Zespół realizujący: dr hab. prof. SGH, Ewa Frątczak,
dr Wioletta Grzenda, dr Aneta Ptak-Chmielewska

WYKŁAD 2 – Cz. II

Ewa Frątczak

Elementy teorii weryfikacji hipotez statystycznych

Struktura:

1. Podstawowe pojęcia
2. Błąd pierwszego i drugiego rodzaju
3. Testy najmocniejsze
4. Moc testu
5. Zgodność testu
6. Test najmocniejszy Neymana – Pearsona
7. Test jednostajnie najmocniejszy
8. Obciążoność testu
9. Funkcja mocy testu
10. Test ilorazu wiarygodności

1. Podstawowe pojęcia

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu populacji generalnej o prawdziwości lub fałszywości, którego wnioskuje się na podstawie pobranej próby.

Zbiór hipotez dopuszczalnych Ω jest zbiorem możliwych rozkładów, które mogą charakteryzować badaną populację.

Hipoteza parametryczna to taka, która dotyczy nieznanych wartości parametrów.

Hipotezy, które nie dotyczą parametrów nazywamy **hipotezami nieparametrycznymi**, są one przypuszczeniami dotyczącymi klasy rozkładów do których należy rozkład populacji.

1. Podstawowe pojęcia

Hipotezą prostą nazywamy hipotezę statystyczną, która jednoznacznie określa rozkład populacji.

Każdą hipotezę, która nie jest prosta nazywamy **hipotezą złożoną**.

Każda hipoteza statystyczna ma postać $H: F(x) \in \omega$, gdzie $\omega \subset \Omega$. Wówczas jeśli podzbiór ω składa się z jednego elementu, to badana hipoteza jest hipotezą prostą, jeśli natomiast do podzbioru ω należy więcej niż jeden rozkład, to mówimy o hipotezie złożonej.

1. Podstawowe pojęcia

Testem statystycznym nazywamy regułę postępowania, która każdej możliwej realizacji próby $x_1, \ldots, x_n$ przyporządkowuje, z ustalonym prawdopodobieństwem, decyzję przyjęcia lub odrzucenia sprawdzanej hipotezy.

Test statystyczny w zależności od tego, czy jest weryfikowana hipoteza parametryczna, czy też nieparametryczna nazywamy **testem parametrycznym** lub **testem nieparametrycznym**.

1. Podstawowe pojęcia

W procesie weryfikacji hipotez na początku ze zbioru hipotez dopuszczalnych wybiera się jedną hipotezę, która podlega weryfikacji i nazywa się ją **hipotezą zerową**:

$$H_0: F(x) \in \omega_0 \ , \ \omega_0 \subset \Omega.$$

Oprócz weryfikowanej hipotezy wyróżnia się jeszcze jedną zwaną **hipotezą alternatywną**:

$$H_1: F(x) \in \omega_1 \ , \ \omega_1 \subset \Omega \ ,$$

która jest przeciwstawna hipotezie zerowej i którą jesteśmy skłonni przyjąć, w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej.

1. Podstawowe pojęcia

Oznaczmy przez *W* n - wymiarową przestrzeń próby, czyli zbiór wszystkich możliwych wyników n - elementowej próby, niech $W_n = (x_1, \ldots, x_n)$ oznacza punkt w tej przestrzeni próby.

Konstrukcja testu polega na podzieleniu przestrzeni próby na dwa rozłączne obszary *w* oraz *W*-*w*.

Jeśli $W_n \in w$, to sprawdzaną hipotezę odrzucamy, jeśli natomiast $W_n \in W - w$, to hipotezę zerową przyjmujemy.

Obszar *w* nazywamy **obszarem odrzucenia** hipotezy (obszarem krytycznym), natomiast *W*-*w* **obszarem przyjęcia** hipotezy zerowej.

2. Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

W wyniku testowania hipotezy statystycznej możemy podjąć poprawną decyzję lub popełnić jeden z dwóch następujących błędów:

1) możemy odrzucić weryfikowaną hipotezę H_0 wtedy, gdy jest ona w rzeczywistości prawdziwa

$$P(W_n \in w \mid H_0) = \alpha(w)$$

- **błąd I rodzaju**;

2) możemy przyjąć weryfikowaną hipotezę H_0 jako prawdziwą, podczas gdy jest ona fałszywa

$$P(W_n \in (W - w) \mid H_1) = \beta(w)$$

- **błąd II rodzaju**.

