszono o ocenę dwóch marek lodów. Lody każdej z marek różniła zawartość cukru. W przypadku marki pierwszej ilość cukru była ograniczona. Lody drugiej marki zawierały standardową ilość tego składnika. Produkty oceniano w skali od 1 do 10, gdzie 1 oznaczała najniższą ocenę. Naszym celem jest weryfikacja przypuszczenia, że oceny wystawiane każdej z marek, istotnie się od siebie różnią. Do tego celu wykorzystamy test znaków (Sign test).

Przykład 4.13 Test istotności dla mediany - rozwiązanie

- Ze względu na to, że interesuje nas wyłącznie różnica pomiędzy rozkładami ocen obu marek, postawioną hipotezę możemy zapisać w sposób następujący:

$$H_0 : P\left(X_i > Y_i\right) = 0,5,$$
$$H_1 : P\left(X_i > Y_i\right) \neq 0,5.$$

Wartość zliczenia: mi0=0.00	
Liczba	Wartość
Num Obs > Mu0	3
Num Obs ^= Mu0	9
Num Obs < Mu0	6

Tests for Location: Mu0=0				
Test	Statystyka		Wartość p	
Student's t	t	-2.04656	Pr > |t|	0.0710
Sign	M	-1.5	Pr >= |M|	0.5078
Signed Rank	S	-15.5	Pr >= |S|	0.0664

4.14 Test niezależności χ^2

Test niezależności χ^2 (ang. χ^2 *test for independence*) stosowany jest do badania zależności pomiędzy dwiema cechami (X i Y). Załóżmy, że badane cechy są skokowe i przyjmują odpowiednio k i l kategorii. Przez p_{ij} oznaczmy prawdopodobieństwo, że losowo wybrany element populacji będzie przyjmował wartości cechy $X=x_i$ i jednocześnie $Y=y_j$. Przez $p_{i.}$ oraz $p_{.j}$ oznaczmy prawdopodobieństwa brzegowe odpowiednio X i Y. Przykładowo, dla cechy X, $p_{i.}$ jest to prawdopodobieństwo, że losowo wybrany element populacji będzie przyjmował wartość cechy $X=x_i$ niezależnie od tego, jaką wartość przyjmie cecha Y. Hipoteza zerowa w teście niezależności χ^2 zakłada, że cechy X i Y są niezależne, co zapisujemy jako:

$$H_0 : \bigwedge_{i,j} p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$$

wobec hipotezy alternatywnej, która zakłada, że dla co najmniej jednej pary (i,j) prawdopodobieństwo w rozkładzie łącznym jest różne od iloczynu prawdopodobieństw w rozkładach brzegowych

$$H_1 : \bigvee_{i,j} p_{ij} \neq p_{i.} p_{.j}.$$

4.14 Test niezależności χ^2 - statystyka testująca

Za sprawdzian hipotezy przyjmuje się statystykę:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{\left(n_{ij}-\hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}}$$

gdzie:

n_{ij} - zaobserwowana liczebność dla *i*-tej i *j*-tej kategorii cech *X* i *Y*,

$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$ -liczebność teoretyczna przy prawdziwej hipotezie zerowej, tj. niezależności cech *X* i *Y*;

$n_{i.} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$ - wartość z rozkładu brzegowego dla *i* -tej kategorii cechy *X*

$n_{.j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$ - wartość z rozkładu brzegowego dla *j*-tej kategorii cechy *Y*.

Statystyka χ^2 ma asymptotyczny rozkład *chi-kwadrat* z (k-1)(l-1) stopniami swobody

Przykład 4.14 Test niezależności χ^2

Zbiór *Eurobarometr*

EG: Describe → Table Analysis

Test niezależności χ^2 zostanie zaprezentowany na przykładzie badania przeprowadzonego przez Komisję Europejską dotyczącego obaw mieszkańców krajów europejskich związanych z ekonomicznym i finansowym kryzysem z lat 2007–2009. Badanie *Europejczycy Wobec Kryzysu Gospodarczego* zostało przeprowadzone na próbie 27218 mieszkańców państw europejskich, którzy ukończyli 15 rok życia. Badanie to zrealizowano w styczniu i lutym 2009 r.

Naszym celem jest odpowiedź na następujące pytanie: czy obawy związane z ekonomicznym i finansowym kryzysem z lat 2007–2009 zależą od kraju pochodzenia respondenta? Badane cechy to *kraj (X)* oraz *konsekwencje* (*Y*). Do oceny zależności pomiędzy cechami *X* i *Y* wykorzystano test niezależności χ^2.

Przykład 4.14 Zbiór *Eurobarometr*

Lp.	Nazwa	Opis	Kategorie
1	Konsekwencje	Jak poważne konsekwencje dla Twojej osobistej sytuacji będzie miał obecny ekonomiczny i finansowy kryzys?	1. Bardzo poważne konsekwencje 2. Poważne konsekwencje 3. Raczej nie będzie miał konsekwencji 4. Nie będzie miał konsekwencji 5. Nie wiem
2	Liczebność	Zmienna wskazująca na liczebność respondentów	–
3	Kraj	Kraj badania	–
4	Oznaczenie	Oznaczenie kraju badania	–

