Dr hab. Ewa Frątczak

Materiały pomocnicze do wykładu i ćwiczeń

Rozkłady dokładne statystyk z próby

1. $X \in N(m;\sigma)$, gdzie σ jest znane, *n*- dowolne

$$\overline{X} \in N\left(m;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad U = \frac{\overline{X}-m}{\sigma}\sqrt{n} \in N(0;1)$$

2. $X \in N(m;\sigma)$, gdzie σ jest nieznane, *n*<30

$$X \in t-Studenta\left(m;\frac{s(x)}{\sqrt{n}}\right) \qquad t = \frac{\overline{X}-m}{S(x)}\sqrt{n} \in t-Studenta \text{ o } v=n\text{-}1 \text{ st. swobody}$$

3. $X_1 \in N(m_1;\sigma_1)$, $X_2 \in N(m_2;\sigma_2)$, gdzie σ_1, σ_2 są znane

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2 \in N\left(m_1-m_2;\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right), \quad U = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in N(0;1)$$

4. $X_1 \in N(m_1;\sigma)$, $X_2 \in N(m_2;\sigma)$, gdzie σ_1, σ_2 są nie znane, ale identyczne ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma$), $n_1<30$, $n_2<30$

$$t = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \in t-Studenta \text{ o } v=n_1+n_2-2 \text{ st. swobody}$$

5. $X \in N(m;\sigma)$, *n*<30

Dla wnioskowania o σ^2 w populacji generalnej wykorzystuje się statystykę

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in chi-kwadrat \text{ o } v=n-1 \text{ st. swobody}$$

6. $X_1 \in N(m_1;\sigma_1)$, $X_1 \in N(m_2;\sigma_2)$, gdzie

S_1^2 - wariancja z próby n_1-elementowej populacji X_1
S_2^2 - wariancja z próby n_2-elementowej populacji X_2

$$F = \frac{n_1S_1^2/\sigma_1^2(n_1-1)}{n_2S_2^2/\sigma_2^2(n_2-1)} \in F-Snedecora \text{ o } v_1=n_1-1,\ v_2=n_2-1 \text{ st. swobody}$$

Statystyka *F* znajduje zastosowanie przy porównywaniu wariancji z prób pochodzących z niezależnych populacji X_1 i X_2

Rozkłady graniczne statystyk z próby ($n \to \infty$)

1. $X \in$ *dwumianowy* z parametrami $(n;p)$

$W = \frac{X}{n} \in$ *dwumianowy* z parametrami $\mathrm{E}(W) = p$, $\mathrm{D}^2(W) = \frac{p(1-p)}{n}$

Przy $n \to \infty$ $W = \frac{X}{n} \to N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ (graniczny rozkład normalny)

$$U = \frac{W - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \in N(0;1)$$ (twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a)

2. $X_1 \in B(n_1; p_1)$ (rozkład dwumianowy z parametrami n_1, p_1), $n_1 \to \infty$

$X_2 \in B(n_2; p_2)$ (rozkład dwumianowy z parametrami n_2, p_2), $n_2 \to \infty$

$$W_1 - W_2 = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_1}{n_2} \to N\left(p_1 - p_2; \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$ (graniczny rozkład normalny)

$$U = \frac{(W_1 - W_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \to N(0;1)$$

3. X - dowolny rozkład z parametrami m i σ, $n \to \infty$

$$\overline{X} \in N\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \qquad U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} \in N(0;1)$$

4. X_1 - dowolny rozkład z parametrami m_1, σ_1, $n_1 \to \infty$

X_2 - dowolny rozkład z parametrami m_2, σ_2, $n_2 \to \infty$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \to N\left(m_1 - m_2; \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$U = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0;1)$$

5. $X \to N(m;\sigma)$, gdy $n \to \infty$

$S \to N\left(\sigma; \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$ (graniczny rozkład S)