3. Testy najmocniejsze

Ponieważ jednoczesna minimalizacja obydwu rodzajów błędów, przy ustalonej liczebności próby, nie jest możliwa, to ustala się z góry pewne prawdopodobieństwo błędu I rodzaju na żądanym poziomie *α*. Następnie spośród wszystkich obszarów *w* spełniających warunek

$$P(W_n \in w \mid H_0) = \alpha$$

wybieramy taki obszar w_0, dla którego prawdopodobieństwo błędu II rodzaju jest najmniejsze, tzn.

$$\min_w P(W_n \in (W - w) \mid H_1) = P(W_n \in (W - w_0) \mid H_1).$$

Tak zbudowane testy nazywamy **testami najmocniejszymi**.

4. Moc testu

Mocą testu opartego na obszarze odrzucenia *w* nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia sprawdzanej hipotezy H_0 przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza alternatywna H_1, piszemy

$$M(w) = P(W_n \in w \mid H_1)$$

Zauważmy, że

$$P(W_n \in (W - w) \mid H_1) = P(W_n \in W \mid H_1) - P(W_n \in w \mid H_1) = 1 - P(W_n \in w \mid H_1)$$

Zatem

$$\beta(w) = 1 - M(w)$$

<u>UWAGA</u>: Testy najmocniejsze nie zawsze istnieją.

5. Zgodność testu

Test oparty na obszarze odrzucenia *w* jest **zgodny**, jeśli jego moc dąży do jedności

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n \in w \mid H_1\right) = 1$$

6. Test najmocniejszy Neymana – Pearsona

Załóżmy, że hipoteza zerowa H_0 i alternatywna H_1 są hipotezami prostymi. Rozważamy populację generalną o rozkładzie zadanym gęstością $f(x;\theta)$. Weryfikujemy hipotezę $H_0:\theta=\theta_0$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1:\theta=\theta_1$.

Podstawowy lemat Neymana – Pearsona

Test zbudowany na podstawie obszaru odrzucenia *w*, który spełnia warunki:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} \ge k$$ wewnątrz obszaru *w*,

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)} \le k$$ na zewnątrz obszaru *w*,

gdzie stała *k* jest tak dobrana, aby $P(W_n \in w \mid H_0)=\alpha$, jest testem najmocniejszym z prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju równym *α*.

Przykład 1

Z populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ pobrano n - elementową próbę, w celu sprawdzenia hipotezy $H_0 : m = m_0$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : m = m_1$, przy czym $m_1 < m_0$. Zakładamy, że σ jest znane.

Chcemy zbudować test najmocniejszy z prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju równym α.

Przykład 1

Wyznaczmy lewą stronę nierówności z lematu Neymana – Pearsona:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; m_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; m_0)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_1-m_1)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_n-m_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_1-m_0)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_n-m_0)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2\right)} = \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2\right)\right]$$

Przykład 1

Z lematu wynika, że obszar krytyczny *w* dający test najmocniejszy zawiera te wszystkie punkty $W_n = (x_1, \ldots, x_n)$ przestrzeni próby, dla których powyższe wyrażenie jest słabo większe od *k*. Zatem

$$\exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2\right)\right] \geq k$$

$$\left[\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2\right)\right] \geq \ln k$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nm_0^2 - 2m_0 n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nm_1^2 + 2m_1 n\bar{x} \geq 2\sigma^2 \ln k$$

$$-n\left(m_1^2 - m_0^2\right) + 2n\bar{x}\left(m_1 - m_0\right) \geq 2\sigma^2 \ln k$$

$$\bar{x} \leq \frac{2\sigma^2 \ln k + n\left(m_1^2 - m_0^2\right)}{2n\left(m_1 - m_0\right)} = K(k)$$

Przykład 1

Ponieważ założyliśmy, że prawdopodobieństwo błędu I rodzaju jest równe α, to liczbę *K* dobieramy tak, aby $P(\bar{x} \le K \mid H_0) = \alpha$.

Przy założeniu, że hipoteza $H_0 : m = m_0$ jest prawdziwa zmienna $\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ ma rozkład $N(0,1)$.