	Konsekwencje	Liczebnosc	Kraj	Oznaczenie
1	1	75	Austria	AT
2	2	311	Austria	AT
3	3	443	Austria	AT
4	4	105	Austria	AT
5	5	66	Austria	AT
6	1	176	Belgia	BE
7	2	411	Belgia	BE
8	3	378	Belgia	BE
9	4	43	Belgia	BE
10	5	10	Belgia	BE

Przykład 4.14 Test niezależności χ^2 - rozwiązanie

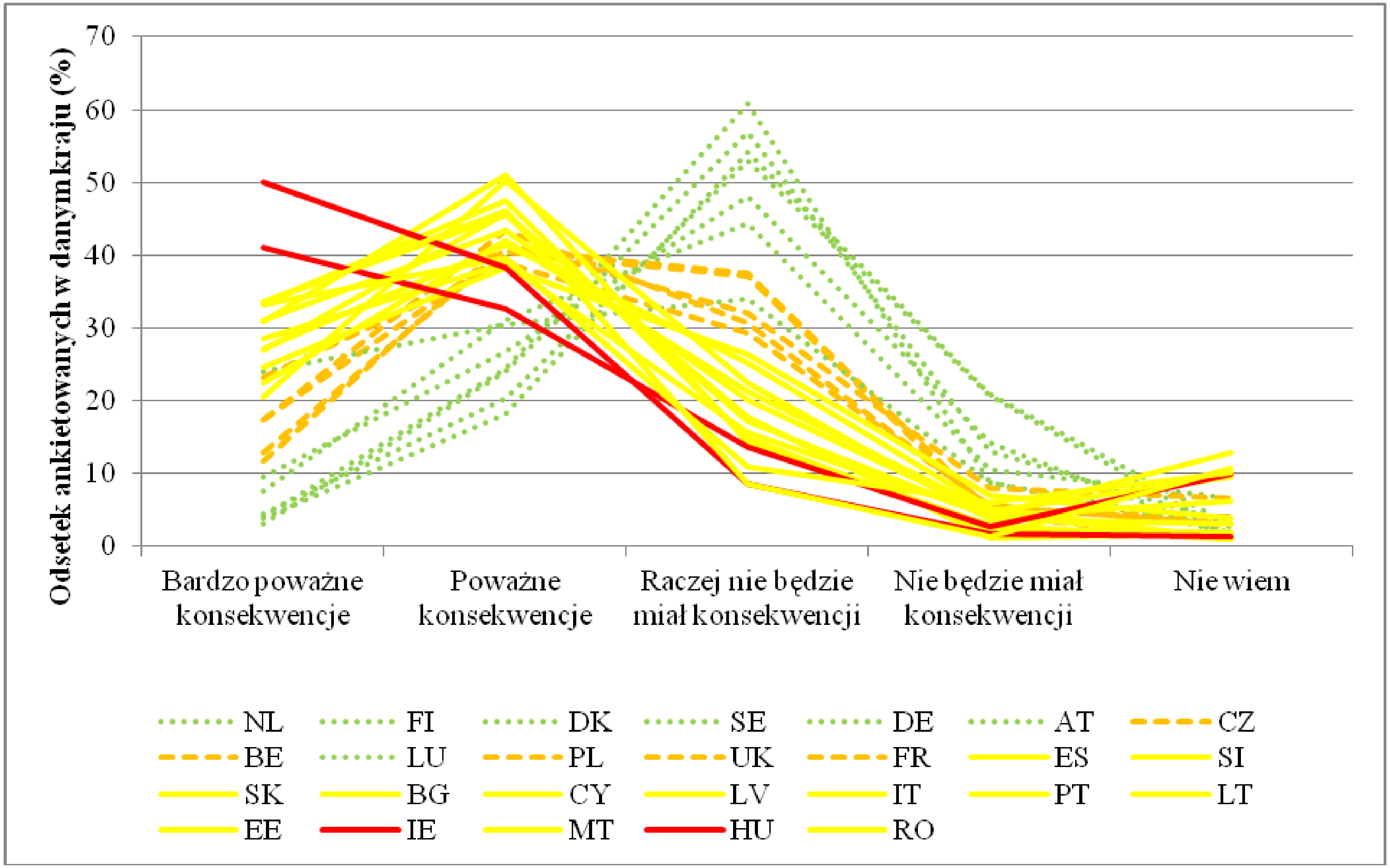
$$H_0 : \bigwedge_{i,j} p_{ij} = p_{i.} p_{.j},$$

$$H_1 : \bigvee_{i,j} p_{ij} \neq p_{i.} p_{.j}.$$

Statystyka	DF	Wartość	Prawd.
Chi-Square	100	6262.2246	<.0001
Likelihood Ratio Chi-Square	100	6284.3899	<.0001
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	71.3864	<.0001
Phi Coefficient		0.4934	
Contingency Coefficient		0.4425	
Cramer's V		0.2467	

Przykład 4.14

Jak poważne konsekwencje dla Twojej osobistej sytuacji będzie miał obecny ekonomiczny i finansowy kryzys?



Literatura

1. E. Frątczak, A. Korczyński (2013) *Statystyka od podstaw z systemem SAS* (Warszawa: SGH)
2. J. Jóźwiak, J. Pogórski (2000) *Statystyka od podstaw* (Warszawa: PWE).
3. G. Keller (2008) *Managerial Statistics* (Mason: South-Western CENGAGE Learning)

III. Wnioskowanie statystyczne - ćwiczenia - koniec

Adam Korczyński
adam.korczynski@doktorant.sgh.waw.pl