Stąd $$P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le \frac{K - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right) = \alpha$$

Z tablic rozkładu normalnego $N(0,1)$ odczytujemy liczbę $K' = \frac{K - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

Jeśli $\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le K'$,

to hipotezę zerową odrzucamy, w przeciwnym razie hipotezę tą przyjmujemy.

Przykład 1

UWAGA: Tak zbudowany test gwarantuje przy prawdopodobieństwie błędu I rodzaju równym α, możliwie największą moc, czyli możliwie najmniejsze prawdopodobieństwo błędu II rodzaju.

UWAGA: Otrzymany obszar krytyczny $\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq K'$

jest niezależny od hipotezy alternatywnej, jeśli tylko $m_1 < m_0$.

Wniosek

Jeśli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ, to obszarem odrzucenia dającym test najmocniejszy dla hipotezy zerowej $H_0 : m = m_0$ wobec hipotezy alternatywnej:

1) $H_1 : m = m_1$, $m_1 < m_0$ jest obszar $\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le K'$, gdzie K' jest tak dobrane, aby

$$P\left(\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le K'\right) = \alpha$$

2) $H_1 : m = m_1$, $m_1 > m_0$ jest obszar $\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge K'$, gdzie K' jest tak dobrane aby

$$P\left(\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge K'\right) = \alpha$$

7. Test jednostajnie najmocniejszy

Rozważamy tak, jak poprzednio populację generalną o funkcji gęstości $f(x;\theta)$. Załóżmy teraz, że weryfikujemy prostą hipotezę zerową $H_0 : \theta = \theta_0$ wobec złożonej hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta \in \omega$, $\omega \subset \Omega$.

Testem jednostajnie najmocniejszym względem zbioru ω nazywamy taki test najmocniejszy dla hipotezy zerowej $H_0 : \theta = \theta_0$, który jest identyczny dla wszystkich możliwych prostych hipotez alternatywnych θ ze zbioru ω.

UWAGA: Test jednostajnie najmocniejszy nie zawsze istnieje.

Przykład 2

W przykładzie pierwszym zbudowaliśmy test najmocniejszy dla hipotezy $H_0 : m = m_0$, wobec prostej hipotezy alternatywnej $H_1 : m = m_1$ i otrzymaliśmy, że otrzymany obszar krytyczny jest niezależny od hipotezy alternatywnej, jeśli tylko $m_1 < m_0$.

Zatem otrzymany test jest testem jednostajnie najmocniejszym dla hipotezy $H_0 : m = m_0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : m \in \omega$, gdzie zbiór ω jest wyznaczony przez relację $m_1 < m_0$.

8. Obciążoność testu

Załóżmy, że rozważamy populację generalną o funkcji gęstości $f(x;\theta)$

Weryfikujemy prostą hipotezę zerową $H_0:\theta=\theta_0$, wobec złożonej hipotezy alternatywnej $H_1:\theta\neq\theta_0$. Załóżmy ponadto, że został zbudowany jakiś test z obszarem odrzucenia *w*.

Mówimy, że ten test jest **obciążony**, jeśli istnieje taka wartość parametru θ_1, $\theta_1\neq\theta_0$, dla której zachodzi następująca nierówność

$$P(W_n\in w\,|\,\theta=\theta_1)<P(W_n\in w\,|\,\theta=\theta_0)$$

9. Funkcja mocy testu

Funkcja mocy testu opartego na obszarze odrzucenia *w*

Weryfikując prostą hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0$ wobec złożonej hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta \in \omega$ można dla każdego $\theta_1 \in \omega$ wyznaczyć moc rozpatrywanego testu:

$$M(\theta_1) = P(W_n \in w \mid \theta = \theta_1)$$

<u>UWAGA</u>: Jeśli zbiór wartości, na których określona jest funkcja mocy rozszerzymy na punkt $\theta = \theta_0$, to otrzymamy

$$P(W_n \in w \mid \theta = \theta_1) = \alpha$$

10. Test ilorazu wiarygodności

Test ilorazu wiarygodności stosujemy głównie w przypadku sprawdzania hipotez złożonych, jak również hipotez prostych, gdy nie istnieje test nieobciążony jednostajnie najmocniejszy.

Rozważamy populację generalną o rozkładzie zadanym funkcją gęstości $f(x;\theta)$. Na podstawie n – elementowej próby pobranej z tej populacji chcemy zweryfikować hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta \in \omega$, gdzie ω jest zbiorem możliwych alternatywnych wartości parametru θ .

10. Test ilorazu wiarygodności

Określmy funkcję wiarygodności

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej $H_0 : \theta = \theta_0$, mamy

$$L(\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)$$

Estymatorem MNW parametru θ będzie taka wartość $\hat{\theta}$ parametru θ, dla której

$$\max_{\theta \in \Omega} L(\theta) = L(\hat{\theta}),$$

gdzie Ω oznacza zbiór wszystkich możliwych wartości parametru θ.

10. Test ilorazu wiarygodności

Niech

$$\lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})} = \frac{L(\theta_0)}{\max\limits_{\theta \in \Omega} L(\theta)}$$

Ponieważ λ jest funkcją próby losowej $X_1, \ldots, X_n$, to jest zmienną losową. Zatem jako obszar odrzucenia hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta \in \omega$ przyjmujemy obszar zadany nierównością $\lambda \leq k$.

Przy przyjętym prawdopodobieństwie błędu I rodzaju *α*, stałą *k* wyznaczamy tak, aby spełniony był warunek

$$P(\lambda \leq k \mid H_0) = \alpha$$

Przykład 3

Z populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ pobrano n - elementową próbę, w celu sprawdzenia hipotezy $H_0 : m = m_0$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : m = m_1, -\infty < m_1 < +\infty$. Zakładamy, że σ jest znane.

Wówczas funkcja wiarygodności dana jest wzorem

$$L(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_1 - m)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_n - m)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \right),$$

$$-\infty < m < +\infty \ .$$

Przykład 3

Przy założeniu, że hipoteza $H_0 : m = m_0$ jest prawdziwa:

$$L(m_0) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2\right)$$

$$== \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \frac{1}{2\sigma^2}n(\bar{x} - m_0)^2\right]$$

Estymatorem MNW parametru m jest $\hat{m} = \bar{x}$, zatem

$$L(\hat{m}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

Przykład 3

Wyznaczmy

$$\lambda = \frac{L(m_0)}{L(\hat{m})} = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 - \frac{1}{2\sigma^2}n(\bar{x}-m_0)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-m_0)^2\right]$$

Obszar odrzucenia H_0 wobec H_1 określony jest nierównością $\lambda \leq k$.

Stąd

$$\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-m_0)^2\right] \leq k$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-m_0)^2 \leq \ln k$$

$$\left(\frac{\bar{x}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \geq -2\ln k$$

Przykład 3

Jeśli przyjmiemy $-2\ln k = K^2(k)$, to otrzymujemy obszar odrzucenia

$$\left|\frac{\bar{x}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq K$$

Przy założeniu, że hipoteza $H_0 : m = m_0$ jest prawdziwa zmienna

$\dfrac{\bar{X}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ma rozkład $N(0,1)$.

Stąd z tablic rozkładu normalnego $N(0,1)$ odczytujemy liczbę *K* taką, że

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq K\right) = \alpha$$

10. Test ilorazu wiarygodności

W przypadku dużych prób, gdy znalezienie dokładnego rozkładu zmiennej λ jest trudne, korzystamy z tego, ze zmienna losowa $-2\ln\lambda$ ma asymptotyczny rozkład chi – kwadrat z jednym stopniem swobody.

Wówczas obszar odrzucenia wyznaczony jest następującą nierównością

$$-2\ln\lambda > \chi^2_\alpha,$$

gdzie χ^2_α jest tak dobrane, aby przy ustalonym prawdopodobieństwie błędu I rodzaju α, zachodziła relacja

$$P\left(-2\ln\lambda > \chi^2_\alpha\right) = \alpha\ .$$

10. Test ilorazu wiarygodności

UWAGA: Jeśli przez *w* oznaczymy obszar wyznaczony przez punkty przestrzeni próby, dla których $-2\ln\lambda > \chi^2_\alpha$, przy czym $P\left(-2\ln\lambda > \chi^2_\alpha\right) = \alpha$, to dla punktu W_n w n – elementowej przestrzeni próby mamy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n \in w \mid H_1\right) = 1$$

Zatem tak zbudowane testy są zgodne, tzn. ich moc dąży do jedności.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!